

Gabriel Machado dos Santos

**Transferência Térmica Conjugada Utilizando  
Fronteira Imersa para Solução de Problemas  
Bidimensionais**

Uberlândia

2022

Gabriel Machado dos Santos

**Transferência Térmica Conjugada Utilizando Fronteira  
Imersa para Solução de Problemas Bidimensionais**

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Faculdade de Engenharia Mecânica

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Uberlândia

2022

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S237 Santos, Gabriel Machado dos, 1997-  
2022 Transferência Térmica Conjugada Utilizando Fronteira  
Imersa para Solução de Problemas Bidimensionais [recurso  
eletrônico] / Gabriel Machado dos Santos. - 2022.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de  
Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica.  
Modo de acesso: Internet.  
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.466>  
Inclui bibliografia.  
Inclui ilustrações.

1. Engenharia mecânica. I. Silveira Neto, Aristeu da ,  
1955-, (Orient.). II. Universidade Federal de  
Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. III.  
Título.

CDU: 621



## UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
Telefone: (34) 3239-4282 - [www.posmecanica.ufu.com.br](http://www.posmecanica.ufu.com.br) - [secposmec@mecanica.ufu.br](mailto:secposmec@mecanica.ufu.br)



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

|                                    |  |                 |        |                       |
|------------------------------------|--|-----------------|--------|-----------------------|
| Programa de Pós-Graduação em:      | Engenharia Mecânica  |                 |        |                       |
| Defesa de:                         | Dissertação de Mestrado Acadêmico nº 619, PPGEM  |                 |        |                       |
| Data:                              | 30/08/2022   | Hora de início: | 08:00h | Hora de encerramento: |
| Matrícula do Discente:             | 12012EMC007  |                 |        |                       |
| Nome do Discente:                  | Gabriel Machado dos Santos   |                 |        |                       |
| Título do Trabalho:                | Transferência Térmica Conjugada Utilizando Fronteira Imersa para Solução de Problemas Bidimensionais |                 |        |                       |
| Área de concentração:              | Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos  |                 |        |                       |
| Linha de pesquisa:                 | Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor  |                 |        |                       |
| Projeto de Pesquisa de vinculação: |  |                 |        |                       |

Reuniu-se no Auditório do MFLab - Bloco 5P, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: João Marcelo Vedovotto - FEMEC/UFU; Elisan dos Santos Magalhães - ITA e Aristeu da Silveira Neto - FEMEC/UFU orientador(a) do(a) candidato(a).

Iniciando os trabalhos o(a) presidente da mesa, Dr(a). Aristeu da Silveira Neto, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato(a), agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(as) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Marcelo Vedovotto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 30/08/2022, às 10:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Elisan dos Santos Magalhaes, Usuário Externo**, em 30/08/2022, às 10:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3847619** e o código CRC **27B1C406**.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado saúde, coragem e forças para superar as dificuldades. Por me capacitar e me conduzir ao longo desta jornada e por todas as extraordinárias pessoas presentes em minha vida.

Aos meus pais, Carlos e Cristiane, meus primeiros e eternos professores, que sempre fizeram do impossível o possível para que meus sonhos se concretizassem. Por todo seu apoio, carinho, amor e cuidados serei eternamente grato e levarei seus ensinamentos comigo onde estiver.

À minha irmã Gabrielly, pela amizade sincera e constante companheirismo. Às minhas irmãs caçulas, Emilly e Emanuelly, por toda felicidade e alegria que proporcionam a todos.

À Alinny Cristiny, pelo constante apoio e motivação, por todo seu carinho e cuidados em todos os momentos, e por todos os sonhos que escolheu compartilhar comigo.

Ao Mestre Ítalo Augusto, pela amizade e por toda ajuda e companheirismo no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Doutor Hélio Ribeiro Neto, por toda a paciência e dedicação em me ensinar e instruir, pela amizade construída e por todos os valiosos conselhos que levarei comigo.

Ao Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto, por me abrir as portas do Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab), pela paciência e dedicação na orientação deste trabalho, pelos ricos conselhos e constante exemplo.

A todos os colegas do laboratório, pela troca de conhecimento, colaboração e amizade.

Aos técnicos do laboratório, pelo apoio e pelos serviços prestados durante todo o período.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia e à coordenação do Programa de Pós-Graduação pelo suporte e infraestrutura necessários para realização deste trabalho.

Ao CNPq pela bolsa de mestrado e suporte à esta pesquisa.

*“Ninguém é suficientemente perfeito,  
que não possa aprender com o outro e,  
ninguém é totalmente estruído de valores  
que não possa ensinar algo ao seu irmão.”*

*(São Francisco de Assis)*

# Resumo

Problemas de interação termo-fluido-estrutural, ou de transferência térmica conjugada, correspondem a classe de fenômenos físicos em que efeitos térmicos alteram a dinâmica do acoplamento fluido-estrutural. Estes problemas são caracterizados por apresentarem uma contínua troca de energia térmica entre a estrutura sólida e o escoamento, de modo que, condições de contorno térmicas convencionais não são aplicáveis à interface fluido-sólido, exigindo a utilização de acoplamentos térmicos. Extensos são os fenômenos naturais ou industriais envolvendo interações térmicas conjugadas entre escoamento e estrutura, e dependendo da finalidade da aplicação pretendida, os seus efeitos podem ser potencializados ou minimizados. Progressos tecnológicos no campo da engenharia, requerem a confecção de equipamentos e máquinas com capacidades de arrefecimento e/ou isolamento cada vez melhores. Assim, o projeto tanto estrutural quanto fluidodinâmico desses equipamentos devem ser pensados visando a interação térmica entre escoamento e estrutura. Dessa forma, crescente é a busca e interesse em ferramentas que viabilizem a análise e estudo desses problemas, onde a experimentação virtual baseada na metodologia numérico-computacional vêm se destacando. Sendo assim, o presente trabalho objetiva a modelagem física, a matemática e a computacional de problemas de transferência térmica conjugada, além do desenvolvimento de um código computacional em linguagem de programação Fortran 90, sendo este destinado a tratar de problemas bidimensionais com a presença de um corpo sólido condutivo, fazendo-se necessária a aplicação da metodologia da fronteira imersa. Nas implementações realizadas, as equações que modelam a dinâmica, o transporte e a transformação de energia no subdomínio fluido são discretizadas e resolvidas em um domínio bidimensional, euleriano, cartesiano e fixo, através do método das diferenças finitas, onde é empregado o método do passo fracionado para o acoplamento pressão-velocidade. A equação que modela o balanço de energia térmica no subdomínio sólido é discretizada e resolvida em um domínio lagrangiano, formado por elementos triangulares, por meio do método dos elementos finitos. A metodologia da fronteira imersa é aplicada, a fim de se abordar ambos os subdomínios de formas distintas e independentes. As soluções obtidas para cada subdomínio, de forma individual, são acopladas de acordo com a metodologia do acoplamento particionado de natureza forte. Testes de verificação são realizados, com o intuito de se verificar as implementações realizadas. Simulações são conduzidas a fim de validar o modelo numérico-computacional desenvolvido, onde os resultados obtidos estão em conformidade com os apresentados na literatura.

**Palavras-chave:** Dinâmica dos Fluidos Computacional, Transferência Térmica Conjugada, Método das Diferenças Finitas, Método dos Elementos Finitos, Escoamentos Não-Isotérmicos sobre Geometrias Complexas.

# Abstract

Problems of thermo-fluid-structural interaction, or conjugate heat transfer, correspond to the class of physical phenomena in which heat effects alter the dynamics of fluid-structural coupling. These problems are characterized by a continuous exchange of thermal energy between the solid structure and the flow, so that conventional thermal boundary conditions are not applicable to the fluid-solid interface, requiring the use of heat couplings. Extensive are the natural or industrial phenomena involving conjugated heat interactions between flow and structure, and depending on the purpose of the intended application, their effects can be potentiated or minimized. Technological advances in the field of engineering require the manufacture of equipment and machines with increasingly better cooling and/or insulation capabilities. Thus, the structural and fluid dynamic design of these equipments must be designed aiming at the thermal interaction between flow and structure. Thus, the search and interest in tools that enable the analysis and study of these problems is growing, where virtual experimentation based on numerical-computational methodology has been highlighted. Therefore, the present work aims at the physical, mathematical and computational modeling of conjugated heat transfer problems, in addition to the development of a computational code in Fortran 90 programming language, which is intended to deal with two-dimensional problems with the presence of a conductive solid body, making it necessary to apply the immersed boundary methodology. In the implementations carried out, the equations that model the dynamics, transport and energy transformation in the fluid subdomain are discretized and solved in a two-dimensional, eulerian, cartesian and fixed domain, through the finite difference method, where the fractional step method is used for pressure-velocity coupling. The equation that models the thermal energy balance in the solid subdomain is discretized and solved in a lagrangian domain, formed by triangular elements, using the finite element method. The immersed boundary methodology is applied in order to approach both subdomains in distinct and independent ways. The solutions obtained for each subdomain, individually, are coupled according to the strong partitioned coupling methodology. Verification tests are performed in order to verify the implementations performed. Simulations are carried out in order to validate the numerical-computational model developed, where the results obtained are in accordance with those presented in the literature.

**Keywords:** Computational Fluid Dynamics, Conjugated Heat Transfer, Finite Difference Method, Finite Element Method, Non-Isothermal Flows over Complex Geometries.

# Listas de ilustrações

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Aplicações da metodologia numérico-computacional associada à problemas de transferência térmica conjugada. . . . .   | 19 |
| Figura 2 – Representação ilustrativa dos métodos de acoplamentos monolítico e particionado. . . . .   | 24 |
| Figura 3 – Representação esquemática do acoplamento fraco. . . . .  | 26 |
| Figura 4 – Representação esquemática do acoplamento forte utilizando-se o método bloco-Gauss-Seidel não linear. . . . .   | 26 |
| Figura 5 – Representação esquemática dos quatro principais métodos de acoplamento térmico. . . . .  | 27 |
| Figura 6 – Representação de uma malha conforme e de uma malha cartesiana. . .   | 30 |
| Figura 7 – Representação de um elemento de fluido em um volume de controle euleriano qualquer. . . . .  | 40 |
| Figura 8 – Representação esquemática da malha computacional euleriana adotada para o domínio fluido. . . . .  | 57 |
| Figura 9 – Representação esquemática dos domínios de cálculos utilizados no método da fronteira imersa. . . . .   | 63 |
| Figura 10 – Representação esquemática de uma malha computacional não estruturada adotada para o domínio sólido. . . . .   | 69 |
| Figura 11 – Representação de um elemento finito triangular no sistema de coordenadas cartesiana e paramétricas. . . . .   | 72 |
| Figura 12 – Representação de um elemento de contorno no sistema de coordenadas cartesiana e paramétricas. . . . .   | 75 |
| Figura 13 – Fluxograma do processo de acoplamento térmico entre os subsistemas via método bloco-Gauss-Seidel não linear. . . . .  | 79 |
| Figura 14 – Vórtices de Taylor-Green em $t = 0$ s. . . . .  | 84 |
| Figura 15 – Solução manufatura em $t = 0$ s. . . . .  | 86 |
| Figura 16 – Solução manufatura para o subdomínio sólido em $t = 0$ s. . . . .   | 89 |
| Figura 17 – Representação de uma malha $2 \times 8 \times 8$ formada por elementos finitos triangulares regulares e uniformes. . . . .  | 90 |
| Figura 18 – Representação esquemática de uma cavidade com tampa deslizante. . .   | 91 |
| Figura 19 – Linhas de corrente para diferentes valores do número de Reynolds em uma cavidade quadrada com tampa deslizante. . . . .   | 92 |
| Figura 20 – Linhas de corrente para diferentes valores do número de Reynolds em uma cavidade quadrada com tampa deslizante apresentadas por Ghia, Ghia e Shin (1982). . . . . | 92 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 21 – Comparação dos perfis de velocidade horizontal e vertical nas linhas de simetria de uma cavidade quadrada com tampa deslizante. . . . .  | 93  |
| Figura 21 – Comparação dos perfis de velocidade horizontal e vertical nas linhas de simetria de uma cavidade quadrada com tampa deslizante (continuação). . . . .                                  | 94  |
| Figura 22 – Representação esquemática de uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida. . . . .  | 94  |
| Figura 23 – Isotermas para diferentes números de Rayleigh. . . . .   | 95  |
| Figura 24 – Isotermas para diferentes números de Rayleigh apresentadas por Duarte (2018). . . . .  | 96  |
| Figura 25 – Perfis de velocidade nas linhas de simetrias da cavidade quadrada diferencialmente aquecida. . . . .   | 97  |
| Figura 26 – Perfis de temperatura nas linhas de simetrias da cavidade quadrada diferencialmente aquecida. . . . .  | 97  |
| Figura 27 – Representação esquemática do escoamento sobre um cilindro circular. .  | 98  |
| Figura 28 – Comparação entre as linhas de corrente sobre um cilindro circular para $Re = 40$ . . . . .   | 99  |
| Figura 29 – Comparação entre os contornos de iso-vorticidade sobre um cilindro circular para $Re = 40$ . . . . .   | 99  |
| Figura 30 – Representação esquemática da zona de recirculação formada a jusante de um cilindro circular em escoamento permanente. . . . .  | 100 |
| Figura 31 – Representação esquemática do escoamento entre dois cilindros circulares concêntricos. . . . .  | 101 |
| Figura 32 – Comparação das isotermas na coroa circular formada por dois cilindros concêntricos para diferentes números de Rayleigh, com $Pr = 0,71$ e $\chi = 0,26$ . . . . .                      | 102 |
| Figura 33 – Comparação das linhas de corrente na coroa circular formada por dois cilindros concêntricos para diferentes números de Rayleigh, com $Pr = 0,71$ e $\chi = 0,26$ . . . . .             | 103 |
| Figura 34 – Comparação do número de Nusselt na parede do cilindro interno para diferentes números de Rayleigh, com $Pr = 0,71$ e $\chi = 0,26$ . . . . .   | 104 |
| Figura 35 – Comparação do número de Nusselt na parede do cilindro externo para diferentes números de Rayleigh, com $Pr = 0,71$ e $\chi = 0,26$ . . . . .   | 104 |
| Figura 36 – Comparação do perfil de temperatura na coroa circular formada entre os cilindros em $\theta = 90^\circ$ para diferentes números de Rayleigh, com $Pr = 0,71$ e $\chi = 0,26$ . . . . . | 105 |
| Figura 37 – Representação esquemática da difusão térmica em uma chapa fina, retangular e longa, com temperatura imposta nas extremidades. . . . .  | 106 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 38 – Comparaçāo do perfil de temperatura na linha de simetria horizontal de uma chapa retangular longa com temperatura prescrita nas extremidades, para diferentes tamanhos de malhas. . . . .  | 107 |
| Figura 39 – Soluçāo computacional da distribuiçāo de temperatura na chapa em regime permanente. . . . .  | 107 |
| Figura 39 – Soluçāo computacional da distribuiçāo de temperatura na chapa em regime permanente (continuaçāo). . . . .  | 108 |
| Figura 40 – Representaçāo esquemática da difusão térmica em uma chapa fina, retangular e longa, com as extremidades isoladas. . . . .  | 108 |
| Figura 41 – Comparaçāo da evoluçāo temporal da temperatura em um ponto na extremidade esquerda da linha de simetria horizontal de uma chapa retangular longa, para diferentes tamanhos de malhas. . . . .  | 109 |
| Figura 42 – Comparaçāo do perfil de temperatura na linha de simetria horizontal de uma chapa retangular longa totalmente isolada, para diferentes tamanhos de malhas. . . . .  | 110 |
| Figura 43 – Representaçāo esquemática do problema térmico conjugado de estratificação térmica estável. . . . .   | 111 |
| Figura 44 – Perfil de temperatura na linha de simetria vertical do problema térmico conjugado de estratificação térmica estável. . . . .   | 112 |
| Figura 45 – Campo de temperatura adimensional para o problema térmico conjugado de estratificação térmica estável. . . . .   | 113 |
| Figura 46 – Representaçāo de uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida com a presençā de um sólido imerso condutivo também quadrado em seu interior. . . . .   | 114 |
| Figura 47 – Isotermas para diferentes valores de razāo de condutividade térmica em uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida com a presençā de um sólido condutivo quadrado para $Pr = 0,71$ , $Ra = 10^5$ e $\chi = 0,5$ . . .                  | 115 |
| Figura 47 – Isotermas para diferentes valores de razāo de condutividade térmica em uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida com a presençā de um sólido condutivo quadrado para $Pr = 0,71$ , $Ra = 10^5$ e $\chi = 0,5$ (continuaçāo). . . . . | 116 |
| Figura 48 – Distribuiçāo de temperatura ao longo das arestas do sólido condutivo quadrado em função de diferentes valores para a razāo de condutividade térmica para $Pr = 0,71$ , $Ra = 10^5$ e $\chi = 0,5$ . . . . .                                | 117 |
| Figura 49 – Distribuiçāo do fluxo térmico ao longo das arestas do sólido condutivo quadrado em função de diferentes valores para a razāo de condutividade térmica para $Pr = 0,71$ , $Ra = 10^5$ e $\chi = 0,5$ . . . . .                              | 117 |

# Lista de tabelas

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 1 – Condição de contorno de Dirichlet para as velocidades e Neumann para a pressão. . . . .   | 85  |
| Tabela 2 – Condição de contorno de Neumann para as velocidades e Dirichlet para a pressão. . . . .   | 86  |
| Tabela 3 – Condição de contorno de Dirichlet para as velocidades, Neumann para a pressão e Dirichlet para a temperatura. . . . .   | 87  |
| Tabela 4 – Condição de contorno de Dirichlet para as velocidades, Neumann para a pressão e Neumann para a temperatura. . . . .   | 88  |
| Tabela 5 – Condição de contorno de Neumann para as velocidades, Dirichlet para a pressão e Dirichlet para a temperatura. . . . .   | 88  |
| Tabela 6 – Condição de contorno de Neumann para as velocidades, Dirichlet para a pressão e Neumann para a temperatura. . . . .   | 89  |
| Tabela 7 – Análise de ordem de convergência para o subsistema sólido. . . . .  | 90  |
| Tabela 8 – Análise de independência de malha em uma cavidade quadrada com tampa deslizante. . . . .  | 91  |
| Tabela 9 – Avaliação do número de Nusselt médio na parede esquerda de uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida em função da malha computacional. . . . .                            | 95  |
| Tabela 10 – Comparação do valor do número de Nusselt médio na parede aquecida de uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida para diferentes números de Rayleigh. . . . .              | 96  |
| Tabela 11 – Comparação de características de um escoamento permanente sobre um cilindro circular para $Re = 40$ . . . . .  | 100 |
| Tabela 12 – Teste de convergência de um ponto em evolução temporal na extremidade esquerda de uma placa retangular longa sobre processo de difusão térmica. . . . .                        | 109 |
| Tabela 13 – Teste de convergência na linha de simetria horizontal de uma placa retangular longa e totalmente isolada, sobre processo de difusão térmica para o tempo de $t = 3$ s. . . . . | 110 |
| Tabela 14 – Teste de convergência na linha de simetria vertical do corpo sólido, no problema térmico conjugado de estratificação térmica estável. . . . .                                  | 113 |
| Tabela 15 – Temperatura adimensional e fluxo térmico na interface fluido-sólido em função da malha computacional no problema térmico conjugado de estratificação térmica estável. . . . .  | 113 |

|   |     |
|---|-----|
| Tabela 16 – Avaliação do número de Nusselt médio na parede esquerda de uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida com um sólido condutivo quadrado em função da malha computacional. . . . .   | 115 |
| Tabela 17 – Comparaçao do valor do número de Nusselt médio na parede aquecida de uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida com a presença de um sólido condutivo quadrado para diferentes valores da razão de condutividade térmica, com $Pr = 0,71$ , $Ra = 10^5$ e $\chi = 0,5$ . . . . . | 116 |

# **Lista de abreviaturas e siglas**

|       |  |
|-------|--|
| CDS   | Central Difference Scheme                          |
| CHT   | Conjugate Heat Transfer                            |
| CSS   | Conventional Sequential Staggered                  |
| FFTB  | Flux Forward Temperature Back                      |
| hFFB  | Heat Transfer Coefficient Forward Flux Back        |
| hFTB  | Heat Transfer Coefficient Forward Temperature Back |
| IB    | Immersed Boundary                                  |
| IIM   | Immersed Interface Method                          |
| MDF   | Multi-Direct Forcing                               |
| MDH   | Multi-Direct Heat                                  |
| MEF   | Método dos Elementos Finitos                       |
| MFLab | Laboratório de Mecânica dos Fluidos                |
| MMS   | Method of Manufactured Solutions                   |
| TFFB  | Temperature Forward Flux Back                      |
| UFU   | Universidade Federal de Uberlândia                 |

# Sumário

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>1</b>   | <b>INTRODUÇÃO</b>  | <b>17</b> |
| <b>1.1</b> | <b>Objetivo</b>  | <b>20</b> |
| <b>2</b>   | <b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>                                       | <b>21</b> |
| <b>2.1</b> | <b>Transferência Térmica Conjugada</b>                             | <b>21</b> |
| 2.1.1      | Métodos Contínuos  | 22        |
| 2.1.2      | Métodos Computacionais   | 23        |
| <b>2.2</b> | <b>Método da Fronteira Imersa</b>                                  | <b>30</b> |
| 2.2.1      | Interface Nítida   | 32        |
| 2.2.2      | Interface Difusa   | 34        |
| 2.2.3      | Fronteira Imersa Térmica   | 36        |
| <b>3</b>   | <b>MODELO MATEMÁTICO</b>   | <b>38</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Hipótese do Contínuo</b>  | <b>38</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Subdomínio Fluido</b>   | <b>39</b> |
| 3.2.1      | Equação da Continuidade  | 39        |
| 3.2.2      | Equação de Cauchy  | 40        |
| 3.2.3      | Hipótese de Stokes   | 43        |
| 3.2.4      | Equação da Energia Térmica   | 44        |
| 3.2.5      | Escoamentos Incompressíveis e a Aproximação de Oberbeck-Boussinesq | 47        |
| 3.2.6      | Caracterização do Escoamento                                       | 49        |
| <b>3.3</b> | <b>Subdomínio Sólido</b>   | <b>51</b> |
| <b>4</b>   | <b>MODELO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL</b>                               | <b>53</b> |
| <b>4.1</b> | <b>Subsistema Fluido</b>   | <b>53</b> |
| 4.1.1      | Discretização Temporal   | 53        |
| 4.1.2      | Acoplamento Pressão-Velocidade                                     | 54        |
| 4.1.3      | Discretização Espacial   | 56        |
| 4.1.4      | Discretização das Equações de Balanço                              | 58        |
| 4.1.5      | Convergência e Estabilidade  | 61        |
| <b>4.2</b> | <b>Fronteira Imersa</b>  | <b>62</b> |
| 4.2.1      | Imposição da Condição de Contorno Dinâmica                         | 64        |
| 4.2.2      | Imposição da Condição de Contorno Térmica                          | 66        |
| <b>4.3</b> | <b>Subsistema Sólido</b>   | <b>68</b> |
| 4.3.1      | Malha Numérica   | 68        |
| 4.3.2      | Discretização pelo Método dos Elementos Finitos                    | 69        |

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| 4.3.3      | Funções de Forma . . . . .  | 72         |
| 4.3.4      | Matrizes Elementares . . . . .  | 73         |
| 4.3.5      | Elementos de Contorno . . . . .   | 74         |
| 4.3.6      | Matrizes e Vetores Globais . . . . .  | 76         |
| 4.3.7      | Discretização Temporal . . . . .  | 77         |
| <b>4.4</b> | <b>Acoplamento Térmico . . . . .</b>  | <b>77</b>  |
| <b>5</b>   | <b>RESULTADOS . . . . .</b>   | <b>80</b>  |
| <b>5.1</b> | <b>Estudo de Ordem de Convergência . . . . .</b>  | <b>81</b>  |
| 5.1.1      | Método das Soluções Manufaturadas . . . . .   | 82         |
| 5.1.2      | Ordem de Convergência do Subsistema Fluido . . . . .  | 84         |
| 5.1.3      | Ordem de Convergência do Subsistema Sólido . . . . .  | 89         |
| <b>5.2</b> | <b>Cavidade com Tampa Deslizante . . . . .</b>  | <b>91</b>  |
| <b>5.3</b> | <b>Cavidade Diferencialmente Aquecida . . . . .</b>   | <b>94</b>  |
| <b>5.4</b> | <b>Escoamento Sobre um Cilindro Circular . . . . .</b>  | <b>97</b>  |
| <b>5.5</b> | <b>Convecção Natural Entre Dois Cilindros Circulares Concêntricos . . . . .</b>                 | <b>101</b> |
| <b>5.6</b> | <b>Difusão Térmica em uma Chapa Retangular Longa . . . . .</b>                                  | <b>105</b> |
| 5.6.1      | Extremidades com Temperatura Constante . . . . .  | 106        |
| 5.6.2      | Extremidades Isoladas . . . . .   | 108        |
| <b>5.7</b> | <b>Estratificação Térmica Estável . . . . .</b>   | <b>110</b> |
| <b>5.8</b> | <b>Cavidade Diferencialmente Aquecida com a Presença de um Corpo Sólido Condutivo . . . . .</b> | <b>113</b> |
| <b>6</b>   | <b>CONCLUSÃO . . . . .</b>  | <b>119</b> |
|            | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>  | <b>121</b> |

# 1 Introdução

A mecânica dos fluidos é um dos vários ramos da mecânica. Grande é sua abrangência, desde a investigação e análise do complexo movimento dos fluidos, até as interações destes com o meio que o cerca ou que é cercado por ele. Em virtude do amplo campo, a mecânica dos fluidos muitas vezes é utilizada de forma interdisciplinar com outros ramos da física, ou até mesmo com outras esferas do conhecimento.

Dentro da mecânica dos fluidos destaca-se a área de interação fluido-estrutura, que representa a parcela da mecânica dos fluidos na qual busca-se estudar e compreender a dinâmica das estruturas submersas e suas interações com os fluidos que as circundam. Vastos são os fenômenos físicos, tanto naturais quanto industriais, que envolvem interações fluido-estruturais, como por exemplo: válvulas sanguíneas, tubulações de transporte de fluido, rotores de máquinas rotativas e pás de turbinas. Sua fundamentação teórica baseia-se na junção de dois campos da mecânica, a mecânica dos fluidos e a mecânica dos sólidos, caracterizando-a como uma ciência multifísica.

Muitas vezes efeitos térmicos alteram substancialmente a dinâmica do acoplamento fluido-estrutural, de modo que se torna necessário recorrer aos fundamentos da termodinâmica para a modelagem de certa classe de problemas desta natureza. Para estes problemas a energia térmica é continuamente transferida entre o escoamento e o corpo sólido (estrutura submersa), de forma que a variação de temperatura experimentada pelo fluido e pela estrutura ocorre em virtude das interações térmicas entre os dois meios. Assim, estes problemas podem ser classificados como problemas de interação termo-fluido-estrutural.

Do ponto de vista térmico, problemas de interação termo-fluido-estrutural pertencem a uma área de estudo conhecida como Transferência Térmica Conjugada (*Conjugate Heat Transfer – CHT*, em inglês). Como existe uma diferença física entre a natureza do meio fluido e do meio sólido, os mecanismos de transporte e transformação de energia são distintos em cada um deles, de modo que, para os fluidos geralmente prevalece efeitos advectivos e difusivos, enquanto para os sólidos apenas efeitos difusivos estão presentes. Desse modo, a termodinâmica do fenômeno analisado se torna um problema conjugado, isto é, é a combinação dos efeitos térmicos atuantes tanto sobre o escoamento quanto sobre a estrutura submersa.

Vastas são as aplicações envolvendo interações térmicas intensas entre escoamentos e estruturas, onde em sua grande maioria são voltadas à engenharia, tal qual: sistemas de arrefecimento de componentes eletrônicos, distribuição de temperatura em motores de

combustão e análise de trocadores térmicos. Muitas de tais aplicações surgem da necessidade de se compreender fenômenos naturais ou solucionar problemas e aperfeiçoar processos industriais, os quais, em geral, apresentam um alto número de graus de liberdade e uma grande complexidade física e geométrica. Deste modo, duas vertentes se mostram usuais para a análise e solução destes problemas: a experimentação material e a experimentação virtual.

A experimentação material baseia-se na construção de modelos materiais na forma de bancadas experimentais para a investigação do problema. Os modelos materiais consistem em uma representação do fenômeno em estudo em uma bancada, onde são adotadas sobre ele hipóteses simplificadoras, a fim de viabilizar a análise do mesmo. As bancadas experimentais representam um meio controlado e devidamente instrumentado, onde o fenômeno de interesse possa ser reproduzido. Os dados obtidos através da instrumentação das bancadas experimentais são submetidos a um rigoroso processo estatístico, com a finalidade de se garantir a confiabilidade das informações adquiridas e a replicabilidade do experimento.

A experimentação virtual é fundamentada em leis e postulados físicos que regem a dinâmica e o transporte e transformação de energia do problema em análise, e quando criteriosamente aplicados sobre o modelo físico, permitem a formulação de modelos matemáticos e numérico-computacionais. Modelos matemáticos são obtidos a partir dos modelos físicos, de modo que estes são convertidos em equações matemáticas que modelam a física observada no problema, onde estas equações podem ser de cunho diferenciais, integrais, integro-diferenciais ou até mesmo algébricas. Devido a alta complexidade geralmente apresentada pelas equações obtidas no modelo matemático, juntamente com a necessidade de aplicação à geometrias mais gerais, as soluções analíticas se tornam limitadas e em alguns casos impossíveis, fazendo-se necessária a utilização de soluções aproximadas por meio de modelos computacionais. Os modelos numérico-computacionais são desenvolvidos através da discretização das equações obtidas pelo modelo matemático e da construção de rotinas computacionais para solução das mesmas.

Os métodos de análise baseados na experimentação virtual, isto é, análises computacionais, estão em crescente uso e sua aplicabilidade não se limita apenas à engenharia, mas sim a uma vasta gama de ramos do conhecimento humano. Devido a sua flexibilidade em relação às propriedades físicas e condições geométricas, é possível uma análise detalhada sobre diferentes nuances do problema em estudo. É imprescindível destacar que a experimentação virtual não substitui a experimentação material, ou vice-versa, porém ambas se complementam. No entanto, a experimentação material muitas vezes será impraticável em virtude de altos custos com instrumentação e protótipos, além de poder trazer riscos de segurança ao ser realizada em laboratório. A experimentação virtual pode necessitar um

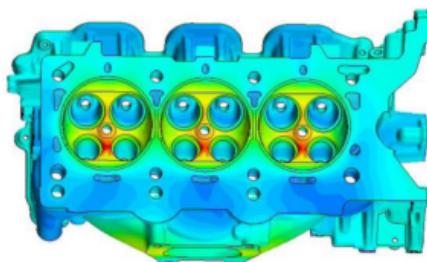
alto custo computacional em função da exigência de modelos numéricos-computacionais robustos, de modo que sua aplicação se torne inviável.

Os processos de transferência térmica conjugada quando relacionados à metodologia computacional, apresentam uma maior complexidade na determinação das condições térmicas na interface fluido-sólido. Isso ocorre pois, devido à contínua e intensa troca de energia térmica entre o escoamento e o corpo sólido, a temperatura e o fluxo térmico na interface não podem ser simplesmente aproximados pelas condições de contorno convencionais (Dirichlet, Neumann e Robinn). Dessa forma é essencial o emprego de acoplamentos térmicos para a solução do problema, ou seja, cada subdomínio (fluído e sólido) possui seu modelo matemático intrínseco, de modo que ambos trocam informações térmicas sobre a interface.

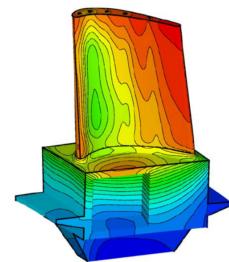
A análise de problemas de transferência térmica conjugada quando associada à metodologia numérico-computacional é uma importante ferramenta no estudo e desenvolvimento de equipamentos industriais mais eficientes. A figura 1, a seguir, exemplifica algumas dessas aplicações.

Figura 1 – Aplicações da metodologia numérico-computacional associada à problemas de transferência térmica conjugada.

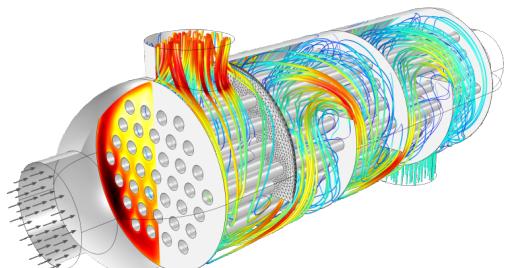
(a) Mapa de temperatura de motores de combustão interna.



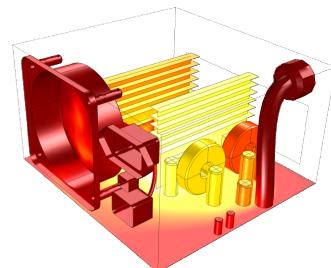
(b) Resfriamento a gás em palhetas de turbinas.



(c) Escoamento sobre dutos de trocadores térmicos.



(d) Sistema de arrefecimento de conversores de energia elétrica.



Fontes: (a) Iqbal, Arora e Sanka (2014), (b) Verstraete e Braembussche (2009), (c) e (d) Huc (2014).

Neste contexto, o presente trabalho visa apresentar uma fundamentação teórica acerca da aplicação da metodologia numérico-computacional para problemas de transfe-

rencia térmica conjugada, atuando como base para futuras implementações no que diz respeito a este tema no contexto do Laboratório de Mecânica dos Fluidos Computacional (MFLab) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU).

## 1.1 Objetivo

O objetivo principal desta dissertação é contribuir com o desenvolvimento de um código computacional para solução de problemas de transferência térmica conjugada bidimensionais, onde o corpo sólido pode apresentar geometria complexa. Para tal propósito a modelagem física, matemática e computacional do problema térmico conjugado são desenvolvidas e particularizadas. As equações obtidas através do modelo matemático são discretizadas e rotinas computacionais são elaboradas e implementadas em linguagem de programação Fortran 90. Simulações são conduzidas afim de verificar os algoritmos implementados e validar os resultados obtidos ao compará-los com os dados apresentados pela literatura.

Com o intuito de cumprir os objetivos deste trabalho, os seguintes passos são considerados:

1. Particularização da modelagem matemática para escoamento de fluidos newtonianos, incompressíveis e com propriedades físicas constantes, onde o corpo sólido imerso é considerado estático e também com propriedades físicas constantes;
2. As equações obtidas via modelo matemático para o subdomínio fluido são discretizadas em um domínio euleriano bidimensional pelo método das diferenças finitas, onde é empregado o método do passo fracionado para o acoplamento pressão-velocidade;
3. Para o subdomínio sólido as equação obtidas através do modelo matemático são discretizadas em um domínio lagrangiano bidimensional pelo método dos elementos finitos;
4. Utiliza-se dos métodos de fronteira imersa dinâmica (WANG; FAN; LUO, 2008) e térmica (WANG et al., 2009), a fim de tratar separadamente ambos os subdomínios;
5. As soluções obtidas em cada um dos subdomínios são acopladas através do acoplamento forte, baseado no balanço de energia térmica na interface;
6. Para a experimentação virtual, rotinas computacionais são elaboradas e implementadas na linguagem de programação Fortran 90.
7. Testes de verificação são realizados a fim de se verificar a ordem de convergência dos métodos numéricos implementados e simulações são realizadas para validação da metodologia computacional apresentada.

## 2 Revisão Bibliográfica

Este capítulo é destinado a revisão bibliográfica acerca dos métodos de solução de problemas de transferência térmica conjugada, além dos métodos de fronteira imersa, essenciais para solução de problemas envolvendo geometrias complexas.

### 2.1 Transferência Térmica Conjugada

Em sua pluralidade, os dispositivos térmicos são analisados e projetados tendo como base os parâmetros termodinâmicos: temperatura, fluxo térmico e o coeficiente de convecção térmica. Este coeficiente, por sua vez, é uma característica correlacionada ao regime operacional dos dispositivos térmicos e sua determinação é considerada o problema central da convecção.

Por ser relacionado ao regime de operação da máquina térmica, o coeficiente de convecção térmica é fortemente dependente das condições de camada-limite, as quais são influenciadas pela geometria do corpo imerso, natureza do escoamento e propriedades físicas do fluido (BERGMAN et al., 2017). Devido a esta forte dependência, o cálculo do coeficiente é essencialmente realizado através do acoplamento das condições térmicas entre os domínios sólido e fluido, ou seja, o fluxo térmico que deixa a fronteira do corpo sólido por efeitos convectivos é completamente absorvido pelo fluido que o circunda, e vice-versa. Deste modo, dispositivos térmicos, assim como quaisquer problemas em que o coeficiente convectivo necessite ser determinado, são caracterizados como problemas de transferência térmica conjugada.

Há pouco mais de seis décadas problemas de transferência térmica conjugada vêm sendo discutidos e analisados no âmbito científico, e ao longo deste tempo, no que refere-se a experimentação virtual, duas abordagens foram praticadas para a obtenção da solução desta classe de problemas: métodos de solução contínua e métodos numéricos. Os métodos de solução contínuas requerem uma compreensão aprofundada sobre a física do problema, além de demandar uma matemática mais complexa. Devido a complexidade das equações apresentadas no modelo matemático, a solução contínua só é viável através de uma série de simplificações aplicadas às suposições estabelecidas acerca do problema em específico. Em contrapartida a solução por métodos numéricos é mais simples, dependendo do método numérico empregado, além de abranger uma gama muito maior de problemas, uma vez que as simplificações empregadas sobre ele podem ser mais gerais. Para ambas as abordagens o mesmo modelo matemático é utilizado e composto pelas equações seguintes:

- Subdomínio fluido:
  - Balanço de massa (Equação da continuidade);
  - Balanço de quantidade de movimento linear (Equações de Navier-Stokes);
  - Balanço de energia térmica.
- Subdomínio sólido:
  - Balanço de energia térmica (Equação da Energia).

John, Senthilkumar e Sadasivan (2019) apontam em seu trabalho que problemas de transferência térmica conjugada não são exclusivos de interações fluido-sólido. Pois, uma vez que, a metodologia pode ser aplicável para quaisquer subdomínios com seus respectivos modelos matemáticos, ela também pode ser empregada para subdomínios modelados pelo mesmo conjunto de equações, porém com propriedades físicas ou geométricas distintas.

### 2.1.1 Métodos Contínuos

O precursor dos estudos em problemas térmicos conjugados foi Perelman (1961), sendo o primeiro a introduzir o termo “transferência térmica conjugada”. Em seu trabalho é analisada a transferência de energia térmica entre um corpo sólido com uma fonte interna de energia e o fluido que o circunda, onde foram obtidas soluções assintóticas a partir da forma integral da equação da energia térmica. Devido as suposições e simplificações adotadas para construção das soluções, estas são válidas para valores do número de Prandtl maiores que a unidade e o adimensional de Reynolds menor que  $3 \cdot 10^5$ .

Após a publicação dos estudos de Perelman, vários pesquisados passaram a dar atenção ao problema da transferência térmica conjugada, sendo a maior parte das pesquisas voltadas à interação térmica entre uma placa plana e o escoamento que atua sobre ela. Diversas equações analíticas foram concebidas para solução de problemas térmicos conjugados simples, cada uma apresentando como base a suposição de escoamento unidimensional ou bidimensional e a adoção de um perfil de velocidade conhecido na camada-limite térmica.

Devido à simplificação dos cálculos e a boa correlação aos resultados experimentais, perfis lineares de velocidade para a camada-limite térmica foram adotados nos trabalhos de autores como, por exemplo, Perelman (1961) e Kumar (1968). Segundo Dorfman (2009), a aproximação linear é razoável para casos em que o número de Prandtl é muito grande, ou caso exista um comprimento inicial de placa não aquecido à montante da região aquecida. Em ambos os casos, a espessura da camada-limite térmica é muito menor que a espessura da camada-limite dinâmica, consequentemente, a distribuição de velocidade através de uma camada-limite térmica fina pode ser bem aproximada por uma reta.

Outro extremo ocorre para escoamentos caracterizados por números de Prandtl muito baixos, nestes casos a camada-limite térmica é espessa em relação a camada-limite de velocidade, de modo que a região de influência viscosa gerada pela parede é muito pequena e a distribuição de velocidade do escoamento pode ser aproximada por um valor constante igual a velocidade de corrente livre. Este caso apresenta maior simplicidade matemática e foi investigado por diversos pesquisadores, como é o caso de Rizk, Kleinstreuer e Özisik (1992) que estudaram a transferência térmica conjugada em blocos aquecidos imersos em escoamentos laminares, Luikov (1974) fez análises para o caso de uma placa plana com uma fonte térmica e Viskanta e Abrams (1971) usaram a suposição de escoamento em golfadas (*slug flow*, em inglês) para investigar a troca térmica entre dois fluidos em escoamentos contra-correntes separados por uma placa fina.

Outros métodos também foram aplicados para a obtenção de soluções contínuas de problemas de transferência térmica conjugada. A utilização de séries de potências para determinação da temperatura na interface foi fundamentada por Luikov et al. (1970), ao demonstrarem matematicamente a convergência destas séries. No ano seguinte, Gdalevich e Khusid (1971) utilizaram-se deste método para resolver as equações de Navier-Stokes e do balanço de energia térmica sobre uma placa plana num domínio bidimensional.

Formas geométricas diferentes de placas planas foram abordadas por Luikov, Aleksashenko e Aleksashenko (1971), ao resolverem o problema térmico sobre tubulações circulares, onde o problema conjugado é tratado tanto para escoamentos internos quanto externos. Para escoamentos internos as equações são reduzidas em uma única equação integral para a temperatura na superfície do corpo imerso. Já para escoamentos externos é aplicada a expansão em série de potências do parâmetro senoidal da transformada de Fourier generalizada do perfil de temperatura do escoamento sobre a superfície do corpo imerso. Dorfman e Renner (2009) apresentam um compilado sobre vários problemas de transferência térmica conjugada e os métodos de solução contínua aplicados sobre eles.

Com o avanço computacional, o aumento da capacidade de processamento e o desenvolvimento de novas metodologias numéricas, os métodos contínuos estão gradualmente sendo substituídos pelos métodos computacionais.

### 2.1.2 Métodos Computacionais

Devido à necessidade de solução de problemas cada vez mais complexos e as limitações impostas pelos métodos de soluções contínuas, métodos numéricos passaram a ser amplamente utilizados para análise de problemas de transferência térmica conjugada. Com o avanço do poder computacional e a robustez dos métodos numéricos é possível a solução aproximada, das equações obtidas via modelo matemático, para problemas de

transferência térmica conjugada complexos com bastante precisão e sem a necessidade de se empregar simplificações fortes ao modelo.

A solução computacional de um problema de transferência térmica conjugada é fundamentada na solução simultânea das equações do modelo matemático de cada um dos subdomínios, e no acoplamento entre tais soluções. Usualmente duas abordagens distintas são empregadas para a análise do problema do acoplamento, a abordagem monolítica e a abordagem particionada, a distinção entre ambas se dá basicamente no tratamento da continuidade do fluxo térmico e do campo de temperatura na interface fluido-sólido.

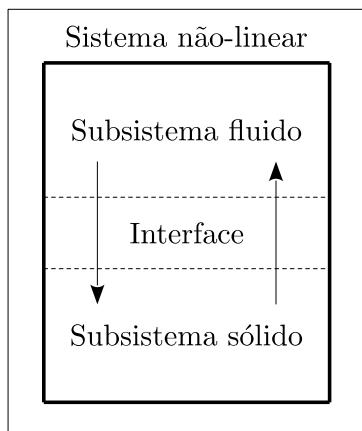
### 2.1.2.1 Acoplamento Monolítico e Particionado

O método monolítico é caracterizado pela utilização de um único código computacional para solução do problema térmico conjugado. Nesta abordagem, ambos os subdomínios são discretizados de maneira unificada e as equações dos modelos matemáticos de cada subdomínio são resolvidas simultaneamente em uma mesma estrutura computacional (GILES, 1997). Estas características garantem maior eficiência computacional ao método monolítico, além de não demandar nenhuma restrição que não seja inerente aos métodos numéricos utilizados.

