

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
ENGENHARIA ELETRÔNICA E DE TELECOMUNICAÇÕES  
*CAMPUS PATOS DE MINAS*

GABRIEL NASCENTES DE OLIVEIRA

**ESTUDO DA APLICAÇÃO DE REDE DE *PETRI*  
EM UM *E-COMMERCE***

Patos de Minas - MG

2022

GABRIEL NASCENTES DE OLIVEIRA

**ESTUDO DA APLICAÇÃO DE REDE DE *PETRI*  
EM UM *E-COMMERCE***

Monografia apresentada à banca examinadora como requisito parcial de avaliação da disciplina de TCC2 da graduação em Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações, da Faculdade de Engenharia Elétrica, da Universidade Federal de Uberlândia, Campus Patos de Minas.

Orientadora: Profa. Dr.<sup>a</sup>. Karine Barbosa Carbonaro

Patos de Minas - MG

2022

GABRIEL NASCENTES DE OLIVEIRA

**ESTUDO DA APLICAÇÃO DE REDE DE *PETRI* EM UM  
*E-COMMERCE***

Monografia apresentada à banca examinadora como requisito parcial de avaliação da disciplina de TCC2 da graduação em Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações, da Faculdade de Engenharia Elétrica, da Universidade Federal de Uberlândia, Campus Patos de Minas.

Orientadora: Profa. Dr<sup>a</sup>. Karine Barbosa Carbonaro

Patos de Minas, 17 de agosto de 2022.

Profa. Dr<sup>a</sup>. Karine Barbosa Carbonaro (Orientadora) – UFU/FEELT

Profa. Dr<sup>a</sup>. Fabrícia de Matos Oliveira – UFU/FAMAT

Prof. Dr. Pedro Luiz Lima Bertarini – UFU/FEELT

Patos de Minas - MG

2022

## **Agradecimento**

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre estar comigo e abençoar todas as minhas escolhas e me dar forças para vencer os desafios.

Agradeço a minha mãe Rosa Mônica Pereira, por sempre acreditar no meu sucesso, me dar apoio em todos os momentos, ajudar a amenizar os momentos difíceis e deixar os momentos felizes melhores ainda.

Agradeço a minha orientadora Profa. Dra. Karine Barbosa Carbonaro por ter aceitado esse desafio, na pesquisa deste trabalho, por todos os momentos de conversa nas aulas e reuniões que fazem que esse período que passou ser especial.

Agradeço aos familiares e amigos, que em todos os momentos, deram o total apoio e moral para concluir essa graduação.

Agradeço a todos os meus professores pelos conhecimentos repassados e amizade.

Agradeço por fim, não menos importante, à instituição Universidade Federal de Uberlândia, sem a qual, nenhum objetivo poderia ser concluído.

## RESUMO

Os sistemas determinísticos são o sonho de muitos engenheiros porque você os domina e sabe qual o impacto as variações no início irão causar. Por outro lado, os sistemas probabilísticos se tornam mais amigáveis de se controlar por meio de alguma ferramenta matemática ou gráfica. Um *e-commerce* é um grande exemplo de sistema probabilístico que necessita de alguma ferramenta para auxiliar na sua modelagem e a Redes de *Petri* é uma delas. Ela é uma ferramenta de fácil interpretação e aplicação por ser simples e possibilitar aos usuários a chance de criar diversos sistemas com complexidades diferentes. Foi então abordado um sistema em que teve etapas que foram por sua vez aumentando a complexidade, começando com a primeira proposta da compra onde o cliente entra no sistema, verifica se tem ou não registro, efetua a compra e a finaliza, a segunda proposta é acrescentado às questões de organização e separação do pedido e então envio. A terceira proposta é aumentada a complexidade de alguns locais do sistema para melhor representar a realidade. Os resultados obtidos mostraram que o sistema com modelagem apresentou menores valores no decorrer dos seus lugares, acúmulo de fichas somente nos locais de transporte e uma quantidade de fichas na saída muito semelhante ao sistema sem modelagem. O sistema com modelagem é um modelo próximo de um *e-commerce* na realidade.

## ABSTRACT

Deterministic systems are the dream of many engineers because you have mastered them and know the impact variations will not have. On the other hand, probabilistic systems make it more user-friendly to control through some mathematical or graphical tool. An e-commerce is a great example of a probabilistic system that needs some tool to assist in its modeling and Petri Nets is one of them. It is an interpretation and application tool because it is simple and allows users to create different systems with different complexities. Steps to be initiated in the first purchase system, which were initiated in the first purchase system, which were initiated in the first purchase system, or not in the customer verification, the first proposal is added if the customer to the questions of organization and separation of the order and then ship. The third proposal is to increase the complexity of some places in the system to better represent reality. Values of the systems with and without modeling were collected and analyzed. The modeled system presented lower values along its places, accumulation of tokens where it is expected (transport locations) and a number of tokens at the exit very similar to the system without modelling. Soon it is more palpable, resembling reality more.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistemas: a) discretizado; b) discreto; c) a eventos discretos. ....	12
Figura 2 – Elementos básicos da Rede de <i>Petri</i> . ....	15
Figura 3 – Ocorrência de um evento no sistema. ....	16
Figura 4 – Exemplo de um sistema. ....	17
Figura 5 – Lugar com transição com mesma entrada/saída. ....	18
Figura 6 – Uma sequência simples de disparos. ....	19
Figura 7 – Exemplo de vetor característico. ....	20
Figura 8 – Representação de uma rede <i>k</i> -limitada. ....	23
Figura 9 – Sistema com possível bloqueio em <i>P1</i> . ....	24
Figura 10 – Modelo de <i>Petri</i> da Proposta I. ....	32
Figura 11 - Modelo de <i>Petri</i> da Proposta II. ....	34
Figura 12 - Modelo de <i>Petri</i> da Proposta III. ....	36
Figura 13 - Gráfico referente ao elemento entrada de clientes. ....	40
Figura 14 - Gráfico referente ao elemento Cliente CC. ....	40
Figura 15 - Gráfico referente ao elemento Cliente SC. ....	41
Figura 16 - Gráfico referente ao elemento Cliente cadastrado. ....	41
Figura 17 - Gráfico referente ao elemento Cliente logado. ....	42
Figura 18 - Gráfico referente ao elemento Produto no carrinho. ....	43
Figura 19 - Gráfico referente ao elemento Compra finalizada. ....	43
Figura 20 - Gráfico referente ao elemento Pagamento confirmado. ....	44
Figura 21 - Gráfico referente ao elemento Estoque / Nota fiscal. ....	45
Figura 22 - Gráfico referente ao elemento Pedido para envio. ....	45
Figura 23 - Gráfico referente ao elemento Pedido em rota. ....	46
Figura 24 - Gráfico referente ao elemento Entregue. ....	46
Figura 25 - Gráfico referente ao elemento Entrada cliente com 1000 fichas. ....	47
Figura 26 - Gráfico referente ao elemento Pedido em rota com 1000 fichas. ....	48
Figura 27 - Gráfico referente ao elemento Entrada cliente. ....	49
Figura 28 - Gráfico referente ao elemento Estoque. ....	49
Figura 29 - Gráfico referente ao elemento Pedido em rota. ....	50

## LISTA DE QUADROS E TABELAS

Quadro 1 - Probabilidades de Transição de Passo $n$ . .....	29
Quadro 2 - Interpretação dos elementos do Modelo de <i>Petri</i> da Proposta I.....	32
Quadro 3 - Interpretação das transições do Modelo de <i>Petri</i> da Proposta I. ....	33
Quadro 4 - Interpretação dos elementos novos do Modelo de <i>Petri</i> da Proposta II.....	33
Quadro 5 - Interpretação das transições do Modelo de <i>Petri</i> da Proposta II.....	35
Quadro 6 - Interpretação dos elementos novos do Modelo de <i>Petri</i> da Proposta III. ....	37
Quadro 7 - Interpretação das transições do Modelo de <i>Petri</i> da Proposta III. ....	37
Tabela 1 - Valores médios da Proposta I, sem modelagem.....	39
Tabela 2 - Valores de intervalo de confiança 95% da Proposta I, sem modelagem.....	39
Tabela 3 - Valores médios da Proposta I, com modelagem. ....	55
Tabela 4 - Valores de intervalo de confiança 95% da Proposta I, com modelagem. ....	55
Tabela 5 - Valores médios da Proposta II, sem modelagem. ....	56
Tabela 6 - Valores de intervalo de confiança 95% da Proposta II, sem modelagem. ....	56
Tabela 7 - Valores médios da Proposta II, com modelagem. ....	57
Tabela 8 - Valores de intervalo de confiança 95% da Proposta II, com modelagem.....	57
Tabela 9 - Valores médios da Proposta II, sem modelagem, com 1000 na entrada.....	58
Tabela 10 - Valores de intervalo de confiança de 95% da Proposta II,.....	58
Tabela 11 - Valores médios da Proposta II, com modelagem, com 1000 na entrada.....	59
Tabela 12 - Valores de intervalo de confiança de 95% da Proposta II, com modelagem, com 1000 na entrada.....	59
Tabela 13 - Valores médios da Proposta III, sem modelagem. ....	60
Tabela 14 - Valores de intervalo de confiança de 95% da Proposta III, sem modelagem. ....	61
Tabela 15 - Valores médios da Proposta III, com modelagem.....	61
Tabela 16 - Valores de intervalo de confiança de 95% da Proposta III, com modelagem.....	62



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	10
2	REFERENCIAL TEÓRICO .....	12
2.1	MODELAGEM .....	12
2.1.1	Sistemas discretos .....	12
2.1.2	Conceitos de sistema discreto .....	13
2.1.3	Máquinas de estado finito .....	13
2.2	REDE DE <i>PETRI</i> .....	14
2.2.1	Elementos básicos.....	14
2.2.2	Comportamento dinâmico .....	15
2.2.3	Conceitos de Rede de <i>Petri</i> .....	16
2.3	REDE DE <i>PETRI</i> PURA .....	17
2.3.1	Transição sensibilidade.....	18
2.3.2	Disparo de uma transição.....	18
2.3.3	Conflito e paralelismo.....	18
2.3.4	Sequência de disparos .....	19
2.3.5	Vetor característico .....	20
2.4	REDE DE <i>PETRI</i> E SISTEMA DE REGRAS .....	21
2.4.1	Sistema de regras .....	21
2.4.2	Propriedades do modelo .....	22
	<b>A. Rede marcada <i>k</i>-limitada .....</b>	22
	<b>B. Rede marcada viva .....</b>	23
	<b>C. Rede marcada reiniciável .....</b>	24
2.4.3	Propriedades estruturais.....	24
2.4.4	Rede de <i>Petri</i> temporal .....	24
2.5	REDE DE <i>PETRI</i> ESTOCÁSTICA.....	25
2.5.1	Duração de sensibilização estocástica .....	25

2.5.2	Obtenção de uma Cadeia de Markov .....	26
2.6	PROCESSO ESTOCÁSTICO .....	27
2.6.1	Processos Markovianos .....	28
2.6.2	Cadeia de Markov .....	28
2.6.3	Classificação de estados da Cadeia de <i>Markov</i> .....	30
2.6.4	Estados recorrentes e estados transientes .....	30
3.	MATERIAIS E MÉTODOS.....	31
3.1.	SOFTWARES.....	31
3.2.	PROPOSTA I.....	31
3.3.	PROPOSTA II .....	33
3.4.	PROPOSTA II MODIFICADA.....	35
3.5.	PROPOSTA III.....	35
4.	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....	38
4.1	ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS DA PROPOSTA I .....	38
1.1.	ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS DA PROPOSTA II .....	43
1.2.	ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS DA PROPOSTA II MODIFICADA ....	47
1.3.	ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS DA PROPOSTA III.....	48
5.	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	51
	ESTUDOS FUTUROS.....	52
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	53

# 1 INTRODUÇÃO

Em nosso cotidiano, alguns momentos em particular das nossas vidas, fazemos parte de um processo de um sistema existente. Este sistema pode se comportar de forma determinística como os semáforos por exemplo. Eles têm uma sequência que em um dado momento específico sabe-se qual é e será a posição dele. Por outro lado, o mercado financeiro comporta-se de uma forma probabilística porque em dado momento não se pode prever a posição em que ele irá se encontrar. Os sistemas comportam-se de duas formas ao longo do tempo: sistemas determinísticos que são governados por equações que com o passar do tempo obtém-se resultados conhecidos e os sistemas probabilísticos que com o passar do tempo não há exatidão nos resultados obtidos, gerando uma inconstância nos resultados (HILLER; LIBERMAN, 2006, p. 770).

Um sistema probabilístico pode ter Processos Estocásticos em sua composição. Estes processos estão relacionados a atividades nas quais não se tem controle, então é necessário modelos probabilísticos para que seja simulado a entrada de valores no sistema. Estes modelos têm a função de gerar valores aproximados para a realidade com base em características do sistema proposto. (PIETRANTONIO, 2009). Dentre os Processos Estocásticos existem variações e uma dessas variações é o Processo Markoviano. Este tipo de processo é dependente apenas do estado presente, logo ele é um denominado um processo sem memória (*memoryless*), não tem dependências dos eventos passados (NOGUEIRA, p. 3). Um exemplo disso são os *e-commerces* que de alguns anos para cá vem se destacando e se tornando cada vez mais presente na vida de muitos consumidores, sendo muito das vezes a primeira opção na hora de efetuar alguma compra.

Com o avanço da tecnologia, a necessidade de controlar sistemas probabilístico tornou-se necessário e próximo. Sendo assim, foram surgindo ferramentas para a modelagem desses sistemas e algumas baseiam-se em elementos matemáticos e uma delas é a Rede de *Petri*. Ferramenta de modelagem gráfica, que permite executar a simulação de um sistema proposto. Ela tem uma formalização matemática e a sua principal aplicação é em sistemas de eventos discretos (RAMALHO, 2011).

Se tratando então de modelagem gráfica, existem diversas ferramentas que são possíveis de serem utilizadas em uma mesma análise, de acordo com o que for exigido nela. A Rede de *Petri* é uma ferramenta capaz de fazer análises de sistemas que tem segmento lugar/transição,

permitindo então a formalização matemática e simulação, cabendo ao usuário então identificar se é ou não cabível a sua utilização (RAMALHO, 2011).

Contudo, o objetivo deste trabalho é estudar a aplicação de um mecanismo de modelagem a um sistema de *e-commerce*, utilizando a ferramenta de modelagem Redes de *Petri*. Para isso foi necessário estudar a modelagem de Redes de *Petri* juntamente a teoremas estocásticos e markovianos para ter autonomia quanto a adesão de valores nas transições, visualizar o comportamento do sistema, buscar ferramentas gráficas que fizessem a modelagem do sistema para então interpretar os resultados.

Após a etapa de modelagem faz-se necessário a etapa de testes e simulações. Nessa etapa têm-se algumas situações nas quais tem ações humanas imprevisíveis e por se tratar de pontos de incerteza recorre-se a Processos Estocásticos como forma de tratar quantitativamente esses fatos. Os Processos Estocásticos é uma forma de anexar uma variável aleatória indexada a uma outra variável (geralmente a variável tempo), logo ao longo do tempo são determinados valores aleatórios a ela. Dentro dos Processos Estocásticos temos processos que podem representar situações, respeitando a característica de cada situação, de forma que temos uma aproximação da realidade, com isso temos uma ferramenta para auxiliar na simulação de eventos que não tem padrões.

Essa monografia está dividida da seguinte maneira: Na sessão 2 são apresentados os conceitos teóricos sobre modelagem e

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesse capítulo são apresentados os temas referentes a modelagem e a sistemas discretos abordando conceitos deles, a técnica de Rede de *Petri* e conceitos e Processos Estocásticos.

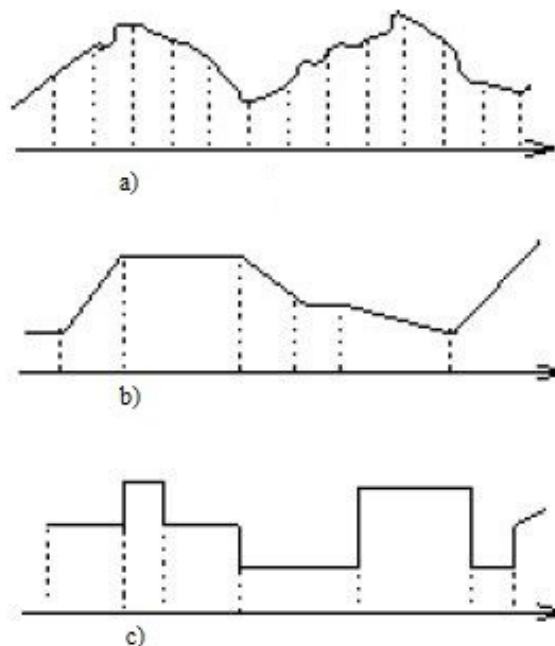
### 2.1 MODELAGEM

A modelagem utiliza técnicas para representar situações, equipamentos, problema e soluções nos permitindo sintetizar o modelo. O objetivo da modelagem é facilitar a visão de possíveis situações que possam ser alteradas e assim obter resultados diferentes do esperado sem a criação do produto com as tais alterações. O modelo é uma aproximação da realidade que nos entrega resultados próximos aos obtidos com o produto (RAMALHO, 2011, p. 4). Dentro os sistemas que podem ser modelados, existem os sistemas discretos e os sistemas contínuos.

#### 2.1.1 Sistemas discretos

De modo geral, têm-se dois tipos de sistemas: o discreto e o contínuo. O que difere um do outro é o que compõe o sistema. A Figura 1 apresenta sistema tendo marcações para ser discretizado, um sistema discreto e um sistema a eventos discretos.

Figura 1 – Sistemas: a) discretizado; b) discreto; c) a eventos discretos.



Fonte: (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 16).

Os sistemas discretizados são estudados somente em instantes precisos. Trata-se, portanto, de sistemas contínuos observados em instantes discretos (sistemas amostrados). Logo é somente em alguns instantes discretos do tempo que há interesse em conhecer seu valor.

Os sistemas discretos são sistemas para os quais os valores das variáveis de estado, ou ao menos de algumas delas, variam bruscamente a certos instantes.

Sistemas a eventos discretos são sistemas modelados de tal forma que as variáveis de estado variam bruscamente em instantes determinados e que os valores das variáveis nos estados seguintes podem ser calculados diretamente a partir dos valores precedentes dependendo dos estímulos externos.

### **2.1.2 Conceitos de sistema discreto**

Dentro da modelagem de um sistema discreto, são adotados alguns conceitos básicos (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 16-17):

- Os eventos são os instantes de mudança de estado e de observação dos sistemas;
- As atividades são blocos que ficam entre dois eventos, um de início e outro de fim;
- Os processos são uma sequência de eventos e de atividades independentes.

A evolução dos processos em um sistema pode ser de forma simultânea ou não. Na forma simultânea podem ser completamente independentes ou relativamente independentes. Quando eles são relativamente independentes indica que algumas atividades do processo podem ser totalmente independentes e outras necessitam de um sincronismo. As interações entre os processos podem ser de cooperação quando os processos buscam um objetivo comum, de competição quando o acesso a um dado recurso é limitado, de pseudo-paralelismo quando o paralelismo é apenas aparente e os eventos ocorrem de forma independente, mas nunca simultaneamente. Essa última forma é ordenada por um *clock* comum que executa uma função por vez. E por fim, as interações entre os processos podem ser de paralelismo verdadeiro que pode acontecer diversos eventos independentes.

