

---

# Teletransporte quântico usando qubits híbridos

---

**Juliana Zanatta Finotti**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

Uberlândia  
2022



**Juliana Zanatta Finotti**

## **Teletransporte quântico usando qubits híbridos**

Monografia apresentada como parte dos requisitos para a obtenção de título de Bacharel em Física de Materiais.

Orientador: Liliana Sanz de la Torre

Uberlândia

2022



---

# Agradecimentos

Agradeço a minha mãe Simone por sempre estar ao meu lado, por ter lutado para me proporcionar apenas as melhores coisas e por me preparar da melhor forma para viver nesse mundo. Eu devo tudo e mais um pouco à ela. Agradeço a meu pai César por sempre acreditar em mim, me colocar para cima e se entusiasmar junto comigo frente às minhas conquistas.

Aos meus avós, "Santinha" e "Tuta" por cuidarem de mim toda a minha vida, com muito amor, carinho e cuidado, e fazerem eu me sentir a pessoa mais amada do mundo.

Agradeço ao meu namorado João Henrique, por ter estado ao meu lado durante todo o curso e por me manter de cabeça erguida todas as vezes que eu duvidei de mim mesma.

Agradeço a minha orientadora, Prof. Dr. Liliana Sanz de la Torre, por me orientar não apenas em assuntos acadêmicos e de pesquisa, mas ter compartilhado suas experiências de vida e ter deixado toda essa caminhada mais leve e prazerosa.

A todos os professores que tive contato e assisti às aulas, pois todos contribuíram para meu ensino e formação. Agradeço à toda a minha família, ao meu padrasto José Rubens e aos meus amigos, por todo o apoio e companheirismo.

Agradeço ao órgão de fomento a pesquisa CNPq, que contribuiu de forma direta para a realização deste trabalho. Agradeço a UFU e ao INFIS-UFU pela infraestrutura.



*“Em seu encontro com a natureza, a ciência invariavelmente provoca reverência e admiração. O mero fato de entender algo é uma celebração da união, a mistura, embora em escala muito modesta, com a magnificência do cosmos.”*

*(Carl Sagan)*



---

# Resumo

Nesta monografia é feita uma revisão teórica do tópico de teletransporte quântico, abordando desde conceitos fundamentais da mecânica quântica, como o emaranhamento, até a descrição do esquema de teletransporte. Utilizamos desses conceitos para, então, descrever o teletransporte quântico usando qubits híbridos e discutimos as vantagens de tal abordagem.

**Palavras-chave:** Emaranhamento. Qubits. Estados de Bell.



---

# Abstract

In this monograph, we present a theoretical review of the topic of quantum teleportation, in which we discuss fundamental concepts of quantum mechanics, such as entanglement, that enable us to understand the quantum teleportation protocol. Then, we utilize these concepts to describe quantum teleportation using hybrid qubits and discuss the advantages of this approach.

**Keywords:** Entanglement. Qubits. Bell states.



---

## Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquema EPR. . . . .	22
Figura 2 – Posição dos quatro vetores $a$ , $b$ , $a'$ e $b'$ . . . . .	24
Figura 3 – Esquema do teletransporte quântico. . . . .	29
Figura 4 – Esquema do experimento de Stern-Gerlach . . . . .	49



---

# Sumário

<b>1</b>	<b>CONCEITOS FUNDAMENTAIS</b>	<b>19</b>
<b>1.1</b>	<b>Emaranhamento</b>	<b>19</b>
1.1.1	O conceito de emaranhamento	19
1.1.2	Estados emaranhados de dois spins 1/2	20
<b>1.2</b>	<b>Argumento EPR</b>	<b>21</b>
<b>1.3</b>	<b>Teorema de Bell e Estados de Bell</b>	<b>23</b>
1.3.1	Desigualdade de Bell	23
1.3.2	Estados de Bell	24
<b>1.4</b>	<b>Qubits híbridos</b>	<b>25</b>
1.4.1	Estados de variáveis discretas	25
1.4.2	Estados de variáveis contínuas	26
1.4.3	Abordagem híbrida	26
<b>2</b>	<b>TELETRANSPORTE QUÂNTICO</b>	<b>29</b>
<b>2.1</b>	<b>Visão Geral</b>	<b>29</b>
2.1.1	Teleportando um estado $ \phi\rangle$ de um sistema de dois níveis	30
<b>2.2</b>	<b>Teletransporte de qubits híbridos</b>	<b>34</b>
<b>3</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>41</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>43</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>47</b>
<b>APÊNDICE A</b>	<b>– O PROBLEMA GERAL DE MEDIDA NO SISTEMA DE SPIN-1/2.</b>	<b>49</b>

APÊNDICE B	–	ORTONORMALIZAÇÃO DOS ESTADOS CO-	
		ERENTES . . . . .	53

No início do século XX, os cientistas que trabalham na área da Física celebravam a unificação dos fenômenos elétricos e magnéticos dentro de um único formalismo, o da teoria eletromagnética (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2000), além dos avanços no entendimento da termodinâmica. No entanto, algumas questões permaneciam sem resposta. Duas grandes perguntas foram resumidas por Lorde Kelvin em uma frase publicada do seu artigo de 1901 (KELVIN, 1901)<sup>4</sup>. A beleza e clareza da teoria dinâmica, que coloca calor e luz como modos de movimento, está presentemente obscurecida por duas nuvens. I. A primeira apareceu com a teoria ondulatória da luz, desenvolvida por Fresnel e o Dr. Thomas Young; envolvendo a questão de como pode a Terra mover-se através de um sólido elástico, como o é essencialmente o Éter luminífero? II. A segunda é a doutrina de Maxwell-Boltzmann sobre a equipartição de energia.” (SCHULZ, 2007). A procura por respostas para estas duas questões foi a causa direta da revolução das ciências físicas da primeira parte do século XX. Sobre o éter, a resposta foi o desenvolvimento da teoria da relatividade restrita de Einstein (EISBERG, 1979) e os experimentos de Michelson e Morley . Sobre a equipartição da energia, a necessidade de explicar as características da radiação de um corpo assim como os experimentos de luz emitida por gases compostos de elementos puros, trouxeram como consequência a construção da teoria da Mecânica Quântica. Esta teoria serve para descrever os fenômenos da escala atômica e está por trás dos desenvolvimentos tecnológicos que impulsionaram o avanço da ciência no século passado, sendo o transistor um dos exemplos mais conhecidos. É fundamental na formação do físico o conhecimento profundo dos postulados da mecânica quântica (COHEN-TANNOUJJI; DIU; LALOE, 2009) que podem ser resumidos assim:

- ❑ Um estado quântico é definido por um vetor, denotado como  $|\Psi\rangle$ , pertencente ao espaço vetorial definido pelo sistema físico.
- ❑ Como os estados quânticos pertencem a um espaço vetorial, a soma de dois ou mais estados, também chamada de superposição, é por sua vez um estado possível do sistema;
- ❑ As grandezas físicas que se podem medir, chamadas de observáveis, são operadores que atuam em um estado  $|\Psi\rangle$ , podendo ser representados como matrizes;
- ❑ O conjunto de possíveis resultados de medidas de um observável coincide com o conjunto de autovalores do problema de valores próprios do sistema.
- ❑ Obtendo-se um valor específico no processo de medida, o estado do sistema após a medição corresponde ao autovetor associado ao autovalor medido;
- ❑ A evolução do sistema obedece a equação de Schrödinger dependente do tempo, governada pelo Hamiltoniano, o operador/observável que descreve a energia do sistema.

Estas ideias têm uma aplicação recente em duas novas áreas da física: Informação Quântica e Computação Quântica. Sobre a primeira, desde o ponto de vista da física clássica e da teoria da informação por trás de do funcionamento dos computadores atuais, o conceito de informação define-se como aquilo que pode ser codificado dentro de um estado associado a certo sistema de interesse. Um bit de informação corresponde à magnetização de um determinado setor de um disco rígido ou à carga de um capacitor. Além desta definição, é necessário executar operações sobre os bits, conhecidas como portas lógicas, que permitam a construção de algoritmos (NIELSEN; CHUANG, 2002).

Nesse ponto do raciocínio, é válido pensar no análogo quântico para estes bits clássicos de informação: o qubit. Enquanto um bit clássico tem um caráter binário, já que seu valor pode ser 0 ou 1, um qubit pode tomar os valores 0, 1, ou ser uma superposição de ambos os estados quânticos (NIELSEN; CHUANG, 2002). O fato de conseguir construir um estado de superposição permite a execução de avaliação dos dois valores possíveis de entrada (0 ou 1) usando uma única aplicação do operador correspondente. Estas operações mantem semelhanças com seu análogo clássico, as portas lógicas, que efetuam mudanças sobre os bits. Suas diferenças, oriundas da aplicação dos postulados da Mecânica Quântica mencionados acima, justificam a adoção da alcunha de portas lógicas quânticas para estas operações (NIELSEN; CHUANG, 2002).

Um dos fenômenos relacionados à assuntos da área de informação quântica que levantou o interesse do público geral foi o teletransporte quântico de informação (BENNETT et al., 1993). Desde as primeiras propostas teóricas, passando pelos trabalhos onde foram apresentadas provas de princípio (*proof-of-principle*), o teletransporte tem sido apontado como um mecanismo eficiente para aplicações em criptografia. O teletransporte quântico, através de partículas emaranhadas e um canal de comunicação clássico, permite a transferência de um estado quântico de uma partícula para outra, mesmo que as duas estejam separadas por grandes distâncias e não se saiba qual é o estado quântico a ser transportado.

No começo do século 20, quando a mecânica quântica estava em seus primórdios, discutia-se sobre a natureza de um sistema quântico. Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935) mostraram que seria possível criar sistemas quânticos correlacionados a longas distâncias, o que Einstein descreveu como uma "ação fantasmagórica à distância". Posteriormente, esse fenômeno foi designado por Erwin Schrödinger como "emaranhamento" (SCHRÖDINGER, 1935). Essa propriedade restrita aos sistemas quânticos se relaciona com diferentes tipos de implementações experimentais: a primeira parte da existência de partículas, chamadas de "gêmeas", ou partículas EPR (Einstein-Podolsky-Rosen), que possuem estados quânticos "conectados". Neste tipo de partículas, qualquer alteração do estado quântico de uma implica a mudança instantânea do estado da outra, mesmo que elas estejam a quilômetros de distância entre si.