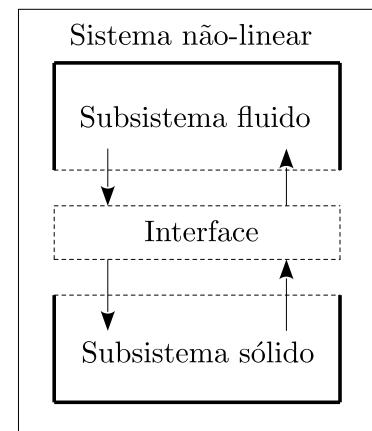
No método particionado, cada subdomínio, fluido e sólido, são resolvidos de forma independente utilizando-se códigos especializados para cada um dos subsistemas. Nesta abordagem, as soluções obtidas através dos códigos independentes são acopladas por meio da interface, de modo a se satisfazer o balanço de energia térmica (HENSHAW; CHAND, 2009). Na figura 2 a seguir, apresenta-se uma ilustração acerca dos métodos de acoplamento monolítico e particionado.

Figura 2 – Representação ilustrativa dos métodos de acoplamentos monolítico e particionado.

(a) Acoplamento monolítico.



(b) Acoplamento particionado.



Fonte: Adaptado de Nabbout (2020).

Embora o método monolítico garanta a continuidade da temperatura e do fluxo térmico na interface fluido-sólido de forma natural, ou seja, não é necessária a utilização de condições de interface para se satisfazer o balanço de energia térmica, não ocasionando instabilidades ao sistema numérico. Este método também requer a construção de um código muito particular para análise do problema em foco, uma vez que as equações são discretizadas em conjunto, assim problemas mais complexos apresentam um maior grau de dificuldade na sua modelagem. Já no método particionado, por se fazer uso de códigos distintos para solução de cada um dos subdomínios, estes códigos podem ser muito bem otimizados, garantindo assim a sua aplicabilidade em problemas mais gerais e de alta complexidade. Porém, esta metodologia pode necessitar de iterações sequenciais para se garantir a continuidade do balanço térmico na interface, o que pode gerar instabilidades numéricas.

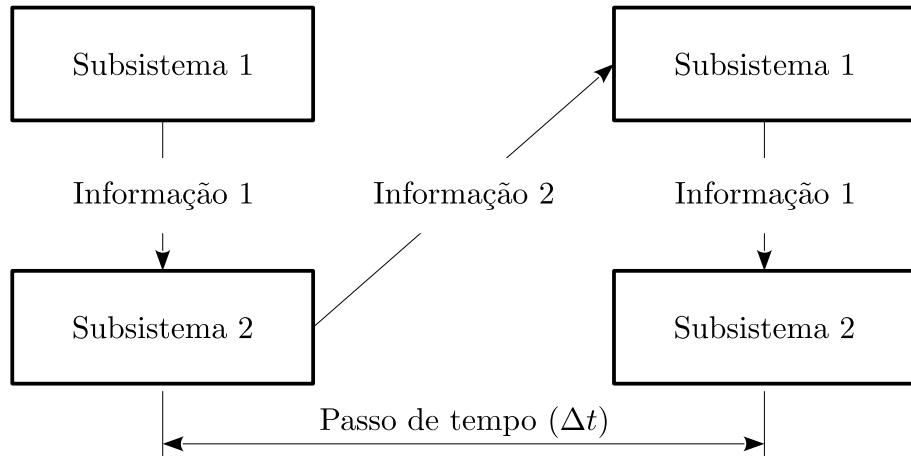
O acoplamento dos subdomínios, na metodologia particionada, é feito a partir de iterações subsequentes entre os códigos destinados a solução de cada subdomínio. Na literatura duas técnicas são utilizadas para realização iterativa do acoplamento dos subdomínios: o acoplamento fraco e o acoplamento forte. Os conceitos fundamentais das duas técnicas são discutidos por Ribeiro Neto (2016).

O acoplamento fraco, também conhecido como sequência atrasada convencional (*Conventional Sequential Staggered – CSS*, em inglês), é caracterizado pela troca de informações entre os subdomínios, através da interface, uma única vez a cada passo de tempo. Nesta técnica, um dos subsistemas recebe uma informação (temperatura ou fluxo térmico) advinda da interface em um passo de tempo anterior, e com esta informação este subsistema é resolvido e novas informações na interface são então calculadas ou interpoladas. A informação de interface complementar à recebida pelo subsistema é então enviada ao outro subsistema, isto é, caso o primeiro subsistema tenha recebido como informação a temperatura da interface, este deve enviar ao segundo subsistema o fluxo térmico e vice-versa. Por fim, com a nova informação de interface o segundo subdomínio é resolvido e avança-se um passo de tempo. Na figura 3 a seguir, é representado o esquema do acoplamento fraco.

A segunda técnica empregada para acoplar as soluções através de um código particionado é o acoplamento forte. No acoplamento forte as informações são transmitidas através da interface em sub-iterações que ocorrem dentro de um mesmo passo de tempo, de forma que as soluções tendam assintoticamente à continuidade do campo de temperatura e do fluxo térmico na interface. Assim, pode-se dizer que o acoplamento forte é um esforço em se buscar uma solução monolítica por meio de um código particionado, onde à medida que mais iterações são realizadas, a solução particionada tenderá à monolítica. Vários métodos podem ser utilizados para a solução de sistemas de equações desacopladas empregando-se

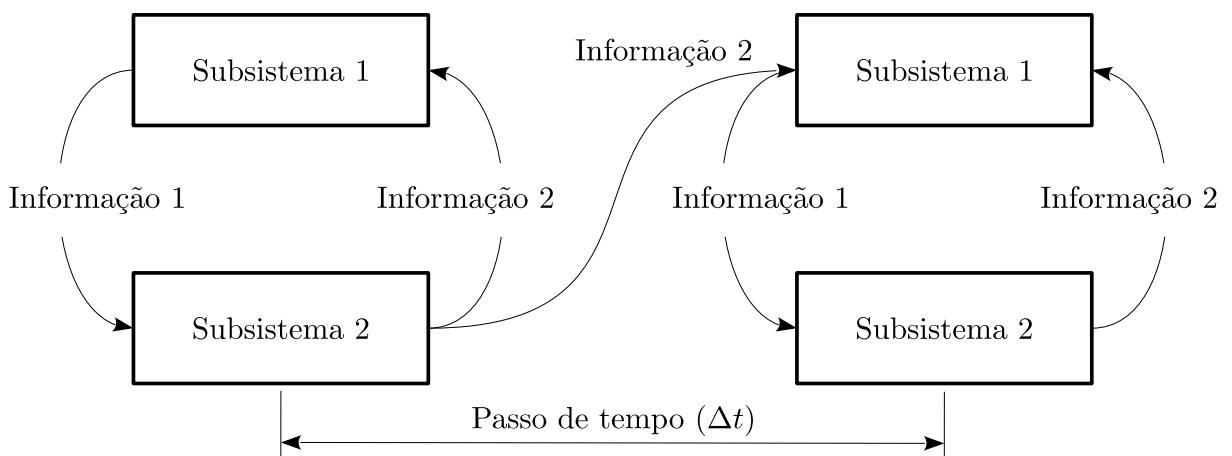
a metodologia particionada. Matthies, Niekamp e Steindorf (2006) e Haelterman (2009) explicam em detalhes uma série de métodos para a solução destes sistemas de equações. A figura 4, representa esquematicamente a utilização do acoplamento forte através da metodologia bloco-Gauss-Seidel não linear.

Figura 3 – Representação esquemática do acoplamento fraco.



Fonte: Do próprio autor.

Figura 4 – Representação esquemática do acoplamento forte utilizando-se o método bloco-Gauss-Seidel não linear.



Fonte: Do próprio autor.

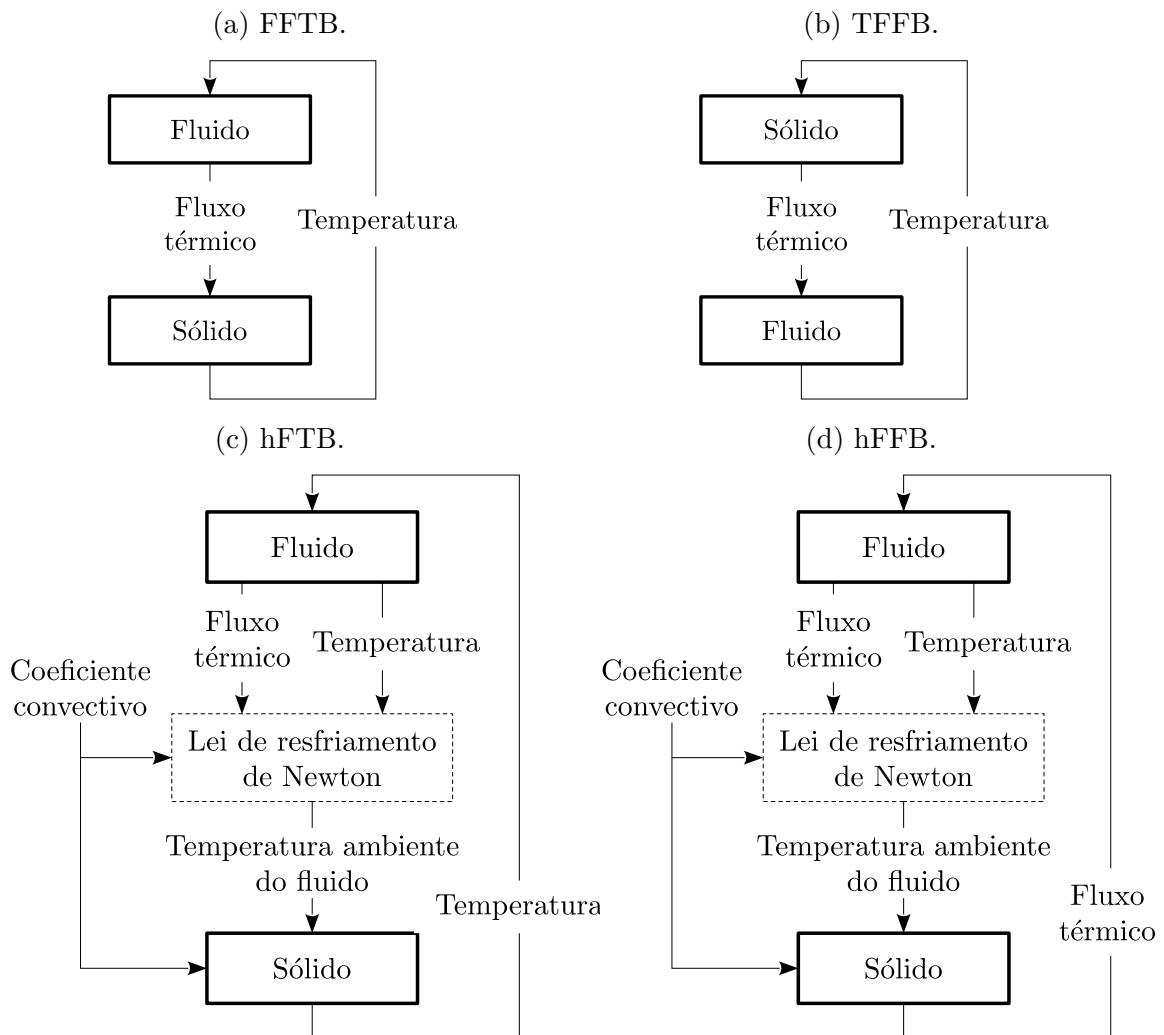
### 2.1.2.2 Comunicação entre Subdomínios Via Interface

Na metodologia particionada é de suma importância a comunicação entre os subdomínios por meio da troca de informações através da interface fluido-sólido. A escolha da forma como as informações são transmitidas de um domínio para o outro impacta diretamente a estabilidade numérica e a convergência do código computacional. Na literatura algumas formas de comunicação entre os subsistemas são abordadas, Verstraete e Scholl (2016) apresentam as quatro principais formas de transferência de informações via

interface para a metodologia particionada aplicadas à problemas de transferência térmica conjugada (figura 5), além de apresentarem as análises de estabilidade referentes a cada uma dessas metodologias.

A terminologia adotada para essas metodologias foram introduzidas inicialmente por Divo et al. (2003), ao estudarem o problema de transferência térmica conjugada associada a turbomáquinas. A nomenclatura dos métodos é baseada na ordem em que as informações são transferidas em relação ao subdomínio fluido.

Figura 5 – Representação esquemática dos quatro principais métodos de acoplamento térmico.



Fonte: Adaptado de Verstraete e Scholl (2016).

O primeiro método é conhecido como fluxo para frente e temperatura para trás (*Flux Forward Temperature Back* – *FFTB*, em inglês). Neste método, um perfil de temperatura na interface, advindo das condições iniciais ou de uma iteração anterior, é fornecido como condição de contorno para o subsistema fluido, o qual é então resolvido, obtendo-se um novo campo de temperatura para o subdomínio fluido. A partir deste campo de temperatura

atualizado calcula-se o fluxo térmico na interface, sendo este utilizado como condição de contorno para o subsistema sólido, que pode então também ser resolvido. A solução do subdomínio sólido fornece um novo perfil de temperatura na interface, que se tornará uma nova condição de contorno para o subsistema fluido, reiniciando o ciclo, conforme esquematizado no fluxograma da figura 5a.

O ciclo de repetição é mantido até que ocorra a convergência, ou seja, a temperatura e o fluxo térmico nos subdomínios fluido e sólido se tornem contínuos na interface. Deste modo, o perfil térmico imposto como condição de contorno ao subsistema fluido, resultará em uma distribuição de fluxo térmico sobre a interface, que ao ser imposta como condição de contorno ao subsistema sólido retornará o mesmo perfil térmico.

Devido as condições de contorno serem atualizadas iterativamente ao longo do processo, a estimativa inicial da distribuição de temperatura e o fluxo térmico na interface não precisam ser totalmente convergentes, porém quanto mais próximos da distribuição real, mais rápida será a convergência. Caso ocorra problemas de convergência, Verstraete e Scholl (2016) mostram que o método FFTB pode ser estabilizado com a utilização de sub-relaxação, isto é, as novas condições de contorno (temperatura ou fluxo térmico) não são impostas diretamente, mas sim ponderadas a partir das condições de contorno da iteração anterior. Em virtude da possibilidade das malhas computacionais utilizadas para a discretização das equações em cada subdomínio serem distintas, porém compartilhando uma região em comum, a interface, pode-se fazer necessária a interpolação de informações de uma malha para outra sobre a interface fluido-sólido.

Montenay, Paté e Duboué (2000) mostram que o tempo característico associado a transferência térmica no subdomínio fluido é ordens de grandezas menor que a do subdomínio sólido. Deste modo, enquanto o sistema fluido rapidamente chega ao estado estacionário o sólido necessita de várias iterações adicionais para atingir o mesmo estado. Portanto, uma abordagem que costuma ser adotada visando a rápida convergência em ambos os subsistemas, é a decomposição do sistema, de modo que, a solução do subdomínio fluido seja feita de maneira transitória enquanto o subdomínio sólido é resolvido em regime permanente.

Esta técnica não pode ser aplicada ao método FFTB para casos em que o corpo sólido esteja completamente imerso. Nestas situações, como o subsistema sólido terá condições de contornos do tipo Neumann, ou seja, fluxo térmico prescrito, a equação diferencial parcial que modela o balanço térmico no subdomínio sólido não apresentará unicidade de solução, tornando o problema de transferência térmica conjugada mal condicionado. Dessa forma, ambos os subsistemas devem ser resolvidos de forma transitória.

O segundo método é denominado temperatura para frente e fluxo para trás (*Temperature Forward Flux Back* – *TFFB*, em inglês), este método é similar ao *FFTB*, porém com as condições de contorno invertidas, conforme esquematizado no fluxograma apresentado na figura 5b. Neste método, um perfil de temperatura, advindo de uma condição inicial ou de uma iteração passada, é enviado como condição de contorno ao subsistema sólido. Este é então resolvido, e o fluxo térmico na interface é computado, sendo passado como condição de contorno para o subsistema fluido. O subsistema fluido é solucionado e um novo perfil de temperatura na interface é obtido, o qual será enviado como condição de contorno ao subsistema sólido, e então o ciclo se repete até que ocorra a convergência e se obtenha a continuidade térmica entre os dois subdomínios. De forma similar ao *FFTB*, caso ocorra problemas de convergência, a estabilidade do sistema pode ser reestabelecida utilizando-se sub-relaxação.

A terceira metodologia aplicável é denominada coeficiente de transferência térmica convectiva para frente e temperatura para trás (*Heat Transfer Coefficient Forward Temperature Back* – *hFTB*, em inglês), esquematizada na figura 5c. Esta técnica faz uso da lei de resfriamento de Newton para atualizar as condições de contorno do subsistema sólido. O método se inicia com uma distribuição de temperatura, proveniente das condições iniciais ou de uma iteração anterior, imposta como condição de contorno ao subsistema fluido, o qual é então solucionado obtendo-se um novo campo de temperatura. A partir deste novo campo de temperatura do subdomínio fluido é estimado um coeficiente de transferência térmica convectiva e a temperatura ambiente do fluido, estas informações aplicadas a lei de resfriamento de Newton promove uma relação entre a temperatura e fluxo térmico na interface fluido-sólido, que é utilizada como condição de contorno para o subsistema sólido. Por fim, o subdomínio sólido é resolvido e um novo perfil de temperatura na interface é obtido, o qual é enviado como condição de contorno para o subsistema fluido, o processo então se reinicia até a convergência e continuidade entre os subsistemas.

O grande problema deste método é a partir da solução do subsistema fluido, definir o coeficiente convectivo e a temperatura ambiente do fluido, onde ambas as grandezas devem satisfazer a lei de resfriamento de Newton. Ao ser aplicada, a lei de resfriamento de Newton retorna um problema em aberto, pois enquanto a temperatura da interface e o fluxo térmico são conhecidos, provenientes da condição de contorno do subsistema sólido e da solução do subsistema fluido, respectivamente, o coeficiente convectivo e a temperatura ambiente do fluido se mantém desconhecidos e dependentes entre si, de modo a se obter uma equação para duas variáveis, impossibilitando a determinação dos mesmos.

Algumas formas de se contornar este problema são abordadas na literatura, a mais simples delas é a imposição de um valor constante e positivo para o coeficiente convectivo. Verstraete e Scholl (2016) mostram que mesmo não atuando nenhum fluxo

térmico na interface, esta metodologia converge para a continuidade térmica entre os subdomínios, sendo o valor do coeficiente convectivo apenas um fator de influência na taxa de convergência, não interferindo na solução final do problema. Deste modo, o coeficiente convectivo é denominado de coeficiente convectivo virtual.

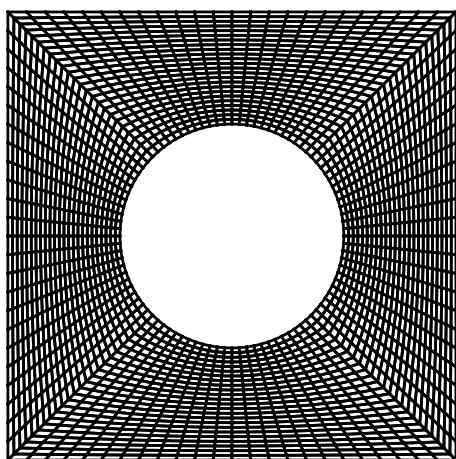
Finalmente, o último método é denominado de coeficiente de transferência térmica convectiva para frente e fluxo térmico para trás (*Heat Transfer Coefficient Forward Flux Back* – *hFFB*, em inglês), representado na figura 5d. Este método é similar ao *hFTB*, diferindo apenas que, enquanto no *hFTB* retorna-se um perfil de temperatura como condição de contorno para o subdomínio fluido, no *hFFB* retorna-se a distribuição do fluxo térmico na interface. Devido a similaridade, o coeficiente convectivo também não afeta o resultado final do método, interferindo apenas na estabilidade e na taxa de convergência da metodologia numérica.

## 2.2 Método da Fronteira Imersa

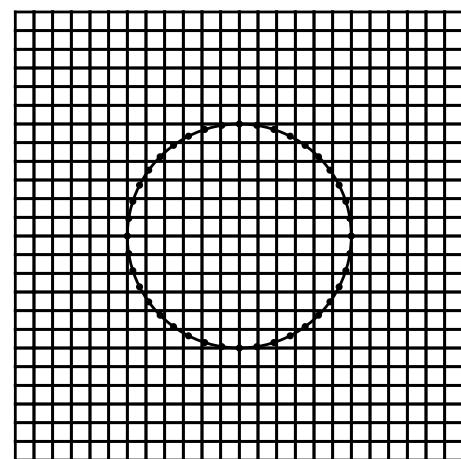
Muitas das aplicações dos problemas de transferência térmica conjugada envolvem escoamentos sobre geometrias imersas, logo faz-se necessário o entendimento dos métodos de modelagem para tratar corpos imersos. A modelagem de escoamentos sobre corpos imersos baseia-se principalmente em duas metodologias: a primeira é denominada malha conforme (*body-fitted*, em inglês), onde faz-se a utilização de malhas computacionais que se adaptam e se moldam à geometria do corpo; a segunda metodologia é denominada fronteira imersa (*Immersed Boundary* – *IB*, em inglês), onde é utilizada uma malha computacional auxiliar para descrever a superfície do corpo. A figura 6 apresenta duas malhas computacionais construídas para a aplicação de cada uma das metodologias.

Figura 6 – Representação de uma malha conforme e de uma malha cartesiana.

(a) Malha conforme.



(b) Malha cartesiana.



Fonte: Do próprio autor.

No caso em que é preferida a utilização de malhas conformes para a modelagem do escoamento, a aplicação das condições de contorno (dinâmicas e térmicas) é feita propriamente na superfície do corpo imerso, uma vez que a malha se adapta à sua fronteira. Já quando o método da fronteira imersa é escolhido, utiliza-se uma malha computacional auxiliar, denominada malha lagrangiana, responsável por mapear a fronteira do corpo imerso e propiciar a aplicação das condições de contorno. Desse modo, o método da fronteira imersa visa a aplicação das condições de contorno sobre superfícies de geometria complexas não necessariamente coincidentes com a malha em que são discretizadas as equações de balanço que modelam o escoamento.

De acordo com Tu, Yeoh e Liu (2018), a aplicação do método de malhas conformes é fundamentado no estabelecimento de um mapeamento adequado entre um domínio regular no espaço computacional e um domínio irregular no espaço físico, de modo que no domínio regular as equações de balanço são discretizadas e resolvidas, para então serem projetadas no domínio irregular. Embora o método de malhas conformes apresente a capacidade de resolver uma grande gama de problemas e facilitar a aplicação das condições de contorno do corpo imerso, este método também apresenta limitações, principalmente quando utilizado com geometrias complexas.

Dentre suas principais limitações pode-se citar uma maior dificuldade na geração de malhas de boa qualidade, sendo então necessário um alto esforço de pré-processamento para geração da malha computacional, principalmente quando se trata de corpos em movimento, onde existe a necessidade de utilização de malhas móveis. Malhas conformes móveis, por sua vez, apresentam uma grande limitação quanto ao estabelecimento de um passo de tempo adequado, visto que os pontos da malha variam sua posição, pode ocorrer a formação de volumes muito pequenos, aumentando a rigidez do sistema numérico, necessitando assim de passos de tempo muito reduzidos. Como a cada passo de tempo deve-se gerar uma nova malha de acordo com o deslocamento do corpo imerso, a eficiência do método pode ser comprometida, requerendo-se então a utilização de métodos implícitos para a integração temporal, ou um tratamento adequado na formação dos volumes da malha, a fim de se viabilizar a execução do método (TU; YEOH; LIU, 2018).

Já no método da fronteira imersa, como a malha que define o volume fluido, denominada malha euleriana, é independente da malha lagrangiana, costuma-se então adotar malhas cartesianas estruturadas, por isso muitas vezes os métodos de fronteira imersa são denominados de métodos de malha cartesiana (*Cartesian grid methods*, em inglês). Embora esta gama de métodos apresente dificuldades para a imposição das condições de contorno na fronteira do corpo imerso, devido a malha não ser conforme ao corpo imerso, a facilidade de se utilizar malhas cartesianas estruturadas resulta em um melhor custo-benefício para determinadas aplicações.

Malhas cartesianas não apresentam grandes dificuldades em sua geração e a maioria dos esquemas números podem ser empregados, requerendo apenas algumas modificações na discretização das equações de balanço na vizinhança da fronteira imersa, a fim de se impor as condições de contorno. Devido a malha euleriana ser independente da lagrangiana, a complexidade geométrica do corpo imerso não tem efeitos significativos na complexidade e qualidade da malha euleriana. Assim, esta metodologia se mostra vantajosa principalmente quando aplicada a corpos em movimento, uma vez que a malha euleriana é fixa. A malha sendo fixa, não há a necessidade de remalhagem do domínio a cada passo de tempo, impactando positivamente na simplicidade, acurácia, robustez e no custo computacional do método de solução (MITTAL; IACCARINO, 2005).

Na literatura os métodos de fronteira imersa são classificados basicamente através da forma como as condições de contorno da fronteira são impostas sobre o escoamento, sendo esta imposição feita principalmente de duas maneiras: uma através da modificação do esquema numérico próximo à fronteira imersa com o intuito de se impor diretamente as condições de contorno na fronteira do corpo. Nesta metodologia a interface entre o volume fluido e o corpo imerso é dita nítida; a outra é adicionando um termo forçante as equações de balanço, a fim de se satisfazer as condições de contorno desejadas, a interface para esta metodologia é denominada difusa.

### 2.2.1 Interface Nítida

Os métodos de fronteira imersa com interface nítida geralmente apresentam a vantagem de propiciarem métodos numéricos com maior precisão que os de interface difusa, uma vez que o efeito da imposição das condições de contorno do corpo imerso não é distribuído sobre os volumes da malha euleriana na vizinhança da fronteira imersa (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2008). Outro grande benefício desta metodologia é o desacoplamento das equações de balanço entre os volumes da malha euleriana que representam o domínio fluido e o domínio sólido, possibilitando a solução de escoamento sobre corpos esbeltos e corpos sobre efeito de escoamentos internos e externos simultaneamente.

Udaykumar et al. (2001) mostram que para os métodos de interface nítida, existe a necessidade da imposição de uma condição de contorno para a pressão na fronteira imersa, e além disto, esta condição de contorno depende se o corpo imerso está estacionário ou em movimento. A utilização desta metodologia com corpos em movimento, apresenta ainda o inconveniente de que o estêncil de cálculo, utilizado para discretização das equações de balanço, deve ser atualizado de acordo com o deslocamento da fronteira imersa.

Dentre os principais métodos de fronteira imersa com interface nítida utilizados, pode-se citar: Método das células cortadas (*Cut-Cell Method*), método da interface imersa

(*Immersed Interface Method – IIM*) e o método das células fantasma ( *Ghost-Cell method*).

### 2.2.1.1 Método das Células Cortadas (*Cut-Cell*)

Este método foi proposto inicialmente por Clarke, Salas e Hassan (1986) e baseia-se fundamentalmente em identificar as células da malha euleriana que interceptam a fronteira imersa e corta-las de forma a eliminar o pedaço de célula contido no domínio sólido. Após as células serem cortadas, pode ocorrer a formação de novas células muito pequenas, comprometendo a estabilidade dos métodos numéricos.

Para resolver esse problema, Ye et al. (1999) propõem que as partes das células cortadas, em que seus centros permaneceram no domínio sólido, sejam absorvidas pelas células vizinhas no domínio fluido, dando origem a volumes de controle trapezoidais. Após a reformulação da malha computacional, as equações de balanço são discretizadas e resolvidas com as condições de contorno impostas diretamente na fronteira imersa.

### 2.2.1.2 Método da Interface Imersa – IIM

Esta metodologia foi proposta por LeVeque e Li (1994) para a resolução de equações elípticas com soluções descontínuas e não suaves, e então estendida por Li e Lai (2001) para a solução das equações de Navier-Stokes. Nos métodos de interface imersa, devido a existência de forças singulares atuantes na fronteira imersa, a solução do escoamento é tipicamente descontínua e não suave através da fronteira imersa, dificultando assim a discretização das equações de balanço.

Para sanar esse problema, um sistema de referência local é adotado na superfície do corpo imerso, onde relações de interface são deduzidas e então transformadas em relações descontínuas na malha euleriana. Desse modo, essas relações descontínuas atuam como termos de correção adicionados à discretização numérica, a fim de contabilizar qualquer salto na solução ou em sua derivada provocado pela presença da fronteira imersa. Deve-se notar que cada tipo de estêncil de discretização tem seu próprio termo de correção o qual é único (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2008).

### 2.2.1.3 Método das Células Fantasma (*Ghost-Cell*)

O método das células fantasma foi desenvolvido inicialmente por Fedkiw et al. (1999) para tratar escoamentos multifásicos, em domínios bidimensionais. Diversas modificações do método foram propostas para se trabalhar com corpos imersos, como por exemplo os trabalhos de Tseng e Ferziger (2003) e Berthelsen e Faltinsen (2008). Uma extensão do método proposto por Berthelsen e Faltinsen (2008) foi feita por Ribeiro Neto (2021), a fim de se resolver problemas de interação fluido-sólido em escoamentos tridimensionais com malhas adaptativas bloco estruturadas em ambiente paralelo.

Os métodos de células fantasmais baseiam-se fundamentalmente na ideia de que a solução do escoamento pode ser estendida através da fronteira imersa. Para isso, faz-se a utilização de células computacionais fictícias no interior do domínio sólido, denominadas células fantasmais, as quais são atualizadas a partir da extração de informações do domínio fluido e das condições de contorno na fronteira. Desse modo, as condições de contorno na fronteira imersa são implicitamente agregadas ao método numérico por meio das células fantasmais, não sendo necessário uma reformulação do método numérico nas proximidades da fronteira imersa. Na literatura são encontradas diversas formas de extração das informações para as células fantasmais, onde uma das mais usuais é a aplicação de polinômios de Lagrange. Tseng e Ferziger (2003) mostram em seu trabalho que a acurácia dos valores extrapolados nas células fantasmais depende da ordem do esquema de interpolação utilizado para obtenção do polinômio interpolador.

### 2.2.2 Interface Difusa

Os métodos de fronteira imersa com interface difusa são considerados mais simples em relação aos de interface nítida, porém a imposição das condições de contorno não é feita de forma direta. Nesta classe de métodos o efeito da presença da fronteira imersa sobre o fluido é avaliado através de um termo de força adicionado às equações de balanço.

Como a posição dos nós da malha lagrangiana não são necessariamente coincidentes com os pontos da malha euleriana, o termo de força, devido à presença da fronteira imersa, deve então ser distribuído sobre os pontos eulerianos posicionados na vizinhança dos pontos lagrangianos. Essa distribuição é feita através de funções de distribuição suaves que representam uma analogia discreta à função delta de Dirac e portanto devem satisfazer determinadas propriedades, como é apresentado por Shin, Huang e Sung (2008).

Os métodos de fronteira imersa com interface difusa ainda podem ser classificados de acordo com a forma em que o termo de força é incorporado às equações de balanço. Quando o termo de força é acrescentado às equações de balanço antes da discretização, recebe a denominação de métodos de força contínua. Caso o termo de força seja adicionado às equações após a discretização das mesmas, é chamado de métodos de força discreta.

#### 2.2.2.1 Métodos de Força Contínua

Os métodos de força contínua podem ainda ser subdivididos de acordo com o tipo de resposta dinâmica da fronteira imersa em relação ao escoamento, sendo então classificados como fronteiras elásticas ou rígidas.

O método de fronteira imersa original, foi proposto por Peskin (1972), sendo o primeiro trabalho a introduzir o termo “método de fronteira imersa”. Neste trabalho, Peskin

desenvolve uma metodologia para a solução acoplada de fluxo sanguíneo e a contração muscular de um coração, metodologia esta que é aplicável em escoamentos com presença de corpos elásticos.

Neste método a fronteira imersa é tratada como um conjunto de fibras elásticas, mapeadas pelos pontos lagrangianos, de modo que a tensão e deformação nessas fibras estão correlacionadas a uma lei constitutiva, como por exemplo a lei de Hooke. O efeito da presença da fronteira imersa no escoamento é computado ao se transmitir a reação da tensão, atuante nas fibras elásticas, para o fluido através de termos forçantes adicionados as equações de balanço.

A metodologia idealizada por Peskin (1972) embora apresente bons resultados para tratar corpos elásticos, quando aplicada a corpos rígidos apresenta problemas, uma vez que as leis construtivas utilizadas para a fronteira elástica costumam não ser muito bem aplicáveis no limite rígido (MITTAL; IACCARINO, 2005). Para tratar escoamentos sobre corpos rígidos, Beyer e LeVeque (1992) propõem considerar o corpo fixo em uma posição de equilíbrio por meio da atuação de forças restauradoras de molas atuantes em cada um dos nós lagrangianos.

Goldstein, Handler e Sirovich (1993) também propõem uma nova metodologia para tratar fronteiras imersas rígidas, denominada método de resposta retroativa da força (*force feedback method*, em inglês). Este método é baseado na utilização de duas constantes para o cálculo do termo de força. Essas constantes têm por finalidade procurar o melhor ajuste à força, a fim de que a velocidade do fluido na vizinhança da fronteira imersa represente a imposição das condições de contorno na mesma. Esse tipo de ajuste, na teoria de controle de sistemas, é comumente chamado de controlador de dois modos (GOLDSTEIN; HANDLER; SIROVICH, 1993).

### 2.2.2.2 Métodos de Força Discreta

Os métodos de força contínua necessitam de uma simplificação para avaliação do termo de força, uma vez que as equações de balanço geralmente não são analiticamente integráveis para determinação do mesmo. Desse modo, Mohd-Yusof (1997) propõem uma nova metodologia, denominada imposição direta da força (*direct forcing*, em inglês), na qual o termo de força é avaliado diretamente a partir da solução numérica do escoamento.

Nesta metodologia, a equação de balanço de quantidade de movimento linear é discretizada e resolvida sem considerar a presença da fronteira imersa, em seguida o termo forçante é avaliado nos pontos lagrangianos através da diferença do campo de velocidade estimado do escoamento e a condição de contorno pretendida na fronteira imersa. O termo de força é então distribuído para os nós da malha euleriana através das funções de

distribuição discretas, afim de se corrigir o campo de velocidade levando-se em consideração o corpo imerso. O fato deste método não fazer a utilização de nenhuma constante para a avaliação do termo de força, traz a ele uma grande vantagem. Verzicco et al. (2000) estendem a metodologia de Mohd-Yusof para fronteiras imersas móveis, ao simularem o escoamento no interior da câmara de combustão de um motor.

Lima e Silva, Silveira Neto e Damasceno (2003) apresentam um novo método chamado de modelo físico virtual (*Virtual Physical Model* – VPM, em inglês), neste método o campo de força lagrangiano é calculado através da equação de balanço de quantidade de movimento linear, onde as derivadas espaciais são avaliadas na fronteira com o auxílio de interpolações de Lagrange. A força calculada é distribuída sobre os pontos eulerianos na forma de um termo fonte adicionado as equações de balanço, de modo que a condição de contorno desejada para a fronteira imersa seja satisfeita. Assim como o método proposto por Mohd-Yusof (1997), o VPM não necessita de constantes adicionais e se auto-ajusta ao escoamento.

Uma variação do método de imposição direta da força foi proposto por Wang, Fan e Luo (2008), onde o termo forçante devido a presença da fronteira imersa é calculado por meio processos iterativos, a fim de se melhorar a acurácia da solução. Este método foi denominado de método da múltipla imposição da força (*Multi-Direct Forcing* – MDF, em inglês) e devido a sua fácil implementação e bons resultados vem sendo amplamente utilizado.

### 2.2.3 Fronteira Imersa Térmica

Os métodos de fronteira imersa foram desenvolvidos inicialmente para se resolver a dinâmica de escoamentos sobre corpos imersos. Portanto estes métodos visam impor as condições de contorno de não deslizamento sobre a fronteira imersa. Com a necessidade de se resolver escoamentos não isotérmicos, acabou se tornando inevitável a expansão dessa metodologia para se tratar problemas térmicos, onde diferentemente dos problemas dinâmicos, em que as condições de contorno na fronteira imersa são dadas por uma velocidade prescrita (condição de contorno de Dirichlet), nos problemas térmicos as condições de contorno podem ser temperatura prescrita, fluxo térmico prescrito (condição de contorno de Neumann) ou uma combinação das duas (condição de contorno de Robin).

Kim e Choi (2004) propõem um método para solução da equação de balanço de quantidade movimento linear e energia térmica sobre geometrias complexas em malhas cartesianas, por meio do método da fronteira imersa. Nesta metodologia, Kim e Choi (2004) além do clássico termo de força utilizado para satisfazer a condição de não deslizamento na fronteira imersa, também utilizam um termo fonte de massa para satisfazer a equação

da continuidade nas células que contém a fronteira imersa. Para a equação da energia térmica eles apresentam dois tipos de termos de fluxos térmicos a serem adicionados à equação, a fim de satisfazer a condição de contorno de temperatura ou de fluxo térmico prescrito na fronteira imersa.

Em analogia ao método da múltipla imposição da força, Wang et al. (2009) apresentam o método da múltipla imposição térmica (*Multi-Direct Heat – MDH*, em inglês), desenvolvido para problemas térmicos com temperatura prescrita na fronteira imersa. Neste método é utilizado um processo explícito iterativo para a avaliação do termo de fluxo térmico, o qual é adicionado a equação de balanço da energia térmica, a fim de satisfazer a condição de contorno na fronteira imersa.

# 3 Modelo Matemático

A grande maioria dos fenômenos físicos podem ser representativamente traduzidos através de equações matemáticas, obtidas por meio da aplicação de hipóteses simplificadoras, a fim de se analisar quantitativamente propriedades e fenômenos de interesse de um determinado sistema físico. Quando conduzida de forma criteriosa e fundamentada sobre leis e postulados físicos, a modelagem matemática tenderá a fornecer resultados condizentes com as observações a cerca do mundo material.

O presente capítulo é destinado a construção da modelagem matemática para os subdomínios fluido e sólido, isto é, a determinação das equações matemáticas que modelam o balanço de energia em ambos os subdomínios.

## 3.1 Hipótese do Contínuo

De acordo com a física moderna a matéria é descontínua, sendo intrinsecamente constituída por átomos, e estes ainda por partículas subatômicas. Porém, a maior parte das aplicações da mecânica voltadas à engenharia não se preocupa com o movimento individual de cada uma dessas partículas, mas sim com o comportamento médio de um aglomerado de partículas de matéria.

Ao se tratar o comportamento mecânico dos meios fluidos e sólidos em nível macroscópico, se ingressa à área da mecânica do contínuo. Conforme Spencer (2004), com a mecânica do contínuo modela-se a natureza microscópica da matéria e a trata como uniformemente distribuída ao longo de todas as regiões do espaço, podendo-se assim associar a ela grandezas físicas, sendo estas funções contínuas e variáveis com a posição no espaço, ou seja, as variações das propriedades físicas da matéria ocorrem de forma suave, de modo que o cálculo diferencial possa ser empregado.

Essa hipótese só é válida ao se tratar problemas cujas dimensões características são superiores a um volume-limite na qual a hipótese do contínuo se fundamenta, sendo este um parâmetro que define duas regiões de trabalho distintas: a primeira situada em aplicações cujo comprimento característico é menor que o volume-limite, onde efeitos moleculares e atômicos são modelados explicitamente; a segunda é para aplicações com comprimentos característicos acima do volume-limite, no qual os efeitos microscópicos são modelados ao nível macroscópico. Para os meios fluidos o volume-limite geralmente é maior que o livre caminho médio molecular, já para corpos sólidos este comumente é

superior às distâncias interatômicas.

## 3.2 Subdomínio Fluido

No presente trabalho o desenvolvimento das equações matemáticas que modelam a dinâmica dos fluidos, tal como o transporte e as transformações de energia por eles sofrida, são baseadas na hipótese do contínuo e as equações são formuladas por meio dos balanços de massa, de quantidade movimento linear e de energia interna, considerando-se uma formulação euleriana.

### 3.2.1 Equação da Continuidade

O primeiro princípio físico a ser analisado é o balanço de massa. Este balanço ao ser realizado em um sistema fechado, garante que a massa do mesmo deve permanecer constante. Porém, diferentemente de um sistema fechado, um volume de controle euleriano é um sistema aberto, ou seja, massa pode cruzar sua fronteira, de modo que a análise necessita ser realizada sobre o fluxo mássico líquido na superfície de controle.

Considera-se um volume de controle  $\Omega_f$ , cuja fronteira seja representada por  $\partial\Omega_f$ , a quantidade de massa presente no interior deste volume de controle é dada por:

$$m(\Omega_f, t) = \iiint_{\Omega_f} \rho(\vec{x}, t) dV, \quad (3.1)$$

onde  $\rho(\vec{x}, t)$  é a massa específica do elemento diferencial de fluido e  $dV$  representa seu volume.

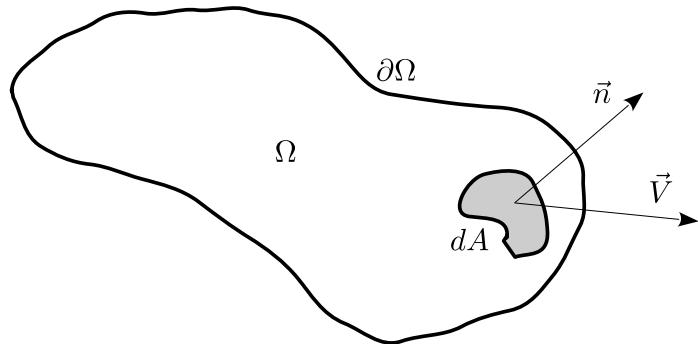
Ao se analisar um volume de controle euleriano, observa-se que a quantidade de massa dentro do volume varia em virtude da massa que entra ou sai pela superfície de controle, portanto a variação da massa no interior do volume é igual a diferença entre o que sai e o que entra pela fronteira. Em outras palavras pode-se dizer que, a taxa total de variação da massa no interior do volume de controle é igual ao fluxo mássico líquido que cruza sua fronteira. Matematicamente esta relação é expressa da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_f} \rho dV + \iint_{\partial\Omega_f} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0, \quad (3.2)$$

onde  $\vec{V}$  representa a velocidade do elemento diferencial de fluido,  $\vec{n}$  é o vetor unitário normal à fronteira  $\partial\Omega_f$  e  $dA$  simboliza a área do elemento diferencial, conforme esquematizado na figura 7.

Em virtude do volume de controle euleriano permanecer fixo, pode-se permutar a derivada temporal e a integral de volume do primeiro termo da equação (3.2). Ao segundo

Figura 7 – Representação de um elemento de fluido em um volume de controle euleriano qualquer.