### **2.1.3 Máquinas de estado finito**

Para fazer a representação de um sistema de eventos discretos, no qual tenha um número de estados finitos, é preciso descrever o próximo estado a partir do estado atual.

O modelo matemático desse sistema é  $M = (E, A, \theta, E_0)$ , chamado de máquina de estados finitos e consiste em um conjunto finito de estados  $E$  com um estado inicial  $E_0$ , um alfabeto de entrada  $A$  e uma função de transição de estado  $\theta: E \times A \rightarrow E$  que associa a cada par estado-entrada o próximo estado. (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 17)

Em situações em que existe a necessidade de descrever vários processos sequenciais torna-se fácil representar cada máquina em um estado finito. Caso as máquinas sejam dependentes, tanto por cooperação quanto por competição, tem-se um processo sequencial comunicante que cria uma comunicação entre as máquinas.

## 2.2 REDE DE *PETRI*

“A Rede de *Petri* é uma técnica de especificação formal bem estabelecida, largamente difundida e adequada para a modelagem de sistemas que tenham atividades paralelas, concorrentes, assíncronas e não-determinísticas” (MACIEL; LINS; CUNHA, 1996, p. 4).

Dentre as aplicações da Rede de *Petri* as áreas mais exploradas são da química, administração de empresas e com destaque nas áreas da ciência da computação e engenharias eletrônica, atuando em estudos para a especificação de sistemas de hardware ou software, avaliação de desempenho, especificação de protocolos de comunicação, diagnóstico de falhas entre outros (MACIEL; LINS; CUNHA, 1996, p. 4).

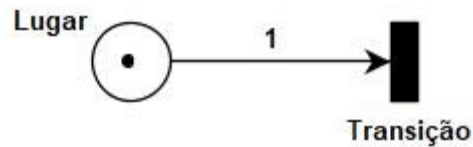
### 2.2.1 Elementos básicos

A Rede de *Petri*, é composta por quatro elementos básicos os quais são ilustrados na Figura 2 e são definidos como (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 22-23):

- **Lugar (representado por um círculo):** pode ser interpretado como uma condição, estado de espera, parcial, um estoque, posição geográfica em um sistema de transporte. De forma geral todo local tem um predicado associado, por exemplo, máquina livre.
- **Ficha (representado por um ponto, localizado no lugar):** indica o predicado do local, por exemplo, no local máquina livre tem uma ficha, isso indica que a máquina está livre, caso contrário a máquina não estaria livre.
- **Transição (representado por uma barra retangular):** indica que um evento ocorreu no sistema, por exemplo, máquina livre + peça em espera podem transacionar para uma máquina em operação.
- **Arcos (representado por uma flecha):** indica o sentido em que o sistema está movimentando. Pode ter um número acompanhando-o que informa a quantidade de

fichas necessárias para prosseguir naquele caminho. Caso não tenha esse número o valor o padrão é 1.

Figura 2 – Elementos básicos da Rede de *Petri*.



Fonte: Autoria própria.

Com a combinação dos elementos, pode-se descrever diversas situações abstratas, condições ou estado, e situações físicas, peças ou depósitos.

## 2.2.2 Comportamento dinâmico

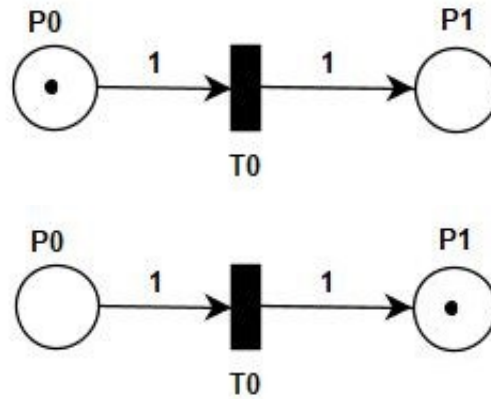
Em um sistema tem-se os lugares, fichas e transições. Na situação em que se tem as fichas em determinados lugares resulta em um estado do sistema. Quando ocorre um evento no sistema, ele está associado a uma transição que resultará na retirada das fichas dos lugares de entrada. Isso mostra que as condições daquele lugar não são mais verdadeiras e, portanto, as fichas são depositadas no lugar da saída da transição, que agora serão consideradas como verdadeiras (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 23-24).

Observe o exemplo ilustrado na Figura 3, um sistema com dois lugares que são  $p_0$  e  $p_1$ , uma transição  $t_0$ , uma ficha em  $p_0$  e dois arcos. Na primeira situação o  $p_0$  tem uma ficha que indica que aquele local é verdadeiro (sua representação), já na segunda situação ocorre a passagem  $t_0$ , em que o  $p_0$  deixa de ser verdadeiro e o  $p_1$  passa a ser verdadeiro.

Quando os lugares de entrada da transição têm as marcações  $M_i$  nas fichas, indica que pode ocorrer uma transição  $t$  que causa um evento  $e$  no sistema real. Todo o sistema antes no estado  $E_i$  irá para o novo estado  $E_{i+1}$  juntamente com o estado da entrada da transição para  $M_{i+1}$ . E assim sucessivamente, para cada nova transição do sistema cada lugar terá uma nova marcação enquanto o sistema estiver rodando (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 24).



Figura 3 – Ocorrência de um evento no sistema.



Fonte: Autoria própria.

### 2.2.3 Conceitos de Rede de *Petri*

Uma rede de *Petri* é uma quintupla conforme definida na Equação (2.1) (MACIEL; LINS; CUNHA, 1996, p. 6-7):

$$R = \langle P, T, Pre, Post, K \rangle \quad (2.1)$$

Onde,

$P$ - conjunto finito de lugares de dimensão  $n$  (ele representa os lugares);

$T$  - conjunto finito de lugares de dimensão  $m$  (ele representa as transições);

$Pre: P \times T \rightarrow N$  aplicação de entrada (lugares procedentes), com  $N$  sendo o conjunto de números naturais;

$Post: P \times T \rightarrow N$  aplicação de saída (lugares seguintes).

$K: P \rightarrow N$  é o conjunto das capacidades associadas a cada lugar, podendo assumir um valor infinito.

A Figura 4 ilustra um exemplo de um sistema que possui a seguinte caracterização:

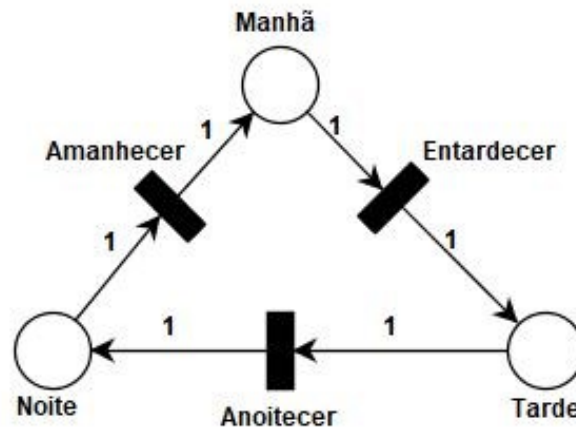
Os conjuntos de lugares  $P = \{Manhã, Tarde, Noite\}$ ;

Os conjuntos de transições  $T = \{Amanhecer, Entardecer, Anoitecer\}$ ;

A resposta em caso de entrada  $Pre = \{Pre(Amanhecer) = [Noite], Pre(Entardecer) = [Manhã], Pre(Anoitecer) = [Tarde]\}$ ;

A resposta em caso de saída  $Pos = \{Pos(Amanhecer) = [Manhã]; Pos(Entardecer) = [Tarde]; Pos(Anoitecer) = [Noite]\}$ .

Figura 4 – Exemplo de um sistema.



Fonte: Adaptado do livro (MACIEL; LINS; CUNHA, 1996, p. 7 e 9).

Com a rede de *Petri* definida, têm-se as marcações iniciais representada pela letra  $M$ . Ela é o número de fichas (*tokens*) contido em cada lugar  $P$  e é representada por um vetor coluna cujo a dimensão é a quantidade de lugares que tem no sistema (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 36).

A rede de *Petri* pode ser associada a grafo com dois tipos de nós: nós lugares e nós transições. Um arco pode ligar um lugar  $P$  a uma transição  $T$  se e somente se o  $Pre(P, T) \neq 0$ . Também, pode ligar uma transição  $T$  a um lugar  $P$  se somente se o  $Post(P, T) \neq 0$ . A partir das combinações possíveis,  $a_{ij} = Pre(p_i, t_j)$ , é feita a matriz de incidência anterior  $Pre$  de dimensão  $n \times m$ , onde o  $n$  representa o número de linhas que é igual ao número de lugares e o  $m$  o número de colunas que é o número de transições. A matriz incidência posterior é definida como  $b_{ij} = Post(p_i, t_j)$ . A matriz de incidência  $C$  é definida na Equação (2.2) (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 35 a 38).

$$C = Post - Pre \quad (2.2)$$

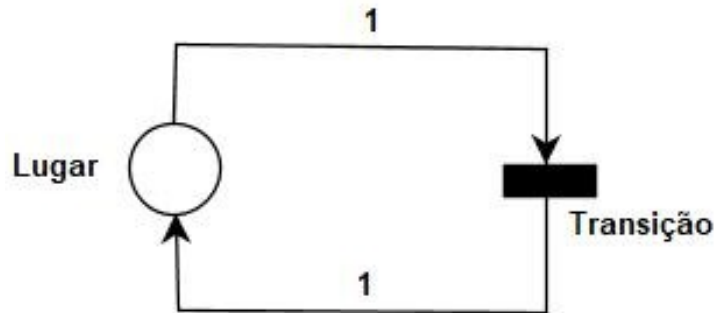
### 2.3 REDE DE *PETRI* PURA

Segundo a definição apresentada em (MACIEL; LINS; CUNHA, 1996, p. 18), uma rede de *Petri* é pura se e somente se:

$$\forall p \in P \forall t \in T Pre(p, t) * Post(p, t) = 0 \quad (2.3)$$

A Equação (2.3) representa que o sistema não pode ter nenhuma malha elementar, e que nenhuma transição pode possuir um mesmo lugar de entrada e saída ao mesmo tempo. A Figura 5 ilustra a representação do sistema.

Figura 5 – Lugar com transição com mesma entrada/saída.



Fonte: Autoria própria.

### 2.3.1 Transição sensibilidade

Segundo a definição apresentada em (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 37), uma transição  $t$  está sensibilizada ou habilitada se somente se:

$$\forall p \in P, M(p) \geq Pre(p, t) \quad (2.4)$$

A Equação (2.4) representa se o número de fichas em cada lugar da entrada de uma transição estiver igual ou maior do peso do arco a transição está habilitada.

### 2.3.2 Disparo de uma transição

Em uma situação em que  $t$  está sensibilizado por uma marcação  $M$ , será obtido uma nova marcação  $M'$  a partir do seu disparo conforme a Equação (2.5) (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 38).

$$\forall p \in P, M'(p) = M(p) - Pre(p, t) + Post(p, t) = M(p) - C(p, t) \quad (2.5)$$

### 2.3.3 Conflito e paralelismo

O conflito e o paralelismo podem existir na estrutura do modelo sem de fato acontecer, basta a estrutura ter a configuração que permite sua ocorrência. A ocorrência do conflito mostra

a existência, em um dado momento, de duas (ou mais) possibilidades que cancelam entre si. Já o paralelismo mostra que podem ocorrer diversas execuções ao mesmo tempo.

A Equação (2.6) modela duas transições  $t_1$  e  $t_2$  em **conflito estrutural**. Esse conflito acontece se e somente se elas têm ao menos um lugar de entrada em comum (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 39)

$$\exists p \in P, Pre(p, t_1) Pre(p, t_2) \neq 0 \quad (2.6)$$

Dois transições  $t_1$  e  $t_2$  estão em **conflito efetivo** para uma marcação, Equação (2.7), para a condição  $M$  se e somente se ambas estão em conflito estrutural e estão sensibilizadas (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 39):

$$\exists p \in P, Pre(p, t_1) Pre(p, t_2) \neq 0 \quad (2.7)$$

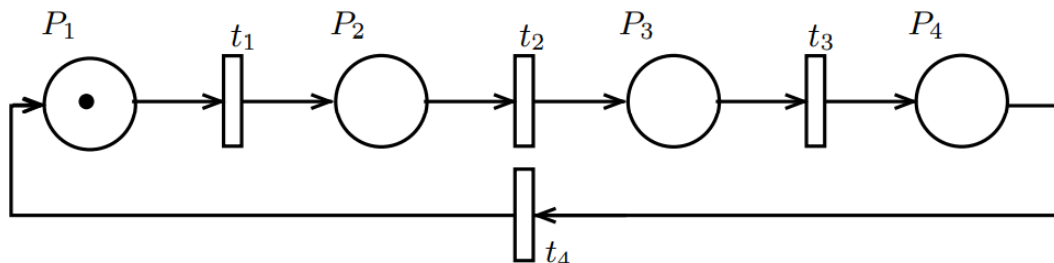
Dada situação em que temos duas transições  $t_1$  e  $t_2$  em que são paralelas estruturalmente se não possuem nenhum lugar de entrada em comum temos a Equação (2.8) (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 39):

$$\forall p \in P, Pre(p, t_1) Pre(p, t_2) = 0 \quad (2.8)$$

### 2.3.4 Sequência de disparos

A Figura 6 ilustra uma sequência de disparos que pode ser representada de forma simples.

Figura 6 – Uma sequência simples de disparos.



Fonte: Adaptado de Livro (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 40).

Observe que  $t_1$  está sensibilizada devido a marcação em  $p_1$ ,  $M_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ , que pode ser disparada, levando à nova marcação  $M_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ ,  $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1$ . Agora a  $t_2$  está

sensibilizada e pode ser disparada, levando  $M_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$ ,  $M_1 \xrightarrow{t_2} M_2$ . Isso que ocorreu foi uma sequência de disparos,  $t_1$  e  $t_2$ , que podem ser representados por  $s = t_1.t_2$ . E a representação dessa sequência de disparos é  $M_0 \xrightarrow{t_1 t_2} M_2$ .

### 2.3.5 Vetor característico

O vetor  $s(t)$  tem todas as componentes de transições que ocorreram em uma sequência de disparos. Na situação anterior, o vetor característico  $s = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $s(t_1) = 1$  indica que houve uma transição,  $s(t_2) = 1$  indica também apenas uma transição. Em situações, em que os valores são diferentes de um, mostrará a quantidade de vezes que aquela transição foi acionada (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 41).

No exemplo ilustrado na Figura 7, o vetor  $s(t)$  indica que a transição  $a$  foi acionada duas vezes e a  $b$  uma vez, já a  $c$  e  $d$  nenhuma vez.

Figura 7 – Exemplo de vetor característico.

$$s = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}$$

Fonte: (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 41)

Com a evolução da marcação da rede de *Petri* com uma sequência  $s = t_i, t_j, \dots, t_l$ , originou-se a *equação fundamental* da rede de *Petri* Equação (2.9) (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 41).

$$M' = M + Cs \text{ com } M \geq 0, s \geq 0 \quad (2.9)$$

Observe que o fato da existência do vetor característico não indica a ordem das transições. No exemplo anterior teve-se a indicação que houve a transição  $t_1$  e  $t_2$ , caso a ocorrência for nessa ordem,  $t_1 t_2$  é disparável, mas se a ocorrência for na ordem  $t_2 t_1$  não é disparável. A equação não é precisa porque leva em conta a ordem das transições, mas quando se conhece a aplicação, a equação torna-se coerente.

## 2.4 REDE DE *PETRI* E SISTEMA DE REGRAS

A rede de *Petri* pode ser vista no aspecto gráfico ou matricial. Ela possui características que podem fazer evoluir seu estado, a partir de regras que são representadas pelas transições. A rede de *Petri* é considerada um sistema que representa se o sistema tem a capacidade de executar a ação, ela será executada.

### 2.4.1 Sistema de regras

Um sistema de regras é formado por (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 44):

- **Base de fatos** - representado pelo conhecimento disponível sobre o sistema;
- **Base de regras** - permite a dedução de novos fatos;
- **Mecanismo de inferência** (ou motor de inferência) - permite a aplicação das regras aos fatos afim fazer novas deduções.

O mecanismo de inferência cria uma lista com as regras e as percorre sequencialmente. Se a regra é verdadeira no contexto atual, a regra é aplicada ou disparada. Se o mecanismo fez a rotação e não encontrou nenhuma regra aplicável ou se o sistema chegou no seu devido local, o mecanismo de inferência irá parar.

Em alguns contextos, muitas vezes tem-se a aplicação de várias regras criando resultados diversos, de acordo com a ordem escolhida. O mecanismo de inferência escolhe as regras da forma em que elas são propostas a ele, sem verificar as próximas ou a melhor sequência possível.

A comunicação entre redes de *Petri* e o sistema de regras é baseado nas seguintes questões (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 44-45):

- o conjunto de transições da rede, com suas condições e ações, representadas, respectivamente, pelos vetores  $Pre(.;t)$  e  $Post(.;t)$ , constituem a base das regras;
- a marcação inicial corresponde à base de fatos iniciais, ou contexto inicial;
- o controle é dado pela estrutura da rede: se as transições são paralelas, a ordem de disparo é indiferente; se as transições estão em conflito efetivo, apenas uma poderá ser disparada.

## 2.4.2 Propriedades do modelo

O modelo da rede de *Petri* marcada tem como propriedades: vivacidade, limitabilidade e reiniciabilidade, agrupadas em um nome genérico de boas propriedades (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 46). Suas definições implicam em considerações a respeito do conjunto de marcação acessível a partir das marcações iniciais. Esse modelo não permite a obtenção direta de algoritmos capazes de determinar se a propriedade é ou não verificada, pois o conjunto de marcações acessíveis não é sempre finito.

### A. Rede marcada $k$ -limitada

“**Lugar  $k$ -limitado e lugar binário:** um lugar  $p$  de uma rede marcada  $N$  é  $k$ -limitada se e somente se” (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 46):

$$\forall M' \in A(R, M), M'(p) \leq k \quad (2.10)$$

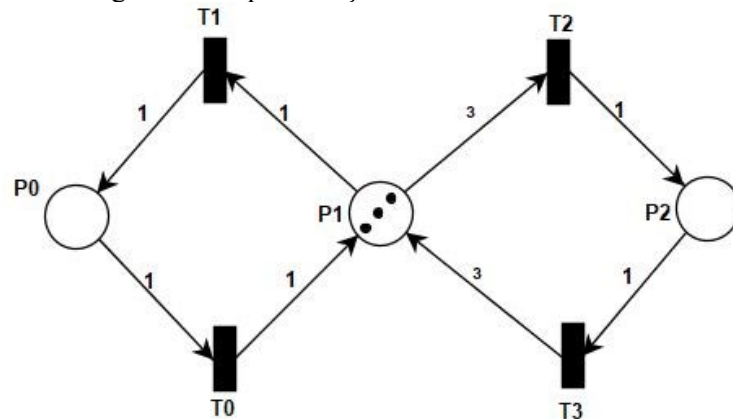
Para  $k = 1$  tem-se que o lugar é binário (*safe*).