Um exemplo real deste tipo de sistema são os fótons gêmeos gerados do bombeamento

de um cristal com luz laser, em um fenômeno conhecido como a conversão paramétrica descendente espontânea (GHOSH; MANDEL, 1987; KWIAT et al., 1995). A segunda depende de mecanismos de interação entre sistemas físicos inicialmente separados, de forma que o estado gerado seja emaranhado. Exemplos desta abordagem são os experimentos de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades, onde átomos e luz são emaranhados ao permitir transições atômicas controladas ao viajar dentro de uma cavidade contendo um estado quântico de luz (HAROUCHE, 2013), ou a manipulação de átomos frios com luz que permite o emaranhamento de dois graus de liberdade destes átomos, as transições eletrônicas e os modos de vibração desses átomos (BLATT; WINELAND, 2008).

O estudo e posterior descoberta no campo experimental do fenômeno do emaranhamento despertou o interesse na tentativa de transmitir informação a uma velocidade mais rápida do que a da luz uma vez que, em princípio, ao criar o estado emaranhado, operações locais efetuadas em um dos subsistemas (um dos fótons gêmeos por exemplo) mudam instantaneamente o estado no subsistema companheiro. Desta forma, a resolução deste problema se resume na possibilidade de clonar estados quânticos desconhecidos. A aparente violação da teoria da relatividade especial foi revista quando desenvolvimentos posteriores provaram que esta possibilidade é descartada com o teorema da não-clonagem (WOOTTERS; ZUREK, 1982). Conclui-se, portanto, que a transferência de informação conhecida instantânea através das partículas gêmeas é impossível, embora se mostrou verdadeira a premissa de que essas partículas permitem o teletransporte de um estado quântico por um emissor que não sabe o estado a ser teletransportado (BENNETT et al., 1993). A comprovação do sucesso do esquema de teletransporte deve assim ser confirmado através de uma comunicação clássica entre os observadores de cada um dos dois subsistemas físicos envolvidos no experimento.

O primeiro experimento (BOSCHI et al., 1998) que demonstrou o teletransporte quântico com sucesso foi realizado de fato com fótons, onde a informação transferida foi a polarização destes. Posteriormente, foram realizados experimentos utilizando átomos, íons, elétrons e circuitos supercondutores. Um dos grandes desafios desse processo é conseguir transferir informações em grandes distâncias, o que é essencial para que ele possa ser útil para tecnologias como a computação quântica. Nesse quesito, grandes progressos têm sido feitos. Um dos avanços mais significativos foi o teletransporte de um estado quântico de um laboratório na Terra para um satélite localizado a cerca de 1400 quilômetros de distância (REN et al., 2017). Outro aspecto que tem recebido atenção é o teletransporte quântico em sistemas de mais de dois níveis, conhecidos como *qudits*. Até pouco tempo, a informação a ser teletransportada era bidimensional, ou seja, era codificada em um sistema de dois níveis, com espaço de Hilber bidimensional. Recentemente, foi realizado o teletransporte de um qutrit, ou seja, um estado quântico de três dimensões (LUO et al., 2019). Além disso, há também a busca por tecnologias que processem informação de acordo com as leis da Mecânica Quântica, incluindo emaranhamento e teletransporte.

Em dezembro de 2019, cientistas conseguiram demonstrar o teletransporte quântico entre dois chips de silício, os quais são capazes de codificar informação quântica em luz gerada dentro dos circuitos e de processá-la com alta eficiência e baixo ruído. Essa demonstração pode significar um grande avanço na possibilidade de produzir circuitos quânticos mais complexos, os quais são necessários para a computação quântica.

Aplicações do teletransporte quântico utilizando óptica têm um papel fundamental na implementação de comunicação e computação quântica. Por exemplo, o problema de criar estados de Bell foi solucionado através da conversão paramétrica em um cristal não-linear (KWIAT et al., 1995). No entanto, a partir de métodos de óptica linear para detecção de fótons, já foi demonstrado que a probabilidade de sucesso de uma medida na base de Bell, que é uma etapa essencial no protocolo de teletransporte, não pode exceder 50% em abordagens envolvendo qubits de um único fóton (LUTKENHAUS; CALSAMIGLIA; SUOMINEN, 1999; CALSAMIGLIA; LÜTKENHAUS, 2001). Diante dessas circunstâncias, se torna interessante o estudo de estados híbridos, e mais precisamente, de teletransporte quântico utilizando qubits híbridos.

Nesse sentido, foi proposta uma abordagem para o processamento de informação quântica utilizando estados híbridos (LEE; JEONG, 2013). Nesse caso, o qubit é construído a partir do emaranhamento entre estados de polarização de um fóton ( $|H\rangle, |V\rangle$ ) e estados coerentes ( $|\alpha\rangle, |-\alpha\rangle$ ). Essa abordagem permite que o teletransporte quântico seja realizado de forma quase determinística. O mesmo procedimento pode ser realizado utilizando como base os estados de vácuo ( $|0\rangle$ ) e excitado ( $|1\rangle$ ), no lugar dos estados de polarização (JEONG et al., 2014; MORIN et al., 2014). Analisando as duas abordagens, foi demonstrado que a escolha de qubits híbridos nas bases de vácuo e estados coerentes é mais robusta à perda de fótons do que qubits híbridos nas bases de polarização e estados coerentes (KIM; LEE; JEONG, 2016).

Neste trabalho, será feita a revisão do tópico de teletransporte quântico, com ênfase no teletransporte de qubits híbridos, a fim de que seja estabelecida uma base sólida de estudo para trabalhos futuros nesta área. No capítulo 1, definiremos os conceitos fundamentais de mecânica quântica e informação quântica necessários e no capítulo 2 discutiremos detalhadamente os esquemas de teletransporte quântico para um sistema de dois níveis e, finalmente, para qubits híbridos.

---

# Conceitos Fundamentais

Neste capítulo, serão abordados conceitos precedentes ao foco deste trabalho, os quais são de extrema importância para a compreensão dos processos de teletransporte quântico, inicialmente de qubits discretos e, posteriormente, de qubits híbridos.

## 1.1 Emaranhamento

Será discutida nesta seção um conceito essencial da mecânica quântica, o emaranhamento. Esta propriedade revela aspectos únicos da física quântica e nos permitirá discutir o fenômeno de teletransporte posteriormente (COHEN-TANNOUJJI; DIU; LALOE, 2009).

### 1.1.1 O conceito de emaranhamento

Considere dois sistemas físicos  $A$  e  $B$ , com espaços vetoriais (espaços de Hilbert)  $\varepsilon_A$  e  $\varepsilon_B$ . Se assumimos que o sistema  $A$  é preparado em um estado quântico normalizado  $|\phi_A\rangle$  pertencente a  $\varepsilon_A$ , e o sistema  $B$ , por sua vez, é preparado separadamente no estado  $|\chi_B\rangle$  pertencente a  $\varepsilon_B$ , o ket que descreve o sistema *bipartite* dado pela composição de  $A$  e  $B$  é descrito por

$$|\Phi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle, \quad (1)$$

onde  $|\Phi\rangle \in \varepsilon = \varepsilon_A \otimes \varepsilon_B$ .

Neste caso, cada um dos três sistemas ( $A$ ,  $B$  e  $A + B$ ) é descrito por um vetor de estado. Se um estado  $|\Phi\rangle \in \varepsilon$  é escrito como um produto tensorial de dois vetores como na Eq. (1), ele é chamado de estado separável.

No entanto, os postulados da mecânica quântica preveem a existência de estados de sistemas bipartites que não são um simples produto dos estados de cada sub-sistema. Vamos assumir que  $|\phi_A\rangle$  e  $|\zeta_A\rangle$  são estados pertencentes a  $\varepsilon_A$ , e  $|\chi_B\rangle$  e  $|\xi_B\rangle$  são estados pertencentes a  $\varepsilon_B$ . Então, diferente da Eq. (1), podemos descrever o sistema total como

$$|\Phi'\rangle = |\zeta_A\rangle \otimes |\xi_B\rangle. \quad (2)$$

Devido ao princípio de superposição, qualquer combinação linear normalizada  $|\Psi\rangle$  construída a partir de  $|\Phi\rangle$  e  $|\Phi'\rangle$  é um estado válido do espaço de Hilbert do sistema total A+B, por exemplo

$$|\Psi\rangle = \alpha |\phi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle + \beta |\zeta_A\rangle \otimes |\xi_B\rangle. \quad (3)$$

Se tentarmos separar o estado  $|\Psi\rangle$  em termos de cada um de seus subsistemas  $\varepsilon_A$  e  $\varepsilon_B$ , concluímos que isto não é possível, pois

$$\begin{aligned} \Psi &= (c_1 |\phi_A\rangle + c_2 |\zeta_A\rangle) \otimes (c_3 |\chi_B\rangle + c_4 |\xi_B\rangle) \\ &= c_1 c_3 |\phi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle + c_1 c_4 |\phi_A\rangle \otimes |\xi_B\rangle + c_2 c_3 |\zeta_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle + c_2 c_4 |\zeta_A\rangle \otimes |\xi_B\rangle, \end{aligned}$$

o que levaria a  $c_1 c_4 = c_2 c_3 = 0$ ,  $c_1 c_3 = \alpha$  e  $c_2 c_4 = \beta$ , simultaneamente. Note que tais condições não possuem uma solução em comum, ou seja, o estado  $|\Psi\rangle$  não é separável.

Um estado como descrito pela Eq. (3), que contém uma superposição de dois ou mais termos de produto, é chamado de estado emaranhado, e a propriedade associada a estados como esse, de emaranhamento quântico. Essa característica essencial da física quântica expressa o fato de que, nesse caso, o estado de cada subsistema está correlacionado com o estado do outro.

### 1.1.2 Estados emaranhados de dois spins 1/2

Para o foco deste trabalho, será interessante utilizarmos os estados de spin como exemplo. Por isso, iremos analisar como o emaranhamento afeta a medição de spins de determinado sistema bipartite.

Para o caso de dois sistemas de spin-1/2,  $A$  e  $B$ , cada espaço  $\varepsilon_{A,B}$  é composto pelos dois autoestados  $|\pm\rangle$  da componente no eixo  $z$  do spin. Para fins de manter uma única notação durante toda a monografia, usaremos a base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  para representar os resultados *spin-up* e *spin-down*, respectivamente.

