

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
LABORATÓRIO DE SISTEMAS MECÂNICOS

ÍCARO DE ÂNGELIS LOPES

ESTUDO E VALIDAÇÃO DE MODELOS DE MALHA METÁLICA PARA FINS DE  
SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE EQUIPAMENTOS DE CLASSIFICAÇÃO E  
SEPARAÇÃO MECÂNICA DE MATERIAIS PARTICULADOS SÓLIDOS

UBERLÂNDIA

2022

ÍCARO DE ÂNGELIS LOPES

ESTUDO E VALIDAÇÃO DE MODELOS DE MALHA METÁLICA PARA FINS DE  
SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE EQUIPAMENTOS DE CLASSIFICAÇÃO E  
SEPARAÇÃO MECÂNICA DE MATERIAIS PARTICULADOS SÓLIDOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Linha de Pesquisa: Dinâmica de Sistemas Mecânicos.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Paulo Léopore Neto.

UBERLÂNDIA

2022

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFUcom  
dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

L864 2022	<p>Lopes, Ícaro de Ângelis, 1995- Estudo e Validação de Modelos de Malha Metálica para fins de Simulação Computacional de Equipamentos de Classificação e Separação Mecânica de Materiais Particulados Sólidos [recurso eletrônico] / Ícaro de Ângelis Lopes. - 2022.</p> <p>Orientador: Francisco Paulo Lépore Neto. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Modo de acesso: Internet. Disponível em: <a href="http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.465">http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.465</a> Inclui bibliografia. Inclui ilustrações.</p> <p>1. Engenharia mecânica. I. Lépore Neto, Francisco Paulo ,1949-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 621</p>
--------------	--

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:  
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091  
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



## UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
Telefone: (34) 3239-4282 - www.posmecanicaufu.com.br - secposmec@mecanica.ufu.br



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico nº 621, PPGEM				
Data:	29/08/2022	Hora de início:	10:00h	Hora de encerramento:	00:00h
Matrícula do Discente:	12012EMC010				
Nome do Discente:	Ícaro de Ângelis Lopes				
Título do Trabalho:	Estudo e Validação de Modelos de Malha Metálica para fins de Simulação Computacional de Equipamentos de Classificação e Separação Mecânica de Materiais Particulados Sólidos				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se sala de defesa 1M206 - Bloco 1M, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Roberto Mendes Finzi Neto - FEMEC/UFU; Israel Jorge Cárdenas Nuñez - UFTM e Marcelo Braga dos Santos - FEMEC/UFU .

Iniciando os trabalhos o(a) presidente da mesa, Dr(a). Marcelo Braga dos Santos, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato(a), agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Braga dos Santos, Professor(a) do Magistério Superior**, em 29/08/2022, às 12:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Roberto Mendes Finzi Neto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 29/08/2022, às 12:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Israel Jorge Cardenas Nunez, Usuário Externo**, em 29/08/2022, às 12:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3860639** e o código CRC **E670F6FD**.

---

*Dedico,*  
*A meus pais, Ruth e Dário.*  
*Meu irmão, Yale.*  
*Minha companheira, Ingrid.*  
*A memória do Prof. Lépore.*

## **AGRADECIMENTOS**

Não existe outra maneira de iniciar estes agradecimentos a não ser por menções de carinho à minha família. Novamente, nos momentos de incertezas e dificuldades, deles nunca faltou compressão, apoio e carinho, como sempre tem sido e, acredito, sempre será. Especialmente, agradeço à minha mãe, Ruth, pelos incentivos, meu pai, Dário, pela compreensão e ao meu irmão, Yale, pela presença serena e reconfortante de sempre. Agradeço, também, à minha companheira de vida, Ingrid, que sonha junto comigo.

À Cinética Sistemas LTDA., eu agradeço na forma de seu diretor, Felipe, e de meus companheiros e amigos de trabalho - em especial, Richard - pelo apoio contínuo, não só financeiro como intelectual, e pela confiança na minha visão e capacidade, durante esses anos. Preciso dizer que tais demonstrações de apoio foram essenciais e tranquilizadoras.

À Universidade Federal de Uberlândia, eu agradeço na forma de meu orientador, prof. Léopore, pela paciência dedicada sempre que estivemos juntos e pelo compartilhamento de sua invejável experiência no ramo. Nesse sentido, agradeço ao destino imensamente pela oportunidade de ter partilhado esses momentos de aprendizado e mentoria com esse mestre inigualável. Agradeço, também, o corpo técnico da universidade, que me auxiliou ao longo dessa jornada que finda.

## RESUMO

A classificação e separação mecânica são atividades presentes em diversos ramos industriais: muito presente na indústria de mineração, de fertilizantes e, até mesmo, farmacêutica e alimentícia. Parte integrante do processo de separação mecânica é a malha, normalmente metálica, utilizada como meio de gradação das partículas; mas não só: é, em muitos sentidos, o dispositivo central de todos os aspectos que envolvem a separação mecânica. Faz-se, assim, necessário aprofundar os estudos de suas características, em especial, aquelas voltadas para seu comportamento dinâmico. O trabalho proposto caminha nessa direção, revisando os modelos disponíveis em literatura específica - muito frutífero nessa demanda é o ramo de estudos de materiais têxteis em impactos balísticos, por tratar de materiais compostos por elementos entrelaçados, como o são as malhas utilizadas na separação mecânica. O trabalho não só revisa a teoria, mas também propõe a utilização de modelo conveniente - nesse caso, um modelo equivalente contínuo, homogeneizado, com características ortotrópicas. Para tal fim, bancadas e métodos experimentais foram desenvolvidos, bem como as ferramentas computacionais necessárias para análise: visando a aplicação em indústria, todas as ferramentas foram desenvolvidas em softwares *open-source* ou de baixo custo. Cita-se, como exemplo, o laboratório matricial livre GNU Octave<sup>®</sup> e o software de elementos finitos, de custo inexpressivo, Mecway<sup>®</sup>. Nesse sentido, o estudo realizado consiste na obtenção das propriedades físicas equivalentes - módulos de elasticidade, cisalhamento e coeficiente de Poisson - que levariam o modelo a comportar-se de maneira semelhante ao objeto físico real. A metodologia proposta para obtenção das propriedades mecânicas do modelo consiste num procedimento de minimização - utilizando o otimizador heurístico *particle-swarm optimization* (PSO) - da diferença entre as resposta dinâmica experimental e modelada, através de suas características modais: frequência natural, modos de vibrar e fator de amortecimento. Todos esses aspectos estão englobados na chamada análise modal analítica e experimental. Dessa forma, a obtenção das propriedades mecânicas do sistema é de cunho dinâmico, diferentemente do usual cunho estático. Para analisar a eficácia da metodologia de extração das propriedades mecânicas, um procedimento de validação computacional foi elaborado e mostrou-se bem-sucedido: a metodologia é capaz de ajustar a resposta dinâmica do sistema à referência utilizada e, dessa forma, obter as propriedades mecânicas. Ao final, o estudo experimental das malhas metálicas é apresentado, no qual fica claro a complexidade do comportamento da malha metálica e, por isso, certa inadequação de alguns aspectos da metodologia experimental e de



análise. Esse fato não é impeditivo, contudo, para afirmar, baseado nos resultados, que o modelo contínuo homogeneizado, de características ortotrópicas, de fato é capaz de sintetizar parte das características de uma complexa malha de fios metálicos entrelaçados.

**Palavras-chave:** Separação Mecânica. Malha Metálica. Modelo Contínuo Homogeneizado Ortotrópico. Análise Modal. Otimização. PSO. GNU Octave<sup>®</sup>. Mecway<sup>®</sup>.

## ABSTRACT

Mechanical classification and separation are an ever-present activity in a myriad of industries: very much present in mining and fertilizer industries, as well as in pharmaceutical and food production and processing ones. Integral part of the mechanical separation process is the woven screen, usually metallic, utilized as a mean of particle gradation; however, there's more: the screen is, in many ways, the central piece of every aspect involved in mechanical separation. Therefore, it is necessary to dive deeper into its characteristics, especially the ones related to its dynamic behavior. The proposed research goes in that direction, revising available models in certain specific areas - very prolific in this topic is the ballistic field of study with regards to textile woven materials, as are the ones utilized in mechanical separation. The work is not limited to revising the theory, but it also proposes the implementation of a convenient model - in this case, a homogenized continuous one, with orthotropic characteristics. To that end, benchwork and experimental methodologies are developed, as well as the necessary computational tools for the analysis: in view of the application of those methods in the industry, all tools were developed in open-source or low-cost software. As an example, it was used the open-source matrix laboratory GNU Octave<sup>®</sup> and the low-cost finite elements software Mecway<sup>®</sup>. In that sense, the study performed consist of obtaining the equivalent physical properties - elasticity and shear modulus, and Poisson coefficient - that would bring the model to behave in a similar manner to the real object. The proposed methodology for acquiring the model's mechanical properties can be summarized to a minimization problem - utilizing the particle-swarm optimization heuristics optimizer (PSO) - between the difference of the experimental and modeled dynamic response, through its modal properties: natural frequency, mode shapes and damping factor. All those aspects are contained in what is called analytical and experimental modal analysis. In that regard, it is a dynamic way of obtaining the mechanical properties of the system, which differs from the usual static one. To analyze the mechanical property extraction methodology efficacy, a computational validation procedure was elaborated and has shown to be a success: the methodology can adjust the system's dynamical response to the reference used and obtain the mechanical properties sought. At the end of the study, a review of the experimental responses of the screen is provided, in which its complex behavior is made clear, and, because of that, certain aspects of the experimental methodologies used, and analysis made, are lacking. That, however, it is not an impediment to the conclusion, based on the results obtained, that the orthotropic homogenized continuous model can synthesize part of the complex characteristics of a metallic woven screen.

**Keywords:** Mechanical Separation. Woven Metallic Screen. Orthotropic Homogenized Continuous Model. Modal Analysis. Optimization. PSO. GNU Octave<sup>®</sup>. Mecway<sup>®</sup>.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Peneira inclinada de alta frequência J&H, modelo III, 5 x 5 pés, de simples deck. ....	25
Figura 1.2 – Detalhamento da estrutura interna de apoio, tensionamento e transmissão de movimento para malha metálica. ....	25
Figura 2.1 - Deslocamento dos pontos $P$ e $Q$ , numa malha de treliças. ....	37
Figura 2.2 - Ilustração do efeito <i>Crimp-interchange</i> . ....	39
Figura 4.1 - Diagrama de Bode (a) e Nyquist (b) da mobilidade de um sistema de um GDL. ....	51
Figura 4.2 - Diagrama de Nyquist da mobilidade de um sistema de um GDL, ilustrado por pontos. ....	51
Figura 4.3 - Contribuição individual de modos, num intervalo de interesse. ....	53
Figura 5.1 - Trama metálica tipo Harpa. ....	57
Figura 5.2 - Bancada de testes malha metálica. ....	57
Figura 5.3 - Esquema de instrumentos e metodologia de aquisição de dados experimental. ....	59
Figura 5.6 - Modelos de tela 1 e 2 com seus respectivos pontos de coletas de dados. ....	62
Figura 5.7 - Fluxograma da construção das FRF's experimentais. ....	63
Figura 5.8 - Fluxograma da extração das propriedades modais através das FRF's experimentais. ....	64
Figura 5.9 - (a) Modelo de elementos finitos de placa ortotrópica equivalente; (b) orientação do sistema coordenado dos elementos. ....	66
Figura 5.10 - Fluxograma da rotina de otimização proposta para ajuste das propriedades mecânicas equivalentes do modelo. ....	68
Figura 6.1 - Espectros do impacto de entrada normalizados, para tela 1, tração nominal $T1$ . ....	72
Figura 6.2 - Espectros do impacto de entrada normalizados, para tela 1, tração nominal $T1$ , restrita a banda em até 130 Hz e com as linhas de decaimento. ....	72

Figura 6.3 - Espectros do impacto de entrada normalizados, para tela 1, tração nominal $T2$ , restrita a banda em até 130 Hz e com as linhas de decaimento. ....	73
Figura 6.4 - Espectros do impacto de entrada normalizados, para tela 2, tração nominal $T1$ , restrita a banda em até 130 Hz e com as linhas de decaimento. ....	73
Figura 6.5 - Espectros do impacto de entrada normalizados, para tela 2, tração nominal $T2$ , restrita a banda em até 130 Hz e com as linhas de decaimento. ....	73
Figura 6.6 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T1$ : diagrama de Bode de $H8,8$ , com coerência associada.....	74
Figura 6.7 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T1$ : diagrama de Bode de $H7,8$ , com coerência associada.....	75
Figura 6.8 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T1$ : diagrama de Bode de $H3,8$ , com coerência associada.....	75
Figura 6.9 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T1$ : diagrama de Bode de $H19,8$ , com coerência associada.....	75
Figura 6.10 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T2$ : diagrama de Bode de $H8,8$ , com coerência associada.....	76
Figura 6.11 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T2$ : diagrama de Bode de $H7,8$ , com coerência associada.....	76
Figura 6.12 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T2$ : diagrama de Bode de $H3,8$ , com coerência associada.....	77
Figura 6.13 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T2$ : diagrama de Bode de $H19,8$ , com coerência associada. ....	77
Figura 6.14 - Tela 2, ensaio com tração nominal $T1$ : diagrama de Bode de $H8,8$ , com coerência associada.....	78
Figura 6.15 - Tela 2, ensaio com tração nominal $T1$ : diagrama de Bode de $H14,8$ , com coerência associada. ....	78
Figura 6.16 - Tela 2, ensaio com tração nominal $T1$ : diagrama de Bode de $H25,8$ , com coerência associada. ....	78
Figura 6.17 - Tela 2, ensaio com tração nominal $T1$ : diagrama de Bode de $H27,8$ , com coerência associada. ....	79

Figura 6.18 - Tela 2, ensaio com tração nominal $T2$ : diagrama de Bode de $H8,8$ , com coerência associada.....	79
Figura 6.19 - Tela 2, ensaio com tração nominal $T2$ : diagrama de Bode de $H14,8$ , com coerência associada. ....	80
Figura 6.20 - Tela 2, ensaio com tração nominal $T2$ : diagrama de Bode de $H25,8$ , com coerência associada. ....	80
Figura 6.21 - Tela 2, ensaio com tração nominal $T2$ : diagrama de Bode de $H27,8$ , com coerência associada. ....	80
Figura 6.22 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T1$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada, $H3,8$ . ....	82
Figura 6.23 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T1$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada, $H7,8$ . ....	82
Figura 6.24 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T1$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada, $H8,8$ . ....	82
Figura 6.25 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T1$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada, $H19,8$ . ....	83
Figura 6.26 - Tela 1, mínima tração: 1° modo de vibrar ajustado. ....	84
Figura 6.27 - Tela 1, mínima tração: 2° modo de vibrar ajustado. ....	84
Figura 6.28 - Tela 1, mínima tração: 3° modo de vibrar ajustado. ....	84
Figura 6.29 - Tela 1, mínima tração: 4° modo de vibrar ajustado. ....	84
Figura 6.30 - Tela 1, mínima tração: 5° modo de vibrar ajustado. ....	85
Figura 6.31 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T2$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada, $H3,8$ . ....	86
Figura 6.32 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T2$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada, $H7,8$ . ....	86
Figura 6.33 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T2$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada, $H8,8$ . ....	87
Figura 6.34 - Tela 1, ensaio com tração nominal $T2$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada, $H19,8$ . ....	87

Figura 6.35 - Tela 1, máxima tração: 1° modo de vibrar ajustado. ....	88
Figura 6.36 - Tela 1, máxima tração: 2° modo de vibrar ajustado. ....	88
Figura 6.37 - Tela 1, máxima tração: 3° modo de vibrar ajustado. ....	89
Figura 6.38 - Tela 1, máxima tração: 4° modo de vibrar ajustado. ....	89
Figura 6.39 - Tela 1, máxima tração: 5° modo de vibrar ajustado. ....	89
Figura 6.40 - Tela 2, ensaio com tração nominal <i>T1</i> : Comparação entre resposta experimental e ajustada, <i>H8,8</i> . ....	90
Figura 6.41 - Tela 2, ensaio com tração nominal <i>T1</i> : Comparação entre resposta experimental e ajustada, <i>H14,8</i> . ....	91
Figura 6.42 - Tela 2, ensaio com tração nominal <i>T1</i> : Comparação entre resposta experimental e ajustada, <i>H25,8</i> . ....	91
Figura 6.43 - Tela 2, ensaio com tração nominal <i>T1</i> : Comparação entre resposta experimental e ajustada, <i>H27,8</i> . ....	91
Figura 6.44 - Tela 2, mínima tração: 1° modo de vibrar ajustado. ....	92
Figura 6.45 - Tela 2, mínima tração: 2° modo de vibrar ajustado. ....	92
Figura 6.46 - Tela 2, mínima tração: 3° modo de vibrar ajustado. ....	93
Figura 6.47 - Tela 2, mínima tração: 4° modo de vibrar ajustado. ....	93
Figura 6.48 - Tela 2, mínima tração: 5° modo de vibrar ajustado. ....	93
Figura 6.49 - Tela 2, mínima tração: 6° modo de vibrar ajustado. ....	93
Figura 6.50 - Tela 2, ensaio com tração nominal <i>T2</i> : Comparação entre resposta experimental e ajustada, <i>H8,8</i> . ....	94
Figura 6.51 - Tela 2, ensaio com tração nominal <i>T2</i> : Comparação entre resposta experimental e ajustada, <i>H14,8</i> . ....	95
Figura 6.52 - Tela 2, ensaio com tração nominal <i>T2</i> : Comparação entre resposta experimental e ajustada, <i>H25,8</i> . ....	95
Figura 6.53 - Tela 2, ensaio com tração nominal <i>T2</i> : Comparação entre resposta experimental e ajustada, <i>H27,8</i> . ....	95
Figura 6.54 - Tela 2, máxima tração: 1° modo de vibrar ajustado. ....	97
Figura 6.55 - Tela 2, máxima tração: 2° modo de vibrar ajustado. ....	97

Figura 6.56 - Tela 2, máxima tração: 3° modo de vibrar ajustado. ....	98
Figura 6.57 - Tela 2, máxima tração: 4° modo de vibrar ajustado. ....	98
Figura 6.58 - Tela 2, máxima tração: 5° modo de vibrar ajustado. ....	98
Figura 6.59 - Tela 2, máxima tração: 6° modo de vibrar ajustados.....	98
Figura 6.60 - Malha metálica modelada com elementos de viga. ....	100
Figura 6.61 - Alguns modos de vibrar do modelo de malha metálica construído com elementos de viga. ....	100
Figura 6.62 - Diagrama de comparação de frequências naturais modeladas e referência. ....	102
Figura 6.63 - Os modos de vibrar do modelo correlacionados com os modos da referência exibidos.....	103
Figura 6.64 - Diagrama de comparação de frequências naturais modeladas e referência, intervalo de busca mais restrito. ....	104
Figura 6.65 - Os modos de vibrar do modelo correlacionados com os modos da referência exibidos, obtidos com intervalo de busca mais restrito. ....	105
Figura 6.66 - Digrama de frequências do modelo versus frequências experimentais, tela 1, tração mínima. ....	107
Figura 6.67 - Modelo da tela 1, mínima tração: 1° modo de vibrar. ....	108
Figura 6.68 - Modelo da tela 1, mínima tração: 2° modo de vibrar. ....	108
Figura 6.69 - Modelo da tela 1, mínima tração: 4° modo de vibrar. ....	108
Figura 6.70 - Modelo da tela 1, mínima tração: 5° modo de vibrar. ....	108
Figura 6.71 - Modelo da tela 1, mínima tração: 3° modo de vibrar. ....	109
Figura 6.72 - Local de impacto reside em nó do 3° modo. ....	110
Figura 6.73 - Digrama de frequências do modelo versus frequências experimentais, tela 1, tração máxima.....	112
Figura B.1 - Forma e efeito da janela de força. ....	124
Figura F.1 - Especificações acelerômetro PCB 352C33. ....	149
Figura F.2 - Especificações martelo de impacto PCB 086C03. ....	150



## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Características das telas utilizadas nos experimentos. ....	61
Tabela 5.2 - Parâmetros do procedimento de aquisição. ....	62
Tabela 6.1 - Tela 1, tração mínima: frequências naturais e fatores de amortecimentos.....	83
Tabela 6.2 - Tela 1, tração máxima: frequências naturais e fatores de amortecimentos.....	88
Tabela 6.3 - Tela 2, tração mínima: frequências naturais e fatores de amortecimentos.....	92
Tabela 6.4 - Tela 2, tração máxima: frequências naturais e fatores de amortecimentos.....	97
Tabela 6.5 - Frequências naturais de malha metálica construída por elementos de viga. ....	101
Tabela 6.6 - Comparação entre frequências e modos de vibrar do modelo e da referência. ....	101
Tabela 6.7 - Propriedades mecânicas equivalentes do modelo computacional ajustado à referência de validação. ....	103
Tabela 6.8 - Comparação entre frequências e modos de vibrar do modelo e da referência. ....	104
Tabela 6.9 - Propriedades mecânicas equivalentes do modelo computacional ajustado à referência de validação, intervalo restrito em torno da resposta previamente obtida. ....	105
Tabela 6.10 - Resultados obtidos do processo de otimização da resposta da tela 1, tração mínima. ....	106
Tabela 6.11 - Propriedades mecânicas equivalentes do modelo computacional ajustadas à resposta dinâmica da tela 1, tração mínima. ....	111
Tabela 6.12 - Resultados obtidos do modelo da resposta da tela 1, tração máxima.....	111
Tabela D.1 - Intervalos de busca das propriedades mecânicas.....	132
Tabela D.2 - Parâmetros do otimizador PSO. ....	132

## LISTA DE SÍMBOLOS

### *Origem Grega*

$\alpha_0, \alpha_1$  – coeficientes de combinação, amortecimento de Rayleigh

$\beta$  – parâmetro da janela exponencial

$\delta_{ij}$  – delta de Kronecker

$\varepsilon$  – tensor de segunda ordem das deformações

$\varepsilon_{ij}$  – elemento do tensor de deformações

$\varepsilon_r$  – erro aleatório

$\varepsilon_b$  – erro sistemático

$\gamma^2$  – coerência entre os sinais

$\gamma_i, \gamma_g$  – fatores cognitivos

$\omega_r$  –  $r$ ésima frequência natural do sistema

$\eta$  – coordenda principal do sistema

$\varphi_i$  – elemento do vetor de modos normalizados pela matriz de inércia

$\sigma$  – tensor de segunda ordem das tensões

$\sigma_{ij}$  – elemento do tensor de tensões

$\theta$  – argumento de rotação dos eixos principais do plano da malha metálica

$\nu_{12}$  – coeficiente de Poisson no plano, material ortotrópico

$\zeta_r$  –  $r$ ésimo fator de amortecimento do sistema

$\Delta f$  – resolução em frequência

$\Delta t$  – resolução temporal

$\Omega$  – Frequência forçada do sistema

### *Origem Latina*

$c$  – elemento da matriz de amortecimento

$c_1, c_2$  – constantes elásticas axiais equivalentes para o conjunto de fios

$c_p$  – coeficiente de ponderação

$c_t$  – constante torcional equivalente para o conjunto de fios

$f_s$  – frequência de amostragem

$f_{max}$  – frequência máxima percebível  
 $i$  – simbolo operador complexo ou índice de soma  
 $i_1, i_2$  – direções principais do plano que contém a malha metálica  
 $k$  – elemento da matriz de rigidez  
 $l$  – elemento do vetor de esforços, em coordenadas generalizadas  
 $m$  – elemento da matriz de inércia  
 $n$  – nº de graus de liberdade do sistema  
 $n_a$  – nº de amostras  
 $n_c$  – nº de coletas  
 $p_i$  – melhor posição do indivíduo  
 $p_g$  – melhor posição do grupo  
 $q$  – coordenada generalizada do sistema  
 $r_i, r_g$  – agentes de modificação estocásticos  
 $s$  – operador de Laplace  
 $u', v'$  – deslocamento dos pontos em uma malha metálica  
 $u_i$  – elemento do vetor de modos de vibrar

$r_A$  – constante modal,  $r_{ésimo}$  modo  
 $B$  – limite da banda em frequência  
 $C$  – tensor de quarta ordem da rigidez associada  
 $C_{ijkl}$  – elemento do tensor de rigidez  
 $C_r$  – elemento da matriz de amortecimento modal  
 $D_r$  – diâmetro do círculo ajuste,  $r_{ésimo}$  modo  
 $L$  – elemento do vetor de esforços, em coordenadas principais  
 $E_1, E_2$  – módulos de elasticidade nas direções principais, material ortotrópico  
 $G_{12}$  – módulo de cisalhamento no plano, material ortotrópico  
 $G_{xx}$  – função autoespectro  
 $\hat{G}_{xx}$  – estimador da função autoespectro  
 $G_{xy}$  – função espectrocruzado  
 $\hat{G}_{xy}$  – estimador da função espectrocruzado  
 $H$  – função resposta em frequência, em coordenadas generalizadas  
 $\bar{H}$  – função resposta em frequência, em coordenadas principais  
 $\hat{H}$  – função resposta em frequência, numa banda limitada

$K_r$  – elemento da matriz de rigidez modal  
 $K_{eq}$  – rigidez equivalente dos modos exteriores à banda de análise  
 $M_{eq}$  – inércia equivalente dos modos exteriores à banda de análise  
 $M_r$  – elemento da matriz de inercial modal  
 $N_1, N_2$  – nº de fios nas direções principais  
 $P, Q$  – pontos no espaço em uma malha metálica  
 $R$  – matriz de transformação das tensões e deformações  
 $R_{xx}$  – função autocorrelação  
 $R_{xy}$  – função correlação cruzada  
 $S$  – tensor de quarta ordem da flexibilidade associada  
 $T_1, T_2$  – níveis de tração nas telas  
 $U$  – densidade de energia potencia de deformação  
 $U^*$  – energia potencial de deformação por unidade de área

### **Operadores**

[.] – Matriz dos elementos  
{.} – Vetor dos elementos  
(.), (¨) – Operadores de diferenciação no tempo  
(.)<sup>H</sup> – transposta do conjugado

### **Siglas**

DEM – discrete elements method  
FRF – função resposta em frequência  
GDL – graus de liberdade  
MAC – modal assurance criterion  
MGDL – múltiplos graus de liberdade  
NI – National Instruments  
PCB – PicoCoulomb Piezotronics  
PSO – particle swarm optimization  
UGDL – um grau de liberdade

## SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	24
1.1 SEPARAÇÃO MECÂNICA E SUA UTILIZAÇÃO NA INDÚSTRIA .....	24
1.2 MOTIVAÇÕES ECONÔMICAS.....	25
1.3 MOTIVAÇÕES CIENTÍFICAS.....	26
1.4 OBJETIVOS.....	27
1.4.1 Objetivo geral.....	27
1.4.2 Objetivos específicos.....	28
1.5 DISPOSIÇÃO DO ESTUDO .....	29
CAPÍTULO 2 - EMBASAMENTO TEÓRICO: MODELOS CONSTITUTIVOS.....	30
2.1 ESTADO DA ARTE: MODELOS DE MATERIAIS ENTRELAÇADOS .....	30
2.1.1 Considerações sobre as vertentes de modelagem.....	32
2.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS ELÁSTICOS LINEARES.....	33
2.2.1 Relações constitutivas de material ortotrópico.....	34
2.3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS EM MALHAS TRANÇADAS.....	36
CAPÍTULO 3 - UMA VISÃO SOBRE ANÁLISE MODAL.....	43
3.1 FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO .....	43
3.2 FATOR DE AMORTECIMENTO MODAL .....	45
3.3 SUPERPOSIÇÃO DE MODOS E FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA.....	46
CAPÍTULO 4 - UMA VISÃO SOBRE ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL .....	49
4.1 EXTRAÇÃO DAS PROPRIEDADES MODAIS.....	49
4.1.1 Ajuste dos Círculos ( <i>Circle-fit</i> ).....	50
4.1.2 Ajuste da FRF no domínio da frequência.....	52
4.2 FERRAMENTAS DE COMPARAÇÃO E CORRELAÇÃO.....	55
4.2.1 Comparação entre frequências naturais.....	55

4.2.2 Comparação entre modos de vibrar: <i>Modal Assurance Criterion</i> (MAC).....	55
CAPÍTULO 5 - METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS.....	57
5.1 DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA DA MALHA EM ANÁLISE E PROJETO DA BANCADA DE TESTES .....	57
5.2 MATERIAIS E MÉTODOS EXPERIMENTAIS .....	58
5.3 PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS .....	63
5.3.1 Tratamento dos dados.....	63
5.3.2 Extração das propriedades modais .....	64
5.3.3 Procedimentos de ajuste de modelo computacional .....	66
CAPÍTULO 6 - RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	71
6.1 QUALIDADE DAS AQUISIÇÕES E CONSTRUÇÃO DAS FRF'S EXPERIMENTAIS .....	71
6.2 EXTRAÇÃO DAS PROPRIEDADES MODAIS ATRAVÉS DO AJUSTE DE FRF.....	81
6.2.1 Extração das propriedades modais: tela 1 .....	81
6.2.2 Extração das propriedades modais: tela 2 .....	90
6.3 OBTENÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS DO MODELO COMPUTACIONAL ATRAVÉS DE OTIMIZAÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA.....	99
6.3.1 Validação da metodologia computacional de obtenção das características mecânicas .....	99
6.3.2 Validação do modelo homogeneizado ortotrópico através da otimização da resposta dinâmica do modelo comparado aos experimentos .....	106
CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES.....	113
7.1 PRÓXIMOS PASSOS E TRABALHOS FUTUROS .....	114
REFERÊNCIAS .....	116
APÊNDICE A - RELAÇÕES DE SIMETRIA EM MATERIAL ORTOTRÓPICO.....	120
APÊNDICE B - FERRAMENTAS DE AQUISIÇÃO E TRATAMENTO DE SINAIS .....	122

B.1 TEOREMA DE AMOSTRAGEM E FREQUÊNCIA FANTASMA ( <i>ALIASING</i> ) .....	122
B.2 VAZAMENTO E JANELAS .....	123
B.2.1 Janela de Força.....	124
B.2.2 Janela Exponencial .....	124
B.3 ESTIMADORES DA FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA .....	125
APÊNDICE C - OTIMIZAÇÃO: CONCEITO E MÉTODOS .....	128
C.1 OTIMIZAÇÃO HEURÍSTICA .....	129
C.1.1 Otimização por enxame de partículas .....	129
APÊNDICE D - TABELAS DO PROCEDIMENTO DE OTIMIZAÇÃO .....	132
APÊNDICE E1 - FRF'S EXPERIMENTAIS E AJUSTADAS: TELA 1, TRAÇÃO MÍNIMA.....	133
APÊNDICE E2 - FRF'S EXPERIMENTAIS E AJUSTADAS: TELA 1, TRAÇÃO MÁXIMA .....	137
APÊNDICE E3 - FRF'S EXPERIMENTAIS E AJUSTADAS: TELA 2, TRAÇÃO MÍNIMA.....	141
APÊNDICE E4 - FRF'S EXPERIMENTAIS E AJUSTADAS: TELA 2, TRAÇÃO MÁXIMA .....	145
ANEXO F - ESPECIFICAÇÕES INSTRUMENTOS DE AQUISIÇÃO PCB .....	149

## CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

Essa seção introdutória do trabalho é dividida em três subseções de contextualização, uma subseção que contém os objetivos do trabalho e uma disposição dos tópicos abordados. A primeira subseção contém uma contextualização geral do processo de separação mecânica de particulados sólidos e sua ampla utilização em diversos ramos industriais, bem como explicita o envolvimento de malhas metálicas nesse processo e sua importância. As subseções 1.2 e 1.3 contém as motivações financeiras e científicas do trabalho.

### 1.1 SEPARAÇÃO MECÂNICA E SUA UTILIZAÇÃO NA INDÚSTRIA

A separação mecânica é um ramo das operações unitárias destinada a realizar a separação/classificação de misturas heterogêneas. Dentre o rol de aplicações, destaca-se a separação de mistura de particulados sólidos, através da diferença relativa da dimensão e formato das partículas: processo conhecido por peneiramento. Diversos são os equipamentos existentes e utilizados na indústria: peneiras estacionárias ou *grizzlies*; giratórias; vibratórias de baixa e alta frequência; centrífugas; rotativas ou *trommels* etc. (McCABE et al., 1993).

A tecnologia de peneiramento é amplamente utilizada nas indústrias extrativistas, como de mineração e fertilizantes, bem como em indústrias alimentícias e farmacêuticas (DONG et al, 2013). A indústria de fertilizantes é de especial interesse uma vez que a empresa parceira do projeto, Cinética Sistemas LTDA., desenvolve e fornece equipamentos utilizados no processamento de fertilizantes minerais (inorgânicos). Dentre os equipamentos disponíveis, a peneira de alta frequência inclinada, para fins de separação mecânica sólido-sólido, é amplamente utilizada nas plantas de granulação do fertilizante e mistura dos macros e micronutrientes para finalização do produto (YARA, 2018), por exemplo.

Um exemplar de peneira inclinada de alta frequência (50 a 60 Hz), despida de coberturas, flanges e chutes, contida no catálogo de equipamentos da empresa, está ilustrada na figura 1.1. O equipamento em questão configura-se numa peneira J&H, modelo III, 5 x 5 pés, de simples deck, sendo a unidade mais simples fornecida para os fins descritos. Essa unidade, mais especificamente a parte interna diretamente relacionada com o processo de separação - estrutura de apoio, tensionamento e transmissão de movimento para a malha metálica - será utilizada como modelo base (em escala) para exploração do tema proposto - vide figura 1.2.



Necessário destacar, afinal, a importância da malha metálica, figura 1.2, objeto central da pesquisa, no processo de separação mecânica já exposto: em todos os equipamentos mencionados é a malha metálica a responsável pela correta classificação/separação do material particulado em processo, bem como, mais especificamente na peneira vibratória inclinada, é responsável por receber a vibração imposta por atuadores e fornecer, por sua vez, tal movimentação ao material em processamento. Em suma, a malha metálica é o centro de ação de todo processo de separação mecânica por diferença relativa de tamanho e forma.

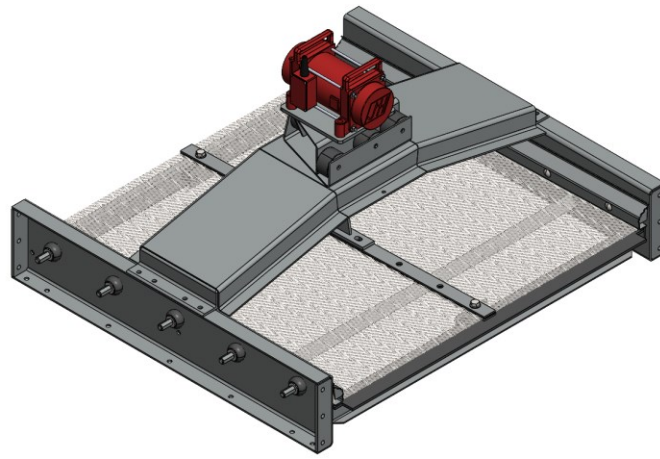


Figura 1.1 – Peneira inclinada de alta frequência J&H, modelo III, 5 x 5 pés, de simples deck.

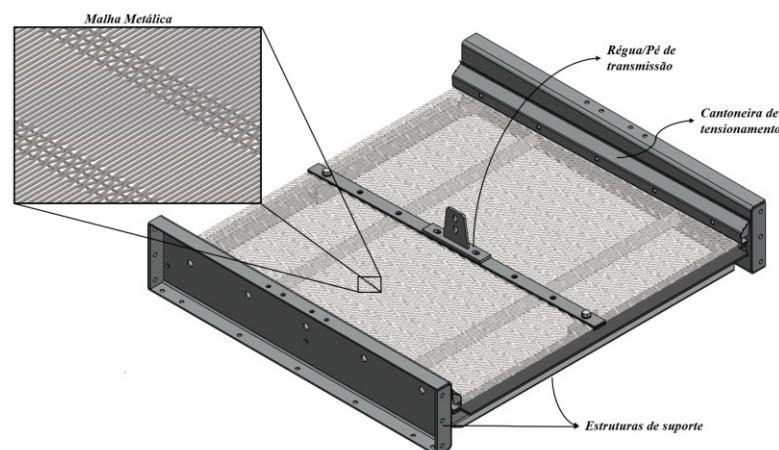


Figura 1.2 – Detalhamento da estrutura interna de apoio, tensionamento e transmissão de movimento para malha metálica.

## 1.2 MOTIVAÇÕES ECONÔMICAS

A agricultura brasileira é sabidamente um dos carros chefes da economia do país. Para ilustrar tal fato, a balança comercial brasileira registrou superávit, no ano de 2020, de aproximadamente US\$ 87 bilhões, recorde anual da série histórica desde 1996. Somente no mês

de maio de 2021 arrecadou US\$ 3 bilhões a mais que o mesmo mês do ano de 2020 (ano de superávit recorde) (MAPA, 2021). Importante notar que todo esse cenário de balança comercial positiva ocorre no contexto da maior crise sanitária dos últimos anos, devido ao Corona vírus (SARS-CoV-2), tornando-se ainda mais importante para a conjuntura econômica nacional.

Nesse contexto da agropecuária forte, o mercado de fertilizantes é, também, um mercado significativo, buscando suprir as necessidades do agronegócio: o Brasil é a quarta nação consumidora de nutrientes agrícolas (IFASTAT, 2018). Apesar do alto consumo de adubo, o país importa majoritariamente os produtos consumidos: somente em 2018, a importação representou 77 % da origem de todo o consumo interno de fertilizantes minerais (NPK) (ANDA, 2019). Essa alta dependência de importação pode ser nociva para o agronegócio brasileiro, uma vez que condiciona a indústria a fatores externos como disponibilidade do insumo e cotação em moeda estrangeira (FARIAS, 2020). Esse fato é especialmente verdadeiro no contexto atual, devido à invasão russa do território ucraniano: a guerra elevou os custos de importação de adubo e diminuiu sua disponibilidade.

Aliando a insegurança econômica à alta dependência da importação de insumos, com previsões que sugerem que, mesmo em contexto da crise sanitária, o consumo global de fertilizantes não deve sofrer retrocesso - previsão, aliás, de aumento médio de 0.7% anual no período até 2024 - (IFA, 2020), percebe-se que existe uma vacância de produção de fertilizantes interna ao país que pode ser aproveitada pela indústria nacional para impulsionar sua produção. Um possível crescimento da indústria de fertilizantes nacional significa aumento nas aquisições de equipamentos de processamento do produto; daí a importância do investimento na aprimoração de técnicas que permitam otimizar designs de equipamentos já amplamente utilizados, incluindo aqueles relacionados ao processo de separação mecânica.

### 1.3 MOTIVAÇÕES CIENTÍFICAS

Em anos recentes, uma quantidade de trabalhos substancial sobre o tema de otimização do processo de separação mecânica, especificamente de peneiramento, foi produzida. Diferentemente das abordagens de natureza essencialmente experimental e probabilística do século XX, esses recentes trabalhos mudaram a abordagem para uma de natureza computacional, baseada no método dos elementos discretos (DEM). O trabalho pioneiro da área é atribuído a Jintang Li et al. (2003). Nesse trabalho inaugural, a dinâmica das partículas foi modelada através do DEM - que analisa a cada instante a interação entre todas as partículas do sistema e define, iterativamente, o seu estado - a malha metálica foi modelada como condição

de contorno: placa perfurada, com perfil retangular, estática. Diversos outros trabalhos na temática do trato do fluxo de materiais particulados foram desenvolvidos, contudo, destaca-se os trabalhos de Dong, et al. (2009; 2013) e Zhanfu Li (2015) que possuem foco no processo de separação, sendo uma simulação de peneira vibrada do tipo banana e as demais em peneiras inclinadas simples, respectivamente.

Todos esses trabalhos possuem a característica comum de considerar a malha metálica como condição de contorno do problema do fluxo de material particulado. Isso acarreta uma simplificação geométrica da mesma e, ainda mais pernicioso, uma ausência da característica dinâmica da malha em si: ainda que alguns trabalhos considerem a malha vibrada, apenas um movimento rígido é imposto. Esse fato elimina a influência das partículas no comportamento da malha e vice-versa, além de desconsiderar características importantes como os fenômenos de natureza ressonante, por exemplo, que são essenciais para o estudo. Dessa forma, um modelo da malha metálica que compreenda essas características dinâmicas de forma eficiente faz-se necessário: não só esse modelo poderia complementar trabalhos semelhantes aos apresentados, como serviria de base para aprimoramento do projeto de outros fatores dos maquinários, tal qual os de natureza estrutural e de eficiência da atuação imposta.

## 1.4 OBJETIVOS

Os objetivos da pesquisa/projeto são divididos entre os objetivos gerais e específicos. Os gerais estão relacionados com a utilização futura dos métodos desenvolvidos no trabalho. Já os específicos delimitam as atividades a serem desenvolvidas no trabalho posto.

### 1.4.1 Objetivo geral

O objetivo geral do estudo proposto é obter metodologia de modelagem de malha metálica, de custo computacional reduzido, para subsequente implementação em simulações computacionais de equipamentos de classificação e separação diversos, ao mesmo tempo em que capture as características dinâmicas relevantes do sistema a fim de manter boa correlação com resultados práticos/experimentais.

### 1.4.2 Objetivos específicos

No intuito de obter metodologia de modelagem conforme disposição geral, a malha metálica referência para o trabalho deve ser baseada numa réplica em escala de dispositivo de classificação e separação mecânica presente em peneiras vibratórias de alta frequência, amplamente utilizadas na indústria de fertilizantes (área de concentração da empresa parceira, conforme exposto na introdução).

Estabelecida a referência para modelagem, a abordagem do trabalho proposto deve se dividir em duas vertentes: prático/experimental e computacional.

- Vertente prático/experimental:
  - a) Construção de bancada que emule malha metálica e suas condições de contorno em escala, conforme figura 1.2;
  - b) Instrumentação da bancada para fins de obtenção de dados de testes dinâmicos. Além da instrumentação, é necessário criar dispositivo capaz de monitorar o nível de pré-tensionamento na malha para que se tenha conhecimento completo das condições de contorno do problema;
  - c) Obtenção de parâmetros característicos do sistema, através de identificação paramétrica baseada em análise modal. Para tal, uma rotina de análise de dados à luz da teoria modal e ajustada ao problema posto deve ser desenvolvida.
- Vertente computacional: construção de modelo computacional da réplica em escala através dos métodos dos elementos finitos. Preferencialmente, as rotinas e modelos computacionais devem ser feitos em softwares *open-source* ou de baixo custo.

De posse dos resultados experimentais e computacionais, um processo de validação, através de métrica conveniente, deve ser realizado para que seja determinado a(s) metodologia(s) de modelagem que atendam o objetivo geral, qual seja, modelo de malha metálica de implementação computacional viável com boa correspondência experimental.

À princípio, essas etapas descrevem o processo de modelagem e validação de um único tipo de malha metálica, a ser escolhida por conveniência. Contudo, uma vez desenvolvida a metodologia de construção e validação de modelo torna-se trivial a modelagem de outros tipos de malha.

## 1.5 DISPOSIÇÃO DO ESTUDO

O restante do trabalho desenvolvido está dividido conforme os capítulos:

- Fundamentação teórica:
  - a) Capítulo 2 - Embasamento teórico sobre os modelos de malhas metálicas, através de relações constitutivas e afins, sob égide da teoria da elasticidade;
  - b) Capítulos 3 e 4 - Apresentação de conceitos fundamentais à cerca da teoria de análise modal: analítica e experimental;
- Métodos e procedimentos:
  - a) Capítulo 5 - Apresentação das metodologias científico-experimentais, além dos projetos mecânicos desenvolvidos e procedimentos/rotinas computacionais elaboradas.
- Resultados e Discussões:
  - a) Capítulo 6 - Todos os resultados obtidos experimentalmente e tratados computacionalmente são exibidos. Providencia-se comentários embasados na teoria disposta à cerca dos resultados.
- Conclusões:
  - a) Capítulo 7 - As atividades realizadas são recapituladas, destacando-se os aspectos os procedimentos e resultados obtidos com sucesso, bem como aqueles que apresentaram oportunidades de melhorias. Por fim, em vista da síntese do trabalho exposto, os próximos passos sugeridos na forma de melhorias das atividades executadas são abordados, além de comentários sobre utilização dos modelos em trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 2 - EMBASAMENTO TEÓRICO: MODELOS CONSTITUTIVOS

Nessa seção estão contidos revisões, desenvolvimento e comentários de todos os aspectos teóricos relevantes à modelagem da malha metálica.

### 2.1 ESTADO DA ARTE: MODELOS DE MATERIAIS ENTRELAÇADOS

Materiais trançados podem ser definidos como um aglomerado de fios organizados, entrelaçados entre si, de forma regular, de tal sorte que a trama é a única restrição para o movimento relativo entre eles, ou seja, não existe nenhum tipo de ligação mecânica permanente ou semipermanente que mantenha a disposição dos fios fixa.

No caso de malhas metálicas - malha trançada com fios de algum tipo de material metálico - não existe uma quantidade significativa de trabalhos que proponham modelos que sintetizem suas características e comportamento mecânico (estático e dinâmico). Existe, contudo, uma área da ciência que é prolífica nos estudos de materiais trançados: a área têxtil. Uma revisão histórica dos modelos apresentados nesse ramo da ciência é apresentada a seguir.

Os primeiros estudos relevantes na área, que propuseram um modelo equivalente para materiais trançados datam do final da década de 1940. Os trabalhos em questão foram publicados por, primeiramente, Weissenberg (1949), e, em sequência, por Chadwick, Shorter e Weissenberg (1949). Na publicação individual de 1949, Weissenberg propõe que o material seja modelado com referência aos seus nós, chamados por ele de pontos de massa ou pontos materiais, e que esses nós sejam os pontos-pivô de elementos de treliças inextensíveis, ou seja, que esses pontos estejam restritos a se movimentarem somente no caminho permitido pela configuração da treliça. Resumidamente, o modelo proposto discretiza o material nos pontos de massa, restringindo seus movimentos dentre aqueles possibilitados por uma treliça idealizada inextensível. Os movimentos possíveis ainda são resistidos pelas características elásticas do material (suas constantes de rigidez equivalentes). Assim, o modelo trata um material contínuo por um discreto, com restrições de movimento e constantes de rigidez equivalentes. O trabalho subsequente de Chadwick, Shorter e Weissenberg apresenta aplicações práticas do modelo, em especial em tecidos. Inspirado por Weissenberg, Kilby (1963) apresentou um trabalho que supõe o material como uma malha de treliças pinadas nos nós de intersecção. Diferentemente do proposto por Weissenberg, contudo, os elementos de treliças de fato representam os fios da trama do material. Ou seja, podem se deformar axialmente e rotacionar entre si nas intersecções

entre fios. Após complementar o modelo com a introdução de um efeito similar ao efeito de Poisson, Kilby conclui que um modelo contínuo e homogêneo com características anisotrópicas – mais especificamente ortotrópico – é equivalente, dentro das premissas de pequenas deformações e análise macroscópica, ao modelo de treliça proposto inicialmente. Ou seja, um material trançado, quando idealizado por um modelo de treliças ajustado para apresentar efeito de contração transversal similar ao efeito de Poisson, pode ser modelado por um material contínuo homogêneo ortotrópico. Trabalhos recentes, final da década 2000 e início de 2010, fazem uso do modelo proposto por Kilby. Kraft et al. (2011; 2013) publicou dois trabalhos nos quais uma malha metálica trançada é modelada como uma placa fina homogênea e ortotrópica. Nesses trabalhos, as constantes elásticas do modelo ortotrópico são obtidas através do ajuste do modelo aos dados produzidos em testes uniaxiais em uma máquina universal de ensaios, variando o ângulo relativo entre a tensão aplicada e a orientação dos fios da malha. Trabalho semelhante foi realizado por Chen e Ding (2007) em um material compósito, formado por um tecido trançado revestido. Demonstrou-se que o modelo ortotrópico tem boa correlação com dados experimentais, desde que restrito ao um nível de tensão suficientemente menor que o limite de tração última do material em teste. Importante ressaltar que nesses trabalhos analisou-se apenas a resposta quase-estática do sistema, ou seja, apenas o comportamento do sistema sob ações que não induzem respostas dinâmicas, em outras palavras, submetidos a testes nos quais a resposta inercial é desprezível.