**Rede de *Petri* marcada  $k$ -limitada e rede marcada binária:** uma rede marcada  $N$  é  $k$ -limitada (*bounded*) se e somente se todos os seus lugares são  $k$ -limitados. Uma rede marcada  $N$  é binária se e somente se todos os seus lugares são binários” (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 47).

O propósito da propriedade da rede ser limitada ou binária, devemos atentar a (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 47-48):

- A análise é feita a partir da rede marcada. Caso seja pego outra rede marcada do mesmo sistema, não há garantia de ter o mesmo resultado.
- O conceito de uma rede limitada corresponde ao fato de que um sistema físico é sempre limitado. Entretanto, pode ser analisado situações em que o sistema é ilimitado apenas avaliando seu desempenho.
- O conceito de uma rede binária em um sistema, é que seus lugares comportam apenas condições lógicas (0 e 1). Quando há 1 ficha indica a possibilidade de disparo enquanto 0 ficha indica a necessidade de aguardar a chegada de fichas do sistema.

A Figura 8 ilustra um sistema onde o  $P_0$  e  $P_1$  são limitadas a 3 unidades de fichas, logo são 3-limitadas, já o  $P_2$  é comporta apenas 1 unidade de ficha.

Figura 8 – Representação de uma rede  $k$ -limitada.

Fonte: adaptação do Livro (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 36).

## B. Rede marcada viva

**Transição quase viva:** Uma transição  $t$  é quase viva se é possível sensibilizá-la por uma marcação  $M'$  do grafo de marcações acessíveis a partir da marca  $M_0$ , através de uma sequência de transições  $s$ .

**Transição viva:** Em um sistema onde uma transição  $t$  deve poder ser sensibilizada a partir de qualquer marcação  $M'$  do grafo de marcações acessíveis.

**Rede marcada viva:** Uma rede de *Petri* marcada é viva se todas suas transições são vivas:

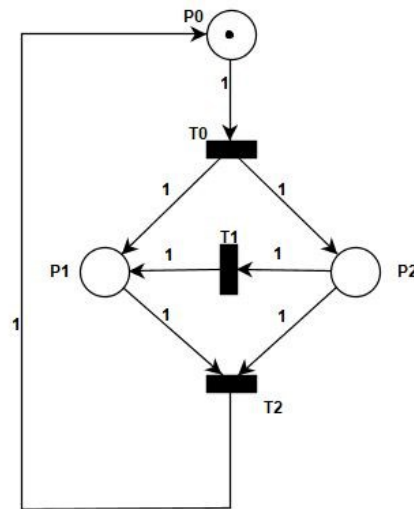
$$\forall t \in T, \forall M' \in A(R, M), \exists s | M' \xrightarrow{st} \quad (2.11)$$

Fatos importantes destacados no (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 49-50):

- Somente é considerada aqui a rede de *Petri* marcada;
- Em uma rede de *Petri* viva garante que não tenha nenhum bloqueio em sua estrutura, mas isso não prova a ausência de eventuais bloqueios provocados por uma má interação da rede de *Petri* e seu ambiente externo.
- Uma rede de *Petri* viva garante a ausência de partes mortas (locais que nunca sejam atingidas).

O sistema ilustrado na Figura 9 pode ocasionar um bloqueio caso  $M_0 \xrightarrow{t_0 t_1} M'$ , onde  $M' = [0 \ 2 \ 0]^T$ , logo nenhuma transição seria mais possível de ser acionada.



Figura 9 – Sistema com possível bloqueio em  $P_1$ .

Fonte: Autoria própria.

### C. Rede marcada reiniciável

Em um dado sistema  $A(R, M)$ , a partir de qualquer marcação acessível  $M'$ , é possível conseguir acessar a marcação inicial  $M_0$  depois de uma sequência de disparos  $s$  nos indica que a rede é reiniciável (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 50):

$$\forall M' \in A(R, M), \exists s \mid M' \xrightarrow{s} M. \quad (2.12)$$

### 2.4.3 Propriedades estruturais

As propriedades estruturais, diferentes das boas propriedades, são propriedades derivadas diretamente da estrutura da rede de *Petri* e que não depende da marcação inicial. Elas são definidas por meio dos componentes repetitivos estacionários e de componentes conservativos de lugar. A partir desses elementos são utilizadas as informações sobre a marcação para definir os invariantes de lugar e de transição que nos permitem identificar algumas informações sobre o comportamento dinâmico da rede de *Petri* (MACIEL; LINS; CUNHA, 1996, p. 94).

### 2.4.4 Rede de *Petri* temporal

Na rede de *Petri* temporal quando as transições tiverem intervalo de tempo  $(\theta_{min}, \theta_{max})$  indicará o momento em que ele será sensibilizado, ou seja, durante o período que está identificado na transição as fichas podem ser transacionadas.

No sistema que apresenta uma transição com os intervalos  $\theta_{min}$  e  $\theta_{max}$ , ela será sensibilizada quando a unidade de tempo for igual ou maior ao  $\theta_{min}$  e ficará até que seja igual ou menor ao  $\theta_{max}$ . Mas isso não impede que outras transições vejam essas fichas. O período é contado apenas quando se têm fichas nos lugares ou lugar que acessa a transição sensibilizada.

De forma formal, uma rede de *Petri* temporal é um par  $N_{tl} = \langle N; I \rangle$  (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 111-112).

Onde,

$N$  - Rede de *Petri*  $\langle P; T; Pre; Post, K \rangle$  com uma marcação inicial  $M_0$ ;

$(t) = [\theta_{min}(t); \theta_{max}(t)]$  - Função que, a cada transição  $t$ , associa um intervalo fechado racional que descreve uma duração de sensibilização.

## 2.5 REDE DE *PETRI* ESTOCÁSTICA

Quando as redes de *Petri* temporizadas são utilizadas para construir modelos realistas que permitem simular eventos discretos a fim de serem avaliados, tem-se a possibilidade de modificar a função  $\theta_f$  para associar às transições a saída de momentos aleatórios ao invés de um valor constante.

Já a rede de *Petri* temporal é utilizada em modelos que verificam um certo número de protocolos, mas o grafo de cobertura explode rapidamente quando os intervalos de tempo são muito diferentes. O principal problema encontrado vem do fato de que a descrição do estado dessas redes deve compreender a marcação e as informações temporais.

Para utilizar a potência da análise markoviana é necessário que os sistemas sejam sem memória do passado. Um evento que produz um disparo da transição  $t$  que irá mudar a marcação  $M_1$  para  $M_2$ , mas antes dessa transição ocorrer o sistema já deve identificar o que será sensibilizado por  $M_2$ .

As redes de *Petri* estocástica são definidas por distribuições geométricas e exponencias que verificam este fato de previsão, e assim, poderão construir um processo markoviano equivalente e conseguir analisar o comportamento da rede (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 113-114).

### 2.5.1 Duração de sensibilização estocástica

Na rede de *Petri* temporal, a duração da sensibilidade varia entre os valores de  $\theta_{min}$  e  $\theta_{max}$ . Já na rede de *Petri* estocástica, a duração da sensibilização é uma variável estocástica com uma distribuição de probabilidade exponencial (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 114).

$$Pr_{[\theta \leq \tau]} = 1 - e^{-\lambda\tau} \quad (2.13)$$

A função  $Pr_{\theta(\tau)}$  descreve que a probabilidade do disparo da transição  $t$  deve ocorrer antes de  $\tau$ , logo a duração máxima da sensibilidade para a acontece a transição é de  $\tau$ .

Integrando de 0 a  $\infty$  o valor médio da sensibilização tem-se que  $\lambda$  é a taxa de transição (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 114).

$$\bar{\theta} = \int_0^{\infty} (1 - Pr_{\theta(\tau)}) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} d\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (2.14)$$

Seguem as seguintes definições com base em (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 114):

- Uma rede de *Petri* estocástica é um par  $N_{tS} = \langle N; \Lambda \rangle$ ;
- $N$  é uma rede de *Petri* com uma marcação inicial;
- $\Lambda$  é uma função que associa, a cada transição  $t$ , uma taxa de transição  $\lambda(t)$ .

Isto equivale a associar a cada transição um intervalo contínuo de sensibilização  $[0; \infty)$  com uma distribuição exponencial. Isto explica por que o conjunto de marcações acessíveis é o mesmo que o da rede subjacente. A duração média de sensibilização é definida como  $\theta_s(t) = \frac{1}{\lambda(t)}$ .

## 2.5.2 Obtenção de uma Cadeia de Markov

Considere as marcações  $M_i$  e  $M_j$  acessíveis, e as seguintes situações:

- I. Tem apenas uma transição que  $M_i \xrightarrow{t_k} M_j$ , cujo a taxa de transição de  $M_i$  ao estado  $M_j$  é dada por  $\Lambda(t)$ .
- II. Tem duas transições  $t_k$  e  $t_m$  que fazem o mesmo,  $M_i \xrightarrow{t_k} M_j$  ou  $M_i \xrightarrow{t_m} M_j$ , logo a taxa de transição de  $M_i$  ao estado  $M_j$  é dada por  $\Lambda(t_k) + \Lambda(t_m)$ .

Com base na rede de *Petri* estocástica  $N_{tS} = \langle N, \Lambda \rangle$  pode-se construir uma cadeia de *Markov*. Os estados são as marcações acessíveis do conjunto  $A(R; M_0)$ . A matriz  $Q$  de taxas de transições escrita diretamente a partir da função  $\Lambda$ . A coluna  $j$  da matriz  $Q$  descreve a evolução da probabilidade  $\pi_j$  da marcação  $M_j$  no decorrer do tempo. O seu valor será negativo pois descreve a taxa de transição que permite abandonar o estado  $M_i$ .

O regime estacionário do processo markoviano é dado pelo vetor  $\Pi^*$  que é solução da Equação (2.15) (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 115).

$$\Pi^{*T}Q = 0 \text{ com } \sum_i \pi_i^* = 1 \quad (2.15)$$

Seja  $B$  uma propriedade que é verificada por um conjunto de marcações em (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 115).

$$Pr_B = \sum_{M_i \in EM} \pi_i \quad (2.16)$$

Utilizando a Equação (2.16) calcula-se o valor médio do número de fichas em um lugar.

A construção de uma cadeia de *Markov* a partir da rede de *Petri* estocástica permite realizar a análise desta rede (CARDOSO; VALETTE, 1997, p. 115).

- se a Rede de *Petri* é reiniciável, a solução da Equação (2.15) é única;
- o conjunto dos lugares que pertencem a um componente conservativo positivo é análogo a uma subcadeia de *Markov* fechada;
- um lugar não limitado corresponde a uma cadeia aberta. Devido ao problema de complexidade, é feita a restrição de redes de *Petri* limitadas ou possuindo no máximo um ou dois lugares não limitados (para uma dada marcação inicial);
- uma equação particular do sistema é descrita pela coluna  $j$  da matriz  $Q$  e corresponde à aplicação do teorema dos cortes em torno do nó correspondente a marcação  $M_j$ . Em regime estacionário, a derivada da probabilidade desta marcação é nula.

## 2.6 PROCESSO ESTOCÁSTICO

A teoria das probabilidades é o estudo matemático das probabilidades e o processo estocástico é um deles. Ele é da família de variáveis aleatórias e representa a evolução de um sistema de valores com o tempo. “É definido como uma coleção de variáveis randômicas ( $X(t)$ ) indexadas por um parâmetro  $t$  pertencente a um conjunto  $T$ . Regularmente  $T$  pertence ao conjunto dos inteiros não-negativos e  $X(t)$  representa alguma característica mensurável de interesse no tempo  $t$ ” (HILLER; LIBERMAN, 2006, p. 734-735).

O processo estocástico é a contraparte probabilística de um processo determinístico pois ele não tem apenas um modo de evoluir, mesmo que se conheça a condição inicial, existem várias direções nas quais o processo pode evoluir. Os processos estocásticos podem ser classificados como (NOGUEIRA, p. 1):

### I. Em relação ao Estado

Estado discreto (cadeia):  $X(t)$  é definido sobre um conjunto enumerável ou finito.

Estado contínuo (sequência):  $X(t)$  caso contrário.

### II. Em relação ao Tempo (Parâmetro)

Tempo discreto:  $t$  é finito ou enumerável.

Tempo contínuo:  $t$  caso contrário.

## 2.6.1 Processos Markovianos

Um processo estocástico é considerado um processo Markoviano se o estado futuro depende apenas do estado presente e não dos estados passados. Logo, tem-se a definição (HILLER; LIBERMAN, 2006, p. 736):

$$\begin{aligned} P\{X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} | X(t_k) = x_k, X(t_{k-1}) = x_{k-1}, \dots, X(t_1) = x_1, X(t_0) = x_0\} \\ = P\{X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} | X(t_k) = x_k\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_{k+1} = 0, 1, 2, \dots$  e toda sequência  $k_0, k_1, \dots, k_{t-1}, k_t, k_{t+1}$ .

A interpretação da Equação (2.17) é que a probabilidade condicional de qualquer evento futuro, dado qualquer evento passado e o estado presente  $X(t_k) = x_k$ , é independente do evento passado e depende somente do estado presente. Essa particularidade também pode ser denominada de *memoryless process* (processo sem memória), uma vez que o passado é “esquecido” (desprezado).

“As probabilidades condicionais  $P\{X(t_{k+1}) = x_{k+1} | X(t_k) = x_k\}$  são denominadas **Probabilidades de Transição** e representam a probabilidade do estado  $x(t_{k+1})$  ser  $x_{k+1}$  no instante  $t_{k+1}$  dado que o estado  $x(t_k)$  é  $x_k$  no instante  $t_k$ ” (NOGUEIRA, p. 2).

$$P\{X(t_{k+1}) = x_{k+1} | X(t_k) = x_k\} \quad (2.18)$$

## 2.6.2 Cadeia de Markov

Quando o processo Markoviano é uma Cadeia de *Markov*, ele é definido em um espaço de estado discreto na qual suas variáveis são randômicas, ele é nomeado como Cadeia de *Markov* em Tempo Discreto e definido segundo a Equação (2.19) (NOGUEIRA, p. 4).

$$P\{X(k+1) = x_{k+1} | X(k) = x_k, X(k-1) = x_{k-1}, \dots, X(1) = x_1, X(0) = x_0\} \quad (2.19)$$

$$P\{X(k+1) = x_{k+1} | X(k) = x_k\}$$

$\forall$  sequência  $0, 1, 2, \dots, k-1, k, k+1$ .

Com base na Equação (2.17), as Probabilidades de Transição são ditas **estacionárias**. Assim, a Probabilidade de Transição Estacionária implica que as Probabilidades de Transição não mudam em relação ao tempo, logo são denominadas **Probabilidades de transição de Passo 1** (NOGUEIRA, p. 4). De modo geral ela pode ser chamada de Probabilidade de Transição de Passo  $n$  para simplificarmos a notação da Equação (2.18):

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X(k+n) = j | X(k) = i\} \quad (2.20)$$

Onde  $p_{ij}^{(n)}$  são probabilidades condicionais e precisam satisfazer as seguintes propriedades (HILLER; LIBERMAN, 2006, p. 737).

$$p_{ij}^{(n)} \geq 0 \quad \forall (i, j); n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

$$\sum_{j=0}^M p_{ij}^{(n)} = 1 \quad \forall i; n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Todas as Probabilidades de Transição de Passo  $n$  são apresentadas no Quadro 1 (HILLER; LIBERMAN, 2006, p. 737).

Quadro 1 - Probabilidades de Transição de Passo  $n$ .

<b>Estado</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>...</b>	<b>M</b>
<b>0</b>	$p_{00}^{(n)}$	$p_{01}^{(n)}$	<b>...</b>	$p_{0M}^{(n)}$
<b>1</b>	$p_{10}^{(n)}$	$p_{11}^{(n)}$	<b>...</b>	$p_{1M}^{(n)}$
<b>.</b>	<b>.</b>	<b>.</b>	<b>...</b>	<b>.</b>
<b>M</b>	$p_{M0}^{(n)}$	$p_{M1}^{(n)}$	<b>...</b>	$p_{MM}^{(n)}$

Ou em forma de representação é utilizando a matriz  $P^{(n)}$ , (NOGUEIRA, p. 5).

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \dots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \dots & p_{1M}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{M0}^{(n)} & p_{M1}^{(n)} & \dots & p_{MM}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

### 2.6.3 Classificação de estados da Cadeia de *Markov*

Nos sistemas, é notável a importância das probabilidades de transição associadas ao estado na composição da Cadeia de *Markov*. Para definir melhor essa relação, é necessário alguns conceitos e definições.

“Um estado  $j$  é dito ser **alcançável** (*accessible*) a partir de um estado  $i$  se  $p_{ij}^{(n)} > 0$  para algum  $n \geq 0$ . Isto implica que é possível o sistema entrar no estado  $j$  eventualmente quando este começa no estado  $i$ ” (NOGUEIRA, p. 12). Esse contato entre os estados  $j$  e  $i$  pode se dizer que eles então se comunicam. Com isso tem-se:

- I. Qualquer estado se comunica consigo mesmo ( $p_{ii}^{(0)} = P\{X_0 = i | X_0 = i\} = 1$ ).
- II. Se o estado  $i$  se comunica com o estado  $j$ , então o estado  $j$  se comunica com o estado  $i$ .
- III. Se o estado  $i$  se comunica com o estado  $j$  e o estado  $j$  se comunica com o estado  $k$ , então o estado  $i$  se comunica com o estado  $k$ .

### 2.6.4 Estados recorrentes e estados transientes

Um estado **transiente** (Temporário, Efêmero, Transitório) se, entrando neste estado, o processo pode nunca retornar novamente para este estado. Portanto, o estado  $i$  é transiente se e somente se existe um estado  $j$  ( $j \neq i$ ) que é alcançável a partir do estado  $i$  mas não vice-versa. Assim, se o estado  $i$  é transiente e o processo visita este estado, há uma probabilidade positiva que o processo irá mover-se para o estado  $j$  e assim nunca irá retornar para o estado  $i$ . Conseqüentemente, um estado transiente será visitado somente um número finito de vezes (NOGUEIRA, p. 13).

Um estado **recorrente** se entrando nesse estado ele consiga retornar nele novamente infinitas vezes para um processo de tempo infinito (NOGUEIRA, p. 13).

“Um estado é dito ser absorvente se entrando neste estado, o processo nunca irá deixar este estado. Portanto, um estado  $i$  é absorvente se e somente se  $p_{ii} = 1$ ” (NOGUEIRA, p. 13).

Em uma Cadeia de *Markov*, um conjunto  $C$  de estados é dito ser um **conjunto fechado** se o processo ao entrar em um desses estados de  $C$  não for capaz de alcançar nenhum estado fora de  $C$ . Com isso, pode-se afirmar que  $C$  é um conjunto formado por estados recorrentes.

Nessa sessão foram apresentados os conceitos que serão utilizados no desenvolvimento das propostas de modelagem desenvolvidas na sessão 3, Matérias e Métodos.

### 3. MATERIAIS E MÉTODOS

Para a contextualizar o problema apresentado nesse trabalho será utilizada a situação de um processo de compra em um *e-commerce*. O intuito dessa contextualização é compreender o reflexo das mudanças determinadas pelas distribuições estatísticas, feitas no projeto e os seus impactos.