Consideremos um estado emaranhado, dos muitos possíveis, definido como

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|01\rangle - |10\rangle]. \quad (4)$$

Vamos imaginar que realizamos medições simultaneamente nos dois spins, sobre o plano  $XZ$ , o primeiro fazendo um ângulo  $\theta_A$  com o eixo  $z$ , e o segundo com um ângulo  $\theta_B$ . Os autovetores para essa medição supondo um  $\theta$  arbitrário (apêndice A) é da forma

$$|0\rangle_\theta = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (5)$$

$$|1\rangle_\theta = -\sin \frac{\theta}{2} |0\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (6)$$

Ou seja, para uma medição do spin em ângulo  $\theta$  em relação ao eixo  $z$ , podemos obter os resultados  $|0\rangle_\theta$  ou  $|1\rangle_\theta$ , escritos na base dos spins no eixo  $z$ .

Ao medir os dois spins simultaneamente, podemos obter 4 diferentes resultados:  $|00\rangle_{\theta_A, \theta_B}$ ,  $|01\rangle_{\theta_A, \theta_B}$ ,  $|10\rangle_{\theta_A, \theta_B}$  ou  $|11\rangle_{\theta_A, \theta_B}$ . Por exemplo, o estado correspondente ao resultado  $|00\rangle_{\theta_A, \theta_B}$ , ou seja, quando ambos os spins, medidos nos ângulos  $\theta_A$  e  $\theta_B$ , resultam em  $|0\rangle_\theta$ , é escrito da forma

$$|0\rangle_{\theta_A} \otimes |0\rangle_{\theta_B} = \cos \frac{\theta_A}{2} \cos \frac{\theta_B}{2} |00\rangle + \cos \frac{\theta_A}{2} \sin \frac{\theta_B}{2} |01\rangle + \sin \frac{\theta_A}{2} \cos \frac{\theta_B}{2} |10\rangle + \sin \frac{\theta_A}{2} \sin \frac{\theta_B}{2} |11\rangle. \quad (7)$$

Isso significa que a probabilidade de obter o resultado *spin up* ao se medir as componentes de ambos os spins nas direções  $\theta_A$  e  $\theta_B$  é

$$P_{00}(\theta_A, \theta_B) = |\langle 00 | \Psi \rangle|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \left( \frac{\theta_A - \theta_B}{2} \right). \quad (8)$$

Podemos fazer os mesmos cálculos para obter os outros três possíveis pares de resultados. Assim, as probabilidades para os 4 possíveis resultados são da forma

$$P_{00}(\theta_A, \theta_B) = P_{11}(\theta_A, \theta_B) = \frac{1}{2} \sin^2 \left( \frac{\theta_A - \theta_B}{2} \right), \quad (9)$$

$$P_{01}(\theta_A, \theta_B) = P_{10}(\theta_A, \theta_B) = \frac{1}{2} \cos^2 \left( \frac{\theta_A - \theta_B}{2} \right). \quad (10)$$

Vemos que as Eq.(8-10) são probabilidades que não podem ser escritas como produtos  $P_{\theta_A} P_{\theta_B}$ .

Se calculamos, por exemplo, as razões  $\frac{P_{00}}{P_{10}}$  e  $\frac{P_{01}}{P_{11}}$ , obtemos

$$\frac{P_{00}}{P_{10}} = \tan^2 \left( \frac{\theta_A - \theta_B}{2} \right) \quad \text{e} \quad \frac{P_{01}}{P_{11}} = \cot^2 \left( \frac{\theta_A - \theta_B}{2} \right). \quad (11)$$

Tais razões são diferentes, o que demonstra que a razão de probabilidades de se obter *spin-up* ou *spin-down* no primeiro spin depende do estado do segundo spin.

Assim, dizemos que existem correlações, de origem quântica por estarem fundamentadas no princípio de superposição, entre as medidas das partes do sistema total. Isto porque o valor das probabilidades de obter os 4 resultados possíveis depende de  $\theta_A - \theta_B$ .

## 1.2 Argumento EPR

A ação do emaranhamento sob longas distâncias gerou grandes discussões na metade do século XX e teoremas foram apresentados tentando encontrar respostas. Dentre eles, estão o Teorema EPR e o Teorema de Bell.

O teorema EPR (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935) foi apresentado por Einstein, Podolsky e Rosen em 1935. Neste, se argumentava que a ação não local devido ao emaranhamento demonstrava que a mecânica quântica estaria incompleta e que, portanto, haveriam ‘elementos da realidade’ ignorados por tal teoria que manteriam a sua localidade.

Para demonstrar o teorema, foi sugerido o seguinte experimento mental: considere uma fonte S que emite pares de partículas no estado emaranhado descrito pela Eq. (4). Essas partículas se propagam até duas regiões distintas do espaço A e B, onde as componentes de seu spin são medidas por um aparato Stern-Gerlach. Para simplificar nossa análise, vamos considerar os resultados das medidas como sendo  $+1$  para o spin up e  $-1$  para o spin down, em vez dos autovalores dos operadores de spin,  $\pm\hbar/2$ .

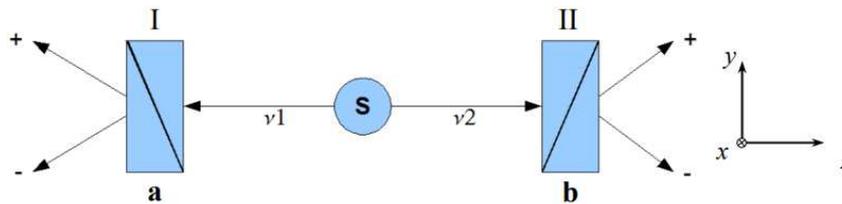


Figura 1 – Esquema EPR. Fonte: Review of the Universe. <sup>1</sup>

Se, por acaso, os dois observadores escolherem direções paralelas para medir suas partículas, a relação (10) indica que os resultados obtidos serão opostos. Ou seja, cada vez que o primeiro observador obter  $\pm 1$ , o segundo observador irá obter  $\mp 1$ .

Em vista desses resultados, podemos separar o argumento EPR em 3 pontos:

- ❑ É assumido que as previsões da mecânica quântica para as probabilidades estão corretas.
- ❑ Um resultado experimental o qual já é conhecido antes de sua observação só pode ser consequência de uma quantidade física pré-existente, ou seja há elementos de realidade não conhecidos, que chamamos de variáveis ocultas.
- ❑ Regiões no espaço contém seus próprios elementos de realidade, e sua evolução temporal é local.

Baseando-se nessas hipóteses, o teorema EPR mostra que os resultados de medição devem ser função das propriedades individuais dos spins que as partículas carregam com elas, ou seja, as variáveis ocultas; e das direções escolhidas no aparelho de Stern-Gerlach.

Se isso é verdade, então nenhum processo não-determinístico ocorre, ou seja, a partícula carrega consigo toda a informação necessária para produzir o resultado de uma futura medição. Nesse caso, a mecânica quântica estaria incompleta, já que ela não contempla a existência de tais elementos.

<sup>1</sup> Disponível em <<https://universe-review.ca/R15-41-Bell.htm>>. Acesso em: 8 jun. 2022.

## 1.3 Teorema de Bell e Estados de Bell

### 1.3.1 Desigualdade de Bell

Em resposta ao argumento EPR, em 1964 o físico John Bell demonstrou que não é possível ‘completar’ a mecânica quântica sem mudar suas predições (BELL, 1966). Nesse caso, deveria se aceitar que a mecânica quântica produz resultados incorretos (aqueles que demonstram não-localidade), ou então, abandonar as hipóteses EPR.

De acordo com os pontos levantados por Einstein, Podolsky e Rosen, Bell tenta reproduzir como funcionaria uma teoria completa local, que ‘substituiria’ a mecânica quântica. Para isso, vamos assumir que  $\lambda$  representa os elementos de realidade associados aos spins, e que  $A$  e  $B$  são os resultados para as medições de cada spin.  $A$  e  $B$  são funções de  $\lambda$  e dos parâmetros de medida  $a$  e  $b$ . Devido a localidade requerida pelo argumento EPR,  $b$  não deve influenciar no resultado  $A$ , e vice-versa. Portanto, utilizando duas direções diferentes para cada medição, temos:

$$\begin{cases} A \equiv A(a, \lambda); \\ A' \equiv A(a', \lambda); \\ B \equiv B(b, \lambda); \\ B' \equiv B(b', \lambda). \end{cases}$$

Para cada par de partículas emitidas, esses 4 números só podem assumir os valores  $\pm 1$ .

Considere a soma dos produtos

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= AB - AB' + A'B + A'B', \\ &= A(B - B') + A'(B + B'). \end{aligned} \quad (12)$$

Se  $B = B'$ , a expressão acima se torna  $2A'B = \pm 2$ . Se  $B = -B'$ , ela se torna  $2AB = \pm 2$ . Se fizermos a média  $\bar{M}$  de  $M(\lambda)$  sobre um grande número de partículas emitidas, como cada  $M(\lambda)$  pode apenas assumir o valor  $\pm 2$ , temos que

$$-2 \leq \bar{M} \leq +2. \quad (13)$$

A relação acima é chamada de desigualdade de Bell. Essa desigualdade deve ser satisfeita por qualquer medição, não importa qual mecanismo crie as correlações entre os resultados, contanto que a condição de localidade seja obedecida, ou seja, que  $A$  não dependa do parâmetro  $b$  e  $B$  não dependa do parâmetro  $a$ . Em suma, Bell demonstrou que qualquer teoria que queira satisfazer a condição de localidade deve satisfazer a expressão (13).

Quando voltamos para as previsões da mecânica quântica, encontramos contradições entre essas e o teorema de Bell. Usando as relações (9) e (10), podemos calcular o valor médio do produto dos resultados obtidos na medição dos dois spins.

$$\langle \hat{A}(a)\hat{B}(b) \rangle = P_{00} + P_{11} - P_{01} - P_{10} = -\cos \theta_{ab}, \quad (14)$$

onde  $\theta_{ab} = \theta_a - \theta_b$ . Essa expressão é a equivalente em mecânica quântica ao produto dos resultados  $A(a, \lambda)B(b, \lambda)$  em uma teoria com realismo local.

O equivalente na MC da combinação dos quatros produtos de resultados (12) é da forma

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \langle \hat{A}(a)\hat{B}(b) \rangle - \langle \hat{A}(a)\hat{B}(b') \rangle + \langle \hat{A}(a')\hat{B}(b) \rangle \\ &\quad + \langle \hat{A}(a')\hat{B}(b') \rangle \\ &= -\cos\theta_{ab} + \cos\theta_{ab'} - \cos\theta_{a'b} - \cos\theta_{a'b'}. \end{aligned} \quad (15)$$

Imagine que as quatro direções estão no mesmo plano e cada vetor faz um ângulo de  $45^\circ$  com o vetor precessor.