Outra corrente científica é aquela baseada na proposta de Kawabata et al. (1973), que correlaciona o comportamento macroscópico do material com uma porção que representa a menor unidade da trama, que se repete periodicamente, conhecida como célula base - célula essa que caracteriza a meso-estrutura do material. Em essência, a proposta se resume a analisar o problema sob duas óticas, simultaneamente: a deformação macroscópica do material, suposto nessa etapa contínuo, homogêneo e anisotrópico, e as relações constitutivas da célula base do material. Muitos são os autores e trabalhos recentemente publicados subsequentes às propostas de Kawabata (década de 2000 e 2010). Destaca-se o trabalho de King et al. (2005), que modificou o modelo constitutivo da célula base de Kawabata, levando em consideração efeitos mais gerais, além de propor uma correlação entre a macro e meso-estrutura através da minimização da energia potencial de deformação associado à célula; o trabalho de Parsons et al. (2013), que expandiu o modelo de King de forma a introduzir a possibilidade de escorregamento entre os fios, no ponto de intersecção – algo inédito, até então, em todos os modelos de tramas; e os trabalhos de Shakarami et al. (2007) e Grujicic et al. (2009) que apresentam versões simplificadas do modelo proposto por King, contudo utilizadas em análises

dinâmicas transientes de impacto balísticos, com a possibilidade de erosão de elementos danificados além de um limite pré-estabelecido.

A terceira, e última, vertente de modelagem de materiais entrelaçados é aquela que não busca um material contínuo e homogêneo equivalente, mas sim um modelo, ainda que simplificado, explícito dos elementos que constituem a malha trançada. O grande proponente dessa vertente é Roylance et al. (1973; 1981; 1995) que, ao estudar tecidos para fins balísticos, propôs um modelo de elementos de viga pinados na intersecção, simulando diretamente os fios. Nesses trabalhos, é mostrado que tal modelo é capaz de prever com certa acurácia a quantidade de energia retirada de um elemento propelido contra a malha, numa análise dinâmica transiente. Com a evolução do *hardware* computacional, outros autores começaram a modelar diretamente a malha em elementos finitos, não mais da forma simplificada de Roylance, mas em sua completude, como o próprio Grujicic. Contudo, a construção de modelos que representem explicitamente o contato entre fios de uma malha trançada permanece complexo e é utilizada primariamente como base comparativa ou fonte de dados para construção de modelos simplificados.

### 2.1.1 Considerações sobre as vertentes de modelagem

Algumas considerações podem ser feitas sobre as vertentes apresentadas. Primeiramente quanto à validade dos modelos: todos os modelos apresentados foram corroborados com experimentação. Contudo, essa corroboração não é geral, ou seja, possui intervalos de validade, e pode ser específica para alguma aplicação ou resultado desejado. Por exemplo, os trabalhos de Kraft e Chen mostram correspondência entre o modelo contínuo ortotrópico e dados obtidos de ensaios de tensão axial, desde que se mantenha em pequenas deformações. Já o modelo de vigas é relevante para contabilizar a retirada de energia cinética de um projétil propelido contra o tecido balístico.

Outra consideração importante é quanto à simplicidade de implementação: o modelo contínuo homogêneo ortotrópico de Kilby e modelo discreto de elementos de viga pinados de Roylance são passíveis de implementação direta em qualquer *software* de elementos finitos disponível. Já os baseados na implementação de uma célula base correlacionada com o comportamento macroscópico do sistema em análise necessita da elaboração de relações constitutivas que sejam relevantes para o problema em questão e uma subsequente implementação das mesmas em *software* com capacidade para acomodar características arbitrárias de materiais – um exemplo seria o *user material* do ABAQUS®; em essência, é



necessário construir um elemento finito novo, baseado em alguma geometria de elemento pertinente (como elementos de placa e casca, por exemplo). Vê-se, portanto, que a complexidade de implementação da vertente de célula base é altíssima, se comparado com as demais apresentadas.

Como o objetivo do trabalho é a implementação de uma modelagem simplificada para uma malha metálica trançada, os modelos mais atrativos são o contínuo ortotrópico e o modelo discreto de elementos de viga, do ponto de vista de implementação. Dentre as duas opções, o modelo discreto possui duas desvantagens: o próprio trabalho de Kilby demonstra que o modelo simplificado por elementos uniaxiais pinados não é suficiente para capturar todas as características elásticas de materiais entrelaçados; e o software de elementos finitos Mecway® - no qual a implementação é um objetivo - não é capaz de atualizar a matriz de rigidez dos elementos devido a uma pré-tensão/deformação. Esse fator é essencial para a correta resposta vibracional do sistema. Assim, justifica-se a escolha do modelo homogeneizado ortotrópico dentre as vertentes expostas.

## 2.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS ELÁSTICOS LINEARES

As relações constitutivas entre as tensões desenvolvidas em um material, com características elásticas lineares, produzidas por certas deformações podem ser modeladas através da generalização da lei de Hooke,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{ij} \quad (2.1)$$

na qual,  $\sigma$  e  $\varepsilon$  são tensores de segunda ordem e  $C$ , um tensor de quarta ordem com  $i, j, k, l$  variando de 1 a 3 – ou seja, num espaço tridimensional.

O tensor  $C$ , conhecido como tensor de rigidez, possui, em sua forma natural, 81 constantes elásticas a determinar. Contudo, devido as simetrias impostas pelos tensores tensão e deformação, pode-se mostrar que as 81 constantes são reduzíveis para 36. Possibilita-se, portanto, realizar uma contração da relação (2.1), (REDDY, 2002). Adotando, por simplicidade, a notação de Voigt-Kelvin:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

onde, os subscritos contraídos representam:  $(\cdot)_1 = (\cdot)_{11}$ ;  $(\cdot)_2 = (\cdot)_{22}$ ;  $(\cdot)_3 = (\cdot)_{33}$ ;  $(\cdot)_4 = (\cdot)_{23}$ ;  $(\cdot)_5 = (\cdot)_{13}$ ;  $(\cdot)_6 = (\cdot)_{12}$  e  $\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}$ ;  $\varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}$ ;  $\varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}$ . O sistema referencial base é um sistema retangular (cartesiano clássico).

Importante introduzir nesse momento o conceito de densidade de energia potencial de deformação, ou seja, a energia armazenada devido ao conjunto de deformações por unidade de volume, coerente com as relações constitutivas. Tal é a forma que,

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.3)$$

na qual,  $\mathbf{S}$  é o tensor flexibilidade, inverso da matriz de rigidez,  $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$ .

A introdução de uma densidade de energia potencial conforme (2.3), implica que os tensores  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{S}$  devem ser simétricos e positivo definidos, ou seja, independente do estado de tensões/deformações, desde que não nulos, o potencial sempre será positivo (CRAIG; BAUCHAU, 2009). Essa simetria reduz o número de constantes independentes em (2.2) de 36 para 21.

A formulação (2.2), levando em consideração a simetria da matriz  $\mathbf{C}$ , representa as relações constitutivas de um material elástico linear qualquer, ou seja, anisotrópico.

### 2.2.1 Relações constitutivas de material ortotrópico

As constantes de rigidez/flexibilidade das relações obtidas na seção anterior para um material genérico anisotrópico podem ser restritas ainda mais. Um exemplo disso são os materiais isotrópicos, suposição comum em materiais metálicos e poliméricos homogêneos, nos quais apenas duas constantes precisam ser estabelecidas, nominalmente o módulo de elasticidade ou módulo de Young e o coeficiente de Poisson, por exemplo.

Existem outras possibilidades de derivação de modelos de materiais, restringindo o modelo anisotrópico. Normalmente, obtém-se essas formulações especificando alguma simetria espacial/geométrica nas propriedades do material.

O caso de interesse é aquele em que o material possua propriedades elásticas com três planos de simetria mutuamente ortogonais entre si. Nesse caso, a equação (2.2) reduz para a seguinte forma,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

A justificativa para essa redução pode ser de cunho físico. Por exemplo, a simetria impõe que uma deformação axial alinhada com a normal de algum plano de simetria não possa produzir nenhum tipo de tensão de cisalhamento e, portanto, uma distorção na forma do objeto, uma vez que se perderia a simetria. Assim sendo, as componentes do tensor de rigidez que expandiriam o estado de deformação uniaxial puro em tensões de cisalhamento devem ser nulas. Esse tipo de argumento interpretativo de simetria geométrica é proposto por (CRAIG; BAUCHAU, 2009). Existe, também, uma demonstração matemática mais rigorosa. O apêndice A contém uma demonstração do procedimento.

Por fim, no caso em que as tensões em uma das direções sejam negligenciáveis,  $\sigma_3 \cong \sigma_4 \cong \sigma_5 \cong 0$ , tem-se um estado plano de tensões e as relações constitutivas podem ser reduzidas, segundo (CRAIG; BAUCHAU, 2009), para (substituindo novamente o subscrito  $(\cdot)_6$  por  $(\cdot)_{12}$ , para melhorar compreensão):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}^2 E_2/E_1} & \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12}^2 E_2/E_1} & 0 \\ \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12}^2 E_2/E_1} & \frac{E_2}{1 - \nu_{21}^2 E_2/E_1} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

E a relação inversa, dá-se por,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Da relação (2.6), tem-se, pela simetria da matriz  $\mathbf{S}$ , que,

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (2.7)$$

Dessa forma, percebe-se que, para definir mecanicamente um material ortotrópico, considerando apenas estado plano de tensão, é necessário determinar quatro constantes. São elas, os módulos de elasticidade  $E_1$  e  $E_2$ , o de cisalhamento  $G_{12}$  e o coeficiente de Poisson,  $\nu_{12}$ .

### 2.3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS EM MALHAS TRANÇADAS

A título de contextualização e justificativa do modelo de malha trançada escolhido como base para o trabalho desenvolvido, qual seja, material homogeneizado ortotrópico proposto por Kilby (1963), será apresentado os conceitos físicos e matemáticos relevantes de forma resumida.

As premissas propostas por Kilby (1963), inspiradas nos trabalhos de Chadwick e Weissenberg (1949), ditam que um material com trança regular, ou seja, fios normais entre si, pode ser modelado por um sistema de elementos de treliça, que representam os fios da malha, pivotados nos nós que unem uns aos outros. As propriedades elásticas são impostas pelas constantes elásticas dos fios individuais em extensão uniaxial e, nos nós, uma constante de torção que fornece resistência à rotação relativa entre os fios.

Nesse cenário, toda a análise se passa, à priori, nos nós, denominados pontos de massa/inércia (WEISSENBERG, 1949). Assim, para fornecer caráter geral ao conceito, imagine um sistema regular de malha qualquer, com dimensões laterais unitárias, na qual os eixos  $i_1$  e  $i_2$  estão alinhados, cada um, com uma direção paralela aos fios, conforme figura 2.1.

Nesse caso, sejam  $u'$  e  $v'$  deslocamentos do ponto  $P$  para  $P'$  e  $Q$  para  $Q'$ , medidos nos eixos coordenados  $i_1'$  e  $i_2'$ , respectivamente, obtidos através de uma rotação  $\theta$  dos eixos  $i_1$  e  $i_2$ , em torno do eixo normal a ambos.

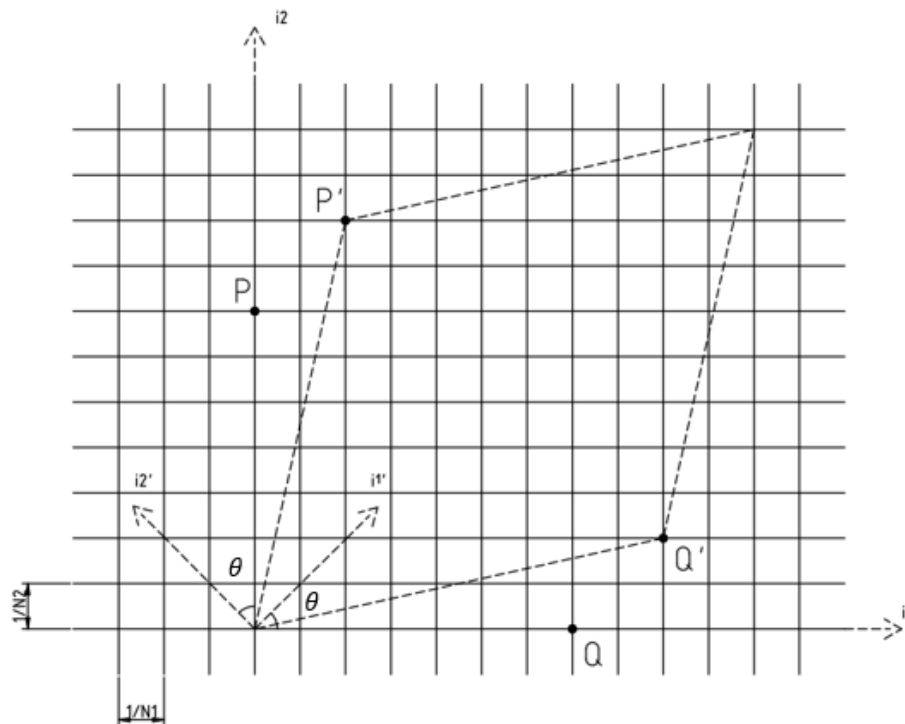


Figura 2.1 - Deslocamento dos pontos  $P$  e  $Q$ , numa malha de treliças.  
Fonte: Modificada de Kilby (1969).

A relação entre as deformações axiais e cisalhantes nos eixos  $i_1$  e  $i_2$  com os eixos  $i_1'$  e  $i_2'$ , é tal que,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1'} \cos^2 \theta + \varepsilon_{2'} \sin^2 \theta - \varepsilon_{1'2'} \sin \theta \cos \theta \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{1'} \sin^2 \theta + \varepsilon_{2'} \cos^2 \theta + \varepsilon_{1'2'} \sin \theta \cos \theta \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_{12} = 2(\varepsilon_{1'} - \varepsilon_{2'}) \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{1'2'}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (2.10)$$

Interessante notar que para obter as relações (2.8), (2.9) e (2.10) é necessário descrever os deslocamentos  $u'$  e  $v'$  como funções das deformações impostas e, também, descrever a variação de comprimento do vetor  $\overline{OP}$  para  $\overline{OP'}$  e  $\overline{OQ}$  para  $\overline{OQ'}$ . Esse processo supõe que os deslocamentos são pequenos em relação às cotas originais e, portanto, também são as deformações. Dessa forma, termos de segunda ordem foram descartados no desenvolvimento, durante as expansões binomiais realizadas, e que as funções trigonométricas de argumentos pequenos são numericamente iguais a  $\cos \varrho = 1$  e  $\sin \varrho = \tan \varrho = \varrho$ ,  $\varrho \ll 1$ .

Uma vez estabelecidas as relações entre as deformações nos eixos paralelos aos fios e um sistema coordenado em direção qualquer, é necessário estabelecer uma relação constitutiva entre deformação e tensão. Para isso, deve-se analisar a energia potencial do sistema - por unidade de comprimento dos fios.

Da figura 2.1, sabe-se que a soma do comprimento de todos os fios alinhados na direção  $i_1$  é numericamente igual ao número de fios nessa direção,  $N_1$ , quando analisando uma área unitária de material. E que o comprimento total de fios alinhados na direção  $i_2$  é numericamente igual a  $N_2$ . Supondo constantes elásticas axiais, que relacionam unidade de força axial por unidade de deformação de fio,  $c_1$  e  $c_2$  para os fios nas direções  $i_1$  e  $i_2$ , respectivamente, e uma constante elástica torcional  $c_t$ . Sabe-se, então, que a energia de deformação armazenada por unidade de área do sistema é tal que,

$$U^* = \frac{1}{2} (N_1 c_1 \varepsilon_1^2 + N_2 c_2 \varepsilon_2^2 + N_1 N_2 c_t \varepsilon_{12}^2) \quad (2.11)$$

Dá relação entre energia de deformação por unidade de volume e tensões, sabe-se que,

$$\sigma_j = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_j} = \frac{1}{t} \frac{\partial U^*}{\partial \varepsilon_j} \quad (2.12)$$

onde  $j$  representa os índices contraídos correspondentes as tensões/deformações axiais e cisalhantes; nesse caso, podendo variar entre 1, 2 e 12. E  $t$  representa a espessura homogeneizada da malha trançada.

Seja  $E_1 = N_1 c_1 / t$ ,  $E_2 = N_2 c_2 / t$  e  $G_{12} = N_1 N_2 c_t / t$ . Substituindo (2.8), (2.9) e (2.10) em (2.11) e utilizando o resultado para obter as tensões prescritas em (2.12), tem-se,

$$\begin{aligned} \sigma_{1'} = & (E_1 \cos^4 \theta + E_2 \sin^4 \theta + 4G_{12} \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \varepsilon_{1'} \\ & + (E_1 + E_2 - 4G_{12}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \varepsilon_{2'} + \{E_2 \sin^3 \theta \cos \theta \\ & - E_1 \sin \theta \cos^3 \theta + 2G_{12} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\} \varepsilon_{1'2'} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{2'} = & (E_1 + E_2 - 4G_{12}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \varepsilon_{1'} \\
& + (E_1 \sin^4 \theta + E_2 \cos^4 \theta + 4G_{12} \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \varepsilon_{2'} \\
& + \{E_2 \sin \theta \cos^3 \theta - E_1 \sin^3 \theta \cos \theta \\
& - 2G_{12} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\} \varepsilon_{1'2'}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{1'2'} = & \{E_2 \sin^3 \theta \cos \theta - E_1 \sin \theta \cos^3 \theta + 2G_{12} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\} \varepsilon_{1'} \\
& + \{E_2 \sin \theta \cos^3 \theta - E_1 \sin^3 \theta \cos \theta \\
& - 2G_{12} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\} \varepsilon_{2'} \\
& + \{(E_1 + E_2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2G_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2\} \varepsilon_{1'2'}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Caso os esforços sejam aplicados nas direções principais, paralelas aos fios ( $\theta = 0$ ), as equações reduzem para,

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 \tag{2.16}$$

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 \tag{2.17}$$

$$\sigma_{12} = G_{12} \varepsilon_{12} \tag{2.18}$$

Devido ao fenômeno de *crimp-interchange*, já mencionado e fartamente discutido nos trabalhos que compõe o estudo de malhas trançadas, existe uma dependência mútua entre as deformações axiais e transversais, ou seja, um alongamento em uma direção causa uma retração dos fios ortogonais à tensão aplicada. Esse fenômeno assemelha-se ao efeito de contração de um sólido em direções ortogonais à ação de tração uniaxial aplicada, também conhecido como efeito de Poisson. A figura 2.2 ilustra esse comportamento.

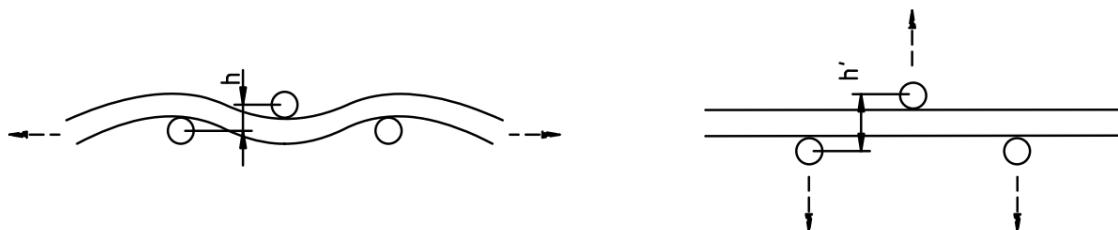


Figura 2.2 - Ilustração do efeito *Crimp-interchange*.

Na figura 2.2, percebe-se que uma extensão axial de um fio causa seu alongamento, diminuindo a sua curvatura, aproximando-o de uma configuração puramente retilínea. Isso causa um agravamento da curvatura do fio transversal ao tracionado, causando uma retração do seu comprimento líquido, na direção paralela a sua linha média. Esse efeito configura o *crimp-interchange* e é semelhante a contração transversal causada por uma extensão axial (efeito de Poisson).

Analisando, assim, as equações (2.16), (2.17) e (2.18), (KILBY, 1963) argumenta que esse efeito está ausente no modelo de treliças pinadas nas interseções e que, para obter um modelo que se aproxime do comportamento real de materiais trançados, é preciso inserir essa característica.

Resolvendo as equações (2.16), (2.17) e (2.18) para obtenção das deformações e adicionando o efeito de Poisson artificialmente, tem-se,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_2 \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} \sigma_2 - \frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_1 \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12} \quad (2.21)$$

Sabendo que as tensões se transformam, devido à uma rotação do sistema coordenado, de maneira similar as deformações, descritas em (2.8), (2.9) e (2.10), então é possível construir a matriz de flexibilidade do sistema, numa direção generalizada,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{1'} \\ \varepsilon_{2'} \\ 2\varepsilon_{1'2'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1'1'} & S_{1'2'} & S_{1'3'} \\ S_{2'1'} & S_{2'2'} & S_{2'3'} \\ S_{3'1'} & S_{3'2'} & S_{3'3'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{1'} \\ \sigma_{2'} \\ \sigma_{1'2'} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

na qual,

$$S_{1'1'} = \frac{\cos^4 \theta}{E_1} + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{E_2}$$



$$S_{2'2'} = \frac{\sin^4 \theta}{E_1} + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{21}}{E_2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\cos^4 \theta}{E_2}$$

$$S_{3'3'} = \frac{1}{G_{12}} + 4 \left( \frac{1 + \nu_{12}}{E_1} + \frac{1 + \nu_{21}}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$S_{1'2'} = \left( \frac{1 + 2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \frac{\nu_{12}}{E_1}$$

$$S_{2'1'} = \left( \frac{1 + 2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \frac{\nu_{21}}{E_2}$$

$$S_{1'3'} = S_{3'1'} = -2 \left( \frac{\cos^2 \theta}{E_1} - \frac{\sin^2 \theta}{E_2} \right) \sin \theta \cos \theta + \left( \frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Quando o sistema é rotacionado de forma a coincidir com as direções principais do material, a relação apresentada em (2.22) reduz para a que se segue - como pode ser provado, substituindo ( $\theta = 0$ ).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

que é, justamente, a relação constitutiva para um material homogêneo ortotrópico em estado plano de tensões, obtido na seção 2.2.1.

Concluída a demonstração, pode-se fazer algumas observações do processo e resultado. Primeiramente, todas as operações basearam-se em pequenas deformações, ou seja, é uma teoria essencialmente linear. Em sequência, é interessante notar que um modelo de treliça pinadas, simulando a malha trançada, não é suficiente para modelar tais materiais. É preciso associar a tal modelo um efeito similar ao efeito de Poisson, como demonstrado. Uma vez feita essa modificação, o modelo reduz, no limite, para um material homogêneo ortotrópico em estado plano de tensões.

Enfim, é preciso ressaltar que, como indicado no início da seção, toda a análise se passa nos nós que intersectam os fios. No entanto, generalizou-se o modelo para um sistema homogêneo e não um sistema discreto. Isso exige que as dimensões entre os fios sejam

suficientemente pequenas em comparação com as dimensões gerais do problema, especialmente numa análise dinâmica. Ou seja, a resolução da resposta não é capaz de reproduzir efeitos que sejam da escala da trama (meso-escala). Dessa forma, os resultados são válidos apenas em macro-escala.

## CAPÍTULO 3 - UMA VISÃO SOBRE ANÁLISE MODAL

Sistemas mecânicos podem ser caracterizados por suas propriedades físicas. São elas: inércia, rigidez e amortecimento. Sendo assim, de posse dessas propriedades e conhecimento das cargas às quais o sistema será exposto, é possível prever o comportamento do sistema. Contudo, a resolução dos problemas no espaço físico - no sentido algébrico - é complexa. Sendo assim, é particularmente interessante caracterizar o sistema através de outras três propriedades análogas em efeito - as propriedades modais - relacionadas ao espaço modal ou dito espaço de coordenadas principais. São elas: frequência natural, modo de vibrar e fator de amortecimento. Essa seção amplia o conceito de análise modal.

### 3.1 FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO

Primeiro passo para compreensão dos modos naturais de vibração é o estudo da resposta de um sistema livre de influências externas. Seja um sistema de  $n$  graus de liberdade (GDL) definido por suas matrizes de inercia  $[m]$  e rigidez  $[k]$ , tal que,

$$[m]\{\ddot{q}\} + [k]\{q\} = \{0\} \quad (3.1)$$

Pode-se definir a função temporal dos deslocamentos de um GDL  $i$ , em particular, como uma função separável no tempo e forma (MEIROVITCH, 1967), de tal maneira que,

$$q_i(t) = u_i f(t) \quad (3.2)$$

Introduzindo a equação (3.2) em (3.1), obtém-se a relação,

$$[m]\{u\}\ddot{f}(t) + [k]\{u\}f(t) = 0 \quad (3.3)$$

da qual é possível separar as variáveis espaciais das temporais, obtendo,

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = ([m]\{u\})^{-1}[k]\{u\} \quad (3.4)$$

Percebe-se da equação (3.4) que ambos os lados são funções de variáveis independentes, ou seja, o lado esquerdo varia com o tempo e o direito com a disposição espacial. Sendo assim, a equação é somente válida se for identicamente igual, para qualquer  $t$  ou GDL  $i$ , a uma constante, arbitrariamente definida como  $\omega^2$ . Então,

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad (3.5)$$

$$([k] + \omega^2 [m])\{u\} = 0 \quad (3.6)$$

Da equação diferencial (3.5), sabe-se que  $f(t)$  é harmônica, do tipo  $f(t) = \cos(\omega t - \varphi)$ . Já a equação (3.6) claramente define um problema de autovalor autovetor. Como não há interesse na solução trivial de (3.6), é preciso que,

$$|[k] + \omega^2 [m]| = 0 \quad (3.7)$$

ou seja, o determinante da relação (3.7) deve ser nulo. Isso implica que existe um polinômio de  $n$ -ésima ordem em  $\omega^2$ , chamado polinômio característico. A resolução de (3.7) fornece as  $n$  frequências naturais do sistema,  $\omega_r$ , definidas como as raízes positivas dos autovalores. Substituindo cada uma das frequências naturais em (3.6) obtém-se os  $n$  modos naturais de vibrar ou autovetores, não triviais, do sistema. As frequências naturais e modos de vibrar são os paralelos diretos das propriedades de rigidez e inércia do sistema.

Uma propriedade muito importante dos modos de vibrar é a ortogonalidade com relação às matrizes de inércia e rigidez. Além desse fator, é possível provar que os modos de vibrar formam um conjunto completo no sentido que expandem todo e qualquer vetor  $n$ -dimensional que represente uma movimentação possível do sistema, (MEIROVITCH, 1967). Isso é importantíssimo por explicitar que a resposta espacial do sistema pode ser obtida através de uma superposição dos modos de vibrar (ponderados por constantes), ou seja, uma combinação linear deles.

As relações de ortogonalidade são definidas como segue,

$$\{u^s\}^T [m] \{u^r\} = \{\delta_{sr}\} \quad (3.8)$$

$$\{u^s\}^T [k] \{u^r\} = \{\omega_r^2 \delta_{sr}\} \quad (3.9)$$

na qual  $\delta_{sr}$  representa o delta de Kronecker.

Sendo assim, com exceção do caso em que  $s = r$ , ou seja, modos de vibrar idênticos, as relações (3.8) e (3.9) são nulas. No caso de modos iguais, as relações retornam a unidade e os autovalores, respectivamente. Interessante notar que (3.8) e (3.9) pressupõe a normalização dos modos com relação a matriz de inércia. Contudo, um esquema de normalização distinto não invalida as propriedade de ortogonalidade com relação as matrizes de inércia e rigidez, apenas implicam em valores não nulos distintos dos expostos nas equações.

### 3.2 FATOR DE AMORTECIMENTO MODAL

Definidos frequência natural e modos de vibrar, resta definir fator de amortecimento para fechar a tríade que representa as propriedades modais de um sistema linear.

A equação (3.1) pode ser modificada para levar em consideração o amortecimento de um sistema, acrescentando a matriz  $[c]$  relativa a tal amortecimento, conforme,

$$[m]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [m]\{q\} = 0 \quad (3.10)$$

Imediatamente, ao analisar (3.10), questiona-se se os modos de vibrar e frequências naturais obtidos, supondo amortecimento inexistente, são válidos para expandir a reposta do sistema: no caso mais geral, a matriz  $[c]$  não é diagonalizável pela matriz dos modos normais (modos reais). Isso significa que a propriedade de ortogonalidade dos modos não é automaticamente satisfeita para o caso (3.10).

Contudo, como argumentam Craig e Kurdila (2006), a caracterização discreta de elementos de amortecimento em um sistema é complexa, beirando o impossível em casos normais, onde o amortecimento significativo é proveniente de atrito em juntas e ligações do sistema. Dessa forma, é conveniente tratar o amortecimento como uma propriedade global da resposta do sistema e não como um elemento discreto.

Nesse caso, existem algumas formas de amortecimento que são compatíveis com a suposição de existência de modos normais de vibrar, ou seja, modos obtidos a partir da resposta não amortecida. O mais conhecido é o amortecimento proporcional de Rayleigh, no qual é suposto que a matriz de amortecimento seja uma combinação linear das matrizes de inércia e

rigidez,  $[c] = \alpha_0[m] + \alpha_1[k]$ . Fica claro, pela linearidade do operador  $\{u\}$ , que a ortogonalidade dos modos é satisfeita com relação a  $[c]$ , nesse caso.

É possível demonstrar que o fator de amortecimento, para um o caso suposto proporcional, é da forma (CRAIG; KURDILA, 2006),

$$\zeta_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_0}{\omega_r} + \alpha_1 \omega_r \right) \quad (3.11)$$

Está claro que o fator de amortecimento do r-ésimo modo,  $\zeta_r$ , é uma função dos coeficientes de proporcionalidade e da frequência natural naquele modo. Isso indica que o fator de amortecimento pode ser ajustado com base em duas frequências naturais alvo e os restantes serão consequência da escolha.

Essa definição de fatores de amortecimento de todos os modos do sistema, baseado apenas em duas frequências/modos, pode ser restritiva em excesso. Assim, existe uma corrente em análise modal que simplesmente supõe a matriz de amortecimento como diagonalizável pelos modos normais e adota os fatores de amortecimento resultantes como definição do sistema. Ou seja, o analista modal pode assumir qualquer valor para os fatores de amortecimento, seja por motivos de estabilidade de modelo ou obtidos experimentalmente e, caso seja necessário a obtenção da matriz de amortecimento diagonalizável, é possível realizar o processo inverso da diagonalização através dos modos de vibrar. Esse tipo de fator de amortecimento é conhecido como fator de amortecimento modal (CRAIG; KURDILA, 2006).

### 3.3 SUPERPOSIÇÃO DE MODOS E FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

De posse da definição das propriedades modais, ortogonalidade dos modos e conhecendo o teorema de superposição dos modos, é possível reconstruir a resposta do sistema utilizando-se do espaço modal ou de coordenadas principais. Usualmente, esse processo é mais simples do que a resolução no espaço físico.

A análise modal, ou seja, análise da resposta do sistema em coordenadas principais ou modais, em essência, é um procedimento de transformação de coordenadas: utilizando a propriedade de ortogonalidade, é possível levar o sistema do espaço físico, onde, no geral, existe acoplamento entre as coordenadas, para o espaço modal, na qual as coordenadas principais são desacopladas entre si. A transformação leva a,

$$[M]_{diag}\{\ddot{\eta}\} + [C]_{diag}\{\dot{\eta}\} + [K]_{diag}\{\eta\} = \{L\} \quad (3.12)$$

onde,  $[M]_{diag}$ ,  $[C]_{diag}$  e  $[K]_{diag}$  são as matrizes de inércia, amortecimento e rigidez diagonalizadas pela matriz de modos normais  $[u]$ ;  $\{\eta\}$  é o vetor de coordenadas principais relacionado às coordenadas físicas pela transformação  $\{q\} = [u]\{\eta\}$ ;  $\{L\}$  vetor de esforços externos em coordenadas principais, relacionado às coordenadas físicas pela transformação  $\{L\} = [u]^T\{l\}$ .

Dessa forma, o que era um sistema de  $n$  equações diferenciais acopladas - portanto, com exigência de resolução simultânea -, se torna  $n$  equações diferenciais desacopladas que podem ser resolvidas individualmente. Resolvido as equações, efetua-se a transformação inversa das coordenadas modais, obtendo a resposta do sistema em coordenadas físicas.

Uma aplicação, de especial interesse, da ferramenta modal é obtenção da resposta permanente de um sistema à esforços harmônicos. Fixando análise para o  $r$ -ésimo modo normal do sistema, tem-se, em coordenadas principais,

$$\ddot{\eta}_r + 2\zeta_r\omega_r\dot{\eta}_r + \omega_r^2\eta_r = \omega_r^2\frac{L_r}{K_r}e^{i\Omega t} \quad (3.13)$$

Como o interesse é na resposta permanente do sistema, pode-se supor que sua resposta será harmônica, como a carga externa, e de mesma frequência. Sendo assim, tem-se que,

$$(\eta_r)_{perm} = \bar{H}_{\eta_r/L_r}P_r e^{i\Omega t} = \frac{1}{M_r[(\Omega^2 - \omega_r^2) + i(2\zeta_r\omega_r\Omega)]}L_r e^{i\Omega t} \quad (3.14)$$

Da equação (3.14), depreende-se que  $\bar{H}_{\eta_r/P_r}$ , a função resposta em frequência da coordenada principal  $\eta_r$  devido à  $L_r$ , é tal que,

$$\bar{H}_{\eta_r/P_r} = \frac{1}{M_r[(\Omega^2 - \omega_r^2) + i(2\zeta_r\omega_r\Omega)]} \quad (3.15)$$

Uma função resposta em frequência nada mais é, portanto, do que uma função de transferência do sistema, relacionada à resposta de alguma coordenada dado um esforço em alguma outra coordenada, avaliada no domínio da frequência e não no domínio complexo de

Laplace. Ou seja, é uma função de transferência avaliada somente na parte imaginária do domínio ( $s = i\Omega$ ).

É possível demonstrar que a função de transferência, em coordenadas físicas, é tal que (CRAIG; KURDILA, 2006),

$$H_{ij}(\Omega) = \sum_{r=1}^n \frac{u_{ir}u_{jr}}{M_r} \frac{1}{[(\Omega^2 - \omega_r^2) + i(2\zeta_r\omega_r\Omega)]} \quad (3.16)$$

na qual, os modos naturais não estão normalizados com relação à matriz de inércia. Para o caso normalizado, obtém-se (HATCH, 2001),

$$H_{ij}(\Omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_{ir}\varphi_{jr}}{[(\Omega^2 - \omega_r^2) + i(2\zeta_r\omega_r\Omega)]} \quad (3.17)$$

onde,  $[\varphi]$  representa a matriz de modos de vibrar normalizada com relação a matriz de inércia.

A importância da definição da função resposta em frequência (FRF), conforme (3.16) e (3.17), será esclarecida nas seções que tratam de análise modal experimental.



## CAPÍTULO 4 - UMA VISÃO SOBRE ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

Análise modal experimental é área que trata da obtenção dos parâmetros modais, - frequência natural, modo de vibrar e fator de amortecimento - através das correlações possíveis entre as formulações analíticas obtidas no estudo modal de um sistema mecânico com dados experimentais obtidos em testes e tratados estatisticamente conforme preconizado na teoria de análise de sinais.

### 4.1 EXTRAÇÃO DAS PROPRIEDADES MODAIS

Investigando as equações (3.16) e (3.17) percebe-se que o modelo matemático de uma FRF contém em sua definição as três propriedades modais do sistema: frequência natural, modo de vibrar e fator de amortecimento. Sendo assim, imagina-se ser possível extrair os parâmetros modais através da análise das FRF's do sistema.

Diversos são os métodos de extração de parâmetros modais. As diversas metodologias podem ser distinguidas quanto à suposição de graus de liberdade: um (UGDL) ou múltiplos graus (MGDL) - nesse contexto, análise de múltiplos graus significa a análise de vários modos do sistema paralelamente; quanto ao foco da análise: análise individual das FRF's ou de todo o conjunto de FRF's disponíveis simultaneamente (análise global); quanto ao número de sinais de entrada/referência no sistema: um ou múltiplos sinais (não implica, necessariamente, em entradas simultâneas); e, por fim, quanto ao domínio da análise: no tempo ou na frequência (AVITABILE, 2018).

Atualmente, o método de extração de propriedades modais mais utilizado é baseado no ajuste do modelo de FRF no domínio da frequência, com múltiplas referências, ajustando simultaneamente vários modos (MGDL), com foco global - todas as FRF simultaneamente. Essa metodologia é muito poderosa e extremamente complexa, já que é necessário ajustar várias curvas não lineares simultaneamente - normalmente um processo de mínimos quadrados não linear, o que implica em resolução de caráter numérico e não analítico ou num processo de linearização, à priori; além disso, a modelagem no domínio da frequência possui problemas de condicionamento devido à ordem do modelo: a depender da banda de frequência em análise, a introdução de vários modos implica num polinômio de alto grau nos polos do sistema, gerando dificuldades de caráter computacional. Ou seja, um analisador que busque implementar todas as vertentes descritas precisa prever soluções para as dificuldades inerentes. O trabalho desenvolvido por Verboven (2002) propõe um metodologia que sana grande parte das questões

levantadas e, ainda, algumas outras - de ordem estatísticas. Desse trabalho surgiu o método PolyMAX, primeiramente implementado pela LSM<sup>®</sup>, e amplamente difundido nos diversos *software* de análise modal disponíveis no mercado. As soluções propostas por Verboven não são de fácil implementação, contudo. No mais, experimentalmente, uma análise de cunho global necessita de uma quantidade de testes muitas vezes maior. Dessa forma, um analisador com essa metodologia foge ao escopo do trabalho.

A metodologia adotada no trabalho consiste num ajuste de MGDL, com análise individual das FRF's, baseado em uma única referência, no domínio da frequência. Ou seja, nada mais do que uma versão clássica de ajuste das equações do tipo (3.16) e (3.17), que formam a base para os métodos mais modernos. Como a metodologia escolhida trabalha numa vertente de MGDL, no domínio da frequência, ainda é necessário fazer o ajuste de modelos não lineares. Diferentemente dos processos de linearização propostos (VERBOVEN, 2002), é possível adotar uma resolução numérica do processo de minimização. Mas como todo procedimento de minimização numérico clássico é sensível ao conjunto solução fornecido como primeira aproximação, é necessário desenvolver ferramentas que sejam capazes de obter boas estimativas iniciais das propriedades modais, para obter convergência.

#### 4.1.1 Ajuste dos Círculos (*Circle-fit*)

Uma metodologia clássica de extração das propriedades modais é conhecida por ajuste de círculos. Esse método é do tipo UGDL, ou seja, analisa individualmente cada modo da resposta do sistema, tratando-o como se fosse proveniente de um sistema com apenas um grau de liberdade e se baseia num conceito físico muito interessante: o diagrama de Nyquist da resposta - parte real *versus* parte imaginária - forma um círculo perfeito, na cercania de uma ressonância, para algumas formas de FRF e de amortecimento suposto.

É possível demonstrar que, para um sistema com amortecimento suposto viscoso, a FRF do sistema que relaciona a velocidade de saída com o esforço de entrada - também conhecida como FRF da mobilidade do sistema (*mobility FRF*) - possui a característica de formar um círculo perfeito quando confrontado parte real *versus* a imaginária da resposta (EWINS, 2000). A figura 4.1 ilustra o diagrama de Bode da mobilidade de um sistema de um GDL qualquer, no item (a); no (b), mostra o diagrama de Nyquist do mesmo sistema. Fica claro, visualmente, que de fato a relação entre a parte real e imaginária constitui um círculo, geometricamente.

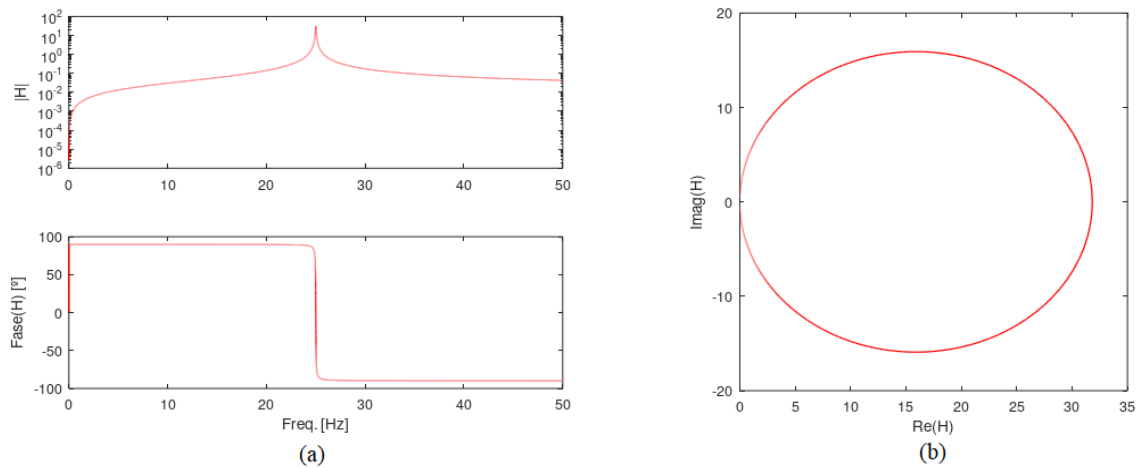


Figura 4.1 - Diagrama de Bode (a) e Nyquist (b) da mobilidade de um sistema de um GDL.

Ewins (2000) demonstra que a taxa de variação da frequência de excitação do sistema ao percorrer o círculo atinge um valor máximo, quando a excitação se iguala a frequência natural do sistema. Em outras palavras, os pontos no diagrama de Nyquist se tornam mais espaçados na proximidade da frequência natural. Esse aspecto é muito interessante pois permite determinar a frequência natural analisando a variação angular relativa entre vetores que compõem os pontos do diagrama.

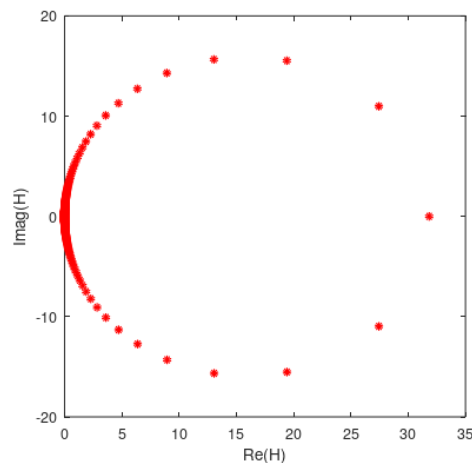


Figura 4.2 - Diagrama de Nyquist da mobilidade de um sistema de um GDL, ilustrado por pontos.

A figura 4.2 ilustra o item (b) da figura 4.2 de forma discreta (pontual) e não contínua, como já apresentado. Claramente, a variação angular dos pontos em torno do centro do círculo possui um máximo. A frequência respectiva desse máximo é numericamente igual à frequência natural do sistema.

Obtida a frequência natural, é possível demonstrar que o fator de amortecimento viscoso e constante modal podem ser obtidos através das seguintes relações (EWINS, 2000):

$$\zeta_r = \frac{\Omega_a^2 - \Omega_b^2}{2\omega_r \left( \Omega_a \tan \frac{\theta_a}{2} + \Omega_b \tan \frac{\theta_b}{2} \right)} \quad (4.1)$$

$$|{}_rA| = 4D_r\omega_r\zeta_r \quad (4.2)$$

na quais,  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$  são frequências quaisquer desde que sucedam e precedam a natural no círculo, respectivamente;  $\theta_a$  e  $\theta_b$  são os ângulos relativos de tais pontos para o vetor que indica a posição da frequência natural;  $D_r$  é o diâmetro do círculo ajustado e  ${}_rA$  é a constante modal. Para determinar a fase de  ${}_rA$ , basta analisar o ângulo relativo entre o vetor da frequência natural e o eixo real, no sentido positivo.

Toda a exposição do método de ajuste dos círculos é baseada no sistema UGDL. Contudo, para sistemas em que exista modos razoavelmente espaçados, é possível tratar cada um como se fosse a resposta de sistema de um GDL isolado. Apenas é necessário, em adição, considerar a translação do centro do círculo causada pelo efeito dos demais modos no intervalo em análise.

#### 4.1.2 Ajuste da FRF no domínio da frequência

De posse de um conjunto de dados experimentais sobre os quais é possível aplicar as técnicas de análise de sinais para construção de um conjunto de FRF's que caracterizam o sistema - supondo um sistema linear, invariante no tempo, com amortecimento viscoso - é possível ajustar o modelo definido por (3.16) e (3.17) aos dados, extraindo, assim, as propriedades modais.

Normalmente, quando se discute ajuste de um modelo de FRF no domínio da frequência, é subentendido que esse ajuste deve ser feito por bandas de frequência de interesse. Nada mais razoável, uma vez que não é possível obter, experimentalmente, o comportamento do sistema em todo o domínio (ou seja,  $\forall \Omega > 0$ ). Somente é possível obter o comportamento do sistema em um intervalo definido de frequência. Mesmo nesses casos, é comum que se tenha interesse somente em uma parte desse intervalo. Sendo assim, é preciso modificar as equações (3.16) e (3.17) para,

$$\hat{H}_{ij}(\Omega) = \sum_{r=1}^n \frac{rA_{ij}}{[(\Omega^2 - \omega_r^2) + i(2\zeta_r\omega_r\Omega)]} + \frac{1}{K_{eq}} - \frac{1}{\Omega^2 M_{eq}}, \quad \Omega_{inf} \leq \Omega \leq \Omega_{sup} \quad (4.3)$$

O equação (4.3) indica que, no intervalo de interesse, uma FRF equivalente,  $\hat{H}_{ij}$ , pode ser reconstruída levando em consideração os efeitos dos modos contidos no intervalo somados aos efeitos dos modos contidos fora do intervalo através dos efeitos de uma inércia e rigidez equivalentes,  $K_{eq}$  e  $M_{eq}$ . Essa aproximação é razoável desde que o efeito de modos fora do intervalo seja residual, ou seja, os limites do intervalo não devem estar próximos de zonas ressonantes dos modos exteriores (EWINS, 2000). A figura 4.3 contém a FRF de um sistema de três GDL. O item (a) ilustra a contribuição de cada modo individualmente, já o (b) ilustra a resultante. Percebe-se que, no intervalo delimitado pelas linhas tracejadas, o primeiro e terceiro modo contribuem também na resposta do sistema, ainda que de forma menos significativa. Fica claro a importância da inclusão das contribuições de modos exteriores ao intervalo de interesse, ainda que de forma aproximada.