Fonte: Do próprio autor.

termo, aplica-se o teorema da divergência com o intuito de se transformar a integral de superfície em uma integral de volume, resultando assim em duas integrais volumétricas que podem ser combinadas em uma só:

$$\iiint_{\Omega_f} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right] dV = 0. \quad (3.3)$$

Como a equação (3.3) foi formulada baseando-se em um volume de controle  $\Omega_f$  genérico, esta igualdade sempre deverá ser verdadeira independentemente de seu formato, porém tal fato somente ocorrerá se o integrando da equação (3.3) for identicamente nulo, de acordo com o Teorema da Localização, conforme Chandrasekharaih e Debnath (1994). Dessa forma, obtém-se a equação diferencial para o balanço de massa, popularmente denominada de equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0. \quad (3.4)$$

Outra maneira bastante comum de se escrever a equação da continuidade, consiste em expandir o termo contendo o divergente, através da regra do produto, e se utilizar da notação de derivada total ou derivada material para agrupar os termos contendo a massa específica:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \quad (3.5)$$

onde a derivada material é representada pelo operador:

$$\frac{D(\ )}{Dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})(\ ). \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Equação de Cauchy

A segunda análise a ser realizada é feita sobre a segunda lei de Newton ou balanço de quantidade de movimento linear. Em um sistema fechado a segunda lei infere que a

variação da quantidade de movimento linear do sistema é numericamente igual à força líquida que age sobre o mesmo.

Para um volume de controle euleriano qualquer, como o representado na figura 7, a quantidade de movimento linear presente no interior deste volume de controle é expressa por:

$$\vec{L}(\vec{x}, t) = \iiint_{\Omega_f} \rho(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t) dV. \quad (3.7)$$

Similarmente a análise do balanço de massa, em um volume de controle euleriano existe fluxo de quantidade de movimento linear cruzando as fronteiras do volume de controle, o qual deve ser contabilizado ao se realizar o balanço da quantidade de movimento linear. Portanto, a segunda lei de Newton é reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_f} \rho \vec{V} dV + \iint_{\partial\Omega_f} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{F}, \quad (3.8)$$

onde  $\sum \vec{F}$  representa o somatório de todas as forças externas que agem sobre o sistema.

Basicamente dois tipos de forças externas atuam sobre o sistema fluido, forças de campo e forças de superfície. As forças de campo decorrem da existência de campos externos nos quais a partícula de fluido encontra-se, estes campos atuam em cada partícula de fluido no interior do volume de controle. Já as forças de superfícies ocorrem devido as tensões que agem sobre cada parcela da fronteira do volume de controle.

As forças de campos são provenientes de campos gravitacionais, magnéticos ou potenciais elétricos, porém no presente trabalho será abordada apenas a força gravitacional decorrente de um campo gravitacional. Deste modo, sobre cada elemento diferencial de fluido, no interior do volume de controle, o campo gravitacional exerce uma força proporcional a massa do elemento, de modo que a força gravitacional total atuante no volume de controle é dada por:

$$\vec{F}_g = \iiint_{\Omega_f} \rho \vec{g} dV, \quad (3.9)$$

sendo  $\vec{g}$  o campo gravitacional que atua sobre o volume de fluido.

Diferentemente das forças de campo, a análise das forças superficiais que agem sobre o elemento de fluido é um trabalho bastante árduo, pois estas forças são compostas por componentes nas direções normais e tangenciais à superfície de controle do elemento fluido. Sendo assim, faz-se necessária a definição de um tensor de segunda ordem conhecido como tensor de tensões ( $\bar{\sigma}$ ), para descrever as tensões superficiais que atuam sobre cada

elemento fluido. Suas componentes são representadas por  $\sigma_{ij}$ , sendo  $j$  a direção na qual a tensão atua e  $i$  a direção normal à superfície de controle no ponto de atuação da tensão.

O produto interno do tensor de tensões com o vetor unitário normal a um elemento diferencial de área contido na fronteira do volume de controle, resulta no vetor de tensões que age sobre o elemento superficial. Portanto, a força superficial total que atua sobre a superfície de controle é avaliada através da equação:

$$\vec{F}_s = \iint_{\partial\Omega_f} \bar{\sigma} \cdot \vec{n} dA. \quad (3.10)$$

A força total que atua sobre o volume de controle é dada pela soma das forças de campo e das forças de superfícies, nesse caso:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_s = \iiint_{\Omega_f} \rho \vec{g} dV + \iint_{\partial\Omega_f} \bar{\sigma} \cdot \vec{n} dA, \quad (3.11)$$

aplicando a relação (3.11) na equação de balanço de quantidade de movimento linear (3.8), obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_f} \rho \vec{V} dV + \iint_{\partial\Omega_f} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \iiint_{\Omega_f} \rho \vec{g} dV + \iint_{\partial\Omega_f} \bar{\sigma} \cdot \vec{n} dA. \quad (3.12)$$

Novamente, utiliza-se do fato do volume de controle euleriano ser fixo para se permutar a derivada temporal e a integral volumétrica na equação (3.12). Em seguida, utiliza-se do teorema da divergência para transformar as integrais de superfície em integrais volumétricas, agrupando-as em uma única integral de volume:

$$\iiint_{\Omega_f} \left[ \frac{\partial (\rho \vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) - \rho \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma} \right] dV = \vec{0}. \quad (3.13)$$

A formulação da equação (3.13) é baseada em um volume de controle qualquer, logo para que a integral volumétrica seja sempre identicamente nula, o integrando deverá também ser nulo. Obtém-se então a equação diferencial para o balanço de quantidade de movimento linear ou equação de Cauchy:

$$\frac{\partial (\rho \vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma}, \quad (3.14)$$

onde o produto  $\vec{V} \vec{V}$  é chamado produto exterior do vetor velocidade por si mesmo, sendo este um tensor de segunda ordem.

A equação de Cauchy ainda pode ser reescrita de outra forma, a fim de se eliminar o tensor de segunda ordem proveniente do produto exterior do vetor de velocidade com ele

mesmo. Basta aplicar a regra da derivada do produto aos termos a esquerda da igualdade na equação (3.14) e em seguida reagrupar os termos, obtendo-se a seguinte equação:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right] + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma}, \quad (3.15)$$

o termo entre colchetes representa a equação da continuidade (3.4), logo é identicamente nulo, obtendo-se então a denominada forma não divergente da equação de balanço de quantidade de movimento linear:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{g} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma}. \quad (3.16)$$

### 3.2.3 Hipótese de Stokes

A grande dificuldade da modelagem da dinâmica dos fluidos consiste na modelagem do tensor de tensões. Para a grande maioria dos fluidos o tensor de tensões pode ser descrito como uma função dependente apenas do tensor taxa de deformação:

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon}), \quad (3.17)$$

onde  $\bar{\epsilon}$  é o tensor de taxa de deformações, cujas componentes  $\epsilon_{ij}$  representam a taxa de deformação na direção  $j$  avaliada na fronteira do elemento fluido cuja normal aponta para a direção  $i$ .

Quando a relação (3.17) é linear o fluido é denominado newtoniano e o coeficiente de proporcionalidade é denominado de coeficiente de viscosidade molecular ( $\mu$ ). Já quando esta relação não é linear, denomina-se o fluido de não-newtoniano. Para o presente trabalho as análises realizadas serão focadas em fluidos newtonianos.

Um dos primeiros a tentar entender a relação entre o tensor de tensões e taxa de deformações para fluidos newtonianos foi Stokes (1845). Em seu trabalho ele propõem, por analogia à lei da elasticidade de Hooke, que a variação da tensão com a taxa de deformação em um elemento de fluido segue uma lei linear. Toda a teoria de Stokes é baseada em três postulados:

1. O fluido é continuo e o tensor de tensões  $\bar{\sigma}$  é uma função linear das taxas de deformações  $\bar{\epsilon}$ .
2. O fluido é isotrópico, isto é, suas propriedades não são dependentes da direção. Deste modo a lei de deformação é independente do sistema de coordenadas em que é expressa.
3. Quando a taxa de deformação é nula, a lei de deformação deve-se reduzir a condição fluidostática, considerando apenas os efeitos de pressão.

A partir desses três postulados e algumas suposições sobre a invariância dos tensores, Stokes chegou a seguinte equação para o tensor de tensões que agem sobre fluidos newtonianos:

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \mu \left( \vec{\nabla} \vec{V} + (\vec{\nabla} \vec{V})^T \right) - \frac{2}{3}\mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \bar{I}, \quad (3.18)$$

onde  $p$  representa a pressão,  $\bar{I}$  é a matriz identidade,  $\vec{\nabla} \vec{V}$  é o gradiente do vetor velocidade, o qual resulta em um tensor de segunda ordem, e por fim  $(\vec{\nabla} \vec{V})^T$  é o transposto do tensor gradiente de velocidade. Mais detalhes do desenvolvimento da equação (3.18) são encontrados em White (2006).

A aplicação da equação (3.18) na equação de balanço de quantidade de movimento linear (3.14), têm como resultado as famosas equações de Navier-Stokes em sua forma divergente:

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla} \cdot \left[ \mu \left( \vec{\nabla} \vec{V} + (\vec{\nabla} \vec{V})^T \right) \right] - \frac{2}{3}\vec{\nabla}(\mu\vec{\nabla} \cdot \vec{V}), \quad (3.19)$$

em sua forma não divergente as equações do movimento são reescritas da seguinte maneira:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} \cdot \left[ \mu \left( \vec{\nabla} \vec{V} + (\vec{\nabla} \vec{V})^T \right) \right] - \frac{2}{3}\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(\mu\vec{\nabla} \cdot \vec{V}). \quad (3.20)$$

As equações de Navier-Stokes estabelecem uma relação de causa e efeito entre as variações da quantidade de movimento linear sofrida por uma partícula de fluido, e as alterações de forças sobre a mesma.

### 3.2.4 Equação da Energia Térmica

A terceira e última análise a ser realizada é fundamentada na primeira lei da termodinâmica. Ao ser aplicada sobre um sistema fechado, a primeira lei enuncia que a transferência de energia para o sistema, nas formas de calor ou trabalho, é igual à variação de sua energia total.

A energia total contida dentro do volume de controle é expressa por:

$$E(\vec{x}, t) = \iiint_{\Omega_f} e(\vec{x}, t)\rho(\vec{x}, t)dV, \quad (3.21)$$

sendo  $e$  a energia específica, isto é, energia por unidade de massa, e pode representar diversos tipos de energias: interna, cinética, potencial, química, nuclear, magnética e elétrica. Para o presente trabalho apenas os três primeiros tipos de energia serão abordados, de modo que a energia específica é dada por:

$$e = \hat{u} + \frac{1}{2}\vec{V} \cdot \vec{V} - \vec{x} \cdot \vec{g}. \quad (3.22)$$

Analogamente aos casos anteriores, deve-se contabilizar o fluxo de energia que cruza a fronteira do volume de controle euleriano. Desta forma, o balanço de energia pode ser representado da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_f} e \rho dV + \iint_{\partial\Omega_f} e \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}, \quad (3.23)$$

onde  $Q$  representa o calor e  $W$  o trabalho. Define-se  $Q$  positivo quando energia é acrescida ao volume de controle e  $W$  positivo quando o trabalho é realizado pelo volume de controle.

O trabalho pode ser dividido em dois tipos principais: trabalho de eixo e trabalho de deformação.

$$W = W_{\text{eixo}} + W_{\text{deformação}} = W_e + W_d, \quad (3.24)$$

o trabalho de eixo é o trabalho realizado por uma fonte externa inserida no interior do volume de controle. Por outro lado, o trabalho de deformação ocorre devido às tensões que atuam na fronteira do volume de controle.

A taxa de trabalho de deformação é medida através da integração sobre a fronteira do volume de controle do produto da componente de tensão que atua na direção do vetor de velocidade na direção normal à superfície de controle:

$$\frac{dW_d}{dt} = \iint_{\partial\Omega_f} (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}) \cdot \vec{n} dA, \quad (3.25)$$

considerando que não existe nenhuma fonte de potência externa, na forma de eixo, atuante no volume de controle:

$$\frac{dW_e}{dt} = 0. \quad (3.26)$$

O calor que atua na fronteira do volume de controle pode ter natureza radioativa ou condutiva. No presente trabalho efeitos radioativos de transferência térmica serão desconsiderados, e o calor será modelado considerando apenas efeitos de condução, os quais seguem a lei de Fourier:

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T, \quad (3.27)$$

onde  $\vec{q}$  é fluxo térmico na forma de calor,  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica e  $T$  representa o campo de temperatura. O fluxo de energia térmica na forma de condução que atua sobre toda a superfície de controle é dada por:

$$\frac{dQ}{dt} = \iint_{\partial\Omega_f} -\vec{q} \cdot \vec{n} dA = \iint_{\partial\Omega_f} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} dA, \quad (3.28)$$

o sinal negativo é devido a hipótese de que energia deixa a fronteira da superfície de controle na forma de calor.

Substituindo as equações (3.25), (3.26) e (3.28) na equação (3.23):

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_f} e\rho dV + \iint_{\partial\Omega_f} e\rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \iint_{\partial\Omega_f} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} dA - \iint_{\partial\Omega_f} (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}) \cdot \vec{n} dA. \quad (3.29)$$

Recorre-se novamente ao fato do volume de controle euleriano ser fixo para permutar a integral volumétrica e a derivada temporal, aplica-se ainda o teorema da divergência para transformar as integrais de superfícies em integrais de volume e agrupá-las em uma única integral:

$$\iiint_{\Omega_f} \left[ \frac{\partial(e\rho)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (e\rho \vec{V}) - \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}) \right] dV = 0. \quad (3.30)$$

De maneira similar aos casos anteriores, a equação (3.30) é válida para condições gerais em relação a forma do volume de controle, logo a integral de volume só será nula caso o integrando também seja nulo, obtendo-se:

$$\frac{\partial(e\rho)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (e\rho \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}), \quad (3.31)$$

expandindo as derivadas à esquerda da igualdade, a equação (3.31) pode então ser reescrita da seguinte forma:

$$\rho \frac{De}{Dt} + e \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right] = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}), \quad (3.32)$$

onde o termo entre colchetes é nulo devido a equação da continuidade (3.4).

A derivação total da energia específica em relação ao tempo fornece:

$$\frac{De}{Dt} = \frac{D\hat{u}}{Dt} + \vec{V} \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{V} \cdot \vec{g}, \quad (3.33)$$

substituindo a equação (3.33) na equação (3.32), obtém-se:

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + \vec{V} \cdot \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{V} \cdot \rho \vec{g} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}). \quad (3.34)$$

Nota-se que, ao se realizar o produto escalar entre o vetor velocidade e as equações de balanço de quantidade de movimento linear em sua forma não divergente (3.16) obtém-se como resultado:

$$\vec{V} \cdot \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{V} \cdot \rho \vec{g} = \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}), \quad (3.35)$$

substituindo a equação (3.35) na equação (3.34):

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + [\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}) - \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma})]. \quad (3.36)$$

O termo entre colchetes na equação (3.36) pode ser desenvolvido utilizando-se a lei de deformação para fluidos newtonianos (3.18) proposta por Stokes (1845), obtendo-se a seguinte relação:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}) - \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) = -p (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \Phi, \quad (3.37)$$

onde  $\Phi$  é denominada de função de transformação viscosa, sendo responsável por transformar energia cinética em energia interna no fluido através de efeitos viscosos, ela é matematicamente descrita através da seguinte equação:

$$\Phi = \mu \left( \vec{\nabla} \vec{V} + (\vec{\nabla} \vec{V})^T \right) \cdot (\vec{\nabla} \vec{V}) - \frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})^2. \quad (3.38)$$

Por fim, substituindo a equação (3.37) em (3.36), chega-se a equação diferencial de balanço de energia interna em uma partícula de fluido:

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) - p (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \Phi. \quad (3.39)$$

A energia interna pode ainda ser correlacionada a uma propriedade de interesse do escoamento que é o campo de temperatura. Borgnakke e Sonntag (2013) mostram que um fluido ao sofrer transformações isocóricas (a pressão constante), tem sua variação da energia interna proporcional a variação de sua temperatura, onde o coeficiente de proporcionalidade é a capacidade térmica do fluido à pressão constante  $c_p$ , obedecendo a seguinte equação de estado:

$$d\hat{u} \approx c_p dT, \quad (3.40)$$

a aplicação da equação de estado na equação de balanço de energia interna (3.39), resulta na equação diferencial da energia térmica:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) - p (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \Phi. \quad (3.41)$$

### 3.2.5 Escoamentos Incompressíveis e a Aproximação de Oberbeck-Boussinesq

Os escoamentos estudados em engenharia, em grande parte, são ditos incompressíveis, isto é, as variações de massa específica são muito pequenas e podem ser negligenciadas. Portanto, assume-se que a taxa de variação da massa específica é nula:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad (3.42)$$

a partir dessa suposição, a equação da continuidade (3.5) é simplificada para uma relação apenas do campo de velocidade:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0. \quad (3.43)$$

O fato de divergente do campo de velocidade ser nulo, indica que o elemento de fluido não sofre nenhuma expansão ou contração de volume (WHITE, 2006). Como seu volume se mantém inalterado e as variações de massa específica são negligenciáveis, o fluxo mássico pela superfície do volume de controle deve então ser controlado através do campo de velocidade. Desse modo, pertubações do campo de velocidade em uma região do escoamento desencadeiam alterações imediatas em todo o escoamento.

Considerando-se algumas propriedades do fluido constantes, como por exemplo, o coeficiente de viscosidade  $\mu$  e o coeficiente de condutibilidade térmica  $k$ , e a hipótese de escoamento incompressível para que a equação (3.43) possa ser válida. As equações de balanço de quantidade de movimento linear (3.20) e balanço da energia térmica (3.41), são simplificadas:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) T = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{\Phi}{\rho c_p}. \quad (3.45)$$

A substituição de  $c_v$  por  $c_p$  na equação (3.45) é fundamentada no fato de que, ao se desprezar os termos de pressão da equação de balanço da energia interna (3.39), a variação da energia interna pode ser aproximada por uma variação de entalpia de acordo com a seguinte equação de estado (WHITE, 2011):

$$d\hat{u} \approx dh = c_p dT. \quad (3.46)$$

As equações (3.43), (3.44) e (3.45) formam um sistema de equações diferenciais parciais não lineares que modelam o balanço de energia em escoamentos incompressíveis de fluidos newtonianos com propriedades físicas constantes. Este sistema é composto por três equações e três incógnitas ( $\vec{V}$ ,  $p$  e  $T$ ), ou ainda, cinco equações escalares e cinco incógnitas.

Enquanto o campo de temperatura é escrito em função do campo de velocidade, as equações da continuidade e de Navier-Stokes são completamente independentes do campo de temperatura. Sendo assim, as equações da continuidade e do balanço de quantidade de movimento linear podem ser resolvidas separadamente da equação de balanço de energia térmica, onde o resultado do campo de velocidade é utilizado na solução do campo de temperatura.

Ao analisarem os efeitos da convecção natural sobre escoamentos, Oberbeck (1888) e Boussinesq (1903) chegaram à conclusão de que o campo de temperatura exerce influência no balanço de quantidade de movimento linear, através do desequilíbrio entre as forças peso e empuxo, ocasionado pelas variações na massa específica do fluido. Dessa forma, a aproximação de Oberbeck-Boussinesq baseia-se na hipótese de que, com exceção do termo gravitacional, as variações da massa específica no escoamento são mínimas e podem ser negligenciáveis.

As variações de temperatura ao longo do escoamento causam variações na massa específica do fluido. Desse modo, um valor de referência para a massa específica do fluido é definido ( $\rho_0$ ):

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0. \quad (3.47)$$

Os efeitos gravitacionais (peso e empuxo) são definidos como a integral sobre o volume de controle do produto da variação da massa específica (3.47) pelo campo gravitacional:

$$\vec{F}_g = \iiint_{\Omega_f} \Delta\rho \vec{g} dV, \quad (3.48)$$

a variação na massa específica pode ser relacionada a uma variação na temperatura do escoamento através do coeficiente de expansão térmica (BORGNAKKE; SONNTAG, 2013):

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T} \approx -\frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta\rho}{\Delta T}, \quad (3.49)$$

reescreve-se então a força gravitacional (3.48) em função do coeficiente de expansão térmica:

$$\vec{F}_g = \iiint_{\Omega_f} -\rho_0 \beta \Delta T \vec{g} dV = - \iiint_{\Omega_f} \rho_0 \beta (T - T_0) \vec{g} dV, \quad (3.50)$$

sendo  $T_0$  uma temperatura de referência do escoamento.

Ao se substituir a força gravitacional às forças de campo na dedução das equações de Navier-Stokes, obtém-se:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p - \beta(T - T_0) \vec{g} + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{V}. \quad (3.51)$$

Ao se analisar gases ideais, o coeficiente de expansão térmica pode ser aproximado como o inverso da temperatura de referência ( $\beta = 1/T_0$ ).

### 3.2.6 Caracterização do Escoamento

A dinâmica do escoamento é caracterizada através de um conjunto de números adimensionais, dentre eles, serão abordados no presente trabalho apenas o número de Reynolds ( $Re$ ) e os coeficientes de arrasto ( $C_D$ ) e sustentação ( $C_L$ ).

O número de Reynolds é um número adimensional frequentemente utilizado para o cálculo do regime do escoamento. Fisicamente ele é interpretado como a razão entre os efeitos iniciais e os efeitos viscosos no escoamento de um fluido newtoniano:

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu}, \quad (3.52)$$

onde  $U$  e  $L$  são as grandezas características de velocidade e de comprimento no escoamento, respectivamente.

Para escoamentos sobre geometrias imersas, os coeficientes de arrasto e sustentação são números adimensionais bastante usuais, uma vez que, a partir deles é possível determinar a força que o escoamento aplica sobre a superfície imersa. Fisicamente eles podem ser entendidos como a razão entre a força de arrasto e/ou sustentação pela força dinâmica. Matematicamente podem ser expressos da seguinte maneira:

$$C_D = \frac{F_A}{\frac{1}{2}\rho U^2 A_p}, \quad (3.53)$$

$$C_L = \frac{F_S}{\frac{1}{2}\rho U^2 A_p}, \quad (3.54)$$

onde  $F_A$  e  $F_S$  são as forças de arrasto e sustentação, respectivamente, e  $A_p$  representa uma área de referência da geometria imersa.

Assim como na dinâmica do escoamento, o transporte de energia também pode ser caracterizado por um conjunto de números adimensionais. Para o presente trabalho se dará foco apenas aos seguintes adimensionais: número de Prandtl ( $Pr$ ), número de Nusselt ( $Nu$ ) e número de Rayleigh ( $Ra$ ).

O número de Prandtl é um importante número adimensional de escoamentos não isotérmicos, ele é definido como a razão entre a difusividade de momentum linear e a difusividade térmica. Fisicamente pode ser interpretado como uma relação entre a efetividade do transporte por difusão de quantidade de movimento linear e de energia térmica.

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k}. \quad (3.55)$$

O número de Nusselt relaciona a transferência de energia térmica por advecção e por condução. Fisicamente ele é uma medida quantitativa da transferência de energia térmica por convecção em uma superfície. Matematicamente ele é representado pelo gradiente de temperatura adimensional em uma superfície:

$$Nu = \frac{L}{\Delta T} \left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{\eta=\text{superfície}}, \quad (3.56)$$

onde  $\Delta T$  é a diferença entre a temperatura local e a temperatura de referência e  $\eta$  representa uma direção normal à superfície em que se deseja avaliar o número de Nusselt.

Por fim, o número de Rayleigh é um similar do número de Reynolds para a convecção natural, se mostrando como um critério para definir o regime do escoamento nesta condição. Sua interpretação física se dá como a razão entre as forças gravitacionais e forças viscosas. Tal adimensional é expresso pela seguinte equação:

$$Ra = \frac{g\beta(T_s - T_0)L^3}{\nu\alpha}, \quad (3.57)$$

onde  $\nu$  é conhecido como viscosidade cinemática, razão entre o coeficiente de viscosidade dinâmica e a massa específica,  $\alpha$  é denominada de difusividade térmica ( $\alpha = k/\rho c_p$ ),  $T_s$  é a temperatura de uma superfície de referência,  $T_0$  é uma temperatura de referência,  $g$  é o módulo do campo gravitacional.

### 3.3 Subdomínio Sólido

Diferentemente do subdomínio fluido, o subdomínio sólido é caracterizado como um sistema fechado, onde são aplicáveis as leis físicas fundamentais sem a necessidade de se contabilizar fluxos advectivos através de fronteiras. Isto acontece devido o volume de controle lagrangiano não ser fixo e acompanhar as partículas sólidas, deformando-se para abrange-las, caso estas se movimentem.

Para o presente trabalho, o subdomínio sólido será considerado fixo e indeformável, tendo atuação somente no transporte e transformação de energia. Deste modo, a única lei física a ser analisada será a primeira lei de termodinâmica:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}, \quad (3.58)$$

devido há ausência de movimento relativo no interior do sistema, não há variação de energia mecânica e o trabalho realizado pelo sistema também é nulo ( $dW/dt = 0$ ). Dessa forma, a energia total será igual a energia interna:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_s} \rho_s \hat{u} dV = \frac{dQ}{dt}, \quad (3.59)$$

sendo  $\rho_s$  a massa específica do sólido.

Similarmente ao caso do subdomínio fluido, apenas efeitos térmicos condutivos são considerados, porém para o subdomínio sólido também será considerada uma fonte interna de energia térmica, a qual é proporcional ao volume do elemento sólido. Assim, a aplicação da lei de Fourier para avaliação da taxa de calor por condução na equação (3.59)

e a adição da fonte interna de energia térmica, resulta em:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_s} \rho_s \hat{u} dV = \iint_{\partial\Omega_s} k_s \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} dA + \iiint_{\Omega_s} \dot{q} dV \quad (3.60)$$

onde  $k_s$  é o coeficiente de condutividade térmica do sólido e  $\dot{q}$  é a taxa de transferência de energia na forma calor, adicionada ou extraída do elemento sólido.

Como para o presente trabalho o domínio lagrangiano é considerado fixo e indeformável, a derivada temporal e a integral de volume podem ser permutadas no primeiro termo da equação (3.60). Para o segundo termo aplica-se o teorema da divergência, transformando a integral de superfície em uma integral volumétrica. Rearranjando os termos obtém-se:

$$\iiint_{\Omega_s} \left[ \frac{\partial(\rho_s \hat{u})}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (k_s \vec{\nabla} T) - \dot{q} \right] dV = 0, \quad (3.61)$$

a equação (3.61) foi obtida sobre a hipótese de um volume de controle de formato genérico, logo a integral volumétrica será nula somente se integrando for nulo:

$$\rho_s \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k_s \vec{\nabla} T) + \dot{q}, \quad (3.62)$$

onde usou-se da hipótese de que não há transformação de fase no domínio sólido, de modo que a massa específica possa ser considerada constante no tempo e variável apenas no espaço.

A variação de energia interna pode ser relacionada à variação de temperatura através da equação de estado (3.46), obtendo-se a equação de balanço da energia térmica para um meio sólido:

$$\rho_s c_{p_s} \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k_s \vec{\nabla} T) + \dot{q}, \quad (3.63)$$

onde  $c_{p_s}$  é o coeficiente de capacidade térmica do sólido.

Considerando as propriedades físicas constantes, a equação de balanço de energia térmica no domínio sólido é então reescrita da seguinte forma:

$$\rho_s c_{p_s} \frac{\partial T}{\partial t} = k_s \nabla^2 T + \dot{q}, \quad (3.64)$$

esta equação é denominada no presente trabalho como equação de balanço de energia térmica.

# 4 Modelo Numérico-Computacional

A matemática clássica se mostra bastante limitada para buscar soluções contínuas para problemas mais gerais de transferência térmica conjugada. Devidos a estas limitações, utiliza-se da modelagem numérico-computacional, com o objetivo de se obter soluções aproximadas, por meio de métodos numéricos, para as equações obtidas através dos modelos matemáticos diferenciais.

Este capítulo é destinado a abordar a metodologia numérico-computacional utilizada no desenvolvimento deste trabalho, para a solução de problemas bidimensionais de transferência térmica conjugada, onde o escoamento é incompressível e o fluido é considerado newtoniano.

## 4.1 Subsistema Fluido

O subsistema fluido é modelado com as equações da continuidade, de Navier-Stokes segundo a aproximação de Oberberck-Boussinesq e de balanço da energia térmica, as quais por facilidade serão aqui novamente reescritas considerando-se a hipótese de incompressibilidade:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \beta(T - T_0) \vec{g} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) T = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{\Phi}{\rho c_p}. \quad (4.3)$$

Muitos são os métodos numéricos desenvolvidos para a solução de sistemas de equações diferenciais parciais, como o previamente apresentado. Para o presente trabalho utilizou-se o método de diferenças finitas para a discretização e solução das equações diferenciais parciais.

### 4.1.1 Discretização Temporal

A discretização temporal de equações diferenciais parciais geralmente é realizada seguindo uma das três formulações: explícita, implícita ou semi-implícita (LEVEQUE, 1955). Neste trabalho a formulação explícita é empregada, isto é, o conjunto de equações diferenciais é discretizado visando a obtenção de uma equação de diferenças que seja dependente de termos previamente conhecidos de iterações anteriores.

Considera-se uma função escalar qualquer  $\phi$ , de modo que, sua discretização no domínio temporal, a fim de se obter uma formulação explícita, possa ser realizada ao se efetuar a expansão em série de Taylor da função  $\phi$  em torno do ponto  $(\vec{x}, t)$  acrescida de um incremento temporal  $\Delta t$ :

$$\phi(\vec{x}, t + \Delta t) = \phi(\vec{x}, t) + \frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} \Delta t^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi(\vec{x}, t)}{\partial t^3} \Delta t^3 + \dots, \quad (4.4)$$

isolando a derivada temporal da função  $\phi$ , obtém-se:

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{\phi(\vec{x}, t + \Delta t) - \phi(\vec{x}, t)}{\Delta t} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{\partial^{k+1} \phi(\vec{x}, t)}{\partial t^{k+1}} \Delta t^k, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{\phi(\vec{x}, t + \Delta t) - \phi(\vec{x}, t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (4.6)$$

onde o somatório representa o erro número do processo de discretização, que é de primeira ordem ( $\mathcal{O}(\Delta t)$ ).

O esquema de discretização apresentado na equação (4.6) é uma derivada progressiva que será utilizada no esquema de Euler explícito para a discretização temporal das equações. Onde a função  $\phi$ , sendo uma função escalar, pode representar uma das componentes de velocidade ( $u$  e  $v$ ) ou o campo de temperatura ( $T$ ).

#### 4.1.2 Acoplamento Pressão-Velocidade

A equação da continuidade (4.1) e a equação do balanço de quantidade de movimento linear (4.2) são independentes, de modo que, para solução do escoamento se faz necessário o tratamento do acoplamento pressão-velocidade. Ao analisar escoamentos incompressíveis Chorin (1968) observou que a pressão não exerce papel termodinâmico, sendo responsável apenas por forçar a condição de incompressibilidade. A partir de seus estudos, Chorin introduz uma metodologia de discretização baseada na decomposição de operadores. Tal metodologia é conhecida como métodos de projeção ou métodos de passo fracionado.

Esta metodologia é caracterizada por solucionar o campo de pressão e velocidade em duas etapas: Na primeira etapa, um campo de velocidade estimada é calculado utilizando-se a equação de balanço de quantidade de movimento linear, ignorando-se os efeitos de incompressibilidade; na segunda etapa, o campo de velocidade estimado é projetado sobre um espaço vetorial selenoidal, isto é, com divergência nula, a fim de se impor a condição de incompressibilidade, calculando-se então a pressão ou um fator de correção para a pressão. Através deste fator de correção o campo de velocidade estimado é corrigido, obtendo-se o campo de velocidade do escoamento.

Na literatura vários métodos de discretização dos métodos de projeção ou passo fracionado são apresentados, os quais divergem entre si basicamente na forma como o

campo de velocidade estimado e o fator de correção de pressão são avaliados. Neste trabalho será utilizada a metodologia de discretização apresentada por Kim e Moin (1985).

Para o método apresentado por Kim e Moin, a discretização da equação de balanço de quantidade de movimento linear, considerando uma discretização temporal seguindo um esquema de Euler explícito (4.6), é dada por:

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} + (\vec{V}^n \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}^n = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p^{n+1} - \beta(T^n - T_0) \vec{g}^n + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V}^n, \quad (4.7)$$

onde o super índice  $n$  simboliza a discretização temporal.

Observa-se que na equação (4.7) os termos de velocidade e temperatura avaliados no passo de tempo atual ( $\vec{V}^n$  e  $T^n$ ) são conhecidos, sendo as únicas incógnitas da equação o campo de velocidade e pressão do passo de tempo posterior ( $\vec{V}^{n+1}$  e  $p^{n+1}$ ). Partindo-se somente da equação (4.7), não é possível a determinação das duas incógnitas, logo, define-se um campo de velocidade estimado  $\vec{V}^*$  o qual é obtido através da equação de balanço de quantidade de movimento linear considerando-se o campo de pressão do passo de tempo atual:

$$\frac{\vec{V}^* - \vec{V}^n}{\Delta t} + (\vec{V}^n \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}^n = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p^n - \beta(T^n - T_0) \vec{g}^n + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V}^n, \quad (4.8)$$

subtraindo-se a equação (4.8) da equação (4.7), obtém-se uma relação entre os campos de velocidade e pressão:

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} (p^{n+1} - p^n). \quad (4.9)$$

Das observações de Chorin, é possível modelar o campo de pressão no passo de tempo posterior como a soma do campo de pressão no passo de tempo atual mais um fator de correção de pressão  $p'$ :

$$p^{n+1} = p^n + p', \quad (4.10)$$

aplicando a equação (4.10) na equação (4.9) e rearranjando os termos, obtém-se uma relação entre o campo de velocidade no passo de tempo posterior, o campo de velocidade estimado e o fator de correção de pressão:

$$\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \vec{\nabla} p', \quad (4.11)$$

nota-se que a equação (4.11) é composta por duas incógnitas,  $\vec{V}^{n+1}$  e  $p'$ , porém, o campo de velocidade no passo de tempo posterior deve satisfazer a equação da continuidade (4.1). Aplicando então o divergente sobre a equação (4.11):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{n+1} = \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{V}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \vec{\nabla} p' \right) = 0, \quad (4.12)$$

reagrupando os termos, obtém-se a chamada equação de Poisson, a partir dela é possível a determinação do fator de correção de pressão:

$$\nabla^2 p' = \frac{\rho}{\Delta t} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}^*. \quad (4.13)$$

A técnica de discretização proposta por Kim e Moin, para um esquema de discretização explícita, pode então ser resumida através das seguintes etapas:

1. As componentes do campo de velocidade são estimadas através da equação de balanço de quantidade de movimento linear, utilizando-se os campos de velocidade e pressão do passo de tempo atual:

$$\vec{V}^* = -\frac{\Delta t}{\rho} \vec{\nabla} p^n - \Delta t (\vec{V}^n \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}^n - \Delta t \beta (T^n - T_0) \vec{g}^n + \Delta t \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V}^n + \vec{V}^n,$$

2. O fator de correção de pressão é calculado através da equação de Poisson, a qual é obtida através da combinação das equações de balanço de quantidade de movimento linear e continuidade:

$$\nabla^2 p' = \frac{\rho}{\Delta t} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}^*,$$

3. O campo de pressão no passo de tempo posterior é atualizado por meio do fator de correção de pressão e do campo de pressão no passo de tempo atual:

$$p^{n+1} = p^n + p',$$

4. Por fim, o campo de velocidade é corrigido através do fator de correção de pressão e do campo de velocidade estimado:

$$\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \vec{\nabla} p'.$$

#### 4.1.3 Discretização Espacial

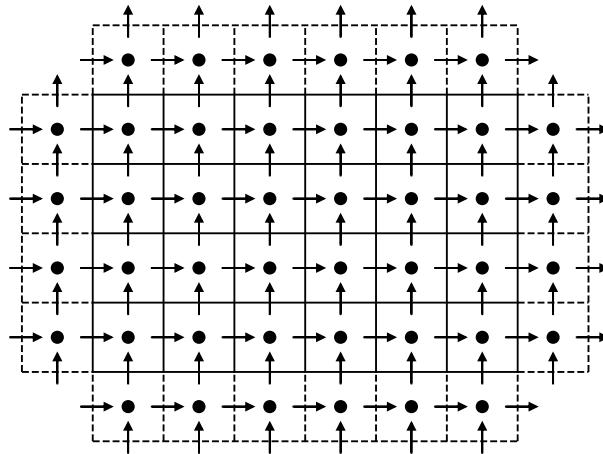
Para o solução do conjunto de equações obtidas para o meio fluido, via modelo numérico, primeiramente é necessário a discretização do domínio fluido, ou seja, deve-se transformar um conjunto contínuo e infinito de informações em um conjunto discreto e finito, no qual a metodologia numérica possa ser empregada. Para o presente trabalho será considerado um domínio espacial bidimensional retangular  $\Omega_f = [0, L_x] \times [0, L_y]$ , o qual será particionado em  $K$  partes iguais na direção horizontal e em  $M$  partes iguais na direção vertical. Gera-se então a malha retangular  $\mathcal{M}_f$ , ou seja, um conjunto de pontos discretos no domínio  $\Omega_f$ :

$$\mathcal{M}_f = \{(x_i, y_j); x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y; i = 0, \dots, K; j = 0, \dots, M\}, \quad (4.14)$$

onde  $\Delta x$  e  $\Delta y$  são os incrementos espaciais nas direções horizontal e vertical, definidos por  $\Delta x = L_x/K$  e  $\Delta y = L_y/M$ , respectivamente.

Uma vez o domínio de cálculo já discretizado com seu respectivo conjunto de células, deve-se agora definir a localização das variáveis de interesse do escoamento dentro da célula computacional. Para o presente trabalho foi adotado o esquema de células deslocadas MAC, introduzidas por Harlow e Welch (1965). Neste esquema de discretização as variáveis escalares, pressão e temperatura, são definidas no centro da célula computacional, enquanto o campo vetorial de velocidade é definido nas faces da célula. De modo que, a componente horizontal de velocidade é definida no centro da face vertical e a componente vertical de velocidade no centro da face horizontal, conforme representado na figura 8.

Figura 8 – Representação esquemática da malha computacional euleriana adotada para o domínio fluido.



→: velocidade horizontal ( $u$ ), ↑: velocidade vertical ( $v$ ), •: pressão e temperatura ( $p$  e  $T$ ).

Fonte: Do próprio autor.

A escolha desse tipo de malha se deve a facilidade em se definir aproximações por diferenças finitas de segunda ordem para as derivadas espaciais dos campos de velocidade e temperatura. Da figura 8 nota-se ainda a existência de uma camada adicional de células que envolve o domínio (linhas pontilhadas), este conjunto de células é denominado de células fantasmares e são utilizados para se viabilizar a aplicação das condições de contorno.

Para ilustrar o esquema de discretização das derivadas espaciais, utiliza-se novamente a função escalar  $\phi$ , que pode representar qualquer variável escalar do escoamento. Assim como a discretização do termo temporal, a discretização das derivadas espaciais também se baseia no processo de expansão em série de Taylor da função  $\phi$  em torno do ponto  $(\vec{x}, t) = (x, y, t)$ , porém, fazendo um incremento e um decremento em cada direção. Para exemplificar, será realizado o processo de discretização para a derivada de  $\phi$  na

direção  $x$ :

$$\phi(x + \Delta x, y, t) = \phi(x, y, t) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Delta x^3 + \dots, \quad (4.15)$$

$$\phi(x - \Delta x, y, t) = \phi(x, y, t) - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Delta x^3 + \dots, \quad (4.16)$$

subtraindo a equação (4.16) da equação (4.15), obtém-se:

$$\phi(x + \Delta x, y, t) - \phi(x - \Delta x, y, t) = 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + 2 \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Delta x^3 + 2 \frac{1}{120} \frac{\partial^5 \phi}{\partial x^5} \Delta x^5 + \dots. \quad (4.17)$$

Isolando a derivada de primeira ordem em  $x$ , obtém-se a equação de diferenças centradas (*central difference scheme - CDS*):

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial x} = \frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - \phi(x - \Delta x, y, t)}{2\Delta x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{\partial^{2k+1} \phi(\vec{x}, t)}{\partial x^{2k+1}} \Delta x^{2k}, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial x} = \frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - \phi(x - \Delta x, y, t)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (4.19)$$

onde o somatório representa o erro numérico do processo de discretização.

As equações de balanço, além das derivadas de primeira ordem no espaço, também possuem derivadas de segunda ordem no espaço, às quais são relacionadas aos termos difusivos. Tais derivadas também devem ser discretizadas, processo o qual se dá de forma semelhante até a obtenção das equações (4.15) e (4.16), que agora em vez de serem subtraídas serão somadas, resultando na seguinte equação:

$$\phi(x - \Delta x, y, t) + \phi(x + \Delta x, y, t) = 2\phi(x, y, t) + 2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \Delta x^4 + \dots. \quad (4.20)$$

Isolando a derivada de segunda ordem em  $x$ , obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial x^2} = \frac{\phi(x - \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x + \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2(k+1))!} \frac{\partial^{2(k+1)} \phi(\vec{x}, t)}{\partial x^{2(k+1)}} \Delta x^{2k}, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial x^2} = \frac{\phi(x - \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x + \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (4.22)$$

onde novamente o somatório representa o erro resultante do processo de discretização.

#### 4.1.4 Discretização das Equações de Balanço

A seguir é apresentada a discretização do conjunto de equações obtido pelo modelo numérico, em um domínio bidimensional euleriano. Para a discretização espacial das equações é utilizado o método de diferenças finitas centradas com malhas deslocadas, a fim de se obter segunda ordem. E para a discretização temporal utiliza-se o esquema de Euler explícito.

#### 4.1.4.1 Discretização do Campo de Velocidade Estimado

O campo de velocidade estimado pode ser determinado numericamente, para tanto deve-se traduzir a equação diferencial do balanço de quantidade de movimento linear para o domínio discreto. Dessa forma, é apresentada a discretização para a componente  $x$  de cada um dos termos da equação.

- Termo temporal:

$$\frac{u_{i,j}^* - u_{i,j}^n}{\Delta t}. \quad (4.23)$$

- Termo advectivo:

$$u_{i,j}^n \left( \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{v_{i-1,j}^n + v_{i,j}^n + v_{i-1,j+1}^n + v_{i,j+1}^n}{4} \left( \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta x} \right). \quad (4.24)$$

- Gradiente de pressão:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n}{\Delta x}. \quad (4.25)$$

- Termo gravitacional:

$$-\beta(T_{i,j}^n - T_0)g_x = -\left(\frac{T_{i,j}^n}{T_0} - 1\right)g_x. \quad (4.26)$$

- Termo difusivo:

$$\frac{\mu}{\rho} \left( \frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right). \quad (4.27)$$

#### 4.1.4.2 Discretização da Correção de Pressão

O fator de correção de pressão é determinado através da solução de uma equação de Poisson, onde todos os termos da equação são avaliados no mesmo passo de tempo, ou seja, tanto  $p'$  quanto  $\vec{V}^*$  são avaliados em  $t = (n + 1)\Delta t$ . A discretização da correção de pressão é apresentada a seguir:

$$\frac{p'_{i-1,j} - 2p'_{i,j} + p'_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{p'_{i,j-1} - 2p'_{i,j} + p'_{i,j+1}}{\Delta y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{u_{i+1,j}^* - u_{i,j}^*}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^* - v_{i,j}^*}{\Delta y} \right). \quad (4.28)$$

Como todos os termos são avaliados no mesmo intervalo de tempo, considera-se então que os termos são acoplados, constituindo assim um sistema linear. Desse modo, ao

se denominar os termos presentes no lado direito da equação (4.28) por  $B_{i,j}$ , o sistema linear para a determinação do fator de correção de pressão pode ser representado da seguinte maneira:

$$A_p p'_{i,j} + A_h (p'_{i-1,j} + p'_{i+1,j}) + A_v (p'_{i,j-1} + p'_{i,j+1}) = B_{i,j}, \quad (4.29)$$

onde,

$$A_p = -2 \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right), \quad A_h = \frac{1}{\Delta x^2} \quad \text{e} \quad A_v = \frac{1}{\Delta y^2}. \quad (4.30)$$

Para a solução da equação de Poisson discreta (4.29), foi utilizado o método dos gradientes bi-conjugados estabilizados (VAN DER VORST, 1992).