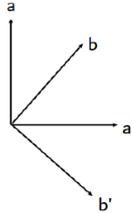


Figura 2 – Posição dos quatro vetores  $a$ ,  $b$ ,  $a'$  e  $b'$ . Fonte: (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 2009)

Nesse caso,

$$\langle Q \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}. \quad (16)$$

Ou seja, para essas direções de medida dos spins, a desigualdade (13) é violada por um fator  $\sqrt{2}$ . Isso demonstra que o argumento EPR leva a uma contradição com a mecânica quântica, mostrando que ela não é uma teoria que aceita realismo local.

Um experimento conduzido por Alain Aspect em 1982 (ASPECT; GRANGIER; ROGER, 1982) confirmou as predições da mecânica quântica, medindo com precisão a violação nas desigualdades de Bell. Portanto, se estabelece que a mecânica quântica leva a predições corretas e o argumento EPR deve ser abandonado.

### 1.3.2 Estados de Bell

Os estados de Bell são quatro estados maximamente emaranhados de dois qubits, chamados também de pares EPR, cujo valores médios atingem  $2\sqrt{2}$  e, conseqüentemente, violam as desigualdades de Bell (NIELSEN; CHUANG, 2002).

Esses 4 estados formam a chamada base de Bell no espaço de Hilbert de quarta-dimensão, composta por

$$\begin{cases} |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle); \\ |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle); \\ |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle); \\ |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle). \end{cases}$$

onde vemos que o estado da Eq (1) corresponde a um estado de Bell.

## 1.4 Qubits híbridos

Desviando da linha de raciocínio desenvolvida nas últimas seções, agora viramos nossa atenção para uma recente abordagem na área da informação quântica: sistemas híbridos.

A maior parte dos experimentos em informação quântica é realizada utilizando montagens de óptica quântica. Ou seja, a informação em questão é preparada, manipulada, transmitida e medida através de estados quânticos ópticos. No entanto, quanto ao grau de liberdade de tais experimentos, existem duas linhas de estudo distintas: uma baseada na utilização de estados de variáveis discretas (DV), como os qubits, e a outra na utilização de estados de variáveis contínuas (CV), como os estados coerentes ou estados comprimidos.

Cada um desses métodos tem suas vantagens e limitações, seja na medida, transformação ou criação de tais estados ópticos. Assim, montagens híbridas têm sido propostas no processamento de informação quântica, em que tantos estados DV e CV são utilizados de forma a contornar as limitações que estes apresentam individualmente.

Nesta seção, vamos revisar os conceitos básicos e algumas propriedades que caracterizam cada uma dessas abordagens e então apresentar os fundamentos de uma montagem de base híbrida.

### 1.4.1 Estados de variáveis discretas

Estados de variáveis discretas são aqueles correspondentes a observáveis de natureza discreta, ou seja, que possuem autovalores discretizados. O mais utilizado é o qubit, o qual é um sistema com uma base discreta e bidimensional. Um estado como esse é descrito como

$$|\psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle, \quad (17)$$

onde a informação contida neste estado é dada pelas componentes  $c_0$  e  $c_1$ . Um qubit pode representar qualquer sistema de dois níveis, como, por exemplo, a polarização de um fóton ou o spin de um elétron (ANDERSEN et al., 2014).

A desvantagem de tal método de codificação da informação é que criar um canal de 2 qubits fotônicos emaranhados é uma tarefa difícil. Esse tipo de interação requer recursos ópticos não-lineares. Operações não-lineares geralmente são fracas, e dado um tempo suficientemente longo, as perdas de fótons, no caso óptico por exemplo, iriam dominar sobre a transformação desejada.

A vantagem da utilização de qubits fotônicos está no fato de que eles são bastante robustos contra ruídos. Portanto, processos envolvendo estados de fótons podem atingir altas fidelidades.

### 1.4.2 Estados de variáveis contínuas

Estados de variáveis contínuas são aqueles formados por um base contínua  $\{|x\rangle\}$ , que podem representar as amplitudes e fases de um campo, ou a posição e momento de um oscilador harmônico (ANDERSEN et al., 2014). Um estado nesta base é escrito como

$$|\psi\rangle = \int \psi(x) |x\rangle dx, \quad (18)$$

onde a informação é contida na função de onda  $\psi(x) = \langle\psi|x\rangle$ .

Um exemplo de estado de base contínua é o estado coerente. Ele é definido como o autoestado do operador de aniquilação, ou seja

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (19)$$

com seus respectivos autoestados complexos  $\alpha$ . Além disso, ele também pode ser definido através da ação do operador deslocamento  $\hat{D}$  sobre o estado de vácuo,

$$\hat{D}(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle, \quad (20)$$

onde  $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a})$ .

Finalmente, o estado  $|\alpha\rangle$  pode ser expandido em relação ao número de fótons, o estado de Fock  $|n\rangle$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (21)$$

Uma desvantagem da codificação de informação utilizando estados ópticos de variáveis contínuas é que estes são consideravelmente sensíveis a perdas e ruídos.

### 1.4.3 Abordagem híbrida

Um esquema híbrido de processamento de informação quântica é aquele baseado em graus de liberdade tanto discretas como contínuas para a manipulação e medição dos sistemas quânticos envolvidos.

Podemos, como exemplo, construir um estado emaranhado entre um qubit atômico e um estado coerente (LOOCK, 2011). Seja o seguinte Hamiltoniano, chamado de Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

$$\hat{H} = \hbar\chi\sigma_z\hat{a}^+\hat{a}, \quad (22)$$

onde  $\hat{a}(\hat{a}^+)$  se refere ao operador criação (aniquilação) do campo eletromagnético do estado coerente,  $\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$  é o operador de Pauli-Z para um sistema de dois níveis (qubit), e  $\chi$  é o parâmetro de acoplamento radiação-matéria.

O Hamiltoniano gera uma rotação de fase no modo do campo eletromagnético que depende do estado do qubit. Logo, ele pode ser escrito como

$$\hat{R}(\theta\sigma_z) = \exp(-i\theta\sigma_z\hat{a}^+\hat{a}), \quad (23)$$

com  $\theta = \chi t$ .

Veja que esse é um operador unitário que age sobre o espaço de Hilbert combinado do qubit e do estado coerente. Quando o aplicamos sobre o estado coerente, obtemos

$$\hat{R}(\theta\sigma_z) |\alpha\rangle = |\alpha \exp(-i\theta\sigma_z)\rangle, \quad (24)$$

ou seja, o estado coerente sofre uma rotação de fase de acordo com o estado do qubit.

Agora, se aplicarmos  $\hat{R}(\theta\sigma_z)$  ao produto  $|\alpha\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  obtemos

$$\hat{R}(\theta\sigma_z) |\alpha\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} = |\alpha \exp(-i\theta\sigma_z)\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)/2. \quad (25)$$

Como os autovalores de  $\sigma_z$  são  $\pm 1$ , então

$$= (|\alpha e^{-i\theta}\rangle |0\rangle + |\alpha e^{i\theta}\rangle |1\rangle)/\sqrt{2}. \quad (26)$$

Assim, obtemos um estado emaranhado entre um qubit atômico e um estado coerente.



## Teletransporte Quântico

### 2.1 Visão Geral

Uma das aplicações interessantes dos estados emaranhados é seu uso na implementação de um protocolo de teletransporte quântico. Para ilustrar como ocorre tal processo, imagine que Alice e Bob querem teletransportar um fóton A. Alice possui um fóton B e Bob possui um fóton C, os quais estão emaranhados. Alice não sabe o estado quântico do fóton A, mas quer que Bob tenha um fóton que possua o mesmo estado.

Assim, Alice mede o fóton A juntamente com o fóton B, sem determinar suas polarizações individuais. A medida de Alice nos fótons A e B produz o efeito de colapsar o estado do fóton C de Bob para um estado no qual sabemos exatamente que operação realizar de forma que este se torne o estado inicial de Alice.

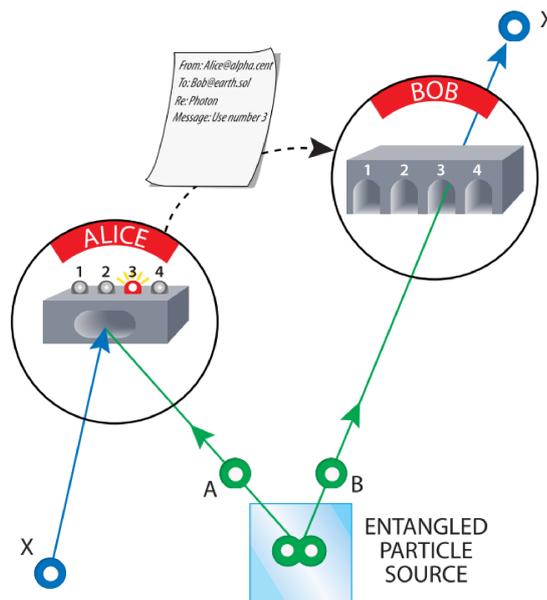


Figura 3 – Esquema do teletransporte quântico.

Fonte: Scientific American (ZEILINGER, 2003)

Para completar o teletransporte, Alice deve mandar uma mensagem (através de um meio de comunicação clássica, como um telefone ou um email) para Bob, o informando do resultado de sua medida. Assim, Bob pode transformar seu fóton de forma que ele se torne uma réplica exata do fóton A.

Esse protocolo esclarece que, para a mecânica quântica, o teletransporte de um fóton ou de uma partícula é, efetivamente, o teletransporte da informação sobre seu estado. Um estado quântico que inicialmente descrevia uma partícula em determinada posição do espaço, posteriormente será o estado de outra partícula em outra posição, qualquer que seja esta. Essa propriedade abre várias oportunidades para o futuro da comunicação, e é a base dos estudos em comunicação quântica atualmente.

### 2.1.1 Teleportando um estado $|\phi\rangle$ de um sistema de dois níveis

O protocolo de teletransporte quântico foi demonstrado pela primeira vez em 1993 (BENNETT et al., 1993). Nessa ocasião, o esquema foi apresentado analiticamente através de ferramentas algébricas da mecânica quântica. Agora, iremos descrevê-lo e acrescentar a representação matricial de tal processo.