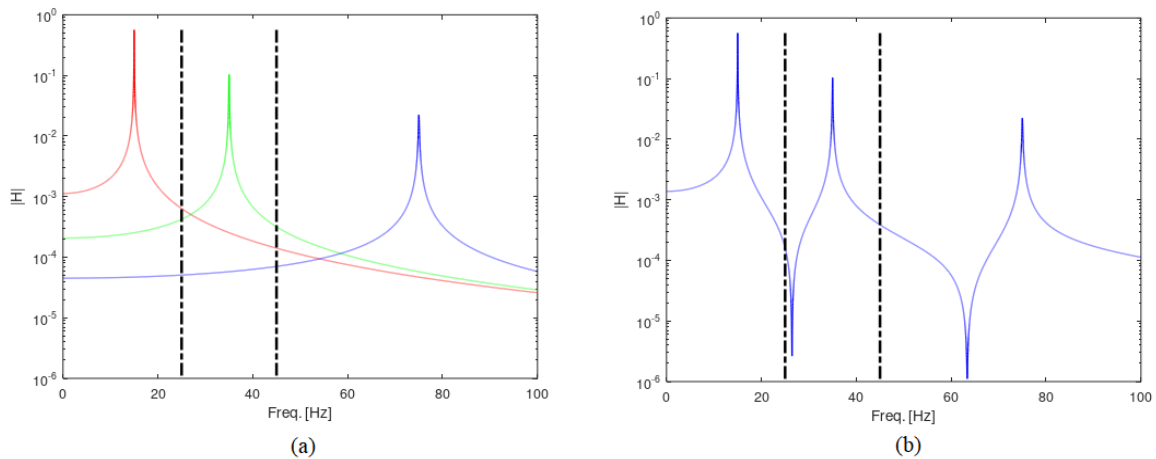


Figura 4.3 - Contribuição individual de modos, num intervalo de interesse.

Com o modelo, eq. (4.3), apropriado para o intervalo de interesse, é possível ajustá-lo aos dados experimentais, atentando-se para a necessidade de ajustar, também, os coeficientes de rigidez e inércia equivalentes introduzidos para cada FRF. Como na definição original, as FRF's descritas por (4.3) continuam sendo não lineares nas propriedades modais. Dessa maneira o processo de minimização utilizado para ajustar os parâmetros deve ser numérico, no qual a função custo é análoga ao método dos mínimos quadrados.

Por padrão, as primeiras propriedades ajustadas, simultaneamente, são as frequências naturais e os fatores de amortecimento, já que é pressuposto que sejam propriedades globais do sistema, ou sejam, não variam de uma FRF para outra (AVITABILE, 2018). Assim, basta analisar apenas uma FRF referência e ajustar as propriedades para cada modo identificado no intervalo. Por fim, ajustadas as frequências naturais e fatores de amortecimento, é preciso ajustar as constantes modais, minimizando as diferenças entre os dados experimentais e o modelo descrito em (4.3), para cada FRF experimental disponível.

Um fato curioso do procedimento de ajuste das FRF's no domínio da frequência é que não é possível ajustar os modos de vibrar diretamente, como o é para as frequências naturais e fatores de amortecimento. O processo apenas retorna as constantes modais,  ${}_r A_{ij}$ , que no caso de (4.3) nada mais são do que o produto resultante das componentes respectivas dos modos de vibrar normalizados pela matriz de inércia. Dois conceitos importantes podem ser resumidos, portanto: para a obtenção dos modos de vibrar o sistema, é preciso obter a FRF de todos os GDL que descrevem o modelo do sistema com relação a pelo menos uma referência de entrada ou saída; para síntese dos modos de vibrar, a partir das constantes modais, é preciso analisar uma FRF do tipo *drive-point*, que nada mais é do que a análise da resposta do sistema no mesmo GDL em que o esforço externo é aplicado.

Matematicamente, esses conceitos podem ser descritos da seguinte maneira: seja  $[\hat{H}](\omega)$  uma matriz quadrada,  $n$  por  $n$ , de todas as FRF's possíveis de um sistema. Então é necessário obter uma coluna,  $\{\hat{H}_{ip}\}(\omega)$ , ou uma linha inteira da matriz,  $\{\hat{H}_{qj}\}(\omega)$ , para que seja possível a síntese dos modos de vibrar do sistema. Além disso, é preciso analisar a constante modal obtida da FRF no *drive-point*. Supondo aquisição de uma coluna  $p$  da matriz  $[\hat{H}](\omega)$ ,  $\{\hat{H}_{ip}\}(\omega)$ . Na condição  $i = p$ , para o modo  $r$ , tem-se que,

$${}_r A_{pp} = \varphi_{pr} \varphi_{pr} = \varphi_{pr}^2 \quad (4.4)$$

Obtido  $\varphi_{pr}$ , é possível analisar as demais constantes modais  ${}_r A_{ip}$ , para os casos em que  $i \neq p$ , e concluir a construção do modo  $r$ . Esse processo deve ser repetido para todos os modos restantes.

Interessante ressaltar que, assim como o procedimento do *circle-fit*, o ajuste das FRF's, conforme descrito, necessita que os modos do sistema sejam bem definidos e separados. Em especial, esse procedimento não é capaz de reproduzir os efeitos de um sistema com modos de frequências naturais repetidas ou muito próximos, dada a resolução da análise.

## 4.2 FERRAMENTAS DE COMPARAÇÃO E CORRELAÇÃO

Em análise modal, diversas são as ferramentas disponíveis para comparação entre os resultados experimentais e os teóricos/analíticos. Em essência, são procedimentos que buscam quantificar a relação entre entidades ou a diferença absoluta dos resultados. Ferramentas simples, porém, amplamente utilizadas em análise modal experimental, são descritas nas seções seguintes.

### 4.2.1 Comparação entre frequências naturais

Uma ferramenta simples, mas útil, é a comparação da diferença absoluta das frequências naturais ajustadas com as obtidas em modelo. No entanto, o real valor da comparação entre as frequências não está apenas na comparação direta dos valores tabulados, mas na disposição dos resultados em diagrama: nesse caso, cada par de frequências correlatas é transformado em coordenadas de um ponto no diagrama. Dessa forma, caso as frequências estejam organizadas de maneira crescente, a dispersão dos pontos deve, no limite, se aproximar de uma linha reta, angulada em 45°. Ao analisar tal diagrama, é possível visualizar o nível de dispersão dos resultados obtidos e sua natureza: aleatória ou sistemática. Caso o conjunto de resultados obtidos possua alto nível de dispersão, é indício de modelagem incompatível com a física real; no caso de dispersão comedida em torno de uma reta angulada em relação à teórica, é sinal de erro sistemático, relacionado com alguma características específica do modelo, usualmente as propriedades supostas para o material do modelo; já para o caso de pequena dispersão, com distribuição aparentemente aleatória, é sinal de boa correlação entre o modelo e o experimento (EWINS, 2000).

### 4.2.2 Comparação entre modos de vibrar: *Modal Assurance Criterion* (MAC)

O critério de correlação modal, da sigla inglesa MAC, é justamente aquilo que a denominação indica, um índice da correlação entre os modos. Esse indicador é a ferramenta mais amplamente utilizada na comparação entre modos - não apenas entre modos experimentais e analíticos. A formulação do indicador é tal que,

$$MAC(\{\varphi_r\}, \{\varphi_s\}) = \frac{|\{\varphi_r\}^H \{\varphi_s\}|^2}{(\{\varphi_r\}^H \{\varphi_r\}) (\{\varphi_s\}^H \{\varphi_s\})} \quad (4.5)$$

na qual  $(.)^H$  representa a transposta do conjugado do modo. Essa forma geral engloba a possibilidade de utilização com modos complexos. No caso de modos reais, basta realizar a transposta.

Percebe-se que a estrutura do MAC é idêntica à estrutura da coerência entre dois sinais (anexo B). Mas esse fato é intuitivo, já que o MAC, assim como a coerência, é um indicador de correlação. Como a coerência, o MAC varia entre 0 e 1, no qual zero representa modos não correlacionados e *vice-versa*.

Uma ferramenta de comparação entre modos é imprescindível, uma vez que até mesmo a comparação entre frequências deve ser realizada em pares correspondentes ao mesmo modo. Isso se deve ao fato que mesmo sendo fisicamente possível existir duas frequências naturais repetidas e diversas próximas umas das outras, sempre é possível construir modos de vibrar que sejam ortogonais entre si, definindo assim unicamente base uma que expanda completamente o conjunto de movimentos possíveis do sistema. Nesse contexto, o MAC se apresenta com uma ferramenta confiável e de simples implementação.



## CAPÍTULO 5 - METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS

Nessa seção, estão contidas as informações concernentes aos experimentos realizados, bem como os procedimentos computacionais.

### 5.1 DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA DA MALHA EM ANÁLISE E PROJETO DA BANCADA DE TESTES

Para alcançar os objetivos traçados, modelagem e validação de uma malha metálica trançada, é preciso primeiro definir o objeto em análise: forma geométrica, características físicas e, de importância primordial, as condições de contorno.

Inspirado nas características da peneira referência, definiu-se a geometria da tela como de dimensão quadrada,  $750 \times 750 \text{ mm}$ , com trama de fios no estilo Harpa, figura 5.1, com fios presos, nas extremidades, à chapas metálicas finas dobradas, para auxílio da fixação na bancada.

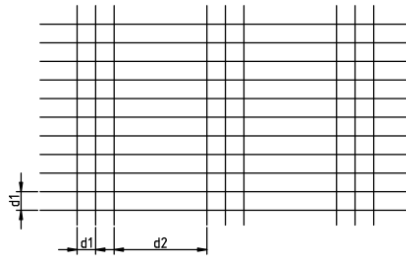


Figura 5.1 - Trama metálica tipo Harpa.

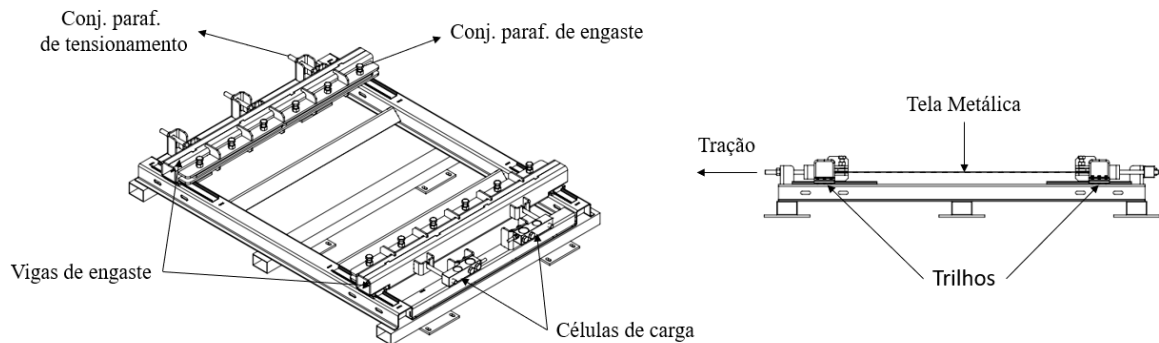


Figura 5.2 - Bancada de testes malha metálica.

Definida a geometria da tela, uma bancada para testes foi desenvolvida, conforme figura 5.2. A bancada é composta por duas vigas massivas e rígidas que são suportadas em trilhos montados na estrutura base. As vigas possuem pontos de ancoragem nos quais parafusos são

posicionados de forma a transmitir apenas esforços axiais - os conjunto de parafusos de tensionamento e de transmissão às células de carga. Além desses conjuntos de ancoragem, as vigas possuem suportes para o engaste das extremidades livres das telas metálicas, através do conjunto de parafusos de engastes. Esses parafusos não se conectam diretamente à tela, mas, sim, comprimem uma chapa distribuidora que, por sua vez, pressiona a tela contra o suporte.

Analisando a montagem final, percebe-se que a viga ligada aos parafusos de tensionamento teria liberdade de movimento, não fosse a presença da tela: no caso da aplicação de uma força de tração, o movimento seria resistido pela malha. O sistema formado por vigas, tela e célula de carga possui um arranjo de forma a garantir que a ligação entre os componentes possa ser considerada uma ligação em série, do ponto de vista mecânico. Isso significa que todos os elementos são tracionados em igual intensidade. Dessa forma, a força de tração imposta à tela é a mesma imposta às células de carga. Assim, o sensor é capaz de auxiliar na obtenção do nível de tensão aplicado à malha metálica.

## 5.2 MATERIAIS E MÉTODOS EXPERIMENTAIS

Os instrumentos na aquisição do dados experimentais estão esquematizados conforme a figura 5.3. São eles:

1. (3x) Acelerômetro piezoelétrico PCB, modelo 352 C33;
2. Martelo de impacto PCB, modelo 086 C03;
3. (2x) Células de carga de flexão IWM, modelo ICA-250kg;
4. Condicionador/amplificador de sinais PCB;
5. Chassi e placa de aquisição NI, modelos cDAQ 9171, DAQ 9234;
6. Microcomputador;
7. Condicionador de sinais célula de carga, baseado no chip Hx711;
8. Bancada de suporte e tensionamento.

Obs.: As especificações dos instrumentos PCB se encontram no anexo E. As especificações dos instrumentos da NI podem ser encontradas no site da fabricante, conforme disposto nas referências. Os microcomputadores utilizados na aquisição e simulação têm as seguintes especificações: *notebook* com processador Core I5, 5º geração, 8 Gb de memória RAM DDR4,

500 Gb de armazenamento SATA; *desktop* com processador Core I5, 12° geração, 16 Gb de memória RAM, perfil XMP, 500 Gb de armazenamento SSD, M.2 NVMe.

Como mencionado na contextualização, a banda de frequência de atuação dos equipamentos de referência é pequena, até 60 Hz. Dessa forma, a banda de frequência de utilização dos instrumentos é muito maior do que o necessário. A tabela 5.2 contém as informações da aquisição.

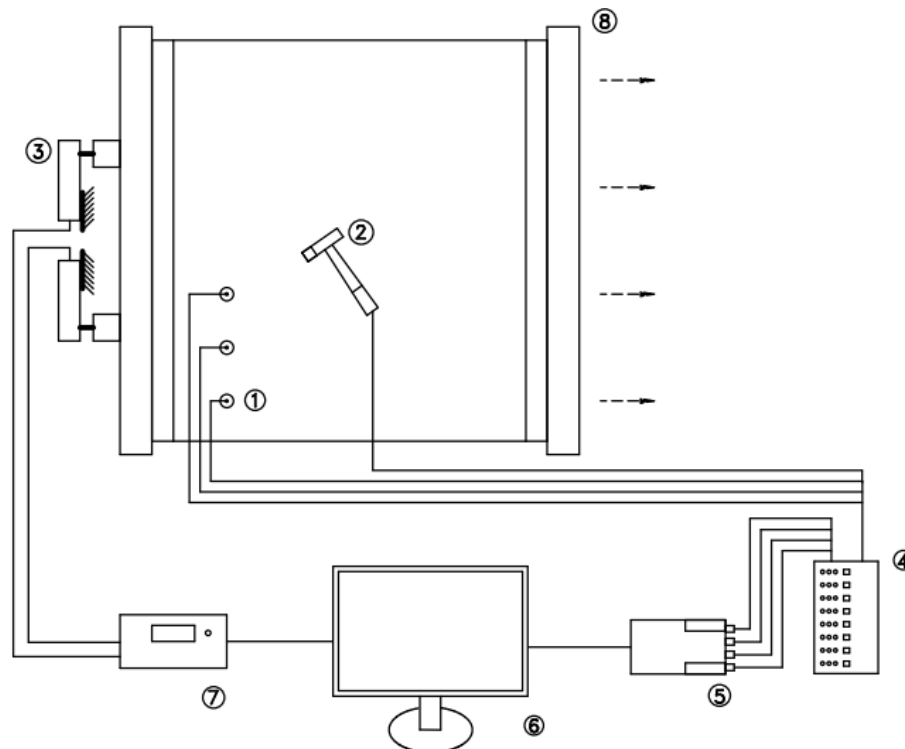


Figura 5.3 - Esquema de instrumentos e metodologia de aquisição de dados experimental.

Já o procedimento experimental, esquematizado na figura 5.3, consiste em:

- Montar a tela, garantindo aperto ideal ( $\geq 35 N.m$ ) em todos os parafusos de engaste com auxílio de um torquímetro manual Geodre, modelo 4505-L130;
- Tensionar o conjunto, mantendo os níveis de tração semelhantes em ambas as células para garantir uma tensão distribuída, até atingir o nível desejado;
- Posicionar os acelerômetros nos pontos de coleta;
- Excitar a tela com o martelo de impacto e coletar a resposta. Repetir o processo até atingir o número de amostras necessárias;
- Modificar a posição dos acelerômetros e repetir o processos de coleta em todos os pontos pré-definidos.

Fica claro que o experimento realizado mantém o local de impacto fixo, enquanto varia a posição dos acelerômetros - *hovering accelerometers*. Essa escolha foi feita para acelerar a aquisição dos dados. Assim sendo, existe um GDL nas telas que serve de referência para todas as medições.

Importante notar que durante todo o processo de aquisição é necessário monitorar o nível de tração nas células para garantir que o valor originalmente imposto não se modifique durante o ensaio. Um critério de variação máxima de 1% foi adotado, descartando-se os ensaios não conformes. As figuras 5.4 e 5.5 ilustram a bancada real utilizada nos experimentos realizados.

Dois modelos de tela, baseados no tipo harpa, foram fabricadas para a realização de experimentos. A tela 1 fabricada em fios mais finos, porém mais densamente populada. Já a tela 2, fios mais grossos, porém mais espaçados. A tabela 5.1 contém as informações relevantes, como as dimensões ilustradas na figura 5.1, espessura dos fios e densidade equivalente. A densidade equivalente foi calculada através do peso associado ao vão livre das malhas montadas na bancada, supondo o volume referência com aquele obtido pela área total da geometria multiplicado pela espessura do fio da tela. Isso significa que as vacâncias entre os fios foram levadas em consideração

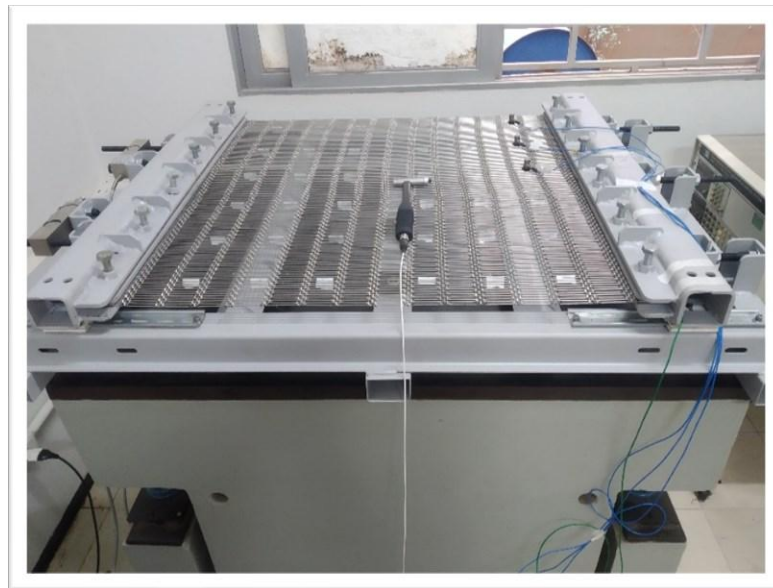


Figura 5.4 - Bancada de testes real.



Figura 5.5 - Central de aquisição.

Tabela 5.1 - Características das telas utilizadas nos experimentos.

	$d_1 [mm]$	$d_2 [mm]$	<i>Esp. Fio</i> [mm]	<i>Dens. eq.</i> $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
<i>Tela 1</i>	1,4	50	1,5	3769,5
<i>Tela 2</i>	4	30	1,75	2460,3

É possível perceber da tabela 5.1 que, mesmo possuindo fios mais finos, a tela 1 é mais densa, justamente por possuir espaçamento entre fios reduzido, se comparado com a tela 2.

A figura 5.6 ilustra os dois modelos de telas utilizados, além da disposição dos pontos de coleta dos testes (as dimensões na figura estão em [cm]). A quantidade de pontos de coleta define os GDL do sistema em análise. No caso da tela 2, 36 GDL foram definidos. Já para a tela 1, 30 GDL foram estabelecidos. A disparidade nos números é devido a diferença construtiva das telas. Os GDL estão ordenados de baixo para cima, esquerda para direita, como ilustra a figura.

No total, quatro conjuntos de coleta de dados, dos vários realizados, foram utilizados no desenvolvimento do trabalho: dois para cada tela. A tabela 5.2 contém as características do procedimento de aquisição.

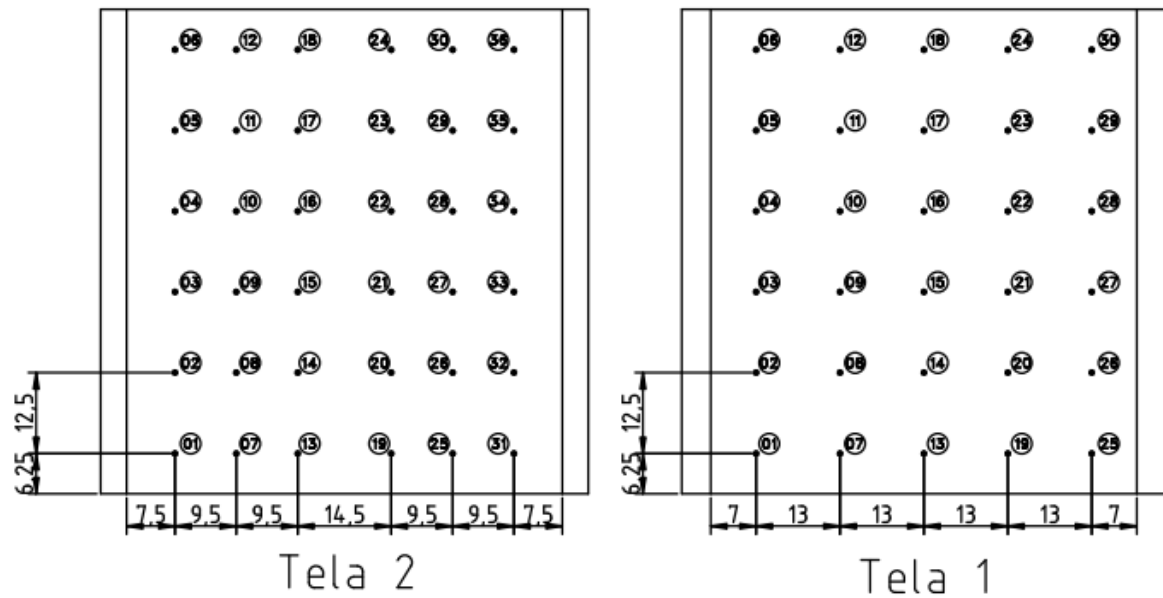


Figura 5.6 - Modelos de tela 1 e 2 com seus respectivos pontos de coletas de dados.

Tabela 5.2 - Parâmetros do procedimento de aquisição.

	$GDL_{ref}$	$\Delta f [Hz]$	$f_s [Hz]$	$f_{max} [Hz]$	$n_a$	$n_c$	$T_1 [kN]$	$T_2 [kN]$
Tela 1	8	0,1	1652	731,25	10	10	3,14	4,12
Tela 2						12		

OBS.: Uma revisão dos conceitos de aquisição e análise de sinais se encontra no apêndice B.

A frequência máxima observável,  $f_{max}$ , é menor que o teorema de Nyquist dita por motivos de hardware, devido ao *roll-off* do filtro passa-baixo. Nesse caso, 45% da banda fornece dados úteis. O parâmetro  $n_a$  é o número de amostras adquiridas em cada conjunto de coleta. O parâmetro  $GDL_{ref}$  é o grau de liberdade em que foram feitos todos os impactos. Por fim,  $T_1$  e  $T_2$  são os níveis de tração nominal impostos ao sistema - vide o percentual de 1% de desvio permitido.

Já o parâmetro  $n_c$  representa o número de coletas total realizado. O número de coletas é referente ao número de vezes em que os acelerômetros foram realocados para novas posições de aquisição. Essa rearranjo seguiu uma sequência lógica: os acelerômetros foram posicionados sempre em ordem crescente dos GDL.

### 5.3 PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS

Os procedimentos computacionais realizados no trabalho podem ser divididos em três grupos: tratamento dos dados, rotina de extração das propriedades modais e ajuste do modelo computacional.

#### 5.3.1 Tratamento dos dados

O tratamento dos dados engloba aplicação da sensibilidade dos instrumentos aos dados (levar o sinal para suas unidades físicas), janelas respectivas, construção dos espectros e, por fim, as FRF's experimentais - em essência, a aplicação da teoria exposta no apêndice B, subseções B.2 e B.3. A figura 5.7 contém o fluxograma descritivo do processo, na qual,  $\{G_{qq}\}$ ,  $G_{pp}$  e  $\{G_{qp}\}$  são os auto espectros e espectros cruzados dos sinais de aceleração  $\{\ddot{q}\}(t)$  e força externa  $p(t)$ .

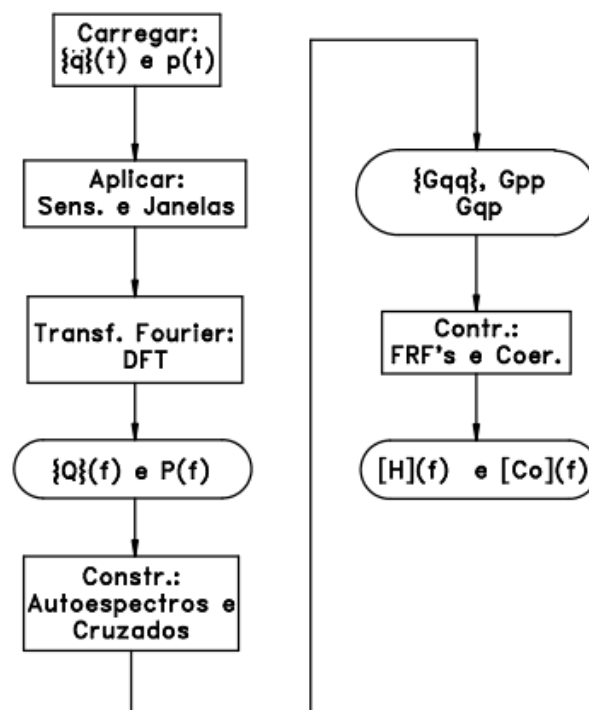


Figura 5.7 - Fluxograma da construção das FRF's experimentais.

Obs.: Nos fluxogramas desenvolvidos nesse trabalho, o retângulo significa uma operação, o losango significa comparação, seguido de tomada de decisão, um paralelogramo significa comando do usuário e o oblongo uma variável ou conjunto de variáveis.

## 5.3.2 Extração das propriedades modais

Conforme descrito na seção de análise modal experimental (seção 4), o método de extração das propriedades modais desenvolvido é baseado no ajuste das equações que descrevem as FRF's de um sistema linear, supondo sistema de UGDL, no caso o procedimento conhecido como *circle-fit*, bem como o ajuste do modelo, supondo, portanto, sistema de MGD, ainda que truncado na banda de análise, eq. (4.13). O fluxograma contido na figura 5.8 indica o procedimento.

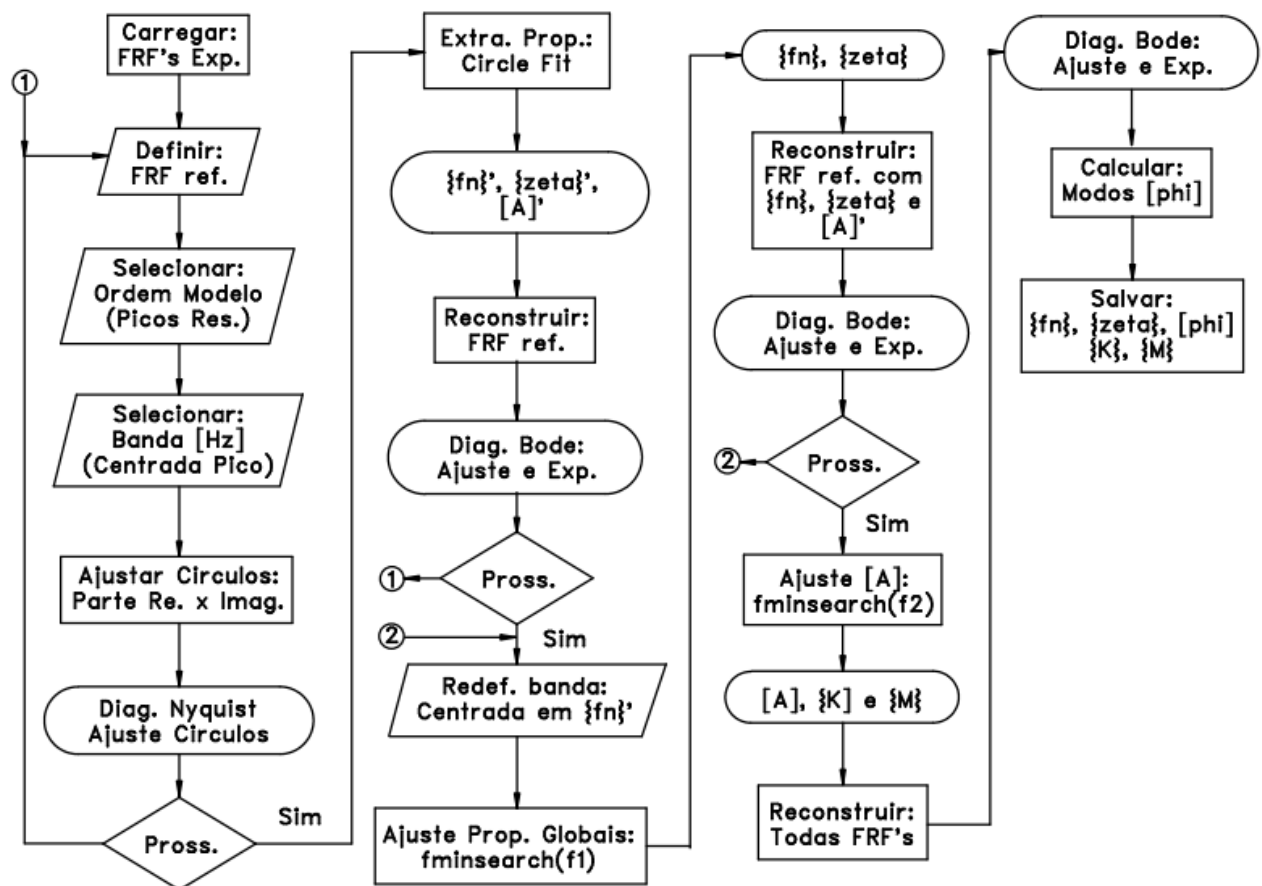


Figura 5.8 - Fluxograma da extração das propriedades modais através das FRF's experimentais.

Como os ajustes são efetuados em equações não lineares, é preciso lançar mão de métodos de resolução numéricos. Particular aos procedimentos de extração das propriedades, utilizou-se a ferramenta de minimização não linear *fminsearch*, disponível no pacote Octave<sup>®</sup>. O otimizador implementado em *fminsearch* é o Simplex, apresentado na seção de otimização (apêndice C). A figura 5.8 ilustra o fluxograma do procedimento computacional desenvolvido para obter as propriedades modais. As propriedades modais com (.)' foram obtidas pelo



processo de *circle-fit* e são utilizadas apenas como valores iniciais do processo de ajuste final;  $\zeta \equiv zeta$  e  $\varphi \equiv phi$ .

O fluxograma indica que o otimizador é aplicado nas funções objetivo  $f_1$  e  $f_2$ , (não confundir com valores de frequência). A função  $f_1$  é definida como,

$$f_1(\omega_r, \zeta_r) = \sum_{\omega=l_i}^{l_s} |(|\{H\}_{exp}(\omega)| - c_p|\{H\}(\omega)|)| \quad (5.1)$$

onde,  $\{H\}_{exp}$  e  $\{H\}$  são as FRF's experimental e ajustado, nesse caso supondo um sistema de UGDL;  $[l_i, l_s]$  define o intervalo de análise para cada frequência natural;  $c_p$  é um coeficiente de ponderação.

O coeficiente  $c_p$  é necessário um vez que, nesse estágio do procedimento, apenas as frequências naturais e fatores de amortecimento são ajustadas - supondo características globais. Dessa forma,  $\{H\}$  é reconstruído com constante modal unitária. Para evitar divergência no processo, a resposta de  $\{H\}$  é ponderada por  $c_p$ , que é a razão da resposta experimental e ajustada, anterior à correção, avaliada na frequência amortecida. Assim, a função objetivo  $f_1$  nada mais é do que uma vertente de mínimos quadrados dos módulos das FRF's. É preferível, no entanto, utilizar a função módulo ao invés da exponenciação quadrada, por motivos de ordem numérica.

A definição de  $f_2$  é similar a de  $f_1$ , contudo considerando agora um sistema de MGDL, no qual o ajuste é realizado nas constantes modais, rigidez e inércia equivalentes dos modos fora da banda de análise.

$$f_2([A], \{K\}, \{M\}) = \sum_{\omega=L_i}^{L_s} |(|\{H\}_{exp}(\omega)| - |\{H\}(\omega)|)|\gamma^2(\omega) \quad (5.2)$$

onde,  $[L_i, L_s]$  é o intervalo que define toda a banda de interesse na análise - difere de  $[l_i, l_s]$ ;  $\gamma^2$  é a coerência da FRF experimental.

A ponderação da diferença absoluta entre FRF experimental e modelada pela coerência é interessante pois fornece um peso aos dados experimentais correlacionados com a física do problema e retira peso daqueles contaminados por fatores externos não modelados. Lembrando que as equações (b.17) e (b.18) mostram que os erros aleatórios e sistemáticos relacionados às

FRF's experimentais estão diretamente relacionados com a coerência. Esse fato corrobora sua utilização como ponderador.

### 5.3.3 Procedimentos de ajuste de modelo computacional

Como sugerido na seção 2.1.1, a implementação do modelo contínuo ortotrópico, com tensões contidas no plano, como um modelo equivalente para materiais compostos de tramas entrelaçadas é bastante simplificada, uma vez que a maioria dos *softwares* de elementos finitos possui uma biblioteca compatível com a formulação de materiais ortotrópicos. O Mecway<sup>®</sup>, *software* de baixo custo utilizado no trabalho, não é diferente.

O modelo, então, se resume na construção de uma placa contínua ortotrópica, engastada nas extremidades, com densidade que garanta a mesma quantidade de massa do experimento (a densidade equivalente da seção 5.2). Elementos do tipo placa (*shell*) foram utilizados na construção do modelo. A figura 5.7 ilustra o resultado.

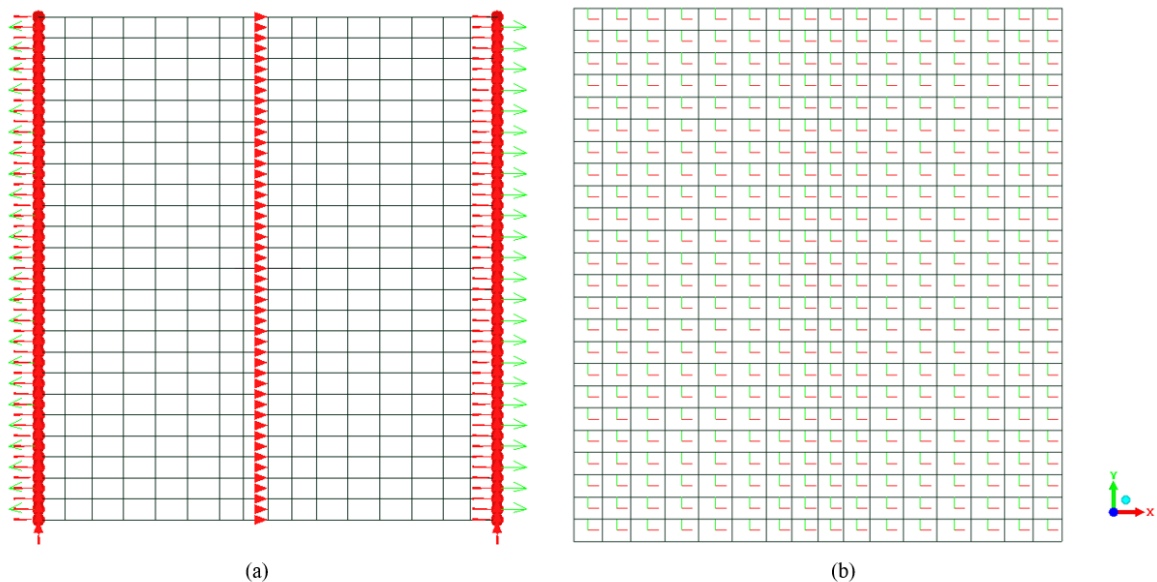


Figura 5.9 - (a) Modelo de elementos finitos de placa ortotrópica equivalente; (b) orientação do sistema coordenado dos elementos.

Para modelar as condições de contorno da bancada, os GDL das extremidades da placa foram todos restritos (setas vermelhas), com exceção dos relacionadas à translação em na coordenada  $x$ , conforme o item (a) da figura 5.9. Nessa direção um par de forças equivalentes à tração desenvolvida nos teste é introduzida (setas verdes). Para impedir aparecimento de modos de corpo rígido (frequências naturais nulas) e manter a simetria, os nós centrais do

modelo foram restritos em  $x$ . Como foi demonstrado, o comportamento de um material ortotrópico varia segundo à direção da carga em relação ao eixos principais. Isso significa, para o modelo, que o eixos coordenados dos elementos devem estar alinhados com as direções principais dos fios da malha metálica experimental (sistema  $x, y \equiv i_1, i_2$ ). O item (b) da figura 5.9 mostra esse alinhamento de eixos. Ressalta-se que, a despeito de algumas variações geométricas e físicas - especificamente a densidade equivalente -, o conceito de modelagem é idêntico para os dois tipos diferentes de tela.

Para completar o modelo é preciso definir as propriedades mecânicas, ou seja, os módulos de elasticidade das direções principais, o módulo de cisalhamento no plano e o coeficiente de Poisson equivalente. Para obter esses valores, uma rotina de otimização é proposta: processo iterativo no qual é realizado a análise modal no modelo computacional e os resultados (propriedades modais) comparados com os resultados experimentais (função objetivo). Ao longo das iterações, o algoritmo modifica os valores das propriedades mecânicas de forma a minimizar a diferença entre os resultados. Nesse sentido, o procedimento elaborado configura-se em um ensaio dinâmico para determinação das propriedades. A figura 5.10 contém o fluxograma da rotina desenvolvida para obtenção das propriedades mecânicas equivalentes do modelo, através de um processo otimização.

Como o modelo é baseado em elementos finitos, não existe uma forma fechada (analítica) do mesmo. Isso significa que somente os resultados do modelo estão disponíveis para a análise. Esse fato lembra o conceito de modelo *black box*: somente as saídas do modelo são conhecidas. Essa é uma das justificativas para utilização de um otimizador heurístico e não clássico na rotina desenvolvida. O otimizador utilizado na implementação foi o PSO (anexo C).

A caixa negra fornecida ao PSO, em essência, pode ser resumida pelos processos englobados na função  $f_{ps0}$ , descrita no fluxograma: o primeiro passo é o mapeamento das variáveis de projeto produzidas pelo PSO e os valores limites fornecidos para as propriedades mecânicas; num segundo momento, uma rotina executa um *batch file* que chama o Mecway<sup>®</sup> e um *script* em Python<sup>®</sup> que insere as propriedades mecânicas geradas pelo PSO, roda a simulação e grava os resultados obtidos em arquivos de texto (frequência natural e modo de vibrar); inicia-se o processo de comparação, através do cálculo do MAC das matrizes de modos de vibrar modeladas e experimentais, esses valores são utilizados para parear as frequências naturais correlatas e, posteriormente, para ponderar a função objetivo  $f_3$  que é, efetivamente, o valor analisado pelo otimizador.

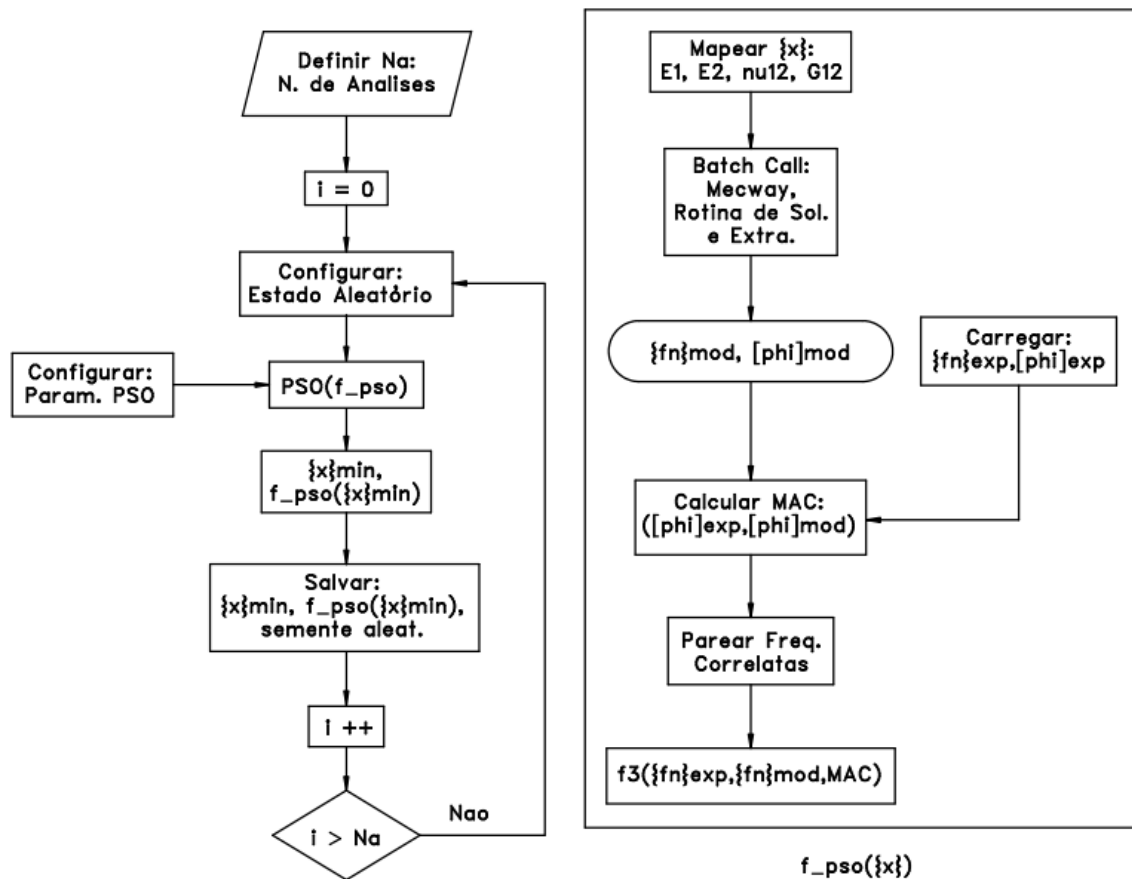


Figura 5.10 - Fluxograma da rotina de otimização proposta para ajuste das propriedades mecânicas equivalentes do modelo.

É necessário elucidar o significado de mapeamento de variáveis de projeto e a motivação: o mapeamento das variáveis de projeto é um passo necessário para auxílio da convergência do procedimento, uma vez que a amplitude relativa entre as ordem de grandeza das propriedades mecânicas é incrivelmente grande: os módulos possuem ordem de grandeza igual a  $10^{11}$  e o coeficiente de Poisson, ordem igual a  $10^0$ . Como o PSO é um algoritmo que trabalha com o conceito de diferença entre os vetores do espaço de busca, esse fato tornaria o processo virtualmente insensível às mudanças no coeficiente de Poisson. Por isso, todas as variáveis são limitadas no intervalo  $[0,1]$  e um rotina mapeia esses valores para o equivalente físico. Os parâmetros do otimizador e os intervalos padronizados para as variáveis de projeto estão contidos no apêndice D.

Antes da definição da função  $f_3$  é necessário tratar de um outro aspecto muito importante: foi demonstrado que a matriz obtida da contração do tensor de flexibilidade  $S$  deve ser positiva definida. Isso significa que não é qualquer conjunto de valores que são válidos para

as propriedades mecânicas, dentro da teoria de materiais ortotrópicos. O critério de Sylvester dita que uma matriz simétrica é positiva definida se, e somente se, todos os menores principais da matriz forem positivos (GILBERT, 1991). Desse critério é possível criar uma equação de restrição para o problema de otimização.

Obs.: Um menor de uma matriz é definido, em álgebra linear, como o determinante de uma matriz quadrada resultante da exclusão de uma ou mais linhas e colunas da matriz original.

Analisando os menores da matriz contida na eq. (2.6), percebe-se que  $E_1$  e  $G_{12}$  devem ser maiores que zero, o que é garantido por sua definição. Resta verificar que,

$$E_1 - \nu_{12}^2 E_2 > 0 \quad (5.3)$$

A equação (5.3) define uma relação entre os módulos de elasticidade e coeficiente de Poisson que deve ser observada para que a matriz de flexibilidade seja positiva-definida e, portanto, o modelo possua solução física válida.

Enfim, a definição de  $f_3$  é tal que,

$$f_3 = \sum_{r=1}^n MAC_r \frac{|\omega_{r_{exp}} - \omega_{r_{mod}}|}{\omega_{r_{exp}}} + rest \quad (5.4)$$

A equação (5.4) define a função objetivo  $f_3$  como a soma da diferença relativa das frequências naturais correlacionadas, ponderadas pelo MAC dos modos, somada a um fator relacionado às restrições,

$$rest = |\min(0, \text{sign}(E_1 - \nu_{12}^2 E_2))| 10^6 \quad (5.5)$$

A eq. (5.5) dita que, enquanto a relação em (5.3) for positiva,  $rest = 0$ , caso seja negativa, é atribuído um valor positivo grande à  $rest$ , dificultando a minimização, dissuadindo o otimizador a escolher combinações de propriedades mecânicas que resultem matrizes de rigidez e flexibilidade inválidas.