#### 3.1. SOFTWARES

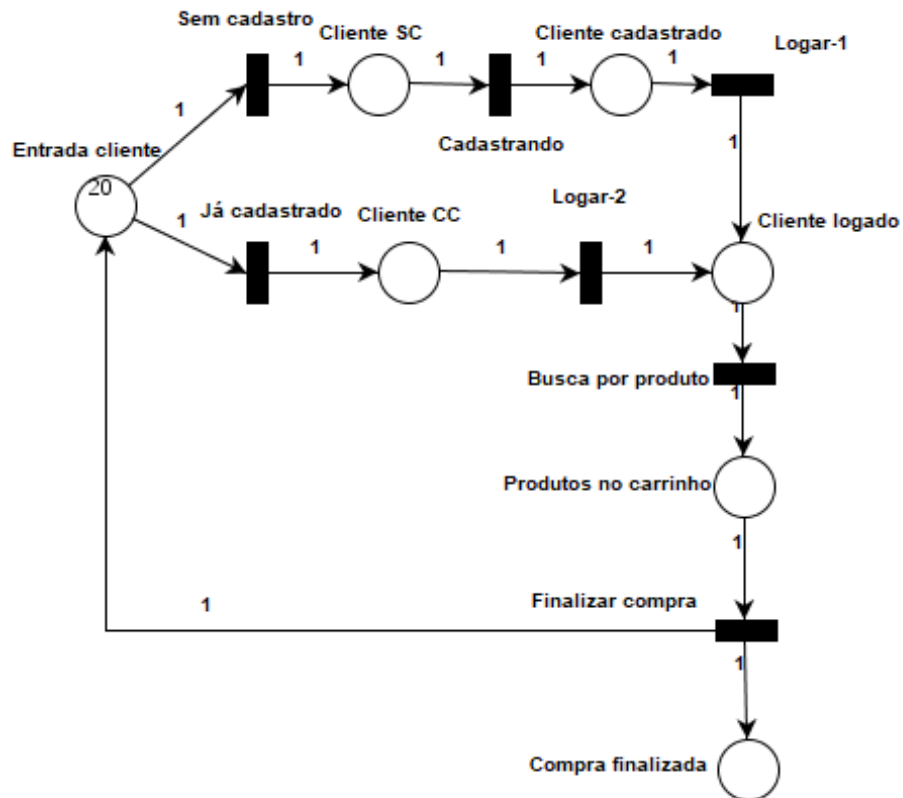
Nesse trabalho de conclusão de curso são utilizadas três ferramentas. O PIPE (*Plataforma Independente Petri Net Editor*) que é uma ferramenta de código aberto independente para criar e analisar Redes de *Petri*. Do pacote Office, o Excel foi utilizado para armazenar e organizar os valores obtidos do PIPE e o MATLAB na criação dos gráficos dos resultados.

#### 3.2. PROPOSTA I

O ato de efetuar uma compra de um produto em um *e-commerce* possui etapas. Cada etapa é definida como um processo e pode ser descrita e modelada. Para manter o controle do sistema, ele foi mantido fechado e com uma capacidade máxima de 20 pessoas na fila de entrada. O modelo de *Petri* completo do processo da Proposta I é ilustrado na Figura 10. Observe que o processo é iniciado no lugar que representa a entrada de clientes e, em seguida, é separado em duas sequências: clientes cadastrados e clientes não cadastrados. No final dessas sequências chegaram ao lugar cliente logado, que representa que o cliente está apto a efetuar as compras. Nas etapas seguintes serão efetuadas a separação e colocação de produtos no carrinho e a finalização da compra.

Será adicionado um controle na entrada do sistema, nas transições “Sem cadastro” e “Já cadastrado” para controlar a entrada. Esse controle refere a taxa de 0.7 a transição “Já cadastrado” e de 0,3 a transição “Sem cadastro”. Esses valores afetarão o tempo para cada transição ser executada.



Figura 10 – Modelo de *Petri* da Proposta I.

Fonte: Autoria própria.

O Quadro 2 mostra os elementos, e a interpretação de cada um deles, utilizados na modelagem da Proposta I.

Quadro 2 - Interpretação dos elementos do Modelo de *Petri* da Proposta I.

ELEMENTO	INTERPRETAÇÃO
Entrada cliente	entrada de clientes no sistema
Cliente CC	clientes com cadastro efetuado
Cliente SC	clientes que não têm cadastro
Cliente cadastrado	clientes que não tinham cadastro e, agora estão cadastrados
Cliente logado	clientes logados no sistema
Produtos no carrinho	local onde está tendo a adição de produtos no carrinho
Compra finalizada	finalizou a compra

Fonte: Autoria própria.

O Quadro 3 mostra as transições, e a interpretação de cada uma delas, utilizadas na modelagem da Proposta I.

Quadro 3 - Interpretação das transições do Modelo de *Petri* da Proposta I.

TRANSIÇÃO	INTERPRETAÇÃO
Sem cadastro	clientes que entraram no sistema e não têm cadastro ainda
Já cadastrado	clientes que entraram no sistema e já têm cadastro
Cadastrando	efetuar o cadastro
Logar-1	clientes que foram cadastrados estão fazendo para entrar no sistema
Logar-2	clientes que já têm cadastro vão fazer para entrar no sistema
Buscar por produto	ato da busca por produtos
Finalizar compra	finalização do processo

Fonte: Autoria própria.

### 3.3. PROPOSTA II

A partir dos resultados obtidos no desenvolvimento da Proposta I acrescentou-se outras etapas ao processo de entrega do pedido, tais como: estoque, nota fiscal, pedido para envio, pedido em rota e entregue. A Proposta II é a aplicação do fechamento do pedido até a entrega do pedido inseridos na Proposta I. E o modelo de *Petri* da Proposta II é ilustrado na Figura 11.

O controle dessa proposta será adicionado a transição “Atualizando rota” e “Rota finalizada” de 0,5 de taxa com a razão de que a empresa *e-commerce* quer a maioria dos seus produtos estejam em a caminho de serem entregues e isso é um trabalho que leva tempo.

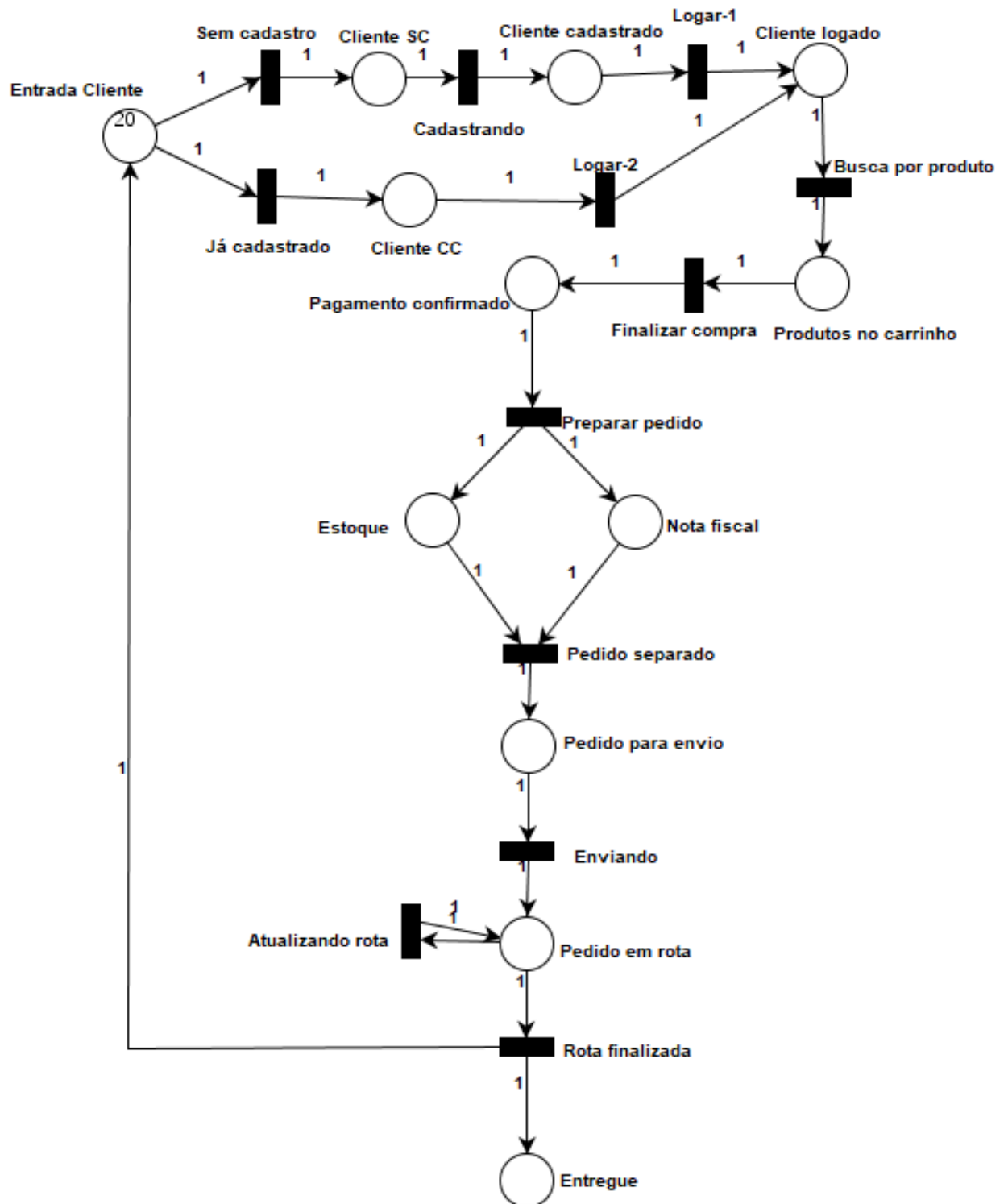
O Quadro 4 mostra os elementos novos, e a interpretação de cada um deles, utilizados na modelagem da Proposta II.

Quadro 4 - Interpretação dos elementos novos do Modelo de *Petri* da Proposta II.

ELEMENTO	INTERPRETAÇÃO
Pagamento confirmado	quantidade de pagamentos que foram confirmados e estão aguardando a próxima etapa
Nota fiscal	quantidade de notas fiscais que foram emitidas
Estoque	quantidade de produtos no estoque (sem controle de reposição)
Pedido para envio	os pedidos que já estão separados para serem enviados
Pedido em rota	quantidade de pedidos que estão em rota para serem entregues
Entregue	quantidade de pedidos entregues

Fonte: Autoria própria.

Figura 11 - Modelo de Petri da Proposta II.



Fonte: Autoria própria.

Além dos novos elementos também foram acrescentadas algumas transições descritas no Quadro 5.

Quadro 5 - Interpretação das transições do Modelo de *Petri* da Proposta II.

TRANSIÇÃO	INTERPRETAÇÃO
Preparar pedido	após a confirmação do pagamento, essa transição manda a solicitação para a nota fiscal ser emitida e para o estoque separar o pedido.
Pedido separado	com nota fiscal emitida e o pedido separado essa transição junta ambas as partes para esperar o envio.
Enviado	enviar o pedido pelo transporte.
Atualizando rota	alguns pedidos não passam em apenas um disparo para entrega (e sofrem atualizações) essa transição executa esse papel.
Rota finalizada	momento em que o produto é entregue para ao cliente.

Fonte: Autoria própria.

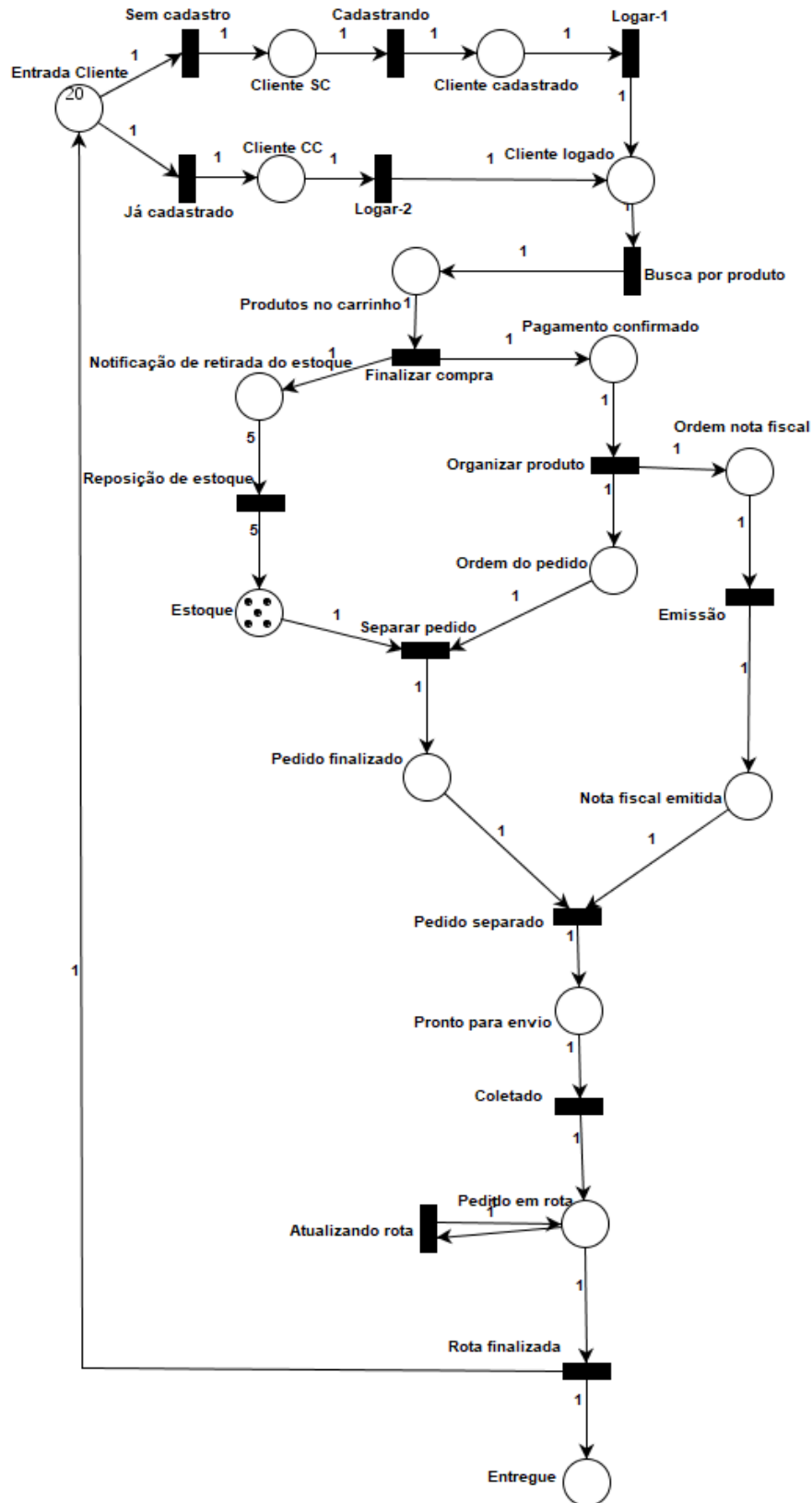
### 3.4. PROPOSTA II MODIFICADA

Após obter os resultados no desenvolvimento da Proposta II, foi feita uma modificação na entrada utilizando o valor de 1000 fichas. O intuito dessa modificação é avaliar o comportamento do sistema com uma demanda maior na entrada e, assim verificar o impacto da modelagem desenvolvida em uma maior proporção. Todas as demais especificações, modelagem, ordem de funcionamento foram mantidos iguais a Proposta II.

### 3.5. PROPOSTA III

Na estrutura da Proposta II, foi feito uma modificação na ideia da “Nota fiscal” e “Estoque” para assemelhar mais com as etapas que acontecem no decorrer do processo de compra em um *e-commerce*. O modelo de *Petri* da Proposta III é ilustrado na Figura 12.

O controle dessa proposta será adicionado a transição “Reposição de estoque” de 0,5 de taxa com a mesma razão do controle anterior, o serviço de transporte ser algo que demora mais.

Figura 12 - Modelo de *Petri* da Proposta III.

Fonte: Autoria própria.

O Quadro 6 mostra os novos elementos adicionados e suas interpretações.

Quadro 6 - Interpretação dos elementos novos do Modelo de *Petri* da Proposta III.

TRANSIÇÃO	INTERPRETAÇÃO
Notificação de retirada de estoque	após a finalização da compra, é notificado ao controle de estoque que houve uma saída do produto. São necessárias 5 notificações para ser efetuado a reposição no estoque.
Estoque	a partir das notificações o estoque varia de 0 a 5 produtos de acordo com a saída dos produtos.
Ordem nota fiscal	após a confirmação do pagamento, é liberado para que a nota fiscal seja emitida.
Ordem do pedido	após a confirmação do pagamento, é feito a ordem do pedido para então o pedido ser separado.
Pedido finalizado	com a ordem do pedido em mãos e o estoque tendo o produto, é feito a organização do pedido na embalagem para transporte.
Nota fiscal emitida	Após a ordem da nota fiscal ser acionada, ela é emitida.

Fonte: Autoria própria.

O Quadro 7 mostra as novas transições adicionadas e a interpretação de cada uma delas, utilizadas na modelagem da Proposta III.

Quadro 7 - Interpretação das transições do Modelo de *Petri* da Proposta III.

TRANSIÇÃO	INTERPRETAÇÃO
Reposição de estoque	é a transição que notifica o estoque para que seja efetuada a compra dos produtos em falta.
Organizar produto	após o pagamento confirmado, é avisado ao financeiro para a emissão da nota fiscal e ao almoxarife para separar o(os) pedido(os).
Emissão	com a ordem de emissão da nota fiscal, é então emitida.
Separar pedido	com a ordem do pedido e o produto em estoque, é organizado o pedido.
Pedido separado	Irá juntar o pedido com a nota fiscal e encaminhar para o envio.

Fonte: Autoria própria.

Uma entrada com o valor de 1000 fichas será utilizada por ilustrar melhor o reflexo da modelagem do sistema. A quantidade de disparos também será maior, com os seguintes valores: 100, 200, 300, 400, 500, 700, 900, 1200, 1600, 2000, 4000, 6000, 8000 e 10000.

Os resultados obtidos para os três modelos de *Petri*, descritos nessa sessão, são apresentados no Capítulo 4.

## 4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste Capítulo são apresentados os resultados obtidos para os três modelos de *Petri*, descritos no Capítulo 3, simulados no PIPE. Foram coletados dois tipos de resultados para o sistema sem modelagem e com modelagem. O sistema sem modelagem é o próprio sem nenhuma forma de controle, já o sistema modelado será acrescentado controle em determinadas transições para controlar o sistema. O objetivo da apresentação comparativa, desses dois resultados, é a análise do impacto da modelagem no sistema. O software PIPE fornece dois valores de resultado, a média de fichas em cada lugar do modelo e o intervalo de confiança de 95% deles. Esse intervalo de confiança de 95% está ligado a quanto de erro a minha média pode apresentar. Há situações em que a minha quantidade de valores é pequena (para calcular a média) e isso pode dar valores com uma falsa significância, mas isso acontece apenas nas situações com poucos disparos. Para melhor uniformidade dos valores, o software permite a execução da simulação diversas vezes e apresenta o valor da média do resultado. Foi selecionada a quantidade de repetição igual a 200 vezes por não achar necessário um valor maior que esse. Já em relação a quantidade de disparo (*firing*) foram utilizados os seguintes valores: 100, 200, 300, 400, 500, 700, 900, 1200, 1600 e 2000. O espaçamento inicial menor é porque o modelo tem uma maior variação nele e tende a estabilizar com o passar dos disparos.