#### 4.1.4.3 Discretização da Correção do Campo de Velocidade

Após a obtenção do fator de correção de pressão através da solução do sistema linear (4.29), deve-se corrigir o campo de velocidade, a fim de que a equação da continuidade seja satisfeita. A correção do campo de velocidade é dada pela discretização aqui retratada na direção  $x$ :

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \left( \frac{p'_{i,j} - p'_{i-1,j}}{\Delta x} \right). \quad (4.31)$$

#### 4.1.4.4 Discretização do Campo de Temperatura

De forma similar ao campo de velocidade, o campo de temperatura também pode ser numericamente estimado, portanto deve-se transformar a equação diferencial da energia térmica do domínio contínuo para o discreto. Resultando assim na seguinte discretização para cada um dos termos da equação.

- Termo temporal:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t}. \quad (4.32)$$

- Termo advectivo:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}}{2} \left( \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1}}{2} \left( \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\Delta x} \right). \quad (4.33)$$

- Termo difusivo:

$$\frac{k}{\rho c_p} \left( \frac{T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right). \quad (4.34)$$

- Termo de transformação viscosa:

$$\frac{1}{\rho c_p} \Phi_{i,j}. \quad (4.35)$$

A função de transformação viscosa ( $\Phi$ ), em sua forma discreta, é representada através da seguinte equação:

$$\Phi_{i,j} = \mu \left[ 2 \left( \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right)^2 + 2 \left( \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right)^2 + \left( \frac{v_{i+1,j}^{n+1} + v_{i+1,j+1}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1} - v_{i-1,j+1}^{n+1}}{4\Delta x} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} + u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1} - u_{i+1,j-1}^{n+1}}{4\Delta y} \right)^2 \right]. \quad (4.36)$$

#### 4.1.5 Convergência e Estabilidade

Em métodos numéricos é importante atentar-se ainda as condições de convergências, que são relações entre propriedades físicas do escoamento e características geométricas do domínio discreto que devem ser respeitadas, a fim de que a metodologia numérica produza resultados condizentes com o modelo matemático. Neste trabalho, para o domínio fluido duas condições de convergência devem ser satisfeitas, uma dinâmica e outra térmica.

Portanto, para correta solução do escoamento, deve-se limitar a malha computacional em função de números adimensionais calculados localmente, isto é, são calculados em função do tamanho da malha computacional. Define-se então os números de Reynolds e de Péclet locais, respectivamente:

$$Re_{\Delta x} = \frac{\rho U \Delta x}{\mu}, \quad Pe_{\Delta x} = \frac{U \Delta x}{\alpha}, \quad (4.37)$$

onde a correta modelagem numérica é alcançada quando ambos os adimensionais são menores que dois, caracterizando assim as condições de convergência:

$$Re_{\Delta x} < 2 \text{ e } Pe_{\Delta x} < 2. \quad (4.38)$$

Estas condições de convergência foram determinadas através de empirismo computacional durante o desenvolvimento do código computacional utilizado no presente trabalho.

A estabilidade de um método de diferenças finitas representa a capacidade de uma equação de diferenças de não amplificar erros numéricos provenientes de iterações precedentes. Geralmente a estabilidade do método é definida por uma região em função das características físicas do escoamento, do tamanho da malha computacional e do passo de tempo.

A análise de Von Neumann (CHARNEY; FJÖRTOFT; NEUMANN, 1950) é uma importante ferramenta para a análise de estabilidade de métodos de diferenças finitas. Neste trabalho, ela é aplicada sobre as equações de diferenças construídas através de uma formulação explícita, obtidas através das equações da difusão e da advecção, resultando nos seguintes critérios de estabilidade (STRIKWERDA, 1989):

$$\Delta t_d \leq \frac{1}{2\alpha} \frac{(\Delta x \Delta y)^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad (4.39)$$

$$\Delta t_a \leq \min \left( \frac{\Delta x}{\max |u|}, \frac{\Delta y}{\max |v|} \right), \quad (4.40)$$

onde os subíndices  $d$  e  $a$  indicam o passo temporal da discretização da equação da difusão e da advecção, respectivamente.

Nas equações de Navier-Stokes, ocorre a presença simultaneamente de termos difusivos e advectivos. Sendo assim, Villar (2007) propõem que o critério de estabilidade para a discretização explícita das equações de Navier-Stokes possa ser dado por:

$$\Delta t = CFL \min(\Delta t_d, \Delta t_a), \quad (4.41)$$

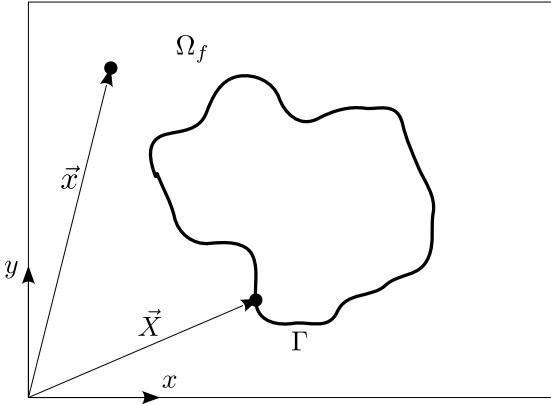
onde o coeficiente difusividade térmica ( $\alpha$ ) é substituído pela viscosidade cinemática ( $\nu = \mu/\rho$ ), e a constante  $CFL$  é definida por Courant, Friedrichs e Lewy (1967) e admite valor entre 0 e 1, onde para o presente trabalho é adotado o valor de 0,25.

## 4.2 Fronteira Imersa

No método de fronteira imersa, dois domínios de cálculo são considerados: o domínio euleriano  $\Omega_f$ , cartesiano e fixo, no qual as equações de balanço para o subdomínio fluido são discretizadas e resolvidas; o domínio euleriano  $\Gamma$ , que representa a fronteira imersa, isto é, uma malha computacional auxiliar utilizada para descrever a superfície do corpo imerso.

Dentro do domínio físico, as geometrias de interesse à serem modeladas são inseridas através da malha lagrangiana, na qual são impostas as condições de contorno desejadas através do método da fronteira imersa. Qualquer ponto euleriano, pertencente ao domínio físico, é posicionado através de um vetor  $\vec{x}$ , enquanto os pontos lagrangianos pertencentes a fronteira imersa são posicionados através de um vetor  $\vec{X}$ , conforme representado na figura 9 a seguir.

Figura 9 – Representação esquemática dos domínios de cálculos utilizados no método da fronteira imersa.



Fonte: Do próprio autor.

A imposição das condições de contorno da geometria imersa é feita através da utilização de termos forçantes adicionados às equações de balanço:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \beta(T - T_0) \vec{g} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V} + \frac{\vec{f}}{\rho}, \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) T = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{\Phi}{\rho c_p} + \frac{q}{\rho c_p}. \quad (4.43)$$

onde  $\vec{f}$  e  $q$  representam o termo de força e fluxo térmico sofridos pelo escoamento devido a presença da fronteira imersa, respectivamente.

Os termos  $\vec{f}$  e  $q$  tem o papel de representar dinâmica e termicamente a fronteira imersa no domínio euleriano  $\Omega_f$ . Estes termos são dados por Kinoshita (2015):

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = \begin{cases} \vec{f}_\Gamma(\vec{X}, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X}, \\ \vec{0} & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X}, \end{cases} \quad (4.44)$$

$$q(\vec{x}, t) = \begin{cases} q_\Gamma(\vec{X}, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X}, \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X}, \end{cases} \quad (4.45)$$

onde  $\vec{f}_\Gamma$  e  $q_\Gamma$  são a força e o fluxo térmico lagrangianos, respectivamente, definidos na interface imersa  $\Gamma$ .

A definição dos termos forçantes para as equações de Navier-Stokes e da energia térmica, dados pelas equações (4.44) e (4.45) levam a formação de um campo descontínuo, o qual só é numericamente solucionável quando os pontos lagrangianos que compõem a interface imersa são coincidentes com os pontos da malha euleriana do subdomínio fluido, o que raramente ocorre, principalmente quando se trabalha com geometrias complexas. Para contornar esse obstáculo, os termos forçantes, quando não há coincidência entre as malhas, são distribuídos sobre a malha euleriana na vizinhança da fronteira imersa.

A distribuição das informações do domínio lagrangiano para euleriano é feita através da seguinte função de distribuição proposta por Peskin (1972):

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{\Gamma} \phi_{\Gamma}(\vec{X}, t) \delta(\vec{x} - \vec{X}) \Delta s^2, \quad (4.46)$$

já a interpolação de informações do domínio euleriano para o lagrangiano é realizada pela função de interpolação:

$$\phi_{\Gamma}(\vec{X}, t) = \sum_{\Omega_f} \phi(\vec{x}, t) \delta(\vec{x} - \vec{X}) \Delta x \Delta y, \quad (4.47)$$

onde  $\phi$  é uma função escalar qualquer no domínio euleriano e  $\phi_{\Gamma}$  sua representação no domínio lagrangiano,  $\Delta s$  é o espaçamento entre os pontos do domínio lagrangiano e  $\delta$  representa a função delta discreta:

$$\delta(\vec{x} - \vec{X}) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} d_h \left( \frac{x - X}{\Delta x} \right) d_h \left( \frac{y - Y}{\Delta y} \right), \quad (4.48)$$

onde  $d_h$  representa o peso da função de distribuição.

Na literatura várias funções pesos são propostas, porém para este trabalho utilizou-se a função peso também proposta por Peskin (1972):

$$d_h(r) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left( 3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2} \right) & \text{se } 0 \leq r < 1, \\ \frac{1}{8} \left( 5 - 2|r| - \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2} \right) & \text{se } 1 \leq r < 2, \\ 0 & \text{se } r \geq 2. \end{cases} \quad (4.49)$$

#### 4.2.1 Imposição da Condição de Contorno Dinâmica

Para a imposição da condição de contorno dinâmica utiliza-se o método da múltipla imposição da força, proposto por Wang, Fan e Luo (2008). Neste método, a imposição da condição de contorno dinâmica se dá através da aplicação do termo forçante nas equações de Navier-Stokes.

O termo forçante, que representa a força lagrangiana é calculado inicialmente através do campo de força euleriano:

$$\vec{f} = \rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right) + \vec{\nabla} p + \rho \beta (T - T_0) \vec{g} - \mu \nabla^2 \vec{V}, \quad (4.50)$$

devido a equação (4.50) ser concebida tendo como base a hipótese do contínuo, e como a fronteira imersa  $\Gamma$  pertence ao domínio fluido  $\Omega_f$ , a equação (4.50) pode ser reescrita sobre os pontos lagrangianos:

$$\vec{f}_{\Gamma} = \rho \left( \frac{\partial \vec{V}_{\Gamma}}{\partial t} + (\vec{V}_{\Gamma} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_{\Gamma} \right) + \vec{\nabla}_{\Gamma} p + \rho \beta (T_{\Gamma} - T_0) \vec{g} - \mu \nabla^2 \vec{V}_{\Gamma}, \quad (4.51)$$

onde as variáveis com subíndice  $\Gamma$  indicam que são avaliadas sobre a fronteira imersa, no domínio lagrangiano.

Utilizando-se um esquema explícito para a discretização da derivada temporal da equação (4.51), obtém-se:

$$\vec{f}_\Gamma(\vec{X}, t) = \rho \frac{\vec{V}_\Gamma^{n+1} - \vec{V}_\Gamma^n}{\Delta t} + RHS_\Gamma^n, \quad (4.52)$$

onde  $\Delta t$  é o incremento de tempo,  $\vec{f}_\Gamma(\vec{X}, t)$  é a força lagrangiana que age sobre a coordenada  $\vec{X}$  da fronteira imersa no passo de tempo atual, e  $RHS_\Gamma$  representa o termo:

$$RHS_\Gamma = \rho (\vec{V}_\Gamma \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_\Gamma + \vec{\nabla} p_\Gamma + \rho \beta (T_\Gamma - T_0) \vec{g} - \mu \nabla^2 \vec{V}_\Gamma. \quad (4.53)$$

O método da múltipla imposição da força é uma variação do método da imposição direta da força proposto por Mohd-Yusof (1997). Onde, nesta metodologia é adicionado e subtraído um parâmetro adicional ao termo discreto da derivada temporal:

$$\vec{f}_\Gamma(\vec{X}, t) = \rho \frac{\vec{V}_\Gamma^{n+1} - \vec{V}_\Gamma^n + \vec{V}_\Gamma^* - \vec{V}_\Gamma^*}{\Delta t} + RHS_\Gamma^n, \quad (4.54)$$

sendo  $\vec{V}_\Gamma^{n+1}$  o valor da condição de contorno na fronteira imersa no passo de tempo posterior, o qual é conhecido a priori.

Utilizando-se o princípio da superposição, pode-se decompor a equação (4.54) em duas equações independentes no mesmo passo de tempo:

$$\rho \frac{\vec{V}_\Gamma^* - \vec{V}_\Gamma^n}{\Delta t} + RHS_\Gamma^n = \vec{0}, \quad (4.55)$$

$$\vec{f}_\Gamma(\vec{X}, t) = \rho \frac{\vec{V}_\Gamma^{n+1} - \vec{V}_\Gamma^*}{\Delta t}, \quad (4.56)$$

as equações (4.55) e (4.56) embora tenham sido formuladas no domínio lagrangiano, também são válidas para o domínio euleriano:

$$\rho \frac{\vec{V}_\Gamma^* - \vec{V}_\Gamma^n}{\Delta t} + RHS_\Gamma^n = \vec{0}, \quad (4.57)$$

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = \rho \frac{\vec{V}_\Gamma^{n+1} - \vec{V}_\Gamma^*}{\Delta t}, \quad (4.58)$$

o parâmetro  $\vec{V}^*$  é análogo ao campo de velocidade estimado do método do passo fracionado.

Deste modo, o método da imposição direta da força, para uma discretização explícita, pode ser descrito através das seguintes etapas:

1. Calcula-se inicialmente o campo de velocidades estimado no domínio euleriano:

$$\vec{V}^* = \vec{V}^n - \frac{\Delta t}{\rho} RHS_\Gamma^n,$$

2. O campo de velocidade estimado é então interpolado sobre os pontos lagrangianos, através da função de interpolação:

$$\vec{V}_\Gamma^* = \sum_{\Omega_f} \vec{V}^* \delta(\vec{x} - \vec{X}) \Delta x \Delta y,$$

3. A força lagrangiana é então avaliada sobre cada um dos pontos da fronteira imersa:

$$\vec{f}_\Gamma = \rho \frac{\vec{V}_\Gamma^{n+1} - \vec{V}_\Gamma^*}{\Delta t},$$

4. A força lagrangiana é então distribuída para o domínio euleriano por meio da função de distribuição:

$$\vec{f} = \sum_{\Gamma} \vec{f}_\Gamma \delta(\vec{x} - \vec{X}) \Delta s^2,$$

5. Por fim, o campo de velocidade é atualizado considerando o campo de força devido a presença da fronteira imersa:

$$\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^* + \frac{\Delta t}{\rho} \vec{f}.$$

No método da múltipla imposição da força, as etapas de 2 à 5 são repetidas, dentro de um mesmo passo de tempo, até um número de iterações preestabelecido ou até que a variação entre o campo de velocidade e/ou o campo de força entre duas iterações sucessivas seja menor que uma tolerância previamente estabelecida.

#### 4.2.2 Imposição da Condição de Contorno Térmica

As condições de contorno térmicas, como dito anteriormente, podem ser do tipo temperatura ou fluxo térmico prescrito sobre a superfície imersa. Porém, neste trabalho, utilizou-se somente a condição de contorno de primeiro tipo (Dirichlet), de modo que pode-se aplicar o método da múltipla imposição térmica proposto por Wang et al. (2009), método o qual foi inteiramente inspirado na metodologia da múltipla imposição da força.

No método da múltipla imposição térmica, a condição de contorno térmica de temperatura prescrita, é imposta através da utilização de um termo forçante adicionado a equação de balanço de energia térmica. Este termo forçante, que representa o fluxo térmico lagrangiano, é em um primeiro momento calculado por meio de um campo de fluxo térmico euleriano:

$$q = \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) T \right) - k \nabla^2 T - \Phi, \quad (4.59)$$

similarmente ao caso dinâmico, a equação (4.59) pode ser reescrita no domínio lagrangiano:

$$q_\Gamma = \rho c_p \left( \frac{\partial T_\Gamma}{\partial t} + (\vec{V}_\Gamma \cdot \vec{\nabla}) T_\Gamma \right) - k \nabla^2 T_\Gamma - \Phi_\Gamma, \quad (4.60)$$

onde novamente, as variáveis com subíndice  $\Gamma$  são avaliadas sobre a fronteira imersa.

Utilizando um esquema de discretização Euler explícito para a derivada temporal da equação (4.60):

$$q_\Gamma = \rho c_p \frac{T_\Gamma^{n+1} - T_\Gamma^n}{\Delta t} + RHST_\Gamma^n, \quad (4.61)$$

sendo  $RHST_\Gamma$  o termo:

$$RHST_\Gamma = \rho c_p (\vec{V}_\Gamma \cdot \vec{\nabla}) T_\Gamma - k \nabla^2 T_\Gamma - \Phi_\Gamma. \quad (4.62)$$

Analogamente à fronteira imersa dinâmica, soma-se e subtrai-se um termo à discretização da derivada temporal da equação (4.61), que representa um campo de temperatura estimado:

$$q_\Gamma = \rho c_p \frac{T_\Gamma^{n+1} - T_\Gamma^n + T_\Gamma^* - T_\Gamma^*}{\Delta t} + RHST_\Gamma^n, \quad (4.63)$$

onde  $T_\Gamma^{n+1}$  é a temperatura prescrita sobre a fronteira imersa, a qual é conhecida devido a condição de contorno de Dirichlet e  $T_\Gamma^*$  representa o campo de temperatura estimado.

A equação (4.63) é dividida em duas equações ao se utilizar o princípio da superposição:

$$\rho c_p \frac{T_\Gamma^* - T_\Gamma^n}{\Delta t} + RHST_\Gamma^n = 0, \quad (4.64)$$

$$q_\Gamma = \rho c_p \frac{T_\Gamma^{n+1} - T_\Gamma^*}{\Delta t}, \quad (4.65)$$

no domínio euleriano as equações (4.64) e (4.65) são escritas como:

$$\rho c_p \frac{T^* - T^n}{\Delta t} + RHST^n = 0, \quad (4.66)$$

$$q_\Gamma = \rho c_p \frac{T^{n+1} - T^*}{\Delta t}. \quad (4.67)$$

Deste modo, o método da múltipla imposição térmica, para uma única iteração, pode ser descrito através das seguintes etapas:

1. Calcula-se o campo de temperatura estimado através do campo de temperatura no passo de tempo anterior e do campo de velocidades no passo de tempo atual:

$$T^* = T^n - \frac{\Delta t}{\rho c_p} RHST^n,$$

2. O campo de temperatura estimado é interpolado sobre os nós da malha lagrangiana, por meio da função de interpolação:

$$T_{\Gamma}^* = \sum_{\Omega_f} T^* \delta(\vec{x} - \vec{X}) \Delta x \Delta y,$$

3. O fluxo térmico lagrangiano é avaliado sobre cada um dos pontos da malha lagrangiana:

$$q_{\Gamma} = \rho c_p \frac{T_{\Gamma}^{n+1} - T_{\Gamma}^*}{\Delta t},$$

4. O fluxo térmico lagrangiano é distribuído sobre a malha euleriana utilizando a função de distribuição:

$$q = \sum_{\Gamma} q_{\Gamma} \delta(\vec{x} - \vec{X}) \Delta s^2,$$

5. Finalmente, a temperatura do fluido é atualizada considerando-se o fluxo térmico devido a presença da fronteira imersa:

$$T^{n+1} = T^* + \frac{\Delta t}{\rho c_p} q.$$

Para mais de uma iteração, as etapas de 2 à 5 são repetidas dentro de um mesmo passo de tempo até se atingir um número de iterações previamente estabelecido, ou até que a diferença entre o campo de temperatura e/ou o fluxo térmico entre duas iterações sucessivas seja menor do que uma tolerância estipulada.

### 4.3 Subsistema Sólido

O subsistema sólido é composto apenas pela equação de balanço de energia térmica, a qual é novamente reescrita:

$$\rho_s c_{p_s} \frac{\partial T}{\partial t} = k_s \nabla^2 T + \dot{q}. \quad (4.68)$$

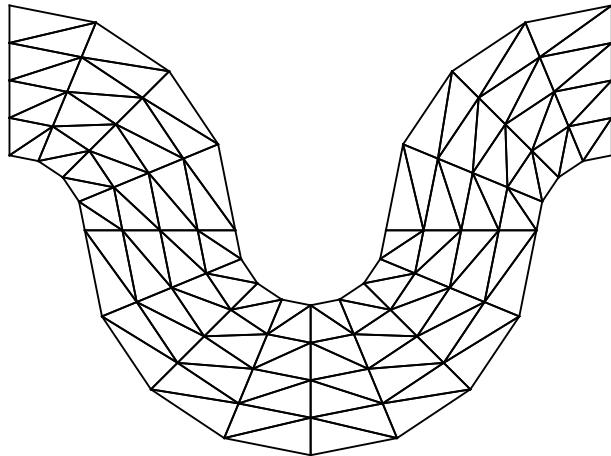
Para o subdomínio sólido, por apresentar apenas uma equação diferencial parcial, a qual deve ser resolvida para geometrias arbitrárias, optou-se neste trabalho pela utilização do método dos elementos finitos (MEF) para a discretização e solução desta equação.

#### 4.3.1 Malha Numérica

Para a aplicação da metodologia de elementos finitos, o domínio sólido deve ser discretizado, isto é, um conjunto contínuo e infinito de informações devem ser transformadas em um conjunto discreto e finito no qual a metodologia é aplicável. Para isto, o domínio

sólido bidimensional  $\Omega_s$  é particionado em  $nNO$  pontos discretos e  $nEF$  elementos finitos triangulares, onde cada elemento finito contém um nó em cada um de seus vértices, representando os pontos de avaliação das propriedades de interesse, conforme esquematizado na figura 10 a seguir.

Figura 10 – Representação esquemática de uma malha computacional não estruturada adotada para o domínio sólido.



Fonte: Do próprio autor.

A partir da discretização do domínio sólido, gera-se então a malha irregular  $\mathcal{M}_s$ , que representa um conjunto de pontos discretos dentro do domínio  $\Omega_s$ :

$$\mathcal{M}_s = \{(x_i^K, y_i^K), i = 1, 2, 3, K = 1, \dots, nEF\}, \quad (4.69)$$

onde o super índice  $K$  representa o elemento triangular dentro do domínio sólido, e o subíndice  $i$  representa os vértices do elemento triangular onde se situa os pontos discretos em que é avaliada as variáveis de interesse.

Cada nó dentro do domínio sólido representa um grau de liberdade o qual é mapeado através de um número inteiro  $m$ , assim como cada elemento finito é associado a um número inteiro  $K$ , de modo que a partir da malha computacional  $\mathcal{M}_s$ , pode-se gerar uma matriz denominada matriz de conectividade. Esta matriz contém a informação de cada número inteiro associado a um ponto discreto pertencente a cada elemento finito, isto é, para cada elemento finito esta matriz de conectividade informa os pontos discretos associados a ele. Deste modo:

$$MC_{i,3} = [m_1^i, m_2^i, m_3^i], \quad i = 1, \dots, nEF, \quad (4.70)$$

#### 4.3.2 Discretização pelo Método dos Elementos Finitos

Para a discretização espacial da equação de balanço de energia térmica (4.68) através do método dos elementos finitos, utiliza-se o método de Galerkin (LOGAN, 2007).

A aplicação do método de Galerkin baseia-se na utilização das chamadas funções de forma, também conhecidas como funções de interpolações, que em um domínio bidimensional são representadas por  $N_i = N_i(x, y)$ , com  $i = 1, \dots, n$ , sendo  $n$  o número de nós que compõem um elemento finito.

As funções de forma são responsáveis por interpolar os valores das variáveis de interesse dos nós para o interior de um elemento finito. Deste modo, para a solução da equação de balanço de energia térmica via elementos finitos, define-se uma solução aproximada para o campo de temperatura que é uma combinação linear entre as funções de forma e o valor da temperatura nos nós do elemento:

$$\tilde{T}(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \tilde{T}_i = [N(x, y)] \{T^{(e)}\}, \quad (4.71)$$

onde

$$[N(x, y)] = [N] = [N_1, N_2, \dots, N_n] \quad \text{e} \quad \{T^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 \\ \vdots \\ \tilde{T}_n \end{Bmatrix}. \quad (4.72)$$

Ao se aplicar a solução aproximada (4.71) na equação de balanço de energia térmica (4.68), gera-se um resíduo, uma vez que a solução aproximada não é necessariamente igual a solução exata:

$$R(x, y) = \rho_s c_{p_s} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - k_s \nabla^2 \tilde{T} - \dot{q}, \quad (4.73)$$

este resíduo deve ser minimizado, a fim de que a solução aproximada seja o mais próximo possível da solução exata. Esta minimização é realizada através da ponderação do resíduo por funções peso  $w(x, y)$ , sendo este produto integrado sobre todo o elemento finito  $K$ , de modo que esta integral seja nula:

$$\begin{aligned} \iint_K w(x, y) R(x, y) dA &= 0, & K \in \Omega_s \\ \iint_K w \rho_s c_{p_s} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} dA - \iint_K w k_s \nabla^2 \tilde{T} dA - \iint_K w \dot{q} dA &= 0. \end{aligned} \quad (4.74)$$

O próximo passo a ser realizado é a aplicação do teorema de Green no segundo termo da equação (4.74), a fim de se enfraquecer o resíduo ponderado, eliminando as derivadas de segunda ordem presentes no laplaciano do campo de temperatura:

$$\iint_K w k_s \nabla^2 \tilde{T} dA = - \iint_K \vec{\nabla} w \cdot (k_s \vec{\nabla} \tilde{T}) dA + \int_{\partial K} w k_s \vec{\nabla} \tilde{T} \cdot \vec{n} ds, \quad (4.75)$$

observa-se que o termo  $k_s \vec{\nabla} \tilde{T} \cdot \vec{n}$  representa o fluxo térmico  $\tilde{q}''$  que atua na fronteira da superfície de controle do domínio sólido. Logo, usando deste fato e substituindo a equação (4.75) na equação (4.74), obtém-se:

$$\iint_K w \rho_s c_{p_s} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} dA + \iint_K \vec{\nabla} w \cdot (k_s \vec{\nabla} \tilde{T}) dA = \int_{\partial K} w \tilde{q}'' ds + \iint_K w \dot{q} dA, \quad (4.76)$$

esta é conhecida como a formulação fraca do método de elementos finitos.

O método de Galerkin garante que a função peso é igual as funções de forma definidas em (4.72) (SAYAS, 2015), ou seja:

$$w(x, y) = \begin{Bmatrix} N_1(x, y) \\ N_2(x, y) \\ \vdots \\ N_n(x, y) \end{Bmatrix} = [N]^T. \quad (4.77)$$

A partir da definição da aproximação para o campo de temperatura (4.71), pode-se determinar seu gradiente assim como sua derivada temporal:

$$\vec{\nabla} \tilde{T} = \vec{\nabla}([N(x, y)]\{T^{(e)}\}) = [\vec{\nabla} N]\{T^{(e)}\}, \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}([N]\{T^{(e)}\}) = [N] \frac{\partial \{T^{(e)}\}}{\partial t} = [N]\{\dot{T}^{(e)}\}, \quad (4.79)$$

onde  $\{\dot{T}^{(e)}\}$ :

$$\{\dot{T}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\tilde{T}}_1 \\ \dot{\tilde{T}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{T}}_n \end{Bmatrix}. \quad (4.80)$$

Finalmente, substituindo as equações (4.77), (4.78) e (4.79) na formulação fraca do método de elementos finitos (4.76), obtém-se a discretização da equação de balanço de energia térmica em um domínio sólido através do método dos elementos finitos:

$$\begin{aligned} \iint_K \rho_s c_{p_s} [N]^T [N] \{\dot{T}^{(e)}\} dA + \iint_K k_s [\vec{\nabla} N]^T [\vec{\nabla} N] \{T^{(e)}\} dA &= \int_{\partial K} [N_c]^T \tilde{q}'' ds + \\ &+ \iint_K [N]^T \dot{q} dA, \end{aligned} \quad (4.81)$$

como os valores de temperatura nodais são constantes dentro de cada elemento, assim como o termo fonte de calor  $\dot{q}$ , estes podem sair da integral de área resultando na seguinte equação em formato matricial:

$$\mathbf{C}^{(e)} \{\dot{T}^{(e)}\} + \mathbf{K}^{(e)} \{T^{(e)}\} = \{Q^{(e)}\}, \quad (4.82)$$

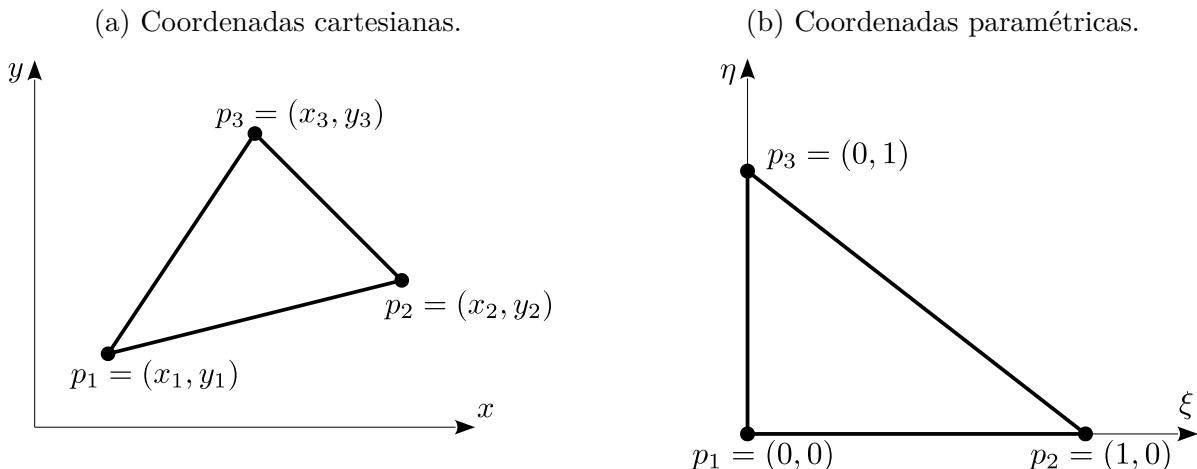
onde  $\mathbf{C}^{(e)}$  é a matriz de capacidade térmica elementar,  $\mathbf{K}^{(e)}$  é a matriz de condutividade térmica elementar e  $\{Q^{(e)}\}$  é o vetor de fluxo térmico elementar.

### 4.3.3 Funções de Forma

Definido o tipo de elemento finito utilizado para a discretização do domínio sólido, parte-se para a construção das funções de forma. Define-se então funções polinomiais com as quais é possível a interpolação de informações a partir dos valores nodais, em uma base local, contínua e regular, na qual a realização da integração numérica se torna conveniente.

Para a construção das funções de forma, deve-se inicialmente transformar o elemento finito do sistema cartesiano para uma base local em um sistema paramétrico. Deste modo, os pontos  $p_i = (x_i, y_i)$ , com  $i = 1, 2$  e  $3$ , vértices do elemento triangular, são relacionados aos pontos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  do sistema paramétrico, conforme esquematizado na figura 11.

Figura 11 – Representação de um elemento finito triangular no sistema de coordenadas cartesianas e paramétricas.



Fonte: Do próprio autor.

Um ponto genérico  $(x, y)$  em um elemento triangular é relacionado a um ponto  $(\xi, \eta)$  do sistema local, através da seguinte aplicação linear:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a_1 + a_2\xi + a_3\eta. \quad (4.83)$$

Utilizando os valores nodais, considerando a transformação representada na figura 11, é possível determinar os coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$ , obtendo a transformação linear:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1 - \xi - \eta) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad (4.84)$$

tal que,  $0 \leq \xi \leq 1$  e  $0 \leq \eta \leq 1$ .

Observa-se que a equação (4.84) representa um mapeamento do domínio de cada elemento finito para as coordenadas cartesianas  $(x, y)$  a partir das coordenadas locais  $(\xi, \eta)$ .

Este mapeamento é realizado através das funções de forma para um elemento triangular:

$$N_1 = 1 - \xi - \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = \eta. \quad (4.85)$$

Observa-se que as funções de forma são escritas em relação a base local no sistema paramétrico, porém na discretização da equação de balanço de energia térmica por elementos finitos (4.81) é necessário a realização do cálculo do gradiente das funções de forma no domínio cartesiano, assim como a própria integração. Deste modo, deve-se utilizar a chamada matriz Jacobiana, formada a partir das derivadas parciais da função de transformação de variáveis (4.84):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}. \quad (4.86)$$

#### 4.3.4 Matrizes Elementares

As matrizes elementares presentes na equação (4.82) são dadas a partir da integração do produto das funções de forma ou do gradiente das funções de forma sobre o elemento finito  $K$ :

$$\mathbf{C}^{(e)} = \iint_K \rho_s c_{p_s} [N]^T [N] dA, \quad (4.87)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \iint_K k_s [\vec{\nabla} N]^T [\vec{\nabla} N] dA, \quad (4.88)$$

observa-se que a integração é realizada no sistema de coordenadas cartesianas, de modo que  $dA = dx dy$  e o domínio de integração do elemento finito  $K$  compreende o triângulo formado pelos pontos  $(x_i^K, y_i^K)$ , com  $i = 1, 2$  e  $3$ .

A integração no sistema cartesiano é complexa devido a geometria do elemento finito, que pode ser um triângulo escaleno de orientação arbitrária. Deste modo, parte-se para a integração no sistema local, com coordenadas paramétricas, onde qualquer elemento triangular é representado por um triângulo isósceles de orientação bem definida.

No sistema local a integração da matriz de capacidade térmica elementar é dada por:

$$\mathbf{C}^{(e)} = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \rho_s c_{p_s} [N]^T [N] \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta, \quad (4.89)$$

onde devido a mudança de variáveis  $dA = \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta$ .

Para a matriz de condutividade térmica deve-se proceder de forma similar, porém antes é necessário avaliar as derivadas das funções de formas, que são realizadas no sistema cartesiano. Deste modo, as derivadas parciais das funções de forma no sistema cartesiano global são dadas por:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (4.90)$$

ou em notação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}. \quad (4.91)$$

Deste modo:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} k_s [\mathbf{J}^{-1} \vec{\nabla}_{\xi, \eta} N]^T [\mathbf{J}^{-1} \vec{\nabla}_{\xi, \eta} N] \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta, \quad (4.92)$$

onde  $\vec{\nabla}_{\xi, \eta}$  representa o operador gradiente em relação ao sistema local com coordenadas paramétricas.

A integração das equações (4.89) e (4.92) muitas vezes são complexas o suficiente para inviabilizarem a solução analítica, desta forma parte-se para a utilização de métodos de integração numérica, como o método da quadratura de Gauss-Legendre (GAUSS, 2011). Em um elemento finito triangular, a quadratura de Gauss-Legendre para uma função  $\phi$  qualquer é dada por (OÑATE, 2013):

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{p=1}^{n_p} \phi(\xi_p, \eta_p) w_p, \quad (4.93)$$

sendo  $n_p$  o número de pontos  $(\xi_p, \eta_p)$  de integração e  $w_p$  é o peso de integração associado a cada ponto  $p = 1, \dots, n_p$ .

Aplicando-se então a integração numérica, através da quadratura de Gauss-Legendre (4.93) nas equações (4.89) e (4.92), obtém-se as matrizes elementares de capacidade térmica e condutividade térmica, respectivamente.

#### 4.3.5 Elementos de Contorno

Definidas as matrizes elementares, parte-se para avaliação do vetor de fluxo térmico elementar da equação (4.82):

$$\{Q^{(e)}\} = \int_{\partial K} [N_c]^T \tilde{q}'' ds + \iint_K [N]^T \dot{q} dA, \quad (4.94)$$

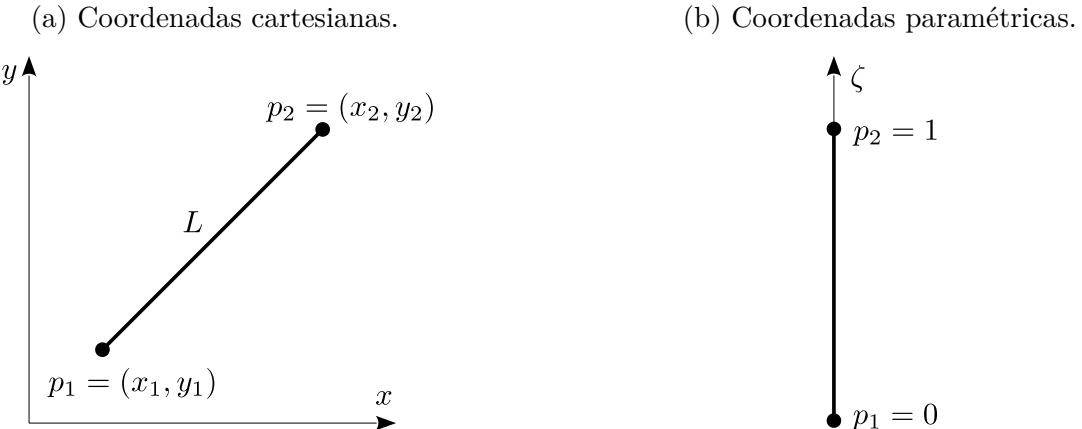
o segundo termo à direita da igualdade na equação (4.94) pode ser calculado através da integração numérica, conforme exposto anteriormente:

$$\iint_K [N]^T \dot{q} dA = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} [N]^T \dot{q} \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta = \sum_{p=1}^{n_p} [N(\xi_p, \eta_p)]^T \dot{q} \det(\mathbf{J}) w_p. \quad (4.95)$$

Já o primeiro termo de (4.94) representa uma integral de linha avaliada sobre as fronteiras do domínio sólido, onde a condição de contorno de Neumann vigora. Para computar esta integral, faz-se necessário a utilização de elementos de contorno, que representam as arestas dos elementos triangulares onde a condição de fluxo térmico prescrito é imposta.

Assim como os elementos triangulares possuem suas funções de forma, os elementos de contorno também têm, de modo que, analogamente ao caso bidimensional utiliza-se uma base local para transformar o segmento de reta de orientação qualquer, representado pela aresta do elemento triangular, em um segmento de reta bem orientado, conforme figura 12.

Figura 12 – Representação de um elemento de contorno no sistema de coordenadas cartesianas e paramétricas.



Fonte: Do próprio autor.

Assim, um ponto genérico  $(x, y)$  pertencente ao elemento de contorno é relacionado à variável  $\zeta$  da base local do sistema paramétrico, através da seguinte transformação linear:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1 - \zeta) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \zeta \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (4.96)$$

tal que,  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Fornecendo o conjunto de funções de forma:

$$N_{c,1} = 1 - \zeta \quad N_{c,2} = \zeta \quad (4.97)$$

Definida as funções de forma para os elementos de contornos, parte-se agora para avaliação da integral de linha presente no primeiro termo da equação (4.94):

$$\int_{\partial K} [N_c]^T \tilde{q}'' ds = \int_0^1 [N_c]^T \tilde{q}'' L d\zeta, \quad (4.98)$$

onde devido a mudança de variáveis para o sistema local  $ds = L d\zeta$ , sendo  $L$  o comprimento do elemento de contorno.

O fluxo térmico  $\tilde{q}''$  que atua sobre o elemento de contorno, pode ser aproximado pelo valor do fluxo térmico que age no ponto médio do elemento. Deste modo:

$$\tilde{q}''(x, y) \approx q'' = \tilde{q}'' \left( \frac{p_1 + p_2}{2} \right), \quad (4.99)$$

como  $q''$  é constante, por ser função dos valores nodais, ele pode sair da integral (4.98), resultando:

$$\int_0^1 [N_c]^T \tilde{q}'' L d\zeta = q'' L \int_0^1 [N_c]^T d\zeta = q'' \frac{L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (4.100)$$

Finalmente, a partir das equações (4.100) e (4.95) a determinação do vetor de fluxo térmico é possível, finalizando a discretização a nível elementar da equação de balanço de energia térmica através do método dos elementos finitos.

#### 4.3.6 Matrizes e Vetores Globais

As matrizes de capacidade e condutividade térmica, assim como o vetor de fluxo térmico, foram definidos em níveis elementares, isto é, são aplicáveis a um elemento finito isolado dentro do domínio computacional. Para aplicação do método sobre todo o domínio sólido é necessário a formulação das matrizes e vetores globais.

Para a montagem das matrizes e vetores globais utiliza-se da matriz de conectividade  $\mathbf{MC}$ , onde a partir dela as matrizes e vetores elementares são rearranjados e somados de acordo com a conectividade dos elementos:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^{nEF} \mathbf{T}_i^T \mathbf{C}^{(e)} \mathbf{T}, \quad (4.101)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{nEF} \mathbf{T}_i^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{T}, \quad (4.102)$$

$$\{Q\} = \sum_{i=1}^{nEF} \mathbf{T}_i^T \{Q^{(e)}\}, \quad (4.103)$$

onde  $\mathbf{T}_i$  é uma matriz auxiliar, construída a partir da matriz conectividade e da matriz identidade  $\mathbf{I}$  de tamanho  $nNO \times nNO$ :

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{I} (\mathbf{MC}(i, 1 : 3), 1 : nNO). \quad (4.104)$$

A partir das equações (4.101), (4.102) e (4.103) em conjunto com a equação (4.82), obtém-se a discretização a nível global da equação da energia térmica através do método dos elementos finitos:

$$\mathbf{C}\{\dot{T}\} + \mathbf{K}\{T\} = \{Q\}. \quad (4.105)$$

#### 4.3.7 Discretização Temporal

A solução da equação (4.105) demanda a discretização da derivada temporal do vetor de temperaturas. A discretização temporal é realizada de maneira similar a discretização das derivadas temporais do domínio fluido, porém, ao invés de empregar o método de Euler explícito, optou-se pela utilização do esquema implícito. Uma vez que, como o esquema explícito requer uma condição de estabilidade para o incremento temporal e este já foi definido para o domínio fluido, para o domínio sólido utiliza-se o esquema implícito, de modo que o passo de tempo do domínio fluido possa ser utilizado sem problemas de estabilidade numérica.

Assim, a equação (4.105) é discretizada da seguinte forma:

$$\mathbf{C}\left(\frac{\{T\}^{n+1} - \{T\}^n}{\Delta t}\right) + \mathbf{K}\{T\}^{n+1} = \{Q\}^{n+1}, \quad (4.106)$$

reagrupando os termos, chega-se no seguinte sistema linear:

$$\left(\frac{\mathbf{C}}{\Delta t} + \mathbf{K}\right)\{T\}^{n+1} = \frac{\mathbf{C}}{\Delta t}\{T\}^n + \{Q\}^{n+1}, \quad (4.107)$$

como o vetor  $\{Q\}^{n+1}$  é conhecido através das condições de contorno e da fonte interna de calor e  $\{T\}^n$  representa a temperatura no passo de tempo atual, que também é conhecida, a solução do sistema linear (4.107) fornece o campo de temperatura no meio sólido para o passo de tempo posterior.

Assim como a equação de Poisson discreta do subsistema fluido (4.29), o sistema linear resultante da discretização via método dos elementos finitos (4.107), também é resolvida através do método dos gradientes bi-conjugados estabilizados (VAN DER VORST, 1992).