Resta apenas discutir mais um aspecto da rotina proposta: a realização de diversas iterações do processo de otimização e não apenas uma. Por definição, otimizadores heurísticos

possuem, em sua maioria, características estocásticas, ou seja, caráter aleatório. Não há garantias de que o conjunto obtido é de fato um mínimo da função objetivo - nem mesmo local. Para mitigar essa incerteza, é necessário executar o procedimento um sem-número de vezes, buscando sempre novos e melhores resultados, além do fornecimento de robustez aos já encontrados.

## CAPÍTULO 6 - RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nessa seção, os resultados experimentais obtidos, bem como os ajustes realizados, são apresentados. Primeiramente, uma reflexão geral dos dados experimentais e da qualidade das aquisições é disposta. Em seguida, destaca-se o processo de extração de propriedades modais, através do ajuste dos modelos analíticos de FRF's aos experimentais. A seção finaliza com a obtenção das propriedades mecânicas - módulos de elasticidade e cisalhamento e coeficiente de Poisson -, através da otimização da resposta dinâmica do modelo em relação às respostas experimentais.

### 6.1 QUALIDADE DAS AQUISIÇÕES E CONSTRUÇÃO DAS FRF'S EXPERIMENTAIS

Como discutido na seção de metodologia experimental 5.2, as respostas do sistema foram coletadas não simultaneamente, mas em grupos de três (número de canais livres na placa de aquisição e acelerômetros disponíveis). Isso significa que para tela 1, foram realizados 10 ensaios de impacto - considerando um ensaio como o ciclo de amostragem completo e não apenas um impacto - e para tela 2, 12 ensaios.

Dessa forma, é possível construir a mesma quantidade de espectros das entradas no sistema. A análise dos espectros de entrada, em casos de ensaios por impacto, é importante pois possibilita a visualização de uma banda útil de frequência na qual o sistema foi excitado. Para facilitar a análise, todos os espectros, respectivos a cada tela, foram agrupados num único diagrama e foram normalizados pelo seu valor máximo, uma vez que o objetivo é analisar a banda efetiva. A figura 6.1 indica os espectros obtidos para os ensaios realizados na tela 1, com tração nominal  $T_1$  - vide tabela 5.1. A figura 6.2 reduz a banda em frequência visualizada e indica as linhas que representam um decaimento de  $3dB$  e  $6dB$ , respectivamente.

Analisando a figura 6.2, percebe-se que a menor banda efetiva com decaimento de até  $3dB$  é, aproximadamente, até 40 Hz e para um decaimento de até  $6dB$ , 66 Hz. A definição de banda efetiva através de decaimento é arbitrária, já que existem casos e autores que cogitam uma banda com decaimento para além de  $20dB$  (AVITABILE, 2018), mas nesses casos análise complementares são necessárias. Fato é que, usualmente, em análise modal experimental, utiliza-se bandas com decaimento de até  $6dB$ , preferencialmente até  $3dB$ .

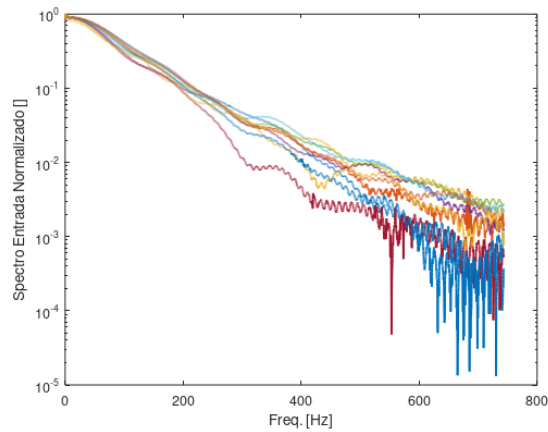


Figura 6.1 - Espectros do impacto de entrada normalizados, para tela 1, tração nominal  $T_1$ .

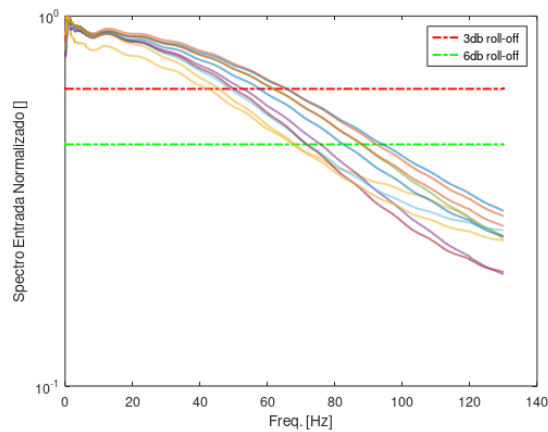


Figura 6.2 - Espectros do impacto de entrada normalizados, para tela 1, tração nominal  $T_1$ , restrita a banda em até 130 Hz e com as linhas de decaimento.

A banda de frequência excitada num impacto é inversamente proporcional ao tempo de contato entre os objetos. Quanto menor o tempo de contato, maior a banda efetiva. Nesse sentido, normalmente a banda efetiva é determinada pela característica da ponta do equipamento utilizado no impacto. Mas isso só é verdade quando a superfície impactada possui rigidez local significativamente maior que a rigidez do material da ponta. Nesse caso, percebe-se que a rigidez local da tela domina o processo, prolongando o tempo de contato e impedindo que frequências maiores sejam excitadas. Esse fato é corroborado pelos demais ensaios, ainda na tela 1 com tração  $T_2$ , e nas tela 2, com ambos os níveis de tração. As figuras 6.3, 6.4 e 6.5 ilustram o fato. Para a tela 2, existe oscilações mais pronunciadas no espectro, o que indica a ocorrência de impactos múltiplos.



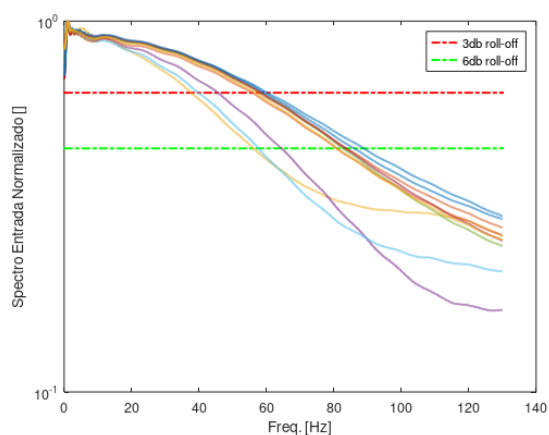


Figura 6.3 - Espectros do impacto de entrada normalizados, para tela 1, tração nominal  $T_2$ , restrita a banda em até 130 Hz e com as linhas de decaimento.

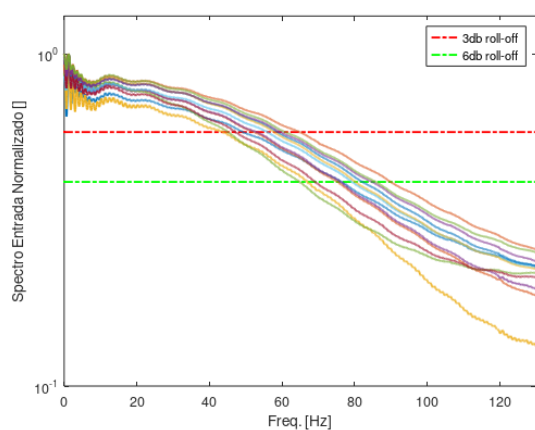


Figura 6.4 - Espectros do impacto de entrada normalizados, para tela 2, tração nominal  $T_1$ , restrita a banda em até 130 Hz e com as linhas de decaimento.

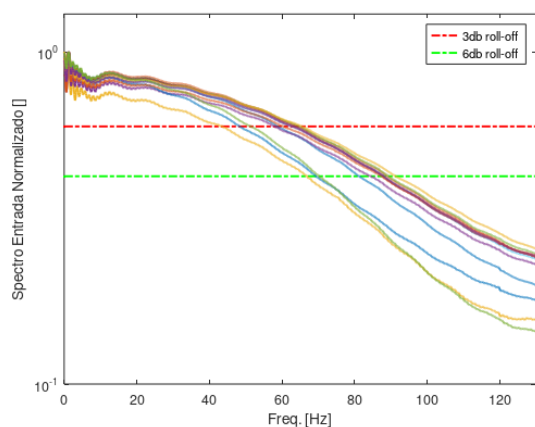


Figura 6.5 - Espectros do impacto de entrada normalizados, para tela 2, tração nominal  $T_2$ , restrita a banda em até 130 Hz e com as linhas de decaimento.

De maneira geral, ainda que o decaimento não seja o único fator decisório quanto à qualidade de um ensaio do tipo impulsivo, a dificuldade em garantir um tempo curto de contato e que não exista múltiplos contatos, sugere que a ensaios impulsivos não são ideais para os

testes em malhas com tais características: baixa rigidez fora do plano de tração, relativa à inércia do sistema.

Como sugerido, análise do espectro de entrada não é o único fator determinante da qualidade de um ensaio. Na verdade, existe uma métrica mais adequada: a coerência. As figuras seguintes ilustram algumas FRF's experimentais reconstruídas dos dados adquiridos, com as respectivas coerências, para discussão.

A figura 6.6 ilustra o diagrama de Bode da FRF experimental no *drive-point* - no mesmo local onde o impacto é executado é realizada uma medição -, para tela 1 com tração nominal  $T_1$ .

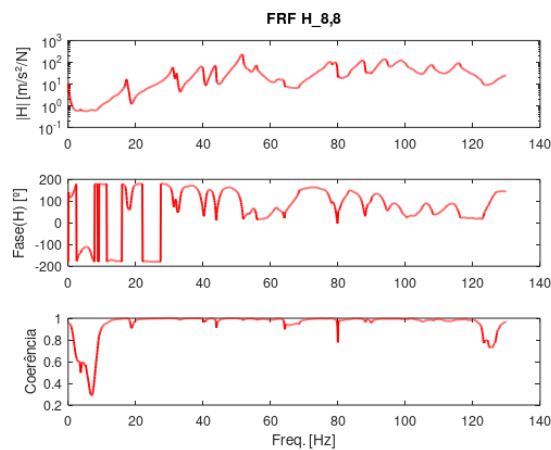


Figura 6.6 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_1$ : diagrama de Bode de  $H_{8,8}$ , com coerência associada.

Claramente, a coerência no intervalo definido pela análise dos espectros é excelente, excetuando-se as baixas frequências nas quais o acelerômetro não possui capacidade de leitura. Inclusive, a coerência mantém-se alta até aproximadamente 120 Hz. A figura 6.7 contém o diagrama de Bode para a FRF do 7º GDL, ou seja, geometricamente próximo do *drive-point*. Na figura 6.7, a coerência mantém-se alta em todo o intervalo visualizado, com exceção das regiões de clara antirressonância, nas quais uma baixa coerência é esperada.

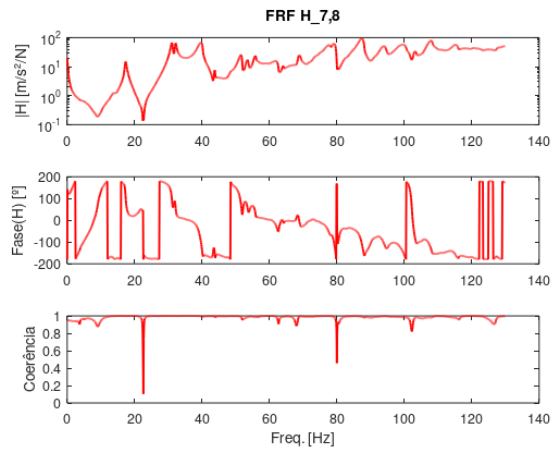


Figura 6.7 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_1$ : diagrama de Bode de  $H_{7,8}$ , com coerência associada.

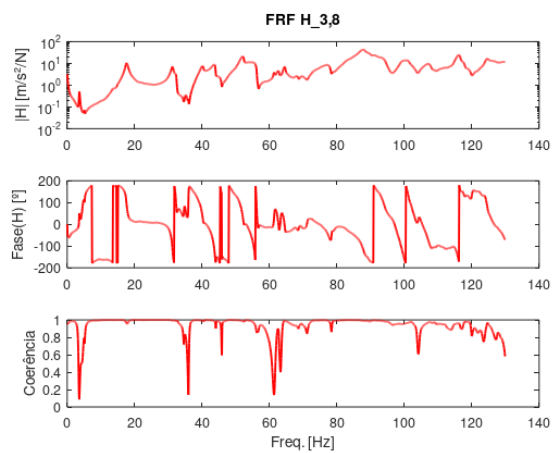


Figura 6.8 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_1$ : diagrama de Bode de  $H_{3,8}$ , com coerência associada.

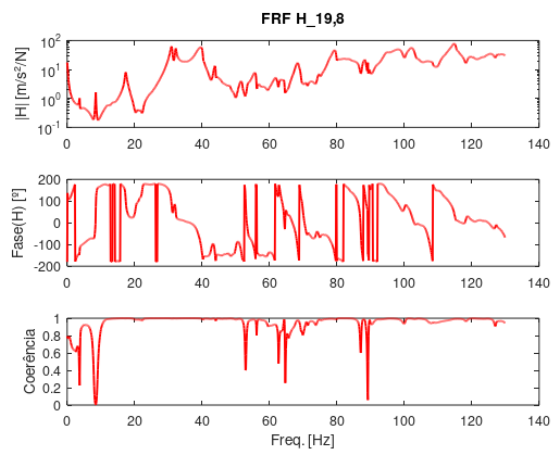


Figura 6.9 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_1$ : diagrama de Bode de  $H_{19,8}$ , com coerência associada.

Existem, no entanto, respostas com menor coerência entre os sinais adquiridos. Alguns exemplos são as respostas obtidas nos 3° e 19° GDL, conforme figuras 6.8 e 6.9. Contudo essa deterioração não é generalizada no intervalo, sendo restrita apenas a algumas regiões.

A mesma análise pode ser realizada para o caso de tração nominal  $T_2$ . As figuras 6.10, 6.11, 6.12 e 6.13 contém os diagramas de Bode das FRF's relacionadas aos mesmos graus de liberdade previamente analisados. Fica claro que, a coerência obtida no ensaio com maior tração é tão boa quanto a anterior ou até melhor.

Analisado ambos os ensaios em conjunto com os intervalos definidos na análise dos espectros de entrada, chega-se à conclusão de que o intervalo  $[20, 60]$  Hz é uma boa escolha para análise e extração de propriedades.

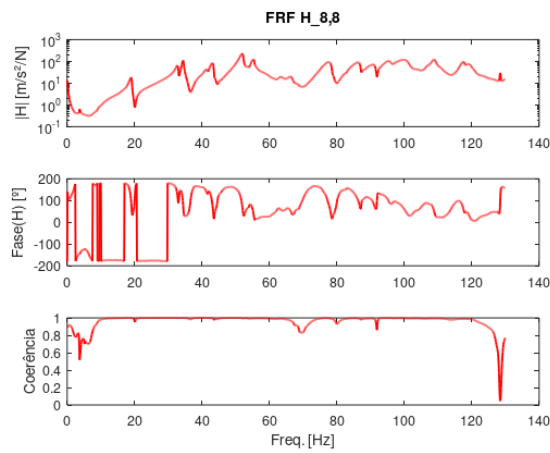


Figura 6.10 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_2$ : diagrama de Bode de  $H_{8,8}$ , com coerência associada.

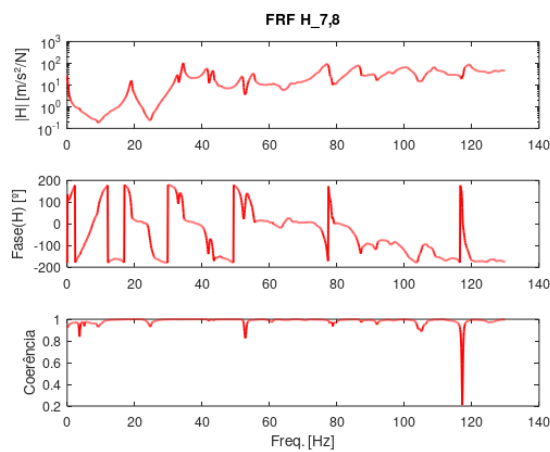


Figura 6.11 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_2$ : diagrama de Bode de  $H_{7,8}$ , com coerência associada.

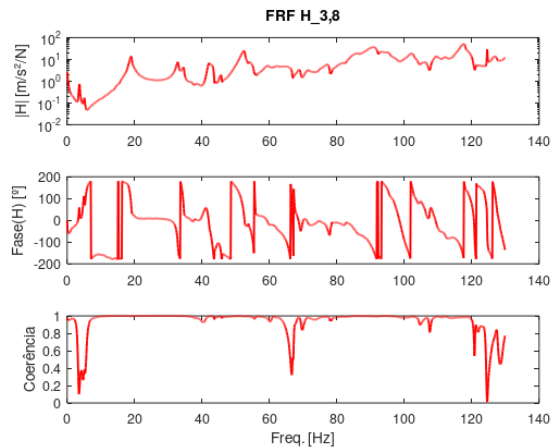


Figura 6.12 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_2$ : diagrama de Bode de  $H_{3,8}$ , com coerência associada.

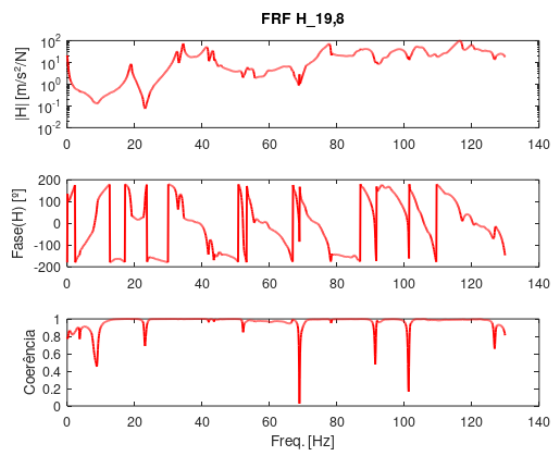


Figura 6.13 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_2$ : diagrama de Bode de  $H_{19,8}$ , com coerência associada.

O mesmo procedimento pode ser repetido para a tela 2, em ambos os níveis de tração. Como a disposição dos graus de liberdade é distinta, não existe motivos de comparação nos mesmos GDL escolhidos como representantes do conjunto de FRF's. No entanto, é interessante manter a FRF relacionada ao 8° GDL por ser, novamente um *drive-point*. Outros pontos de interesse são os relacionados aos 14°, 25° e 27° GDL. As figuras 6.14, 6.15, 6.16 e 6.17 contém os diagramas de Bode das FRF's.

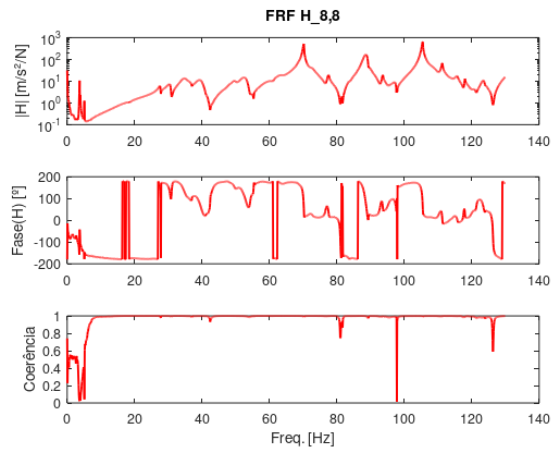


Figura 6.14 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_1$ : diagrama de Bode de  $H_{8,8}$ , com coerência associada.

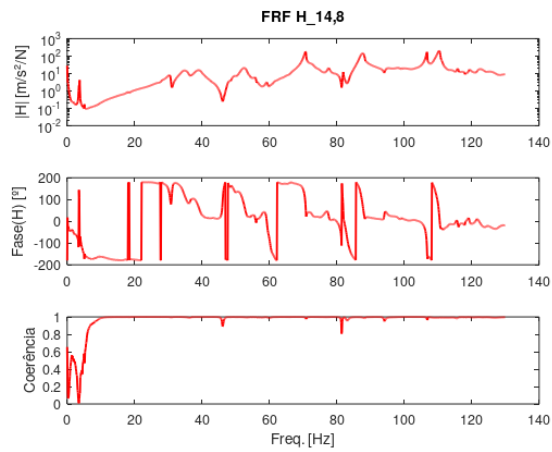


Figura 6.15 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_1$ : diagrama de Bode de  $H_{14,8}$ , com coerência associada.

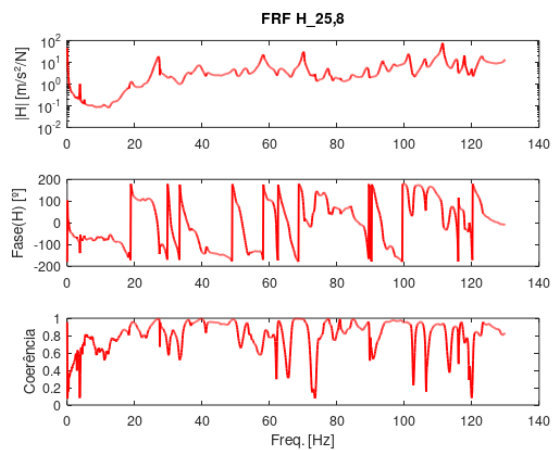


Figura 6.16 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_1$ : diagrama de Bode de  $H_{25,8}$ , com coerência associada.

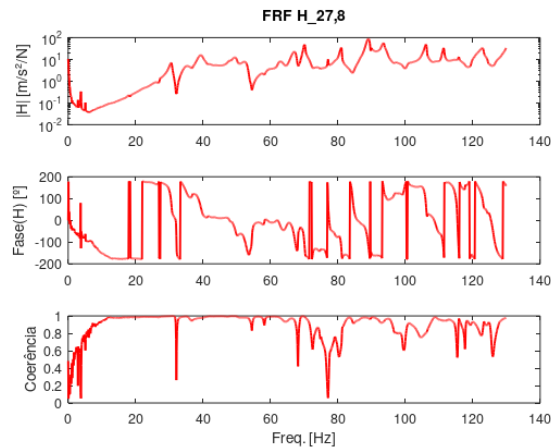


Figura 6.17 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_1$ : diagrama de Bode de  $H_{27,8}$ , com coerência associada.

Analisando primeiramente a figura 6.14, imediatamente percebe-se que a coerência é extremamente alta entre os sinais obtidos. O mesmo pode ser dito da resposta contida na figura 6.15. Contudo, no mesmo ensaio da tela 2, identifica-se algumas respostas muito deterioradas. É o caso das respostas associadas aos 25° e 27° GDL, como mostram as figuras 6.16 e 6.16. Isso, no entanto, é um caso isolado, dentre as 36 FRF's obtidas. A maior parte, possui resposta bem correlacionada, semelhante às figuras 6.14 e 6.15.

Para concluir as análises, basta investigar os resultados obtidos na tela 2, com o nível de tração maior. As figuras 6.18, 6.19, 6.20 e 6.21 ilustram os diagramas de Bode das FRF's relacionadas aos mesmos GDL.

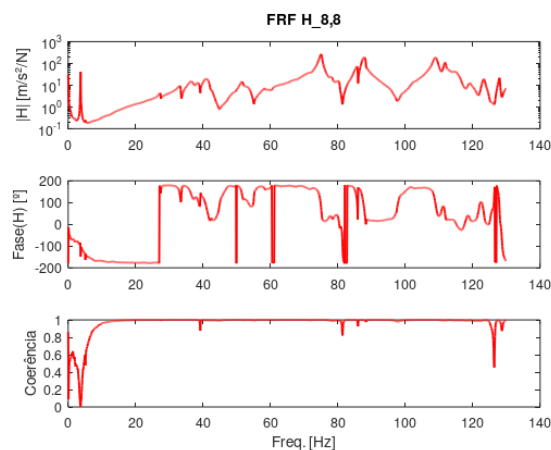


Figura 6.18 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_2$ : diagrama de Bode de  $H_{8,8}$ , com coerência associada.

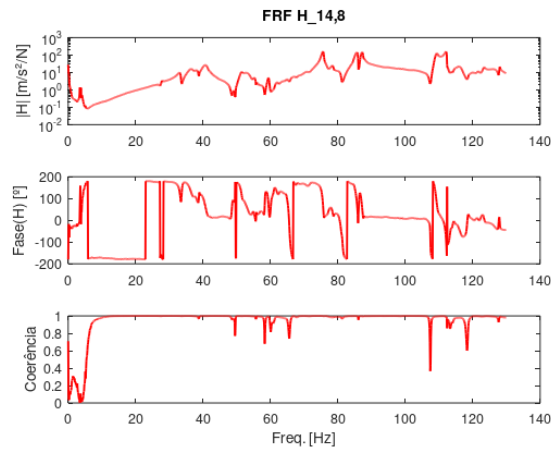


Figura 6.19 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_2$ : diagrama de Bode de  $H_{14,8}$ , com coerência associada.

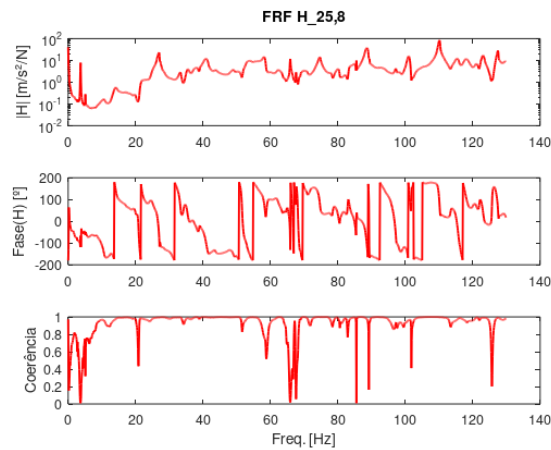


Figura 6.20 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_2$ : diagrama de Bode de  $H_{25,8}$ , com coerência associada.

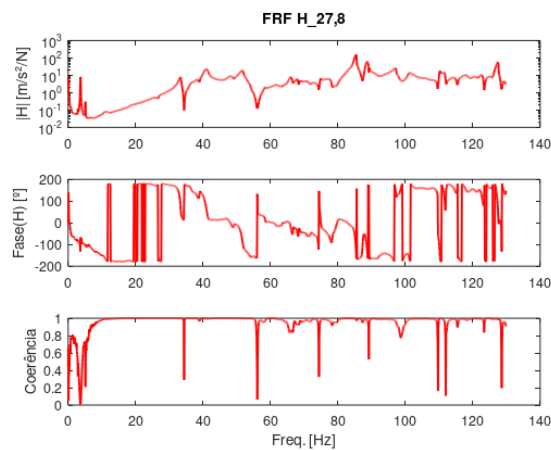


Figura 6.21 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_2$ : diagrama de Bode de  $H_{27,8}$ , com coerência associada.

Novamente, as figuras 6.18 e 6.19 mostram excelente coerência entre os dados colhidos. As figuras 6.20 e 6.21 mostram uma deterioração, sim, mas em nível significativamente reduzido daquele visto em ensaio com tração menor. Isso pode significar influência de fatores



externos aleatórios nas aquisições ilustradas nas figuras 6.16, 6.17 (sensores mal fixados, impacto de entrada mal aplicado etc.), mas também algum fator sistemático (tensionamento não uniforme da região, por exemplo).

Combinando as informações obtidas, é possível definir o intervalo  $[20,50]Hz$  como um intervalo válido para análises subsequentes.

## 6.2 EXTRAÇÃO DAS PROPRIEDADES MODAIS ATRAVÉS DO AJUSTE DE FRF

Construídas as funções resposta em frequência experimentais, é possível aplicar a metodologia de ajuste definida na seção 6.3.1. Para fins de análise no corpo do trabalho, as mesmas FRF's apresentadas na seção anterior que tratou da qualidade dos dados adquiridos e exibição das respostas construídas são usadas como referência de análise. Para maior clareza, os resultados obtidos para as telas 1 e 2 são divididos em subseções.

### 6.2.1 Extração das propriedades modais: tela 1

No caso da tela 1, tracionada no nível mais baixo, as figuras 6.22, 6.23, 6.24 e 6.25 contém as respostas experimentais e as respostas ajustadas através do modelo. Analisando primeiramente a figura 6.24, que contém a FRF de referência, na qual as propriedades modais de cunho global, frequências naturais e fatores de amortecimento, foram estimadas, percebe-se que se obteve um bom ajuste, tanto no valor absoluto da resposta, como em fase. Esse comportamento se repete para as repostas obtidas no 7° e 19° GDL, figuras 6.23 e 6.25.

A divergência se encontra na resposta observada pelo 3° GDL, conforme figura 6.22. É possível perceber erro no ajuste tanto na fase como no módulo da resposta. O erro de fase é mais pronunciado na região com baixa coerência, conforme figura 6.6. Já o erro em módulo encontra-se entre o terceiro e quartos picos de ressonância. O erro de fase é justificado pela baixa coerência, uma vez que em regiões dominadas por ruído, a fase dos sinais acaba por apresentar características aleatórias. O erro no módulo da resposta pode indicar a presença de algum modo de frequências próximas não identificado na resposta referência.

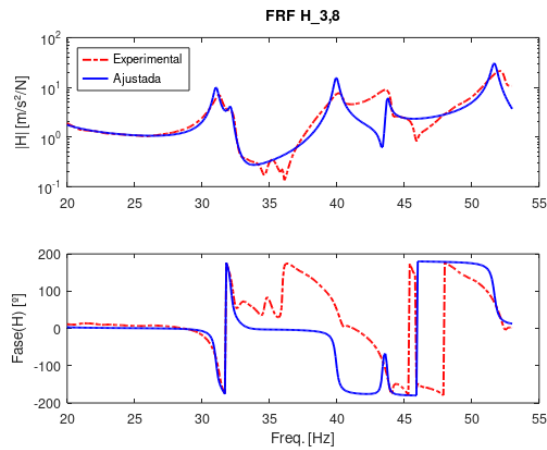


Figura 6.22 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_1$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{3,8}$ .

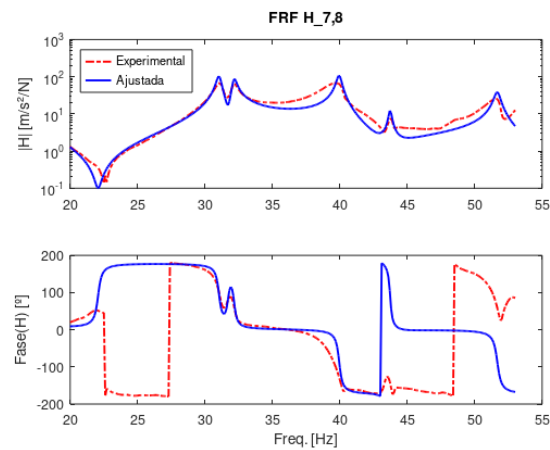


Figura 6.23 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_1$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{7,8}$ .

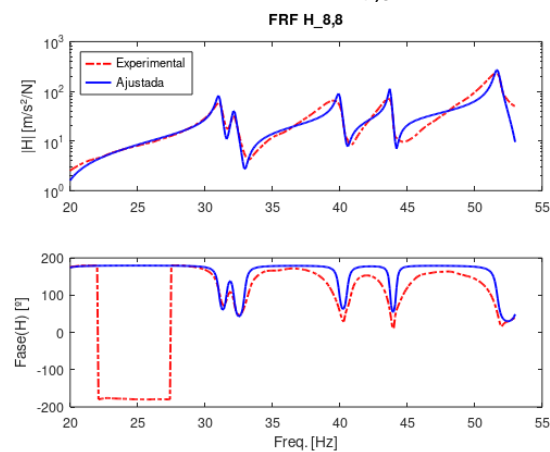


Figura 6.24 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_1$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{8,8}$ .

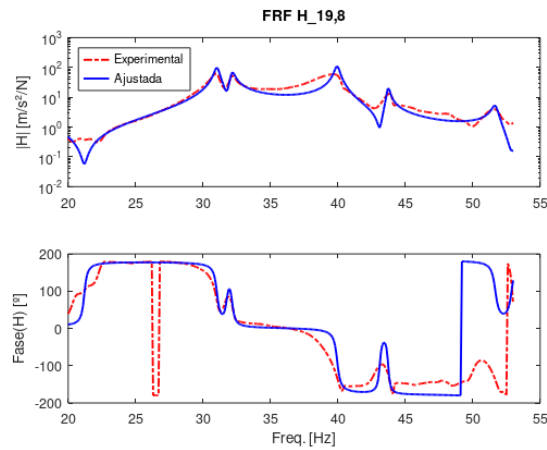


Figura 6.25 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_1$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{19,8}$ .

Obs.: As repostas não exibidas no corpo do trabalho, sejam experimentais ou ajustadas, estão contidas em apêndice. Para minimizar o espaço ocupado, as respostas estão diagramadas em mesma figura, de tamanho reduzido, incluído a coerência experimental. Lembrando que não existe sentido em coerência do modelo ajustado, uma vez que é uma propriedade de caráter estatístico. Uma linha de valor nula é exibida apenas por motivos construtivos. No caso específico do teste na tela 1 com tração mínima, o apêndice referente é E1.

A realização do ajuste pressupõe obtenção das propriedades modais. A tabela 6.1 contém as frequências naturais e fatores de amortecimento obtidos. A apresentação dos modos extraídos em forma numérica não apresenta nenhuma vantagem no sentido de análise. Mais positivo é a apresentação gráfica. Nesse contexto, as figuras 6.26, 6.27, 6.28, 6.29 e 6.30 contém os modos de forma crescente, apresentando uma vista isométrica e vistas paralelas às direções principais. A nomenclatura dos eixos é conforme a definição do modelo computacional, seção 6.3.2, figura 6.7, no qual o eixo y é paralelo às extremidades engastadas da tela.

Tabela 6.1 - Tela 1, tração mínima: frequências naturais e fatores de amortecimentos.

	1° Modo	2° Modo	3° Modo	4° Modo	5° Modo
$\omega_r$ [Hz]	31,039	32,149	39,950	43,729	51,679
$\zeta_r \cdot 10^3$ [-]	5,755	5,231	4,396	2,531	4,110

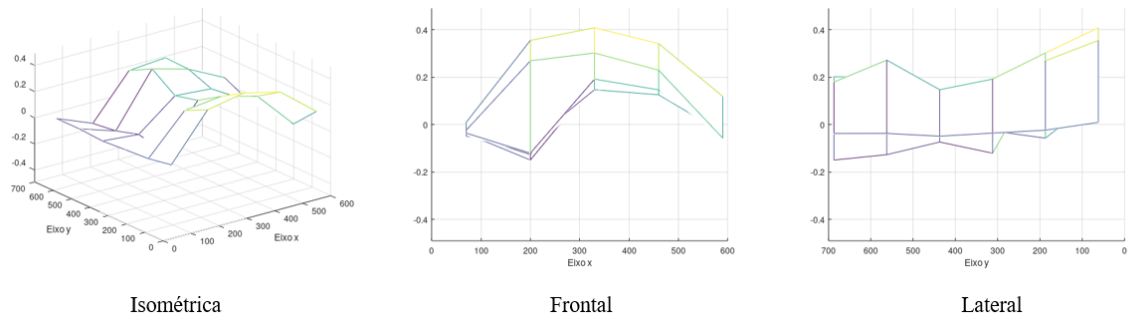


Figura 6.26 - Tela 1, mínima tração: 1º modo de vibrar ajustado.

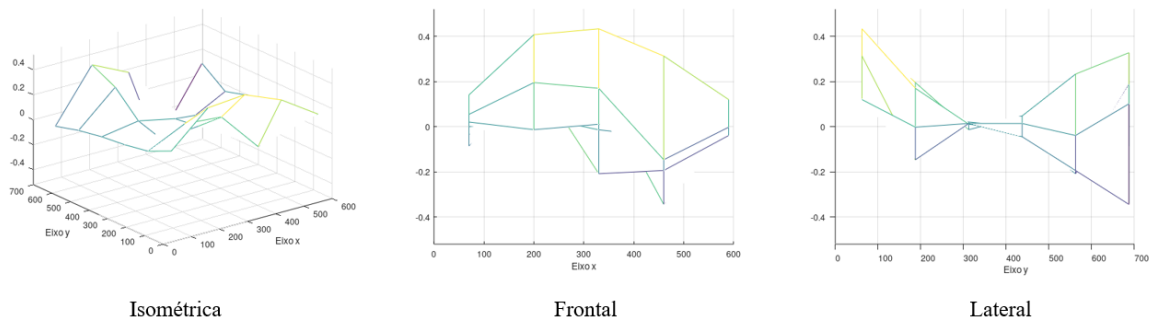


Figura 6.27 - Tela 1, mínima tração: 2º modo de vibrar ajustado.

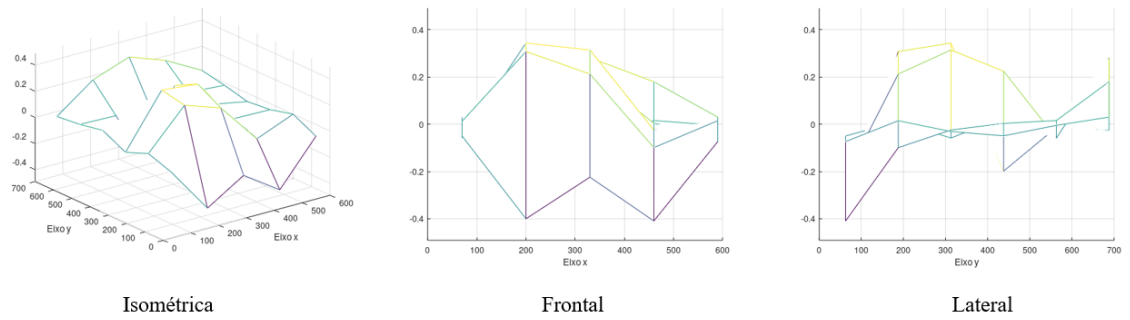


Figura 6.28 - Tela 1, mínima tração: 3º modo de vibrar ajustado.

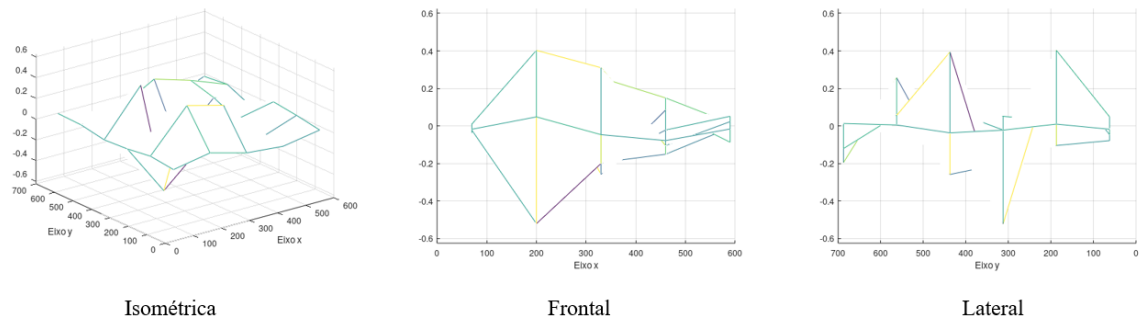


Figura 6.29 - Tela 1, mínima tração: 4º modo de vibrar ajustado.

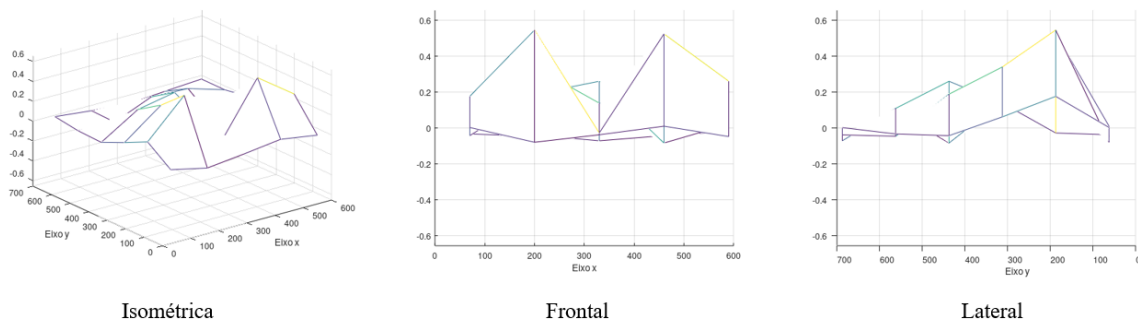


Figura 6.30 - Tela 1, mínima tração: 5° modo de vibrar ajustado.

Em problemas bidirecionais planos, como é o caso, espera-se que as formas dos modos sejam os resultados da combinação de formas senoidais independentes em cada direção principal, ajustadas às condições de contorno. As vistas frontal e lateral dos modos parecem indicar tal comportamento.

Percebe-se que, com exceção do 5° modo no qual a distorção da forma é mais pronunciada, todas as vistas frontais dos demais modos assemelham-se à forma de  $\frac{1}{2}$  período de uma senoide (uma crista). Já as vistas laterais dos modos, em ordem crescente, aparentam assemelhar-se a 0,  $\frac{1}{2}$ , 1  $\frac{1}{2}$ , 2 e 2  $\frac{1}{2}$  períodos de uma senoide, respectivamente.

Obviamente, existe um nível de distorção de forma considerável em todos os modos, o que distancia em certo grau as formas obtidas das formas supostas. Mas interessante notar alguns pontos: focando nos dois primeiros modos, de frequências naturais muito próximas com diferença relativa menor do que 4%, e supondo como verdadeiro as formas senoidais propostas no parágrafo passado, aparentemente existe uma contaminação cruzada. Ou seja, aparenta existir elementos do que deveria ser o 2° modo no primeiro e vice-versa. Uma terminologia diversa seria a seguinte: esses dois modos aparentam ser uma combinação linear dos modos hipotéticos.

No campo da análise modal experimental é sabido que, na existência de modos com frequências naturais muito próximas ou, até mesmo, repetidas, ferramentas baseadas apenas em uma entrada de referência não são capazes de determinar unicamente os modos (EWINS, 2000). Ou seja, apenas analisadores globais são capazes de captar as nuances de forma - ferramentas que analisam simultaneamente várias colunas ou linhas da matriz de FRF's, conforma já discutido.

O motivo é intuitivo: como a região de análise é dominada igualmente por dois modos, alguns GDL são mais suscetíveis a uma resposta de um modo do que outra; é inclusive possível que um determinado GDL seja um nó em um modo, e um pico em outro. Dessa maneira, a forma final do modo acaba por transformar-se numa combinação linear dos modos dominantes

na região ressonante. Sendo assim, é possível imaginar que tal fenômeno seja causa parcial da distorção das formas dos modos, além, claro, de incoerências nos procedimentos de coleta de dados.

Os resultados obtidos pela ajuste às respostas relativas à tela 1, nível máximo de tração, são discutidos em sequência. As figuras 6.31, 6.32, 6.33 e 6.34 contêm as repostas experimentais e ajustadas, nos mesmos GDL para comparação.

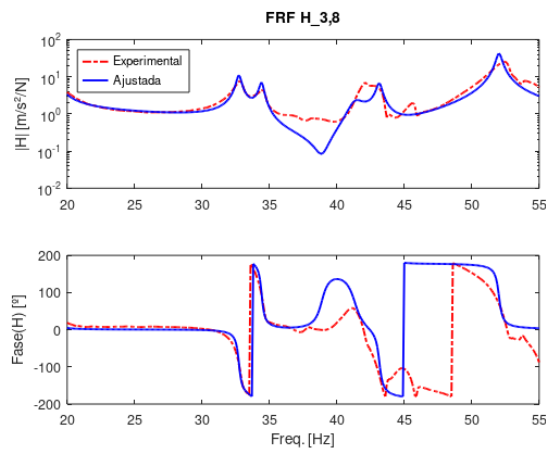


Figura 6.31 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_2$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{3,8}$ .

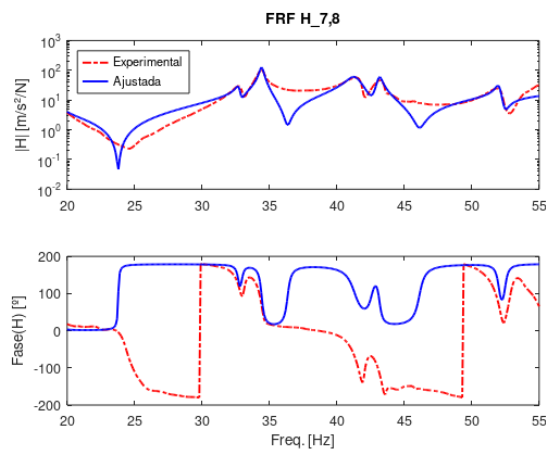


Figura 6.32 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_2$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{7,8}$ .

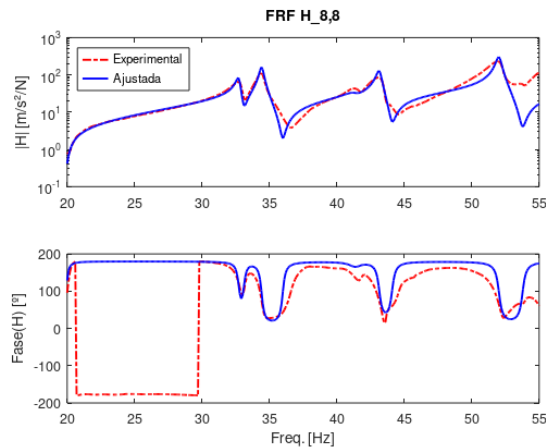


Figura 6.33 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_2$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{8,8}$ .

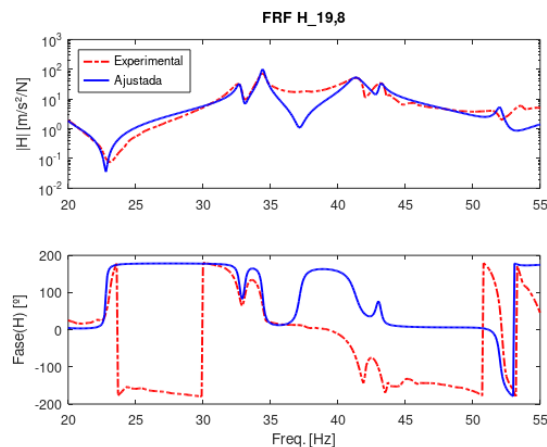


Figura 6.34 - Tela 1, ensaio com tração nominal  $T_2$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{19,8}$ .

Assim como para o ensaio em nível de tração menor, o ajuste de melhor qualidade foi obtido na FRF utilizada como referência, figura 6.33. Nesse caso, ocorreu uma melhora da FRF ajustada com relação ao 3º GDL. As demais respostas ajustadas e experimentais encontram-se no apêndice E2.

A tabela 6.2 contém as propriedades globais ajustadas, para a tela 1, com tração máxima. Comparando a tabela 6.2, percebe-se que os fatores de amortecimento permaneceram relativamente iguais, o que era esperado; a única exceção ocorreu no terceiro modo. Outro ponto interessante é que todas as frequências naturais aumentaram seu valor, com exceção da frequência relacionada ao 4º modo. Esse acréscimo no valor também era antecipado.