### 4.1 ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS DA PROPOSTA I

Os primeiros resultados coletados nas simulações correspondem ao sistema sem modelagem caracterizado pelas transições não apresentarem duração da sensibilidade, conforme descrito na Equação 2.13. Esses resultados encontram-se a seguir nas Tabelas 1 e 2:

A Tabela 1 apresenta a média de quantidade de fichas em cada lugar depois da execução da quantidade de disparos especificada. E a Tabela 2 apresenta o intervalo de confiança de 95% da média de fichas nos lugares depois dos disparos. Ambos os valores são entregues pelo software e são referentes ao sistema sem modelagem.

Tabela 1 - Valores médios da Proposta I, sem modelagem.

Disparos	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000
Entrada cliente	8,406	2,960	3,648	3,229	1,473	2,080	1,638	1,458	1,191	1,550
Cliente CC	2,376	3,373	1,937	1,377	1,433	2,773	1,370	1,638	1,156	1,635
Cliente SC	2,178	1,448	1,216	1,012	0,988	0,980	0,563	1,425	1,022	1,155
Cliente cadastrado	1,693	0,711	0,877	0,893	0,796	1,454	0,718	0,746	0,982	0,872
Cliente logado	3,792	7,378	7,329	9,903	6,000	9,384	9,453	7,749	9,881	7,213
Produto no carrinho	1,554	4,129	4,993	3,589	9,309	3,330	6,259	6,984	5,769	7,575
Compra finalizada	6,564	14,388	24,668	35,671	44,583	68,886	89,761	123,606	166,295	212,357

Fonte: Autoria própria.

Tabela 2 - Valores de intervalo de confiança 95% da Proposta I, sem modelagem.

Disparos	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000
Entrada Cliente	3,921	2,004	1,315	1,031	0,868	0,670	0,573	0,460	0,381	0,338
Cliente CC	2,927	1,927	1,347	1,302	1,115	0,831	0,668	0,539	0,463	0,409
Cliente SC	3,208	2,018	1,468	1,226	0,929	0,847	0,658	0,610	0,523	0,403
Cliente cadastrado	1,813	1,792	1,707	1,109	0,943	0,672	0,630	0,592	0,507	0,415
Cliente logado	3,721	4,558	4,591	5,144	4,838	4,792	4,238	3,876	3,590	2,972
Produto no carrinho	2,276	3,545	4,500	4,843	4,594	4,743	4,178	3,796	3,644	2,944
Compra finalizada	2,103	1,806	1,733	1,812	1,737	1,987	2,020	2,217	2,552	2,779

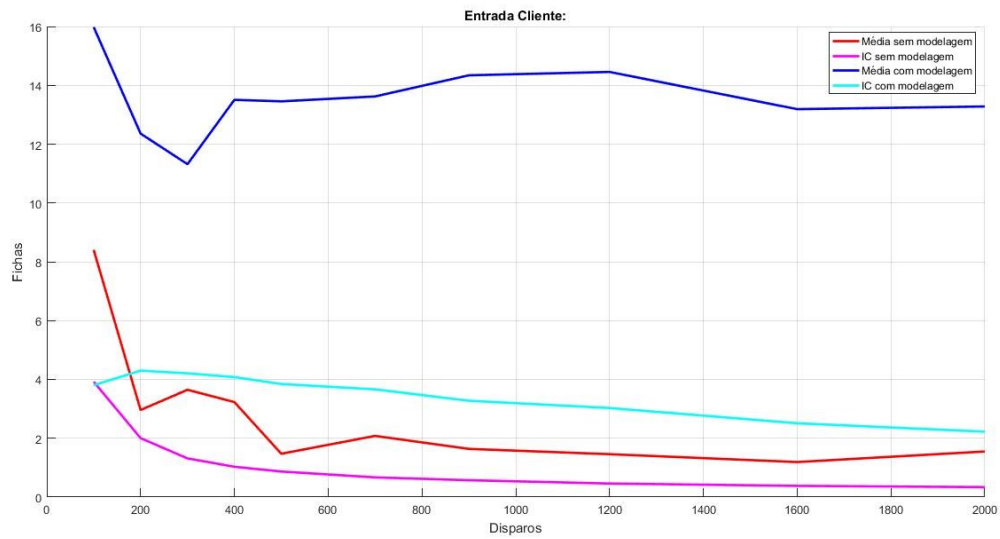
Fonte: Autoria própria.

A segunda sequência de resultados corresponde ao sistema com modelagem. Observe que as transições “Sem cadastro” e “Já cadastrado” tiveram sua duração da sensibilidade alterada conforme a Equação 2.13. O lugar de onde sai ambas as transições definem se o cliente tem ou não cadastro. Definiu-se que a cada 10 clientes, 7 já estariam cadastrados e 3 precisariam ser cadastrados. Portanto, a taxa foi de 0,7 para a transição “Já cadastrado” e 0,3 para a transição de “Sem cadastro”. As configurações da coleta dos dados foram as mesmas tanto quanto na quantidade de vezes para a média quanto na quantidade de disparos. Os resultados obtidos, nas configurações descritas, são mostrados nas Tabelas 3 e 4, Anexo A.

A Figura 13 ilustra o gráfico dos resultados obtidos para o elemento entrada de clientes. Observa-se que o sistema com modelagem controlou a entrada mantendo de 13 a 15 fichas nela. Já o sistema sem modelagem mostra que a partir de 400 disparos já estava com uma média de 2 fichas. Observe também que com o desenvolver dos disparos, o sistema tende a centralizar em um valor. O sistema sem modelagem centralizou o valor sempre tendo poucas pessoas na fila, enquanto, o sistema com modelagem com o passar dos disparos tende a diminuir o IC e ficar entre os valores 13 e 15.



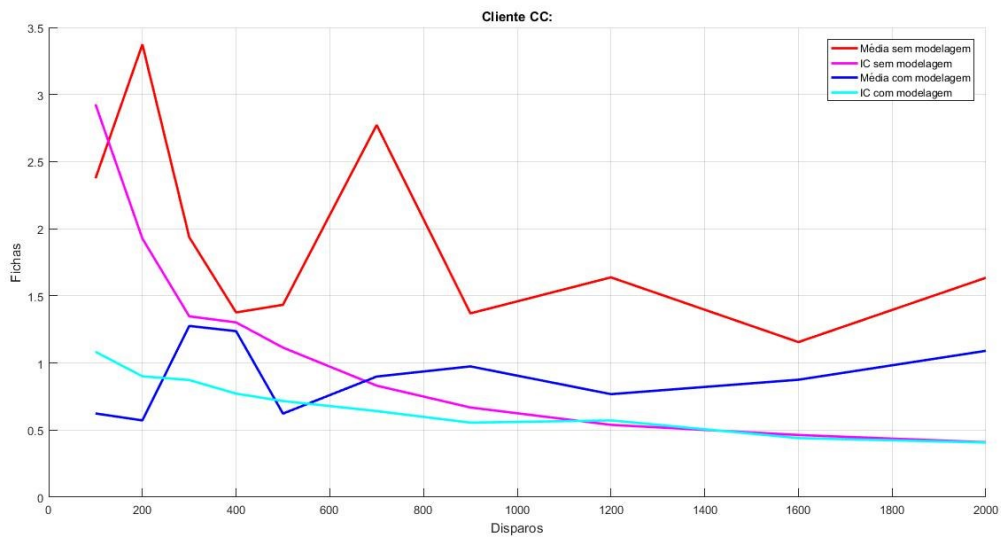
Figura 13 - Gráfico referente ao elemento entrada de clientes.



Fonte: Autoria própria.

A Figura 14 ilustra o gráfico dos resultados obtidos para o elemento Cliente CC.

Figura 14 - Gráfico referente ao elemento Cliente CC.

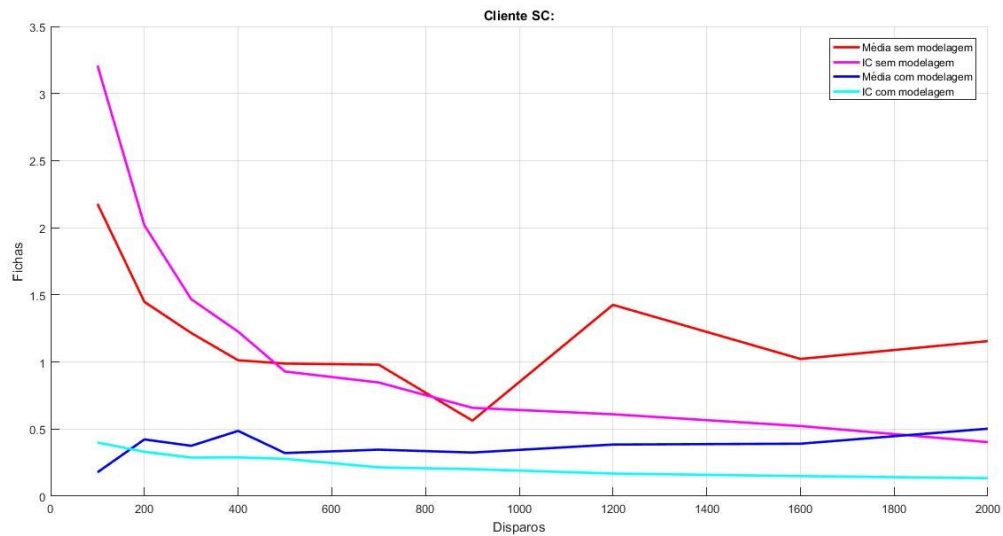


Fonte: Autoria própria.

Observa-se que no sistema sem a modelagem teve uma maior quantidade de fichas (simbolizando pessoas no local) e uma maior variação de valores. Já no sistema modelado, apresentou uma menor quantidade de fichas e variações mais leves. Ambos os sistemas com um intervalo de confiança diminuindo indicando estabilidade na variação do sistema.

A Figura 15 ilustra o gráfico dos resultados obtidos para o elemento Cliente SC. No sistema sem modelagem atingiu os maiores valores de média e teve uma maior variação de fichas. Já o sistema modelado atingiu a estabilidade da sua variação mais rapidamente. Os dois sistemas apresentaram intervalo de confiança diminuindo que indica uma estabilidade na variação do sistema.

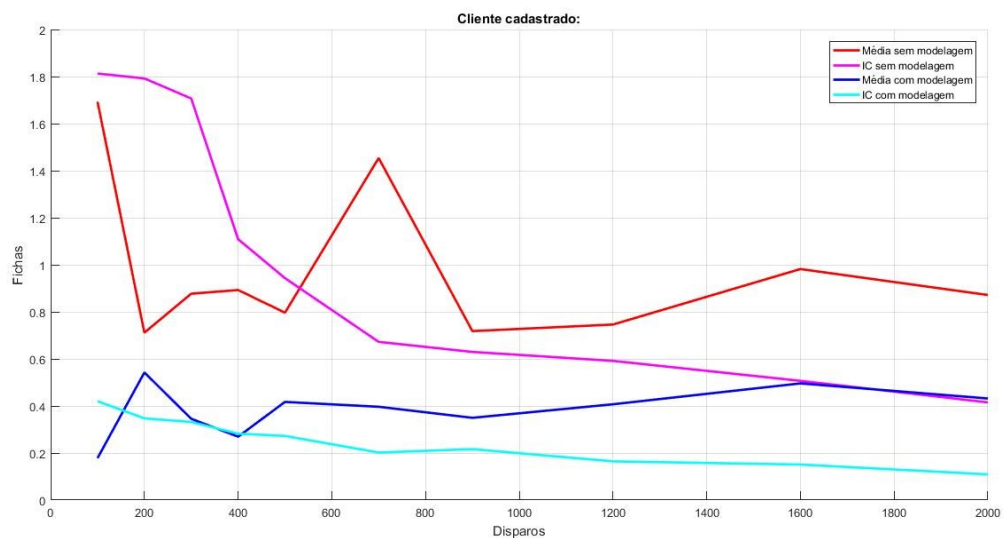
Figura 15 - Gráfico referente ao elemento Cliente SC.



Fonte: Autoria própria.

O gráfico dos resultados obtidos para o elemento Cliente cadastrado é ilustrado na Figura 16.

Figura 16 - Gráfico referente ao elemento Cliente cadastrado.

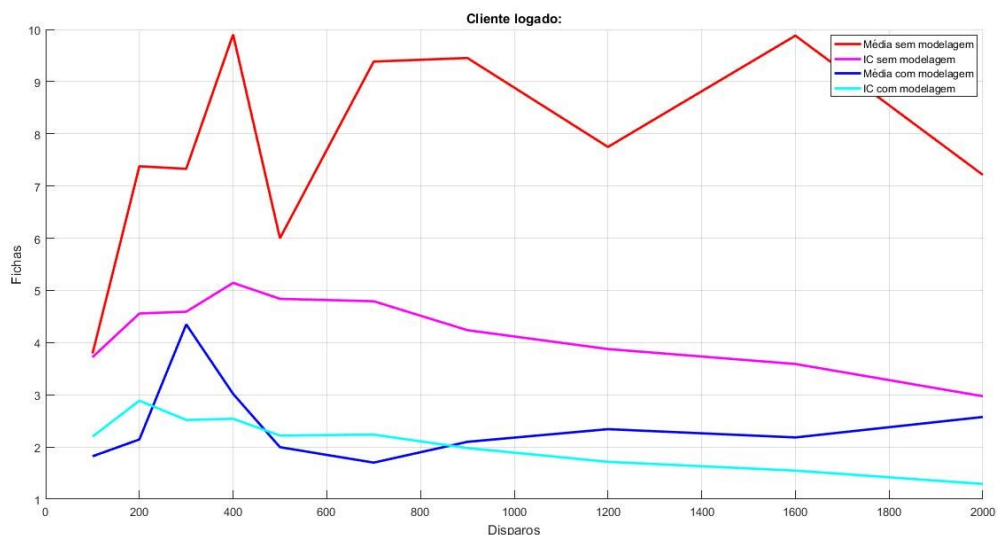


Fonte: Autoria própria.

O sistema sem modelagem teve variações bruscas e valores elevados comparados ao sistema com modelagem. Ambos os sistemas tiveram um intervalo de confiança diminuindo indicando estabilidade na variação do sistema.

A Figura 17 ilustra o gráfico dos resultados obtidos para o elemento Cliente logado. Foram obtidos valores elevados por ser um lugar onde é o encontro de duas rotas de processos do sistema. No sistema sem modelagem, ocorreram bruscas variações de fichas e o seu intervalo de confiança apresentou valor elevado comparado ao sistema modelado, podendo ter variações consideráveis. O sistema modelado elevou a quantidade de fichas no início, mas com o desenvolvimento dos disparos ele normalizou com base no seu intervalo de confiança.

Figura 17 - Gráfico referente ao elemento Cliente logado.



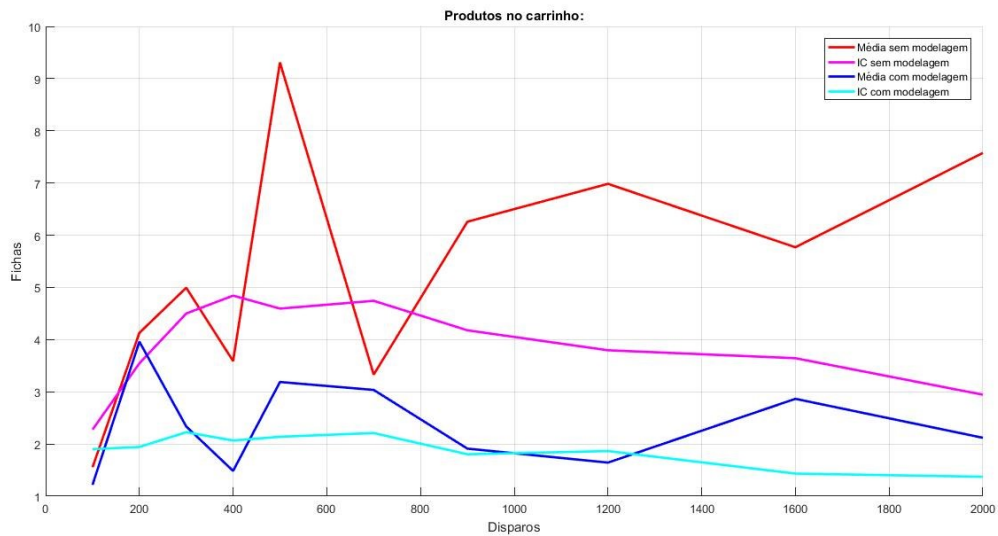
Fonte: Autoria própria.

O gráfico dos resultados obtidos para o elemento Produto no carrinho é ilustrado na Figura 18. Observou-se um grande fluxo de fichas e um crescimento no desenvolver dos disparos no sistema não modelado. Além disso, o seu intervalo de confiança mostra variações mais sutis. Para o sistema modelado foi observado um leve aumento nas fichas, mas na sequência foi normalizado com base no intervalo de confiança apresentado.

A Figura 19 ilustra o gráfico dos resultados obtidos para o elemento Compra finalizada. Os resultados mostraram que ambos os sistemas, modelado e sem modelagem, tiveram resultados muito semelhantes para esse elemento.

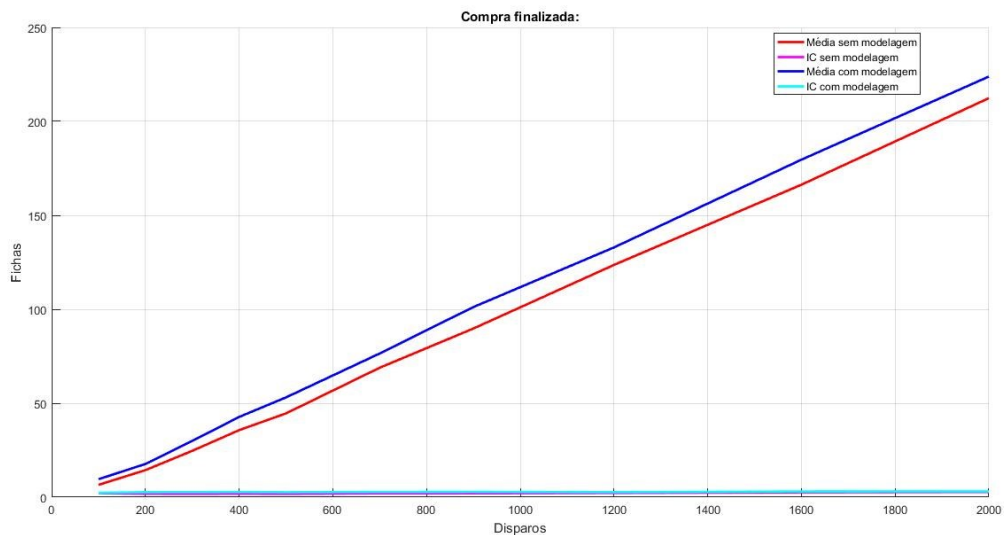
Os gráficos de resultados obtidos ilustrados nas Figuras 13 a 19 mostraram, de maneira geral, que o sistema sem modelagem estava trabalhando sempre com filas, sobrecarregando-o. E que no sistema com modelagem não tinham filas com muitas fichas em nenhuma etapa.