Para tal, analisaremos nosso sistema sobre a base computacional  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , em que

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Precisamos, portanto, escrever os vetores de Bell nesta base

$$\begin{aligned} |\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{27}$$

Analogamente,

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Seguindo o esquema apresentado anteriormente, queremos teleportar o estado  $|\phi\rangle$  de uma partícula (1) de spin-1/2, em posse de Alice, que é descrito como

$$|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Duas partículas (2 e 3) de spin-1/2 são preparadas no estado de Bell  $|\Psi^-\rangle$ , ou seja

$$|\Psi_{23}^{(-)}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|0\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_2|0\rangle_3) = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Assim, o estado do sistema total é dado por

$$\begin{aligned} |\Psi_{123}\rangle &= |\phi\rangle \otimes |\Psi_{23}^-\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}}(|001\rangle - |010\rangle) + \frac{b}{\sqrt{2}}(|101\rangle - |110\rangle). \end{aligned} \quad (33)$$

Em forma matricial,

$$|\Psi_{123}\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a}{\sqrt{2}} \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b}{\sqrt{2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Para relacionar o estado  $|\phi\rangle$  da partícula 1 com o par EPR, Alice realiza uma medida das partículas 1 e 2 na base de Bell. Feito isso, o qubit 3 é projetado para o estado correspondente ao resultado da medida de Alice sobre os qubits 1 e 2.

Para saber quais são tais possíveis estados, vamos reescrever o estado do sistema em termos dos vetores de Bell para os qubits 1 e 2.

$$\begin{aligned} |\Psi_{123}\rangle &= \frac{a}{\sqrt{2}}|00\rangle_{12}|1\rangle_3 - \frac{a}{\sqrt{2}}|01\rangle_{12}|0\rangle_3 + \frac{b}{\sqrt{2}}|10\rangle_{12}|1\rangle_3 - \frac{b}{\sqrt{2}}|11\rangle_{12}|0\rangle_3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(|\Phi^+\rangle_{12} + |\Phi^-\rangle_{12}) \otimes \frac{a}{\sqrt{2}}|1\rangle_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}(|\Psi^+\rangle_{12} + |\Psi^-\rangle_{12}) \otimes \frac{a}{\sqrt{2}}|0\rangle_3 \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}(|\Psi^+\rangle_{12} - |\Psi^-\rangle_{12}) \otimes \frac{b}{\sqrt{2}}|0\rangle_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}(|\Phi^+\rangle_{12} - |\Phi^-\rangle_{12}) \otimes \frac{b}{\sqrt{2}}|0\rangle_3. \end{aligned} \quad (35)$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\Psi_{123}\rangle &= \frac{1}{2}|\Psi^-\rangle_{12}(-a|0\rangle_3 - b|1\rangle_3) + \frac{1}{2}|\Psi^+\rangle_{12}(-a|0\rangle_3 + b|1\rangle_3) \\ &\quad + \frac{1}{2}|\Phi^-\rangle_{12}(a|1\rangle_3 + b|0\rangle_3) + \frac{1}{2}|\Phi^+\rangle_{12}(a|1\rangle_3 - b|0\rangle_3). \end{aligned} \quad (36)$$

De acordo com o resultado da medida de Alice, o qubit 3 será projetado para um dos 4 estados acima. Por exemplo, se a medida dos qubits 1 e 2 resultar em  $|\Phi^-\rangle$ , então o estado do qubit 3 será  $|\phi_3\rangle = a|1\rangle_3 + b|0\rangle_3$ .

Podemos entender melhor esta consequência analisando a operação matricialmente, ao aplicar os operadores de medida da base de Bell sobre o estado  $|\Psi_{123}\rangle$ . Para o caso de  $|\Phi^-\rangle$ , temos

$$M_{\Phi^-} = |\Phi^-\rangle \langle \Phi^-| \otimes I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Quando aplicamos um operador de medida sobre um estado qualquer  $|\psi\rangle$ , este é projetado para

$$|m\rangle = \frac{\hat{M}| \psi \rangle}{\sqrt{p(m)}}, \quad (38)$$

onde  $p(m) = \langle \psi | M^+ M | \psi \rangle$ .

Assim, aplicando o operador de medida  $M_{\Phi^-}$  ao estado do sistema  $|\Psi_{123}\rangle$ , este é projetado para o estado correspondente àquele que se obtém quando a medida de Alice para os qubits 1 e 2 resulta em  $|\Phi^-\rangle$ . Então,

$$|\psi\rangle = \frac{\hat{M}_{\Phi^-} |\Psi_{123}\rangle}{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -b \\ -a \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Que equivale a

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{|\Phi^-\rangle} \otimes \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Ou seja, como previsto anteriormente, o estado do qubit 3 é projetado para

$$|\phi_3\rangle = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = b|0\rangle + a|1\rangle. \quad (41)$$

O mesmo procedimento pode ser realizado com  $M_{\Phi^+}$ ,  $M_{\Psi^-}$  e  $M_{\Psi^+}$ , resultando em

$$\square |\Phi^+\rangle_{12} \rightarrow |\phi_3\rangle = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -b|0\rangle + a|1\rangle,$$

$$\square |\Psi^-\rangle_{12} \rightarrow |\phi_3\rangle = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = -a|0\rangle - b|1\rangle,$$

$$\square |\Psi^+\rangle_{12} \rightarrow |\phi_3\rangle = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = -a|0\rangle + b|1\rangle.$$

Finalmente, para que o teletransporte seja concluído, queremos que o qubit 3 tenha a forma do estado inicial  $|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ . Para isso, aplicamos um operador linear em

$|\phi_3\rangle$  que recupera o estado inicial. Assim, para cada vetor de Bell detectado quando Alice faz a medida, temos

$$\begin{aligned} \square |\Phi^-\rangle \rightarrow |\phi\rangle &= \hat{X} |\phi_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \\ \square |\Phi^+\rangle \rightarrow |\phi\rangle &= \hat{Z}\hat{X} |\phi_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \\ \square |\Psi^-\rangle \rightarrow |\phi\rangle &= -\hat{I} |\phi_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \\ \square |\Psi^+\rangle \rightarrow |\phi\rangle &= -\hat{Z} |\phi_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em ciência das portas lógicas necessárias para retomar o estado inicial, podemos também escrever o estado total do sistema como

$$|\Psi\rangle_{123} = \frac{1}{2} \left[ -|\Psi^-\rangle_{12} |\phi\rangle - |\Psi^+\rangle_{12} \hat{Z} |\phi\rangle + |\Phi^-\rangle_{12} \hat{X} |\phi\rangle + |\Phi^+\rangle_{12} \hat{X} \hat{Z} |\phi\rangle \right]. \quad (42)$$

Assim, é concluído o esquema de teletransporte quântico. Notamos que, sem receber a informação de qual estado foi medido por Alice, Bob não sabe qual operação realizar em sua partícula para que esta possua o estado inicial  $|\phi\rangle$ . Portanto, este é um processo que pode acontecer a quaisquer que sejam as distâncias entre as partículas, porém a transmissão de informação não ocorre instantaneamente e, logo, não viola a relatividade especial.

Podemos resumir o esquema do teletransporte aos seguintes pontos

Resultado da medida	Estado da partícula de Bob	Operação necessária
$ \Phi^-\rangle$	$b 0\rangle + a 1\rangle$	$\hat{X}$
$ \Phi^+\rangle$	$-b 0\rangle + a 1\rangle$	$\hat{Z}\hat{X}$
$ \Psi^-\rangle$	$-a 0\rangle - b 1\rangle$	$-\hat{I}$
$ \Psi^+\rangle$	$-a 0\rangle + b 1\rangle$	$\hat{Z}$

Note que, na expressão (42), escrevemos os estados para os quais o qubit 3 é projetado quando Alice realiza a medida de Bell em termos do estado inicial  $|\phi\rangle$ . Portanto, em posse do qubit 3, Bob precisa realizar a operação contrária à descrita na expressão (42). No caso das portas Pauli X e Pauli Z, estas são hermitianas, logo a operação de um estado para o outro se mantém. No caso da operação  $\hat{X}\hat{Z}$ , no entanto, é necessário trocar a ordem na qual cada porta é aplicada.

Vale ressaltar que encontramos essas relações ao utilizar o estado  $|\Psi^-\rangle$  como canal quântico (32). Se utilizássemos qualquer um dos outros estados de Bell, as relações entre as medidas e a partícula de Bob seriam diferentes, e as operações sobre o qubit 3 também seriam.

## 2.2 Teletransporte de qubits híbridos

Como demonstrado anteriormente, o teletransporte quântico permite a transmissão de informação através de longas distâncias utilizando um canal de estados emaranhados. Já foi mencionado que o objetivo final desta ferramenta é que ela seja útil em tecnologias de comunicação quântica. Para isso, precisamos que ela seja eficiente quando adicionamos recursos ópticos.

No contexto das variáveis discretas, utilizamos qubits que representam sistemas de dois níveis para codificar informação. Nesse caso, qubits fotônicos que podem representar a polarização de um fóton  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$  ou então a detecção ou não de um fóton  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . No entanto, esta abordagem não permite que uma medida sobre a base de Bell seja aplicada deterministicamente (CALSAMIGLIA; LÜTKENHAUS, 2001), pois apenas dois dos quatro estados de Bell podem ser identificados usando um foto-detector e, portanto, a probabilidade de sucesso não pode exceder 50%.

Alternativamente, já foram propostos protocolos de processamento de informação quântica (JEONG; KIM, 2002) onde dois estados coerentes  $|\alpha\rangle$  e  $|\alpha\rangle$  são utilizados como uma base de qubits, e superposições da forma  $|\alpha\rangle + |\alpha\rangle$  como estado de "gato" responsável por codificar informação (OURJOUMTSEV et al., 2007). Através desse esquema, a medida sobre a base de Bell para qubits de estados coerentes pode ser aplicada de forma quase-determinística, de forma que a probabilidade de sucesso aumenta conforme a amplitude do campo  $\alpha$  cresce (JEONG; KIM; LEE, 2001). No entanto, devido à não-ortogonalidade entre  $|\alpha\rangle$  e  $|\alpha\rangle$ , a aplicação da porta lógica Pauli Z gera muitos erros e prejudica a fidelidade do processo de teletransporte (JEONG; KIM; LEE, 2001).

Em vista destes problemas, foi proposta uma abordagem (LEE; JEONG, 2013) utilizando qubits híbridos ópticos que combina as vantagens de cada um desses métodos, na tentativa de superar suas limitações individuais. Neste caso, é demonstrado que é possível realizar as medições e operações necessárias de forma quase determinística, superando os esquemas de qubits fotônicos e estados coerentes separadamente.

Assim, vamos descrever a abordagem proposta, comparando-a com o esquema de teletransporte quântico padrão para qubits.