De maneira geral, existe concordância entre as expectativas prévias e os resultados obtidos, especialmente no que tange ao acréscimo no valor das frequências: como a expectativa é que a tela se comporte como uma placa fina, a aplicação de tensão no plano age em prol do

seu enrijecimento contra movimentos fora do plano, o que engloba os modos analisados. Dito isso, é possível que o 4º modo seja do tipo flexo-torção, o que seria dominado por efeitos cisalhantes e, portanto, é menos sensível ao tensionamento, nesse sentido.

Tabela 6.2 - Tela 1, tração máxima: frequências naturais e fatores de amortecimentos.

	1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo	5º Modo
$\omega_r$ [Hz]	32,735	34,424	41,328	43,150	52,022
$\zeta_r \cdot 10^3$ [-]	4,918	4,395	12,622	4,331	3,736

O mesmo procedimento para exibição dos modos foi adotado. As figuras 6.35, 6.36, 6.37, 6.38 e 6.39 contém os cinco modos de vibrar ajustados, exibindo uma vista isométrica e vistas paralelas as direções principais.

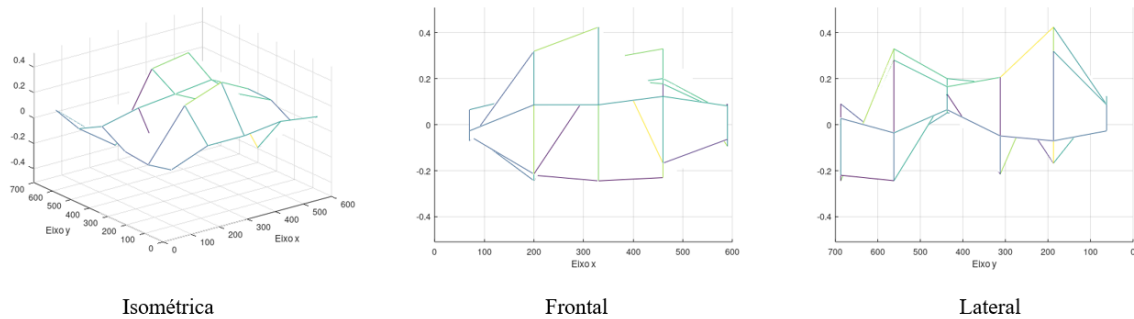


Figura 6.35 - Tela 1, máxima tração: 1º modo de vibrar ajustado.

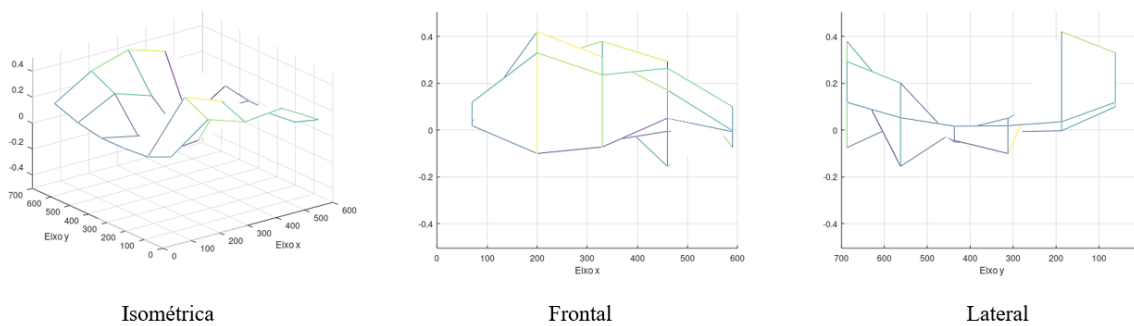


Figura 6.36 - Tela 1, máxima tração: 2º modo de vibrar ajustado.



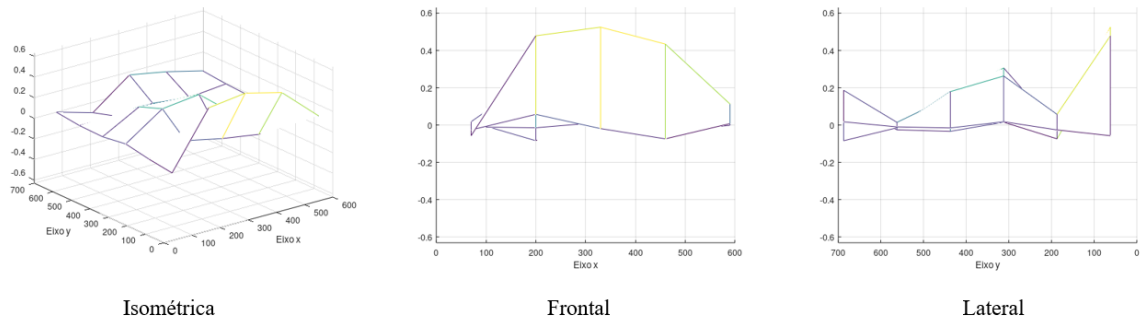


Figura 6.37 - Tela 1, máxima tração: 3<sup>o</sup> modo de vibrar ajustado.

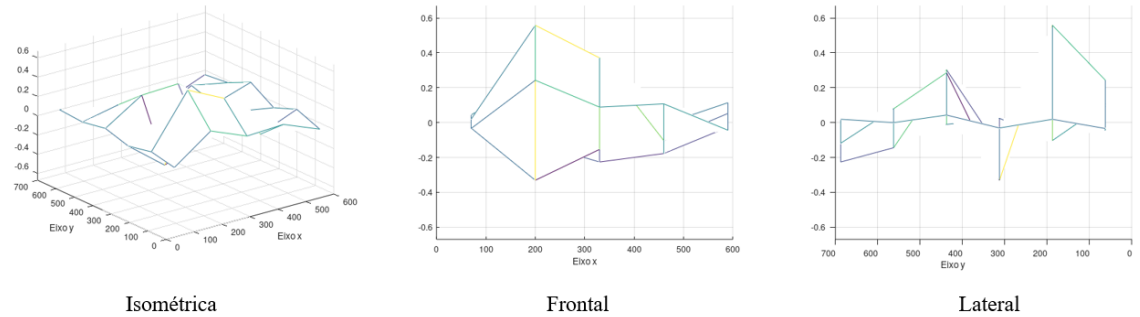


Figura 6.38 - Tela 1, máxima tração: 4<sup>o</sup> modo de vibrar ajustado.

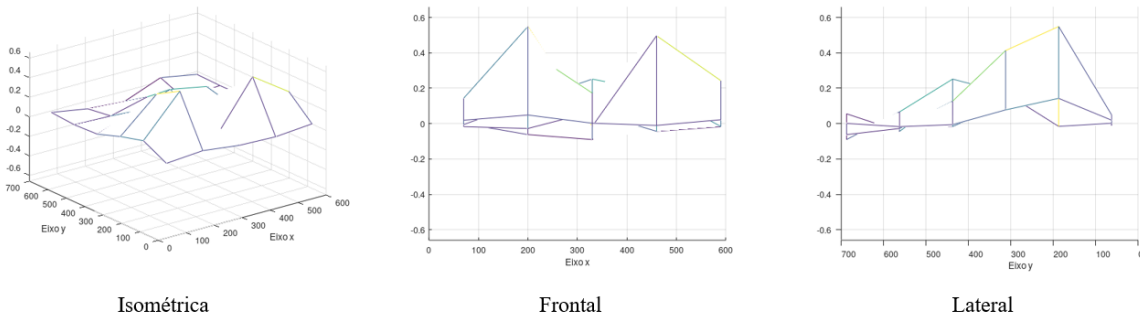


Figura 6.39 - Tela 1, máxima tração: 5<sup>o</sup> modo de vibrar ajustado.

Fazendo análise semelhante para os modos em questão, percebe-se que as formas senoidais nas vistas frontal e lateral permanecem, porém com algumas modificações significativas presentes no segundo e terceiro modos. Diferentemente do efeito na modificação dos valores das frequências naturais, o tensionamento não deve ter influência na forma do modo, que é função das condições de contorno, que permanecem iguais. Dessa forma, é um possível indicio de influência de algum modo não detectado na referência, que, com o tensionamento, ficou mais evidente.

## 6.2.2 Extração das propriedades modais: tela 2

Procedimento semelhante pode ser aplicado para análise das respostas obtidas na tela 2. O primeiro passo, portanto, é a exibição das curvas ajustadas. As figuras 6.40, 6.41, 6.42 e 6.43 contêm os ajustes obtidos nas FRF's selecionadas na seção 6.1, para a tela 2.

Novamente, o ajuste obtido na FRF utilizada como referência,  $H_{8,8}$ , é bom tanto em módulo como em fase, conforme figura 6.40. O ajuste da figura 6.41 também apresenta boa concordância, lembrando que essa FRF foi escolhida como exemplo de um resposta construída com boa correlação entre sinais, assim como a FRF de referência. Já a figura 6.42 indica que o ajuste, utilizando as propriedades globais extraídas de  $H_{8,8}$  não foi bem-sucedido: existe erro significativo tanto em módulo como em fase. De certa forma, esse comportamento era esperado, já que a coerência obtida indicava falta de correlação entre os dados experimentais. Por fim, a figura 6.43 mostra o ajuste da resposta numa FRF que também não possui coerência ideal, apesar que em menor grau do que a anterior. Nesse caso, o ajuste apresenta boa concordância em módulo, sendo insuficiente em fase, em algumas regiões. Importante ressaltar que um ajuste bom em fase também é necessário porque, ainda que o módulo da resposta ajustada naquele GDL seja similar ao real, existindo erro de fase substancial, a forma assumida do modo pode se distorcer. Como o ajuste foi restrito a obter modos reais, para comparação direta com os modos computacionais, um erro de fase pode inverter o sentido de movimento de um GDL, relativo aos demais, e introduzir incoerências na forma resultante. Como de praxe, o restante das respostas obtidas está contido no apêndice E3.

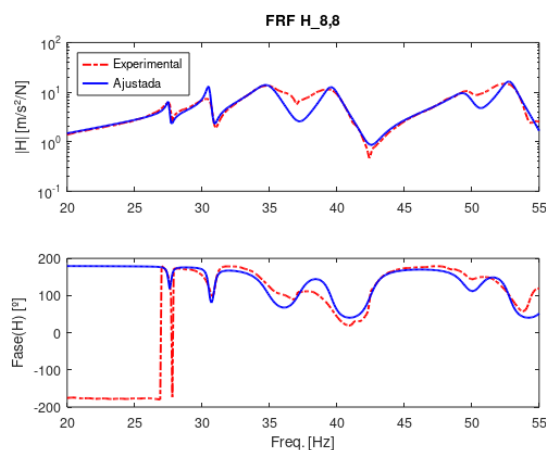


Figura 6.40 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_1$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{8,8}$ .

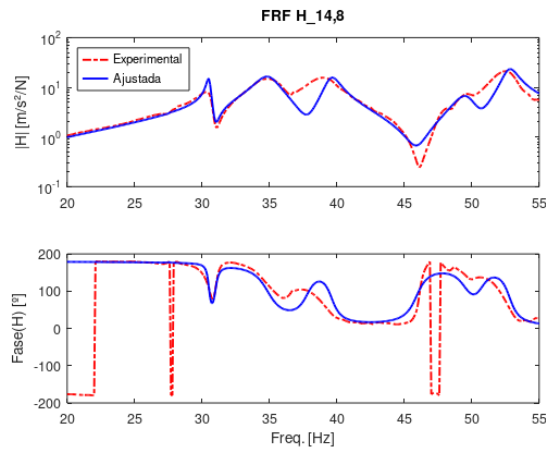


Figura 6.41 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_1$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{14,8}$ .

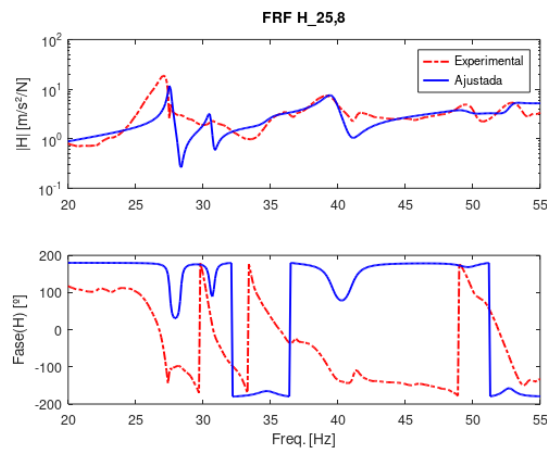


Figura 6.42 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_1$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{25,8}$ .

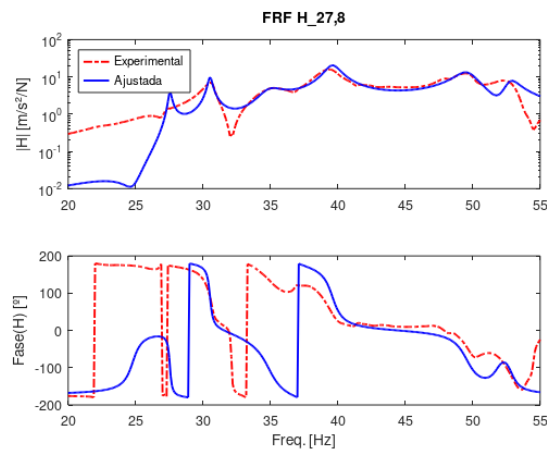


Figura 6.43 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_1$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{27,8}$ .

A tabela 6.3 contém as propriedades modais ajustas para a tela 2, no caso de tração mínima. Comparando com as propriedades obtidas na tela 1, existe clara diferença,

especialmente nos fatores de amortecimento. De fato, visualmente, a resposta do sistema, nessa banda de análise aparenta ser mais amortecida. Quanto às frequências naturais, não existia nenhuma expectativa prévia de semelhança, ao contrário, uma vez que são formas construtivas distintas.

Tabela 6.3 - Tela 2, tração mínima: frequências naturais e fatores de amortecimentos.

	1° Modo	2° Modo	3° Modo	4° Modo	5° Modo	6° Modo
$\omega_r$ [Hz]	27,544	30,522	34,900	39,600	49,585	52,800
$\zeta_r \cdot 10^3$ [-]	4,036	4,935	25,507	14,113	16,521	10,507

As formas dos modos de vibrar são apresentadas através das vistas já introduzidas, nas figuras 6.44, 6.45, 6.46, 6.47, 6.48 e 6.49.

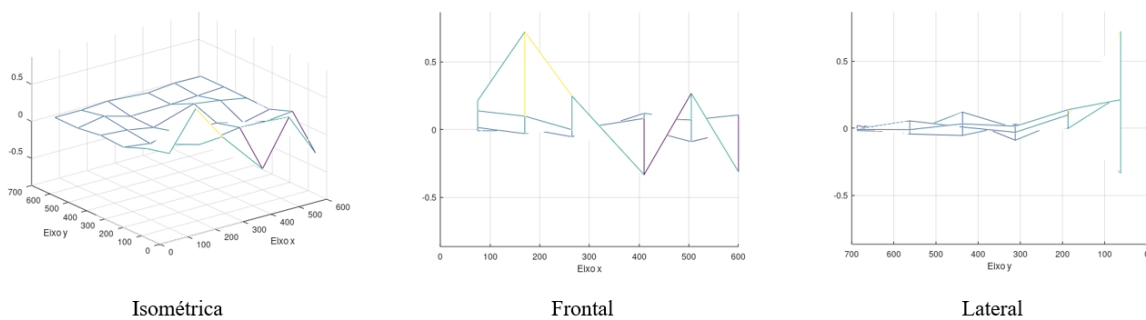


Figura 6.44 - Tela 2, mínima tração: 1° modo de vibrar ajustado.

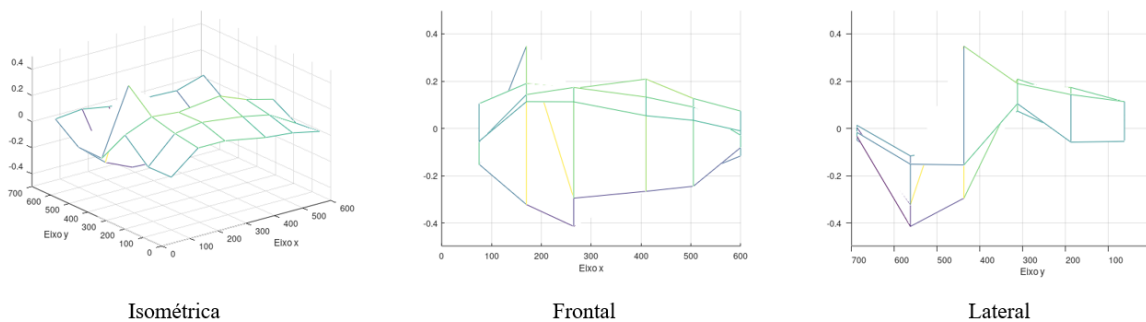


Figura 6.45 - Tela 2, mínima tração: 2° modo de vibrar ajustado.

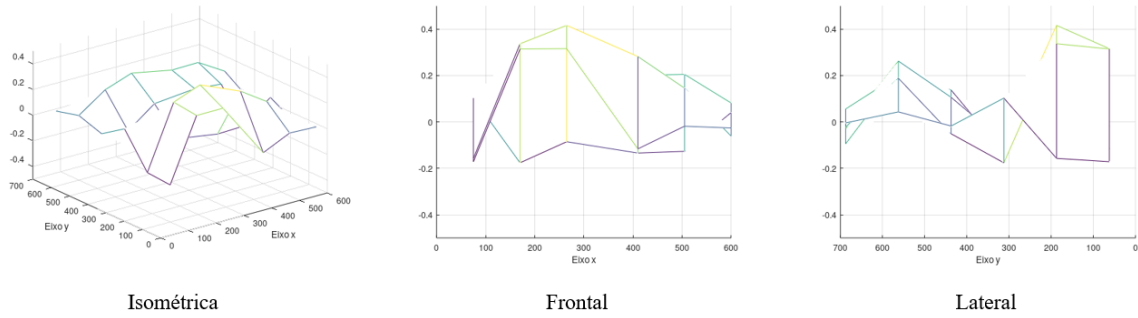


Figura 6.46 - Tela 2, mínima tração: 3º modo de vibrar ajustado.

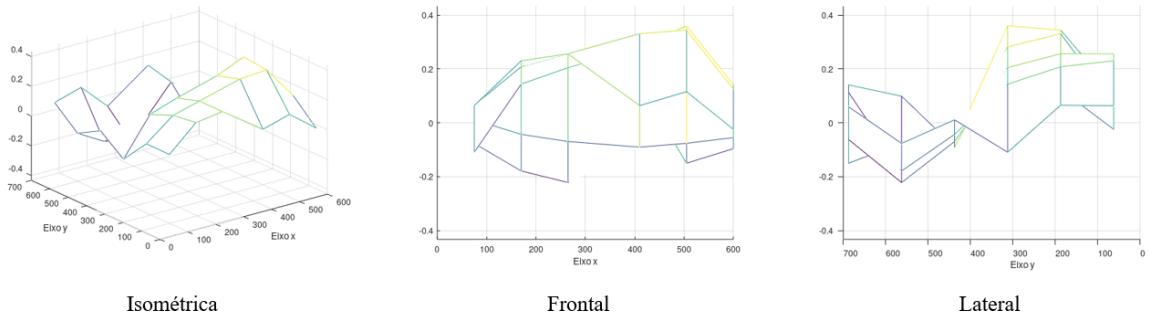


Figura 6.47 - Tela 2, mínima tração: 4º modo de vibrar ajustado.

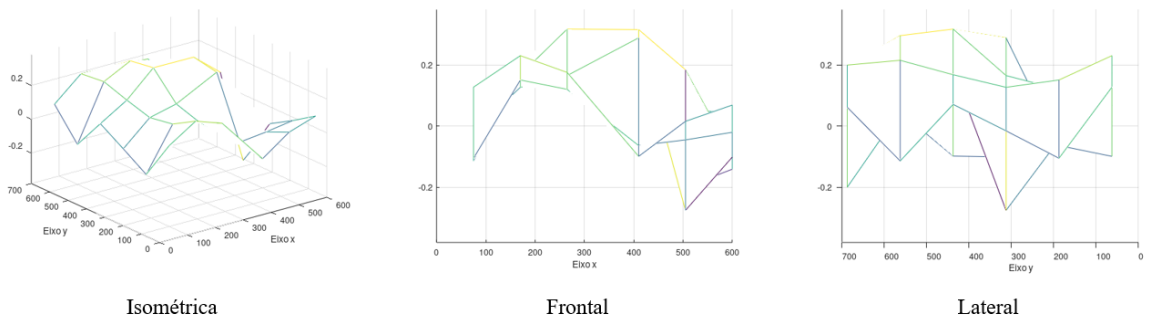


Figura 6.48 - Tela 2, mínima tração: 5º modo de vibrar ajustado.

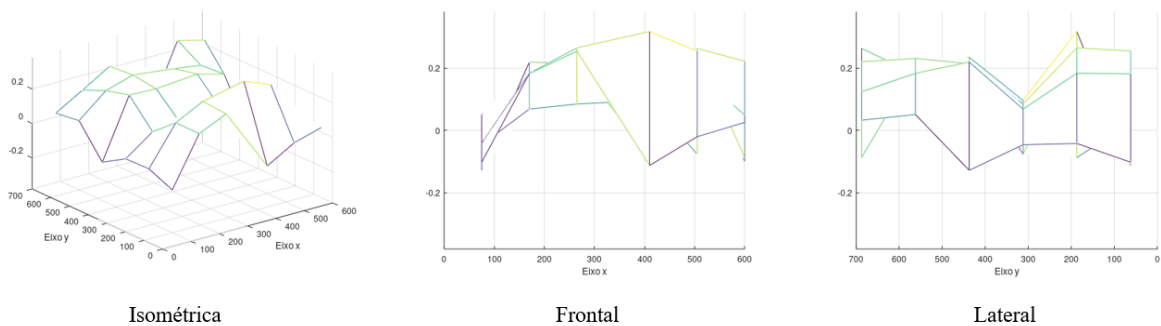


Figura 6.49 - Tela 2, mínima tração: 6º modo de vibrar ajustado.

Iniciando a análise dos modos obtidos, imediatamente percebe-se que o primeiro modo possui uma assimetria mais acentuada do que os demais já obtidos. A figura 6.45 mostra que

apenas alguns GDL possuem amplitude significativa. Esse fato pode ser indício de uma distribuição de tensão não uniforme ou alguma assimetria intrínseca da fabricação da tela, que resultou em alguma diferenciação de rigidezes localizadas. Os demais modos aproximam-se do comportamento já analisado para a tela 1.

Necessário ressaltar que, enquanto não existia nenhuma expectativa de paridade de frequências naturais e fatores de amortecimento, era esperado alguma similaridade entre modos. Com essa afirmação intenta-se dizer que, uma vez mantida as condições de contorno, quais sejam, a forma geométrica (retangular e de mesma dimensão) da malha e o tipo de engaste feito, os modos possíveis são os mesmos. Ainda que o valor numérico das frequências naturais associadas possa mudar e, com isso, a ordem nas quais os modos são obtidos, a forma geral deve permanecer semelhante. E esse comportamento aparenta estar presente, no qual as vistas frontais, exibem formas semelhantes a  $\frac{1}{2}$  período de uma senoide e a lateral apresenta múltiplos desses períodos. Obviamente, é preciso reconhecer que existem distorções mais severas nas formas e dificuldades maiores de identificação dos modos visualmente. Isso é mais um indício da presença de fatores externos não modelados nos ensaios realizados na tela 2. Essa hipótese nasce na análise dos espectros de entrada, perpassa as análises de coerência e agora apresenta indícios na análise dos modos.

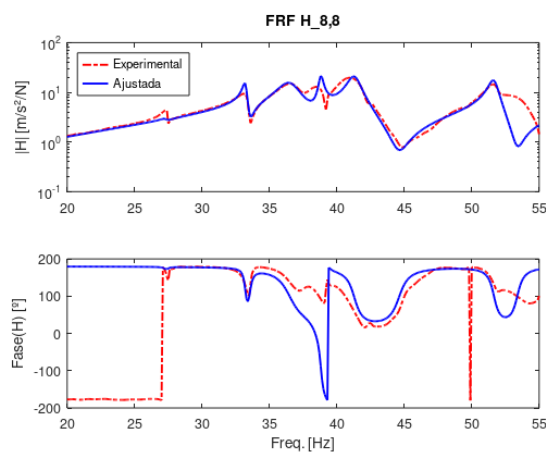


Figura 6.50 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_2$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{8,8}$ .

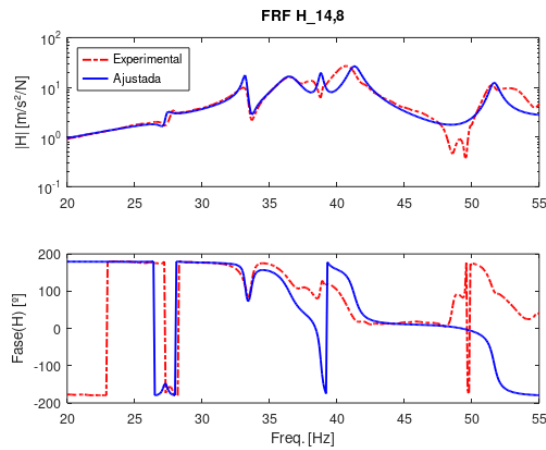


Figura 6.51 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_2$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{14,8}$ .

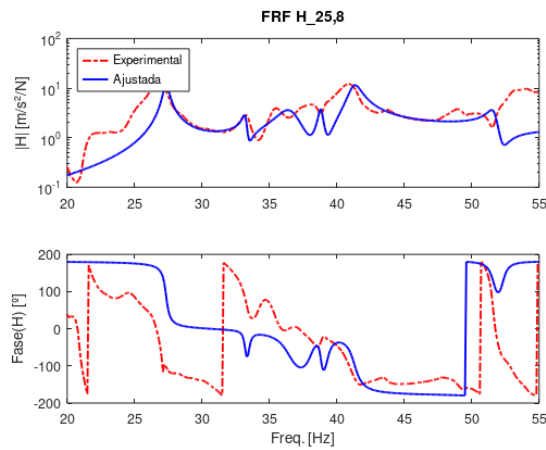


Figura 6.52 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_2$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{25,8}$ .

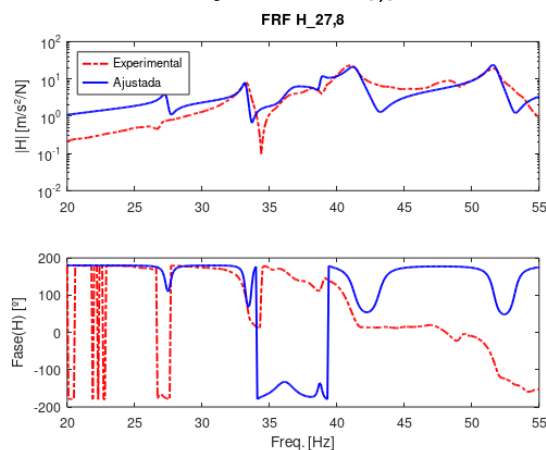


Figura 6.53 - Tela 2, ensaio com tração nominal  $T_2$ : Comparação entre resposta experimental e ajustada,  $H_{27,8}$ .

Para finalizar a seção de extração das propriedades modais, a mesma sequência de exibição dos ajustes, propriedades globais e modos é disponibilizada para a tela 2, em tensão

máxima. As figuras 6.50, 6.51, 6.52 e 6.53 contêm as FRF's ajustadas nos GDL previamente selecionados.

Claramente, existe uma deterioração da qualidade de ajuste em todas as FRF's, inclusive na referência,  $H_{g,8}$ , conforme figura 6.50. Nota-se que o tensionamento aproximou as respostas ressonantes do 3°, 4° e 5° modos, previamente mais espaçados em frequência. Novamente, é uma prova de que modos muito próximos introduzem muita dificuldade para o analisador modal baseado em apenas uma referência. Ou seja, como mais de um modo domina a resposta do sistema na região, nesse caso 3 modos visivelmente presentes, o modelo não é capaz de determinar corretamente a influência de cada um individualmente. As demais respostas estão contidas no apêndice E4.

A tabela 6.4 contém as propriedades globais obtidas para a tela 2, em tensão máxima. Vários aspectos chamam a atenção ao analisar a tabela 6.4 em relação à tabela 6.3. Primeiramente, o 1° modo não sofreu variação significativa no valor de sua frequência natural e fator de amortecimento, reforçando a hipótese de alguma assimetria construtiva ou distribuição de tensão não uniforme. Mas, ainda mais interessante do que isso é que, à primeira vista, as frequências dos 2° e 3° modos aumentaram de valor enquanto as do 4°, 5° e 6° diminuíram. Mas esse fato não é compatível com nenhuma explicação física possível.

Uma explicação plausível é que tais modos também tiveram suas frequências naturais incrementadas, mas isso causou modificação de ordem. O que vinha a ser previamente o sexto modo foi deslocado para fora do intervalo da análise, dessa forma, os atuais 5° e 6° modos são, na verdade, o 4° e 5° passados. Mas, segundo essa lógica, 5 modos deveriam estar presentes e não 5. Como dito anteriormente, o 3°, 4° e 5° modos estão muito próximos em frequência. É possível que, na análise passada, os modos coletados fossem na verdade contribuição da resposta de dois ou mais modos tão próximos que eram indistinguíveis entre si, para o analisador. Com o tensionamento, é possível que algum desses modos tenha sido mais influenciado que sua contraparte, se distanciando do agrupamento. Essa justificativa também encontra corroboração nos fatores de amortecimento obtidos. Se analisado, o fator de amortecimento do 3° modo na tabela 1 é substancialmente maior do que os demais, sugerindo que na verdade esse pico amortecido possa ser na verdade vários picos ressonantes próximos uns aos outros.



Tabela 6.4 - Tela 2, tração máxima: frequências naturais e fatores de amortecimentos.

	1° Modo	2° Modo	3° Modo	4° Modo	5° Modo	6° Modo
$\omega_r$ [Hz]	27,335	33,221	36,516	38,815	41,300	51,651
$\zeta_r \cdot 10^3$ [-]	7,331	4,592	21,912	4,176	11,230	6,714

As formas dos modos de vibrar obtidas estão dispostas nas figuras 6.54, 6.55, 6.56, 6.57, 6.58 e 6.59. Claramente, o primeiro modo permaneceu inalterado entre os ensaios, como suposto, figura 6.53, através da análise das frequências naturais. A figura 6.54 visualmente indica que o 2° modo é incompatível com o obtido no ensaio de menor tração. É possível identificar semelhanças entre o 4° e 5° modos do ensaio de menor tração com o 5° e 6° do de maior tensão, respectivamente, conforme cogitado nas análises das frequências naturais.

Ainda que não seja possível definir com exatidão, infere-se que algum modo dentre o 2° e 4° obtidos é um modo, ou combinação de modos, não aparente no ensaio com menor tração.

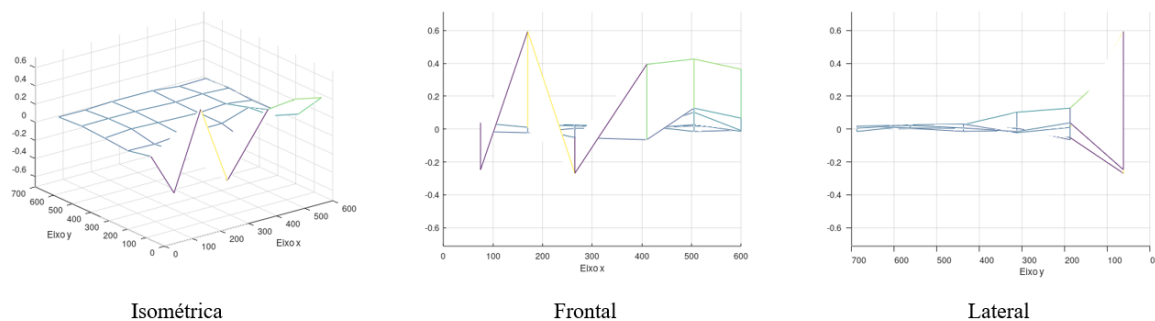


Figura 6.54 - Tela 2, máxima tração: 1° modo de vibrar ajustado.

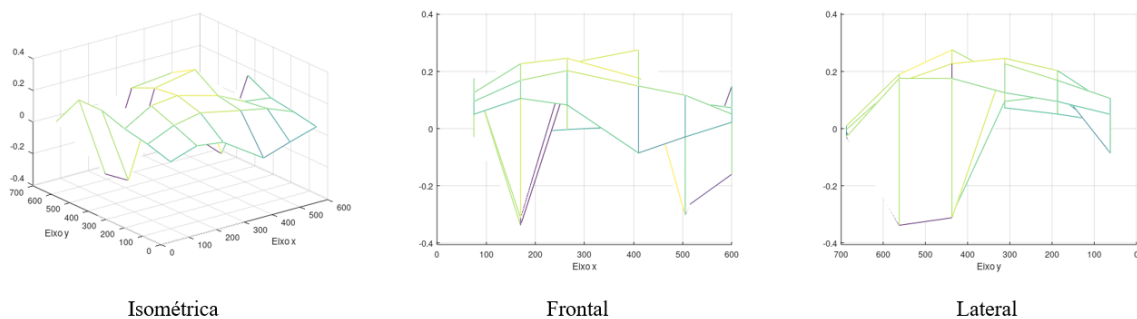


Figura 6.55 - Tela 2, máxima tração: 2° modo de vibrar ajustado.

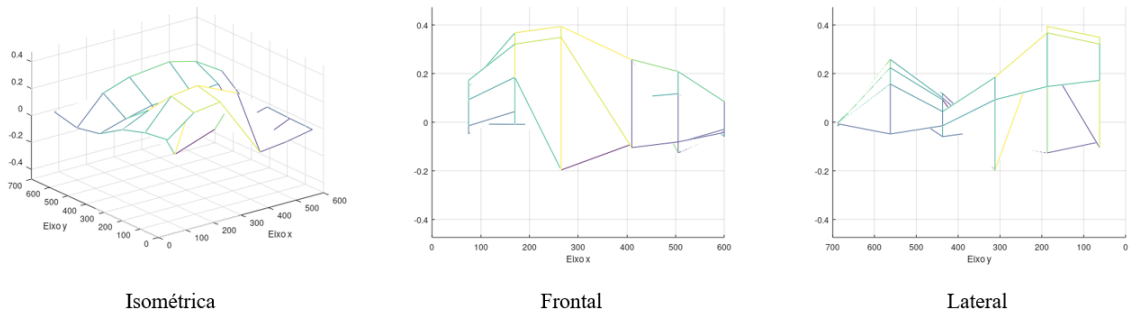


Figura 6.56 - Tela 2, máxima tração: 3º modo de vibrar ajustado.

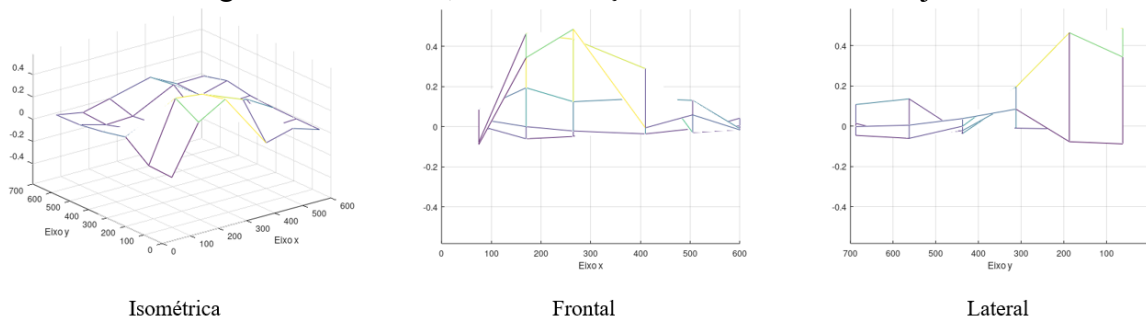


Figura 6.57 - Tela 2, máxima tração: 4º modo de vibrar ajustado.

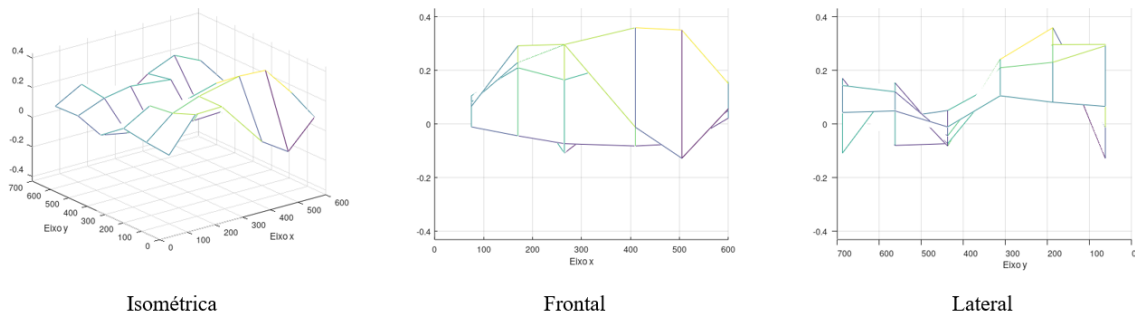


Figura 6.58 - Tela 2, máxima tração: 5º modo de vibrar ajustado.

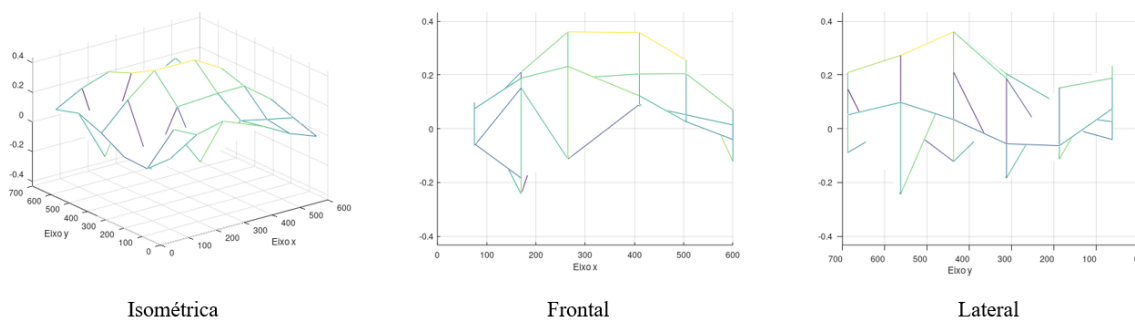


Figura 6.59 - Tela 2, máxima tração: 6º modo de vibrar ajustados

### 6.3 OBTENÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS DO MODELO COMPUTACIONAL ATRAVÉS DE OTIMIZAÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA

Essa seção conclui a exposição do desenvolvimento e resultados do trabalho com a obtenção das características mecânicas do modelo computacional - módulos de elasticidade das direções principais, módulo de cisalhamento e coeficiente de Poisson do plano - através de um processo de otimização da resposta modelada em relação à resposta experimental. Como já mencionado, o processo de otimização é feito através das propriedades modais do sistema e, portanto, consiste num procedimento de natureza dinâmica para obtenção das características mecânicas equivalentes.

Essa seção se divide em dois tópicos: o primeiro trata de uma validação da metodologia computacional de otimização para obtenção de características mecânicas (não representa validação do modelo proposto); o segundo tópico trata da aplicação da metodologia de otimização nos dados adquiridos experimentalmente e tratados sob a ótica da teoria exposta em busca da validação do modelo proposto.

#### 6.3.1 Validação da metodologia computacional de obtenção das características mecânicas

Conforme já exposto nessa seção de resultados, o comportamento do objeto em análise, malha metálica trançada, é complexo. De igual complexidade mostrou-se a coleta de dados experimentais de boa qualidade e subsequente extração das propriedades modais que são utilizadas no método de otimização da resposta dinâmica, que busca, por fim, definir as propriedades mecânicas do modelo equivalente. Nesse sentido, é necessário minimizar a variabilidade imposta pelos métodos de análise e tratamento dos dados. Como a metodologia de otimização proposta é intrínseca ao trabalho apresentado, ou seja, foi desenvolvida especificamente para o problema posto, é interessante que a incerteza associada ao método seja minimizada. Nesse sentido, um procedimento de validação da metodologia e seus resultados são apresentados.

Normalmente, procedimentos de validação de rotinas computacionais são construídos sobre respostas já conhecidas, eliminando a incerteza relacionada à referência utilizada, necessitando apenas comparar os resultados obtidos. É justamente esse o intento da validação apresentada.

Um modelo de malha de fios metálicos foi criado em elementos finitos através de uma tela simples de elementos de viga unidos nos nós, contudo sem a liberdade de rotacionarem livremente, ou seja, possuem movimentos acoplados. O espaçamento entre fios da direção  $x$  é de 2,5 mm e em  $y$ , 50 mm. O massa resultante do modelo é de 1,46 kg. Como no modelo experimental, duas arestas paralelas do quadrado que delimita a malha metálica foram engastadas. No mais, esse modelo também foi construído no Mecway<sup>®</sup>. A figura 6.60 contém uma ilustração do modelo da malha construída em elementos finitos, com suas condições de contorno.

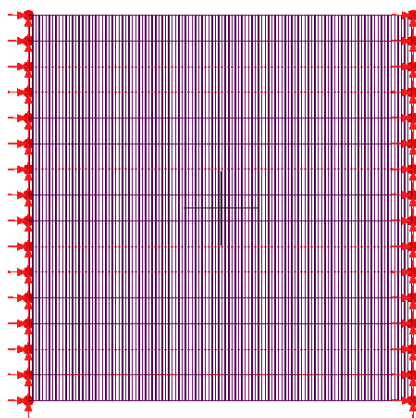


Figura 6.60 - Malha metálica modelada com elementos de viga.

Uma análise modal foi efetuada, construindo os 12 primeiros modos do sistema. A tabela 6.5 contém as frequências naturais. Como ilustração das formas de modo obtidas, o 1<sup>o</sup>, 7<sup>o</sup> e 11<sup>o</sup> modos são exibidos na figura 6.61.

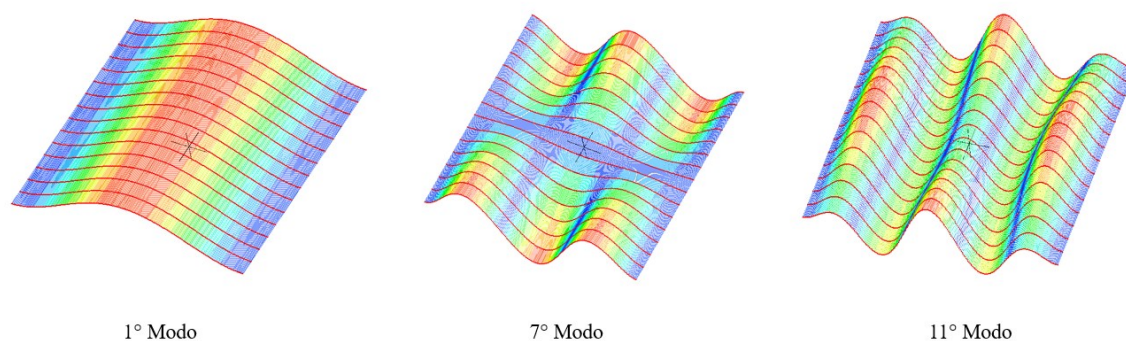


Figura 6.61 - Alguns modos de vibrar do modelo de malha metálica construído com elementos de viga.

Tabela 6.5 - Frequências naturais de malha metálica construída por elementos de viga.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°
$\omega_r$ [Hz]	1,81	4,13	5,01	8,75	9,81	10,8	14,4	16,2	17,1	21,4	24,2	24,2

Um modelo homogeneizado, com material ortotrópico de densidade equivalente  $\left(2605.89 \frac{kg}{m^3}\right)$  - considerando o volume do sistema como a área calculada pelas dimensões gerais da malha multiplicada pela espessura do fio -, e utilizando elementos de placa, foi construído exatamente como o descrito na seção de metodologia (seção 5.3.2). Os parâmetros adotados no procedimento de otimização da resposta dinâmica em busca das propriedades mecânicas equivalentes do sistema são aqueles contidos no apêndice D, em um primeira análise.

Uma comparação das frequências naturais obtidas no modelo e seus modos de vibrar correspondentes com a resposta do modelo de referência é fornecida na tabela 6.6, na qual exhibe-se o valor das frequências naturais obtidas; a diferença percentual entre modelo e referência; e a comparação dos modos correlatos através do MAC. A numeração dos modos é baseada nos modos da referência, ou seja, fixando a “posição” dos modos da referência, analisou-se a resposta do modelo e foram pareadas as respostas mais correlacionadas, através do MAC.

Claramente, a tabela 6.5, indica que existe alguma variabilidade entre a resposta do modelo com relação à referência, especialmente nos valores da frequência natural, mas em menor escala, não passando de uma diferença relativa de 7%. Interessante notar que a correlação entre os modos do modelo com a referência é excelente, em especial nos modos de menor ordem. Justifica-se uma variação maior em modos de maior ordem, uma vez que a forma mais complexa exige cada vez mais GDL para descrevê-la com sucesso. Nesse sentido, vale notar que a forma complexa do 11° modo da referência obteve a menor correlação, com valor de MAC de 0,80, inclusive causando uma inversão da ordem dos últimos modos obtidos no modelo.

Tabela 6.6 - Comparação entre frequências e modos de vibrar do modelo e da referência.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°
$\omega_r$ [Hz]	1,89	4,16	5,17	8,68	10,1	11,3	13,9	16,4	16,7	20,0	24,0	23,0
$\Delta\omega_r$ [%]	4,01	0,77	3,28	0,72	2,49	3,73	3,52	1,13	2,45	6,45	0,57	4,77
MAC	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,99	0,99	0,95	0,97	0,98	0,80	0,99

Na seção de exposição de ferramentas de validação de modelos, além da comparação numérica entre as frequências e modos apresentados, comentou-se sobre uma visualização gráfica entre as frequências modeladas e da referência e como essa disposição pode trazer informações mais pertinentes para o analisador (seção 4.2.1). A figura 6.62 contém esse diagrama.

Esse diagrama exibe uma curva ideal, na qual a resposta do modelo seria idêntica à de referência. Essa curva é uma reta, que passa pela origem e está inclinada em  $45^\circ$ . Nesse sentido o coeficiente angular é numericamente igual a unidade e o coeficiente linear é nulo. Em torno dessa curva, são dispostas as frequências obtidas do modelo versus de referência em forma de pontos. Uma regressão linear que correlaciona esses dados também é exibida.

Analisando a figura 6.62, enfim, percebe-se de maneira mais intuitiva o quão bem ajustado estão os modos de menor ordem, e fica claro a divergência nos de maior ordem. A dispersão em torno da curva ideal é justificável pela natureza estocástica do otimizador heurístico PSO, ainda que os dados de referência não possuam qualquer variância, já que são computacionais. Como já mencionado, esse otimizador realiza uma busca aleatória no espaço de resposta, ainda que orientada por um processo inteligente. Nesse sentido, sempre existirá uma variabilidade nas respostas obtidas. Esse é o preço a ser pago pela utilização desse tipo de otimizador.

Toda a análise anterior é corroborada pela regressão obtida: a proximidade da resposta é corroborada pela proximidade dos coeficientes angular e linear da unidade e da nulidade, respectivamente.