Figura 18 - Gráfico referente ao elemento Produto no carrinho.



Fonte: Autoria própria.

Figura 19 - Gráfico referente ao elemento Compra finalizada.



Fonte: Autoria própria.

## 1.1. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS DA PROPOSTA II

Os resultados obtidos, nas configurações descritas no início desse capítulo, são apresentados nas Tabelas 5 e 6, Anexo B.

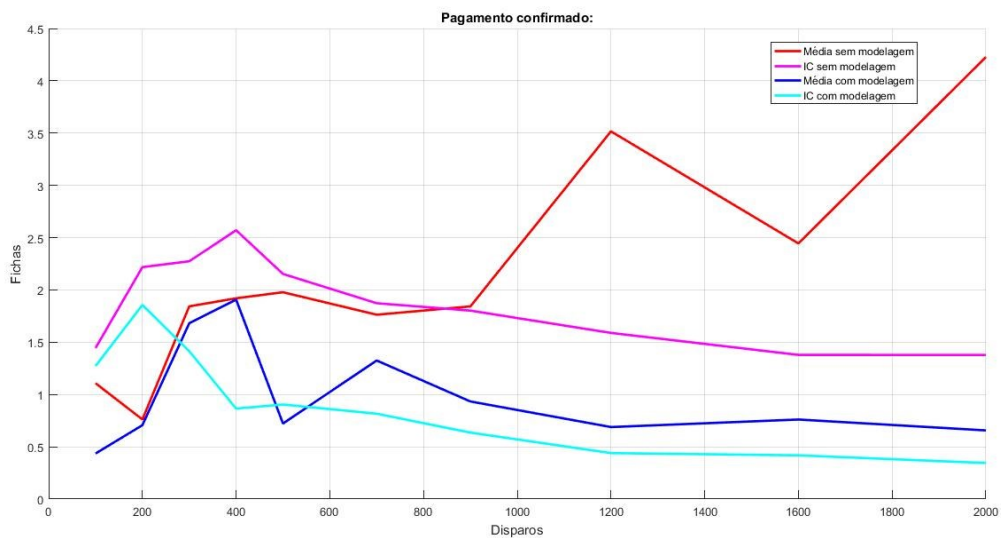
Na segunda etapa de coleta dos dados foram retiradas toda as modelagens feitas no início do projeto. Foi inserida a modelagem da Proposta I e as transições “Atualização de rota” e “Rota finalizada” para melhor representar a realidade do sistema. Ao chegar nesse lugar do processo é normal ter um acúmulo de fichas porque é comum ter uma quantidade “x” de pedidos no estado “em rota” e receber atualizações do local específico na rota de entrega até a chegada na

residência. Para essa representação foi adotado uma sensibilidade de 0,5 para ambos. Os resultados obtidos, nessas configurações descritas, são mostrados nas Tabelas 7 e 8, Anexo B.

A partir dos dados coletados foram feitos os gráficos para auxiliar na análise comparativa sem e com modelagem. Serão apresentados apenas os gráficos dos elementos adicionados a Proposta I porque os demais elementos tiveram o mesmo comportamento.

A Figura 20 ilustra o gráfico dos resultados obtidos para o elemento Pagamento confirmado.

Figura 20 - Gráfico referente ao elemento Pagamento confirmado.



Fonte: Autoria própria.

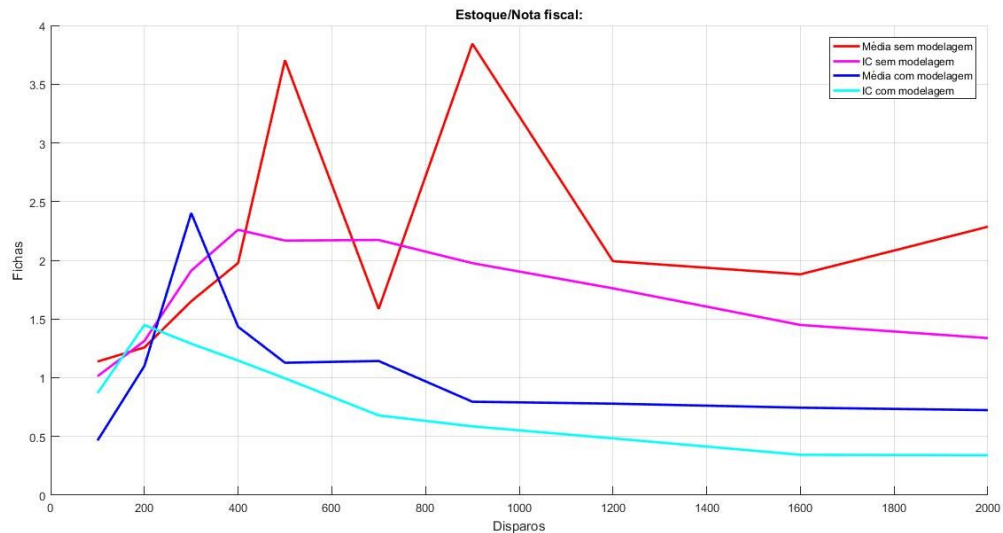
Esse elemento é referente a confirmação de pagamento com reflexos da ausência de modelagem do início. O sistema sem modelagem apresenta sobrecarga devido à falta de controle na entrada tendo um intervalo de confiança em queda limitando as drásticas mudanças de valores. Já o sistema modelado apresenta pequenos valores e um intervalo de confiança pequeno limitando as drásticas mudanças de valores.

A Figura 21 ilustra o gráfico dos resultados obtidos para o elemento Estoque / Nota fiscal. Esses elementos são apresentados no mesmo gráfico por serem elementos em paralelo, após o pagamento confirmado é emitido o sinal para ambos e eles são finalizados juntos.

O sistema com modelagem apresentou entre os disparos 600 e 800 uma quantidade maior de fichas comparativamente ao sistema sem modelagem, mas na sequência dos eventos diminuiu esse valor. No sistema sem modelagem, após esse controle do sistema com modelagem, teve variações bruscas e o aumento na sequência. Ambos os intervalos de

confiança tendem a diminuir. Observe que no sistema sem modelagem, os valores estão acima do outro mostrando um controle nas variações bruscas.

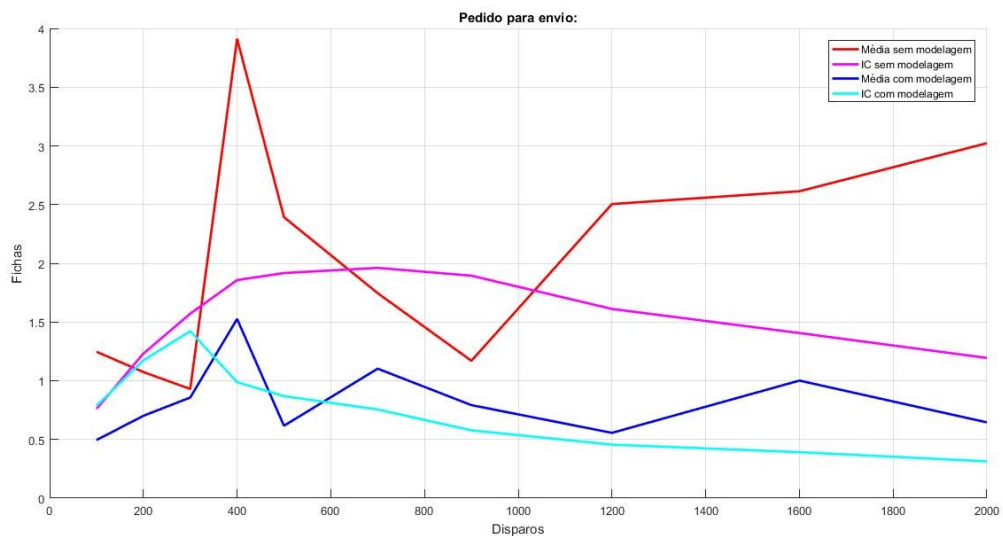
Figura 21 - Gráfico referente ao elemento Estoque / Nota fiscal.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 22 é ilustrado o gráfico dos resultados obtidos para o elemento Pedido para envio. Os resultados obtidos para o elemento Pedido para envio que mostram que o sistema sem modelagem está sobrecarregado enquanto o sistema modelado não está. O intervalo de confiança, dos dois sistemas, diminui indicando um controle nas suas variações.

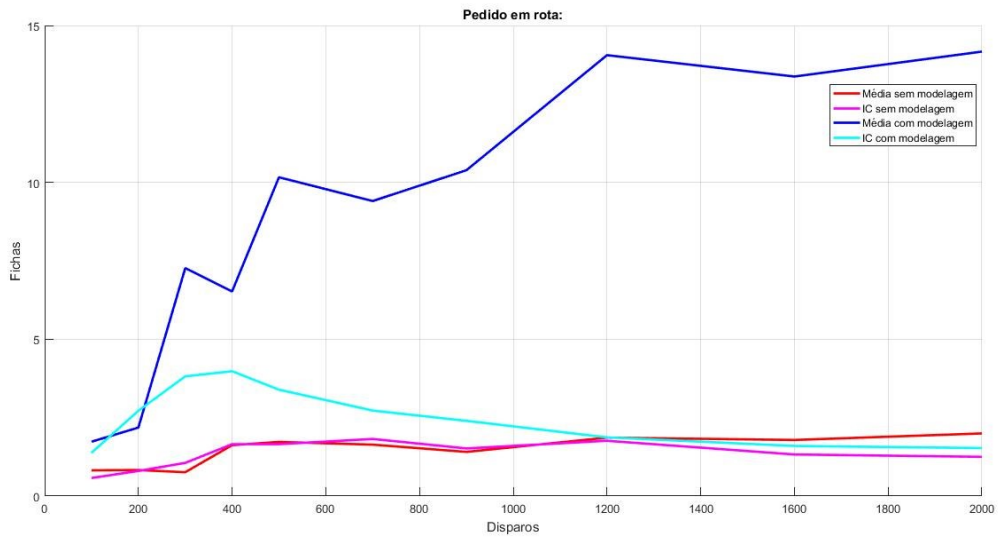
Figura 22 - Gráfico referente ao elemento Pedido para envio.



Fonte: Autoria própria.

O gráfico ilustrado na Figura 23 mostra os resultados obtidos do elemento Pedidos em Rota.

Figura 23 - Gráfico referente ao elemento Pedido em rota.

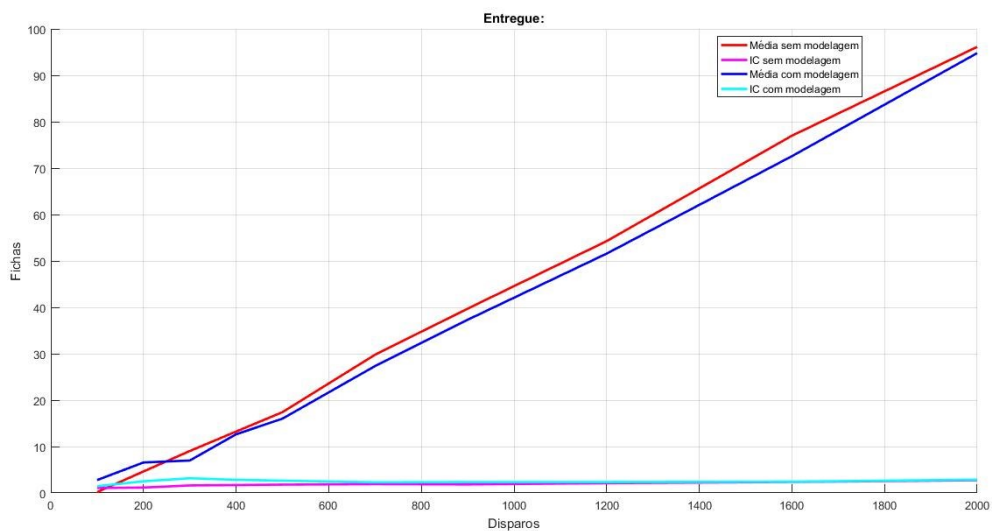


Fonte: Autoria própria.

Como visto, esse elemento do processo tende a ter muitas fichas devido ao fato de que é um lugar onde é comum ter muitos elementos a serem entregues e, por isso, pode precisar de mais tempo que o restante do processo. Observe que o sistema modelado apresenta alto índice de fichas comparado ao sem modelagem. Os dois sistemas apresentam intervalo de confiança diminuindo levando a compreensão que não haverá mudanças bruscas de valores nas médias.

A Figura 24 ilustra o gráfico dos resultados do elemento Entregue.

Figura 24 - Gráfico referente ao elemento Entregue.



Fonte: Autoria própria.

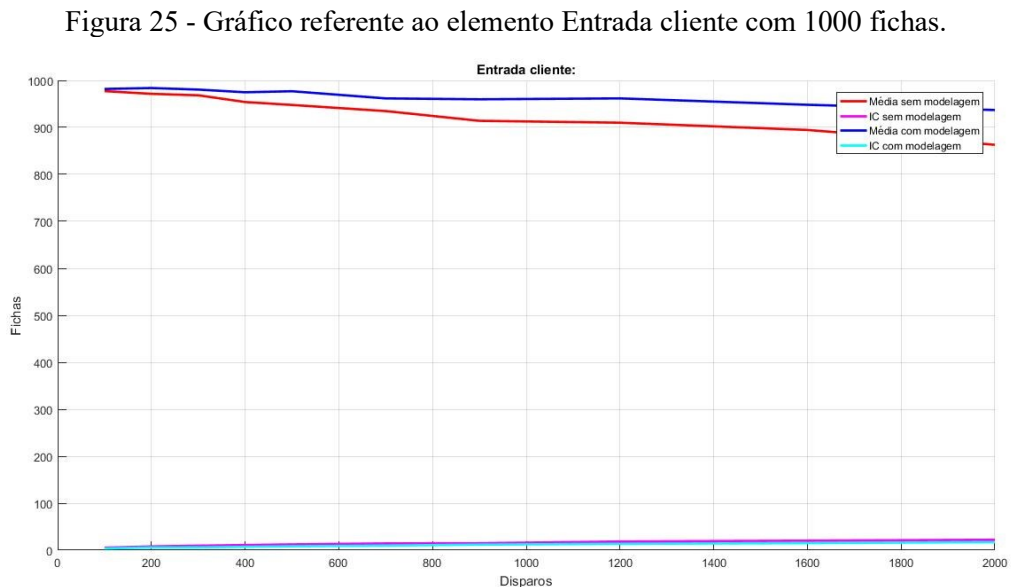
Conclui-se que independente das modelagens efetuadas anteriormente, no final do processo os produtos foram entregues.

## 1.2. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS DA PROPOSTA II MODIFICADA

Nessa Proposta II modificada foram mantidos os valores de disparos e de repetições, porém, a quantidade de fichas na entrada foi alterada para 1000. Para essa configuração, os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 9 e 10, Anexo C.

Após a retirada dos resultados para o sistema sem modelagem, foram adicionadas as modelagens das Propostas I e II, para a análise do impacto do aumento de fichas na entrada. Os resultados obtidos, na nova configuração, são mostrados nas Tabelas 11 e 12, Anexo C.

A Figura 25 ilustra o gráfico dos resultados do elemento Entrada cliente com 1000 fichas. O aumento da quantidade de fichas na entrada, durante a quantidade de 2000 disparos, apresentou uma diferença de aproximadamente 74 fichas. Observa-se que se tivesse mais eventos, esse número aumentaria.

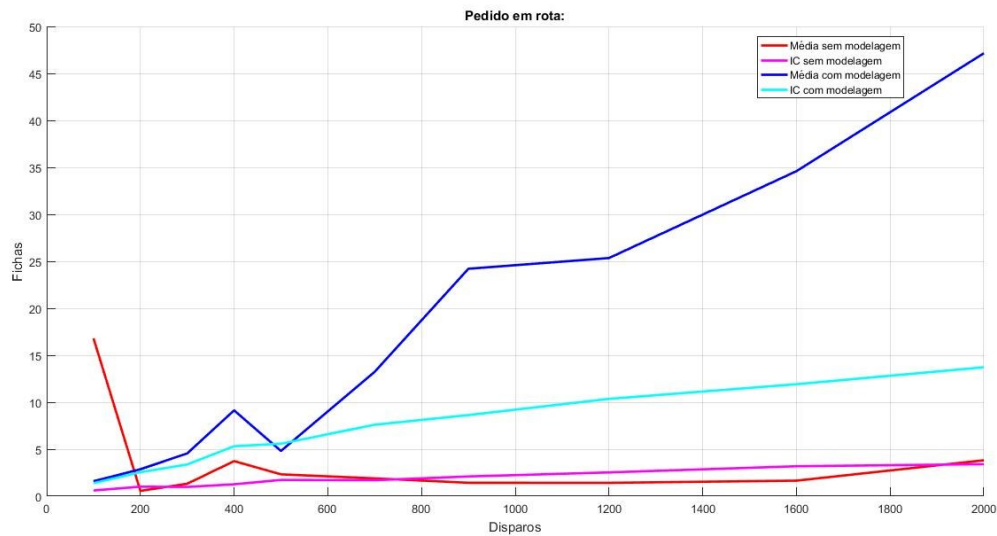


Fonte: Autoria própria.

A Figura 26 ilustra o gráfico dos resultados do elemento Pedido em rota com 1000 fichas. Observa-se na Figura 26 que o aumento na quantidade de entrada de fichas levou a um aumento de fichas no elemento Pedido em rota e que com o passar dos disparos aumentou.



Figura 26 - Gráfico referente ao elemento Pedido em rota com 1000 fichas.



Fonte: Autoria própria.

Com o aumento das fichas na entrada da Proposta II pode-se observar que o sistema está aumentando os números nos elementos de controle, mas não atingiram um valor de equilíbrio necessitando de mais disparos para atingi-los. Além disso, mesmo com um fluxo maior de fichas, o sistema com modelagem manteve a sua operação com mais folga. Mas os dois sistemas, sem e com modelagem, entregaram valores próximos no final.