A base híbrida utilizada neste esquema será da forma

$$|0_H\rangle = |+\rangle |\alpha\rangle, \quad |1_H\rangle = |-\rangle |\alpha\rangle, \quad (43)$$

formando qubits híbridos que têm como parte contínua um qubit de estados coerentes  $\{|\alpha\rangle, |\alpha\rangle\}$  e como parte discreta, uma superposição de estado de vácuo e estado excitado, ou seja

$$|\pm\rangle = \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{2}. \quad (44)$$

Queremos teleportar um estado desconhecido  $|\phi\rangle = \mu|0_H\rangle + \eta|1_H\rangle$ . Para realizar o teletransporte de um estado híbrido de dois níveis e, conseqüentemente, bipartite, precisamos de canais emaranhados híbridos que serão quadripartites. Dessa forma, os estados de Bell na base híbrida são definidos como

$$|\Phi_H^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_H\rangle|0_H\rangle - |1_H\rangle|1_H\rangle), \quad (45)$$

$$|\Phi_H^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_H\rangle|0_H\rangle + |1_H\rangle|1_H\rangle), \quad (46)$$

$$|\Psi_H^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_H\rangle|1_H\rangle - |1_H\rangle|0_H\rangle), \quad (47)$$

$$|\Psi_H^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_H\rangle|1_H\rangle + |1_H\rangle|1_H\rangle). \quad (48)$$

Seguindo o esquema de teletransporte, temos um estado desconhecido  $|\phi\rangle$  que se encontra no modo  $a$  referente às variáveis discretas, e no modo  $A$  referente às variáveis contínuas.

Um canal híbrido é preparado no estado  $|\Phi_H^+\rangle_{bBcC}$ , onde  $b$ ,  $c$ ,  $B$  e  $C$  referem-se aos modos nas bases discretas e contínuas dos qubits híbridos compartilhados. Assim, o estado total do sistema é dado a partir do produto entre o estado inicial  $|\phi\rangle_{aA}$  e o canal  $|\Phi_H^+\rangle_{bBcC}$  e é expresso por

$$\begin{aligned} |\phi\rangle_{aA} |\Phi_H^+\rangle_{bBcC} &= (\mu|0_H\rangle_{aA} + \eta|1_H\rangle_{aA}) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_H\rangle_{bB}|0_H\rangle_{cC} + |1_H\rangle_{bB}|1_H\rangle_{cC}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\mu|0_H\rangle_{aA}|0_H\rangle_{bB}|0_H\rangle_{cC} + \mu|0_H\rangle_{aA}|1_H\rangle_{bB}|1_H\rangle_{cC} \\ &\quad + \eta|1_H\rangle_{aA}|0_H\rangle_{bB}|0_H\rangle_{cC} + \eta|1_H\rangle_{aA}|1_H\rangle_{bB}|1_H\rangle_{cC}]. \end{aligned} \quad (49)$$

Vamos reescrever este estado em termos dos vetores da base de Bell híbrida para os modos  $a$ ,  $A$ ,  $b$  e  $B$ , representando o processo de medida nestes qubits. De forma semelhante ao que foi realizado para o esquema de teletransporte padrão, obtemos

$$\begin{aligned} |\phi\rangle_{aA} |\Phi_H^+\rangle_{bBcC} &= \frac{1}{2} \left[ |\Phi_H^+\rangle_{aAbB} (\mu|0_H\rangle_{cC} + \eta|1_H\rangle_{cC}) + |\Phi_H^-\rangle_{aAbB} (\mu|0_H\rangle_{cC} - \eta|1_H\rangle_{cC}) + \right. \\ &\quad \left. |\Psi_H^+\rangle_{aAbB} (\eta|0_H\rangle_{cC} + \mu|1_H\rangle_{cC}) + |\Psi_H^-\rangle_{aAbB} (-\eta|0_H\rangle_{cC} + \mu|1_H\rangle_{cC}) \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

Após realizada a medida nos qubits híbridos correspondentes aos modos  $a$ ,  $A$ ,  $b$  e  $B$ , o sistema será projetado para um estado onde o qubit correspondente aos modos  $c$  e  $C$  pode ser transformado no estado original  $|\phi\rangle$  através de uma operação linear. Ou seja,

$$\begin{aligned} |\phi\rangle_{aA} |\Phi_H^+\rangle_{bBcC} &= \frac{1}{2} \left( |\Phi_H^+\rangle_{aAbB} |\phi\rangle_{cC} + |\Phi_H^-\rangle_{aAbB} \hat{Z} |\phi\rangle_{cC} + \right. \\ &\quad \left. |\Psi_H^+\rangle_{aAbB} \hat{X} |\phi\rangle_{cC} + |\Psi_H^-\rangle_{aAbB} \hat{X} \hat{Z} |\phi\rangle_{cC} \right). \end{aligned} \quad (51)$$

No entanto, por se tratar de qubits híbridos, para discriminar entre os quatro estados de Bell da base híbrida utilizando ferramentas ópticas, precisamos realizar medidas separadamente nos modos  $a$  e  $b$  sobre a base de Bell computacional  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  e nos modos  $A$  e  $B$  sobre a base de Bell dos estados coerentes  $\{|-\alpha\rangle, |\alpha\rangle\}$ .

Assim, definimos tais bases como

$$|\Phi_c^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle), \quad (52)$$

$$|\Psi_c^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle). \quad (53)$$

e

$$|\Phi_\alpha^\pm\rangle = N_\alpha^\pm (|\alpha\rangle |\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle |-\alpha\rangle), \quad (54)$$

$$|\Psi_\alpha^\pm\rangle = N_\alpha^\pm (|\alpha\rangle |-\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle |\alpha\rangle). \quad (55)$$

onde  $N_\alpha^\pm = 1/\sqrt{2 \pm 2e^{-4\alpha^2}}$  (apêndice B) é a constante de normalização, necessária já que a base dos qubits coerentes não é ortonormal.

Agora, podemos reescrever os estados de Bell híbridos da forma:

$$\begin{aligned} |\Phi_H^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_H\rangle |0_H\rangle + |1_H\rangle |1_H\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |\alpha\rangle \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |\alpha\rangle + \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |-\alpha\rangle \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |-\alpha\rangle \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) |\alpha, \alpha\rangle + \frac{1}{2} (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) |-\alpha, -\alpha\rangle \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} (|\Phi_c^+\rangle + |\Psi_c^+\rangle) |\alpha, \alpha\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} (|\Phi_c^+\rangle - |\Psi_c^+\rangle) |-\alpha, -\alpha\rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} [|\Phi_c^+\rangle (|\alpha, \alpha\rangle + |-\alpha, -\alpha\rangle) + |\Psi_c^+\rangle (|\alpha, \alpha\rangle - |-\alpha, -\alpha\rangle)] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{|\Phi_c^+\rangle |\Phi_\alpha^+\rangle}{N_\alpha^+} + \frac{|\Psi_c^+\rangle |\Phi_\alpha^-\rangle}{N_\alpha^-} \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Analogamente,

$$|\Phi_H^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_H\rangle |0_H\rangle - |1_H\rangle |1_H\rangle) = \frac{1}{2} \left( \frac{|\Phi_c^+\rangle |\Phi_\alpha^-\rangle}{N_\alpha^-} + \frac{|\Psi_c^+\rangle |\Phi_\alpha^+\rangle}{N_\alpha^+} \right), \quad (57)$$

$$|\Psi_H^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_H\rangle |1_H\rangle + |1_H\rangle |0_H\rangle) = \frac{1}{2} \left( \frac{|\Phi_c^-\rangle |\Psi_\alpha^+\rangle}{N_\alpha^+} - \frac{|\Psi_c^-\rangle |\Psi_\alpha^-\rangle}{N_\alpha^-} \right), \quad (58)$$

$$|\Psi_H^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_H\rangle |1_H\rangle - |1_H\rangle |0_H\rangle) = \frac{1}{2} \left( \frac{|\Phi_c^-\rangle |\Psi_\alpha^-\rangle}{N_\alpha^-} - \frac{|\Psi_c^-\rangle |\Psi_\alpha^+\rangle}{N_\alpha^+} \right). \quad (59)$$

Logo, podemos escrever a Eq. (51) como

$$\begin{aligned} |\phi\rangle_{aA} |\phi_H^+\rangle_{bBcC} = & \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{|\Phi_c^+\rangle |\Phi_\alpha^+\rangle}{N_\alpha^+} + \frac{|\Psi_c^+\rangle |\Phi_\alpha^-\rangle}{N_\alpha^-} \right) |\phi\rangle_{cC} + \left( \frac{|\Phi_c^+\rangle |\Phi_\alpha^-\rangle}{N_\alpha^-} + \frac{|\Psi_c^+\rangle |\Phi_\alpha^+\rangle}{N_\alpha^+} \right) \hat{Z} |\phi\rangle_{cC} \right. \\ & \left. + \left( \frac{|\Phi_c^-\rangle |\Psi_\alpha^+\rangle}{N_\alpha^+} - \frac{|\Psi_c^-\rangle |\Psi_\alpha^-\rangle}{N_\alpha^-} \right) \hat{X} |\phi\rangle_{cC} + \left( \frac{|\Phi_c^-\rangle |\Psi_\alpha^-\rangle}{N_\alpha^-} - \frac{|\Psi_c^-\rangle |\Psi_\alpha^+\rangle}{N_\alpha^+} \right) \hat{X} \hat{Z} |\phi\rangle_{cC} \right]. \quad (60) \end{aligned}$$

Assim, temos o estado total do sistema. Notamos que, para concluir o teletransporte, precisamos discriminar os estados  $|\Phi_c^\pm\rangle$  e  $|\Psi_c^\pm\rangle$ ,  $|\Phi_\alpha^\pm\rangle$  e  $|\Psi_\alpha^\pm\rangle$ . Portanto, é necessário fazer medidas de Bell na base computacional ( $B_c$ ) para os modos  $a$  e  $b$ , e na base de Bell dos estados coerentes ( $B_\alpha$ ) para os modos  $A$  e  $B$ . Por exemplo, se  $|\Phi_c^+\rangle$  é detectado por  $B_c$  e  $|\Phi_\alpha^+\rangle$  é detectado por  $B_\alpha$ , podemos concluir que o estado  $|\Phi_H^+\rangle$  da base de Bell híbrida foi detectado e assim, a operação necessária para recuperar o estado inicial pode ser realizada (nesse caso, nenhuma).