### 4.4 Acoplamento Térmico

Definidos os modelos numéricos para os subsistemas fluido e sólido, parte-se agora para a modelagem da iteração térmica entre ambos, isto é, o acoplamento das soluções térmicas. Para o presente trabalho, utiliza-se a metodologia particionada de natureza forte, onde as soluções desacopladas de cada subsistema individual são combinadas por meio de processos iterativos a cada passo de tempo.

A solução acoplada, proveniente do método bloco-Gauss-Seidel não linear, é utilizada na imposição das condições de contorno térmicas dos modelos desacoplados no passo de tempo que se segue. Desse modo, visando a utilização dos métodos da múltipla imposição da força (MDF) e da múltipla imposição térmica (MDH) na fronteira imersa, onde utiliza-se da condição de contorno de primeira espécie, optou-se pela utilização do método FFTB para a comunicação entre os subdomínios.

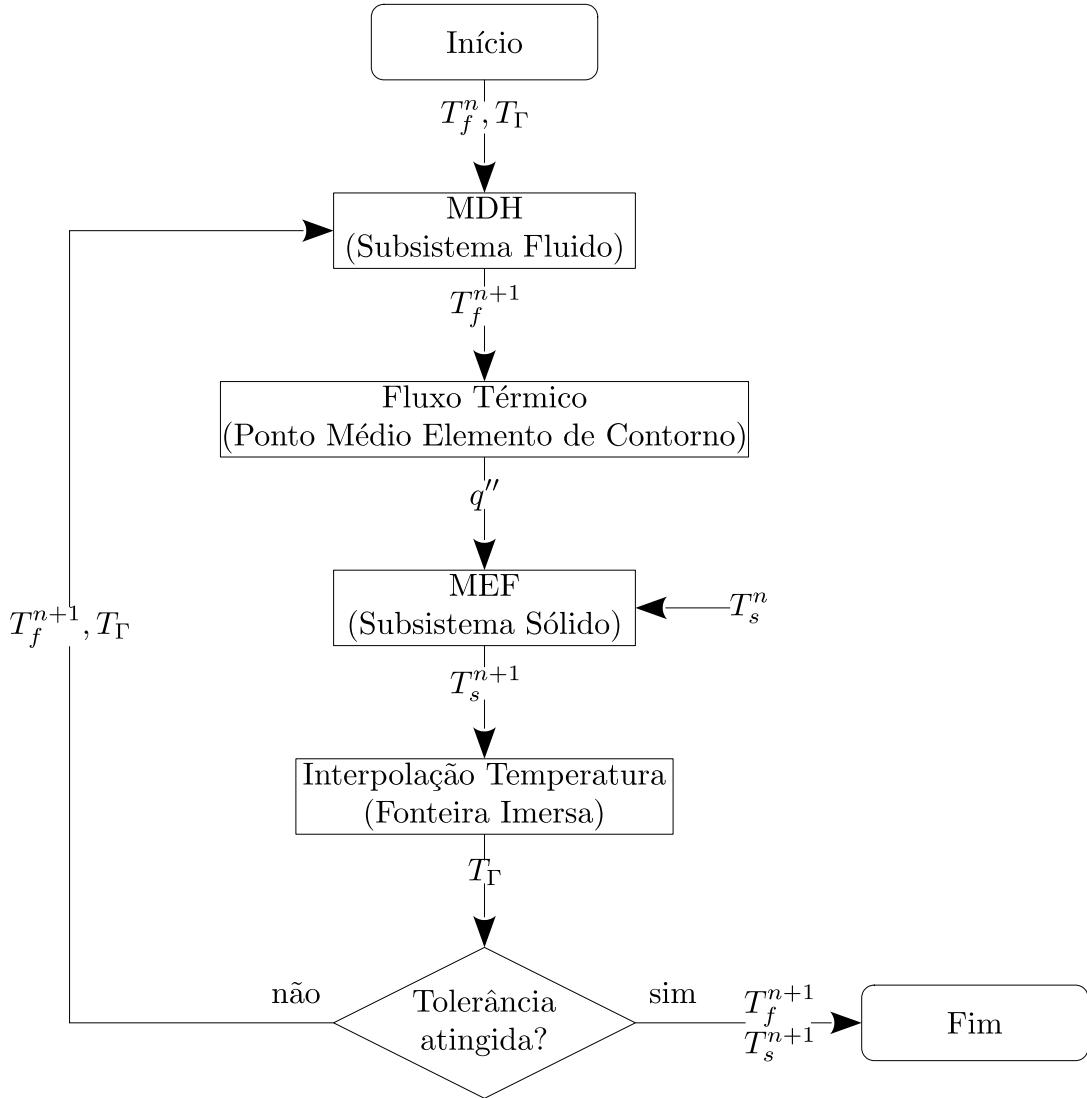
Para a solução do problema térmico acoplado, faz-se necessária a utilização de três malhas numéricas distintas. A malha euleriana, cartesiana estruturada, onde o modelo matemático para o subsistema fluido foi discretizado, a malha lagrangiana, formada por segmentos de retas que modelam a interface da geometria imersa, empregada na metodologia da fronteira imersa, e a malha lagrangiana triangular, empregada na modelagem do domínio sólido. A informação entre as malhas são transmitidas através de funções de interpolação e distribuição.

O acoplamento térmico via método bloco-Gauss-Seidel não linear é descrito a seguir:

1. Inicialmente com a distribuição de temperatura advinda de uma iteração anterior o campo de temperaturas do domínio fluido é resolvido através do método da múltipla imposição térmica (MDH);
2. A partir do campo de temperatura do domínio fluido, calcula-se o fluxo térmico no ponto médio dos elementos de contorno da malha lagrangiana do domínio sólido;
3. Com o fluxo térmico como condição de contorno, o campo de temperatura no domínio sólido é resolvido;
4. Com o novo campo de temperatura advindo do domínio sólido, o valor da temperatura é interpolada nos pontos da malha lagrangiana da fronteira imersa térmica;
5. Verifica-se se a diferença entre a nova distribuição de temperatura e a anterior é maior que a tolerância pré-estabelecida;
6. Em caso afirmativo repete-se os passos de 1 à 5, caso contrário avança-se para o próximo passo de tempo.

O fluxograma apresentado na figura 13 a seguir, ilustra o processo iterativo descrito anteriormente, que foi utilizado para o acoplamento térmico entre os subsistemas através do método bloco-Gauss-Seidel não linear.

Figura 13 – Fluxograma do processo de acoplamento térmico entre os subsistemas via método bloco-Gauss-Seidel não linear.



Fonte: Do próprio autor.

Na figura 13,  $T_f$  representa o campo de temperatura no subdomínio fluido,  $T_s$  é o campo de temperatura no subdomínio sólido e  $T_\Gamma$  a distribuição de temperatura na fronteira imersa.

## 5 Resultados

Concluída a modelagem matemática e definida a metodologia numérico-computacional, rotinas computacionais são então implementadas, a fim de se resolver computacionalmente o problema térmico conjugado. No presente trabalho foram desenvolvidos algoritmos computacionais na linguagem de programação Fortran 90, com o propósito de se obter soluções aproximadas para: escoamentos bidimensionais de fluidos newtonianos com ou sem presença de fronteira imersa, distribuição de temperatura em corpos sólidos bidimensionais e problemas térmicos conjugados bidimensionais.

As simulações computacionais de fenômenos físicos devem apresentar resultados condizentes com as observações e análises feitas a respeito do evento físico de interesse. Sendo assim, os algoritmos computacionais construídos para tal finalidade necessitam passar por um rigoroso processo de testes de verificação e validação. Segundo Silva e Villar (2010), no que tange a mecânica dos fluidos computacional, verificação e validação são conceitos distintos e independentes, dessa forma um não substitui o outro, porém ambos se complementam.

O processo de verificação, de acordo com Oberkampf, Trucano e Hirsch (2004), consiste na análise do algoritmo computacional implementado, a fim de verificar se, de fato, a precisão dos resultados computacionais apresentados é condizente com o que é esperado, tendo em vista o método numérico empregado. Portanto, a verificação é um procedimento puramente matemático, não necessitando nenhum realismo físico. Por outro lado, Oberkampf, Trucano e Hirsch caracterizam o procedimento de validação como uma avaliação da acurácia da solução computacional, ao ser comparada com dados de experimentações materiais. Desse modo, o realismo físico é uma fator essencial na validação, onde as leis físicas que regem o fenômeno observado devem ser satisfeitas.

Este capítulo é destinado a apresentação dos resultados de verificação dos códigos computacionais construídos separadamente para solução de cada subdomínio (fluido e sólido), assim como a validação dos mesmos e do acoplamento térmico necessário para solução dos problemas conjugados. Os testes de verificação são realizados por meio do método das soluções manufaturadas, afim de se analisar a taxa de convergência. Já para os testes de validação, simulações computacionais são conduzidas e os resultados são confrontados com os dados de experimentos materiais publicados na literatura.

## 5.1 Estudo de Ordem de Convergência

O estudo da ordem de convergência de um método numérico é baseado na hipótese de que a solução numérica, obtida através dos algoritmos computacionais implementados, possua uma expansão assintótica em potências do comprimento característico da malha computacional. Assim, define-se para o subsistema fluido uma malha euleriana, regular e uniforme, com  $h = \Delta x = \Delta y$ , e para o subsistema sólido a malha lagrangiana triangular uniforme, formada por triângulos isósceles bem orientados, cujos os lados de tamanhos iguais possuem dimensão  $h$ .

A hipótese de uma expansão assintótica sugere que, dado um problema matemático, cuja função escalar  $\phi(\vec{x}, t)$  seja sua solução analítica e  $\varphi(\vec{x}, t, h)$  a sua solução numérica baseada em uma malha de tamanho característico  $h$ , a solução numérica pode ser expandida assintoticamente do seguinte modo (RAMNATH, 2012):

$$\varphi(\vec{x}, t, h) = \phi(\vec{x}, t) + \lambda_\kappa(\vec{x}, t)h^\kappa + \lambda_{\kappa+1}(\vec{x}, t)h^{\kappa+1} + \dots, \quad (5.1)$$

sendo os coeficientes  $\lambda_i(\vec{x}, t)$  independentes do tamanho característico da malha computacional.

Caso a solução contínua  $\phi(\vec{x}, t)$  seja conhecida, então procede-se resolvendo numericamente o problema através da metodologia proposta obtendo-se a solução numérica  $\varphi(\vec{x}, t, h)$ , em seguida a solução numérica é novamente obtida, porém dessa vez para um meio do comprimento característico da malha computacional, ou seja, deve-se resolver  $\varphi(\vec{x}, t, h/2)$ . Assim, a solução numérica nas malhas de tamanhos característicos  $h$  e  $h/2$  são expandidas assintoticamente:

$$\varphi(\vec{x}, t, h) = \phi(\vec{x}, t) + \lambda_\kappa(\vec{x}, t)h^\kappa, \quad (5.2)$$

$$\varphi(\vec{x}, t, h/2) = \phi(\vec{x}, t) + \lambda_\kappa(\vec{x}, t)\frac{h^\kappa}{2^\kappa}, \quad (5.3)$$

onde ambas as equações foram truncadas no termo de maior ordem.

A partir das equações (5.2) e (5.3), pode-se comparar as soluções numéricas nas malhas de comprimentos característicos  $h$  e  $h/2$  com a solução contínua. Deste modo, fazendo a razão entre a norma da diferença relativa das soluções numéricas com a solução contínua, observa-se a seguinte relação:

$$r = \frac{\|\varphi(\vec{x}, t, h) - \phi(\vec{x}, t)\|}{\|\varphi(\vec{x}, t, h/2) - \phi(\vec{x}, t)\|} \approx 2^\kappa, \quad (5.4)$$

aplicando o logaritmo na base dois na equação (5.4), obtém-se a ordem de convergência  $\kappa$  do método numérico implementado:

$$k \approx \log_2 r. \quad (5.5)$$

Para a estimativa da ordem de convergência deve-se agora definir as normas. No subsistema fluido devido a utilização de células computacionais deslocadas, distinguem-se três conjuntos de pontos:

- $\Omega_f^{p,T}$ : Conjunto de pontos em que as propriedades escalares do escoamento são dispostas;
- $\Omega_f^u$ : Conjunto de pontos onde a componente horizontal do campo de velocidade do escoamento é calculada;
- $\Omega_f^v$ : Conjunto de pontos onde a componente vertical do campo de velocidade do escoamento é calculada.

Já no subsistema sólido apenas um conjunto de pontos é evidenciado:

- $\Omega_s^T$ : Conjunto de pontos onde a temperatura do corpo sólido é avaliada.

Dados os conjuntos de pontos onde propriedades de interesse são mensuradas, define-se então as normas para tais conjuntos. A norma euclidiana  $\|\cdot\|_2$  e a norma infinito  $\|\cdot\|_\infty$ , de uma função qualquer  $\phi$  definida em  $\Omega^\phi$  são calculadas respectivamente por:

$$\|\phi\|_2 = \sqrt{\frac{1}{|\Omega^\phi|} \sum_{i \in \Omega^\phi} |\phi_i|^2}, \quad (5.6)$$

$$\|\phi\|_\infty = \max_{i \in \Omega^\phi} |\phi_i|, \quad (5.7)$$

em que  $|\Omega^\phi|$  é a cardinalidade do conjunto  $\Omega^\phi$ , ou seja, representa a quantidade de pontos que pertencem a este conjunto.

### 5.1.1 Método das Soluções Manufaturadas

Para Roache (2019), o método das soluções manufaturadas (*Method of Manufactured Solutions* – *MMS*, em inglês) representa um procedimento genérico e metódico para a obtenção de soluções analíticas, para a verificação dos algoritmos computacionais implementados. Uma solução manufaturada, segundo Salari e Knupp (2000), é uma solução exata de uma equação diferencial parcial ou de um conjunto de equações diferenciais parciais, que são construídas ao se adicionar termos forçantes às equações. Tais termos forçantes são definidos afim de que a solução manufaturada proposta satisfaça a equação ou o conjunto de equações diferenciais. Assim, o conceito fundamental do método das soluções manufaturadas é a definição de termos forçantes para um sistema de equações diferenciais, dado um conjunto de soluções manufaturadas previamente estabelecido.

Para o subdomínio fluido, o conjunto de equações que modelam a dinâmica, o transporte e a transformação de energia, considerando escoamentos incompressíveis de fluidos newtonianos com a aproximação de Oberbeck-Boussinesq, são aqui novamente expressas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \beta(T - T_0) \vec{g} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V} + \vec{f}, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) T = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{\Phi}{\rho c_p} + f_T. \quad (5.10)$$

O subdomínio sólido tem sua modelagem composta apenas pela equação de balanço térmico, novamente reescrita:

$$\rho_s c_{p_s} \frac{\partial T}{\partial t} = k_s \nabla^2 T + \dot{q} + s_T, \quad (5.11)$$

onde  $\vec{f}$  e  $f_T$  são os termos forçantes para as equações de balanço de quantidade de movimento linear e balanço de energia térmica no subsistema fluido, respectivamente, e  $s_T$  é o termo forçante para a equação de balanço térmico no subsistema sólido.

Como o subsistema fluido é composto por um conjunto de equações diferenciais parciais, as soluções manufaturadas que podem ser utilizadas neste subsistema, devem satisfazer primeiramente a equação da continuidade (5.8), a qual não possui termos forçantes. Assim, o conjunto de soluções manufaturadas a serem utilizadas para o subsistema fluido se tornam limitadas pela condição de divergência nula, enquanto o subsistema sólido, que é formado apenas por uma equação diferencial parcial, possui uma maior variabilidade de escolhas por não apresentar restrições. Cada subsistema será tratado de forma individual, assim, não necessariamente a solução manufaturada utilizada para o subsistema fluido será também aplicada ao sólido.

Após a definição das soluções manufaturadas a serem utilizadas  $(u_e, v_e, p_e, T_e)$ , parte-se para a determinação dos termos forçantes presentes nas equações. Estes termos podem ser definidos através da aplicação das soluções propostas nas equações diferenciais. Desse modo, para o subsistema fluido obtém-se:

$$f_x = \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v_e \frac{\partial u_e}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x} + \beta(T_e - T_0) g_x - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} \right), \quad (5.12)$$

$$f_y = \frac{\partial v_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial v_e}{\partial x} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial y} + \beta(T_e - T_0) g_y - \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_e}{\partial y^2} \right), \quad (5.13)$$

$$f_T = \frac{\partial T_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial T_e}{\partial x} + v_e \frac{\partial T_e}{\partial y} - \frac{k}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_e}{\partial y^2} \right) - \frac{\Phi_e}{\rho c_p}. \quad (5.14)$$

Para o subsistema sólido têm-se:

$$s_T = \rho_s c_{p_s} \frac{\partial T_e}{\partial t} - k_s \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_e}{\partial y^2} \right) - \dot{q}. \quad (5.15)$$

Definidos os termos forçantes, procede-se com a metodologia numérica proposta para cada subdomínio, com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_e(x, y, 0), & v(x, y, 0) &= v_e(x, y, 0), \\ p(x, y, 0) &= p_e(x, y, 0), & T(x, y, 0) &= T_e(x, y, 0). \end{aligned}$$

### 5.1.2 Ordem de Convergência do Subsistema Fluido

Inicialmente será analisada a ordem de convergência do subsistema fluido. Para isto dividiu-se a verificação em duas etapas: uma desconsiderando efeitos térmicos e gravitacionais, para avaliação da dinâmica do escoamento e outra com estes inclusos.

#### 5.1.2.1 Vórtices de Taylor-Green

Na primeira verificação realizada buscou-se avaliar a implementação da dinâmica do escoamento desconsiderando efeitos gravitacionais e térmicos. Para isso, foram adotadas as soluções manufaturadas propostas por Taylor e Green (1937):

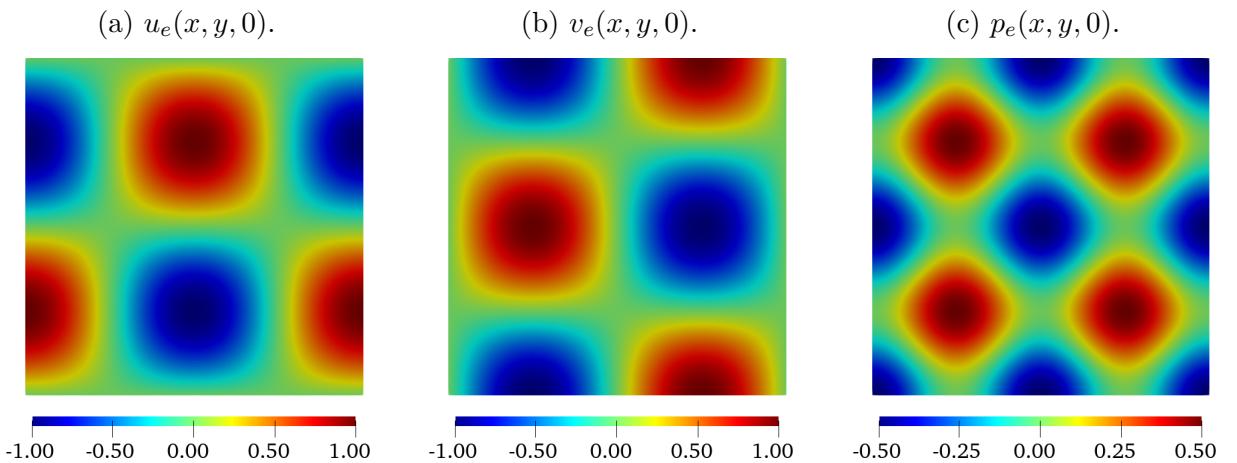
$$u_e(x, y, t) = \cos(x)\sin(y)e^{-\frac{2\mu t}{\rho}}, \quad (5.16)$$

$$v_e(x, y, t) = -\sin(x)\cos(y)e^{-\frac{2\mu t}{\rho}}, \quad (5.17)$$

$$p_e(x, y, t) = -\frac{\rho}{4}(\cos(2x) + \cos(2y))e^{-\frac{4\mu t}{\rho}}. \quad (5.18)$$

Uma vantagem apresentada por esse conjunto de soluções é que os termos fontes da equação de balanço de quantidade de movimento linear, (5.12) e (5.13), são nulos. A figura 14, a seguir, apresenta as componentes de velocidade e o campo de pressão da solução manufaturada proposta por Taylor e Green em um instante inicial  $t = 0$  s.

Figura 14 – Vórtices de Taylor-Green em  $t = 0$  s.



Fonte: Do próprio autor.

Para analisar numericamente a convergência do método, cinco malhas regulares e uniformes foram utilizadas ( $16 \times 16$ ,  $32 \times 32$ ,  $64 \times 64$ ,  $128 \times 128$  e  $256 \times 256$ ), definidas

em um domínio computacional quadrado  $\Omega_f = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . As propriedades do fluido são mantidas com valor unitário ( $\rho = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  e  $\mu = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ) e o tempo de simulação é fixo em 0,1 s.

As condições de contorno para as variáveis do escoamento são alternadas, de forma que, ou seja imposto Dirichlet para as velocidades e Neumann para a pressão, ou Neumann para a pressão e Dirichlet para as velocidades, totalizando assim em dez simulações realizadas. Os resultados obtidos através do estudo de ordem de convergência são apresentados nas tabelas 1 e 2 a seguir.

Tabela 1 – Condição de contorno de Dirichlet para as velocidades e Neumann para a pressão.

|     | Malha     | $\ \cdot\ _\infty$     | Razão  | Ordem  | $\ \cdot\ _2$          | Razão  | Ordem  |
|-----|-----------|------------------------|--------|--------|------------------------|--------|--------|
| $u$ | 16 × 16   | $2,4793 \cdot 10^{-3}$ | —      | —      | $1,2045 \cdot 10^{-3}$ | —      | —      |
|     | 32 × 32   | $6,2868 \cdot 10^{-4}$ | 3,9436 | 1,9795 | $2,9616 \cdot 10^{-4}$ | 4,0672 | 2,0240 |
|     | 64 × 64   | $1,5772 \cdot 10^{-4}$ | 3,9862 | 1,9950 | $7,3215 \cdot 10^{-5}$ | 4,0451 | 2,0162 |
|     | 128 × 128 | $3,9451 \cdot 10^{-5}$ | 3,9977 | 1,9992 | $1,8200 \cdot 10^{-5}$ | 4,0229 | 2,0082 |
|     | 256 × 256 | $9,8640 \cdot 10^{-6}$ | 3,9996 | 1,9998 | $4,5373 \cdot 10^{-6}$ | 4,0111 | 2,0040 |
| $v$ | 16 × 16   | $2,4793 \cdot 10^{-3}$ | —      | —      | $1,2045 \cdot 10^{-3}$ | —      | —      |
|     | 32 × 32   | $6,2868 \cdot 10^{-4}$ | 3,9436 | 1,9795 | $2,9616 \cdot 10^{-4}$ | 4,0672 | 2,0240 |
|     | 64 × 64   | $1,5772 \cdot 10^{-4}$ | 3,9862 | 1,9950 | $7,3215 \cdot 10^{-5}$ | 4,0451 | 2,0162 |
|     | 128 × 128 | $3,9451 \cdot 10^{-5}$ | 3,9977 | 1,9992 | $1,8200 \cdot 10^{-5}$ | 4,0229 | 2,0082 |
|     | 256 × 256 | $9,8640 \cdot 10^{-6}$ | 3,9996 | 1,9998 | $4,5373 \cdot 10^{-6}$ | 4,0111 | 2,0040 |
| $p$ | 16 × 16   | $2,1154 \cdot 10^{-2}$ | —      | —      | $7,8555 \cdot 10^{-3}$ | —      | —      |
|     | 32 × 32   | $6,1475 \cdot 10^{-3}$ | 3,4411 | 1,7829 | $2,1216 \cdot 10^{-3}$ | 3,7026 | 1,8885 |
|     | 64 × 64   | $1,6210 \cdot 10^{-3}$ | 3,7925 | 1,9231 | $5,3988 \cdot 10^{-4}$ | 3,9298 | 1,9744 |
|     | 128 × 128 | $4,1458 \cdot 10^{-4}$ | 3,9099 | 1,9671 | $1,3562 \cdot 10^{-4}$ | 3,9809 | 1,9931 |
|     | 256 × 256 | $1,0476 \cdot 10^{-4}$ | 3,9575 | 1,9846 | $3,3943 \cdot 10^{-5}$ | 3,9955 | 1,9984 |

Observa-se dos resultados expostos nas tabelas 1 e 2, que o erro numérico do método é reduzido em aproximadamente quatro vezes para uma redução de duas vezes no passo da malha computacional, tanto para as componentes do campo de velocidade quanto para o campo de pressão, independentemente da condição de contorno adotada. Essa característica é comumente observada em sistemas numéricos de segunda ordem. Portanto, assim como era esperado, o código computacional implementado atingiu segunda ordem de convergência.

Tabela 2 – Condição de contorno de Neumann para as velocidades e Dirichlet para a pressão.

| Malha | $\ \cdot\ _\infty$ | Razão                  | Ordem  | $\ \cdot\ _2$          | Razão  | Ordem  |
|-------|--------------------|------------------------|--------|------------------------|--------|--------|
| $u$   | $16 \times 16$     | $2,2095 \cdot 10^{-3}$ | —      | $9,6065 \cdot 10^{-4}$ | —      | —      |
|       | $32 \times 32$     | $5,7761 \cdot 10^{-4}$ | 3,8253 | $2,4089 \cdot 10^{-4}$ | 3,9879 | 1,9956 |
|       | $64 \times 64$     | $1,4711 \cdot 10^{-4}$ | 3,9264 | $6,0251 \cdot 10^{-5}$ | 3,9981 | 1,9993 |
|       | $128 \times 128$   | $3,6890 \cdot 10^{-5}$ | 3,9877 | $1,5034 \cdot 10^{-5}$ | 4,0076 | 2,0027 |
|       | $256 \times 256$   | $9,2339 \cdot 10^{-6}$ | 3,9951 | $3,7547 \cdot 10^{-6}$ | 4,0041 | 2,0015 |
| $v$   | $16 \times 16$     | $2,2095 \cdot 10^{-3}$ | —      | $9,6065 \cdot 10^{-4}$ | —      | —      |
|       | $32 \times 32$     | $5,7761 \cdot 10^{-4}$ | 3,8253 | $2,4089 \cdot 10^{-4}$ | 3,9879 | 1,9956 |
|       | $64 \times 64$     | $1,4711 \cdot 10^{-4}$ | 3,9264 | $6,0251 \cdot 10^{-5}$ | 3,9981 | 1,9993 |
|       | $128 \times 128$   | $3,6890 \cdot 10^{-5}$ | 3,9877 | $1,5034 \cdot 10^{-5}$ | 4,0076 | 2,0027 |
|       | $256 \times 256$   | $9,2339 \cdot 10^{-6}$ | 3,9951 | $3,7547 \cdot 10^{-6}$ | 4,0041 | 2,0015 |
| $p$   | $16 \times 16$     | $1,7161 \cdot 10^{-2}$ | —      | $1,4136 \cdot 10^{-2}$ | —      | —      |
|       | $32 \times 32$     | $4,4205 \cdot 10^{-3}$ | 3,8821 | $3,5897 \cdot 10^{-3}$ | 3,9379 | 1,9774 |
|       | $64 \times 64$     | $1,1121 \cdot 10^{-3}$ | 3,9748 | $9,0067 \cdot 10^{-4}$ | 3,9856 | 1,9948 |
|       | $128 \times 128$   | $2,7859 \cdot 10^{-4}$ | 3,9920 | $2,2557 \cdot 10^{-4}$ | 3,9928 | 1,9974 |
|       | $256 \times 256$   | $6,9679 \cdot 10^{-5}$ | 3,9982 | $5,6430 \cdot 10^{-5}$ | 3,9974 | 1,9991 |

### 5.1.2.2 Solução Manufaturada

Visando agora verificar a implementação térmica e o acoplamento com a dinâmica do escoamento, as seguintes soluções manufaturadas foram utilizadas:

$$u_e(x, y, t) = \sin(\pi(x + t)) \cos(\pi y), \quad (5.19)$$

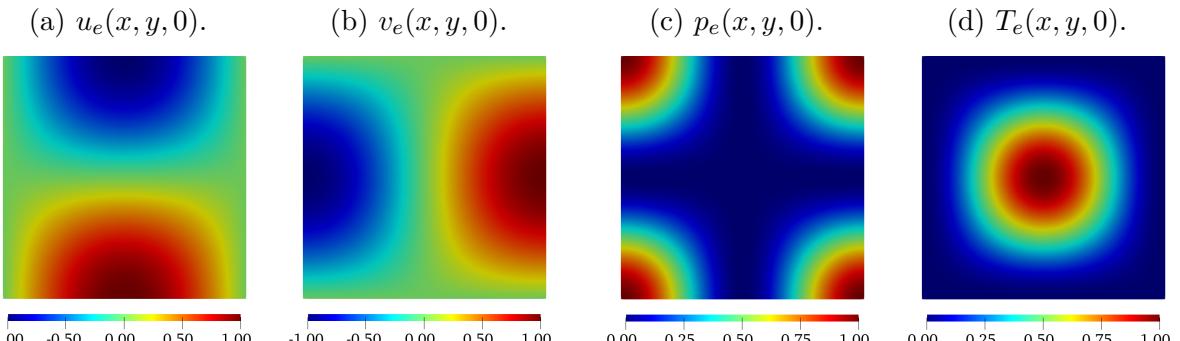
$$v_e(x, y, t) = -\cos(\pi(x + t)) \sin(\pi y), \quad (5.20)$$

$$p_e(x, y, t) = \cos^2(\pi(x + t)) \cos^2(\pi y), \quad (5.21)$$

$$T_e(x, y, t) = \sin^2(\pi(x + t)) \sin^2(\pi y), \quad (5.22)$$

a figura 15 apresenta as componentes do campo de velocidade, os campos de pressão e temperatura para o instante inicial  $t = 0$  s.

Figura 15 – Solução manufatura em  $t = 0$  s.



Fonte: Do próprio autor.

A convergência do método é analisada por meio da utilização de quatro malhas regulares e uniformes ( $16 \times 16$ ,  $32 \times 32$ ,  $64 \times 64$  e  $128 \times 128$ ), definidas em um domínio computacional quadrado  $\Omega_f = [0, 1] \times [0, 1]$ . As propriedades do fluido são mantidas com valor unitário ( $\rho = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ,  $\mu = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $k = 1 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$  e  $c_p = 1 \frac{\text{J}}{\text{K}}$ ), a temperatura de referência é também escolhida como a unidade ( $T_0 = 1 \text{ K}$ ), para o coeficiente de expansão térmica é utilizada a formulação para gases ideais ( $\beta = T_0^{-1} = 1 \text{ K}^{-1}$ ) e o tempo de simulação é fixo em 0,1 s. Os resultados são apresentados nas tabelas 3 a 6, adiante.

Tabela 3 – Condição de contorno de Dirichlet para as velocidades, Neumann para a pressão e Dirichlet para a temperatura.

|     | Malha            | $\ \cdot\ _\infty$     | Razão  | Ordem  | $\ \cdot\ _2$          | Razão  | Ordem  |
|-----|------------------|------------------------|--------|--------|------------------------|--------|--------|
| $u$ | $16 \times 16$   | $4,5220 \cdot 10^{-3}$ | — — —  | — — —  | $2,1282 \cdot 10^{-3}$ | — — —  | — — —  |
|     | $32 \times 32$   | $1,1637 \cdot 10^{-3}$ | 3,8860 | 1,9583 | $5,4044 \cdot 10^{-4}$ | 3,9379 | 1,9774 |
|     | $64 \times 64$   | $2,9604 \cdot 10^{-4}$ | 3,9309 | 1,9748 | $1,3615 \cdot 10^{-4}$ | 3,9695 | 1,9889 |
|     | $128 \times 128$ | $7,4648 \cdot 10^{-5}$ | 3,9658 | 1,9876 | $3,4163 \cdot 10^{-5}$ | 3,9853 | 1,9947 |
| $v$ | $16 \times 16$   | $4,7707 \cdot 10^{-3}$ | — — —  | — — —  | $2,1237 \cdot 10^{-3}$ | — — —  | — — —  |
|     | $32 \times 32$   | $1,1927 \cdot 10^{-3}$ | 4,0000 | 2,0000 | $5,3932 \cdot 10^{-4}$ | 3,9377 | 1,9774 |
|     | $64 \times 64$   | $2,9798 \cdot 10^{-4}$ | 4,0026 | 2,0009 | $1,3591 \cdot 10^{-4}$ | 3,9683 | 1,9885 |
|     | $128 \times 128$ | $7,4470 \cdot 10^{-5}$ | 4,0013 | 2,0005 | $3,4112 \cdot 10^{-5}$ | 3,9841 | 1,9943 |
| $p$ | $16 \times 16$   | $9,7516 \cdot 10^{-2}$ | — — —  | — — —  | $1,8860 \cdot 10^{-2}$ | — — —  | — — —  |
|     | $32 \times 32$   | $4,9183 \cdot 10^{-2}$ | 1,9827 | 0,9875 | $5,6332 \cdot 10^{-3}$ | 3,3480 | 1,7433 |
|     | $64 \times 64$   | $2,4669 \cdot 10^{-2}$ | 1,9937 | 0,9955 | $1,6077 \cdot 10^{-3}$ | 3,5040 | 1,8090 |
|     | $128 \times 128$ | $1,2349 \cdot 10^{-2}$ | 1,9976 | 0,9983 | $4,4648 \cdot 10^{-4}$ | 3,6008 | 1,8483 |
| $T$ | $16 \times 16$   | $8,6461 \cdot 10^{-3}$ | — — —  | — — —  | $4,0390 \cdot 10^{-3}$ | — — —  | — — —  |
|     | $32 \times 32$   | $2,2834 \cdot 10^{-3}$ | 3,7866 | 1,9209 | $1,0119 \cdot 10^{-3}$ | 3,9916 | 1,9970 |
|     | $64 \times 64$   | $5,8709 \cdot 10^{-4}$ | 3,8893 | 1,9595 | $2,5310 \cdot 10^{-4}$ | 3,9979 | 1,9992 |
|     | $128 \times 128$ | $1,4869 \cdot 10^{-4}$ | 3,9483 | 1,9812 | $6,3284 \cdot 10^{-5}$ | 3,9995 | 1,9998 |

Observa-se dos resultados apresentados nas tabelas precedentes que independentemente da condição de contorno utilizada os campos de velocidade e temperatura atingiram ordem dois de convergência numérica. Entretanto, o campo de pressão apresentou flutuações, quando resolvido com condições de contorno de Dirichlet ele apresenta ordem dois, porém quando resolvido com condições de contorno de Neumann a norma infinito tende a ordem um e a norma euclidiana tende a algum valor entre a ordem um e ordem dois. Este comportamento já era esperado como é mostrado nos trabalhos de Villar (2007) e Nós (2007).

Tabela 4 – Condição de contorno de Dirichlet para as velocidades, Neumann para a pressão e Neumann para a temperatura.

|     | Malha            | $\ \cdot\ _\infty$     | Razão  | Ordem  | $\ \cdot\ _2$          | Razão  | Ordem  |
|-----|------------------|------------------------|--------|--------|------------------------|--------|--------|
| $u$ | $16 \times 16$   | $4,5251 \cdot 10^{-3}$ | ---    | ---    | $2,1354 \cdot 10^{-3}$ | ---    | ---    |
|     | $32 \times 32$   | $1,1640 \cdot 10^{-3}$ | 3,8874 | 1,9588 | $5,4218 \cdot 10^{-4}$ | 3,9386 | 1,9777 |
|     | $64 \times 64$   | $2,9607 \cdot 10^{-4}$ | 3,9316 | 1,9751 | $1,3658 \cdot 10^{-4}$ | 3,9696 | 1,9890 |
|     | $128 \times 128$ | $7,4652 \cdot 10^{-5}$ | 3,9660 | 1,9877 | $3,4271 \cdot 10^{-5}$ | 3,9853 | 1,9947 |
| $v$ | $16 \times 16$   | $4,7954 \cdot 10^{-3}$ | ---    | ---    | $2,1315 \cdot 10^{-3}$ | ---    | ---    |
|     | $32 \times 32$   | $1,1983 \cdot 10^{-3}$ | 4,0018 | 2,0007 | $5,4120 \cdot 10^{-4}$ | 3,9385 | 1,9776 |
|     | $64 \times 64$   | $2,9930 \cdot 10^{-4}$ | 4,0037 | 2,0013 | $1,3637 \cdot 10^{-4}$ | 3,9685 | 1,9886 |
|     | $128 \times 128$ | $7,4809 \cdot 10^{-5}$ | 4,0008 | 2,0003 | $3,4229 \cdot 10^{-5}$ | 3,9842 | 1,9943 |
| $p$ | $16 \times 16$   | $9,6376 \cdot 10^{-2}$ | ---    | ---    | $1,7920 \cdot 10^{-2}$ | ---    | ---    |
|     | $32 \times 32$   | $4,8976 \cdot 10^{-2}$ | 1,9678 | 0,9766 | $5,4183 \cdot 10^{-3}$ | 3,3074 | 1,7257 |
|     | $64 \times 64$   | $2,4627 \cdot 10^{-2}$ | 1,9887 | 0,9918 | $1,5586 \cdot 10^{-3}$ | 3,4765 | 1,7976 |
|     | $128 \times 128$ | $1,2340 \cdot 10^{-2}$ | 1,9957 | 0,9969 | $4,3521 \cdot 10^{-4}$ | 3,5812 | 1,8404 |
| $T$ | $16 \times 16$   | $1,2336 \cdot 10^{-2}$ | ---    | ---    | $5,4710 \cdot 10^{-3}$ | ---    | ---    |
|     | $32 \times 32$   | $3,0867 \cdot 10^{-3}$ | 3,9967 | 1,9988 | $1,3638 \cdot 10^{-3}$ | 4,0116 | 2,0042 |
|     | $64 \times 64$   | $7,7219 \cdot 10^{-4}$ | 3,9973 | 1,9990 | $3,4068 \cdot 10^{-4}$ | 4,0032 | 2,0011 |
|     | $128 \times 128$ | $1,9300 \cdot 10^{-4}$ | 4,0011 | 2,0004 | $8,5152 \cdot 10^{-5}$ | 4,0009 | 2,0003 |

Tabela 5 – Condição de contorno de Neumann para as velocidades, Dirichlet para a pressão e Dirichlet para a temperatura.

|     | Malha            | $\ \cdot\ _\infty$     | Razão  | Ordem  | $\ \cdot\ _2$          | Razão  | Ordem  |
|-----|------------------|------------------------|--------|--------|------------------------|--------|--------|
| $u$ | $16 \times 16$   | $4,4329 \cdot 10^{-3}$ | ---    | ---    | $1,3336 \cdot 10^{-3}$ | ---    | ---    |
|     | $32 \times 32$   | $1,1166 \cdot 10^{-3}$ | 3,9699 | 1,9891 | $3,1904 \cdot 10^{-4}$ | 4,1801 | 2,0635 |
|     | $64 \times 64$   | $2,7981 \cdot 10^{-4}$ | 3,9906 | 1,9966 | $7,7979 \cdot 10^{-5}$ | 4,0913 | 2,0326 |
|     | $128 \times 128$ | $7,0006 \cdot 10^{-5}$ | 3,9970 | 1,9989 | $1,9274 \cdot 10^{-5}$ | 4,0458 | 2,0164 |
| $v$ | $16 \times 16$   | $3,8381 \cdot 10^{-3}$ | ---    | ---    | $1,2718 \cdot 10^{-3}$ | ---    | ---    |
|     | $32 \times 32$   | $9,6558 \cdot 10^{-4}$ | 3,9749 | 1,9909 | $3,0357 \cdot 10^{-4}$ | 4,1895 | 2,0668 |
|     | $64 \times 64$   | $2,4191 \cdot 10^{-4}$ | 3,9915 | 1,9969 | $7,4122 \cdot 10^{-5}$ | 4,0956 | 2,0341 |
|     | $128 \times 128$ | $6,0521 \cdot 10^{-5}$ | 3,9971 | 1,9990 | $1,8312 \cdot 10^{-5}$ | 4,0478 | 2,0171 |
| $p$ | $16 \times 16$   | $1,2001 \cdot 10^{-2}$ | ---    | ---    | $6,0313 \cdot 10^{-3}$ | ---    | ---    |
|     | $32 \times 32$   | $3,0778 \cdot 10^{-3}$ | 3,8990 | 1,9631 | $1,5093 \cdot 10^{-3}$ | 3,9961 | 1,9986 |
|     | $64 \times 64$   | $7,7800 \cdot 10^{-4}$ | 3,9561 | 1,9841 | $3,7743 \cdot 10^{-4}$ | 3,9989 | 1,9996 |
|     | $128 \times 128$ | $1,9570 \cdot 10^{-4}$ | 3,9756 | 1,9912 | $9,4365 \cdot 10^{-5}$ | 3,9997 | 1,9999 |
| $T$ | $16 \times 16$   | $8,5608 \cdot 10^{-3}$ | ---    | ---    | $3,8062 \cdot 10^{-3}$ | ---    | ---    |
|     | $32 \times 32$   | $2,2729 \cdot 10^{-3}$ | 3,7665 | 1,9132 | $9,5489 \cdot 10^{-4}$ | 3,9860 | 1,9949 |
|     | $64 \times 64$   | $5,8577 \cdot 10^{-4}$ | 3,8801 | 1,9561 | $2,3894 \cdot 10^{-4}$ | 3,9964 | 1,9987 |
|     | $128 \times 128$ | $1,4853 \cdot 10^{-4}$ | 3,9438 | 1,9796 | $5,9748 \cdot 10^{-5}$ | 3,9991 | 1,9997 |

Tabela 6 – Condição de contorno de Neumann para as velocidades, Dirichlet para a pressão e Neumann para a temperatura.

|     | Malha            | $\ \cdot\ _\infty$     | Razão  | Ordem  | $\ \cdot\ _2$          | Razão  | Ordem  |
|-----|------------------|------------------------|--------|--------|------------------------|--------|--------|
| $u$ | $16 \times 16$   | $4,5208 \cdot 10^{-3}$ | —      | —      | $1,3728 \cdot 10^{-3}$ | —      | —      |
|     | $32 \times 32$   | $1,1391 \cdot 10^{-3}$ | 3,9687 | 1,9887 | $3,2946 \cdot 10^{-4}$ | 4,1668 | 2,0589 |
|     | $64 \times 64$   | $2,8546 \cdot 10^{-4}$ | 3,9905 | 1,9966 | $8,0658 \cdot 10^{-5}$ | 4,0847 | 2,0302 |
|     | $128 \times 128$ | $7,1416 \cdot 10^{-5}$ | 3,9972 | 1,9990 | $1,9952 \cdot 10^{-5}$ | 4,0425 | 2,0153 |
| $v$ | $16 \times 16$   | $4,2536 \cdot 10^{-3}$ | —      | —      | $1,3154 \cdot 10^{-3}$ | —      | —      |
|     | $32 \times 32$   | $1,0701 \cdot 10^{-3}$ | 3,9751 | 1,9910 | $3,1452 \cdot 10^{-4}$ | 4,1824 | 2,0643 |
|     | $64 \times 64$   | $2,6805 \cdot 10^{-4}$ | 3,9919 | 1,9971 | $7,6851 \cdot 10^{-5}$ | 4,0925 | 2,0330 |
|     | $128 \times 128$ | $6,7057 \cdot 10^{-5}$ | 3,9974 | 1,9991 | $1,8992 \cdot 10^{-5}$ | 4,0464 | 2,0167 |
| $p$ | $16 \times 16$   | $1,1965 \cdot 10^{-2}$ | —      | —      | $5,9425 \cdot 10^{-3}$ | —      | —      |
|     | $32 \times 32$   | $3,0590 \cdot 10^{-3}$ | 3,9112 | 1,9676 | $1,4865 \cdot 10^{-3}$ | 3,9976 | 1,9991 |
|     | $64 \times 64$   | $7,7272 \cdot 10^{-4}$ | 3,9588 | 1,9851 | $3,7169 \cdot 10^{-4}$ | 3,9993 | 1,9998 |
|     | $128 \times 128$ | $1,9422 \cdot 10^{-4}$ | 3,9785 | 1,9922 | $9,2928 \cdot 10^{-5}$ | 3,9998 | 1,9999 |
| $T$ | $16 \times 16$   | $1,2877 \cdot 10^{-2}$ | —      | —      | $6,4580 \cdot 10^{-3}$ | —      | —      |
|     | $32 \times 32$   | $3,2443 \cdot 10^{-3}$ | 3,9691 | 1,9888 | $1,6142 \cdot 10^{-3}$ | 4,0008 | 2,0003 |
|     | $64 \times 64$   | $8,1223 \cdot 10^{-4}$ | 3,9943 | 1,9979 | $4,0353 \cdot 10^{-4}$ | 4,0001 | 2,0000 |
|     | $128 \times 128$ | $2,0309 \cdot 10^{-4}$ | 3,9995 | 1,9998 | $1,0088 \cdot 10^{-4}$ | 4,0000 | 2,0000 |

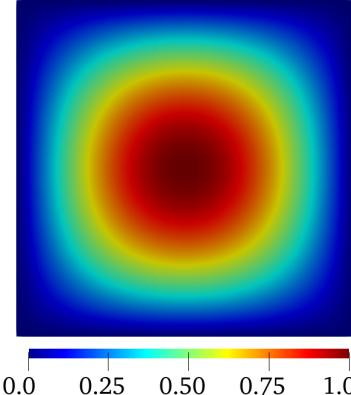
### 5.1.3 Ordem de Convergência do Subsistema Sólido

Para o subsistema sólido, por ser modelado apenas por uma equação diferencial parcial, a análise de ordem de convergência é realizada considerando-se apenas a seguinte solução manufaturada proposta para o campo de temperatura:

$$T_e(x, y, t) = \text{sen}(\pi(x - t))\text{sen}(\pi y), \quad (5.23)$$

a figura 16 a seguir, apresenta o campo de temperatura para a solução manufaturada proposta em  $t = 0$  s.