### 1.3. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS DA PROPOSTA III

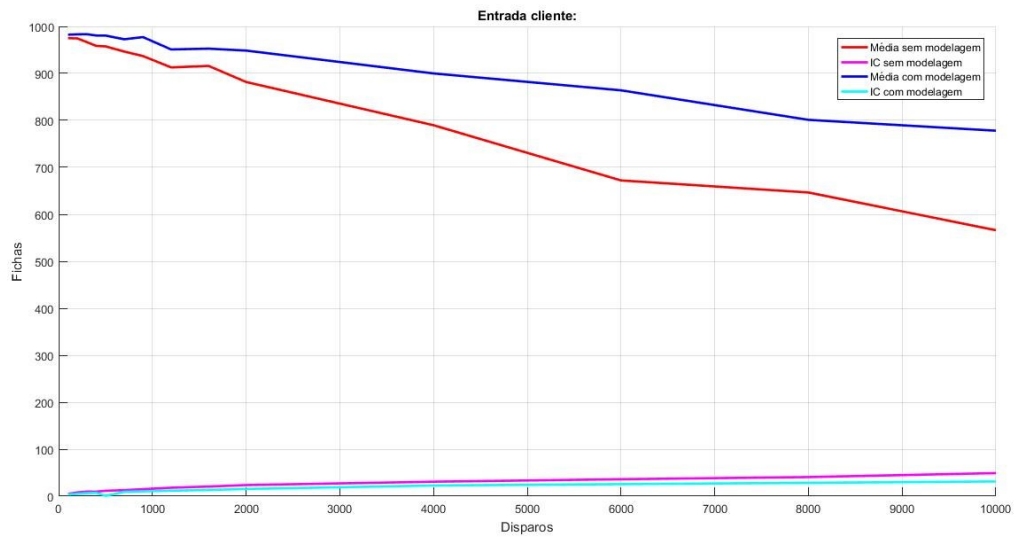
Na Proposta III foram coletados os dados, nas configurações descritas no início desse capítulo, e são apresentados nas Tabelas 13 e 14, Anexo D. As Tabelas 15 e 16, Anexo D, apresentam os valores obtidos com modelagem e intervalo de confiança de 95%.

A Figura 27 ilustra o gráfico dos resultados do elemento Entrada cliente com a entrada de 1000 fichas e uma quantidade máxima de disparos de 10000 vezes.

Foi notado que com uma quantidade maior de disparos a intensidade que o sistema sem modelagem permite a entrada de fichas é aproximadamente o dobro.

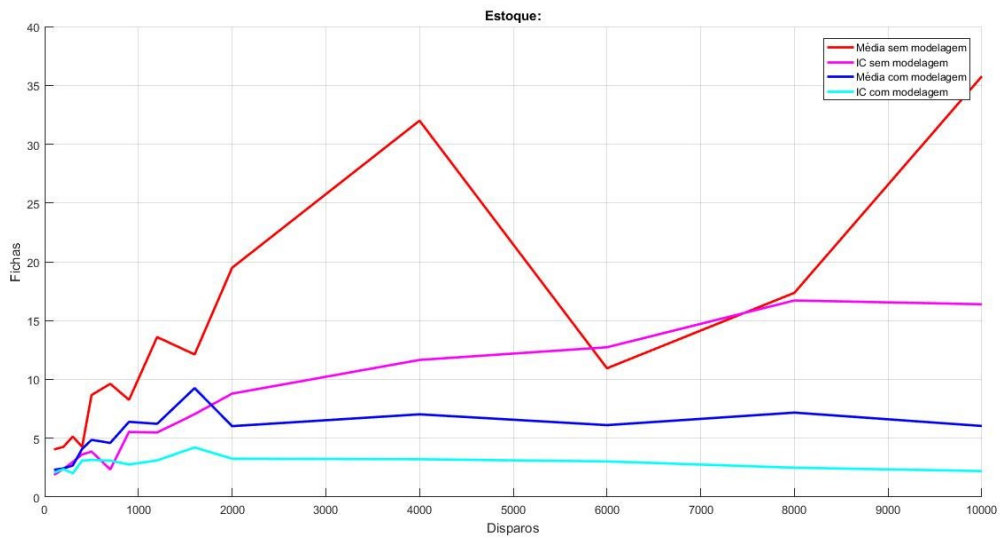
A Figura 28 ilustra o gráfico dos resultados do elemento Estoque. O sistema sem modelagem teve muitas variações significativas de valores devido a sua falta de controle de acionamento. Isso fez com que houvesse, eventualmente, um acúmulo de fichas. Já o sistema com modelagem manteve-se sempre em uma faixa próxima a 5 fichas mostrando controle das necessidades dos produtos quanto a entrada e saída.

Figura 27 - Gráfico referente ao elemento Entrada cliente.



Fonte: Autoria própria.

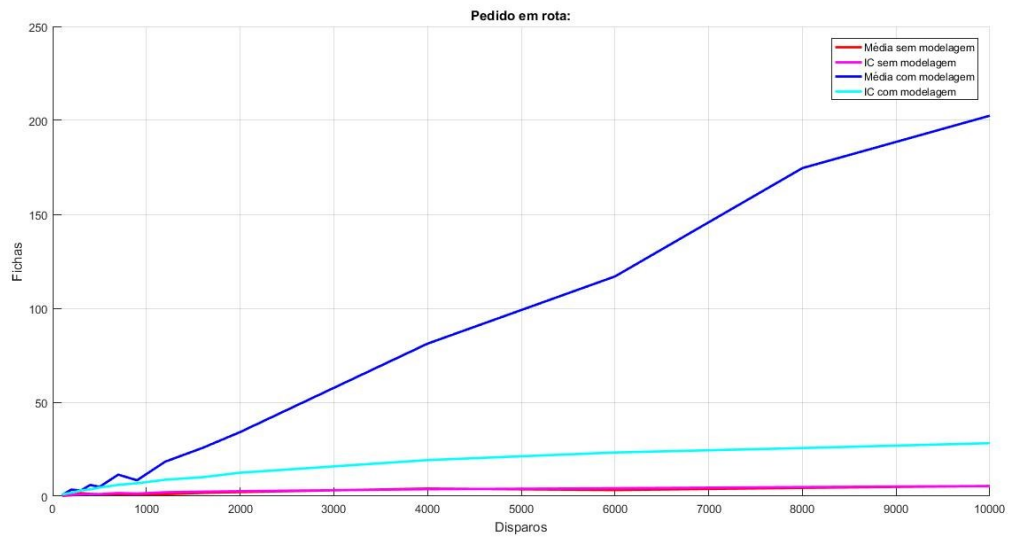
Figura 28 - Gráfico referente ao elemento Estoque.



Fonte: Autoria própria.

A Figura 29 ilustra o gráfico dos resultados do elemento Pedido em rota. Foi observado que o sistema com modelagem impulsionava a saída das fichas do sistema onde na situação do *e-commerce* é feito, o sistema quer despacha os produtos ao inves de fica com eles no sistema. Já o sistema sem modelagem, tem um fluxo baixo de produto na rota de entrega.

Figura 29 - Gráfico referente ao elemento Pedido em rota.



Fonte: Autoria própria.

Apresentados e discutidos os resultados, na próxima sessão, desse trabalho, são apresentadas as considerações finais.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como finalidade formalizar um estudo da ferramenta denominada de Rede de *Petri*. Ela foi aplicada em uma modelagem de um processo de compra em um *e-commerce*. A Rede de *Petri* é a denominação dada a uma ferramenta extremamente aplicável porque ela é de fácil compreensão. Na sua construção tem sempre um local e em seguida uma transição tornando fácil a criação de modelos a serem estudados. Assim, a criação de modelos simples ou detalhados fica a escolha de cada usuário.

Nas três propostas de modelagem de um *e-commerce*, descritas no Capítulo 3, tratou-se de um processo de venda e entrega de produtos. E teve como seu principal intuito não diminuir a saída de produtos por ser um processo de venda. Na primeira proposta, o processo inicia-se com a entrada de cliente no sistema, seguida pela verificação se o cliente tem ou não login e, logo após a verificação e criação de cadastro, o cliente conecta no sistema e efetua a compra. Na segunda proposta, as etapas de separação e organização do pedido para ser encaminhado para o destino foram adicionadas após a finalização da compra. E na última proposta foram detalhadas as etapas de controle de estoque, organização do pedido e emissão da nota fiscal. Logo a modelagem mostrou-se eficiente por não ter reduzido a saída de produtos, ter efetuado um controle na entrada do sistema e ter tornado o sistema mais palpável quanto a quais locais do sistema tem um fluxo maior de fichas.

Analisando os resultados obtidos, observou-se que os valores se equivaleram nos dois sistemas, com e sem modelagem. Nos sistemas com modelagem em alguns pontos de controle e nos sistemas que não tinham modelagem, entregaram resultados semelhantes em relação a quantidade de produtos entregues ao cliente. Já os sistemas modelados respeitaram o controle e, isso ajudou o sistema operar livremente e com folga comparado ao outro. Os sistemas modelados tinham um fluxo mais suave de fichas, não sobrecarregando.

Portanto a ferramenta Redes de *Petri* é uma ótima opção para modelar sistemas discretos de fácil entendimento e assim sendo sua aplicação. Ele fornece resultados simples e claros nos quais, dependendo da aplicação, pode facilitar o trabalho.

## ESTUDOS FUTUROS

Toda modelagem, estudo e análise, realizada nesse trabalho, foram analisadas para uma situação em cada proposta desenvolvida. Portanto, há alguns questionamentos que poderão ser respondidos em outros trabalhos, como:

- I. Cada proposta teve um valor de taxa que influenciava na sensibilidade aplicado em algumas transições sendo na Proposta I em duas transições, na Proposta II em duas transições e na Proposta III em uma transição. Como é o comportamento dessas transições perante a variação desses valores?
- II. O sistema integrado em um *e-commerce* pode ser maior que isso, como deixar ele mais complexo?

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRUNO, L. R. **Uma abordagem para a Modelagem e Simulação de Processos de Negócio Baseada nas Redes de *Petri* Contínuas Temporizadas**. Universidade Federal de Uberlândia - UFU. Uberlândia, p. 58. 2018.

CARDOSO, J.; VALETTE, R. Redes de *Petri*. **Site da DocPlayer**, 1997. Disponível em: <<http://docplayer.com.br/5005196-Redes-de-petri-rdp-janette-cardoso-robert-valette.html>>. Acesso em: 8 Agosto 2021.

COSTA, L. C. Teoria das Filas. **Departamento de Informática / CCET / DEINF / CCET / Fundação Universidade Federal do Maranhão**, 8 Outubro 2004. Disponível em: <[http://www.deinf.ufma.br/~mario/grad/filas/TeoriaFilas\\_Cajado.pdf](http://www.deinf.ufma.br/~mario/grad/filas/TeoriaFilas_Cajado.pdf)>. Acesso em: 30 Setembro 2021.

FONSECA, J. P. D. S. **Redes de *Petri* de Alto Nível e PNRD invertida associadas ao controle de robôs móveis: uma abordagem para operações de busca e salvamento em trilhas e travessias**. Universidade Federal de Uberlândia - UFU. Uberlândia, p. 148. 2018.

GERMAN, ; HEINDL, A. Performance Evaluation of IEEE 802.11 Wireless LANs with Stochastic *Petri* Nets. **IEEE Xplore**, 6 agosto 2002. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/796531>>. Acesso em: 15 setembro 2021.

HILLER, F.; LIBERMAN, G. **Introdução à pesquisa operacional**. São Paulo: ERJ Composição Editorial e Artes Gráficas Ltda, 2006.

MACIEL, P. R. M.; LINS, R. D.; CUNHA, P. R. F. Introdução às Redes de *Petri* e Aplicações. **MoDCS Research Group**, 1996. Disponível em: <<https://www.modcs.org/wp-content/uploads/2010/03/PetriNets.pdf>>. Acesso em: 31 Agosto 2021.

NERIS, A. Empresas de tecnologia crescem acima de 100% apesar de incertezas econômicas. **ParanaShop**, 17 Fevereiro 2020. Disponível em: <<https://paranashop.com.br/2020/02/empresas-de-tecnologia-crescem-acima-de-100-apesar-de-incertezas-economicas/>>. Acesso em: 16 Setembro 2021.

NOGUEIRA, F. Notas de Aula. **Site da Universidade Federal de Juiz de Fora**. Disponível em: <<https://www.ufjf.br/epd042/files/2009/02/cadeiaMarkov4.pdf>>. Acesso em: 09 Agosto 2021.

PIETRANTONIO, H. Modelos probabilísticos em segurança viária. **Escola Politécnica USP**, Junho 2009. Disponível em: <<http://sites.poli.usp.br/d/ptr5802/ModProb.pdf>>. Acesso em: 30 Setembro 2021.

RAMALHO, G. L. B. Redes de *Petri* para CLP. **ResearchGate**, 2011. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/283072042\\_Redex\\_de\\_Petri\\_para\\_CLP](https://www.researchgate.net/publication/283072042_Redex_de_Petri_para_CLP)>. Acesso em: 31 Agosto 2021.

## ANEXO A – RESULTADOS DA PROPOSTA I

A Tabela 3 mostra o valor médio dos resultados e a Tabela 4 mostra, os mesmos resultados, com um intervalo de confiança de 95%.

Tabela 3 - Valores médios da Proposta I, com modelagem.

Disparos	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000
Entrada Cliente	15,980	12,358	11,319	13,506	13,455	13,622	14,341	14,455	13,190	13,281
Cliente CC	0,624	0,572	1,276	1,237	0,623	0,899	0,974	0,768	0,875	1,090
Cliente SC	0,178	0,423	0,375	0,486	0,321	0,347	0,325	0,385	0,391	0,503
Cliente cadastrado	0,178	0,542	0,346	0,269	0,417	0,397	0,350	0,407	0,496	0,432
Cliente logado	1,822	2,144	4,349	3,017	1,996	1,700	2,099	2,341	2,183	2,575
Produto no carrinho	1,218	3,960	2,336	1,484	3,188	3,036	1,911	1,644	2,865	2,119
Compra finalizada	9,564	17,667	29,944	42,691	53,098	76,474	101,186	132,922	179,621	223,843

Fonte: Autoria própria.

Tabela 4 - Valores de intervalo de confiança 95% da Proposta I, com modelagem.

Disparos	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000
Entrada cliente	3,801	4,300	4,207	4,079	3,844	3,663	3,275	3,028	2,510	2,223
Cliente CC	1,083	0,901	0,873	0,771	0,716	0,641	0,555	0,572	0,440	0,407
Cliente SC	0,400	0,330	0,288	0,289	0,278	0,215	0,201	0,169	0,150	0,134
Cliente cadastrado	0,420	0,347	0,332	0,282	0,273	0,202	0,216	0,165	0,151	0,109
Cliente Logado	2,198	2,887	2,518	2,540	2,219	2,236	1,979	1,715	1,547	1,292
Produto no carrinho	1,900	1,943	2,226	2,067	2,139	2,210	1,803	1,865	1,433	1,372
Compra finalizada	2,293	2,657	2,675	2,752	2,639	2,802	2,845	2,668	3,052	3,110

Fonte: Autoria própria.



## ANEXO B – RESULTADOS DA PROPOSTA II

A Tabela 5 mostra o valor médio dos resultados e a Tabela 6 mostra, os mesmos resultados, com um intervalo de confiança de 95%.

Tabela 5 - Valores médios da Proposta II, sem modelagem.

Disparos	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000
Entrada Cliente	5,217	3,432	1,790	2,518	1,339	1,509	1,361	1,321	0,875	0,938
Cliente CC	1,762	0,557	1,209	0,678	0,427	2,130	0,415	0,495	0,826	0,503
Cliente SC	0,336	1,203	0,375	0,708	1,135	1,477	0,695	0,496	0,697	0,525
Cliente cadastrado	0,465	2,781	0,684	1,394	0,870	0,544	0,607	0,487	1,044	0,544
Cliente logado	6,030	5,980	4,308	3,127	4,329	2,997	5,863	4,692	2,610	3,003
Produtos no carrinho	1,861	2,119	6,445	2,139	2,095	4,607	2,795	2,634	5,221	2,956
Pagamento confirmado	1,108	0,761	1,843	1,920	1,978	1,763	1,842	3,516	2,445	4,226
Nota fiscal	1,138	1,258	1,651	1,977	3,704	1,586	3,844	1,993	1,881	2,286
Estoque	1,138	1,258	1,651	1,977	3,704	1,586	3,844	1,993	1,881	2,286
Pedido para envio	1,247	1,074	0,930	3,912	2,393	1,746	1,170	2,505	2,613	3,022
Pedido em rota	0,821	0,830	0,760	1,623	1,726	1,639	1,408	1,863	1,788	1,997
Entregue	0,188	4,636	9,039	13,236	17,409	29,784	39,720	54,270	76,983	96,127

Fonte: Autoria própria.

Tabela 6 - Valores de intervalo de confiança 95% da Proposta II, sem modelagem.

Disparos	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000
Entrada Cliente	3,202	1,468	1,222	0,871	0,716	0,608	0,469	0,372	0,313	0,242
Cliente CC	2,655	2,304	1,215	1,168	0,788	0,640	0,593	0,406	0,389	0,358
Cliente SC	2,825	1,681	1,189	1,166	0,907	0,648	0,594	0,438	0,412	0,328
Cliente Cadastrado	1,568	1,561	1,100	0,953	0,731	0,587	0,557	0,375	0,331	0,300
Cliente Logado	3,669	4,047	3,735	3,389	3,316	2,217	2,167	2,151	1,681	1,447
Produtos no carrinho	2,250	3,148	3,146	3,165	2,633	2,397	1,735	1,927	1,585	1,363
Pagamento confirmado	1,444	2,218	2,274	2,571	2,153	1,873	1,802	1,589	1,379	1,378
Nota fiscal	1,013	1,313	1,912	2,260	2,168	2,173	1,976	1,761	1,450	1,338
Estoque	1,013	1,313	1,912	2,260	2,168	2,173	1,976	1,761	1,450	1,338
Pedido para envio	0,761	1,231	1,571	1,857	1,917	1,961	1,895	1,611	1,406	1,194
Pedido em rota	0,576	0,801	1,058	1,654	1,655	1,820	1,518	1,763	1,326	1,251
Entregue	1,073	1,165	1,620	1,700	1,798	1,895	1,836	2,112	2,369	2,740

Fonte: Autoria própria.

A Tabela 7 mostra o valor médio dos resultados e a Tabela 8 mostra, os mesmos resultados, com um intervalo de confiança de 95%.

Tabela 7 - Valores médios da Proposta II, com modelagem.

Disparos	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000
Entrada cliente	14,574	10,294	4,488	4,429	5,068	3,114	4,663	1,521	1,871	1,518
Cliente CC	0,574	0,687	0,585	0,701	0,483	0,549	0,353	0,452	0,561	0,538
Cliente SC	0,248	0,348	0,116	0,172	0,172	0,163	0,317	0,179	0,164	0,159
Cliente cadastrado	0,089	0,189	0,365	0,125	0,160	0,254	0,170	0,220	0,215	0,211
Cliente logado	1,069	3,234	1,252	1,855	0,784	1,201	0,745	0,773	0,645	0,727
Produtos no carrinho	0,317	0,557	0,987	1,327	0,705	1,743	0,845	0,777	0,663	0,652
Pagamento confirmado	0,436	0,706	1,681	1,908	0,723	1,325	0,933	0,689	0,761	0,657
Nota fiscal	0,465	1,100	2,402	1,434	1,128	1,143	0,796	0,779	0,745	0,724
Estoque	0,465	1,100	2,402	1,434	1,128	1,143	0,796	0,779	0,745	0,724
Pedido para envio	0,495	0,701	0,857	1,526	0,617	1,103	0,792	0,556	1,001	0,646
Pedido em rota	1,733	2,184	7,266	6,524	10,162	9,405	10,386	14,054	13,374	14,16
Entregue	2,782	6,567	6,993	12,643	16,010	27,342	37,324	51,578	72,575	94,78

Fonte: Autoria própria.

Tabela 8 - Valores de intervalo de confiança 95% da Proposta II, com modelagem.