Sabemos que a probabilidade de sucesso de  $B_c$  é limitada a 50% e a de  $B_\alpha$  é  $1 - \exp(-2|\alpha|^2)$  (JEONG; KIM; LEE, 2001). A grande vantagem dessa abordagem híbrida é que o teletransporte terá sucesso contanto que uma das duas medidas,  $B_c$  ou  $B_\alpha$  sejam sucedidas. Vamos considerar o caso em que a medida sobre a base computacional  $B_c$  não é sucedida e não podemos diferenciar entre os estados  $|\Phi_c^+\rangle$  e  $|\Phi_c^-\rangle$ . Ainda nos resta a medida sobre a base dos estados coerentes  $B_\alpha$ , que nos dará os possíveis resultados:  $|\Phi_c^+\rangle |\Phi_\alpha^+\rangle$ ,  $|\Phi_c^+\rangle |\Phi_\alpha^-\rangle$ ,  $|\Phi_c^-\rangle |\Psi_\alpha^+\rangle$  ou  $|\Phi_c^-\rangle |\Psi_\alpha^-\rangle$ , de acordo com a equação (60). Logo, o sucesso da medida  $B_\alpha$  irá resultar no sucesso do teletransporte do estado  $|\phi\rangle$ .

A mesma lógica é válida no caso de  $B_\alpha$  falhar, pois ainda teremos  $B_c$  para discriminar entre os estados da base híbrida. Enfim, chegamos a conclusão que a probabilidade de sucesso do teletransporte de um qubit híbrido é  $P = 1 - \frac{1}{2} \exp(-2|\alpha|^2)$  (LEE; JEONG, 2013).

Para completar o teletransporte, operações devem ser feitas sobre os modos  $c$  e  $C$  de acordo com os resultados obtidos em  $B_c$  e  $B_\alpha$ , a fim de transformá-lo no estado inicial  $\phi$ . Mas a aplicação de tais operações nos qubits híbridos não é tão trivial como parece. Vamos, portanto, analisar a ação das portas Pauli  $X$  e Pauli  $Z$  sobre tais modos híbridos.

De acordo com a equação (50), quando o estado  $|\Psi_H^+\rangle$  é detectado através da medida de Bell, o estado associado aos modos  $c$  e  $C$  é  $(\eta |0_H\rangle_{cC} + \mu |1_H\rangle_{cC})$ . Para recuperar o estado inicial  $|\phi\rangle$  deve-se, portanto, aplicar sobre esse estado a porta  $\hat{X}$ , ou seja, trocar os coeficientes  $\eta$  e  $\mu$ .

$$|\phi\rangle_{cC} = \mu |0_H\rangle_{cC} + \eta |1_H\rangle_{cC} = \hat{X}(\eta |0_H\rangle_{cC} + \mu |1_H\rangle_{cC}). \quad (61)$$

Quando escrevemos tal estado em termos dos qubits fotônicos e estados coerentes, percebemos que podemos realizar tal operação a partir de uma rotação de fase  $\pi$  em ambos os modos, isto é, fazemos  $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$ ,  $|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$  e  $|\alpha\rangle \rightarrow |-\alpha\rangle$ . Assim,

$$\begin{aligned} \eta |0_H\rangle_{cC} + \mu |1_H\rangle_{cC} &= \eta \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |\alpha\rangle_C + \mu \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |-\alpha\rangle_C \\ \mapsto \eta \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |-\alpha\rangle_C + \mu \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |+\alpha\rangle_C &= \eta |1_H\rangle_{cC} + \mu |0_H\rangle_{cC} = |\phi\rangle_{cC}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que aplicar a operação Pauli X na base híbrida é equivalente a aplicar uma rotação de fase  $\pi$  em ambos os modos.

Quanto à porta Pauli Z, retornamos novamente a equação (50). O estado associado ao vetor de Bell  $|\Phi_H^-\rangle$  é da forma  $(\mu |0_H\rangle_{cC} - \eta |1_H\rangle_{cC})$ . Para recuperar o estado inicial  $|\phi\rangle$  deve-se aplicar sobre esse estado a porta  $\hat{Z}$ . Essa operação corresponde à troca de sinal do coeficiente  $\eta$ .

Primeiro, escrevemos

$$\mu |0_H\rangle_{cC} - \eta |1_H\rangle_{cC} = \mu \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |\alpha\rangle_C - \eta \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |-\alpha\rangle_C.$$

A fim de concluir a troca de sinal, temos duas opções:

1. *Bit-flip* no qubit fotônico:

Aplicando a operação *bit flip* nos qubits discretos, correspondente a porta  $\hat{X}$  nesta base, conseguimos realizar a troca de sinal necessária.

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |\alpha\rangle_C - \eta \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |-\alpha\rangle_C &\mapsto \mu \left( \frac{|1\rangle + |0\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |\alpha\rangle_C \\ &\quad - \eta \left( \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |-\alpha\rangle_C \\ &= \mu \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |\alpha\rangle_C + \eta \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |-\alpha\rangle_C = |\phi\rangle_{cC}. \end{aligned}$$

2. *Sign-flip* nos estados coerentes:

A segunda alternativa é aplicar o *sign flip* nos qubits de estados coerentes, ou seja,  $|\pm\alpha\rangle \rightarrow \pm|\pm\alpha\rangle$ .

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |\alpha\rangle_C - \eta \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |-\alpha\rangle_C &\mapsto \mu \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c (+|\alpha\rangle_C) \\ &\quad - \eta \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c (-|-\alpha\rangle_C) \\ &= \mu \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |\alpha\rangle_C + \eta \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)_c |-\alpha\rangle_C = |\phi\rangle_{cC}. \end{aligned}$$

Demonstrada a ação das portas Pauli X e Pauli Z sobre a base híbrida, temos as ferramentas necessárias para realizar as operações necessárias sobre os modos  $c$  e  $C$  e recuperar o estado original.

Enquanto que a operação X sobre a base híbrida pode ser realizada de forma determinística utilizando óptica linear, as operações equivalentes à porta Z são realizadas não-deterministicamente, o que pode levar a alguns erros adicionais. A solução proposta pelos autores é "renomear logicamente" os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , de forma que se sabe que eles devem ser alterados na etapa final de medida. Em vista dessa suposição, conclui-se que a probabilidade deste esquema é o mencionado  $P = 1 - \frac{1}{2} \exp(-2|\alpha|^2)$  (LEE; JEONG, 2013).



---

## Considerações Finais

Neste trabalho foi realizada uma revisão teórica do tópico de teletransporte quântico, com ênfase na utilização de qubits híbridos.

Em primeiro lugar, discutimos conceitos básicos de mecânica quântica e informação quântica, como emaranhamento, qubits e estados coerentes. Em seguida, foi possível entender o esquema teórico de teletransporte quântico, que é baseado em estados emaranhados e utiliza-se de medidas na base de Bell e de portas lógicas para transportar um estado de um sistema até outro sem realizar medidas isoladamente sobre este.

Finalmente, abordamos o teletransporte quântico de qubits híbridos. Nesse caso, se utiliza uma base híbrida, que é produto de estados discretos e contínuos. Nesse trabalho, discutimos o caso para qubits fotônicos de vácuo e um único fóton  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  e qubits formados por estados coerentes  $\{|\alpha\rangle, |-\alpha\rangle\}$ . Assim, mostramos como se dá o teletransporte nesta base híbrida, as medidas realizadas em cada uma das bases isoladamente e as operações necessárias para retomar o estado inicial a ser teleportado.

A partir de toda essa discussão, mostramos de que forma o teletransporte utilizando qubits híbridos é vantajoso em relação ao teletransporte quando se utiliza uma base discreta ou contínua. Percebemos que ele supera as limitações que cada uma dessas possui, pois apresenta uma probabilidade de sucesso aperfeiçoada em relação ao protocolo com qubits fotônicos, e não há problemas de ortogonalidade para aplicar as portas lógicas necessárias, como é o caso dos estados coerentes.

Enfim, acreditamos que concluímos o objetivo inicial desta monografia, que era estabelecer uma base sólida de estudo para trabalhos futuros do Grupo de Óptica e Informação Quântica do Instituto de Física.



---

## Referências

ANDERSEN, U. L. et al. Hybrid quantum information processing. **arXiv preprint arXiv:1409.3719**, 2014.

ASPECT, A.; GRANGIER, P.; ROGER, G. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: A new violation of bell's inequalities. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 49, p. 91–94, Jul 1982. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.91>>.

BELL, J. S. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 38, n. 3, p. 447, 1966.

BENNETT, C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. **Physical Review Letters**, APS, v. 70, n. 13, p. 1895, 1993.

BLATT, R.; WINELAND, D. Entangled states of trapped atomic ions. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 453, n. 7198, p. 1008–1015, 2008.

BOSCHI, D. et al. Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. **Physical Review Letters**, APS, v. 80, n. 6, p. 1121, 1998.

CALSAMIGLIA, J.; LÜTKENHAUS, N. Maximum efficiency of a linear-optical bell-state analyzer. **Applied Physics B**, Springer, v. 72, n. 1, p. 67–71, 2001.

COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOE, F. Quantum mechanics. vol. 1. 4. rev. upd. 2009.

EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical Review**, APS, v. 47, n. 10, p. 777, 1935.

EISBERG, R. Física Quântica. **São Paulo: Elsevier**, 1979.

GHOSH, R.; MANDEL, L. Observation of nonclassical effects in the interference of two photons. **Physical Review Letters**, APS, v. 59, n. 17, p. 1903, 1987.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física: Eletromagnetismo. Vol. 3** . [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.

- HAROCHE, S. Nobel lecture: Controlling photons in a box and exploring the quantum to classical boundary. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 85, n. 3, p. 1083, 2013.
- JEONG, H.; KIM, M.; LEE, J. Quantum-information processing for a coherent superposition state via a mixed-entangled coherent channel. **Physical Review A**, APS, v. 64, n. 5, p. 052308, 2001.
- JEONG, H.; KIM, M. S. Efficient quantum computation using coherent states. **Physical Review A**, APS, v. 65, n. 4, p. 042305, 2002.
- JEONG, H. et al. Generation of hybrid entanglement of light. **Nature Photonics**, Nature Publishing Group, v. 8, n. 7, p. 564–569, 2014.
- KELVIN, L. I. nineteenth century clouds over the dynamical theory of heat and light. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 2, n. 7, p. 1–40, 1901.
- KIM, H.; LEE, S.-W.; JEONG, H. Two different types of optical hybrid qubits for teleportation in a lossy environment. **Quantum Information Processing**, Springer, v. 15, n. 11, p. 4729–4746, 2016.
- KWIAT, P. G. et al. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. **Physical Review Letters**, APS, v. 75, n. 24, p. 4337, 1995.
- LEE, S.-W.; JEONG, H. Near-deterministic quantum teleportation and resource-efficient quantum computation using linear optics and hybrid qubits. **Physical Review A**, APS, v. 87, n. 2, p. 022326, 2013.
- LOOCK, P. V. Optical hybrid approaches to quantum information. **Laser & Photonics Reviews**, Wiley Online Library, v. 5, n. 2, p. 167–200, 2011.
- LUO, Y.-H. et al. Quantum teleportation in high dimensions. **Physical Review Letters**, APS, v. 123, n. 7, p. 070505, 2019.
- LUTKENHAUS, N.; CALSAMIGLIA, J.; SUOMINEN, K. Bell measurements for teleportation. **PHYSICAL REVIEW A**, v. 59, n. 5, p. 3295–3300, MAY 1999. ISSN 1050-2947.
- MORIN, O. et al. Remote creation of hybrid entanglement between particle-like and wave-like optical qubits. **Nature Photonics**, Nature Publishing Group, v. 8, n. 7, p. 570–574, 2014.
- NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. **Quantum computation and quantum information**. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2002.
- OURJOUMTSEV, A. et al. Generation of optical ‘schrodinger cats’ from photon number states. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 448, n. 7155, p. 784–786, 2007.
- REN, J.-G. et al. Ground-to-satellite quantum teleportation. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 549, n. 7670, p. 70–73, 2017.
- SCHRÖDINGER, E. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. **Naturwissenschaften**, Springer, v. 23, n. 49, p. 823–828, 1935.