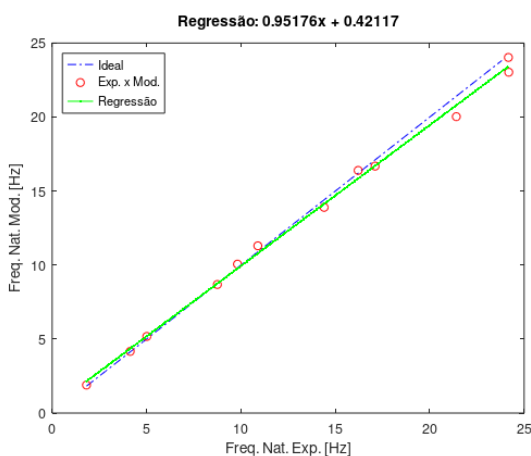


Figura 6.62 - Diagrama de comparação de frequências naturais modeladas e referências.

A figura 6.63 contém os modos de vibrar do modelo correlacionados com os modos de vibrar da referência exibidos em na figura 6.61. Nessa figura, percebe-se visualmente a distinta equivalência entre os primeiros e sétimos modos do modelo e referência, e fica claro a diferença entre o modo correlacionado com 11° da referência (nesse caso, o 13° do modelo).

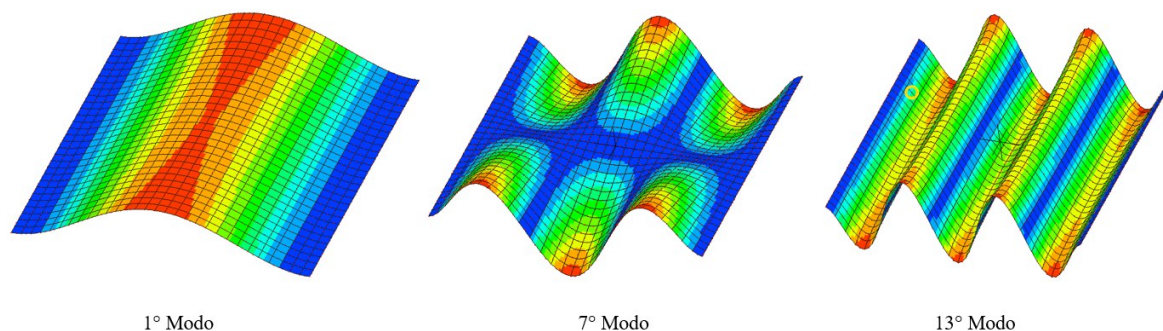


Figura 6.63 - Os modos de vibrar do modelo correlacionados com os modos da referência exibidos.

A tabela 6.7 contém as propriedades mecânicas equivalentes do modelo, obtidas no procedimento de otimização.

Tabela 6.7 - Propriedades mecânicas equivalentes do modelo computacional ajustado à referência de validação.

$E_1$ [GPa]	$E_1$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$\nu_{12}$ [-]
2,18	45,17	11,48	0,125

Uma última análise sobre a natureza do processo de otimização pode ser feita. Como mencionado inúmeras vezes, otimizadores heurísticos possuem natureza estocástica e, portanto, obtém respostas em função do estado de aleatoriedade de partida - por isso é necessário garantir estados aleatórios diferentes entre análises para obter resultados distintos. Mas um outro aspecto não analisado é que essa dependência é um binômio: além do estado de aleatoriedade, o otimizador depende, também, dos limites fornecidos para as variáveis de projeto.

No caso anterior, um intervalo muito largo - várias ordens de grandeza - foi fornecido. Isso é interessante num primeiro momento para determinar a região mais favorável de busca. Mas impede que uma análise minuciosa seja feita.

Nesse sentido, para demonstrar toda a capacidade do método, uma nova análise foi feita em torno das propriedades mecânicas obtidas (tabela 6.7) na tentativa de melhorar os resultados

encontrado. As mesmas análises são apresentadas. A tabela 6.8 contém a comparação das frequências e modos obtidos.

Tabela 6.8 - Comparação entre frequências e modos de vibrar do modelo e da referência.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°
$\omega_r$ [Hz]	1,79	3,94	4,98	8,50	9,85	10,7	14,1	16,4	17,0	21,1	24,6	23,7
$\Delta\omega_r$ [%]	1,22	4,49	0,55	2,77	0,40	2,11	1,79	1,13	0,77	1,30	1,79	1,81
MAC	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,97	0,99	0,99	0,98	0,99

Fica claro, pela tabela 6.8, que a melhora nos resultados obtidos é significativa: a maior variação percentual das frequências não ultrapassa 4,5% e, não somente isso, de forma geral os resultados estão menos dispersos. Quanto ao MAC, até mesmo os modos de maior ordem estão extremamente correlacionados, sendo que o menor valor é 0,96. Essas afirmações são corroboradas pelo diagrama contido na figura 6.63.

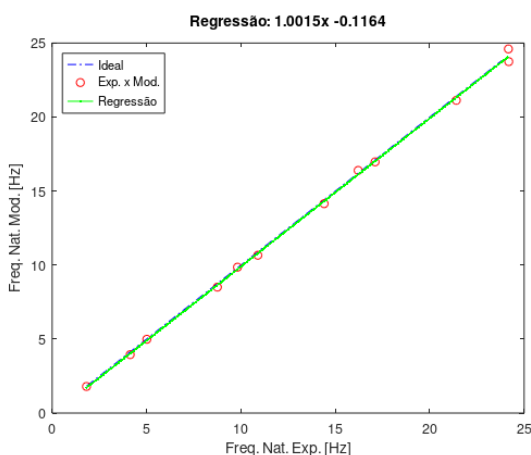


Figura 6.64 - Diagrama de comparação de frequências naturais modeladas e referências, intervalo de busca mais restrito.

Fica claro que a resposta ajustada do sistema reflete com exatidão aquela produzida pela referência, uma vez que a dispersão dos resultados em torno da reta ideal é mínima e a reta que descreve a relação entre modelo e referência é muitíssimo próxima da ideal, conforme mostra a imagem e os coeficientes angular e linear da regressão. Os modos correlacionados estão ilustrados na figura 6.65. As propriedades mecânicas ajustadas estão contidas na tabela 6.9.



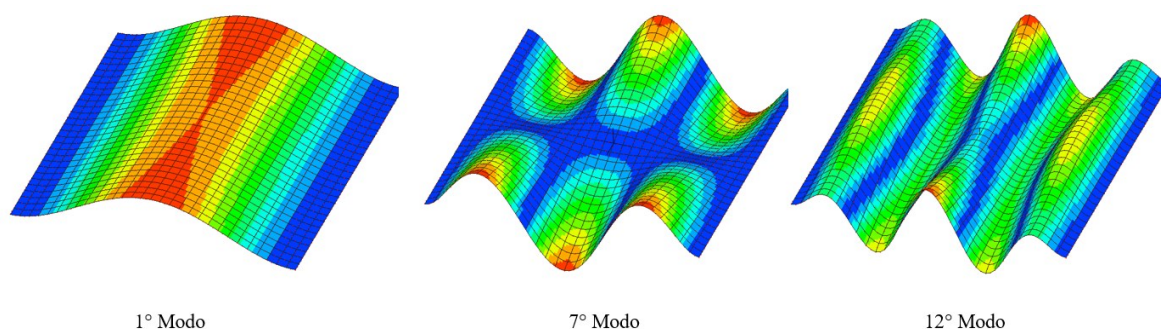


Figura 6.65 - Os modos de vibrar do modelo correlacionados com os modos da referência exibidos, obtidos com intervalo de busca mais restrito.

A figura 6.64 deixa claro o acréscimo de correlação entre os modos obtidos: a forma do 12º modo do modelo se assemelha sobremaneira ao 11º da referência, que é um modo de forma extremamente complexa. A tabela 6.9 mostra as variações executadas nas propriedades do modelo para obtenção da melhor resposta. Percebe-se que a maior variação é relativa ao módulo de elasticidade da direção principal  $y$ , que é a direção que contém grande parte dos fios da malha metálica e, portanto, supõe-se dominar a resposta do sistema.

Tabela 6.9 - Propriedades mecânicas equivalentes do modelo computacional ajustado à referência de validação, intervalo restrito em torno da resposta previamente obtida.

$E_1[GPa]$	$E_1[GPa]$	$G_{12}[GPa]$	$\nu_{12}[-]$
1,76	28,67	8,54	0,150

Analisando todo o conjunto de informações apresentadas, percebe-se que a metodologia de obtenção das características mecânicas do modelo homogeneizado ortotrópico através de otimização da resposta referência é válida, uma vez que foi capaz de descrever o comportamento dinâmico de um sistema composto por elementos discretos através de um modelo equivalente homogeneizado. Inclusive, é necessário destacar que a resposta referência possui modos associados a frequências naturais repetidas, ou seja, uma condição de alta complexidade.

No entanto, isso não significa que houve validação do modelo ortotrópico em si. Como dito, inclusive na disposição da teoria, um modelo de malha composto por elementos de viga pode ser insuficiente para modelar telas entrelaçadas reais. Novamente, o intento dessa validação é de tão somente verificar a capacidade de convergência da metodologia de extração de propriedades mecânicas equivalentes num processo de otimização da resposta dinâmica.

No mais, esses resultados também explicitaram todas as características associadas ao processo de otimização heurística: sua capacidade de convergir para região do espaço de busca relacionado a um ótimo do problema, bem como suas limitações devido à natureza estocástica.

### 6.3.2 Validação do modelo homogeneizado ortotrópico através da otimização da resposta dinâmica do modelo comparado aos experimentos

A finalização do trabalho proposto passa pelo ajuste das propriedades mecânicas do modelo computacional através do processo de otimização já descrito, utilizando as propriedades modais extraídas dos experimentos. Ressalta-se que o simples ajuste das propriedades mecânicas à resposta experimental não consiste em validação, necessariamente. Justamente para esse fim que foram realizados ensaios em dois níveis de tracionamento diferentes. Nesse caso, os parâmetros serão ajustados na resposta de menor tração e os resultados do modelo e experimento serão comparados no de maior tração.

Antes da exibição dos resultados é preciso fazer juízo dos dados experimentais obtidos: claramente o processo de aquisição de dados e subsequente extração das propriedades modais é altamente complexo e pode ser prejudicado por diversos fatores. Na seção de ajuste das respostas experimentais, seção 6.2.2, ficou claro que a aquisição de dados e extração de propriedades da tela do tipo 2 é deficiente. Especialmente pela incerteza relacionada à possível presença de múltiplos modos numa só resposta ressonante. Como foi demonstrado que o processo de otimização é bastante sensível ao modos de vibrar da referência, não há sentido em proceder com a otimização dos resultados obtidos para tela 2.

Sendo assim, os resultados apresentados e discutidos estão relacionados apenas com a resposta de tela 1. Novamente, os parâmetros utilizados no procedimento de otimização são aqueles descritos na seção 6.3.3 e contidos no apêndice D. A tabela 6.10 contém a comparação dos resultados obtidos.

Tabela 6.10 - Resultados obtidos do processo de otimização da resposta da tela 1, tração mínima.

	1° Modo	2° Modo	3° Modo	4° Modo	5° Modo
$\omega_r$ [Hz]	30,988	31,697	38,298	45,126	33,990
$\Delta\omega_r$ [%]	0,16	1,40	4,13	3,19	34,22
MAC	0,492	0,1875	0,387	0,321	0,146

A tabela mostra algo que era esperado, a correlação da forma dos modos do modelo e experimental é baixa. Claramente, nenhum modelo computacional de elementos finitos seria capaz de reproduzir as formas obtidas no experimento e nem deveriam, uma vez que as distorções são frutos de influências externas e/ou de uma incapacidade do analisador modal utilizado de extrair os modos corretamente. Dito isso, o otimizador foi capaz de ajustar as frequências naturais dos modos com maior nível de correlação possível de forma satisfatória, com exceção do 5º modo que está claramente pareado com um modo de menor ordem equivocadamente. Retirando o 5º modo da análise, o digrama das frequências do modelo versus experimento está ilustrado na figura 6.66.

O digrama exibe uma clara dispersão da disposição das frequências do modelo com relação a curva ideal. Isso era fato esperado, uma vez que a incerteza dos dados obtidos é razoável. No entanto, mostra que a tendência da curva de regressão se aproxima bastante da ideal, inclusive como um coeficiente angular bastante próximo da unidade. Logo, é possível inferir que existe um nível significativo de variabilidade aleatória nos dados experimentais, mas que, ainda assim, o otimizador foi capaz de convergir para um conjunto de propriedades mecânicas que representam, na média, a resposta da malha experimental.

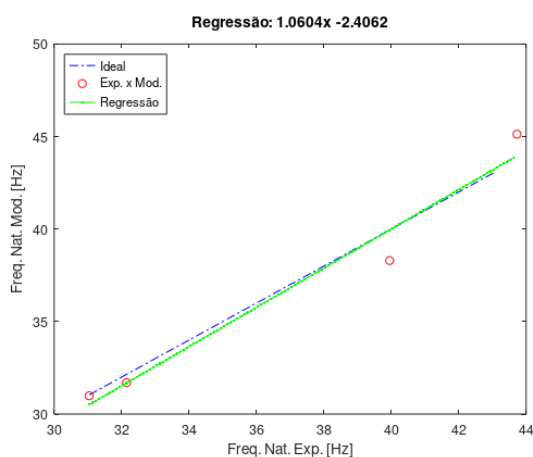


Figura 6.66 - Digrama de frequências do modelo versus frequências experimentais, tela 1, tração mínima.

É interessante visualizar os modos do modelo em igual disposição dos modos experimentais ajustados: vista isométrica, frontal e lateral, buscando comparação visual e elucidação de algumas conjecturas postuladas na seção de extração das propriedades modais (seção 6.2). As figuras 6.67, 6.68, 6.69 e 6.70 mostram os modos de vibrar do modelo que foram pareados de forma bem-sucedida.

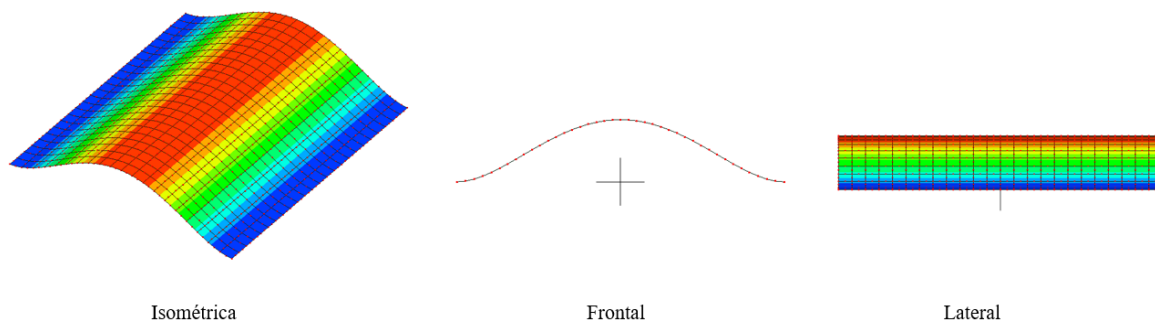


Figura 6.67 - Modelo da tela 1, mínima tração: 1º modo de vibrar.

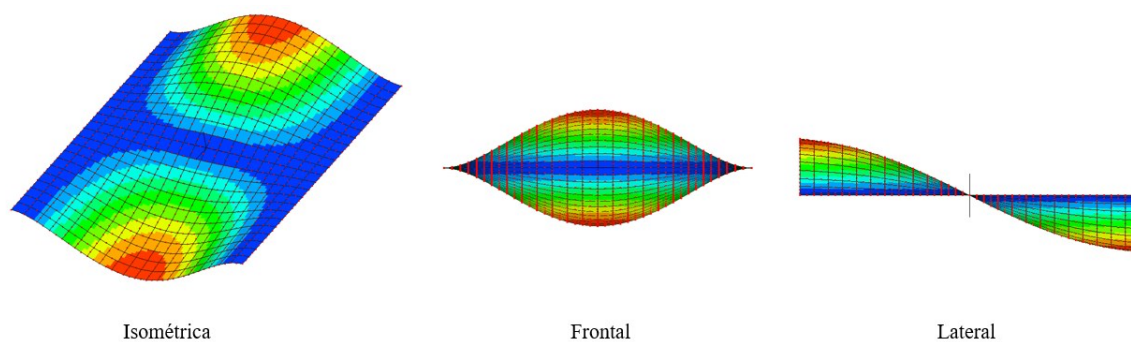


Figura 6.68 - Modelo da tela 1, mínima tração: 2º modo de vibrar.

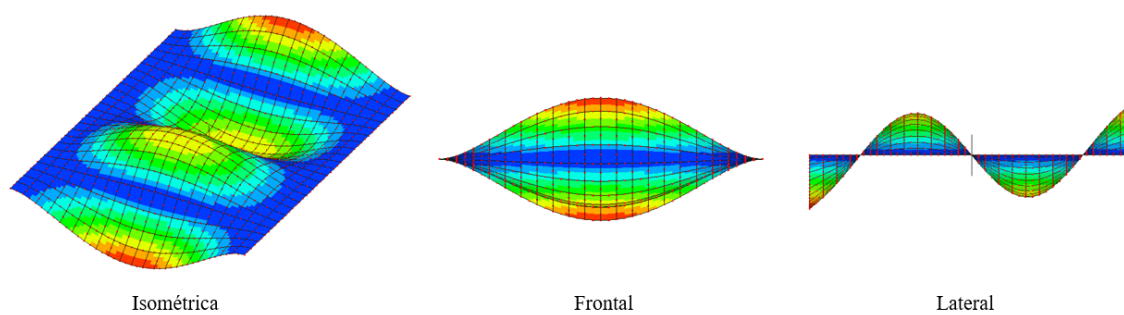


Figura 6.69 - Modelo da tela 1, mínima tração: 4º modo de vibrar.

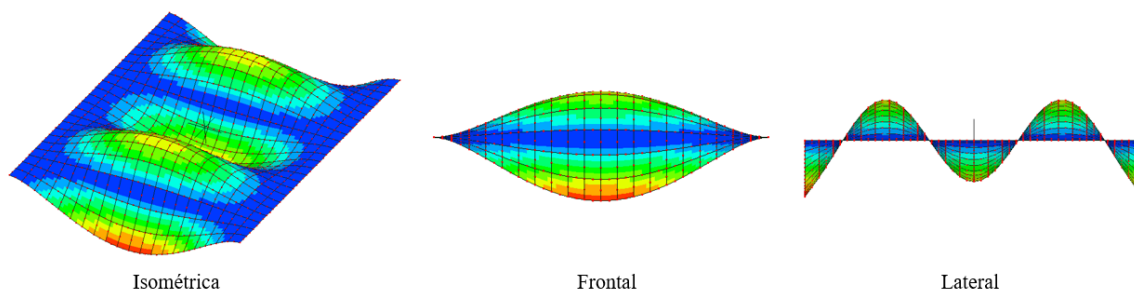


Figura 6.70 - Modelo da tela 1, mínima tração: 5º modo de vibrar.

As vistas dos modos de vibrar do modelo deixam muito clara as formas senoidais postuladas na seção de extração de propriedades modais. Em todas as figuras é possível visualizar, na vista frontal, uma forma que se aproxima de  $\frac{1}{2}$  período de uma senoide, seja isoladamente, como no caso da figura 6.66, ou composta através de um espelhamento na linha central, como é o caso das demais figuras, assemelhando-se aos indícios experimentais (figuras 6.26 a figura 6.30). Já na vista lateral, é visível a progressão de múltiplos de  $\frac{1}{2}$  períodos de um seno (aproximadamente). Essa característica corrobora e esclarece as análises já efetuadas.

Um fato curioso capaz de elucidar outras características do problema e procedimentos é o seguinte: tanto na extração dos modos de vibrar experimentais e nos computacionais, mencionou-se uma progressão de forma do modo, nas vistas laterais, em múltiplos inteiros de  $\frac{1}{2}$  período. No entanto, nos modos experimentais, não existe indício de uma forma que represente 1 período completo - de  $\frac{1}{2}$  pula-se para  $1\frac{1}{2}$  - e, claramente, o modelo contém tais formas, mas não só: também possui o modo perdido. A figura 6.71 contém tal modo e suas vistas.

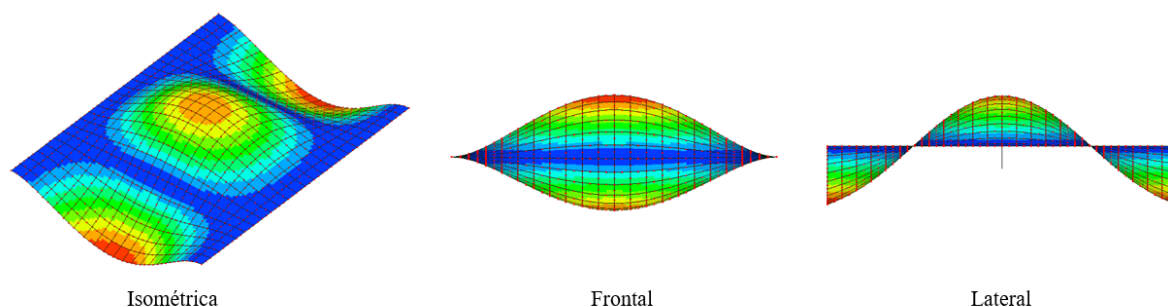


Figura 6.71 - Modelo da tela 1, mínima tração: 3° modo de vibrar.

Surge, assim, o questionamento do porquê, consistentemente, a análise experimental falhou em obter a tal forma. E a resposta é intuitiva: o local de impacto referência escolhido para os testes é uma região de nó do modo. A figura 6.72 ilustra claramente o fato.

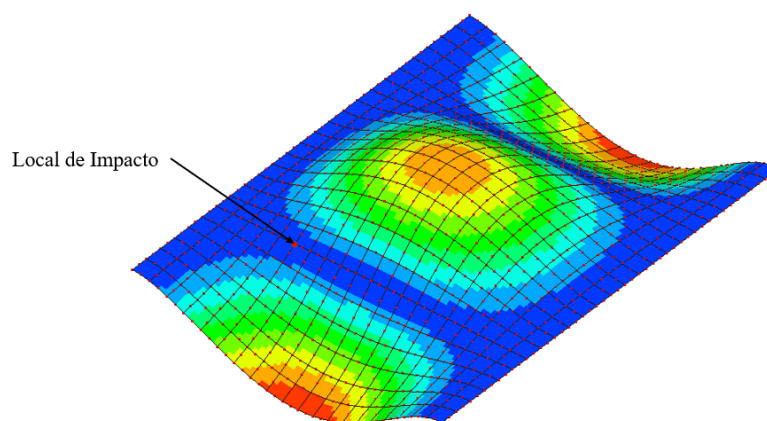


Figura 6.72 - Local de impacto reside em nó do 3º modo.

Isso implica que, independentemente da disposição dos demais GDL nos quais a resposta é mensurada, é virtualmente impossível que a resposta desse modo fosse visualizada experimentalmente. Dessa forma, fica ainda mais claro as dificuldades contidas na elaboração e execução do experimento e, também, reforça a necessidade de análise em nível global com mais de uma referência: essa é a única maneira de garantir que os modos sejam representados com fidelidade na banda de interesse. Ainda mais interessante é o fato de que, mesmo não fornecendo todos os modos contidos na banda de análise para a metodologia de ajuste através de otimização, o procedimento ajustou o modelo de forma a captar os modos não aparentes. Isso significa que a física por trás do comportamento é extraída corretamente, desde que um número suficiente de propriedades modais seja fornecido, ainda que não formem um conjunto completo.

A tabela 6.11 contém as propriedades mecânicas obtidas no procedimento de otimização. Analisando a tabela, percebe-se que a rigidez dominante do sistema é aquela associada aos fios disposta paralelamente ao eixo  $x$  do modelo, o que era esperado, já que é nessa direção que se encontram dispostos a maior parte dos fios, conforma a figura 6.1. Outro ponto interessante é o coeficiente de Poisson nulo: ainda que no âmbito de tecidos trançados o efeito de *crimp interchange* seja bastante relevante, no caso de malhas metálicas traçadas é possível que não exista um acoplamento tão acentuado como no caso dos tecidos já que os fios possuem rigidez à flexão substancialmente maior e o processo de fabricação não é tão minucioso, permitindo que folgas sejam geradas. Nesse contexto, um coeficiente próximo a nulidade não cria espanto. Ressalta-se, apenas, que, ainda que exista justificativa para um coeficiente nulo, não existe motivação física para um coeficiente negativo, quando da premissa

de introdução de um efeito análogo ao de Poisson é baseado no *crimp interchange*, por isso da restrição do intervalo de busca a valores não negativos.

Tabela 6.11 - Propriedades mecânicas equivalentes do modelo computacional ajustadas à resposta dinâmica da tela 1, tração mínima.

$E_1$ [GPa]	$E_2$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$\nu_{12}$ [-]
132,52	5,35	17,97	0,0

Último passo, portanto, é a comparação direta - sem ajustes - do modelo homogeneizado ortotrópico, utilizando as propriedades da tabela 6.11, tracionado em nível máximo com os resultados experimentais correlatos.

Tabela 6.12 - Resultados obtidos do modelo da resposta da tela 1, tração máxima.

	1° Modo	2° Modo	3° Modo	4° Modo
$\omega_r$ [Hz]	33,437	34,088	40,269	46,795
$\Delta\omega_r$ [%]	2,14	0,97	2,56	8,44
MAC	0,102	0,014	0,039	0,068

A tabela 6.12 mostra que as frequências naturais obtidas no modelo com tração máxima mantiveram um bom nível de correlação com as obtidas em experimento. Isso é sinal de que o modelo está de fato capturando parte da física do problema. O fato mais preocupante, no entanto, é a baixíssima correlação dos modos de vibrar computacionais e experimental. Como previamente elucidado, as formas dos modos não se alteram com aumento ou diminuição da tração imposta ao modelo, assim sendo, as formas dos modos obtidas no modelo em tração máxima são idênticas às formas do modelo em tração mínima. A diferença reside, portanto, nos modos experimentais extraídos. Já na seção 6.2.1 foi destacado que os modos obtidos no ensaio de maior tração continham maiores distorções se comparados com os obtidos no ensaio de menor tração. A queda na qualidade da extração dos modos experimentais justifica tamanha discrepância.

A figura 6.73 arremata a análise expondo do diagrama de comparação das frequências naturais. O comportamento permanece similar ao obtido no modelo ajustado: divergência baixa em relação à resposta ideal, com nível maior de dispersão em modos de maior ordem.

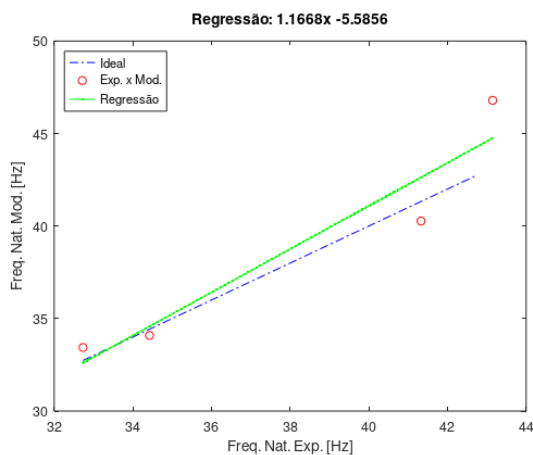


Figura 6.73 - Digrama de frequências do modelo versus frequências experimentais, tela 1, tração máxima.

De todas as análises realizadas e ponderações feitas, é possível dizer que o modelo de placa homogeneizada, com material suposto ortotrópico, é capaz de capturar as características físicas de uma malha metálica trançada. Contudo, devido às incertezas relacionadas aos dados experimentais, não seria possível afirmar que as propriedades mecânicas expostas da tabela 6.11 são as ideais para o modelo da tela 1 utilizada no experimento. É preciso realizar nova experimentação, com instrumentos de aquisição e análise melhores adaptados à complexidade do problema para que melhores estimadores das características modais sejam obtidos, associados a uma menor incerteza.



## CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES

Em suma, o trabalho evidenciou o papel central de malhas metálicas nas indústrias de mineração, fertilizante, farmacêutica e agregadas, ao contextualizar a função primordial que elas possuem na área de classificação e separação mecânica de materiais particulados sólidos. Explícito a motivação científica e econômica, um estudo dos modelos disponíveis da literatura foi realizado. Durante o processo, identificou-se que uma área muito frutífera nesses estudos é aquela relacionada ao estudo do comportamento de malhas têxteis para a indústria balística. Vários modelos foram revisados e um, em particular, destacou-se por sua simplicidade de implementação no ambiente de elementos finitos: um modelo contínuo homogeneizado supondo material com características ortotrópicas. Para o estudo da validade do modelo, procedimentos experimentais foram elaborados, passando desde o projeto e fabricação de bancada adequada às demandas específicas do problema até a elaboração de métodos de aquisição de sinais. Procedimentos computacionais também foram elaborados: rotinas computacionais para tratamento dos dados e construção das FRF's foram confeccionadas, bem como um analisador para extração das propriedades modais - todas as rotinas foram construídas no laboratório matricial *open-source* GNU Octave<sup>®</sup>; também foi proposta e construída uma metodologia, baseada na otimização heurística da resposta dinâmica do modelo em relação ao experimento, capaz de extrair as características físicas equivalentes do modelo proposto. Para tanto, lançou-se mão da utilização não só do Octave<sup>®</sup>, mas também de ferramentas de Python<sup>®</sup> e MS-DOS<sup>®</sup>, além da utilização do *software* de elementos finitos, de baixo custo, Mecway<sup>®</sup>.

Dito isso, a primeira conclusão surge da análise dos dados experimentais: o problema central do trabalho é complexo, qual seja, comportamento dinâmico de uma malha metálica. Nesse sentido, alguns procedimentos experimentais não obtiveram o êxito desejado. Ficou claro, por exemplo, que a utilização de entrada impulsiva como excitação para a tela não é recomendável, especialmente se imposta por martelo de impacto, uma vez que a baixa rigidez da malha dominará a resposta e impedirá que uma banda do espectro de frequência mais larga seja excitada. As FRF's, ainda que em sua maioria construída de sinais com coerência altíssima, apresentaram incongruências que podem ser fruto de influências externas. Esse fato remete, portanto, à qualidade da bancada de testes e metodologia experimental no geral. No entanto, talvez mais grave do que os fatores já mencionados, ressalta-se que a complexidade de uma malha metálica exige um analisador modal mais robusto, capaz de extrair as propriedades modais baseando-se em diversas respostas do sistema, simultaneamente. Só assim, modos encobertos nas respostas ressonantes de outros modos serão obtidos com confiabilidade. Não

são só os experimentos que indicam a presença de tal característica - frequências naturais repetidas ou muito próximas -, mas também os modelos computacionais construídos apresentam a proximidade de modos no espectro de frequência.

Por outro lado, foi evidenciado que a metodologia proposta para otimização das respostas dinâmicas do modelo e experimental é, sim, capaz de convergir para resultados promissores. Essa capacidade foi verificada em um processo de validação computacional, na qual a incerteza relativa aos dados de referência era nula. Em sequência, a aplicação da metodologia nos dados experimentais também foi bem-sucedida, levando em consideração os desafios já explicitados da parte experimental do trabalho. O otimizador foi capaz de obter as propriedades físicas equivalentes que levam o modelo proposto a exibir um comportamento similar ao observado em prática. Esse processo de validação, inclusive, foi realizado em um conjunto de dados nos quais não foram feitos procedimentos de ajuste, fornecendo maior credibilidade às conclusões. Novamente, ainda que seja necessário dados mais confiáveis para afirmar que as propriedades mecânicas obtidas no trabalho, quando aplicadas no modelo, geram resposta fiel à esperada, com certeza existem indícios de que o modelo proposto - contínuo homogeneizado, com material ortotrópico -, de forma geral, é capaz de capturar o comportamento físico de uma malha metálica, quando o objetivo da análise é o estudo do seu comportamento macroscópico.

## 7.1 PRÓXIMOS PASSOS E TRABALHOS FUTUROS

Como o modelo e metodologia computacional propostos apresentaram bom desempenho, resta aprimorar os métodos experimentais e as ferramentas de análise. Na parte experimental, sugere-se que as melhorias sejam feitas de forma a:

- Permitir e/ou facilitar a utilização de atuadores eletromecânicos (*shakers*) como fonte de excitação do sistema. Essa introdução vai possibilitar o controle da banda de frequência em análise, ainda que acabe por necessitar de maior número de amostras;
- Revisar o projeto de bancada de forma a aprimorar a liberdade de movimento das vigas de engaste na direção de tracionamento. Introduzir um pivô na fixação das vigas para que as forças de tração sejam resistidas apenas por esforços cortantes - essa modificação busca melhorar a distribuição das tensões impostas à malha;

- Adquirir e/ou confeccionar analisador modal capaz de analisar a resposta de vários conjuntos de FRF's simultaneamente, baseados em referências diferentes, para extração confiável das propriedades modais;
- Revisão da metodologia experimental, de maneira a fornecer os dados necessários para o novo analisador.

Outro passo natural e concomitante é o processo de síntese do método proposto e resultados obtidos para publicação acadêmica.

Por fim, como mencionado nos objetivos, o intuito final do modelo é ser implementado nos modelos computacionais completos dos equipamentos de separação e classificação mecânica. Dessa forma, a implementação da metodologia abre portas para diversos estudos. Alguns exemplos são:

- Otimização do processo de peneiramento, através da implementação da metodologia no estudo do comportamento das partículas, especialmente voltado para o método DEM;
- Otimização energética dos equipamentos, uma vez que o modelo permite simular diversas disposições de entrada e analisar os resultados, formando assim a base para o problema de otimização;
- Otimização estrutural dos componentes da tela, de forma indireta. Por exemplo, estudo de fadiga através da análise da energia de distorção à qual a tela é submetida em uso, com corroboração experimental.

## REFERÊNCIAS

- ANDA. **Setor de Fertilizantes—Anuário Estatístico de 2016**. 1ª ed. Associação Nacional para Difusão de Adubos (ANDA): São Paulo, Brasil, 2019.
- AVITABILE, P. *Modal Testing: A Practitioner's Guide*. Hoboken, John Wiley & Sons. 2016. Disponível em: < <https://doi.org/10.1002/9781119222989> >
- BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G. *Random Data*. 4 ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2016.
- CHADWICK, G. E.; SHORTER, S. A.; WEISSENBERG, K. *A trellis model for the application and study of simple pulls in textile materials*. Journal of the Textile Institute Transactions, 1949, 40:2, T111-T160. Disponível em: < <https://doi.org/10.1080/19447024908659444> >.
- CHEN, S.; DING, X.; YI, H. *On the Anisotropic Tensile Behaviors of Flexible Polyvinyl Chloride-coated Fabrics*. Textile Research Journal, 2007, 77(6): 369–374. Disponível em: < <https://doi.org/10.1177/0040517507078791> >.
- CRAIG, J.I.; BAUCHAU, O. A. *Structural Analysis: With Applications to Aerospace Structures*. New York: Springer, 2009.
- CRAIG, R.R. Jr.; KURDILA, A. J. *Fundamentals of Structural Dynamics*. 2ª ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2006.
- DONG, K. J.; YU, A. B.; BRAKE, I. *DEM simulation of particle flow on a multi-deck banana screen*. Minerals Engineering 2009, 22, 910–926. Disponível em: < <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2009.03.021> >.
- DONG, K. J.; WANG, B.; YU, A. B. *Modeling of Particle Flow and Sieving Behavior on a Vibrating Screen: From Discrete Particle Simulation to Process Performance Prediction*. Ind. Eng. Chem. Res. 2013, 52, 11333–11343. Disponível em: < <https://doi.org/10.1021/ie3034637> >.
- EWINS, D. J. *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. 2 ed. Baldock: Research Studies Press LTD., 2006.
- FARIAS, P. I. V. et al. *The Fertilizer Industry in Brazil and the Assurance of Inputs for Biofuels Production: Prospective Scenarios after COVID-19*. Sustainability 2020, 12, 8889. Disponível em: < <https://doi.org/10.3390/su12218889> >.
- FLADUNG, W.; ROST, R. *Application and Correction of the Exponential Window for Frequency Response Functions*. Mechanical Systems and Signal Processing, 1997, 11(1), 23–36. Disponível em: < <https://doi.org/10.1006/mssp.1996.0084> >.
- GILBERT, G. T. *Positive Definite Matrices and Sylvester's Criterion*. The American Mathematical Monthly, 1991, 44-46. Disponível em: < <https://doi.org/10.1080/00029890.1991.11995702> >.

GOGNA A.; TAYAL A. *Metaheuristics: review and application*. Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence, 2013. Disponível em: < <https://doi.org/10.1080/0952813X.2013.782347> >.

GRUJICIC, M.; BELL, W. C.; ARAKERE, G.; HE, T.; CHEESEMAN, B. A. *A meso-scale unit-cell based material model for the single-ply flexible-fabric armor*. Materials and Design, 2009, 30, 3690–3704. Disponível em: < <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.02.008> >.

HATCH, R. M. *Vibrations Simulation Using Matlab and Ansys*. 1 ed. New York: Chapman & Hall/CRC, 2001. Disponível em: < <https://doi.org/10.1201/9780367801663> >.

IFA. *Fertilizer Outlook 2020-2024*. 2020.

IFASTAT. *Database and Charts: Information, Supply and Consumption*. 2016. Disponível em: < <https://www.ifastat.org/databases/plant-nutrition> >. Acesso em 23 de agosto de 2021.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. *Particle Swarm Optimization*. IEEE, 1995. Disponível em: < <https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968> >.

KILBY, W. F. *Planar Stress–Strain Relationships in Woven Fabrics*. *Journal of the Textile Institute Transactions*, 1963, 54:1, T9-T26. Disponível em: < <https://doi.org/10.1080/19447026308659910> >.

KING, M. J.; JEARANAISILAWONG, P., SOCRATE, S. *A continuum constitutive model for the mechanical behavior of woven fabrics*. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42, 3867–3896. Disponível em: < <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.10.030> >.

KRAFT, S. M.; GORDON, A. P. *Characterization of the tensile behavior of a metallic fiber woven structure*. Textile Research Journal, 2011, 81(12), 1249–1272. Disponível em: < <https://doi.org/10.1177/0040517511398944> >.

KRAFT, S. M.; MOSLEHY, F. A.; BAI, Y.; GORDON, A. P. *Characterization of the Orthotropic Elastic Constants of a Micronic Woven Wire Mesh via Digital Image Correlation*. Society for Experimental Mechanics, 2013. Disponível em: < <https://doi.org/10.1007/s11340-013-9811-9> >.

KAWABATA, S., NIWA, M., KAWAI, H. *The finite deformation theory of plain weave fabrics. Part I to III*. Journal of Textile Institute, 1973, 64 (2), 21–85. Disponível em: < <https://doi.org/10.1080/00405007308630418> >.

NATIONAL INSTRUMENTS. *cDAQ-9171 Specifications*. Disponível em: < <https://www.ni.com/docs/en-US/bundle/cdaq-9171-specs/page/specs.html> >. Acesso em 16 de setembro de 2022.

NATIONAL INSTRUMENTS. *DAQ-9234 Specifications*. Disponível em: < <https://www.ni.com/docs/en-US/bundle/ni-9234-specs/page/specs.html> >. Acesso em 16 de setembro de 2022.

LI, J.; WEBB, C.; PANDIELLA, S. S.; CAMPBELL, G. M. *Discrete particle motion on sieves – a numerical study using DEM simulation*. Powder Technology 2003, 133, 190- 202. Disponível em: < [https://doi.org/10.1016/S0032-5910\(03\)00092-5](https://doi.org/10.1016/S0032-5910(03)00092-5) >.

LI, Z., TONG; X., ZHOU, B.; XANG, X. *Modeling and Parameter Optimization for the Design of Vibrating Screens*. Minerals Engineering 2015, 83, 149-155. Disponível em: < <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2015.07.009> >.

LOBATO, F. S. **Otimização Heurística e Otimização Multi-Objetivo: Algoritmos de Enxame de Partículas**. Faculdade de Engenharia Química, Universidade Federal de Uberlândia, 2021.

MAPA AGROSTAT. **Estatísticas de Comércio Exterior do Agronegócio Brasileiro**. Disponível em: < <https://indicadores.agricultura.gov.br/agrostat/index.htm> >. Acesso em 23 de agosto de 2021.

McCABE, W. L.; SMITH, C. J.; HARRIOTT, P. *Unit operations of chemical engineering*. 3 ed. New York: McGraw-Hill, 1993. 1130p., il.

MEIROVITCH, L. *Analytical Methods in Vibrations*. 1 ed. New York: MacMillan, 1966.

NELDER, J. A.; MEAD, R. *A simplex method for function minimization*. The Computer Journal, 7, 308-312. Disponível em: < <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308> >.

PARSONS, E. M.; KING, M. J.; SOCRATE, S. *Modeling yarn slip in woven fabric at the continuum level: Simulations of ballistic impact*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2013, 61, 265–292. Disponível em: < <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2012.05.005> >.

REDDY, J. N. *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. College Station: John Wiley & Sons, 2002.

ROYLANCE, D.; WILDE, A.; TOCCI, G. *Ballistic Impact of Textile Structures*. Textile Research Journal, 1973, 43- 34. Disponível em: < <https://doi.org/10.1177/004051757304300105> >.

ROYLANCE, D.; WANG, S.S. *Influence of Fibre Properties on Ballistic Penetration of Textile Panels*. Fibre Science and Technology, 1981, 14, 183-196. Disponível em: < [https://doi.org/10.1016/0015-0568\(81\)90010-5](https://doi.org/10.1016/0015-0568(81)90010-5) >.

ROYLANCE, D.; CHAMMAS, P.; TING, J.; CHI, H.; SCOTT, B. *Numerical Modeling Of Fabric Impact*. Proceedings of the National Meeting of the American Society of Mechanical Engineers, 1995.

SHAHKARAMI, A.; VAZIRI, R. *A continuum shell finite element model for impact simulation of woven fabrics*. International Journal of Impact Engineering, 2007, 34, 104– 119. Disponível em: < <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2006.06.010> >.

SHAMES, I. H.; PITARESSI, J. M. *Introduction to Solid Mechanics*. New Dehli: Prentice-Hall of India, 2003.

TALBI, El G. *Metaheuristics: From design to implementation*. 1<sup>a</sup> ed. Chichester: JohnWiley & Sons, 2009. Disponível em: < <https://doi.org/10.1002/9780470496916> >.

VERBOVEN, P. *Frequency-Domain System Identification for Modal Analysis*. 2002. 250p. Tese (Doutorado em Ciência Aplicada), Faculteit Toegepaste Wetenschappen, Brussels, 2002.

YARA. **Fertilizer Industry Handbook**. 2016.

WEISSENBERG, K. *The Use of a Trellis Model in the Mechanics of Homogeneous Materials*. Journal of the Textile Institute Transactions, 1949, 40:2, T89-T116. Disponível em: < <https://doi.org/10.1080/19447024908659443> >.

## APÊNDICE A - RELAÇÕES DE SIMETRIA EM MATERIAL ORTOTRÓPICO

Suponha um plano de simetria orientado paralelo ao eixo coordenado 1. Isso implica que o tensor de rigidez deve ser invariante em relação a transformação  $R$ , que representa uma reflexão em torno do plano determinado pela direção 1. A transformação  $R$  é tal que,

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contudo, essa transformação aplicada nos tensores tensão e deformação levam as seguintes relações,

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &= \sigma_1 & \varepsilon_1^* &= \varepsilon_1 \\ \sigma_2^* &= \sigma_2 & \varepsilon_2^* &= \varepsilon_2 \\ \sigma_3^* &= \sigma_3 & \varepsilon_3^* &= \varepsilon_3 \\ \sigma_4^* &= \sigma_4 & \varepsilon_4^* &= \varepsilon_4 \\ \sigma_5^* &= -\sigma_5 & \varepsilon_5^* &= -\varepsilon_5 \\ \sigma_6^* &= -\sigma_6 & \varepsilon_6^* &= -\varepsilon_6 \end{aligned}$$

Faça-se a expansão das tensões original e refletida, na direção 1,  $\sigma_1^*$  e  $\sigma_1$ . Tem-se, já levando em consideração as relações entre os conjuntos deformações original e refletido, que,

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6$$

$$\sigma_1^* = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 - C_{15}\varepsilon_5 - C_{16}\varepsilon_6$$

Subtraindo ambas as relações, sabendo que,  $\sigma_1^* = \sigma_1$ , obtém-se,

$$0 \equiv -2C_{15}\varepsilon_5 - 2C_{16}\varepsilon_6$$

Como a relação deve ser identicamente igual a zero, ou seja, independente dos valores das deformações,  $C_{15}$  e  $C_{16}$  devem ser nulos.



Repetindo esse processo descrito para as demais componentes de tensão normais e alguma das duas direções mutuamente ortogonais restantes, gera-se a relação em (2.4). (SHAMES; PITARESSI, 2003) apresentam o processo descrito em maiores detalhes.

## APÊNDICE B - FERRAMENTAS DE AQUISIÇÃO E TRATAMENTO DE SINAIS

A teoria à cerca de análise de sinais é extensa e complexa. Mesmo assim, existem conceitos básicos, contudo fundamentais, que necessitam ser reconhecidos para que a coleta de dados experimentais e subsequente tratamento sejam eficazes.

### B.1 TEOREMA DE AMOSTRAGEM E FREQUÊNCIA FANTASMA (*ALIASING*)

Suponha um sinal aleatório  $x(t)$ , ou seja, no domínio no tempo, que esteja definido no intervalo  $[0, T]$  - um sinal fisicamente exequível. Seja  $X(f)$  a transformada de Fourier do sinal  $x(t)$ , definida no intervalo de banda  $[-B, B]$ , onde  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ . É possível mostrar que o intervalo temporal de amostragem deve ser, no mínimo,

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{2B} \quad (\text{b.1})$$

na qual,  $f_s$  é a frequência de amostragem mínima necessária para obter todo o conteúdo em frequência, da banda  $[-B, B]$ . Essa equação representa o teorema Nyquist de amostragem (BENDAT; PIERSOL, 2010).

Supondo uma amostragem uniforme, ou seja,  $\Delta t = T/N$ , onde  $N$  é o número de aquisições no intervalo. Então, pode-se construir as seguintes relações,

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{T} \quad (\text{b.2})$$

$$N = 2BT = f_s T \quad (\text{b.3})$$

$$f_{max} = B = \frac{f_s}{2} \quad (\text{b.4})$$

As equações (b.2) e (b.3) são as mais interessantes, uma vez que normalmente são definidas, à priori, uma frequência máxima desejada e a resolução em frequência da aquisição,  $\Delta f$ . Com esses valores e as equações (b.2) e (b.3) é possível obter os demais parâmetros.