Disparos	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000
Entrada cliente	3,672	4,440	3,812	2,839	2,392	1,742	1,435	1,208	0,824	0,785
Cliente CC	1,318	0,911	0,712	0,584	0,513	0,397	0,327	0,260	0,194	0,156
Cliente SC	0,613	0,466	0,311	0,254	0,207	0,201	0,149	0,114	0,099	0,083
Cliente cadastrado	0,608	0,391	0,346	0,260	0,191	0,169	0,135	0,121	0,094	0,086
Cliente logado	2,412	2,379	2,042	1,769	1,108	0,869	0,614	0,487	0,410	0,360
Produtos no carrinho	1,386	1,953	1,538	1,290	0,987	0,814	0,641	0,459	0,386	0,333
Pagamento confirmado	1,272	1,856	1,414	0,865	0,904	0,816	0,636	0,440	0,418	0,345
Nota fiscal	0,868	1,449	1,290	1,146	0,995	0,679	0,586	0,484	0,344	0,341
Estoque	0,868	1,449	1,290	1,146	0,995	0,679	0,586	0,484	0,344	0,341
Pedido para envio	0,786	1,173	1,423	0,988	0,869	0,755	0,578	0,456	0,392	0,313
Pedido em rota	1,379	2,720	3,816	3,980	3,392	2,725	2,398	1,870	1,598	1,530
Entregue	1,453	2,517	3,166	2,832	2,641	2,293	2,341	2,352	2,433	2,861

Fonte: Autoria própria.

## ANEXO C – RESULTADOS DA PROPOSTA II MODIFICADA

A Tabela 9 mostra o valor médio dos resultados e a Tabela 10 mostra, os mesmos resultados, com um intervalo de confiança de 95%.

Tabela 9 - Valores médios da Proposta II, sem modelagem, com 1000 na entrada.

Disparos	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000
Entrada Cliente	977,247	971,45	968,358	954,024	947,79	934,746	914,028	909,99	894,547	863,03
Cliente CC	2,267	1,472	1,166	7,683	8,56	4,412	12,476	7,865	12,179	5,464
Cliente SC	0,871	5,457	1,651	2,486	2,598	3,805	11,301	2,979	5,47	9,76
Cliente cadastrado	0,3267	0,562	5,325	2,945	3,974	11,716	9,326	4,647	3,135	4,297
Cliente logado	5,435	7,88	11,73	19,728	19,4111	29,355	31,215	49,523	53,108	97,48
Produtos no carrinho	2,653	3,82	2,581	1,349	2,455	6,263	10,783	8,539	19,368	3,401
Pagamento confirmado	0,366	1,084	1,102	1,837	7,133	2,661	2,667	4,96	5,903	5,952
Nota fiscal	0,475	2,288	2,91	2,179	1,61	2,623	3,481	6,567	3,178	5,214
Estoque	0,475	2,288	2,91	2,179	1,61	2,623	3,481	6,567	3,178	5,214
Pedido para envio	0,485	0,537	0,591	1,588	2,183	1,121	2,203	2,69	0,845	4,077
Pedido em rota	16,8	0,562	1,3255	3,733	2,325	1,895	1,428	1,421	1,652	3,823
Entregue	1,742	4,154	6,315	7,211	10,524	17,573	25,067	36,949	54,655	68,544

Fonte: Autoria própria.

Tabela 10 - Valores de intervalo de confiança de 95% da Proposta II, sem modelagem, com 1000 na entrada.

Disparos	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000
Entrada cliente	5,297	7,991	9,524	10,996	12,368	14,389	14,827	18,44	20,244	22,21
Cliente CC	3,495	4,804	5,602	6,064	6,488	7,261	8,549	9,636	9,804	12,957
Cliente SC	3,405	4,647	5,381	6,065	6,542	7,386	8,377	9,717	9,546	12,188
Cliente Cadastrado	2,168	2,624	2,874	3,837	3,69	4,495	5,08	5,411	6,995	7,708
Cliente logado	3,592	6,598	8,293	9,816	10,448	13,17	13,056	17,402	20,275	22,02
Produtos no carrinho	2,108	3,25	3,984	4,624	5,899	6,843	7,326	8,637	10,84	10,729
Pagamento Confirmado	1,463	1,882	3,004	3,209	3,572	4,613	4,134	5,887	6,342	6,92
Nota fiscal	0,952	1,371	2,029	1,882	2,37	2,909	3,355	3,738	4,908	5,856
Estoque	0,952	1,371	2,029	1,882	2,37	2,909	3,355	3,738	4,908	5,856
Pedido para envio	0,804	0,969	1,453	1,644	1,914	2,704	2,703	3,128	3,685	3,845
Pedido em rota	0,605	1,011	0,981	1,265	1,73	1,7	2,098	2,529	3,185	3,405
Entregue	1,045	1,714	2,228	2,736	2,783	3,679	4,381	4,666	5,782	6,497

Fonte: Autoria própria.

A Tabela 11 mostra o valor médio dos resultados e a Tabela 12 mostra, os mesmos resultados, com um intervalo de confiança de 95%.

Tabela 11 - Valores médios da Proposta II, com modelagem, com 1000 na entrada.

Disparos	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000
Entrada Cliente	981,861	983,835	980,504	974,817	976,98	961,747	959,833	961,763	948,174	937,013
Cliente CC	0,782	0,437	0,86	0,6733	0,688	1,486	1,367	1,3547	0,826	0,81
Cliente SC	0,138	0,572	0,332	0,578	0,578	0,282	0,309	0,338	0,246	0,569
Cliente cadastrado	0,049	0,328	0,272	0,376	0,487	0,517	0,249	0,26062	0,3066	0,335
Cliente logado	1,554	1,124	1,9	1,992	2,638	2,56	2,951	2,4887	4,668	2,669
Produtos no carrinho	1,643	1,512	3,076	2,87	6,155	8,492	2,472	1,888	2,064	2,048
Pagamento confirmado	1,366	2,318	2,95	3,583	1,576	5,045	2,895	1,99	1,579	3,382
Nota fiscal	1,019	1,318	0,98	2,625	3,445	3,653	3,1398	2,04	4,082	3,165
Estoque	1,019	1,318	0,98	2,625	3,445	3,653	3,1398	2,04	4,082	3,165
Pedido para envio	0,287	0,801	1,312	0,902	0,68	1,579	1,486	1,711	2,846	2,369
Pedido em rota	1,594	2,865	4,554	9,134	4,812	13,236	24,206	25,347	34,592	47,145
Entregue	1,851	4,796	7,392	8,433	16,644	17,273	23,114	41,467	51,743	62,7811

Fonte: Autoria própria.

Tabela 12 - Valores de intervalo de confiança de 95% da Proposta II, com modelagem, com 1000 na entrada.

Disparos	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000
Entrada Cliente	3,633	5,771	5,904	7,106	8,233	9,74	11,746	13,561	14,912	17,141
Cliente CC	1,368	1,383	1,024	0,971	0,868	0,767	0,904	0,659	0,607	0,619
Cliente SC	0,589	0,651	0,438	0,398	0,32	0,331	0,257	0,201	0,19	0,172
Cliente cadastrado	0,617	0,49	0,384	0,3401	0,39	0,313	0,277	0,232	0,184	0,183
Cliente Logado	1,833	3,169	2,775	2,738	3,201	3,119	3,009	2,9535	3,647	2,607
Produtos no carrinho	1,432	2,286	2,604	2,289	2,578	3,133	2,506	2,769	3,258	3,374
Pagamento confirmado	1,014	1,527	1,908	1,679	1,934	2,296	1,956	2,77	2,368	2,297
Nota fiscal	0,891	1,405	1,529	1,431	1,814	1,864	1,992	2,371	2,01	2,056
Estoque	0,891	1,405	1,529	1,431	1,814	1,864	1,992	2,371	2,01	2,056
Pedido para envio	0,884	1,1405	1,237	1,461	1,615	1,744	1,971	2,245	1,857	2,57
Pedido em rota	1,385	2,553	3,373	5,316	5,585	7,602	8,632	10,358	11,915	13,72
Entregue	1,539	2,804	3,138	4,883	5,404	6,843	8,24	9,807	10,909	12,971

Fonte: Autoria própria.

## ANEXO D – RESULTADOS DA PROPOSTA III

A Tabela 13 mostra o valor médio dos resultados e a Tabela 14 mostra, os mesmos resultados, com um intervalo de confiança de 95%. Ambas as tabelas apresentam os valores obtidos do modelo sem modelagem.

A Tabela 15 mostra o valor médio dos resultados e a Tabela 16 mostra, os mesmos resultados, com um intervalo de confiança de 95%.

Tabela 13 - Valores médios da Proposta III, sem modelagem.

Disparo	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000	4000	6000	8000	10000
Entrada Cliente	975,10	974,46	966,59	958,56	957,56	946,50	936,90	912,72	915,98	881,74	789,69	672,19	646,53	566,22
Cliente CC	0,41	7,07	4,41	2,35	3,56	5,49	3,74	2,88	2,54	5,86	8,73	17,15	6,31	10,96
Cliente SC	1,01	1,37	2,58	6,70	1,51	2,86	2,69	15,23	4,07	10,02	11,41	10,34	15,32	14,39
Cliente cadastrado	3,28	2,12	5,44	2,49	1,61	3,77	6,18	4,82	4,24	7,42	6,23	13,41	8,89	10,15
Cliente logado	3,52	2,71	4,31	19,19	16,74	23,51	28,20	40,83	47,98	63,03	135,42	253,53	271,83	322,83
Produtos no carrinho	5,88	3,67	6,13	2,70	3,69	1,59	8,60	4,57	7,54	6,16	5,49	8,17	13,55	14,11
Notificação de retirada do estoque	1,47	2,13	2,87	2,75	3,12	2,96	3,70	2,88	2,84	3,24	3,08	2,80	2,89	3,09
Estoque	4,05	4,27	5,14	4,27	8,67	9,63	8,26	13,60	12,12	19,49	32,00	10,95	17,36	35,77
Pagamento confirmado	0,27	0,78	1,26	1,35	5,37	3,39	5,87	8,03	2,96	12,14	8,46	4,45	4,96	19,58
Ordem do pedido	0,26	0,62	1,76	0,67	1,42	4,20	1,10	3,45	7,01	5,59	21,62	4,30	10,30	14,27
Pedido finalizado	0,37	0,72	0,97	1,08	4,83	3,84	3,78	3,36	3,43	2,92	5,96	5,59	9,22	11,08
Ordem nota fiscal	0,33	0,96	1,33	0,75	3,08	5,50	2,23	3,50	3,65	5,07	16,67	5,24	5,18	13,65
Nota fiscal emitida	0,30	0,38	1,40	1,01	3,17	2,54	2,64	3,32	6,79	3,44	10,90	4,65	14,34	11,71
Prontos para envio	0,02	1,14	1,66	1,19	0,81	2,33	0,95	2,26	1,88	2,44	2,71	7,43	8,54	10,88
Pedido em rota	0,19	0,47	1,63	1,27	0,95	1,12	0,90	1,03	1,76	2,19	4,05	3,27	4,42	5,43
Entregue	0,38	3,78	3,82	7,16	8,54	14,65	21,66	29,30	44,78	54,94	114,80	182,01	254,64	318,35

Fonte: Autoria própria.

Tabela 14 - Valores de intervalo de confiança de 95% da Proposta III, sem modelagem.

Disparo	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000	4000	6000	8000	10000
Entrada Cliente	5,03	7,99	9,67	9,59	11,50	12,91	14,95	18,03	20,48	23,64	30,80	36,12	40,70	49,13
Cliente CC	3,41	4,54	5,70	5,50	5,91	6,86	7,96	8,22	10,72	10,72	12,73	16,65	20,24	23,70
Cliente SC	3,65	4,79	5,57	5,62	5,71	6,96	7,27	9,35	9,61	11,33	15,72	17,63	22,54	24,97
Cliente cadastrado	1,95	2,90	3,60	3,70	4,11	5,05	4,75	6,03	7,14	6,25	10,05	11,37	12,80	13,55
Cliente logado	3,97	6,24	7,92	9,47	10,24	13,08	14,88	16,23	18,60	23,06	33,48	39,43	45,16	50,85
Produtos no carrinho	2,15	2,95	4,54	4,46	5,46	6,40	7,47	8,58	9,73	10,49	17,23	19,90	23,64	21,54
Notificação de retirada do estoque	1,20	1,13	0,99	0,78	0,66	0,67	0,68	0,59	0,49	0,43	0,33	0,28	0,27	0,23
Estoque	1,89	2,40	2,98	3,63	3,87	2,35	5,54	5,49	7,05	8,79	11,66	12,74	16,71	16,39
Pagamento confirmado	1,26	1,69	2,47	2,86	3,35	4,11	4,77	4,83	5,57	7,19	8,45	10,53	13,92	12,22
Ordem do pedido	1,00	1,64	1,86	2,25	2,40	3,35	3,32	3,48	4,23	4,82	7,67	7,64	8,92	11,41
Pedido finalizado	1,00	1,24	1,85	1,77	2,65	2,74	3,11	3,69	4,39	5,51	7,71	8,48	10,47	10,68
Ordem nota fiscal	0,98	1,42	1,99	1,95	2,61	3,01	3,33	3,74	4,04	4,87	7,37	8,58	10,81	10,53
Nota fiscal emitida	9,77	1,46	1,76	2,02	2,65	2,85	3,29	3,63	4,62	4,95	7,17	8,56	9,70	11,53
Prontos para envio	0,51	0,79	1,15	1,22	1,38	1,54	2,19	2,08	2,47	2,95	4,21	5,27	6,35	7,43
Pedido em rota	0,45	0,74	0,98	1,18	1,09	1,69	1,39	2,09	2,40	2,67	3,69	4,22	4,86	5,38
Entregue	0,78	1,39	1,75	2,27	2,40	2,88	3,61	4,13	4,99	5,46	7,44	9,65	10,81	11,34

Fonte: Autoria própria.

Tabela 15 - Valores médios da Proposta III, com modelagem.

Disparos	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000	4000	6000	8000	10000
Entrada Cliente	982,37	983,14	983,48	980,63	980,49	972,71	977,26	951,01	952,69	948,60	899,94	864,00	801,15	778,01
Cliente CC	1,12	0,55	1,06	0,94	0,64	0,91	1,26	3,04	1,43	1,52	0,83	0,99	1,10	1,15
Cliente SC	0,27	0,19	0,50	0,18	0,40	0,25	0,30	0,32	0,39	0,26	0,34	0,34	0,30	0,34
Cliente cadastrado	0,14	0,31	0,22	0,20	0,28	0,28	0,20	0,47	0,36	0,33	0,29	0,37	0,28	0,35
Cliente logado	1,00	2,48	2,32	1,49	1,55	2,86	1,50	8,45	2,94	1,78	1,95	3,13	4,07	3,14
Produtos no carrinho	1,23	1,34	0,87	1,49	2,28	1,65	1,23	3,56	3,93	1,79	3,43	1,97	4,29	2,99
Notificação de retirada do estoque	5,05	4,68	4,14	3,71	4,39	4,38	3,79	5,79	3,79	3,62	4,34	4,53	4,62	4,28
Estoque	2,32	2,44	2,68	4,10	4,86	4,60	6,40	6,23	9,26	6,03	7,03	6,12	7,18	6,04
Pagamento confirmado	0,60	1,06	0,81	1,91	1,60	2,30	2,05	3,40	3,59	2,29	2,51	2,30	2,85	2,16
Ordem do pedido	1,76	1,05	1,02	0,90	2,65	1,68	3,13	3,63	4,46	2,37	3,87	3,35	3,96	3,17
Pedido finalizado	0,89	0,94	2,69	2,15	2,13	2,68	2,12	3,50	1,78	3,74	3,86	2,69	4,75	3,57
Ordem nota fiscal	2,12	0,68	1,92	1,65	2,10	2,69	2,36	3,88	2,87	1,98	2,28	2,39	2,87	2,45
Nota fiscal emitida	0,53	1,32	1,79	1,43	2,69	1,68	2,90	3,24	3,37	4,12	5,44	3,65	5,84	4,29
Pronto para envio	0,29	0,55	0,85	1,65	1,05	1,81	1,40	3,46	2,10	2,73	1,56	3,75	2,53	2,53
Pedido em rota	0,62	3,50	2,94	5,98	4,97	11,47	8,46	18,35	25,70	34,12	81,18	116,94	174,60	202,50
Entregue	1,48	2,70	6,64	7,78	12,63	15,13	27,45	26,72	39,68	51,55	98,09	154,16	194,71	259,50

Fonte: Autoria própria.

Tabela 16 - Valores de intervalo de confiança de 95% da Proposta III, com modelagem.

	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000	4000	6000	8000	10000
Disparos	100	200	300	400	500	700	900	1200	1600	2000	4000	6000	8000	10000
Entrada Cliente	3,68	5,00	6,48	7,22	0,75	9,15	10,36	11,61	13,22	15,35	22,78	25,64	28,46	31,32
Cliente CC	1,32	1,53	1,33	1,70	0,95	1,20	0,86	0,75	0,67	0,56	0,43	0,36	0,32	0,28
Cliente SC	0,59	0,50	0,41	0,38	0,34	0,27	0,25	0,27	0,22	0,17	0,14	0,10	0,10	0,09
Cliente cadastrado	0,63	0,50	0,43	0,35	0,37	0,29	0,27	0,25	0,19	0,18	0,16	0,11	0,10	0,09
Cliente logado	2,14	2,56	3,42	4,00	3,08	3,65	3,20	3,14	2,84	2,86	1,93	1,64	1,77	1,68
Produtos no carrinho	1,48	2,26	2,11	2,71	2,85	2,58	2,62	2,78	3,35	2,70	2,16	1,94	1,71	1,66
Notificação de retirada do estoque	1,68	1,81	1,93	2,19	1,80	1,52	1,44	1,44	1,44	1,24	0,88	0,69	0,57	0,57
Estoque	2,08	2,38	2,02	3,10	3,16	3,10	2,77	3,12	4,22	3,27	3,22	3,03	2,50	2,21
Pagamento confirmado	1,25	1,62	1,58	2,30	2,27	2,42	2,32	1,99	2,75	2,25	2,16	1,92	1,57	1,55
Ordem do pedido	0,96	1,59	1,74	2,18	2,20	2,15	2,06	2,63	3,15	2,83	2,30	1,97	1,79	1,57
Pedido finalizado	0,85	1,47	1,41	1,71	1,79	2,47	2,10	2,50	2,68	2,30	2,15	2,26	2,06	1,94
Ordem nota fiscal	0,95	1,34	1,26	1,57	1,56	1,93	1,98	2,61	2,26	2,07	1,87	1,75	1,48	1,67
Nota fiscal emitida	0,96	1,57	1,83	1,99	2,24	2,21	2,29	2,74	3,12	3,07	2,63	2,35	2,19	2,07
Pronto para envio	0,64	0,71	1,05	1,03	1,08	1,46	1,62	1,81	2,27	1,90	2,19	1,66	1,65	1,21
Pedido em rota	0,95	1,86	3,02	3,63	4,63	6,02	6,88	8,76	10,09	12,49	19,22	23,26	25,62	28,21
Entregue	1,14	2,04	3,08	3,58	4,60	5,78	6,87	8,31	9,56	11,73	18,24	21,27	23,90	26,21

Fonte: Autoria própria.