SCHULZ, P. A. Duas nuvens ainda fazem sombra na reputação de Lorde Kelvin. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 29, n. 4, p. 509–512, 2007.

WOOTTERS, W. K.; ZUREK, W. H. A single quantum cannot be cloned. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 299, n. 5886, p. 802–803, 1982.

ZEILINGER, A. Quantum teleportation-the science-fiction dream of "beaming" objects from place to place is now a reality-at least for particles of light. **Scientific American**, New York: Munn & Co., n. 1, p. 34–43, 2003.



# Apêndices



## O problema geral de medida no sistema de spin-1/2.

A discussão inicial sobre a medida do spin em um ângulo  $\theta$  arbitrário é baseada no estudo do experimento de Stern Gerlach. Nesse experimento, elétrons passam por um campo magnético que interage com o momento angular de spin e faz com que a partícula seja deflexionada na direção do campo. No entanto, o momento angular do elétron pode assumir apenas os valores  $\pm\hbar/2$ , portanto, elétrons com spins opostos serão deflexionados em sentidos opostos, como demonstra a figura 4.

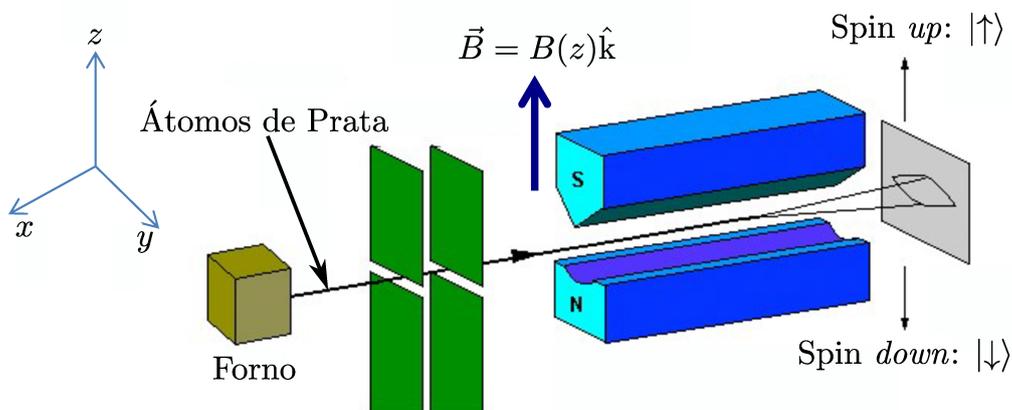


Figura 4 – Esquema do experimento de Stern-Gerlach. Fonte: *The Information Philosopher*<sup>1</sup>

Convencionalmente, a direção escolhida para o campo magnético é indicada pelo vetor unitário  $\hat{z}$ . No entanto, podemos escrever um operador de medida do spin que calcule a probabilidade de se obter *spin-down* e *spin-up* sob um campo magnético orientado em qualquer direção, em termos dos vetores de spin na direção  $\hat{z}$ .

<sup>1</sup> Disponível em <[https://www.informationphilosopher.com/solutions/experiments/stern\\_gerlach/](https://www.informationphilosopher.com/solutions/experiments/stern_gerlach/)> com modificações. Acesso em: 8 jun. 2022.

Assim, seja  $\hat{n}$  o vetor unitário que indica a orientação do campo magnético. Em coordenadas cartesianas

$$\hat{n} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \quad (62)$$

onde  $\theta$  é o ângulo polar e  $\phi$  o ângulo azimutal definidos em relação aos eixos  $z$  e  $x$ , respectivamente.

A partir do operador de momento angular de spin  $\hat{S} = \hat{S}_x \hat{i} + \hat{S}_y \hat{j} + \hat{S}_z \hat{k}$ , definimos  $\hat{S}_n$  como

$$\hat{S}_n = \hat{S} \cdot \hat{n} = (\hat{S}_x \hat{i} + \hat{S}_y \hat{j} + \hat{S}_z \hat{k}) \cdot \hat{n} = \sin \theta \cos \phi \hat{S}_x \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{S}_y \hat{j} + \cos \theta \hat{S}_z \hat{k} \quad (63)$$

Podemos escrever a matriz  $\hat{S}_n$  utilizando os operadores  $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_i$ . Ou seja,

$$\hat{S}_n = \frac{\hbar}{2} \sin \theta \cos \phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \sin \theta \sin \phi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (64)$$

Assim, obtemos a representação matricial do operador  $\hat{S}_n$  na base de  $\hat{S}_z$ , que é da forma

$$\hat{S}_n = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\theta} \\ \sin \theta e^{i\theta} & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (65)$$

Agora, podemos procurar a solução para o problema de autovalores

$$\hat{S}_n |S_n\rangle = S_n |S_n\rangle \quad (66)$$

Fazemos

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\theta} \\ \sin \theta e^{i\theta} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = S_n \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os elementos dos autovetores desconhecidos que satisfazem a equação (66).

Para encontrar os autovalores, calculamos

$$\det \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta - S_n & \sin \theta e^{-i\theta} \\ \sin \theta e^{i\theta} & -\cos \theta - S_n \end{pmatrix} = 0$$

obtendo  $S_n = \pm \frac{\hbar}{2}$ .

Agora, utilizamos os autovalores para encontrar seus respectivos autovetores. Assim,

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\theta} \\ \sin \theta e^{i\theta} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Para  $S_n = +\frac{\hbar}{2}$ , encontramos como autovetor

---

$$|0\rangle_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 e^{i\phi} \end{pmatrix} = \cos \theta/2 |0\rangle_z + \sin \theta/2 e^{i\phi} |1\rangle_z \quad (67)$$

Enquanto que para  $S_n = -\frac{\hbar}{2}$ ,

$$|1\rangle_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 e^{i\phi} \end{pmatrix} = -\sin \theta/2 |0\rangle_z + \cos \theta/2 e^{i\phi} |1\rangle_z \quad (68)$$

Note que se as medidas são feitas em direções no plano  $XZ$ , o valor do ângulo azimutal é  $\phi = 0$ , resultando nas Eqs. (5) e (6).



## Ortonormalização dos estados coerentes

Um estado coerente pode ser definido através de estados de Fock

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (69)$$

Seja dois estados coerentes  $\alpha$  e  $\beta$ . A partir da definição (69), podemos calcular

$$\begin{aligned} \langle\beta|\alpha\rangle &= \left( e^{-|\beta|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^{*m}}{\sqrt{m!}} |m\rangle \right) \cdot \left( e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \\ &= e^{-(|\beta|^2+|\alpha|^2)/2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{*m}}{\sqrt{m!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle m|n\rangle \\ &= e^{-(|\beta|^2+|\alpha|^2)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta^*\alpha)^n}{n!} \\ &= e^{-(|\beta|^2+|\alpha|^2)/2} e^{\beta^*\alpha} \\ &= \exp\left(\frac{-|\beta|^2 - |\alpha|^2}{2} + \beta^*\alpha\right) \end{aligned} \quad (70)$$

Utilizando essa expressão, podemos calcular o valor do produto  $\langle-\alpha|\alpha\rangle$

$$\langle-\alpha|\alpha\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2 - |\alpha|^2}{2} - |\alpha|^2\right) = e^{-2|\alpha|^2} \quad (71)$$

Para construir uma base de Bell em termos da base de estados coerentes  $\{|\alpha\rangle, |-\alpha\rangle\}$  precisamos de 4 vetores maximamente emaranhados que sejam ortonormais. Logo, definimos um desses vetores como

$$|\Phi_{\alpha}^{+}\rangle = N_{\alpha}^{+} (|\alpha, \alpha\rangle + |-\alpha, -\alpha\rangle) \quad (72)$$

Para determinar a constante  $N_{\alpha}^{+}$ , devemos normalizar o vetor  $|\Phi_{\alpha}^{+}\rangle$ . Assim,

$$\langle \Phi_{\alpha}^{+} | \Phi_{\alpha}^{+} \rangle = 1$$

$$|N_{\alpha}^{+}|^2 (\langle \alpha, \alpha | + \langle -\alpha, -\alpha |) (|\alpha, \alpha\rangle + |-\alpha, -\alpha\rangle) = 1$$

$$|N_{\alpha}^{+}|^2 (\langle \alpha | \alpha \rangle \langle \alpha | \alpha \rangle + \langle \alpha | -\alpha \rangle \langle \alpha | -\alpha \rangle + \langle -\alpha | \alpha \rangle \langle -\alpha | \alpha \rangle + \langle -\alpha | -\alpha \rangle \langle -\alpha | -\alpha \rangle) = 1$$

Finalmente, utilizando a expressão (71)

$$|N_{\alpha}^{+}|^2 (1 + e^{-2|\alpha|^2} e^{-2|\alpha|^2} + e^{-2|\alpha|^2} e^{-2|\alpha|^2} + 1) = 1$$

$$N_{\alpha}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2 + 2e^{-4|\alpha|^2}}} \quad (73)$$

Se realizamos o mesmo processo para  $|\Phi_{\alpha}^{-}\rangle$ , encontramos que  $N_{\alpha}^{-} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2e^{-4|\alpha|^2}}}$ . Além disso, a mesma constante é válida para normalizar os vetores  $|\Psi_{\alpha}^{\pm}\rangle$ .