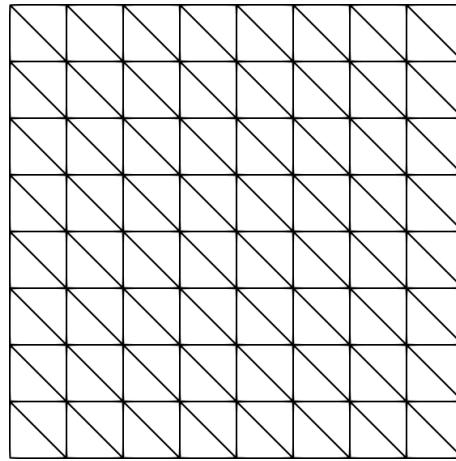
Figura 16 – Solução manufatura para o subdomínio sólido em  $t = 0$  s.



Fonte: Do próprio autor.

A convergência do método numérico é analisada pela utilização de cinco malhas formadas por elementos finitos triangulares regulares e uniformes ( $2 \times 8 \times 8$ ,  $2 \times 16 \times 16$ ,  $2 \times 32 \times 32$ ,  $2 \times 64 \times 64$  e  $2 \times 128 \times 128$ ), conforme esquematizado na figura 17 adiante.

Figura 17 – Representação de uma malha  $2 \times 8 \times 8$  formada por elementos finitos triangulares regulares e uniformes.



Fonte: Do próprio autor.

As malhas numéricas são definidas em um domínio computacional quadrado  $\Omega_s = [0, 1] \times [0, 1]$ , onde as propriedades físicas do sólido admitem valor unitário ( $\rho_s = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ,  $k_s = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$  e  $c_{ps} = 1 \frac{\text{J}}{\text{K}}$ ) e a fonte interna de energia térmica é definida como nula ( $\dot{q} = 0 \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$ ). São adotadas condições de contorno de Dirichlet em todas as fronteiras e o tempo de simulação é fixo em 0,1 s, sendo o passo de tempo proporcional ao quadrado do comprimento característico dos elementos triangulares,  $\Delta t = h^2$ . Os resultados do teste de verificação são expostos na tabela 7 a seguir.

Tabela 7 – Análise de ordem de convergência para o subsistema sólido.

| Malha                     | $\ \cdot\ _\infty$     | Razão  | Ordem  | $\ \cdot\ _2$          | Razão  | Ordem  |
|---------------------------|------------------------|--------|--------|------------------------|--------|--------|
| $2 \times 8 \times 8$     | $3,4150 \cdot 10^{-2}$ | —      | —      | $1,5426 \cdot 10^{-2}$ | —      | —      |
| $2 \times 16 \times 16$   | $8,9145 \cdot 10^{-3}$ | 3,8309 | 1,9377 | $4,2052 \cdot 10^{-3}$ | 3,6683 | 1,8751 |
| $2 \times 32 \times 32$   | $2,2516 \cdot 10^{-3}$ | 3,9591 | 1,9852 | $1,0942 \cdot 10^{-3}$ | 3,8431 | 1,9423 |
| $2 \times 64 \times 64$   | $5,6470 \cdot 10^{-4}$ | 3,9873 | 1,9954 | $2,7830 \cdot 10^{-4}$ | 3,9319 | 1,9752 |
| $2 \times 128 \times 128$ | $1,4126 \cdot 10^{-4}$ | 3,9975 | 1,9991 | $7,0159 \cdot 10^{-5}$ | 3,9667 | 1,9879 |

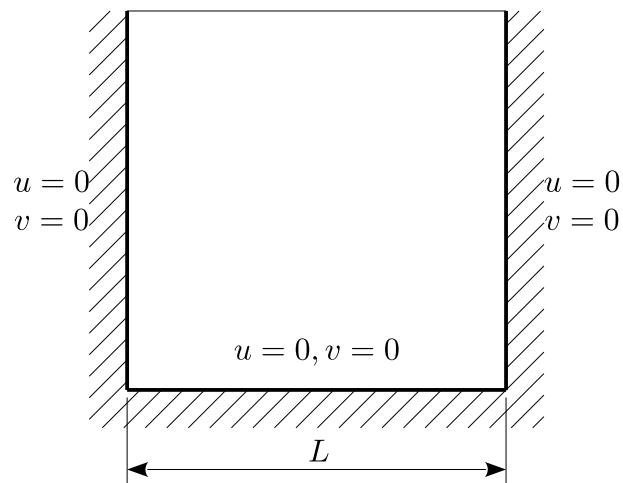
Similarmente ao subsistema fluido nota-se que, ao se refinar a malha lagrangiana em duas vezes o erro numérico tende a apresentar uma redução de quatro vezes em seu valor. Assim como era esperado, o algoritmo computacional implementado para o subdomínio sólido atingiu ordem de convergência dois.

## 5.2 Cavidade com Tampa Deslizante

A figura 18 apresenta um esquema simplificado de uma cavidade e suas condições de contorno, sendo nas paredes laterais e inferior imposta a condição de não deslizamento. Na parede superior é também imposta a condição de não deslizamento, porém, com uma condição de velocidade horizontal constante  $U_\infty$  e velocidade nula na componente vertical.

Figura 18 – Representação esquemática de uma cavidade com tampa deslizante.

$$u = U_\infty, v = 0$$



Fonte: Do próprio autor.

No presente trabalho é analisado o escoamento em uma cavidade quadrada, com aresta de comprimento unitário ( $L = 1$  m). Inicialmente é realizada uma verificação de independência de malha, isto é, diferentes malhas computacionais são adotadas, a fim de verificar se os resultados obtidos se apresentam, de forma geral, independentes da malha de cálculo. Na tabela 8 a seguir, apresenta-se os valores máximos e mínimos da componente horizontal de velocidade na linha de simetria vertical e da componente vertical na linha de simetria horizontal, para quatro malhas computacionais distintas. O número de Reynolds utilizado foi 100 e o tempo de simulação foi de 120 s, tempo necessário para se atingir o regime permanente do escoamento.

Tabela 8 – Análise de independência de malha em uma cavidade quadrada com tampa deslizante.

| Malha            | $\max \{u(L/2, x)\}$ | $\min \{u(L/2, x)\}$ | $\max \{v(y, L/2)\}$ | $\min \{v(y, L/2)\}$ |
|------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $50 \times 50$   | 0, 9331709214        | -0, 2109220728       | 0, 1764599158        | -0, 2503941522       |
| $100 \times 100$ | 0, 9670380829        | -0, 2133044143       | 0, 1788343239        | -0, 2528251188       |
| $200 \times 200$ | 0, 9835723673        | -0, 2138661807       | 0, 1793925434        | -0, 2535667060       |
| $300 \times 300$ | 0, 9890547039        | -0, 2139646893       | 0, 1794897142        | -0, 2537011458       |

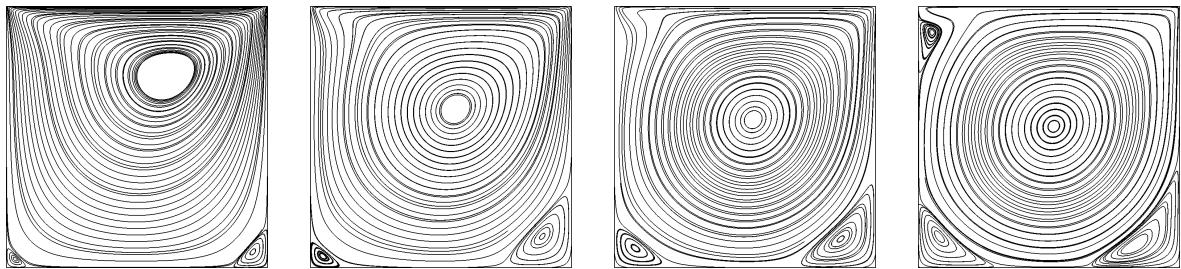
Nota-se pelos resultados apresentados na tabela 8 que, a partir de um determinado

refinamento de malha as variações sofridas pelo campo de velocidade são pequenas o suficiente para serem desprezadas, de modo que, os resultados numéricos obtidos através do algoritmo computacional implementado não tem grandes variações de precisão em virtude da malha numérica utilizada. Desse modo, conclui-se que o sistema é numericamente independente da malha de cálculo.

Simulações são realizadas para quatro valores distintos do número de Reynolds: 100, 400, 1000 e 3200. A validação é conduzida por meio da comparação entre resultados obtidos através das simulações computacionais, e os resultados em regime permanente apresentados por Ghia, Ghia e Shin (1982). As figuras 19 e 20 a seguir, mostram as linhas de corrente do escoamento obtidas através na metodologia apresentada e as obtidas por Ghia, Ghia e Shin em seu trabalho, respectivamente.

Figura 19 – Linhas de corrente para diferentes valores do número de Reynolds em uma cavidade quadrada com tampa deslizante.

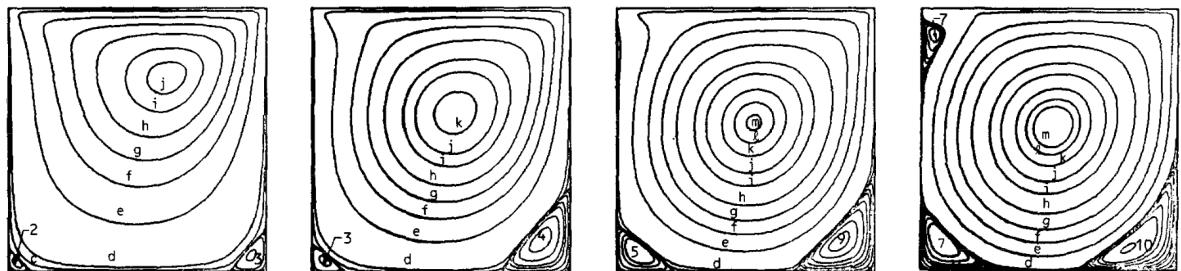
(a)  $Re = 100$ . (b)  $Re = 400$ . (c)  $Re = 1000$ . (d)  $Re = 3200$ .



Fonte: Do próprio autor.

Figura 20 – Linhas de corrente para diferentes valores do número de Reynolds em uma cavidade quadrada com tampa deslizante apresentadas por Ghia, Ghia e Shin (1982).

(a)  $Re = 100$ . (b)  $Re = 400$ . (c)  $Re = 1000$ . (d)  $Re = 3200$ .



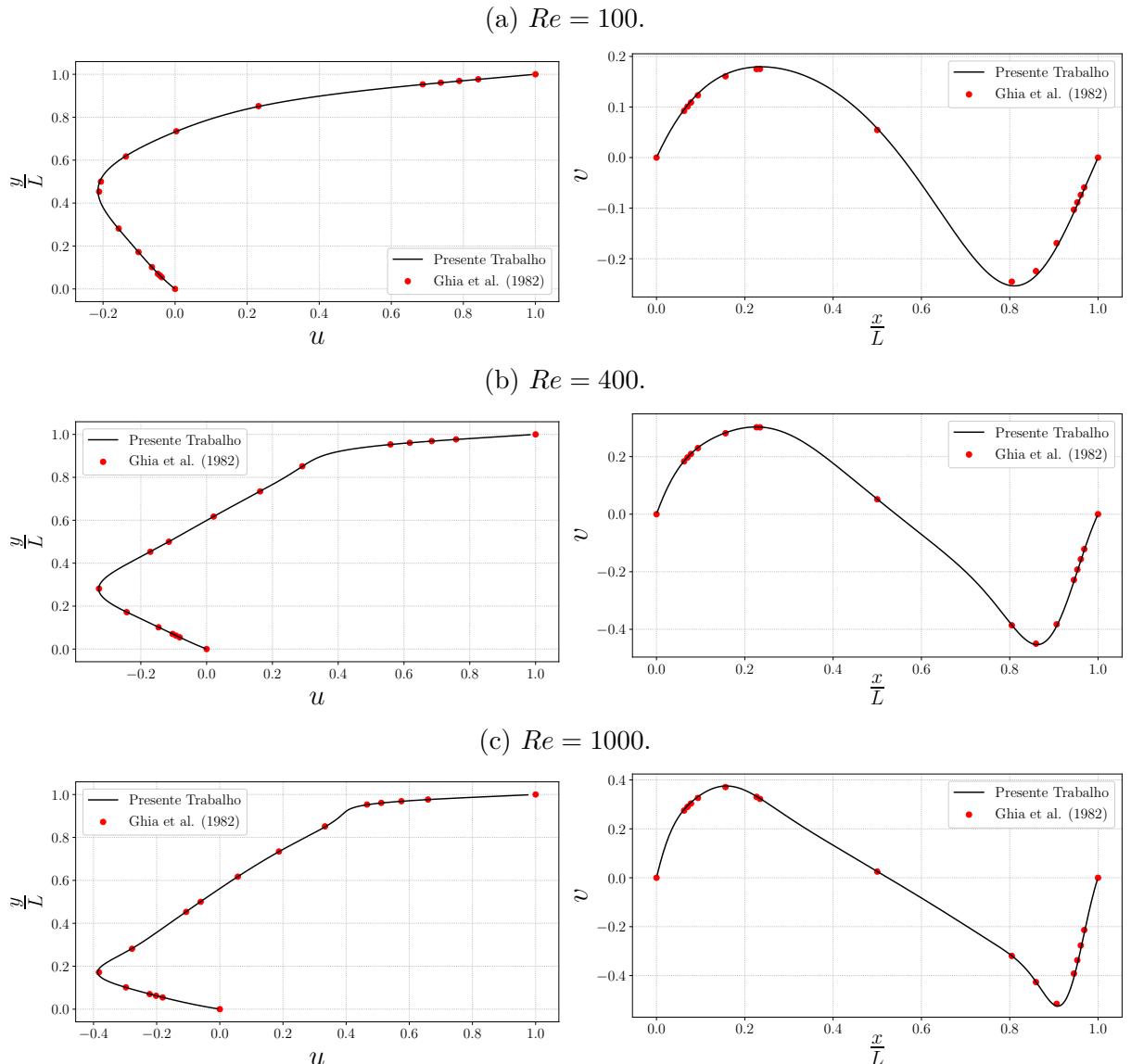
Fonte: Ghia, Ghia e Shin (1982).

Qualitativamente os resultados obtidos se mostram coerentes quando comparados com a literatura. Porém, é conveniente também se realizar uma análise quantitativa dos resultados. Assim, para cada uma das simulações realizadas o perfil de velocidade horizontal

na linha de simetria vertical e o perfil de velocidade vertical na linha de simetria horizontal são comparados com os dados numéricos fornecidos por Ghia, Ghia e Shin (1982).

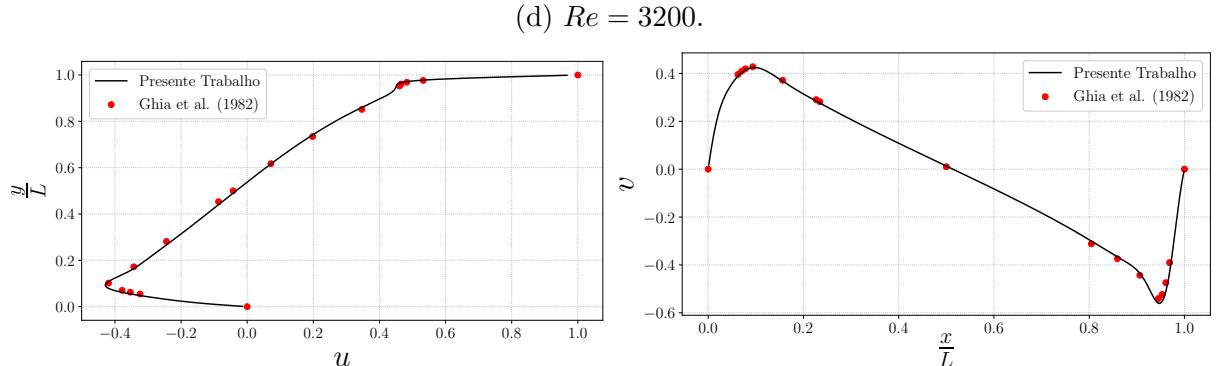
Para realização das simulações numéricas utilizou-se as seguintes malhas computacionais:  $300 \times 300$  para os números de Reynolds 100, 400 e 1000; e  $400 \times 400$  para o número de Reynolds 3200. Para todas as simulações realizadas, o tempo final foi estipulado em 120 s, tempo suficiente para que os escoamentos atingissem o regime permanente. Os resultados obtidos são apresentados na figura 21 a seguir.

Figura 21 – Comparação dos perfis de velocidade horizontal e vertical nas linhas de simetria de uma cavidade quadrada com tampa deslizante.



Fonte: Do próprio autor.

Figura 21 – Comparação dos perfis de velocidade horizontal e vertical nas linhas de simetria de uma cavidade quadrada com tampa deslizante (continuação).



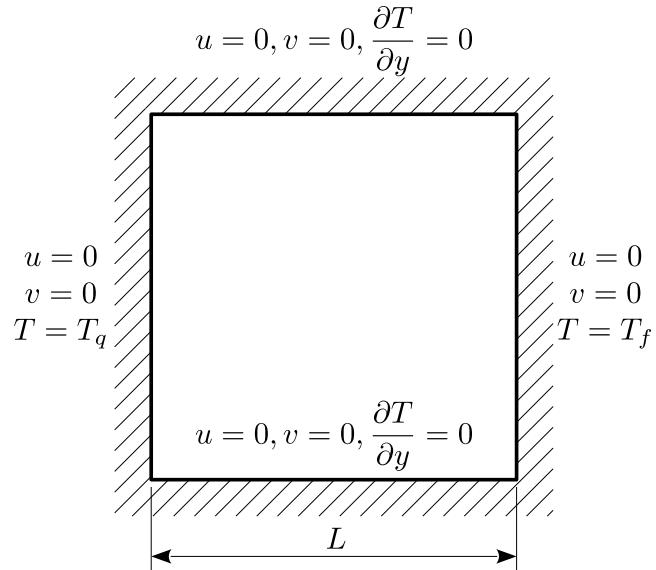
Fonte: Do próprio autor.

Observa-se por meios dos gráficos da figura 21 que os resultados obtidos por meio das simulações numéricas-computacionais conduzidas estão em conformidade com os publicados por Ghia, Ghia e Shin (1982) em seus estudos.

### 5.3 Cavidade Diferencialmente Aquecida

Para avaliar o acoplamento entre os efeitos térmicos e os dinâmicos, simulações foram realizadas em uma cavidade quadrada de aresta unitária ( $L = 1$  m) diferencialmente aquecida, de modo que os efeitos de convecção natural são avaliados. A figura 22 adiante, apresenta uma representação esquemática da cavidade com suas condições de contorno.

Figura 22 – Representação esquemática de uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida.



Fonte: Do próprio autor.

Nas simulações conduzidas, em todas as paredes da cavidade são impostas a condição de não deslizamento, as paredes superior e inferior são termicamente isoladas, enquanto a parede esquerda é mantida aquecida ( $T_q$ ) e a direita resfriada ( $T_f$ ), a fim de se induzir um gradiente térmico no interior da cavidade. O fluído inicialmente encontra-se em repouso, com uma temperatura  $T = (T_q + T_f)/2$ .

A análise de independência de malha é realizada para três malhas computacionais distintas ( $50 \times 50$ ,  $100 \times 100$  e  $200 \times 200$ ), sendo as simulações conduzidas com um número de Prandtl fixo em 0,71, onde avaliou-se quatro valores do adimensional de Rayleigh:  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  e  $10^6$ . Ao se atingir o regime permanente do escoamento, o valor do número de Nusselt médio foi avaliado na parede esquerda e comparado para cada uma das malhas utilizadas. Os resultados são dispostos na tabela 9 adiante.

Tabela 9 – Avaliação do número de Nusselt médio na parede esquerda de uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida em função da malha computacional.

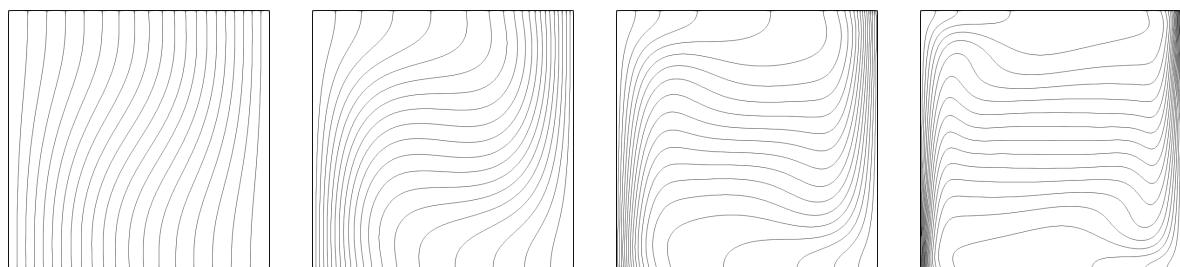
| Malha            | $Ra$     |          |          |          |
|------------------|----------|----------|----------|----------|
|                  | $10^3$   | $10^4$   | $10^5$   | $10^6$   |
| $50 \times 50$   | 1,118664 | 2,256001 | 4,606081 | 9,411657 |
| $100 \times 100$ | 1,118008 | 2,247609 | 4,542574 | 8,966175 |
| $200 \times 200$ | 1,117844 | 2,245514 | 4,526860 | 8,860085 |

Observa-se que, de fato, existe pouca variação do valor do número de Nusselt em função da malha computacional adotada, e que este tende a convergir para um valor fixo com o refinamento da malha.

A fim de se avaliar os resultados computacionais obtidos, as isotermas para os quatro regimes de escoamento, simuladas com a malha mais fina, são comparadas com os resultados apresentados por Duarte (2018). As figuras 23 e 24 a seguir, apresentam as isotermas obtidas no presente trabalho e as apresentadas por Duarte, respectivamente, em ambos os resultados o número de Prandtl se manteve em 0,71.

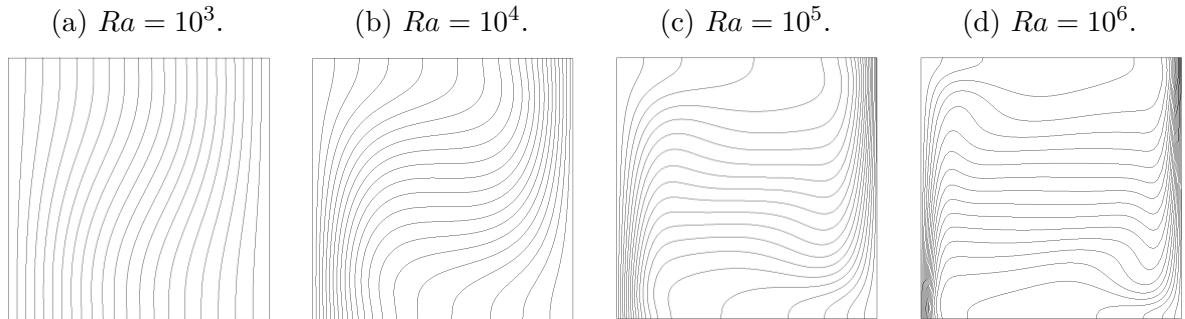
Figura 23 – Isotermas para diferentes números de Rayleigh.

(a)  $Ra = 10^3$ . (b)  $Ra = 10^4$ . (c)  $Ra = 10^5$ . (d)  $Ra = 10^6$ .



Fonte: Do próprio autor.

Figura 24 – Isotermas para diferentes números de Rayleigh apresentadas por Duarte (2018).



Fonte: Duarte (2018).

O tempo de simulação foi de 120 s, tempo necessário para se assegurar que o regime permanente fosse atingido em todos os casos simulados. Qualitativamente os resultados obtidos estão em concordância com a literatura. Uma análise quantitativa é empregada por meio da comparação do número de Nusselt médio na parede esquerda da cavidade, desta forma, o número de Nusselt foi calculado e comparado com os trabalhos de Duarte (2018), Gangawane, Bharti e Kumar (2015), Wang et al. (2013) e Davis (1983). Os resultados são expostos na tabela 10 a seguir, onde observa-se bastante conformidade entre os resultados computacionais obtidos e os apresentados pela literatura.

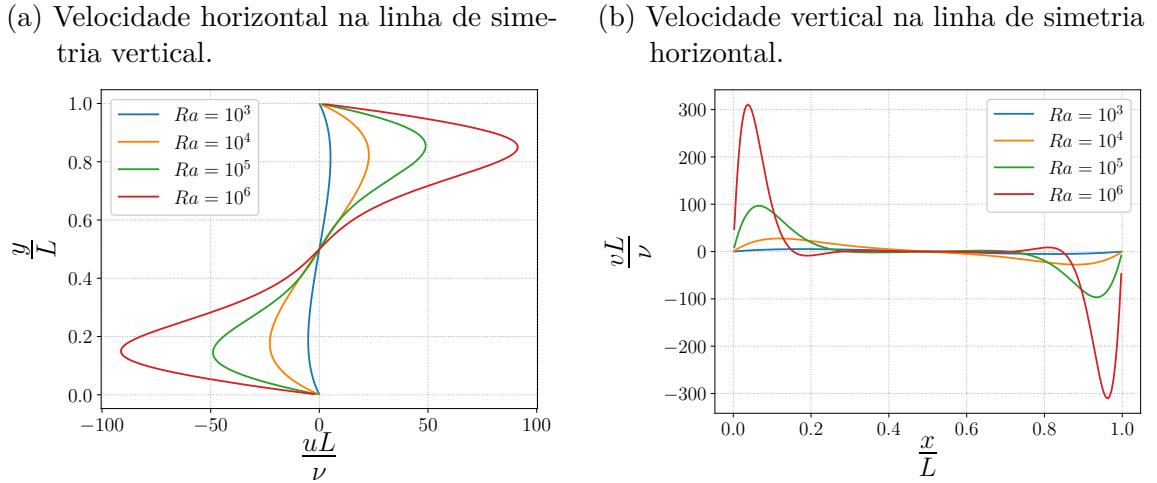
Tabela 10 – Comparaçāo do valor do númerāo de Nusselt médio na parede aquecida de uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida para diferentes númerāos de Rayleigh.

| Rayleigh                         | $10^3$ | $10^4$ | $10^5$ | $10^6$ |
|----------------------------------|--------|--------|--------|--------|
| Duarte (2018)                    | 1,072  | 2,090  | 4,390  | 8,901  |
| Gangawane, Bharti e Kumar (2015) | —      | 2,257  | 4,570  | 8,816  |
| Wang et al. (2013)               | 1,118  | 2,245  | 4,522  | 8,827  |
| Davis (1983)                     | 1,118  | 2,243  | 4,519  | 8,800  |
| Presente trabalho                | 1,118  | 2,246  | 4,527  | 8,860  |

Analogamente ao caso da cavidade com tampa deslizante, as componentes horizontal e vertical do campo de velocidade nas linhas de simetria vertical e horizontal, respectivamente, assim como a temperatura são analisados. Os resultados são apresentados nas figuras 25 e 26, a seguir.

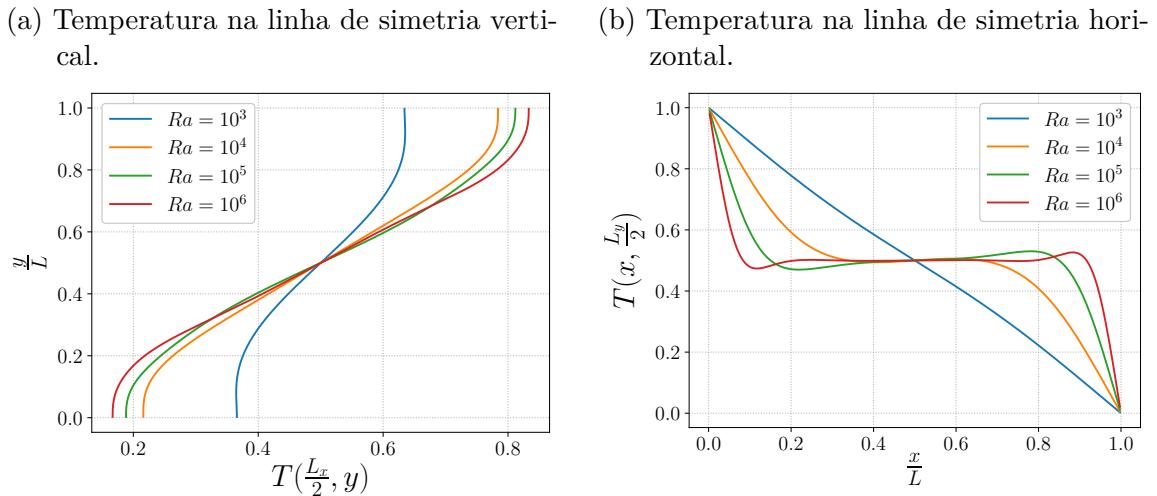
Observa-se que com o aumento do número de Rayleigh, os efeitos térmicos passam a influenciar mais ativamente o balanço de quantidade de movimento linear, resultando em maiores velocidades no escoamento do fluido no interior na cavidade, como é observado na figura 25 pelo aumento da amplitude da velocidade adimensional. Maiores velocidades do escoamento também favorecem o transporte de energia térmica por advecção, assim a

Figura 25 – Perfis de velocidade nas linhas de simetrias da cavidade quadrada diferencialmente aquecida.



Fonte: Do próprio autor.

Figura 26 – Perfis de temperatura nas linhas de simetrias da cavidade quadrada diferencialmente aquecida.



Fonte: Do próprio autor.

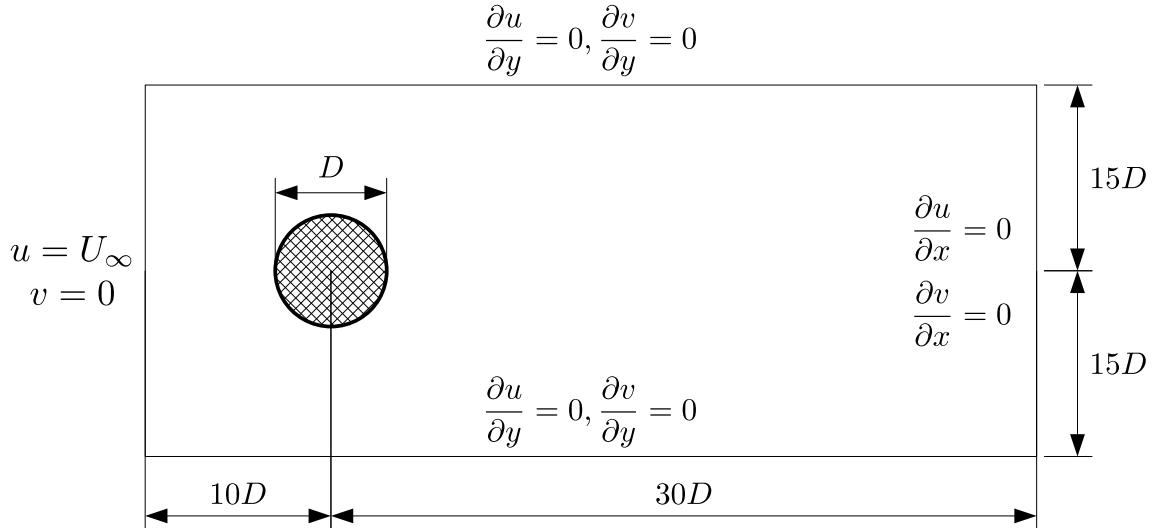
temperatura tenta a se homogeneizar mais rapidamente ao se distanciar da parede, como é visto pelos gráficos da figura 26 e nas isotermas 23.

## 5.4 Escoamento Sobre um Cilindro Circular

Um problema bastante clássico do ponto de vista da mecânica dos fluidos computacional é o escoamento bidimensional sobre um cilindro circular. Por ser um problema amplamente estudado e documentado por diversos autores, este é um excelente problema a ser utilizado para a validação da implementação do método da fronteira imersa dinâmica.

A figura 27 exibe um esquema simplificado do escoamento sobre um cilindro circular de diâmetro  $D$ , com as dimensões do domínio computacional e suas respectivas condições de contorno.

Figura 27 – Representação esquemática do escoamento sobre um cilindro circular.



Fonte: Do próprio autor.

No presente trabalho é considerada uma injeção uniforme de fluido na entrada do domínio, de modo que a fronteira da esquerda admite uma velocidade horizontal constante  $U_\infty$  e velocidade vertical nula. Na superfície do cilindro imerso é considerada a condição de não deslizamento e no restante do domínio admite-se a condição de contorno de Neumann, representando a condição de saída livre.

Uma simulação é conduzida com uma malha euleriana regular e uniforme de  $800 \times 600$ , de forma que exista aproximadamente 20 células computacionais por diâmetro. Para a malha lagrangiana, o número de pontos é definidos de acordo com a sugestão de Uhlmann (2005), onde busca-se que a área das células lagrangianas e eulerianas sejam semelhantes:

$$N_p = \pi \frac{D}{h}, \quad (5.24)$$

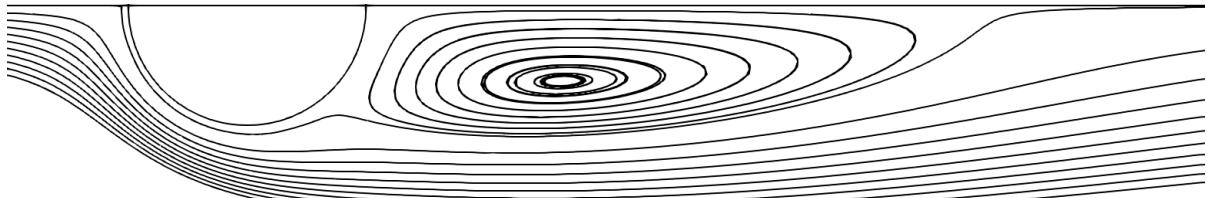
onde  $h = \Delta x = \Delta y$ .

A dinâmica do escoamento é analisada para uma condição de número de Reynolds igual a 40, condição na qual o regime permanente pode ser atingido, pois não há a formação de esteiras de Von Kármán. Deste modo, para um cilindro de diâmetro  $D = 0,1$  m o tempo de simulação necessário para se garantir o regime permanente é de 30 s. A figura 28 mostra a comparação das linhas de corrente obtidas através da metodologia apresentada e as obtidas por Andrade (2015), respectivamente. Já a figura 29, compara os contornos de

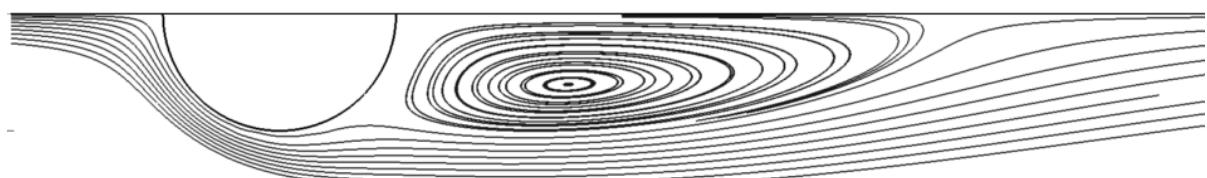
iso-vorticidade obtidos através do código computacional desenvolvido e os apresentados por Kim, Kim e Choi (2001).

Figura 28 – Comparação entre as linhas de corrente sobre um cilindro circular para  $Re = 40$ .

(a) Presente Trabalho.



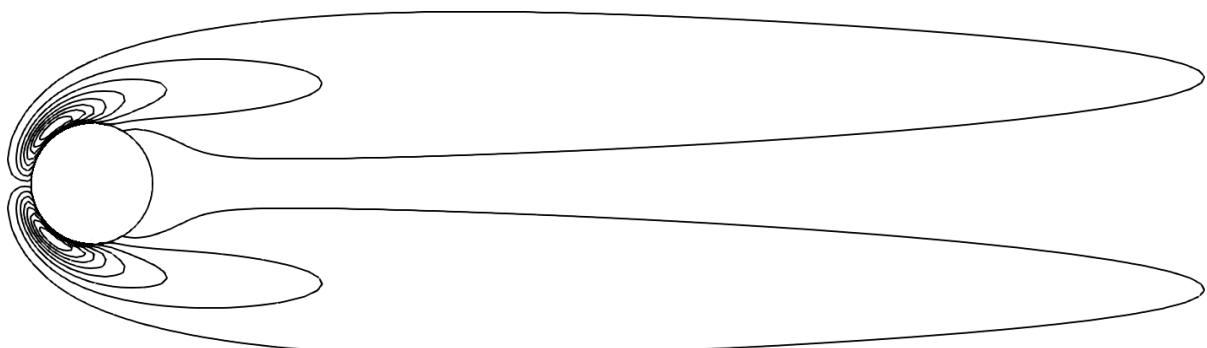
(b) Andrade (2015).



Fonte: Do próprio autor.

Figura 29 – Comparação entre os contornos de iso-vorticidade sobre um cilindro circular para  $Re = 40$ .

(a) Presente Trabalho.



(b) Kim, Kim e Choi (2001).

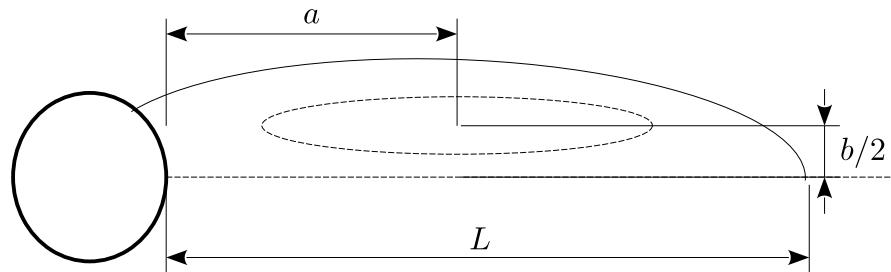


Fonte: Do próprio autor.

Em ambas as figuras (28 e 29) é possível notar bastante semelhança entre os resultados obtidos através da implementação numérica-computacional proposta e os resultados divulgados na literatura. Nota-se ainda que o escoamento é totalmente simétrico em torno do eixo horizontal, resultado esperado para a condição de  $Re = 40$ , indicando que o campo de velocidade e vorticidade foram bem capturados pelo método da fronteira imersa utilizado.

Para um análise quantitativa, é avaliado o comprimento normalizado da zona de recirculação formada a jusante do cilindro ( $L/D$ ), assim como a posição de seu centro em relação a borda do cilindro plano ( $a/D, b/D$ ), conforme esquematizado na figura 30, além do cálculo do coeficiente de arrasto. Os resultados obtidos são dispostos na tabela 11 e comparados com valores experimentais e numéricos presentes na literatura.

Figura 30 – Representação esquemática da zona de recirculação formada a jusante de um cilindro circular em escoamento permanente.



Fonte: Do próprio autor.

Tabela 11 – Comparação de características de um escoamento permanente sobre um cilindro circular para  $Re = 40$ .

|                               | $\frac{L}{D}$ | $\frac{a}{D}$ | $\frac{b}{D}$ | $C_D$ |
|-------------------------------|---------------|---------------|---------------|-------|
| Coutanceau e Bouard (1977)    | 2,13          | 0,76          | 0,59          | 1,53  |
| Berthelsen e Faltinsen (2008) | 2,29          | 0,72          | 0,60          | 1,59  |
| Linnick e Fasel (2005)        | 2,28          | 0,72          | 0,60          | 1,61  |
| Andrade (2015)                | 2,25          | 0,75          | 0,60          | 1,56  |
| Presente trabalho             | 2,45          | 0,79          | 0,62          | 1,61  |

$L$  : comprimento da zona de recirculação,  $(a, b)$  : posições relativas do centro da recirculação e  $C_D$  : coeficiente de arrasto.

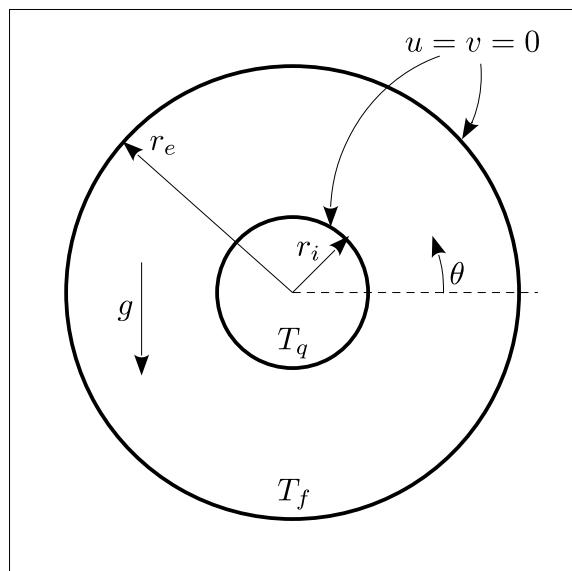
Observa-se que os resultados computacionais obtidos no presente trabalho estão em conformidade com os resultados experimentais e numéricos apresentados na literatura. Portanto, conclui-se que, de fato, a metodologia implementada foi eficiente em capturar os efeitos dinâmicos provenientes da presença da geometria imersa.

## 5.5 Convecção Natural Entre Dois Cilindros Circulares Concêntricos

Dentre os casos de validação do subdomínio fluido, o último a ser conduzido é a convecção natural entre dois cilindros circulares concêntricos, cujo o objetivo é a validação da implementação do método da fronteira imersa térmica, e o acoplamento dos efeitos térmicos e dinâmicos provenientes da existência de uma geometria imersa.

A figura 31, a seguir, é uma representação esquemática do domínio utilizado para realização desta simulação. O cilindro interno de raio  $r_i$  é mantido aquecido a uma temperatura constante  $T_q$ , enquanto o cilindro externo de raio  $r_e$  é mantido resfriado a temperatura  $T_f$ , o campo gravitacional age na coroa circular formada pelos dois cilindros, os quais são concêntricos e posicionados no centro do domínio computacional quadrado. As superfícies de ambos os cilindros admitem condição de não escorregamento, com velocidade horizontal e vertical nula. As condições de contorno impostas nas fronteiras do domínio computacional quadrado são: condição de fluxo livre (derivadas nulas) para as velocidades e condição de isolamento térmico para a temperatura.