A frequência fantasma, ou *aliasing*, é um erro de amostragem relacionado à taxa de aquisição do sistema. Devido à natureza discreta do processo de amostragem, todo conteúdo em frequência que estiver acima da frequência máxima definida na banda,  $f_{max}$ , será refletido ao entorno dela, sendo inserido erroneamente no intervalo de aquisição. Para impedir tal erro é necessário a utilização de filtros analógicos do tipo passa-baixa, comumente já inseridos no dispositivo de aquisição. Ou seja, é necessário atenuar e, no limite, extinguir todo conteúdo do sinal analógico temporal com componentes em frequência acima da frequência máxima permitível (AVITABILE, 2018).

## B.2 VAZAMENTO E JANELAS

Outro erro de amostragem comum é conhecido por vazamento. Esse erro ocorre quando o sinal amostrado não é perfeitamente periódico no intervalo  $[0, T]$ . Em outras palavras, quando as frequências contidas no sinal não forem múltiplas inteiras da resolução em frequência  $\Delta f$ .

O efeito de tal erro é a dispersão de parte do conteúdo de uma frequência em específico na banda ao seu redor, daí o nome vazamento. Isso significa que tal erro é capaz, por exemplo, de mudar um sinal de natureza discreta no domínio da frequência (harmônico), para um com natureza contínua, configurando-se em um erro gravíssimo. Para análise modal, em específico, isso costumeiramente significa erros na obtenção dos modos e fatores de amortecimento (AVITABILE, 2018). Como é virtualmente impossível garantir a periodicidade do sinal adquirido para a maior parte dos experimentos, ferramentas que mitiguem tal efeito são desejáveis.

O conceito de janela, no tratamento de sinais, é intuitivo: aplicar um operador - no caso do domínio do tempo, multiplicação; na frequência, convolução - que transforme o sinal original para um com conteúdo nulo nas extremidades do intervalo de análise, no domínio do tempo, de forma suave e contínua, e que tenha o menor impacto nos conteúdos em frequência. Dessa forma, a aplicação da janela transforma o sinal original, não periódico no intervalo, em um pseudo-periódico.

Existem muitas definições e tipos de janelas, devido aos diversos tipos de aplicação e níveis de complexidade de implementação. Neste trabalho, o interesse recai sobre as janelas de força e exponencial.

### B.2.1 Janela de Força

A janela de força é intrínseca aos experimentos nos quais a sinal de entrada seja do tipo impulsivo. Um caso comum é o sinal gerado por um martelo de impacto.

Nesses casos, normalmente, a banda temporal significativa do sinal é diminuta se comparada com o intervalo de aquisição. Após um intervalo breve subsequente ao impacto, o sinal é dominado pelo ruído do canal. Dessa forma, a janela de força busca, tão somente, mitigar o efeito desse ruído. A figura b.1 ilustra a aplicação da janela - sinal verde, item (b) - no sinal impulsivo qualquer contaminado por ruído, item (a). O resultado pode ser visto no item (c).

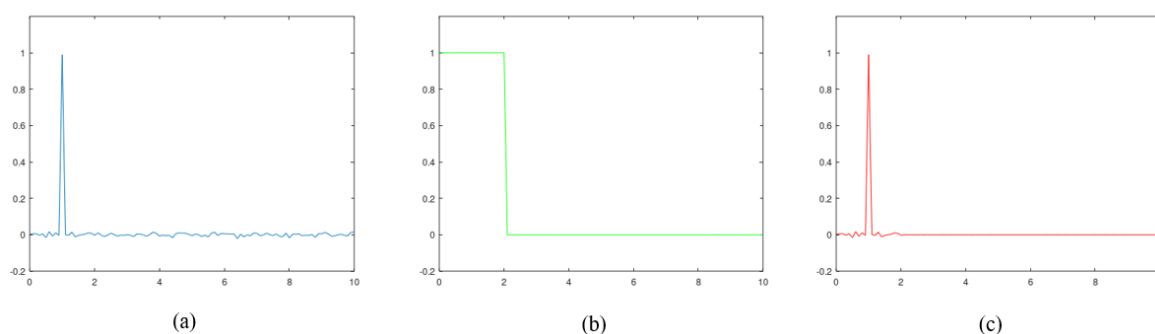


Figura B.1 - Forma e efeito da janela de força.

Fica claro que a janela de força preserva o conteúdo no intervalo do impacto, e anula o efeito do ruído na ausência do sinal. A definição matemática da janela de força,  $win_f$ , é como segue,

$$win_f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \leq \gamma N \\ 0, & \text{se } t > \gamma N \end{cases} \quad (\text{b.5})$$

na qual,  $0 < \gamma < 1$ .

### B.2.2 Janela Exponencial

A janela exponencial é utilizada em sinais com pico no início da aquisição e que decaem ao longo do intervalo. Ou seja, em sinais nos quais a aplicação de janelas tradicionais, como a Hanning, que afunilam os sinais em sua extremidade, eliminaria a parte mais significativa da aquisição, é recomendado o uso da janela exponencial.

A janela exponencial,  $win_e$ , como o nome sugere, é uma função exponencial, paramétrica em  $\beta$ , tal que, na parte positiva do domínio,

$$win_e(n) = \exp\left(-\beta \frac{n}{N}\right) \quad (b.6)$$

O parâmetro  $\beta$  pode ser obtido através da definição do valor da janela em dois pontos do intervalo. Por simplicidade, suponha  $win_e(0) = 1$ , e  $n_t$  o segundo ponto de ajuste, no qual um valor deve ser atribuído para  $win_e(n_t)$ . Dessa maneira,

$$\beta = \frac{-\ln(win_e(n_t))N}{n_t} \quad (b.7)$$

Ao aplicar a janela exponencial, é possível demonstrar que essa operação não modifica os valores das frequências naturais do sistema, nem das constantes modais, mas, de fato, modifica o valor dos fatores de amortecimento. Esse fato é demonstrado para o caso em que a janela é aplicada tanto no sinal de entrada como no de saída (FLADUNG; ROST, 1997).

### B.3 ESTIMADORES DA FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Uma vez adquiridos corretamente os sinais e realizado o tratamento, como a aplicação da sensibilidade dos instrumentos, janelas etc., é necessário construir o modelo de resposta do sistema: as FRF's. Para tanto, é preciso introduzir alguns conceitos com a definição de espectros e funções de correlação.

Os espectros de um sinal são as transformadas de Fourier das funções de autocorrelação e correlação cruzada de sinais para um par de funções aleatórias estacionárias, como definido abaixo:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau)dt \quad (b.8)$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau)dt \quad (b.9)$$

$$G_{xx}(\omega) = 4 \int_0^T R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} dt \quad (\text{b.10})$$

$$G_{xy}(\omega) = 4 \int_0^T R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} dt \quad (\text{b.11})$$

onde  $R_{xx}(\tau)$  e  $R_{xy}(\tau)$  são as funções de autocorrelação e correlação cruzada entre sinais aleatórios estacionários;  $G_{xx}(\omega)$  e  $G_{xy}(\omega)$  são os autos espectros e espectros cruzados de banda positiva (apenas definido para  $0 \leq \omega < \infty$ ; caso contrário é nulo).

A definição dos espectros é útil, uma vez que é possível demonstrar que,

$$G_{xx}(\omega) = H(j\omega)G_{xy}(\omega) \quad (\text{b.12})$$

$$G_{yx}(\omega) = H(j\omega)G_{xx}(\omega) \quad (\text{b.13})$$

Dessa forma, é possível reconstruir a FRF através dos espectros dos sinais de entrada e saída do sistema mecânico em análise (EWINS, 2000).

No entanto, as equações (b.8) a (b.11) são definições teóricas, partindo do pressuposto que é possível ter ciência de todo o histórico temporal das variáveis aleatórias. Na prática, isso é impossível. Nesse caso, é necessário trabalhar com estimadores dos espectros das variáveis aleatórias. É possível mostrar que os estimadores são da seguinte forma (BENDAT; PIERSOL, 2010):

$$\hat{G}_{xx}(\omega) = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} X_k^*(\omega) X_k(\omega) \quad (\text{b.14})$$

$$\hat{G}_{yy}(\omega) = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} Y_k^*(\omega) Y_k(\omega) \quad (\text{b.15})$$

$$\hat{G}_{xy}(\omega) = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} X_k^*(\omega) Y_k(\omega) \quad (\text{b.16})$$

nas quais,  $n_a$  é o número de amostras realizadas;  $X_k(\omega)$  e  $Y_k(\omega)$  são resultados da transformada discreta de Fourier da  $k$ -ésima amostra das variáveis aleatórias e  $(.)^*$  é o operador de conjugação complexa.

Outro conceito importante em análise de sinais é o de coerência ( $\gamma_{xy}^2$ ): a coerência é um indicativo de correlação os sinais de entrada com de saída. Tal é sua formulação,

$$\gamma_{xy}^2 = \frac{|G_{yx}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega)G_{yy}(\omega)} \quad (\text{b.17})$$

Dessa forma, a coerência é essencial para a determinação da qualidade ou falta dela em uma aquisição de sinais experimental.

Devido à natureza estocástica do processo experimental e quantidade finita de amostras obtidas, existem erros de natureza aleatória e sistemática nos estimadores definidos nas equações (b.14), (b.15) e (b.16), utilizados para construção da FRF.

Conforme Bendat e Piersol (2010), os erros aleatórios e sistemáticos associados à construção de uma FRF através de estimadores de auto espectro e espectro cruzado de um sinal aleatório gaussiano são definidos por,

$$\varepsilon_r[|H|] = \frac{\sqrt{1 - \gamma_{xy}^2}}{|\gamma_{xy}| \sqrt{2n_a}} \quad (\text{b.18})$$

$$\varepsilon_b[|H|] = \frac{(1 - \gamma_{xy}^2)^2}{n_a} \quad (\text{b.19})$$

As relações (b.18) e (b.19) mostram que os erros aleatório,  $\varepsilon_r$ , e sistemático,  $\varepsilon_b$ , associados aos valores esperados do módulo de um FRF são funções da coerência entre os sinais adquiridos e o número de amostras realizadas,  $n_a$ . Quanto maior o número de amostras e mais próximo da unidade for a coerência, menor será o erro associado à experimentação.

## APÊNDICE C - OTIMIZAÇÃO: CONCEITO E MÉTODOS

Seja  $f(\{x\})$  uma função das componentes do vetor  $\{x\}$ . Seja  $X$  espaço que contém todas as possíveis configurações compatíveis de um vetor na forma  $\{x\}$ , tal que,  $\forall \{x\} \in X$ . Nesse caso, denomina-se  $X$  o espaço das soluções possíveis. A função  $f(\{x\})$ , em retorno, associa - não necessariamente de maneira única - um valor escalar a cada conjunto de soluções,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Os diversos valores obtidos pela aplicação da função  $f$  sob um conjunto solução do espaço  $X$ , podem ser ranqueados, obtendo do menor ao maior valor possível. É justamente o processo que determina o subconjunto de indivíduos  $\{x\}_1, \{x\}_2, \dots, \{x\}_n$  associados a valores mínimos ou máximos de  $f$  que caracteriza uma otimização (TALBI, 2009). À função  $f$  atribui-se a denominação de função objetivo. Às componentes do vetor  $\{x\}$  denominam-se variáveis de projeto.

Alguns conceitos da definição provida acima podem ser destrinchados: ao especificar a necessária compatibilidade dos vetores, remete-se à ideia de restrições: normalmente, as componentes que formam o vetor não podem assumir quaisquer valores; como não há obrigatoriedade, por definição, que a função  $f$  associe unicamente um valor a um vetor de variáveis de projeto, é possível que um subconjunto de vetores de variáveis obtenha o mesmo resultado; ao analisar todo o espaço  $S$ , o subconjunto de todos os vetores que estejam relacionados com o mínimo/máximo da função objetivo é denominado ótimo global, caso apenas parte do espaço (um subespaço) seja analisada, o subconjunto dos vetores que minimizam/maximizam a função é denominado um ótimo local, uma vez que pode existir algum vetor no espaço  $X$ , não contido no subespaço em análise, relacionado a um valor ótimo melhor que o obtido.

Diversos são os problemas que originam uma função objetivo, por isso, diversas são suas formas. Os métodos clássicos de otimização através da análise de gradiente tratam de funções objetivos lineares e diferenciáveis. No entanto, problemas reais frequentemente resultam em funções objetivo não-lineares e descontínuas. Existem métodos que conseguem trabalhar problemas nessa seara, os chamados *non-linear programming*, como o Simplex (NELDER; MEAD, 1965), mas devido a problemas de dimensionalidade do espaço de busca, interação entre parâmetros, descontinuidade, entre outros, eventualmente esses métodos também encontram barreiras intransponíveis (TALBI, 2009). Nesse contexto, os métodos heurísticos ou metaheurísticos são uma possível solução.



## C.1 OTIMIZAÇÃO HEURÍSTICA

Otimização heurística é, segundo Gogna e Tayal (2013), um processo de geração inteligente que guia uma rotina heurística subordinada de busca, com objetivo de vasculhar e explorar o espaço das variáveis de projeto. A vantagem da otimização heurística, segundo Talbi (2009), é a ausência da necessidade de um modelo matemático analítico para a realização da busca de otimização. A otimização heurística é capaz de trabalhar com o conceito de *black box*, na qual o modelo explícito não é conhecido, sendo fornecido apenas a resposta do sistema a determinadas entradas (TALBI, 2009).

Diferentes tipos e implementações de métodos de otimização heurística existem. Destaca-se o precursor, que gerou uma onda de novas proposições - hoje bastante conhecido -, o algoritmo genético, como exemplo de um método heurístico. Nesse caso, é um método inspirado em processos naturais, baseados em populações. Outro método com características semelhantes, mas com implementação mais moderna, é a otimização por enxame de partículas - *particle swarn optimization* (PSO) (KENNEDY; EBERHART, 1995).

### C.1.1 Otimização por enxame de partículas

A otimização por enxame de partículas, o PSO, é, como aludido na seção anterior, um processo de busca heurística, ou seja, um processo de busca, à princípio, aleatório do mínimo da função objetivo, mas guiado por alguma rotina decisória inteligente.

A inspiração do método é a capacidade de certos grupos de indivíduos de se organizarem em conjunto e, em sentido global, tornarem-se um organismo único, sem perder as vantagens do indivíduo. Um exemplo clássico seria as revoadas de pássaros e cardumes de peixes. Essa dualidade define a metodologia básica do PSO: cada indivíduo é capaz de analisar o ambiente, transmitir essa informação para o grupo, e, em retorno, obter a sínteses dessas informações através do comportamento do grupo, como um todo (KENNEDY; EBERHART, 1995).

A interpretação matemática do método é a seguinte: cada indivíduo da população, nesse caso uma partícula, se encontra num espaço n-dimensional, e está em busca do melhor ponto geométrico disponível nesse espaço. Como as partículas buscam um local, é preciso associar a elas posição e velocidade. A posição é justamente as coordenadas do espaço n-dimensional, que no caso são as variáveis de projeto. Em cada posição, o indivíduo é capaz de quantificar o “bem-estar” que aquela posição lhe traz, ou seja, avaliar a função objetivo. A cada iteração de avaliações, a partícula memoriza a posição que lhe trouxe melhor retorno e está ciente da

posição que trouxe melhor retorno para o grupo, ou seja, é definido os melhores valores da função objetivo para cada indivíduo e para o grupo, como um todo. De posse dessas informações, a partícula é induzida a procurar uma nova posição, ou seja, uma velocidade é definida. Interessante ressaltar que, nesse percurso de busca, fatores aleatórios podem influenciar a posição obtida, como estão sujeitos à fatores externos os indivíduos que inspiraram o método. Caso a nova posição seja individualmente melhor para a partícula em questão, ela se estabelece ali. Se não, retorna à posição de maior conforto. Nesse processo iterativo o enxame percorre o espaço de busca e, identificado o melhor ponto, as partículas se reorganizam em torno do mesmo.

O algoritmo que define esse procedimento é como segue (LOBATO, 2021). Seja  $x_i(k)$  posição da partícula  $i$ , na iteração  $k$ . Seja  $p_i$  e  $p_g$  a melhor posição para tal indivíduo e a melhor do grupo, respectivamente. Sejam  $\gamma_i$  e  $\gamma_g$  fatores cognitivos que ponderam as respostas da partícula à uma inclinação entre o comportamento individual e o comportamento de grupo. Seja  $\delta$  um fator de inércia que resiste à modificação da velocidade. E por fim, sejam  $r_i$  e  $r_g$  os agentes de modificação estocásticos.

A velocidade da iteração seguinte,  $k + 1$ , é tal que,

$$v_i(k + 1) = \delta v_i(k) + \gamma_i r_i [p_i - x_i(k)] + \gamma_g r_g [p_g - x_i(k)] \quad (c.1)$$

na qual,  $r_i$  e  $r_g$  são valores aleatórios com distribuição uniforme, limitados no intervalo  $[0,1]$ ; os parâmetros  $\delta$ ,  $\gamma_i$  e  $\gamma_g$  são definidos pelo analista e podem ultrapassar a unidade.

Interessante ressaltar que, normalmente, os coeficientes são uma função linear no número de iterações, visando modificar o comportamento do indivíduo ao longo do processo, na qual, nas primeiras iterações maior ênfase é fornecida ao comportamento individual, ao final do processo, a ênfase seja nos resultados do grupo. Isso garante exploração do espaço de busca, mas também foco na região mais promissora.

Definida a velocidade, o novo local de busca é tal que,

$$x_i(k + 1) = x_i(k) + v_i(k + 1) \quad (c.2)$$

De posse dos operadores, a procedimento se resume em: definir aleatoriamente as posições das partículas que compõe a população; avaliar a função objetivo, armazenando os melhores valores de função objetivo individuais e globais; atualizar o vetor velocidade; definir

nova posição e avaliar a função objetivo: caso a posição seja mais vantajosa, atualizar a posição do indivíduo, se não, manter a posição; repetir o processo pelo número de iterações definidas ou até que um critério de parada definido seja atingido.

## APÊNDICE D - TABELAS DO PROCEDIMENTO DE OTIMIZAÇÃO

Tabela D.1 - Intervalos de busca das propriedades mecânicas.

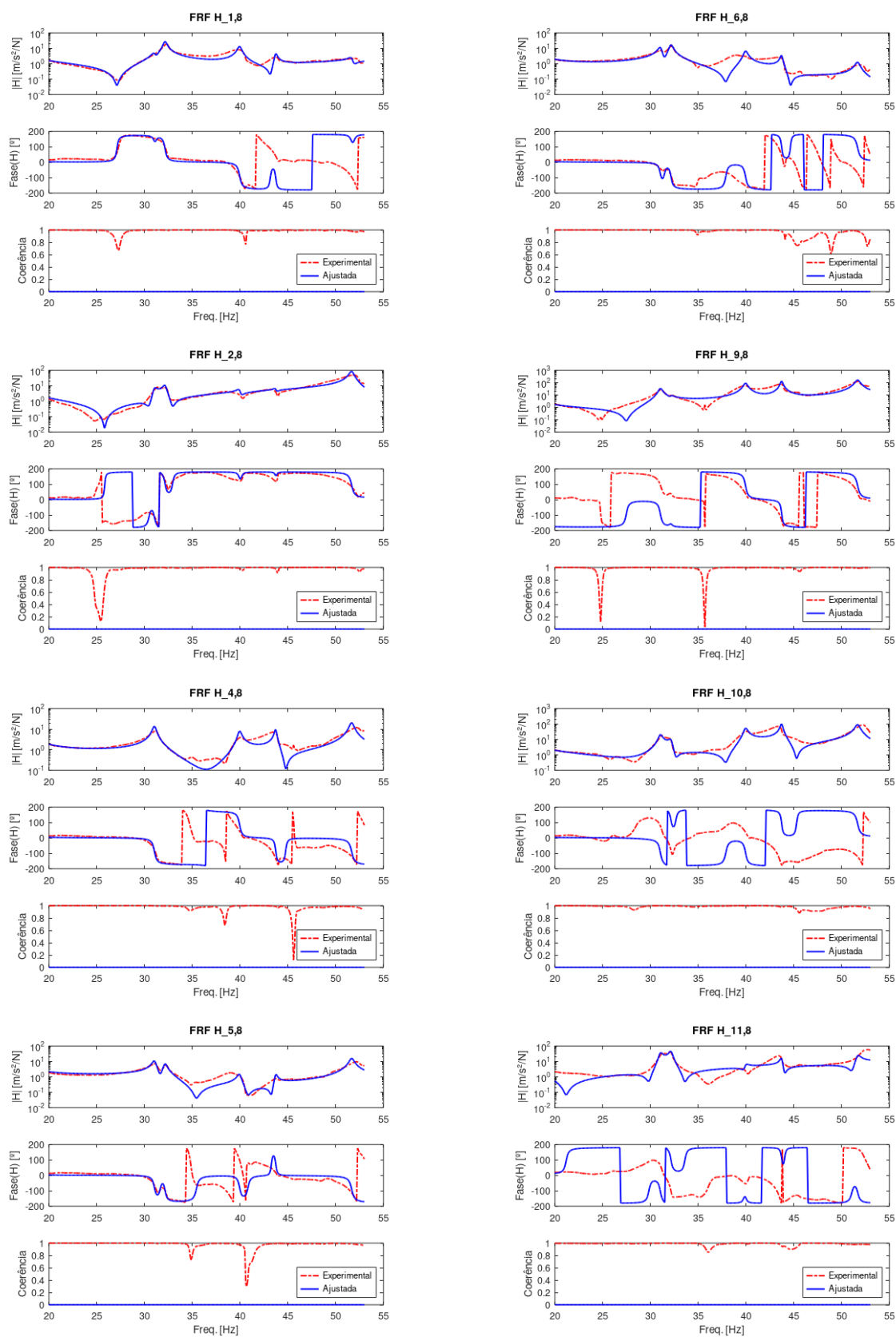
$E_1$ [GPa]	$E_2$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$\nu_{12}$ [-]
[0.2 410]	[0.2 410]	[0.2 190]	[0 2]

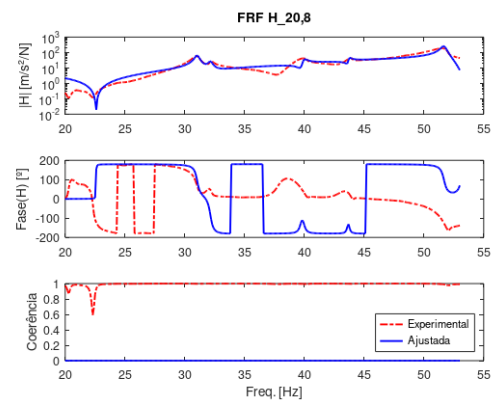
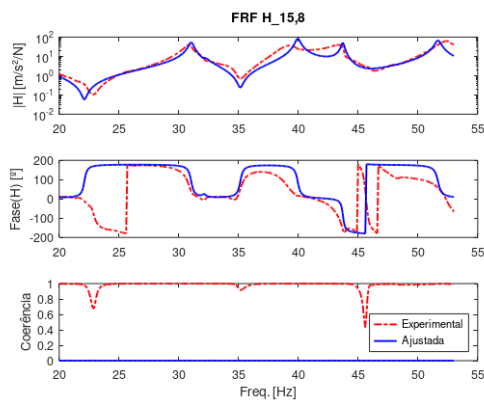
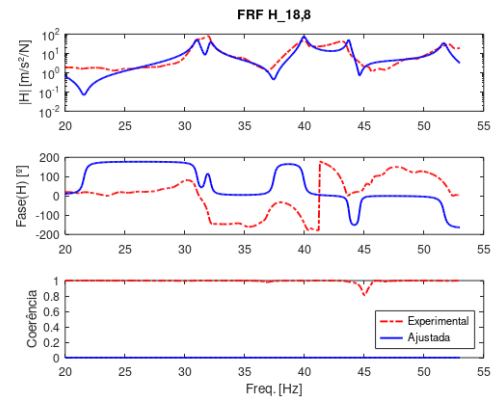
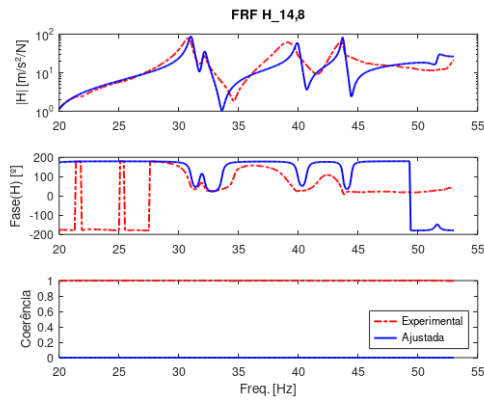
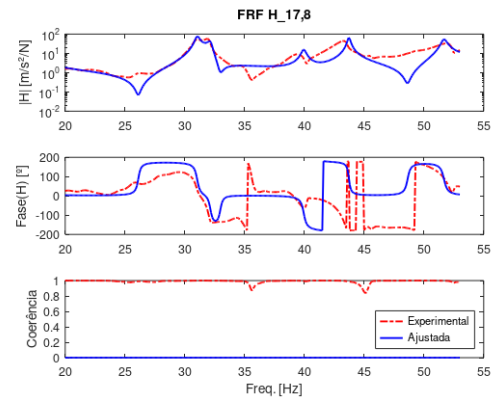
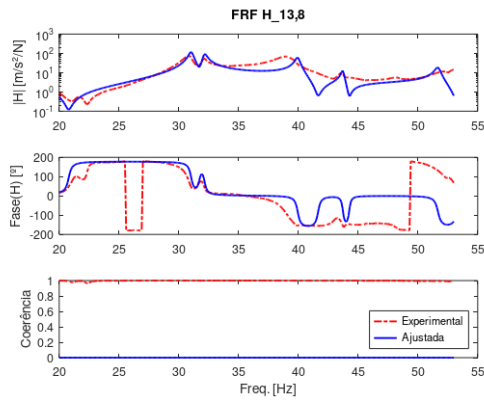
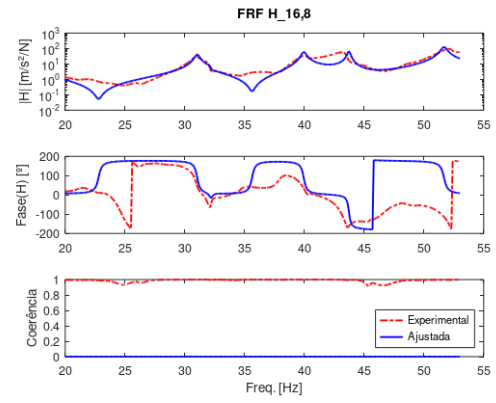
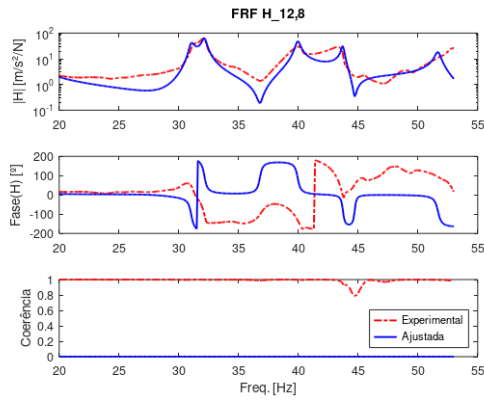
Tabela D.2 - Parâmetros do otimizador PSO.

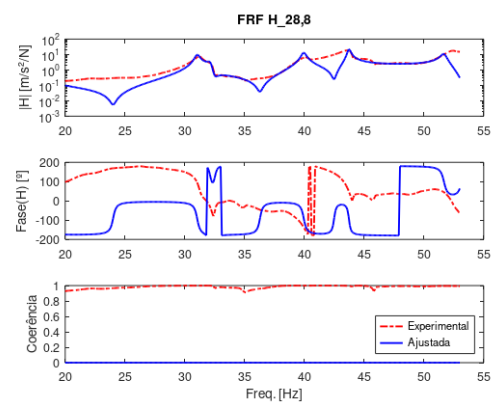
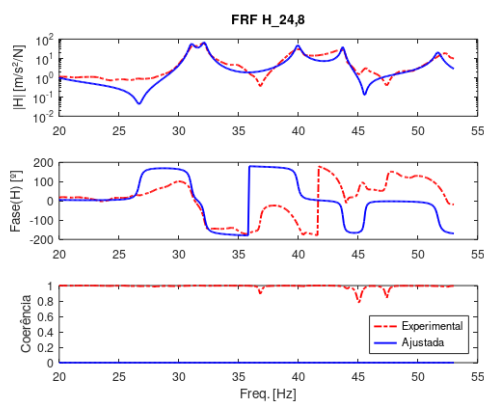
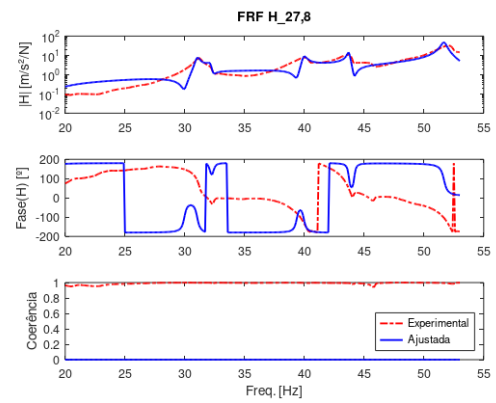
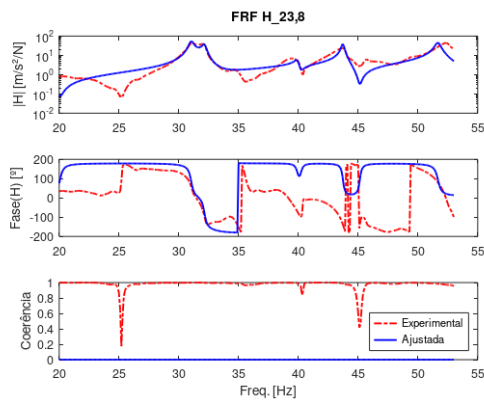
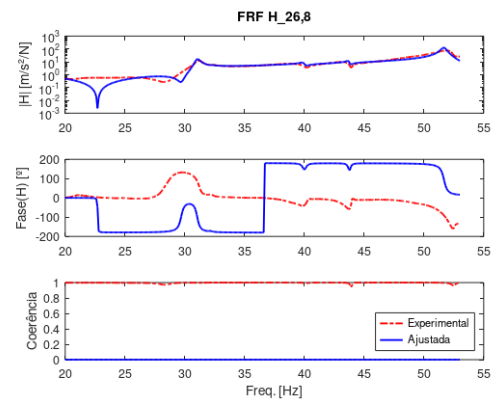
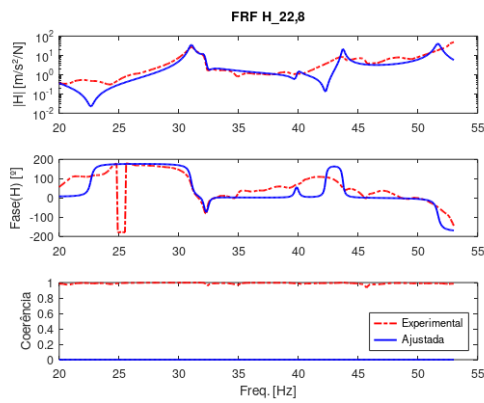
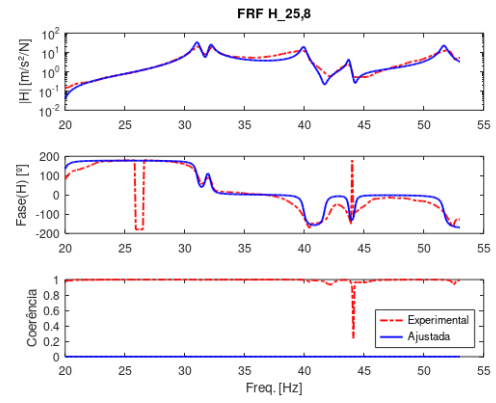
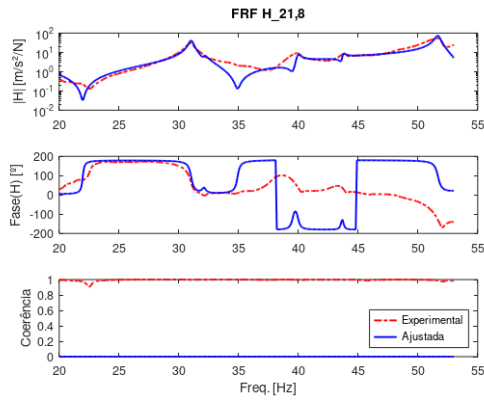
$\delta$	$\gamma_i$	$\gamma_g$	$N_p$	$N_{it}$
[0,9 0,4]	[1,25 0,5]	[0,5 1,25]	20	15

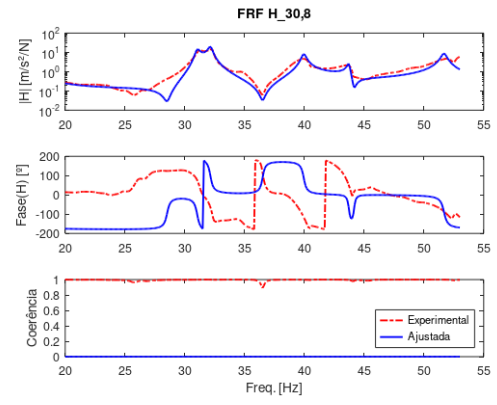
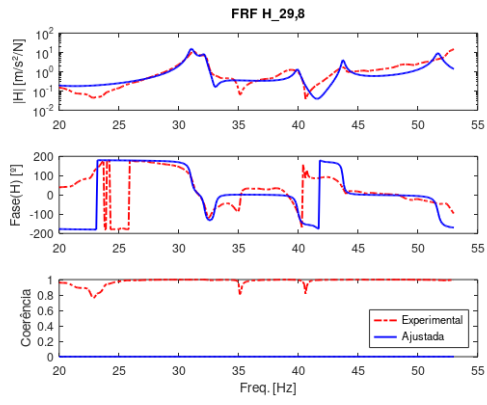
\* Os intervalos definem os valores iniciais e finais dos parâmetros, numa variação linear.

## APÊNDICE E1 - FRF'S EXPERIMENTAIS E AJUSTADAS: TELA 1, TRAÇÃO MÍNIMA



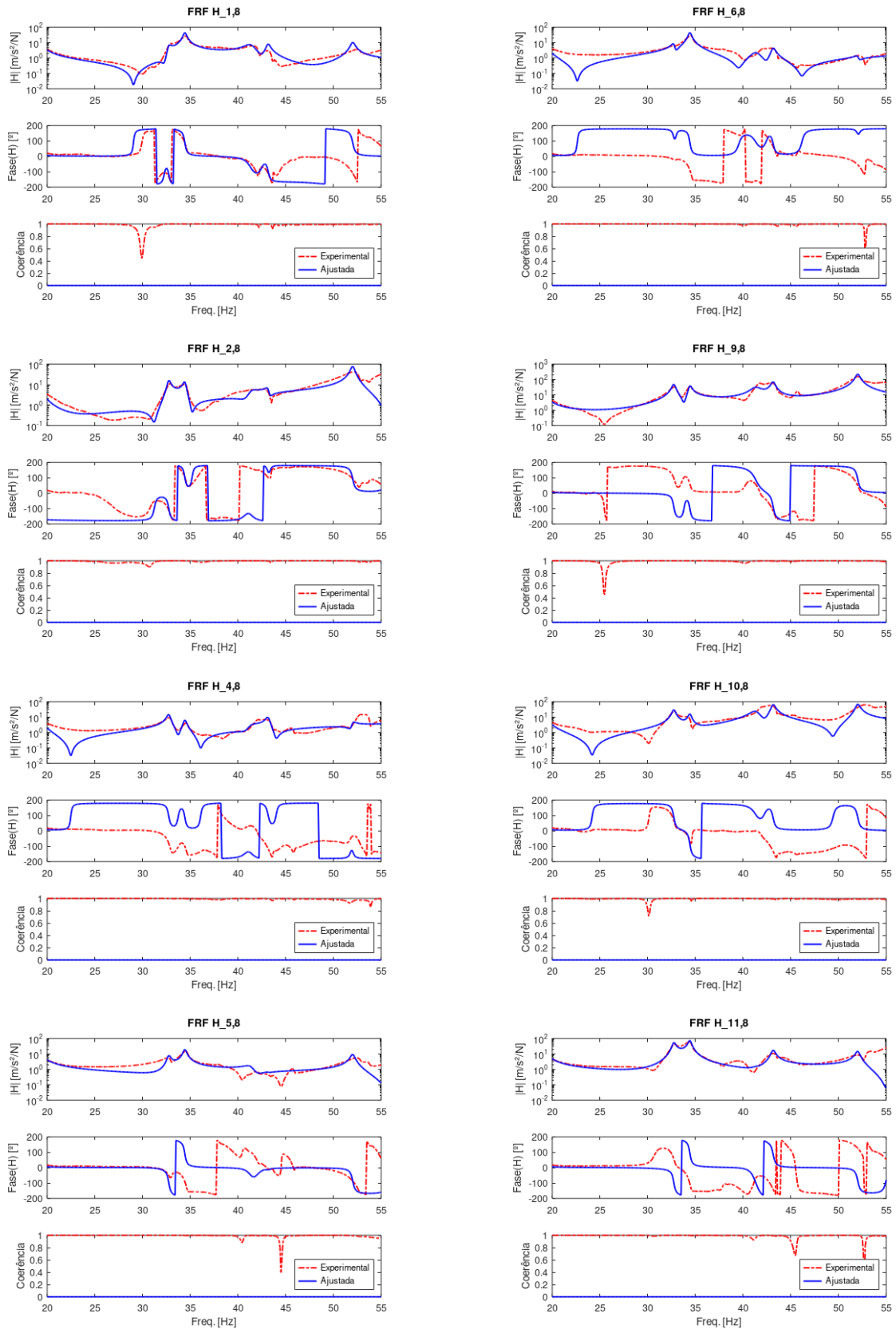


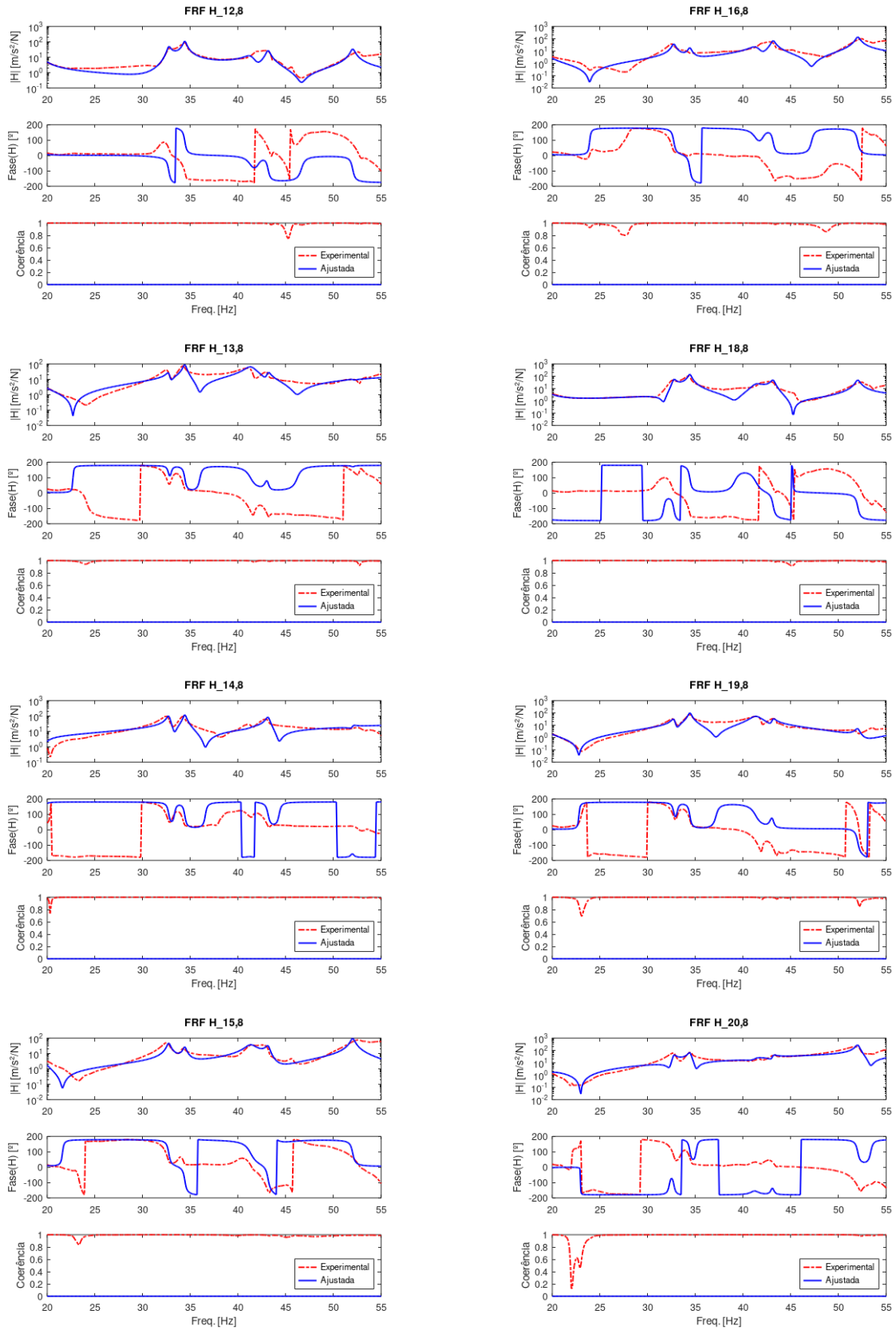


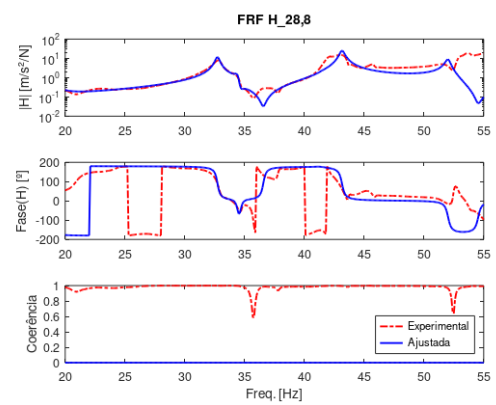
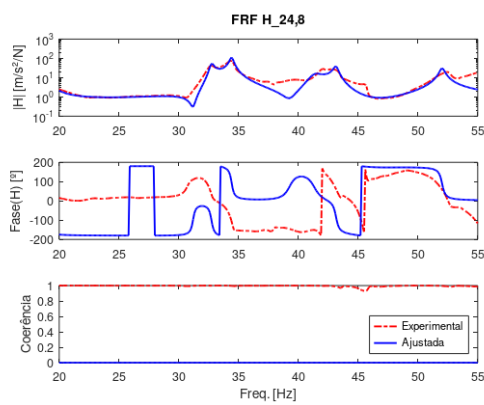
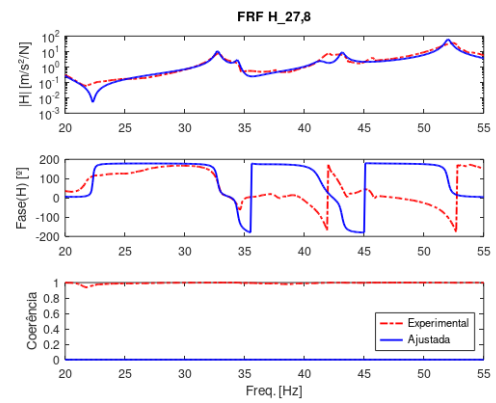
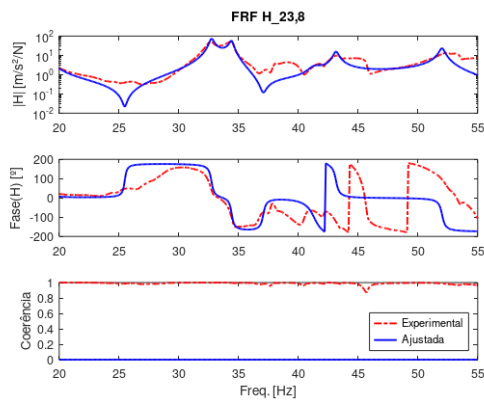
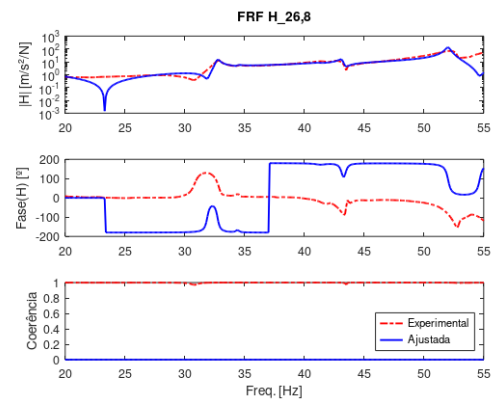
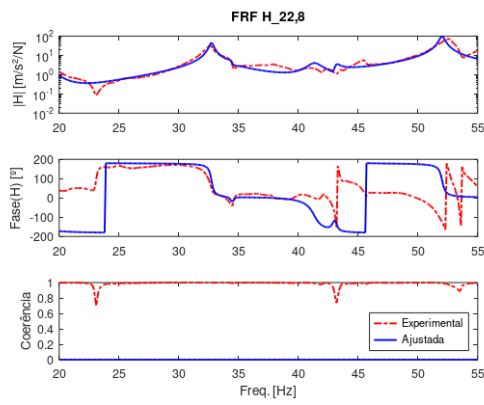
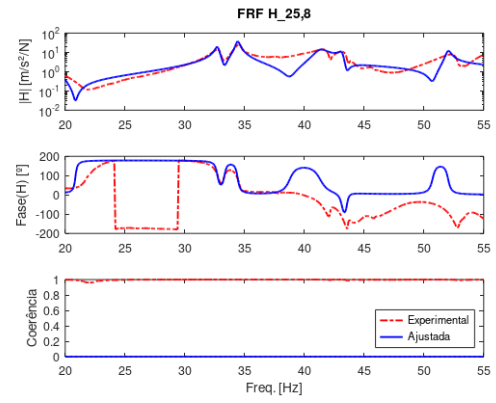
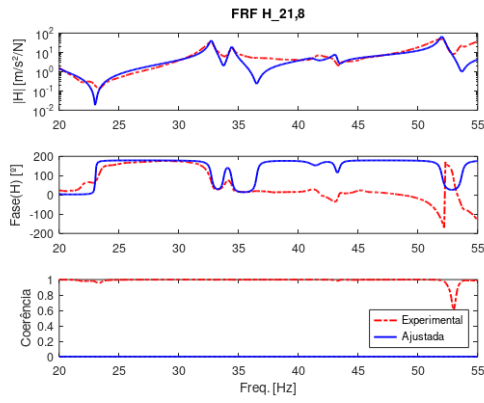