Figura 31 – Representação esquemática do escoamento entre dois cilindros circulares concêntricos.



Fonte: Do próprio autor.

O fluido no interior da coroa circular encontra-se inicialmente a uma temperatura  $T = (T_q + T_f)/2$ , e o escoamento se incia devido a diferença de temperatura entre as superfícies cilíndricas.

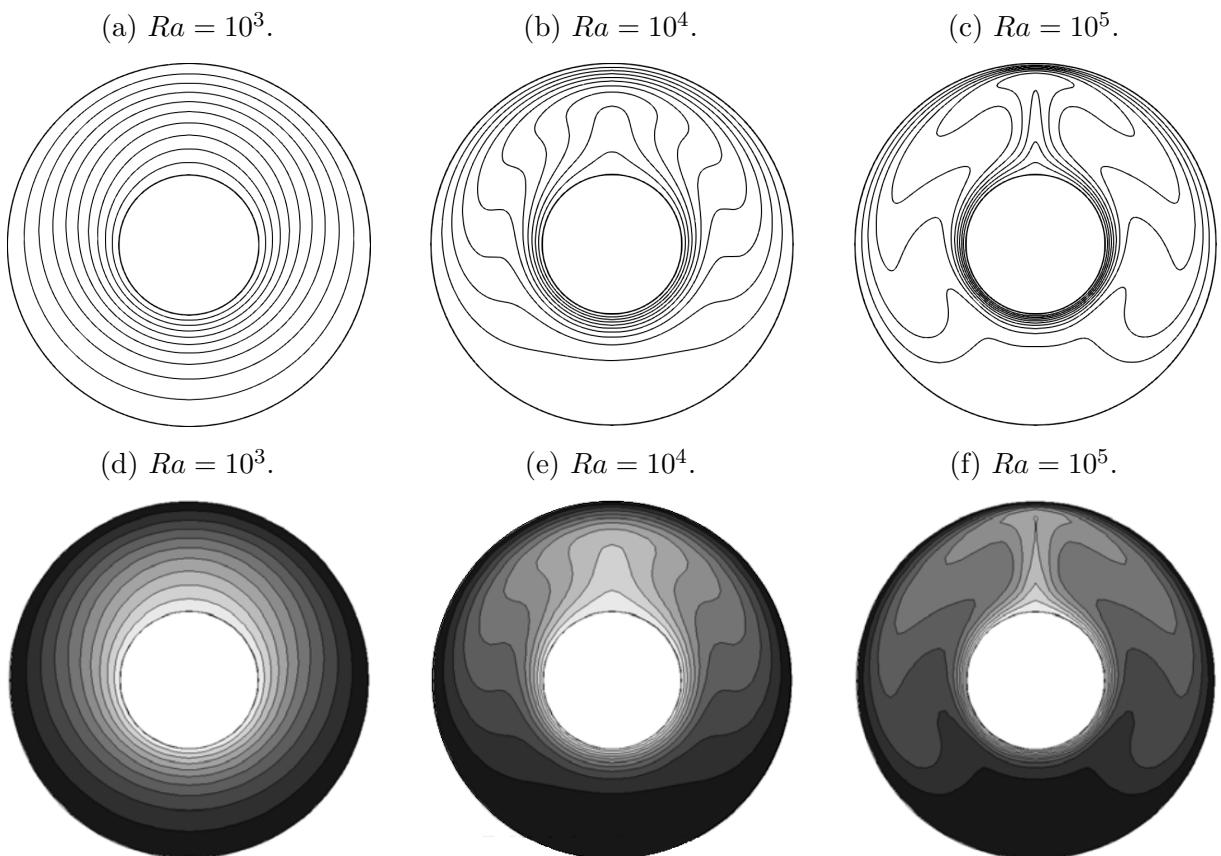
Para o presente trabalho é fixado um número de Prandtl de 0,71, a razão entre os raios também é mantida constante  $\chi \equiv r_e/r_i = 2,6$  e três números de Rayleigh são avaliados:  $10^3$ ,  $10^4$  e  $10^5$ . Sendo  $L = r_e - r_i$  o comprimento característico utilizado para

mensuração do adimensional.

O domínio euleriano retangular tem comprimento de 0,5 m, enquanto os raios dos cilindros são dados por  $r_i = 0,0625$  m e  $r_e = 0,1625$  m. A malha utilizada para o domínio euleriano é de  $300 \times 300$  nós, de modo que exista aproximadamente 75 células de fluido no diâmetro do cilindro menor. As malhas lagrangianas das fronteiras imersas são mensuradas através da utilização da equação (5.24). Para as três simulações conduzidas o tempo de simulação adotado foi de 120 s, suficiente para se garantir que o regime permanente tenha sido atingido.

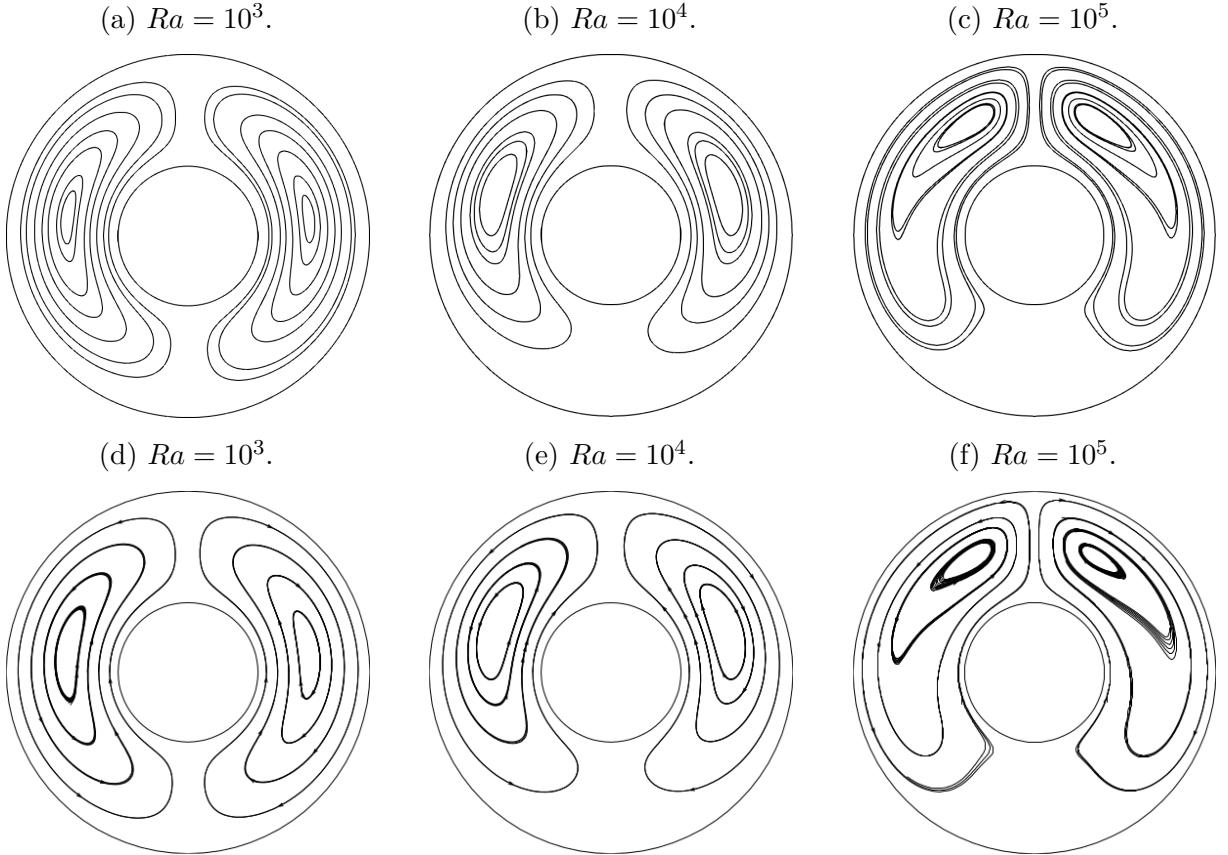
Na figura 32, a seguir, apresenta-se a comparação das iso-linhas de temperatura obtidas com a implementação da metodologia proposta e as publicados por Padilla, Campregher e Silveira-Neto (2006), onde estes utilizaram de uma modelagem por coordenadas polares para solução do problema. Já na figura 33 é comparado, também com o trabalho de Padilla, Campregher e Silveira-Neto, as linhas de corrente para os valores de Rayleigh escolhidos.

Figura 32 – Comparaçāo das isotermas na coroa circular formada por dois cilindros concêntricos para diferentes nūmeros de Rayleigh, com  $Pr = 0,71$  e  $\chi = 0,26$ .



(a), (b) e (c): Presente trabalho, (d), (e) e (f): Padilla, Campregher e Silveira-Neto (2006).

Figura 33 – Comparação das linhas de corrente na coroa circular formada por dois cilindros concêntricos para diferentes números de Rayleigh, com  $Pr = 0,71$  e  $\chi = 0,26$ .



(a), (b) e (c): Presente trabalho, (d), (e) e (f): Padilla, Campregher e Silveira-Neto (2006).

Observa-se bastante similaridade entre os resultados obtidos e os divulgados pela literatura, indicando que qualitativamente os resultados computacionais estão coerentes e o método numérico-computacional é adequado para capturar os fenômenos físicos que ocorrem no escoamento. Para uma análise quantitativa, o número de Nusselt local é avaliado tanto no cilindro interno quanto no externo por meio das equações (5.25) e (5.26), respectivamente:

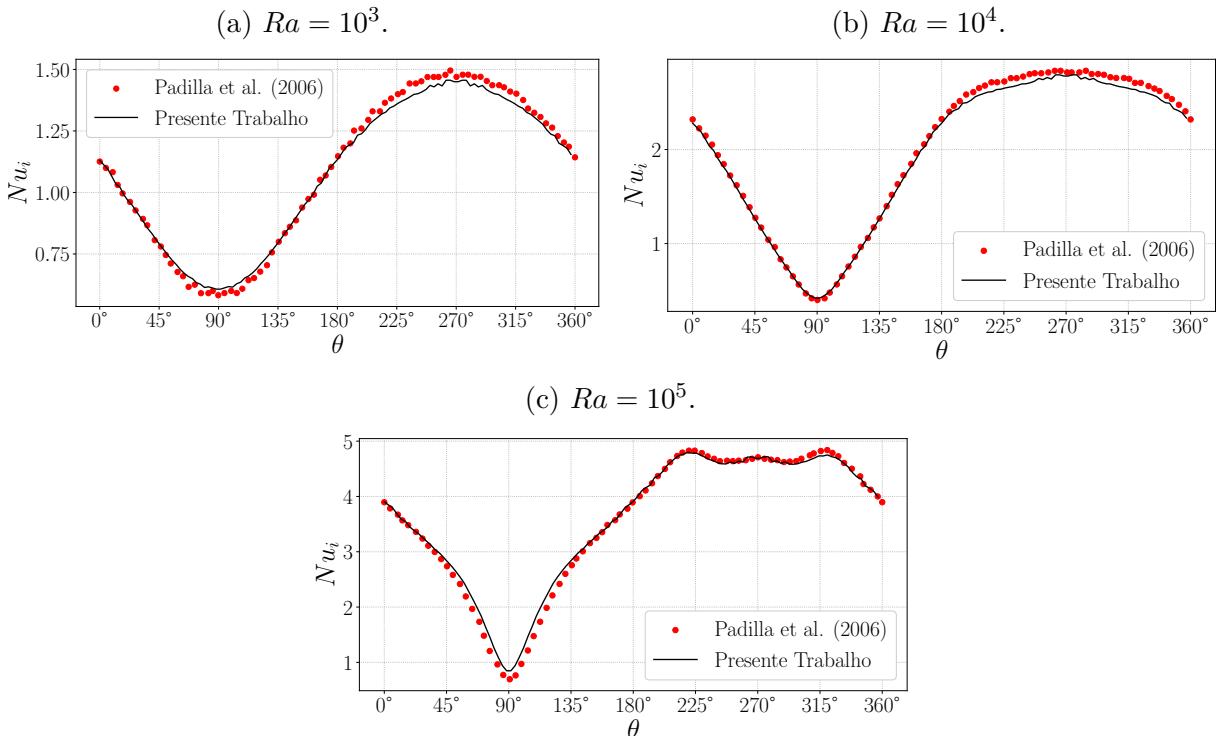
$$Nu_i = r_i \ln \left( \frac{r_e}{r_i} \right) \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=r_i}, \quad (5.25)$$

$$Nu_e = r_e \ln \left( \frac{r_e}{r_i} \right) \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=r_e}, \quad (5.26)$$

onde a derivada  $\partial T / \partial r$  é avaliada com o auxílio da malha lagrangiana.

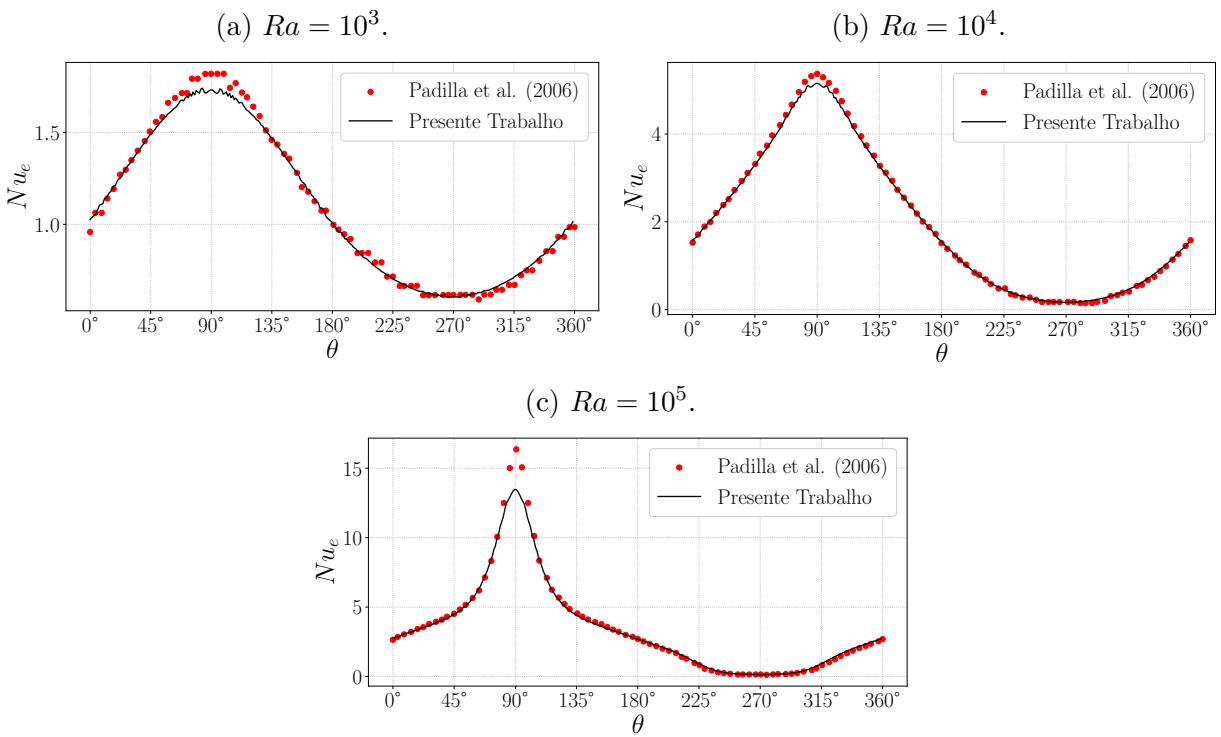
As figuras 34 e 35 adiante, apresentam a comparação do número de Nusselt local calculado na superfície dos cilindros interno e externo, respectivamente. Os resultados obtidos são comparados com os apresentados por Padilla, Campregher e Silveira-Neto (2006), onde a orientação do ângulo  $\theta$  segue a representação esquematizada na figura 31.

Figura 34 – Comparação do número de Nusselt na parede do cilindro interno para diferentes números de Rayleigh, com  $Pr = 0,71$  e  $\chi = 0,26$ .



Fonte: Do próprio autor.

Figura 35 – Comparação do número de Nusselt na parede do cilindro externo para diferentes números de Rayleigh, com  $Pr = 0,71$  e  $\chi = 0,26$ .



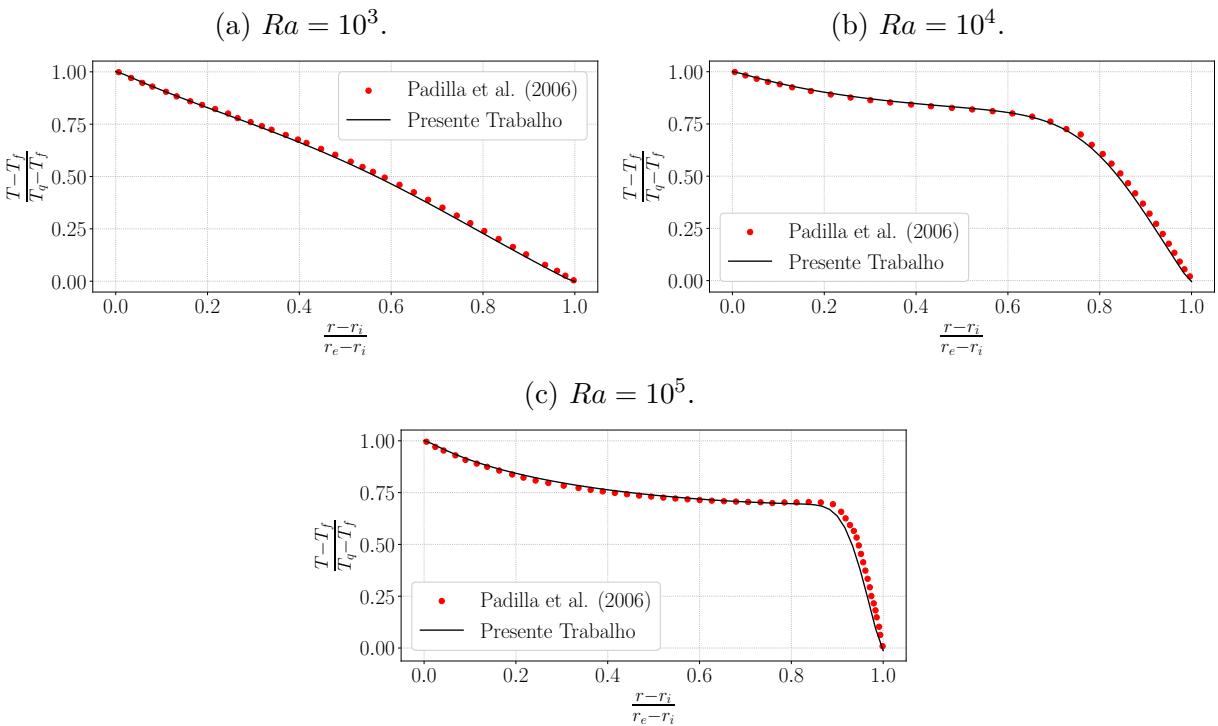
Fonte: Do próprio autor.

Ainda é avaliado, para cada um dos números de Rayleigh, o perfil de temperatura adimensional em função do raio, também adimensional, na coroa circular em  $\theta = 90^\circ$ . Os resultados são novamente comparados com os divulgados por Padilla, Campregher e Silveira-Neto (2006) e apresentados na figura 36 em seguida. A adimensionalização da temperatura e do raio são conduzidas por meio das equações (5.27) e (5.28), respectivamente:

$$\hat{T} = \frac{T - T_f}{T_q - T_f}, \quad (5.27)$$

$$\hat{r} = \frac{r - r_i}{r_e - r_i}. \quad (5.28)$$

Figura 36 – Comparação do perfil de temperatura na coroa circular formada entre os cilindros em  $\theta = 90^\circ$  para diferentes números de Rayleigh, com  $Pr = 0,71$  e  $\chi = 0,26$ .



Fonte: Do próprio autor.

Observa-se que, tanto os perfis obtidos para os números de Nusselt locais (figuras 34 e 35) quanto os perfis de temperatura em uma região da coroa circular (figura 36) estão em concordância com a literatura. Assim, de fato, ambas as metodologias de fronteira imersa (térmica e dinâmica) estão corretamente implementadas.

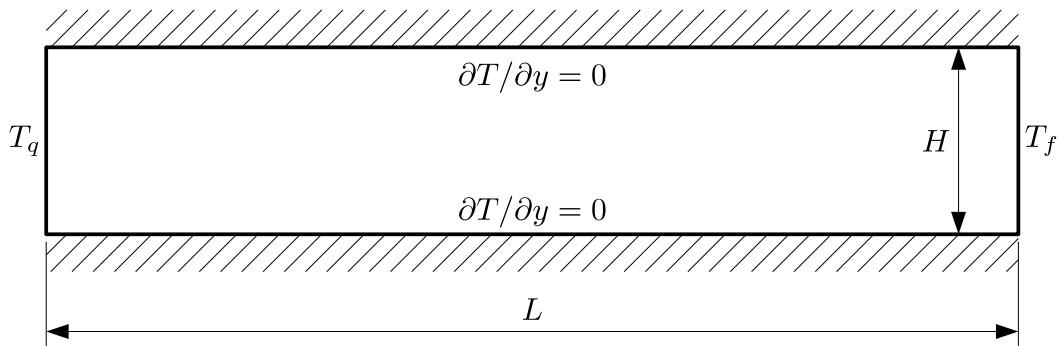
## 5.6 Difusão Térmica em uma Chapa Retangular Longa

Nas seções de 5.2 a 5.5 testes de validação para o subsistema fluido foram conduzidos. Assim, esta seção é destinada a validação do subsistema sólido, onde para isto é simulada a difusão térmica em uma chapa retangular longa.

### 5.6.1 Extremidades com Temperatura Constante

A figura 37 apresenta uma representação esquemática do problema em questão, assim como suas condições de contorno. Onde a parede da esquerda é mantida aquecida a uma temperatura constante  $T_q$ , enquanto a parede da direita é mantida resfriada a uma temperatura  $T_f$ , também constante. As paredes horizontais são adiabáticas, ou seja, os fluxos térmicos nas paredes superior e inferior são nulos. O comprimento da chapa  $L$  é parametrizado em função de sua altura  $H$ , de modo que, buscando uma aproximação para um problema de condução unidimensional, este é definido como  $L = 10H$ .

Figura 37 – Representação esquemática da difusão térmica em uma chapa fina, retangular e longa, com temperatura imposta nas extremidades.



Fonte: Do próprio autor.

Para os casos em que  $L \gg H$ , a difusão da energia térmica ocorre majoritariamente na direção do comprimento da chapa, de forma que, pode-se considerar que a chapa seja isotérmica na direção vertical, porém que sua temperatura sofra variações na direção horizontal. Esta condição de condução térmica é praticamente um problema de difusão térmica unidimensional, o qual em regime permanente e sem fontes internas de energia ( $\dot{q} = 0 \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$ ), é possível a obtenção de uma solução contínua para a distribuição de temperatura:

$$T(x) = \frac{x}{L} T_f + \left(1 - \frac{x}{L}\right) T_q, \quad (5.29)$$

onde considera-se que o eixo  $x$  esteja orientado da parede da esquerda para a direita.

Definida uma solução exata (5.29), procede-se com a metodologia numérica proposta para o subsistema sólido, onde no presente trabalho são utilizadas três malhas regulares e uniformes ( $2 \times 4 \times 40$ ,  $2 \times 8 \times 80$  e  $2 \times 16 \times 160$ ), a fim de se comparar os resultados numéricos com a solução contínua.

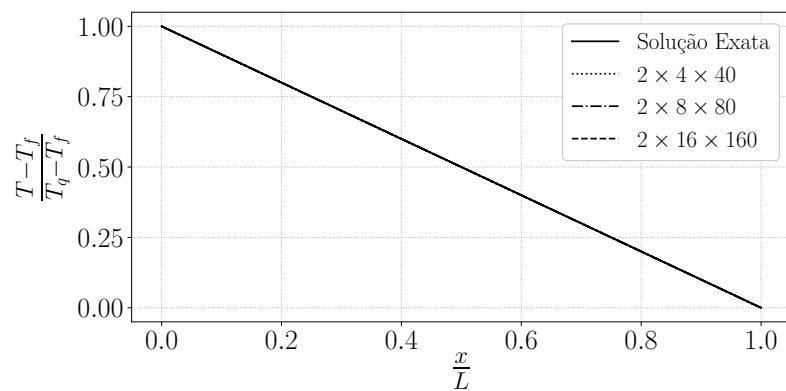
Todas as simulações são conduzidas para um valor de difusividade térmica  $\alpha_s = 0,1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ , sendo esta definida por:

$$\alpha_s = \frac{k_s}{\rho_s c_{p_s}}. \quad (5.30)$$

A chapa inicialmente encontra-se em uma temperatura  $T = (T_q + T_f)/2$ , e possui altura  $H = 0,1$  m, de modo que o tempo de simulação necessário para se garantir o regime permanente foi de 10 s, sendo o passo de tempo definido como o quadrado do comprimento característico do elemento triangular,  $\Delta t = h^2$ .

A figura 38 a seguir apresenta o perfil de temperatura na linha de simetria horizontal da placa ( $y = 0,5H$ ) para as diferentes malhas adotadas, e os confronta com a solução exata.

Figura 38 – Comparação do perfil de temperatura na linha de simetria horizontal de uma chapa retangular longa com temperatura prescrita nas extremidades, para diferentes tamanhos de malhas.



Fonte: Do próprio autor.

Como a solução contínua é uma função linear, e as funções de forma utilizadas no método dos elementos finitos também são funções lineares, a solução numérica obtida através da resolução do sistema linear é equivalente a solução contínua, a menos dos erros de arredondamento de máquina. Tal fato pode ser observado ao se notar que para todas as malhas utilizadas, os perfis de temperatura das soluções numéricas e da solução exata na figura 38 são coincidentes.

Figura 39 – Solução computacional da distribuição de temperatura na chapa em regime permanente.

(a) Campo de temperatura.

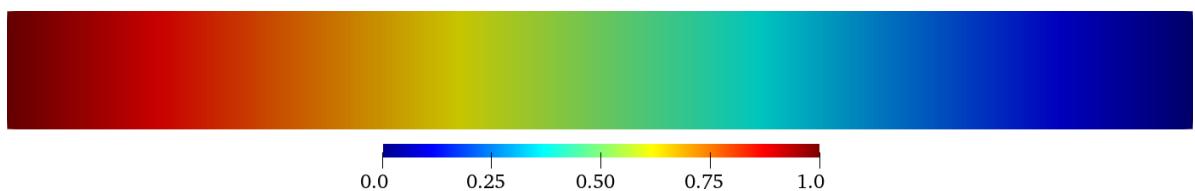
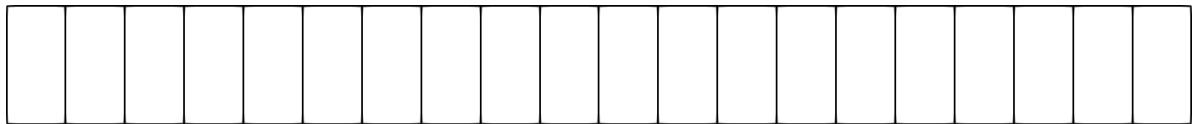


Figura 39 – Solução computacional da distribuição de temperatura na chapa em regime permanente (continuação).

(b) Iso-valores de temperatura.



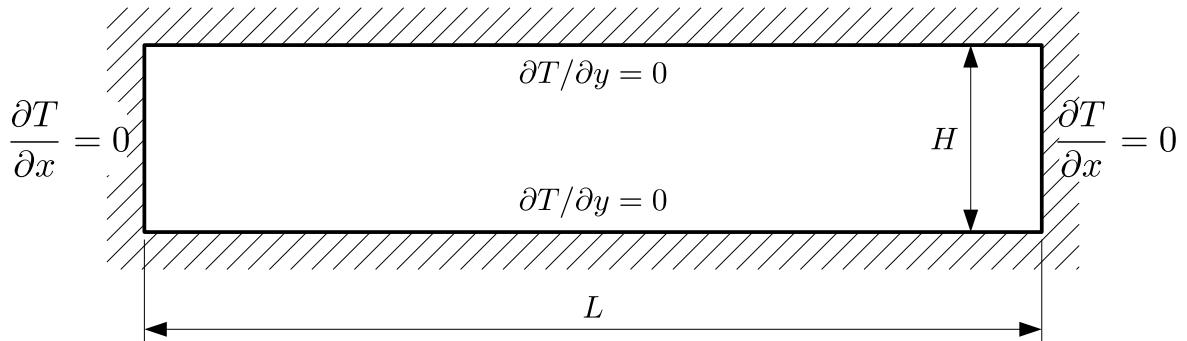
Fonte: Do próprio autor.

A figura 39 precedente, apresenta a distribuição de temperatura na chapa, assim como suas isotermas, para a solução numérica obtida na malha de  $2 \times 16 \times 160$ , após o regime permanente ser alcançado. Através das isotermas da figura 39b, nota-se que, a temperatura é constante na seção transversal da barra e variável somente na direção de seu comprimento, confirmando a hipótese de condução unidimensional adotada para a construção da solução exata (5.29).

### 5.6.2 Extremidades Isoladas

O mesmo caso da difusão térmica em uma chapa retangular, fina e longa é novamente simulado. Porém, agora admite-se que todas as fronteiras são adiabáticas, isto é, todas as laterais da chapa estão termicamente isoladas, como é esquematizado na figura 40.

Figura 40 – Representação esquemática da difusão térmica em uma chapa fina, retangular e longa, com as extremidades isoladas.



Fonte: Do próprio autor.

Novamente assumindo que, para  $L \gg H$  a condução térmica é aproximadamente unidimensional, uma solução contínua pode ser obtida. O problema de condução térmica unidimensional com condições de contorno de Neumann homogêneas foi resolvido por Boyce e DiPrima (2010), onde mostram que para uma condição inicial  $T(x, 0) = \cos(\frac{\pi x}{L})$ , a solução exata é dada por:

$$T(x, t) = C_0 + \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(\frac{-\alpha_s \pi^2 t}{L^2}\right), \quad (5.31)$$

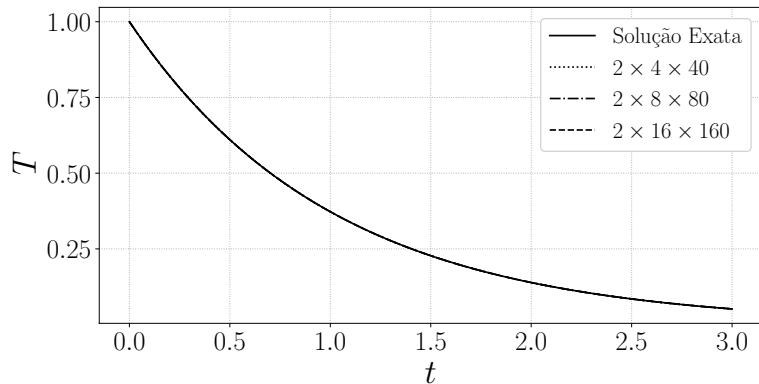
sendo  $C_0$  o valor médio da distribuição de temperatura no instante inicial:

$$C_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad (5.32)$$

onde novamente adotou-se  $L = 10H$ , com  $H = 0,1$  m e  $\alpha_s = 0,1 \frac{m^2}{s}$ .

Simulações outra vez foram realizadas para as malhas de elementos triangulares uniformes e regulares com  $2 \times 4 \times 40$ ,  $2 \times 8 \times 80$  e  $2 \times 16 \times 160$ , onde um ponto localizado no plano de simetria da extremidade esquerda da chapa, isto é,  $x = 0$  e  $y = H/2$ , tem sua temperatura comparada com a solução contínua. O tempo de simulação adotado foi de 3 s, e o passo de tempo é determinado de maneira similar ao caso anterior. A figura 41 adiante, apresenta a evolução temporal da temperatura neste ponto para as diferentes malhas adotadas e também para a solução contínua.

Figura 41 – Comparaçāo da evolução temporal da temperatura em um ponto na extremidade esquerda da linha de simetria horizontal de uma chapa retangular longa, para diferentes tamanhos de malhas.



Fonte: Do próprio autor.

Tendo posse da solução contínua, pode-se proceder com um teste de ordem convergência numérica, como discutido na seção 5.1, a fim de se avaliar a evolução temporal da solução em relação a malha numérica. Os resultados são expostos na tabela 12 a seguir, onde observa-se novamente ordem de convergência dois para o método numérico.

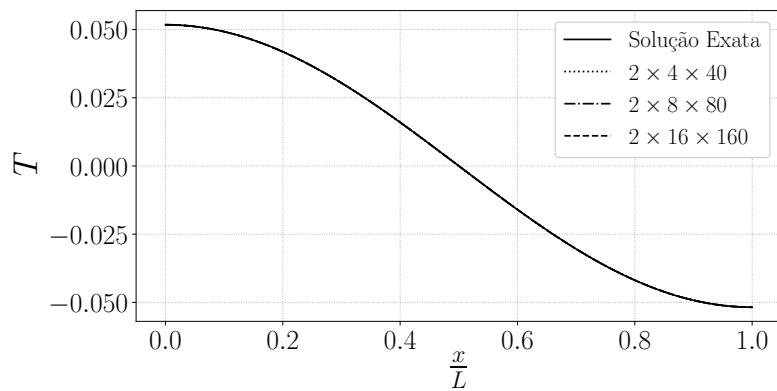
Tabela 12 – Teste de convergência de um ponto em evolução temporal na extremidade esquerda de uma placa retangular longa sobre processo de difusão térmica.

| Malha                    | $\ \cdot\ _\infty$     | Razão  | Ordem  | $\ \cdot\ _2$          | Razão  | Ordem  |
|--------------------------|------------------------|--------|--------|------------------------|--------|--------|
| $2 \times 4 \times 40$   | $7,5429 \cdot 10^{-5}$ | — — —  | — — —  | $5,7694 \cdot 10^{-5}$ | — — —  | — — —  |
| $2 \times 8 \times 80$   | $1,8893 \cdot 10^{-5}$ | 3,9925 | 1,9973 | $1,4433 \cdot 10^{-5}$ | 3,9974 | 1,9991 |
| $2 \times 16 \times 160$ | $4,7263 \cdot 10^{-6}$ | 3,9974 | 1,9991 | $3,6092 \cdot 10^{-6}$ | 3,9989 | 1,9996 |

Além de se analisar a solução ao longo do tempo, tendo um ponto do domínio fixo, também é realizada uma análise espacial, desta vez com o tempo fixo. Deste modo, para o

tempo de  $t = 3$  s, a solução numérica na linha de simetria horizontal ( $y = H/2$ ) é avaliada entre as malhas adotadas e a solução contínua. A figura 42, em seguida, apresenta os perfis de temperatura obtidos.

Figura 42 – Comparação do perfil de temperatura na linha de simetria horizontal de uma chapa retangular longa totalmente isolada, para diferentes tamanhos de malhas.



Fonte: Do próprio autor.

Novamente é realizado o teste de convergência numérica do método, sendo este apresentado na tabela 13, onde nota-se segunda ordem de convergência.

Tabela 13 – Teste de convergência na linha de simetria horizontal de uma placa retangular longa e totalmente isolada, sobre processo de difusão térmica para o tempo de  $t = 3$  s.

| Malha                    | $\ \cdot\ _\infty$     | Razão  | Ordem  | $\ \cdot\ _2$          | Razão  | Ordem  |
|--------------------------|------------------------|--------|--------|------------------------|--------|--------|
| $2 \times 4 \times 40$   | $3,1098 \cdot 10^{-5}$ | — — —  | — — —  | $2,2275 \cdot 10^{-5}$ | — — —  | — — —  |
| $2 \times 8 \times 80$   | $7,8469 \cdot 10^{-6}$ | 3,9631 | 1,9866 | $5,5843 \cdot 10^{-6}$ | 3,9888 | 1,9959 |
| $2 \times 16 \times 160$ | $1,9675 \cdot 10^{-6}$ | 3,9882 | 1,9958 | $1,3957 \cdot 10^{-6}$ | 4,0012 | 2,0004 |

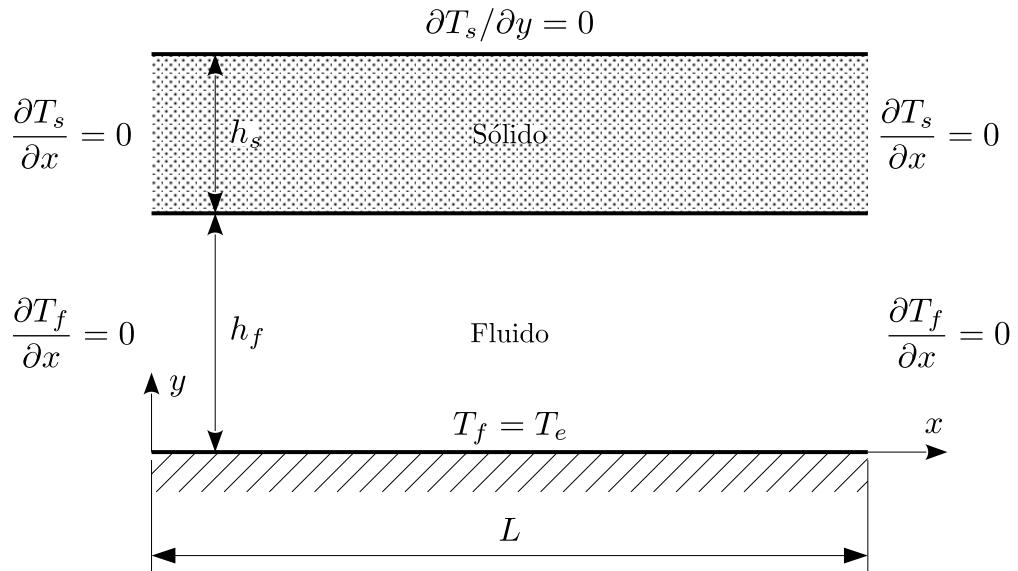
## 5.7 Estratificação Térmica Estável

O primeiro problema de transferência térmica conjugada a ser analisado consiste em uma barra sólida retangular posicionada sobre um canal contendo fluido. O fluido está inicialmente em repouso e possui uma temperatura inicial menor que a temperatura da barra sólida. Deste modo, a energia térmica é difundida do sólido para o fluido formando assim uma estratificação térmica estável, isto é, a região de fluido mais quente e mais leve está acima da região de fluido mais fria e consequentemente mais pesada.

Devido a estratificação térmica estável as forças gravitacionais de peso e empuxo se equilibram. Assim o fluido tende a permanecer em repouso, uma vez que não são formadas as instabilidades térmicas de Rayleigh-Bérnard que originam as células de advecção de

Rayleigh-Bérnard (SILVEIRA NETO, 2020). Como o fluido se mantém em repouso, o problema se torna de natureza inteiramente térmica, mais precisamente de difusão térmica. Na figura 43 a seguir, mostra-se uma representação esquemática do problema com suas condições de contorno térmicas.

Figura 43 – Representação esquemática do problema térmico conjugado de estratificação térmica estável.



Fonte: Do próprio autor.

Para o caso em que  $L \gg h_f$  e  $L \gg h_s$ , a hipótese de condução térmica unidimensional pode ser utilizada, obtendo-se assim, para o regime permanente ao se considerar o sistema de referência mostrado na figura 43, as seguintes soluções para a distribuição de temperatura no fluido e no sólido, respectivamente:

$$T_f(y) = \left(1 - \frac{y}{h_f}\right) T_e + \frac{y}{h_f} T_i, \quad (5.33)$$

$$T_s(y) = \frac{\dot{q}h_f^2}{2k_s} \left(1 - \left(\frac{y}{h_f}\right)^2\right) - \frac{\dot{q}}{k_s}(h_f + h_s)h_f \left(1 - \frac{y}{h_f}\right) + T_i, \quad (5.34)$$

onde  $T_i$  é a temperatura da interface, determinada igualando-se os fluxos térmicos na interface fluido-sólido:

$$T_i = \frac{\dot{q}h_f h_s}{k_s} + T_e, \quad (5.35)$$

e  $\dot{q}$  representa uma taxa de transferência de energia térmica na forma de calor para o corpo sólido.

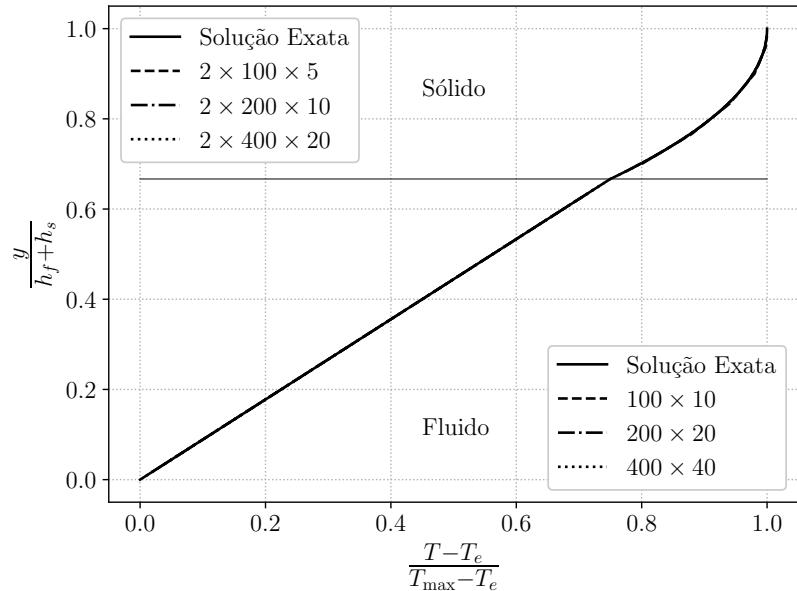
Definida a solução contínua, procede-se com a metodologia numérica proposta para três diferentes tamanhos de malhas computacionais para o fluido e para o sólido, a

fim de avaliar a ordem de convergência do método. No subdomínio fluido são utilizadas malhas de tamanhos  $100 \times 10$ ,  $200 \times 20$  e  $400 \times 40$ , para o subdomínio sólido as malhas computacionais utilizadas são de tamanhos  $2 \times 100 \times 5$ ,  $2 \times 200 \times 10$  e  $2 \times 400 \times 20$ .

As simulações são conduzidas considerando-se um domínio computacional de comprimento  $L = 1$  m, com altura  $h_f = 0,1$  m para o subdomínio fluido e  $h_s = 0,05$  m para o sólido. As propriedades físicas do fluido são dadas por:  $\rho_f = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ,  $\mu = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $k_f = 1 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$  e  $c_{pf} = 10 \frac{\text{J}}{\text{K}}$ . Já as propriedades físicas do corpo sólido são:  $\rho_s = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ,  $k_s = 0,75 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$ ,  $c_{ps} = 10 \frac{\text{J}}{\text{K}}$  e  $\dot{q} = 150 \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$ . O tempo de simulação foi de cerca de 3 s, tempo necessário para se atingir o regime permanente.

Na figura 44 adiante, é apresentado o gráfico do perfil de temperatura na linha de simetria vertical ( $x = L/2$ ) para as diferentes malhas utilizadas e os compara com as soluções contínuas (5.33) e (5.34).

Figura 44 – Perfil de temperatura na linha de simetria vertical do problema térmico conjugado de estratificação térmica estável.



Fonte: Do próprio autor.