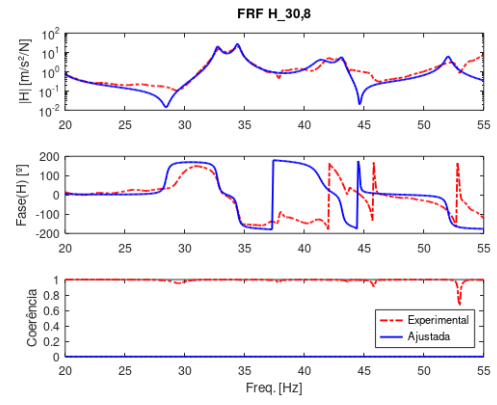
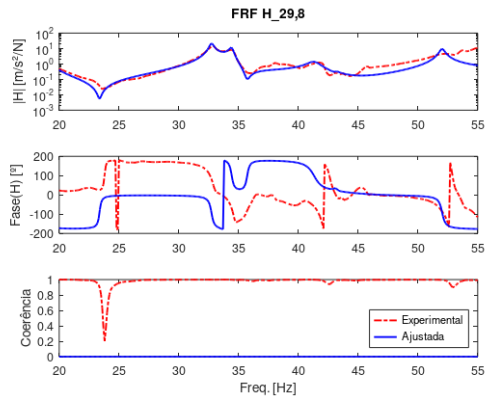


## APÊNDICE E2 - FRF'S EXPERIMENTAIS E AJUSTADAS: TELA 1, TRAÇÃO MÁXIMA

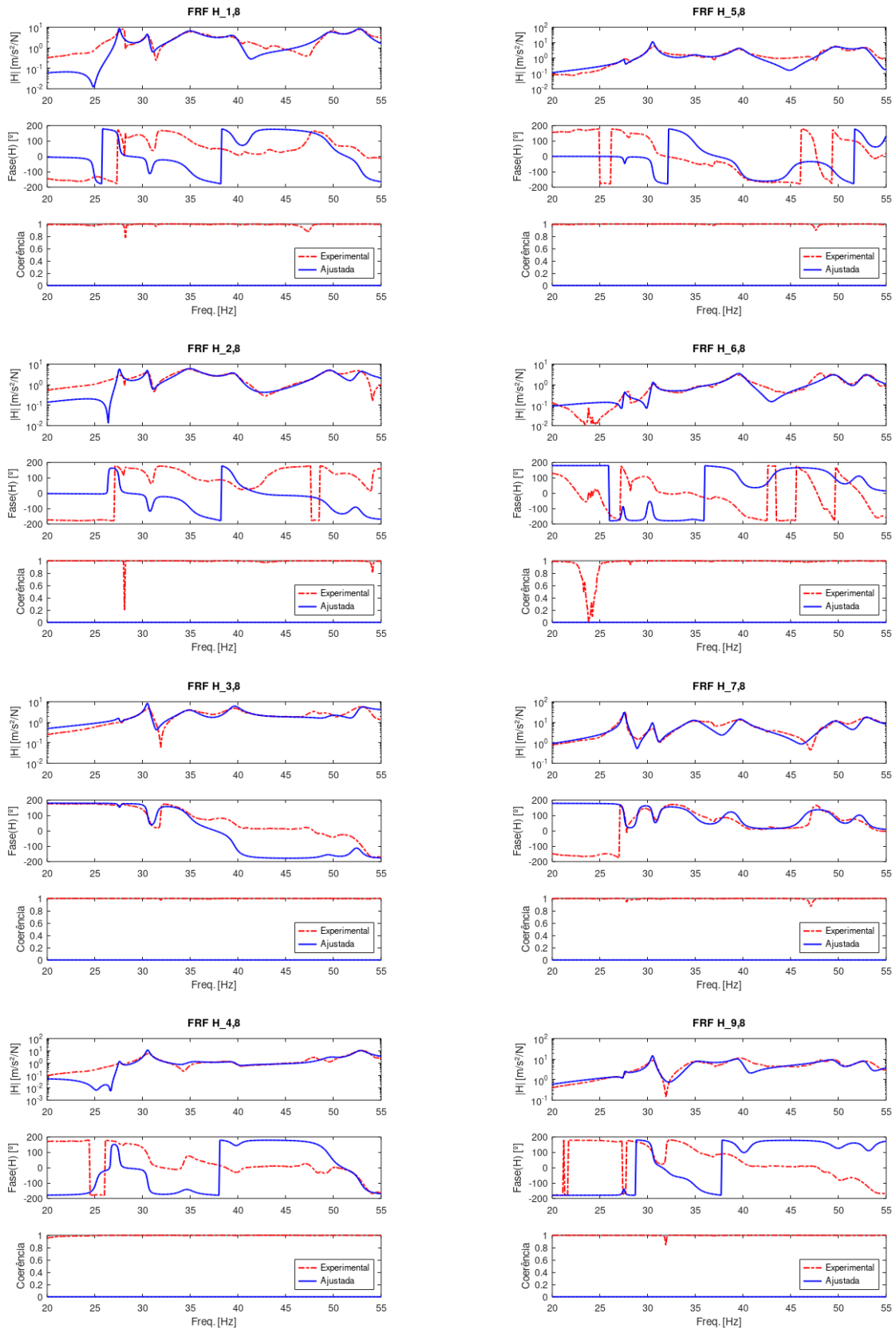


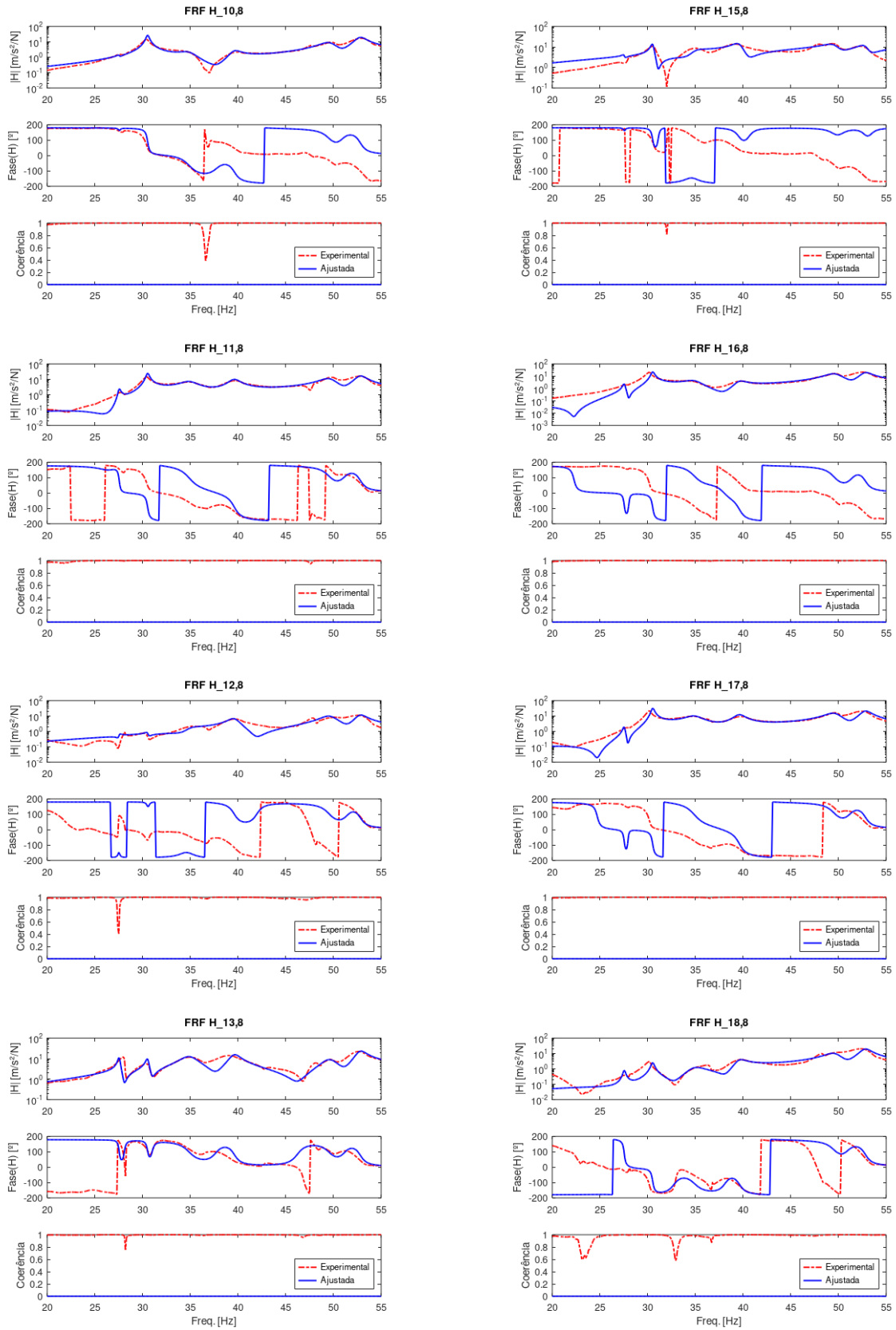


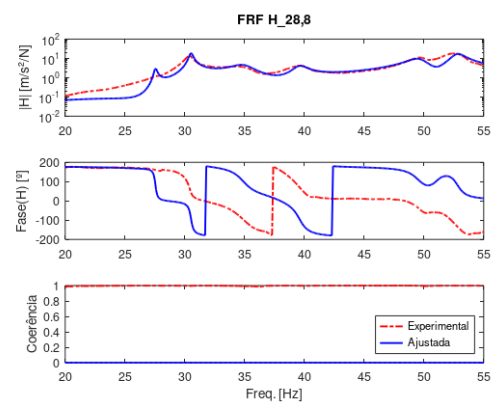
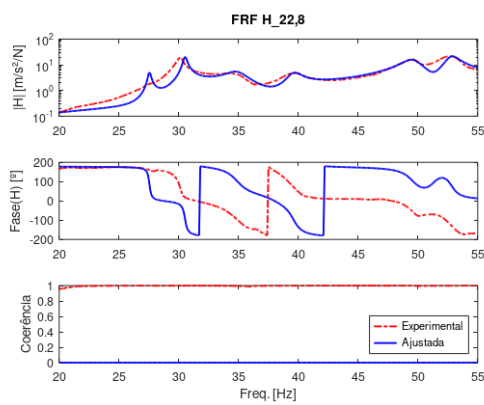
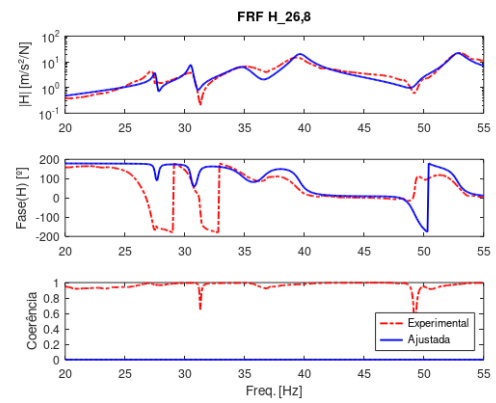
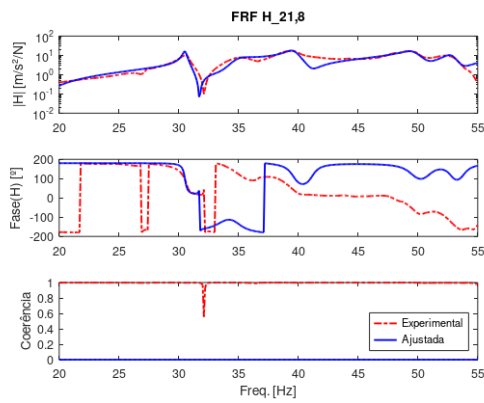
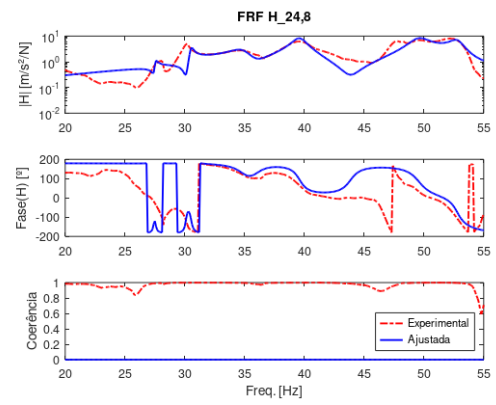
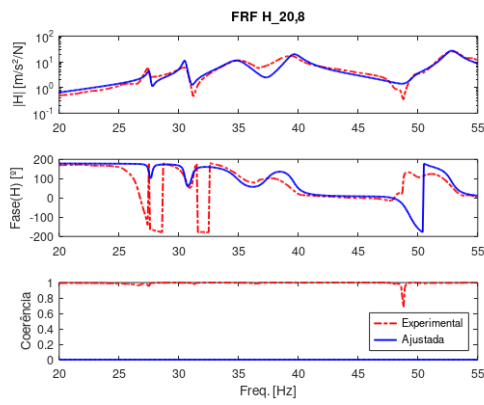
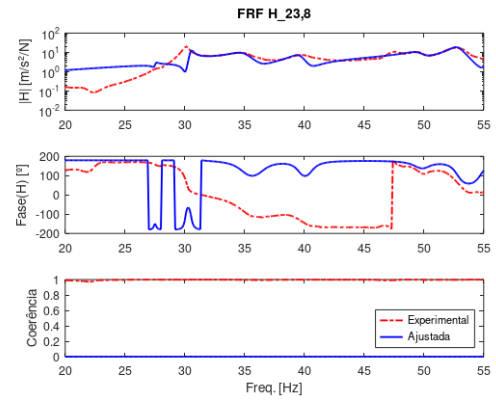
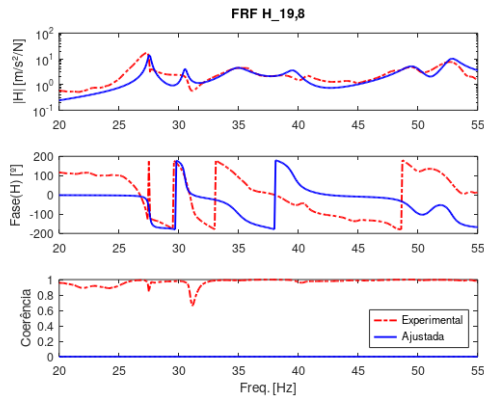


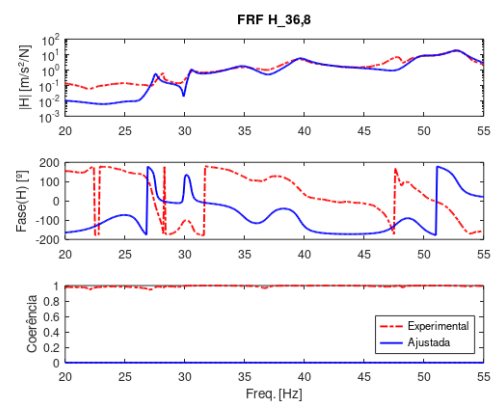
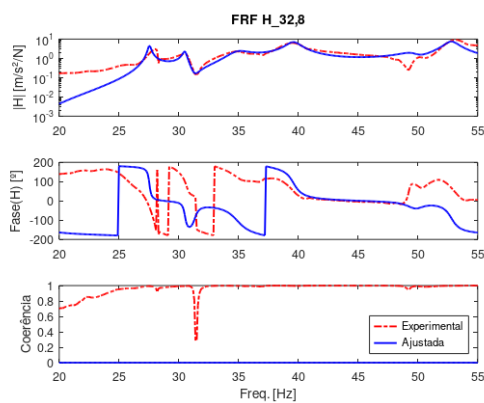
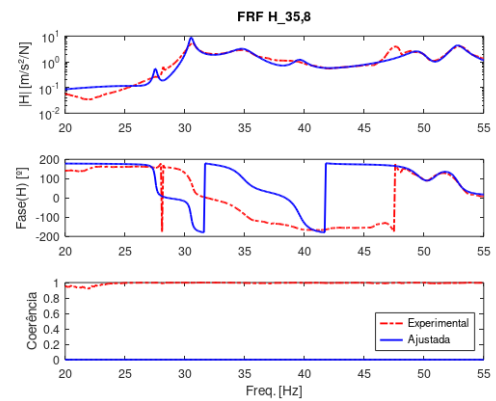
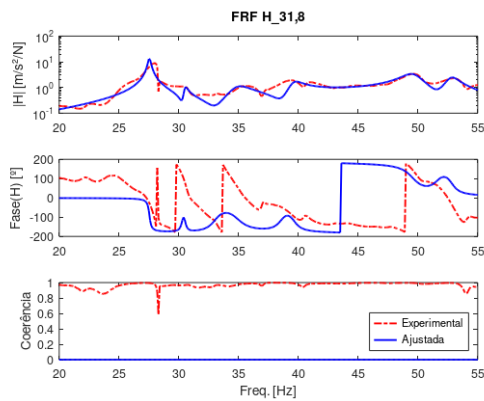
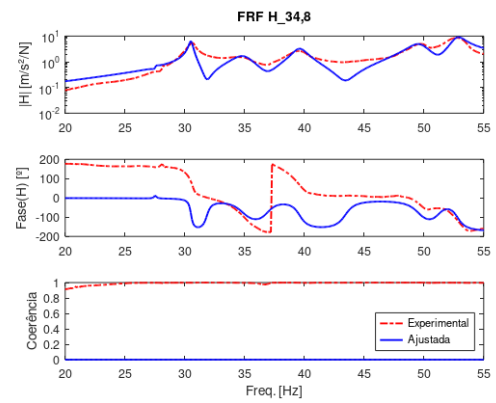
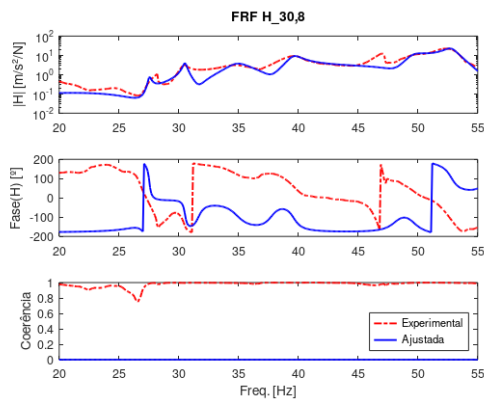
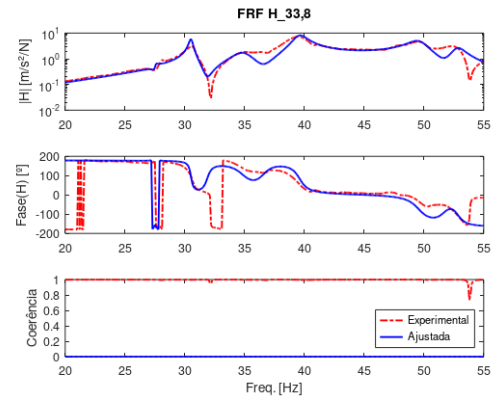
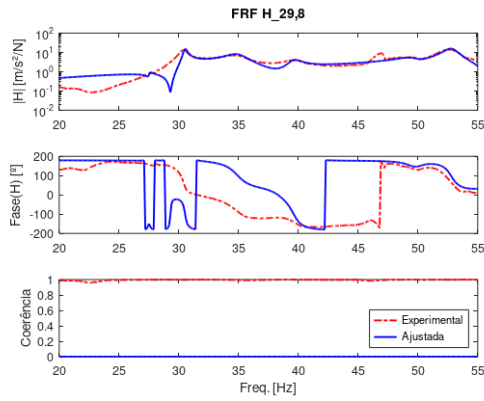


## APÊNDICE E3 - FRF'S EXPERIMENTAIS E AJUSTADAS: TELA 2, TRAÇÃO MÍNIMA



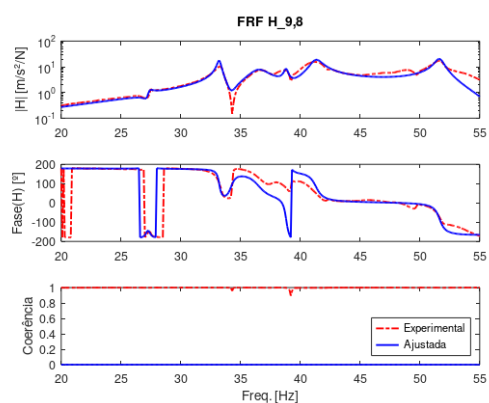
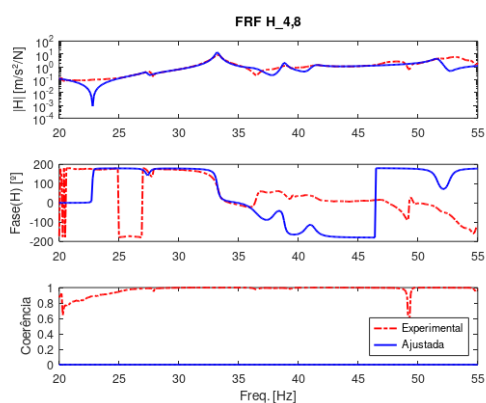
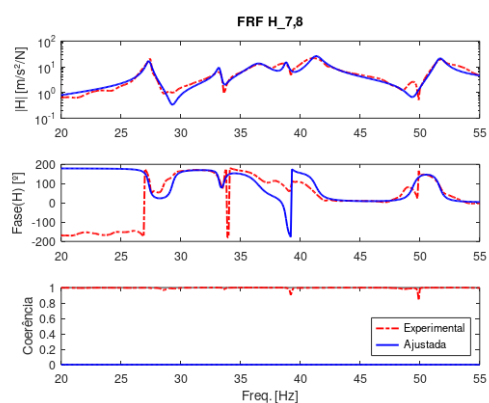
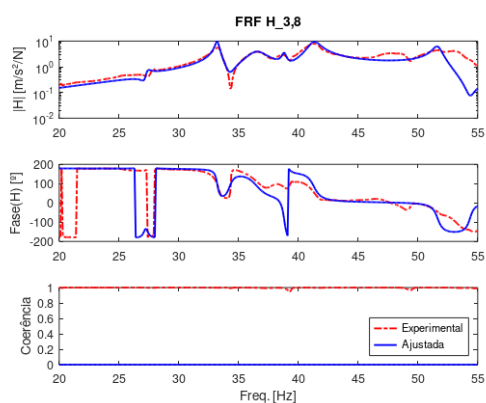
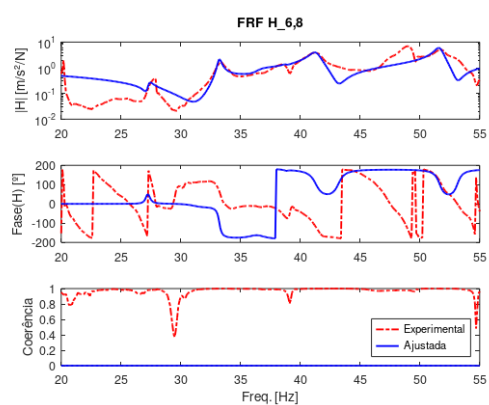
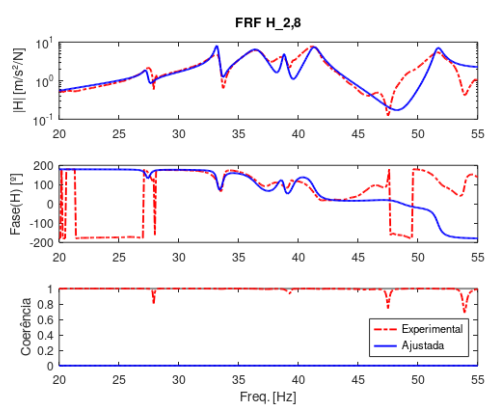
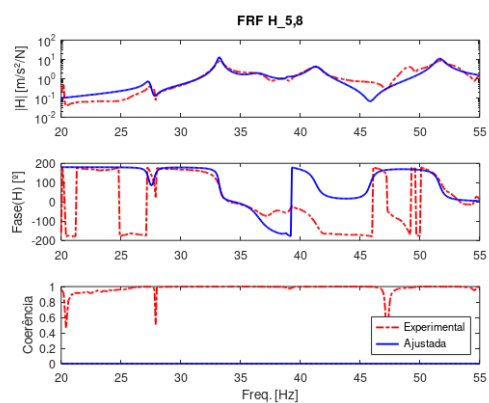
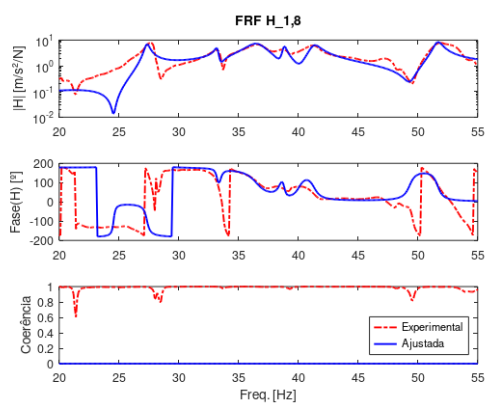


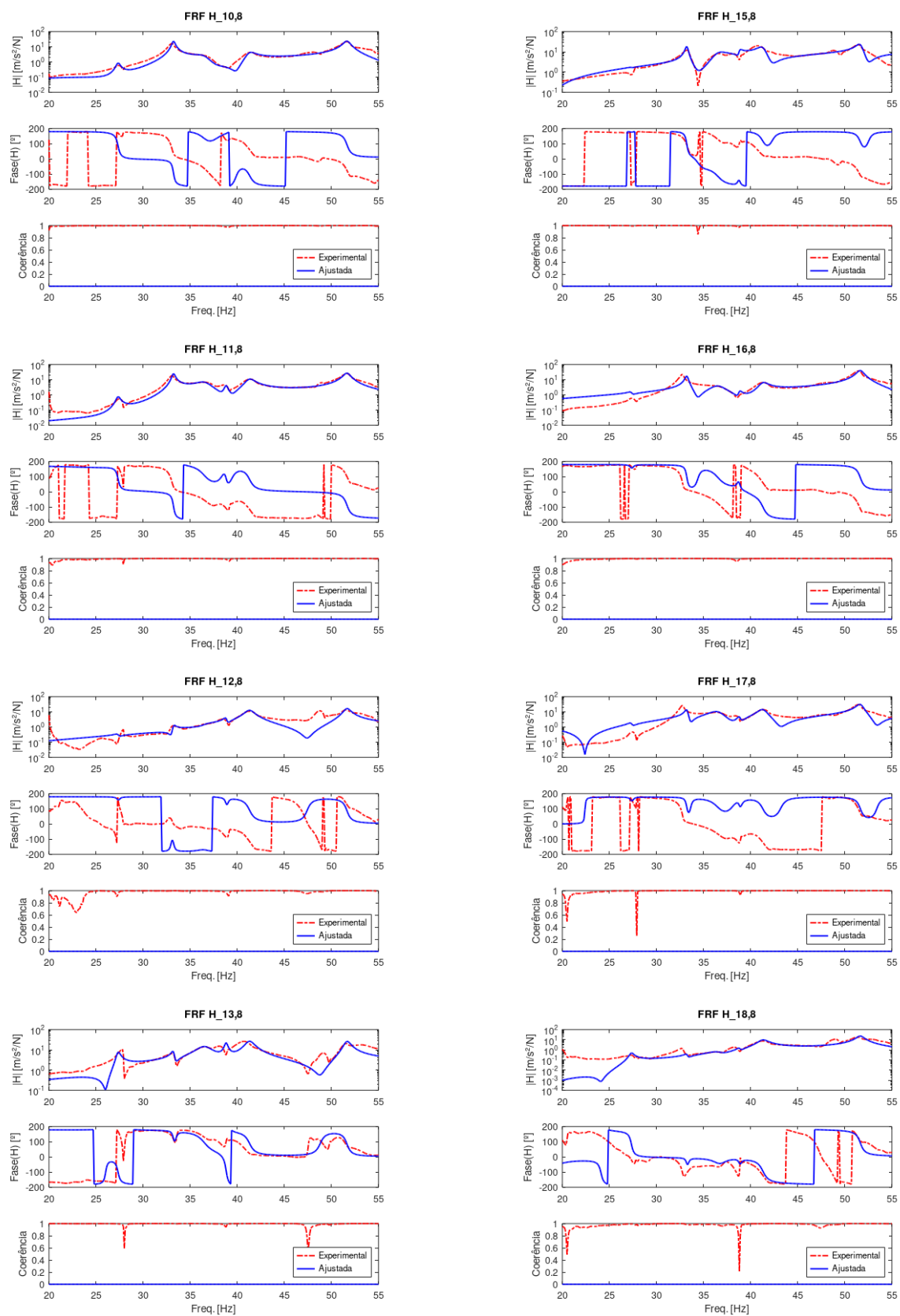


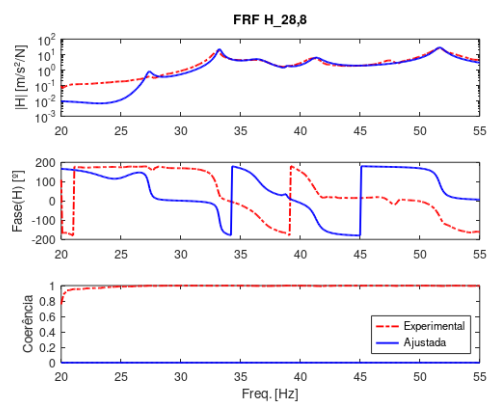
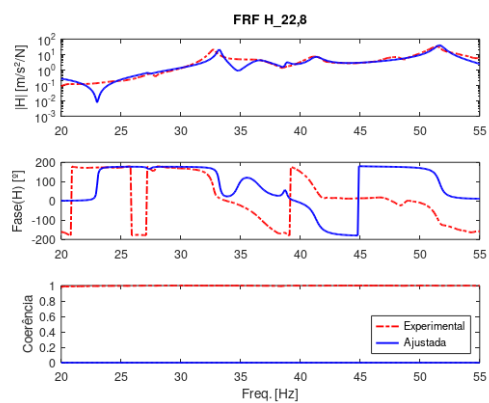
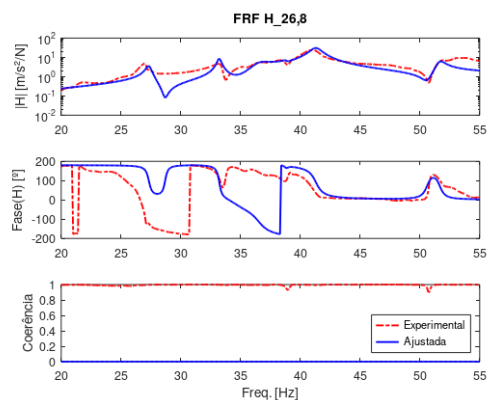
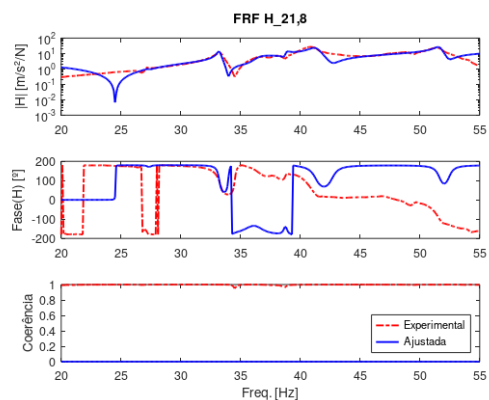
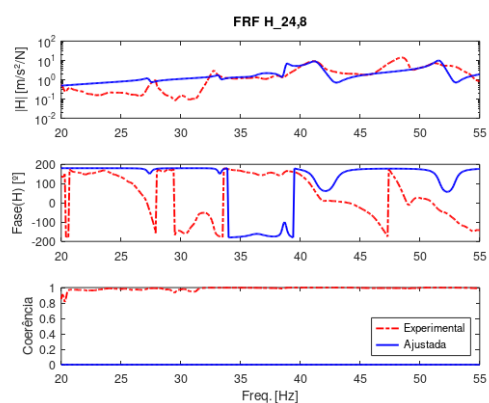
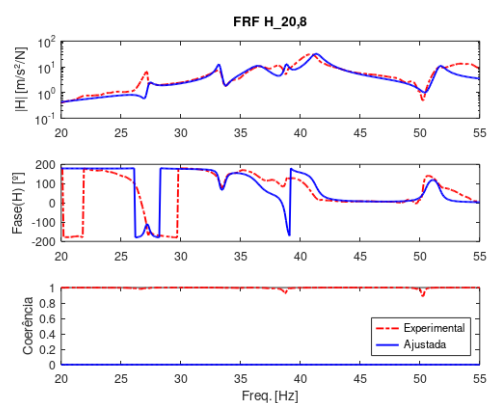
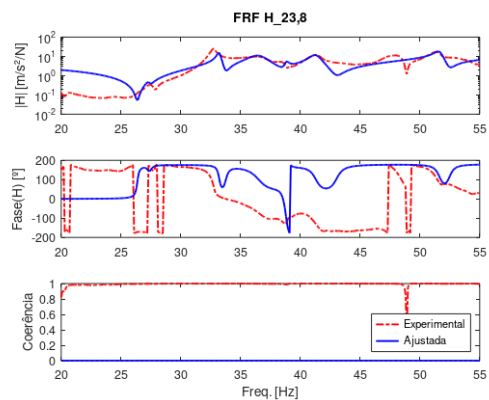
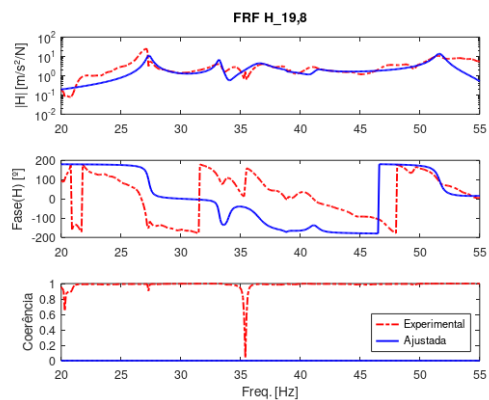


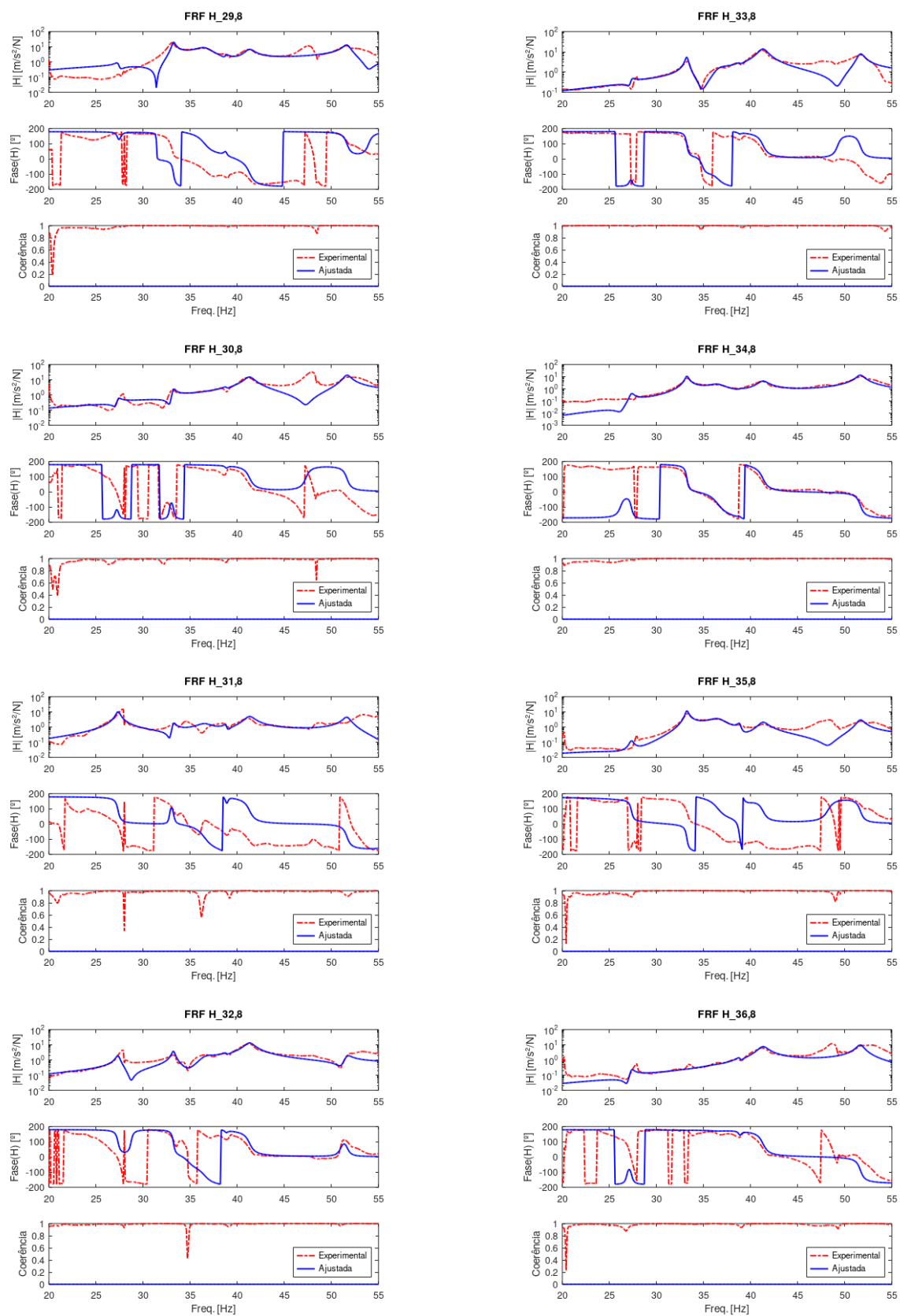


## APÊNDICE E4 - FRF'S EXPERIMENTAIS E AJUSTADAS: TELA 2, TRAÇÃO MÁXIMA









## ANEXO F - ESPECIFICAÇÕES INSTRUMENTOS DE AQUISIÇÃO PCB


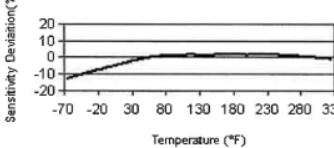

Model Number 352C33	<b>ICP® ACCELEROMETER</b>		Revision: H ECN #: 28610	
<b>Performance</b> Sensitivity(± 10 %) Measurement Range Frequency Range(± 5 %) Frequency Range(± 10 %) Resonant Frequency Broadband Resolution(1 to 10,000 Hz) Non-Linearity Transverse Sensitivity <b>Environmental</b> Overload Limit(Shock) Temperature Range(Operating) Temperature Response Base Strain Sensitivity <b>Electrical</b> Excitation Voltage Constant Current Excitation Output Impedance Output Bias Voltage Discharge Time Constant Settling Time(within 10% of bias) Spectral Noise(1 Hz) Spectral Noise(10 Hz) Spectral Noise(100 Hz) Spectral Noise(1 kHz) <b>Physical</b> Sensing Element Sensing Geometry Housing Material Sealing Size (Hex x Height) Weight Electrical Connector Electrical Connection Position Mounting Thread Mounting Torque	<b>ENGLISH</b> 100 mV/g ± 50 g pk 0.5 to 10,000 Hz 0.3 to 15,000 Hz ≥ 50 kHz 0.00015 g rms ≤ 1 % ≤ 5 % ± 5000 g pk -65 to +200 °F See Graph 0.003 g/με 18 to 30 VDC 2 to 20 mA ≤ 200 ohm 7 to 12 VDC 1.0 to 2.5 sec <10 sec 39 μg/√Hz 11 μg/√Hz 3.4 μg/√Hz 1.4 μg/√Hz Ceramic Shear Titanium Hermetic 0.44 in x 0.62 in 0.20 oz 10-32 Coaxial Jack Side 10-32 Female 10 to 20 in-lb	<b>SI</b> 10.2 mV/(m/s <sup>2</sup> ) ± 490 m/s <sup>2</sup> pk 0.5 to 10,000 Hz 0.3 to 15,000 Hz ≥ 50 kHz 0.0015 m/s <sup>2</sup> rms ≤ 1 % ≤ 5 % ± 49,000 m/s <sup>2</sup> pk -54 to +93 °C See Graph 0.029 (m/s <sup>2</sup> )/με 18 to 30 VDC 2 to 20 mA ≤ 200 ohm 7 to 12 VDC 1.0 to 2.5 sec <10 sec 380 (μm/s <sup>2</sup> )/√Hz 110 (μm/s <sup>2</sup> )/√Hz 33 (μm/s <sup>2</sup> )/√Hz 14 (μm/s <sup>2</sup> )/√Hz Ceramic Shear Titanium Hermetic 11.2 mm x 15.7 mm 5.8 gm 10-32 Coaxial Jack Side 10-32 Female 113 to 226 N-cm	<b>OPTIONAL VERSIONS</b> Optional versions have identical specifications and accessories as listed for the standard model except where noted below. More than one option may be used.  <b>HT - High temperature, extends normal operation temperatures</b> [3] Frequency Range(5 %)      6 to 10,000 Hz      6 to 10,000 Hz Frequency Range(10 %)      4.5 to 15,000 Hz      4.5 to 15,000 Hz Broadband Resolution(1 to 10,000 Hz)      0.0009 g rms      0.009 m/s <sup>2</sup> rms Temperature Range(Operating)      -65 to +325 °F      -54 to +163 °C Excitation Voltage      22 to 30 VDC      22 to 30 VDC Discharge Time Constant      0.07 to 0.15 sec      0.07 to 0.15 sec Spectral Noise(1 Hz)      107 μg/√Hz      1050 (μm/s <sup>2</sup> )/√Hz Spectral Noise(10 Hz)      58 μg/√Hz      570 (μm/s <sup>2</sup> )/√Hz Spectral Noise(100 Hz)      41 μg/√Hz      400 (μm/s <sup>2</sup> )/√Hz Spectral Noise(1 kHz)      9.8 μg/√Hz      96 (μm/s <sup>2</sup> )/√Hz Output Bias Voltage      10 to 15 VDC      10 to 15 VDC [2] Supplied Accessory : Model ACS-68 Single Axis Amplitude Response Calibration from 5 Hz to upper 5% plotted on dB scale replaces Model ACS-1  <b>J - Ground Isolated</b> Frequency Range(5 %)      9 kHz      9 kHz Frequency Range(10 %)      14 kHz      14 kHz Resonant Frequency      ≥ 40 kHz      ≥ 40 kHz Electrical Isolation(Base)      >10 <sup>8</sup> ohm      >10 <sup>8</sup> ohm Size - Hex x Height      0.44 in x 0.67 in      11.2 mm x 17.0 mm Weight      0.21 oz      6.0 gm  <b>T - TEDS Capable of Digital Memory and Communication Compliant with IEEE P1451.4</b> <b>TLA - TEDS LMS International - Free Format</b> <b>TLB - TEDS LMS International - Automotive Format</b> <b>TLC - TEDS LMS International - Aeronautical Format</b> <b>TLD - TEDS Capable of Digital Memory and Communication Compliant with IEEE 1451.4</b> Temperature Range(Memory Access)      -10 to +200 °F      -23 to +93 °C Excitation Voltage      20 to 30 VDC      20 to 30 VDC Output Bias Voltage      7.5 to 13 VDC      7.5 to 13 VDC  <b>W - Water Resistant Cable</b> Electrical Connector      Sealed Integral Cable Side      Sealed Integral Cable Side Electrical Connection Position      Side      Side	
 [6]	Typical Sensitivity Deviation vs Temperature 		<b>NOTES:</b> (1) Typical. (2) TEDS option adds 1.0 VDC to bias voltage. (3) 200°F to 325°F data valid with HT option only. (4) Zero-based, least-squares, straight line method. (5) Transverse sensitivity is typically ≤ 3%. (6) See PCB Declaration of Conformance PS023 for details.	
All specifications are at room temperature unless otherwise specified. In the interest of constant product improvement, we reserve the right to change specifications without notice. ICP® is a registered trademark of PCB Group, Inc.				
<b>SUPPLIED ACCESSORIES:</b> Model 080A Adhesive Mounting Base (1) Model 080A109 Petro Wax (1) Model 081B05 Mounting Stud (10-32 to 10-32) (1) Model ACS-1 NIST traceable frequency response (10 Hz to upper 5% point). (1) Model M081B05 Mounting Stud 10-32 to M6 X 0.75 (1)				
Entered:	Engineer:	Sales:	Approved:	Spec Number:
Date: 4-15-08	Date: 4-15-08	Date: 4-15-08	Date: 4-15-08	13118
			Phone: 716-684-0001 Fax: 716-685-3886 E-Mail: vibration@pcb.com	
3425 Walden Avenue, Depew, NY 14043				

Figura F.1 - Especificações acelerômetro PCB 352C33.



Model Number <b>086C03</b>	<b>ICP® IMPACT HAMMER</b>		Revision: L ECN #: 32387
<b>Performance</b>	<b>ENGLISH</b>	<b>SI</b>	<b>OPTIONAL VERSIONS</b> Optional versions have identical specifications and accessories as listed for the standard model except where noted below. More than one option may be used.  <b>T</b> - TEDS Capable of Digital Memory and Communication Compliant with IEEE P1451.4  <b>TLD</b> - TEDS Capable of Digital Memory and Communication Compliant with IEEE 1451.4
Sensitivity (± 15 %)	10 mV/1bf	2.25 mV/N	
Measurement Range	± 500 lbf pk	± 2224 N pk	<b>NOTES:</b> [1] Typical. [2] See PCB Declaration of Conformance PS068 for details.
Resonant Frequency	≥ 22 kHz	≥ 22 kHz	
Non-Linearity	≤ 1 %	≤ 1 %	<b>SUPPLIED ACCESSORIES:</b> Model 081B05 Mounting Stud (10-32 to 10-32) (2) Model 084A08 Extender - Steel, 0.6" Diameter (1) Model 084B03 Hard Tip- Hard (S.S) (1) Model 084B04 Hammer Tip- Medium (White Plastic) (1) Model 084C05 Hammer Tip- Soft (Black) (2) Model 084C11 Hammer Tip- Supersoft (Red) (2) Model 085A10 Vinyl Cover For Medium Tip (Blue) (2) Model HCS-2 Calibration of Series 086 instrumented impact hammers (1)
<b>Electrical</b>			
Excitation Voltage	20 to 30 VDC	20 to 30 VDC	Entered: <i>HA</i> Engineer: <i>SJS</i> Sales: <i>SYM</i> Approved: <i>EB</i> Spec Number:
Constant Current Excitation	2 to 20 mA	2 to 20 mA	Date: <i>2/24/10</i> Date: <i>12/8/09</i> Date: <i>2/17/10</i> Date: <i>2/17/10</i> <b>15273</b>
Output Impedance	<100 ohm	<100 ohm	 [2]
Output Bias Voltage	8 to 14 VDC	8 to 14 VDC	
Discharge Time Constant	≥ 2000 sec	≥ 2000 sec	All specifications are at room temperature unless otherwise specified. In the interest of constant product improvement, we reserve the right to change specifications without notice. ICP® is a registered trademark of PCB Group, Inc.
<b>Physical</b>			 Phone: 716-684-0001 Fax: 716-685-3886 E-Mail: vibration@pcb.com 3425 Walden Avenue, Depew, NY 14043
Sensing Element	Quartz	Quartz	
Sealing	Epoxy	Epoxy	
Hammer Mass	0.34 lb	0.16 kg	
Head Diameter	0.62 in	1.57 cm	
Tip Diameter	0.25 in	0.63 cm	
Hammer Length	8.5 in	21.6 cm	
Electrical Connection Position	Bottom of Handle	Bottom of Handle	
Extender Mass Weight	2.6 oz	75 gm	
Electrical Connector	BNC Jack	BNC Jack	

Figura F.2 - Especificações martelo de impacto PCB 086C03.