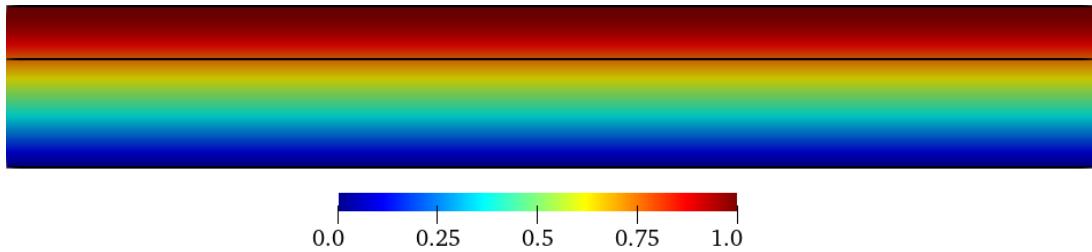
No subsistema fluido, como a solução contínua é uma função linear e a solução computacional é obtida através das aproximações lineares do método de diferenças finitas, então estas se tornam coincidentes a menos dos erros de arredondamento de máquina. Já para o subsistema sólido, pode-se proceder com a metodologia de verificação de ordem de convergência, a fim de se avaliar a taxa de decaimento do erro numérico. Na tabela 14 a seguir é apresentado o teste de convergência onde se observa novamente segunda ordem.

Tabela 14 – Teste de convergência na linha de simetria vertical do corpo sólido, no problema térmico conjugado de estratificação térmica estável.

| Malha                    | $\ \cdot\ _\infty$     | Razão  | Ordem  | $\ \cdot\ _2$          | Razão  | Ordem  |
|--------------------------|------------------------|--------|--------|------------------------|--------|--------|
| $2 \times 100 \times 5$  | $2,5000 \cdot 10^{-3}$ | —      | —      | $2,5000 \cdot 10^{-3}$ | —      | —      |
| $2 \times 200 \times 10$ | $6,2500 \cdot 10^{-4}$ | 4,0000 | 2,0000 | $6,2500 \cdot 10^{-4}$ | 4,0000 | 2,0000 |
| $2 \times 400 \times 20$ | $1,5625 \cdot 10^{-4}$ | 4,0000 | 2,0000 | $1,5625 \cdot 10^{-4}$ | 4,0000 | 2,0000 |

Ainda na figura 45 a seguir, é apresentado o campo de temperatura adimensionalizado, onde se nota que, de fato, a hipótese de unidimensionalidade é satisfeita, uma vez que o campo de temperaturas só sofre variações em relação a coordenada  $y$ .

Figura 45 – Campo de temperatura adimensional para o problema térmico conjugado de estratificação térmica estável.



Fonte: Do próprio autor.

Observa-se que, na interface a temperatura  $T_i$  e o fluxo térmico são determinados e não impostos. Na tabela 15 a seguir, são apresentados os valores destes parâmetros para as diferentes malha computacionais utilizadas e os obtidos através da solução contínua.

Tabela 15 – Temperatura adimensional e fluxo térmico na interface fluido-sólido em função da malha computacional no problema térmico conjugado de estratificação térmica estável.

| Malha Fluido     | Malha Sólido             | Temperatura | Fluxo Térmico |
|------------------|--------------------------|-------------|---------------|
| $100 \times 10$  | $2 \times 100 \times 5$  | 0,7563      | 6,7500        |
| $200 \times 20$  | $2 \times 200 \times 10$ | 0,7531      | 7,1250        |
| $400 \times 40$  | $2 \times 400 \times 20$ | 0,7516      | 7,3125        |
| Solução Contínua |                          | 0,7500      | 7,5000        |

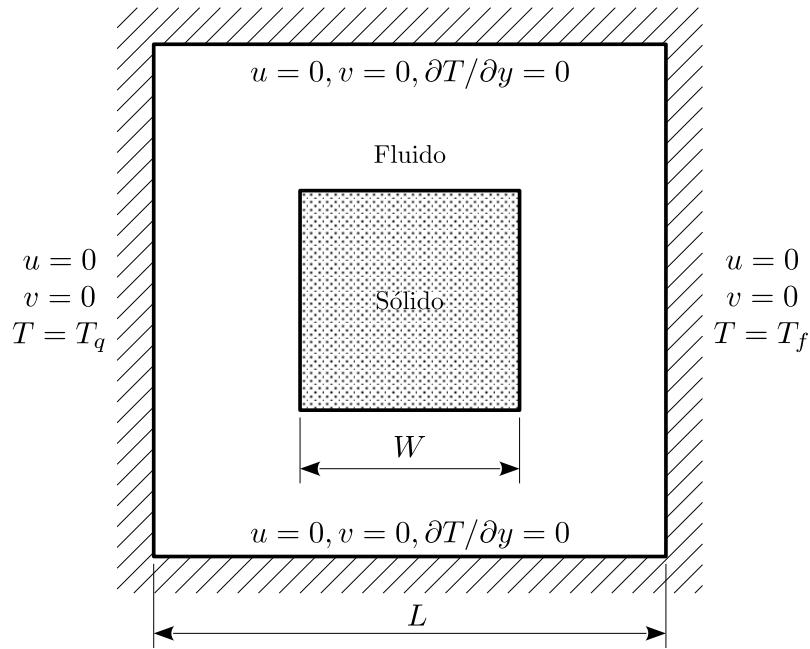
## 5.8 Cavidade Diferencialmente Aquecida com a Presença de um Corpo Sólido Condutivo

Por fim, o último caso analisado no presente trabalho é uma cavidade diferencialmente aquecida, análogo ao caso apresentado na seção 5.3, porém com a presença de um corpo sólido condutivo em seu interior. Para as simulações realizadas é considerada

uma cavidade quadrada de aresta unitária ( $L = 1$  m), sendo o sólido imerso também um quadrado, cuja aresta tem tamanho  $W = 0,5$  m. Desse modo, as simulações são conduzidas para uma razão de aspecto, definida como a razão do comprimento da aresta da cavidade pelo comprimento da aresta do corpo sólido, de  $\chi = W/L = 0,5$ .

Na figura 46 a seguir, é apresentada uma representação esquemática do problema proposto, assim como as condições de contorno a ele impostas. Onde observa-se que em todas as paredes da cavidade, assim como na superfície do corpo sólido, são impostas condições de não deslizamento com velocidades nulas. As paredes superior e inferior da cavidade são consideradas termicamente isoladas, enquanto a parede esquerda é mantida aquecida a uma temperatura constante  $T_q$ , e a parede direita é resfriada também a uma temperatura constante  $T_f$ . A condição inicial imposta ao fluido é de repouso com temperatura uniforme de  $T = (T_q + T_f)/2$ .

Figura 46 – Representação de uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida com a presença de um sólido imerso condutivo também quadrado em seu interior.



Fonte: Do próprio autor.

A análise de independência de malha é realizada variando-se as malhas computacionais para o subsistema fluido e sólido. As simulações são conduzidas para um valor de número de Prandtl fixo de 0,71 e um adimensional de Rayleigh de  $10^5$ , onde avaliou-se dois valores para a razão de condutividade térmica  $k^* = k_s/k_f = 0,2$  e  $5,0$ .

Ao se atingir o regime permanente do problema térmico conjugado, o valor numérico do número de Nusselt médio da parede aquecida (parede da esquerda) é avaliado e comparado para cada uma das malhas computacionais utilizadas. Os resultados obtidos

são expostos na tabela 16 abaixo e utilizados como parâmetros para avaliar a independência dos resultados computacionais da malha numérica utilizada.

Tabela 16 – Avaliação do número de Nusselt médio na parede esquerda de uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida com um sólido condutivo quadrado em função da malha computacional.

| Malha Fluido | Malha Sólido | $k^*$     |           |
|--------------|--------------|-----------|-----------|
|              |              | 0, 2      | 5, 0      |
| 50 × 50      | 2 × 25 × 25  | 4, 685159 | 4, 430568 |
| 100 × 100    | 2 × 25 × 25  | 4, 617350 | 4, 335830 |
| 100 × 100    | 2 × 50 × 50  | 4, 618218 | 4, 333236 |
| 200 × 200    | 2 × 50 × 50  | 4, 599866 | 4, 332235 |

Observa-se que, de fato, a medida que a malha computacional se refina o valor do número de Nusselt médio sofre cada vez menos variações, tendendo a convergir para um valor fixo.

Os resultados computacionais obtidos com a metodologia proposta são avaliados através da comparação das isotermais, simuladas para o conjunto de malha mais refinado, com os resultados divulgados por House, Beckermann e Smith (1990). Na figura 47 adiante, são apresentadas as isotermais obtidas no presente trabalho e as publicadas por House, Beckermann e Smith (1990), respectivamente, em ambos os casos o número de Prandtl é fixo em 0,71 e o número de Rayleigh se manteve em  $10^5$ .

Figura 47 – Isotermais para diferentes valores de razão de condutividade térmica em uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida com a presença de um sólido condutivo quadrado para  $Pr = 0,71$ ,  $Ra = 10^5$  e  $\chi = 0,5$ .

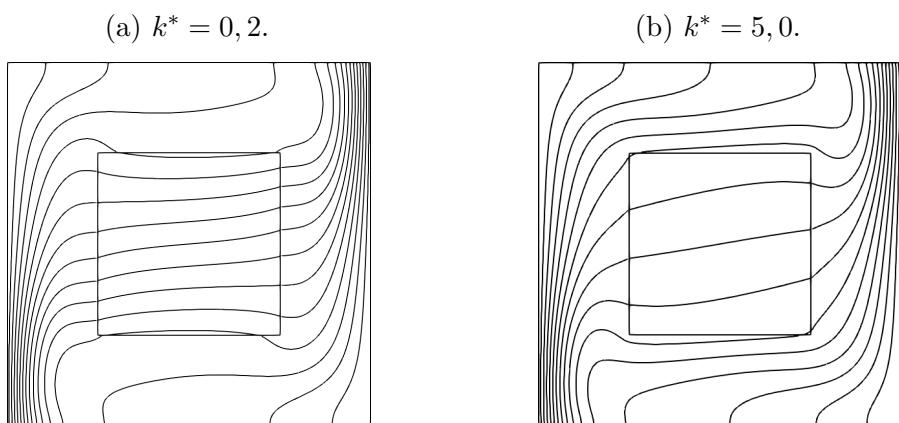
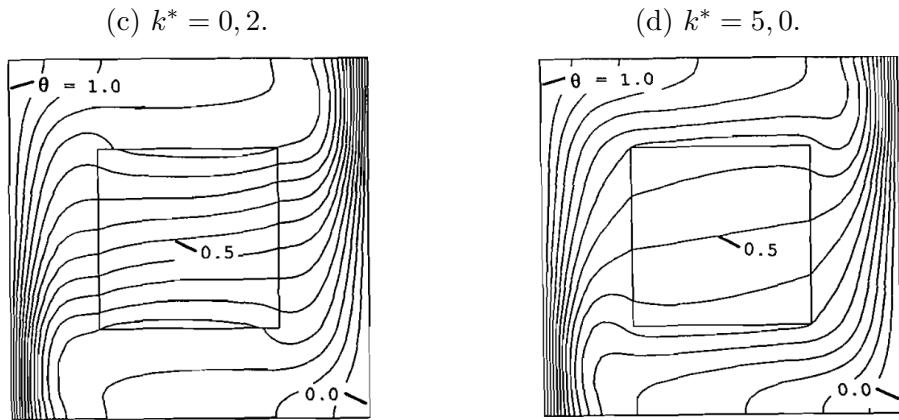


Figura 47 – Isotermas para diferentes valores de razão de condutividade térmica em uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida com a presença de um sólido condutivo quadrado para  $Pr = 0,71$ ,  $Ra = 10^5$  e  $\chi = 0,5$  (continuação).



(a) e (b): Presente trabalho, (c) e (d): House, Beckermann e Smith (1990).

O tempo de simulação utilizado foi de 20 segundos, tempo necessário para que o regime permanente fosse estabelecido em ambos os subsistemas. Qualitativamente, através da comparação das isotermas da figura 47, os resultados computacionais apresentam estar em conformidade com a literatura. Para uma análise quantitativa do problema em questão é mensurado o número de Nusselt médio na parede aquecida da cavidade, o qual é comparado com os valores apresentados por House, Beckermann e Smith (1990), Merrikh e Lage (2005), Zhao, Liu e Tang (2006) e Jeon, Kim e Choi (2012). Os resultados são comparados na tabela 17 abaixo.

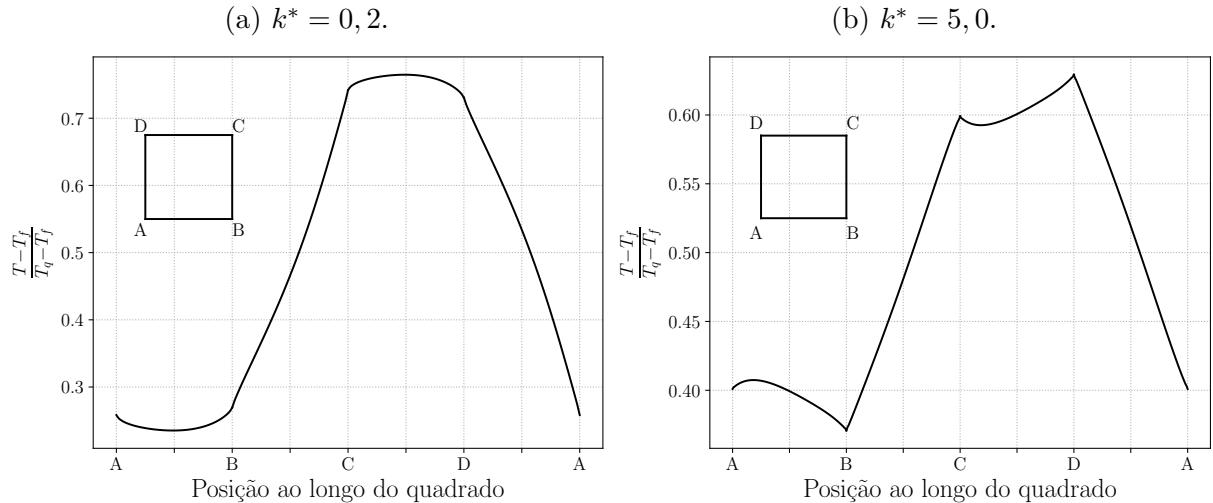
Tabela 17 – Comparação do valor do número de Nusselt médio na parede aquecida de uma cavidade quadrada diferencialmente aquecida com a presença de um sólido condutivo quadrado para diferentes valores da razão de condutividade térmica, com  $Pr = 0,71$ ,  $Ra = 10^5$  e  $\chi = 0,5$ .

| Razão de Condutividade Térmica ( $k^*$ ) | 0,2   | 5,0   |
|--|-------|-------|
| House, Beckermann e Smith (1990)         | 4,626 | 4,322 |
| Merrikh e Lage (2005)                    | 4,605 | 4,280 |
| Zhao, Liu e Tang (2006)                  | 4,660 | 4,362 |
| Jeon, Kim e Choi (2012)                  | —     | 4,326 |
| Presente trabalho                        | 4,600 | 4,332 |

Observando os resultados da tabela 17 nota-se que há bastante conformidade entre os resultados computacionais obtidos através da metodologia proposta e os apresentados pelos autores. Assim, confirma-se que a metodologia numérica-computacional descrita no presente trabalho é capaz de resolver problemas de natureza térmica conjugada, entre domínios fluidos e sólidos, com uma acurácia adequada.

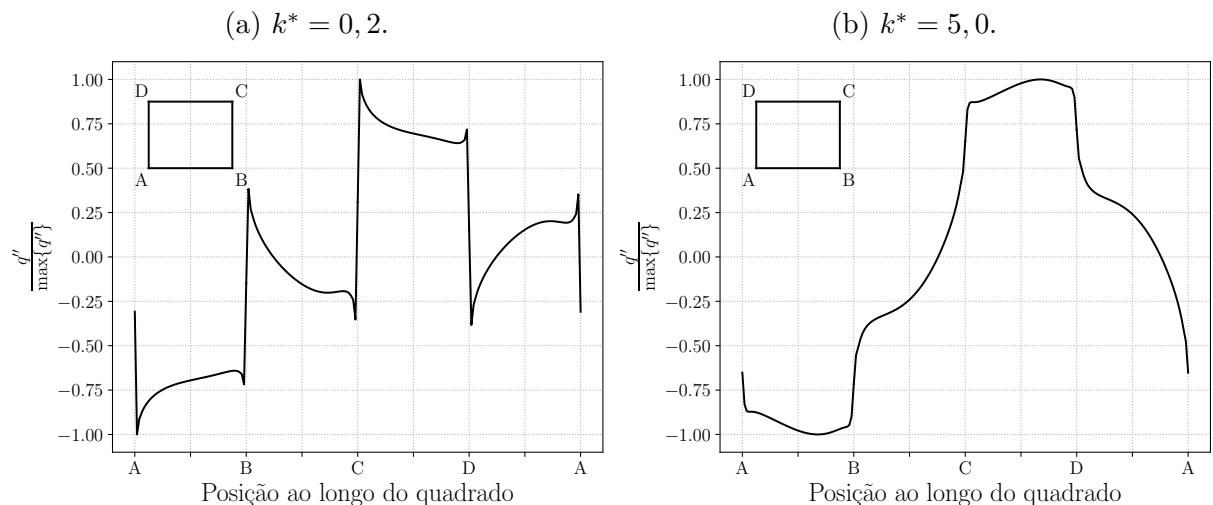
Por fim, nas figuras 48 e 49 adiante são apresentados os perfis de temperatura e de fluxo térmico adimensionalizados em torno do corpo imerso condutivo, respectivamente.

Figura 48 – Distribuição de temperatura ao longo das arestas do sólido condutivo quadrado em função de diferentes valores para a razão de condutividade térmica para  $Pr = 0,71$ ,  $Ra = 10^5$  e  $\chi = 0,5$ .



Fonte: Do próprio autor.

Figura 49 – Distribuição do fluxo térmico ao longo das arestas do sólido condutivo quadrado em função de diferentes valores para a razão de condutividade térmica para  $Pr = 0,71$ ,  $Ra = 10^5$  e  $\chi = 0,5$ .



Fonte: Do próprio autor.

Observa-se dos gráficos apresentados nas figuras 48 e 49 que, tanto a distribuição de temperatura quanto de fluxo térmico ao longo da superfície do corpo imerso não representam nenhuma das condições de contorno convencionais. Isto é, caso o problema fosse resolvido com a utilização de condições de contorno na interface imersa de temperatura constante ou superfície adiabática, os resultados obtidos estariam em divergência com a realidade física observada.

Desse modo, tanto a distribuição de temperatura quanto de fluxo térmico ao longo da fronteira do sólido imerso devem ser calculados através da metodologia utilizada para tratar de problemas de transferência térmica conjugada, uma vez que essas grandezas são desconhecidas como condição de contorno do problema.

## 6 Conclusão

No presente trabalho é apresentada a modelagem física, matemática e computacional para problemas de transferência térmica conjugada. As modelagens abrangem escoamentos bidimensionais, incompressíveis de fluidos newtonianos em regime transitório, onde é avaliada a dinâmica e o transporte e transformação de energia térmica. O subdomínio sólido é considerado estático e indeformável, dinamicamente, porém o transporte de energia térmica por efeitos condutivos é avaliado. A dinâmica e a termodinâmica do subdomínio fluido são modeladas através do método das diferenças finitas, enquanto a termodinâmica do subdomínio sólido é modelada através do método dos elementos finitos. A imposição das condições de contorno dinâmicas e térmicas na interface fluido-sólido, associadas à interação entre os dois subdomínios se dá pelo método da fronteira imersa.

Um código computacional particionado foi desenvolvido, onde é utilizado o acoplamento forte para combinar as soluções desacopladas, isto é, as soluções obtidas através das rotinas computacionais desenvolvidas de forma individual para cada um dos subdomínios, sendo combinadas através de processos iterativos. O subdomínio fluido é resolvido em um domínio bidimensional, euleriano, cartesiano e fixo, onde emprega-se da aproximação de Oberbeck–Boussinesq para o acoplamento térmico, enquanto utiliza-se da metodologia do passo fracionado para o acoplamento pressão velocidade. O subdomínio sólido é resolvido em um domínio também bidimensional, porém formado por elementos triangulares irregulares. Para a comunicação dos subdomínios através da interface, utiliza-se do método FFBT para imposição das condições de contorno na fronteira imersa do subsistema fluido e nas fronteiras do subsistema sólido.

Simulações são conduzidas, a fim de se verificar e validar os algoritmos computacionais implementados para cada meio, onde para o processo de verificação utilizou-se do método das soluções manufaturadas para a análise de ordem de convergência dos métodos numéricos implementados, enquanto no processo de validação diferentes casos foram conduzidos e os resultados foram confrontados com os resultados computacionais e experimentais divulgados na literatura. A ordem de convergência dois foi alcançada com os códigos computacionais destinados a ambos os subdomínios, o que era esperado em virtude dos métodos numéricos implementados. A partir dos resultados obtidos para os casos de validação, observa-se bastante concordância entre os resultados divulgados na literatura e os obtidos através da modelagem desenvolvida, indicando uma correta modelagem dos fenômenos físicos presentes nos escoamento e sua integração com um corpo sólido não isotérmico.

O presente trabalho foi proposto com o objetivo de dar continuidade ao tema de transferência térmica conjugada, o qual até então, foi desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) para tratar o problema da placa plana, sendo as malhas coincidentes entre os subsistemas fluido e sólido. Deste modo, com o presente trabalho implementou-se o método da fronteira imersa para o subdomínio fluido, e a utilização do método dos elementos finitos para o subdomínio sólido, a fim de se estender a aplicação da metodologia para problemas mais gerais, cujas geometrias do sólido imerso não sejam limitadas aos contornos das células da malha do domínio fluido.

Grandes são os desdobramentos desta dissertação em termos de pesquisa e desenvolvimento. A seguir, lista-se algumas sugestões de trabalhos futuros:

- Implementação de métodos de solução de sistemas não lineares mais robustos, como por exemplo o método de Broyden;
- Adaptação do código para utilização de fronteiras imersas nítidas (Ghost-Cell Method);
- Adaptação do código para utilização de outras formas de comunicação via interface, onde a simplificação de regime estacionário para a termodinâmica do subsistema sólido possa ser aplicável;
- Paralelização dos algoritmos desenvolvidos;
- Expansão da metodologia do subsistema fluido para escoamentos tridimensionais;
- Expansão da metodologia do subsistema sólido para corpos sólidos e cascas sólidas tridimensionais;
- Integração com a plataforma MFSim do MFLab;
- Acoplamento com modelos estruturais para o subdomínio sólido;
- Implementação da abordagem monolítica para o acoplamento térmico conjugado.

## Referências

- ANDRADE, J. R. *Métodos de fronteira imersa para corpos esbeltos: implementação e validação*. 133 p. Dissertação (Mestrado em Engenharias) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.14393/ufu.di.2015.415>>. Citado 3 vezes nas páginas 98, 99 e 100.
- BERGMAN, T. L. et al. *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. Tradução e Revisão Técnica: Fernando Luiz Pellegrini Pessoa e Eduardo Mach Queiroz. ISBN 978-85-216-2504-9. Citado na página 21.
- BERTHELSEN, P. A.; FALTINSEN, O. M. A local directional ghost cell approach for incompressible viscous flow problems with irregular boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 227, n. 9, p. 4354–4397, 2008. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.12.022>>. Citado 5 vezes nas páginas 32, 33 e 100.
- BEYER, R. P.; LEVEQUE, R. J. Analysis of a One-Dimensional Model for the Immersed Boundary Method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 29, n. 2, p. 332–364, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/0729022>>. Citado na página 35.
- BORGNAKKE, C.; SONNTAG, R. E. *Fundamentos da Termodinâmica*. 8. ed. São Paulo: Blucher, 2013. (Série Van Wijl). Coordenação e tradução: Roberto de Aguiar Peixoto. ISBN 978-65-212-0792-4. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 49.
- BOUSSINESQ, J. V. *Theorie analytique de la Chaleur*. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1903. Citado na página 49.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. ISBN 978-5-216-1756-3. Citado na página 108.
- CHANDRASEKHARAIAH, D. S.; DEBNATH, L. *Continuum Mechanics*. Academic Press, 1994. ISBN 978-0-12-167880-7. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/C2009-0-21209-8>>. Citado na página 40.
- CHARNEY, J. G.; FJÖRTOFT, R.; NEUMANN, J. V. Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation. *Tellus*, Taylor & Francis, v. 2, n. 4, p. 237–254, 1950. Disponível em: <<https://doi.org/10.3402/tellusa.v2i4.8607>>. Citado na página 62.
- CHORIN, A. J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, p. 745–762, 1968. ISSN 0025-5718. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1968-0242392-2>>. Citado 3 vezes nas páginas 54 e 55.
- CLARKE, D. K.; SALAS, M. D.; HASSAN, H. A. Euler calculations for multielement airfoils using cartesian grids. *AIAA Journal*, v. 24, n. 3, p. 353–358, 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.9273>>. Citado na página 33.
- COURANT, R.; FRIEDRICHHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, v. 11, n. 2, p. 215–234, 1967. Disponível em: <<https://doi.org/10.1147/rd.112.0215>>. Citado na página 62.

- COUTANCEAU, M.; BOUARD, R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. part 1. steady flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 79, n. 2, p. 231–256, 1977. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112077000135>>. Citado na página 100.
- DAVIS, G. D. V. Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 3, n. 3, p. 249–264, 1983. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/fld.1650030305>>. Citado 2 vezes na página 96.
- DIVO, E. et al. *Glenn-HT/BEM Conjugate Heat Transfer Solver for Large-scale Turbomachinery Models*. Orlando, 2003. 72 p. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/citations/20040000109>>. Citado na página 27.
- DORFMAN, A.; RENNER, Z. Conjugate Problems in Convective Heat Transfer: Review. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2009, p. 1–27, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2009/927350>>. Citado na página 23.
- DORFMAN, A. S. *Conjugate Problems in Convective Heat Transfer*. 1. ed. Boca Raton: CRC Press, 2009. (Heat Transfer). ISBN 978-1-42008237-1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1201/9781420082388>>. Citado na página 22.
- DUARTE, B. A. d. F. *Phase change modelling for non-isothermal flows: a mathematical, numerical and computational model for pure substances*. 169 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2018.795>>. Citado 7 vezes nas páginas 10, 95 e 96.
- FEDKIW, R. P. et al. A Non-oscillatory Eulerian Approach to Interfaces in Multimaterial Flows (the Ghost Fluid Method). *Journal of Computational Physics*, v. 152, n. 2, p. 457–492, 1999. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6236>>. Citado na página 33.
- GANGAWANE, K. M.; BHARTI, R. P.; KUMAR, S. Two-dimensional lattice Boltzmann simulation of natural convection in differentially heated square cavity: Effect of Prandtl and Rayleigh numbers. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, v. 93, n. 4, p. 766–780, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/cjce.22161>>. Citado 2 vezes na página 96.
- GAUSS, C. F. Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. In: *Werke*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011, (Cambridge Library Collection - Mathematics, v. 3). p. 165–196. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/CBO9781139058247.008>>. Citado na página 74.
- GDALEVICH, L. B.; KHUSID, B. M. Conjugate nonstationary heat transfer for a thin plate in the flow of an incompressible liquid. *Journal of engineering physics*, v. 20, n. 6, p. 748–753, 1971. ISSN 1573-871X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01122599>>. Citado na página 23.
- GHIA, U.; GHIA, K.; SHIN, C. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, v. 48, n. 3, p.

- 387–411, 1982. ISSN 0021-9991. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90058-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(82)90058-4)>. Citado 7 vezes nas páginas 9, 92, 93 e 94.
- GILES, M. B. Stability analysis of numerical interface conditions in fluid–structure thermal analysis. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 25, n. 4, p. 421–436, 1997. Disponível em: <[https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19970830\)25:4<421::AID-FLD557>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19970830)25:4<421::AID-FLD557>3.0.CO;2-J)>. Citado na página 24.
- GOLDSTEIN, D.; HANDLER, R.; SIROVICH, L. Modeling a No-Slip Flow Boundary with an External Force Field. *Journal of Computational Physics*, v. 105, n. 2, p. 354–366, 1993. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1081>>. Citado 2 vezes na página 35.
- HAELETERMAN, R. *Analytical study of the Least Squares Quasi-Newton method for interaction problems*. 224 p. Tese (Doutorado) — Ghent University, Ghent, 2009. Disponível em: <<https://biblio.ugent.be/publication/720660>>. Citado na página 26.
- HARLOW, F. H.; WELCH, J. E. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. *The Physics of Fluids*, v. 8, n. 12, p. 2182–2189, 1965. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1761178>>. Citado na página 57.
- HENSHAW, W. D.; CHAND, K. K. A composite grid solver for conjugate heat transfer in fluid–structure systems. *Journal of Computational Physics*, v. 228, n. 10, p. 3708–3741, 2009. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.02.007>>. Citado na página 24.
- HOUSE, J. M.; BECKERMANN, C.; SMITH, T. F. Effect of a centered conducting body on natural convection heat transfer in an enclosure. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, Taylor & Francis, v. 18, n. 2, p. 213–225, 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10407789008944791>>. Citado 5 vezes nas páginas 115 e 116.
- HUC, N. *Conjugate Heat Transfer*. 2014. Disponível em: <<https://www.comsol.com/blogs/conjugate-heat-transfer/>>. Acesso em: 16 fev. 2022. Citado na página 19.
- IQBAL, O.; ARORA, K.; SANKA, M. Thermal Map of an IC Engine via Conjugate Heat Transfer: Validation and Test Data Correlation. *SAE International Journal of Engines*, v. 7, n. 1, p. 366–374, 2014. ISSN 1946-3936. Disponível em: <<https://doi.org/10.4271/2014-01-1180>>. Citado na página 19.
- JEON, B. J.; KIM, Y. S.; CHOI, H. G. Effect of the reynolds number on the conjugate heat transfer around a circular cylinder with heat source. *Journal of Mechanical Science and Technology*, v. 26, n. 12, p. 3849–3855, Dec 2012. ISSN 1976-3824. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s12206-012-1010-6>>. Citado 2 vezes na página 116.
- JOHN, B.; SENTHILKUMAR, P.; SADASIVAN, S. Applied and Theoretical Aspects of Conjugate Heat Transfer Analysis: A Review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 26, n. 2, p. 475–489, 2019. ISSN 1886-1784. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11831-018-9252-9>>. Citado na página 22.
- KIM, J.; CHOI, H. An immersed-boundary finite-volume method for simulation of heat transfer in complex geometries. *KSME International Journal*, v. 18, n. 6, p. 1026–1035,

2004. ISSN 1738-494X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02990875>>. Citado 2 vezes na página 36.
- KIM, J.; KIM, D.; CHOI, H. An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, v. 171, n. 1, p. 132–150, 2001. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6778>>. Citado 2 vezes na página 99.
- KIM, J.; MOIN, P. Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, v. 59, n. 2, p. 308–323, 1985. ISSN 0021-9991. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(85\)90148-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(85)90148-2)>. Citado 3 vezes nas páginas 55 e 56.
- KINOSHITA, D. *Desenvolvimento e implementação da metodologia combinada fronteira imersa térmica e pseudoespectral de Fourier*. 164 p. Tese (Doutorado em Engenharias) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.14393/ufu.te.2015.58>>. Citado na página 63.
- KUMAR, I. On a conjugate heat transfer problem in a laminar boundary layer with blowing. *Inzh. -Fiz. Zh.*, v. 14, p. 781–791, 1968. Citado na página 22.
- LEVEQUE, R. J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. Philadelphia: SIAM, 1955. ISBN 978-0-898716-29-0. Citado na página 53.
- LEVEQUE, R. J.; LI, Z. The Immersed Interface Method for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients and Singular Sources. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 31, n. 4, p. 1019–1044, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/0731054>>. Citado na página 33.
- LI, Z.; LAI, M. The Immersed Interface Method for the Navier-Stokes Equations with Singular Forces. *Journal of Computational Physics*, v. 171, n. 2, p. 822–842, 2001. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6813>>. Citado na página 33.
- LIMA E SILVA, A.; SILVEIRA NETO, A.; DAMASCENO, J. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 189, n. 2, p. 351–370, 2003. ISSN 0021-9991. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00214-6](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00214-6)>. Citado na página 36.
- LINNICK, M. N.; FASEL, H. F. A high-order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains. *Journal of Computational Physics*, v. 204, n. 1, p. 157–192, 2005. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.09.017>>. Citado na página 100.
- LOGAN, D. L. *A First Course in the Finite Element Method*. 4. ed. Platteville: Thomson, 2007. ISBN 0-534-55298-6. Citado na página 69.
- LUIKOV, A. Conjugate convective heat transfer problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 17, n. 2, p. 257–265, 1974. ISSN 0017-9310. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(74\)90087-8](https://doi.org/10.1016/0017-9310(74)90087-8)>. Citado na página 23.

- LUIKOV, A.; ALEKSASHENKO, V.; ALEKSASHENKO, A. Analytical methods of solution of conjugated problems in convective heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 14, n. 8, p. 1047–1056, 1971. ISSN 0017-9310. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(71\)90203-1](https://doi.org/10.1016/0017-9310(71)90203-1)>. Citado na página 23.
- LUIKOV, A. et al. Heat transfer from a plate in a compressible gas flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 13, n. 8, p. 1261–1270, 1970. ISSN 0017-9310. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(70\)90067-0](https://doi.org/10.1016/0017-9310(70)90067-0)>. Citado na página 23.
- MATTHIES, H. G.; NIEKAMP, R.; STEINDORF, J. Algorithms for strong coupling procedures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 17, p. 2028–2049, 2006. ISSN 0045-7825. Fluid-Structure Interaction. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.032>>. Citado na página 26.
- MERRIKH, A. A.; LAGE, J. L. Natural convection in an enclosure with disconnected and conducting solid blocks. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 48, n. 7, p. 1361–1372, 2005. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.09.043>>. Citado 2 vezes na página 116.
- MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 37, n. 1, p. 239–261, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 35.
- MOHD-YUSOF, J. Combined immersed-boundary/B-spline methods for simulations of flow in complex geometries. In: *Annual Research Briefs*. Center for Turbulence Research: Stanford University, 1997. p. 317–327. Disponível em: <<https://web.stanford.edu/group/ctr/ResBriefs97/myusof.pdf>>. Citado 4 vezes nas páginas 35, 36 e 65.
- MONTENAY, A.; PATÉ, L.; DUBOUÉ, J. M. Conjugate Heat Transfer Analysis of an Engine Internal Cavity. In: *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2000: Power for Land, Sea, and Air*. Munique: ASME, 2000. (Heat Transfer; Electric Power; Industrial and Cogeneration, v. 3), p. 1–10. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/2000-GT-0282>>. Citado na página 28.
- NABBOUT, K. *Métodos de acoplamento para problemas com interação térmica entre fluido e sólido*. 116 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2020. Disponível em: <<http://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.514>>. Citado na página 24.
- NÓS, R. L. *Simulações de escoamentos tridimensionais bifásicos empregando métodos adaptativos e modelos de campo fase*. 179 p. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.11606/T.45.2007.tde-08052007-143200>>. Citado na página 87.
- OBERBECK, A. Über die Bewegungserscheinungen der Atmosphäre [On the Phenomena of Motion of the Atmosphere]. *Sitz. Ber. K. Preuss. Akad. Wiss.*, v. 383, p. 1129–1138, 1888. Citado na página 49.
- OBERKAMPF, W. L.; TRUCANO, T. G.; HIRSCH, C. Verification, validation, and predictive capability in computational engineering and physics. *Applied Mechanics Reviews*, v. 57, n. 5, p. 345–384, 2004. ISSN 0003-6900. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.1767847>>. Citado 2 vezes na página 80.

- OÑATE, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics*. Springer, 2013. v. 2. 472 p. (Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences, 1). ISBN 978-1-4020-8733-2. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8733-2>>. Citado na página 74.
- PADILLA, E.; CAMPREGHER, R.; SILVEIRA-NETO, A. Numerical analysis of the natural convection in horizontal annuli at low and moderate  $ra$ . *Revista de Engenharia Térmica*, v. 5, n. 2, p. 58–65, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.5380/reterm.v5i2.61852>>. Citado 6 vezes nas páginas 102, 103 e 105.
- PERELMAN, T. On conjugated problems of heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 3, n. 4, p. 293–303, 1961. ISSN 0017-9310. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(61\)90044-8](https://doi.org/10.1016/0017-9310(61)90044-8)>. Citado 3 vezes na página 22.
- PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *Journal of Computational Physics*, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972. ISSN 0021-9991. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(72\)90065-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(72)90065-4)>. Citado 5 vezes nas páginas 34, 35 e 64.
- RAMNATH, R. V. Asymptotics and perturbation. In: *Computation and Asymptotics*. 1. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012, (SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology). cap. 4, p. 33–50. ISBN 978-3-642-25749-0. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-642-25749-0>>. Citado na página 81.
- RIBEIRO NETO, H. *Modelagem matemática para a interação fluido-estrutura acoplando escoamentos incompressíveis e viga de Timoshenko*. 176 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016. Disponível em: <<http://doi.org/10.14393/ufu.di.2016.496>>. Citado na página 25.
- RIBEIRO NETO, H. *Modelagem matemática e computacional de interações fluido-sólido utilizando o método de fronteira imersa tipo ghost em ambiente paralelo e com malha adaptativa*. 128 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.14393/ufu.te.2021.412>>. Citado na página 33.
- RIZK, T.; KLEINSTREUER, C.; ÖZISIK, M. Analytic solution to the conjugate heat transfer problem of flow past a heated block. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 35, n. 6, p. 1519–1525, 1992. ISSN 0017-9310. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(92\)90041-P](https://doi.org/10.1016/0017-9310(92)90041-P)>. Citado na página 23.
- ROACHE, P. J. The Method of Manufactured Solutions for Code Verification. In: BEIS-BART, C.; SAAM, N. J. (Ed.). *Computer Simulation Validation: Fundamental Concepts, Methodological Frameworks, and Philosophical Perspectives*. Cham: Springer International Publishing, 2019. cap. 12, p. 295–318. ISBN 978-3-319-70766-2. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-3-319-70766-2\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-319-70766-2_12)>. Citado na página 82.
- SALARI, K.; KNUPP, P. *Code Verification by the Method of Manufactured Solutions*. Albuquerque, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.2172/759450>>. Citado na página 82.
- SAYAS, F. J. A gentle introduction to the Finite Element Method. *Lecture notes, University of Delaware*, 2015. Disponível em: <[https://team-pancho.github.io/documents/anIntro2FEM\\_2015.pdf](https://team-pancho.github.io/documents/anIntro2FEM_2015.pdf)>. Citado na página 71.

- SHIN, S. J.; HUANG, W.; SUNG, H. J. Assessment of regularized delta functions and feedback forcing schemes for an immersed boundary method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 58, n. 3, p. 263–286, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/fld.1706>>. Citado na página 34.
- SILVA, H. G. da; VILLAR, M. M. Verificação e validação de códigos computacionais. In: MANSUR, S. S.; VIEIRA, E. D. R.; NETO, A. da S. (Ed.). *Turbulência*. 1. ed. Rio de Janeiro: ABCM, 2010. v. 7, cap. 2, p. 51–94. Citado na página 80.
- SILVEIRA NETO, A. da. *Escoamentos Turbulentos - Análise Física e Modelagem Teórica*. Uberlândia: Composer, 2020. ISBN 978-6599036514. Citado na página 111.
- SPENCER, A. J. M. *Continuum mechanics*. Nova York: Dover Publications, 2004. ISBN 978-0-582-44282-5. Citado na página 38.
- STOKES, G. G. On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids. In: *Mathematical and Physical Papers*. Cambridge: Cambridge University Press, 1845, (Cambridge Library Collection - Mathematics, v. 1). p. 75–129. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/CBO9780511702242.005>>. Citado 4 vezes nas páginas 43, 44 e 47.
- STRIKWERDA, J. C. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. 2. ed. Pacific Grove: SIAM, 1989. ISBN 978-0-898716-39-9. Citado na página 62.
- TAYLOR, G. I.; GREEN, A. E. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences*, v. 158, n. 895, p. 499–521, 1937. ISSN 2053-9169. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1937.0036>>. Citado 2 vezes na página 84.
- TSENG, Y.; FERZIGER, J. H. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, v. 192, n. 2, p. 593–623, 2003. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.07.024>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- TU, J.; YEOH, G.; LIU, C. Chapter 4 - CFD Mesh Generation: A Practical Guideline. In: *Computational Fluid Dynamics (Third Edition)*. 3. ed. Butterworth-Heinemann, 2018. p. 125–154. ISBN 978-0-08-101127-0. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/B978-0-08-101127-0.00004-0>>. Citado 2 vezes na página 31.
- UDAYKUMAR, H. et al. A Sharp Interface Cartesian Grid Method for Simulating Flows with Complex Moving Boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 174, n. 1, p. 345–380, 2001. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6916>>. Citado na página 32.
- UHLMANN, M. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. *Journal of Computational Physics*, v. 209, n. 2, p. 448–476, 2005. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.03.017>>. Citado na página 98.
- VAN DER VORST, H. A. Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v. 13, n. 2, p. 631–644, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/0913035>>. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 77.

- VERSTRAETE, T.; BRAEMBUSSCHE, R. A novel method for the computation of conjugate heat transfer with coupled solvers. p. 1–17, 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1615/ICHMT.2009.HeatTransfGasTurbSyst.570>>. Citado na página 19.
- VERSTRAETE, T.; SCHOLL, S. Stability analysis of partitioned methods for predicting conjugate heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 101, p. 852–869, 2016. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.05.041>>. Citado 4 vezes nas páginas 26, 27, 28 e 29.
- VERZICCO, R. et al. Large Eddy Simulation in Complex Geometric Configurations Using Boundary Body Forces. *AIAA Journal*, v. 38, n. 3, p. 427–433, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/2.1001>>. Citado na página 36.
- VILLAR, M. M. *Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais*. 230 p. Tese (Doutorado em Engenharias) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14664>>. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 87.
- VISKANTA, R.; ABRAMS, M. Thermal interaction of two streams in boundary-layer flow separated by a plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 14, n. 9, p. 1311–1321, 1971. ISSN 0017-9310. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(71\)90180-3](https://doi.org/10.1016/0017-9310(71)90180-3)>. Citado na página 23.
- WANG, J. et al. Lattice Boltzmann simulations of thermal convective flows in two dimensions. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 65, n. 2, p. 262–286, 2013. ISSN 0898-1221. Special Issue on Mesoscopic Methods in Engineering and Science (ICMMES-2010, Edmonton, Canada). Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.07.001>>. Citado 2 vezes na página 96.
- WANG, Z.; FAN, J.; LUO, K. Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 34, n. 3, p. 283–302, 2008. ISSN 0301-9322. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2007.10.004>>. Citado 3 vezes nas páginas 20, 36 e 64.
- WANG, Z. et al. Immersed boundary method for the simulation of flows with heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 52, n. 19, p. 4510–4518, 2009. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.03.048>>. Citado 3 vezes nas páginas 20, 37 e 66.
- WHITE, F. M. *Viscous Fluid Flow*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2006. (McGraw-Hill series in mechanical engineering). ISBN 0-07-240231-8. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 48.
- WHITE, F. M. *Mecânica dos Fluidos*. 6. ed. Porto Alegre: McGraw Hill Brasil, 2011. Tradução: Mario Maro Fecchio, Nelson Manzanares Filho; Revisão Técnica: José Carlos Cesar Amorim. ISBN 978-85-8055-009-2. Citado na página 48.
- YE, T. et al. An Accurate Cartesian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 156, n. 2, p. 209–240, 1999. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999199963568>>. Citado na página 33.

ZHAO, F.; LIU, D.; TANG, G. Conjugate heat transfer in square enclosures. *Heat and Mass Transfer*, v. 43, n. 9, p. 907–922, Aug 2006. ISSN 1432-1181. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00231-006-0136-4>>. Citado 2 vezes na página 116.