
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Anderson Martins Rocha do Prado
Prof Dra. Ligia Laís Fêmina

Homologia Simplicial e Característica de Euler

Uberlândia - MG

2022

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

P896 Prado, Anderson Martins Rocha do, 1998-
2022 Homologia Simplicial e Característica de Euler
[recurso eletrônico] / Anderson Martins Rocha do Prado.
- 2022.

Orientadora: Ligia Laís Fêmina.
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Uberlândia, Graduação em
Matemática.

Modo de acesso: Internet.

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Fêmina, Ligia Laís, 1983-, (Orient.).
II. Universidade Federal de Uberlândia. Graduação em
Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Faculdade de Matemática

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902

Telefone: +55 (34) 3239-4158/4156/4126 - www.famat.ufu.br - famat@ufu.br



ATA DE DEFESA - GRADUAÇÃO

Curso de Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Trabalho de Conclusão de Curso 2 (GMA031)				
Data:	11/08/2022	Hora de início:	15:00	Hora de encerramento:	16:30
Matrícula do Discente:	11721MAT004				
Nome do Discente:	Anderson Martins Rocha do Prado				
Título do Trabalho:	Homologia Simplicial e Característica de Euler				

Reuniu-se na Sala 1F119, Campus Santa Mônica, da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Curso de Graduação em Matemática, assim composta: Professores: Dra. Francielle Rodrigues de Castro Coelho (FAMAT-UFU); Dra. Marisa de Souza Costa (FAMAT-UFU); Dra. Ligia Laís Fêmina (FAMAT-UFU), orientadora do candidato.

Iniciando os trabalhos, o(a) presidente da mesa, Dra. Ligia Laís Fêmina, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato(a), agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra, para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta, ocorreram em conformidade com as normas do Curso.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado. Nota 95

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Marisa de Souza Costa, Professor(a) do Magistério Superior**, em 11/08/2022, às 17:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.



Documento assinado eletronicamente por **Francielle Rodrigues de Castro Coelho, Professor(a) do Magistério Superior**, em 11/08/2022, às 17:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Ligia Laís Fêmina, Professor(a) do Magistério Superior**, em 12/08/2022, às 08:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3830473** e o código CRC **981437A3**.

Agradecimentos

Inicialmente quero agradecer a todas as pessoas, que colaboraram diretamente ou indiretamente na realização deste trabalho, durante todo esse percurso de graduação.

Agradeço a Deus pelas oportunidades que me foram dadas. Além do mais, até aqui Ele tem me sustentado, dando-me direcionamento, força, sabedoria e vontade em prosseguir e, jamais desistir, por mais que sejam difíceis as circunstâncias e a caminhada até aqui.

Aos meus pais Anderson e Ângela, a minha namorada Julia e a minha querida avó Maria que em meio às dificuldades se empenharam em me ajudar de todas as formas possíveis, proporcionando-me bem estar, carinho e incentivo.

A minha orientadora Prof^a Dr^a. Lígia Laís Fêmina pela sua dedicação, paciência e por tudo o que me ensinou não apenas ao longo deste trabalho, mas em todos os projetos de iniciação científica. Certamente, o que aprendi será de grande valia para minha carreira.

Agradeço também ao CNPq, por ter financiado meus projetos, tornando possível sua realização, além de exercer um trabalho fundamental na vida de diversos pesquisadores e por confiar na ciência brasileira, que tanto carece de instituições de apoio e fomento.

E também, a todos os professores do curso de Matemática da UFU que contribuíram para meu crescimento profissional e pessoal.

Resumo

Resumo: Neste trabalho apresenta-se alguns conceitos e importantes teoremas da teoria de topologia. O principal objetivo é estudar a homologia simplicial e a característica de Euler, que são importantes invariantes topológicos. Como aplicação desses invariantes, pode-se identificar espaços não homeomorfos. Por fim, iremos relacionar a característica de Euler com a homologia simplicial, por meio da definição dos números de Betti.

Palavras-chaves: Homeomorfismo, homologia simplicial, característica de Euler, números de Betti.

Sumário

Introdução	i
1 Espaços Métricos e Topológicos	1
1.1 Métrica e exemplos de espaços métricos	1
1.2 Funções Contínuas	5
1.3 Espaços Topológicos	7
1.4 Homeomorfismos	8
2 Homologia Simplicial	14
2.1 Definições e propriedades da Homologia	14
2.2 Grupos de Homologia Simplicial do Plano Projetivo	20
2.3 Grupos de Homologia Simplicial da Garrafa de Klein	22
2.4 Grupos de Homologia Simplicial do Toro	24
2.5 Grupos de Homologia Simplicial da Esfera	26
2.6 Aplicações	29
3 Características de Euler e os números de Betti	31
3.1 Características de Euler	31
3.2 Números de Betti	33
3.3 Característica de Euler do Plano Projetivo	36
3.4 Característica de Euler da Garrafa de Klein	37
3.5 Característica de Euler do Toro	38

3.6	Característica de Euler da Esfera	39
3.7	Aplicações	40
	Referências	41

Introdução

A Topologia Algébrica consiste em resolver problemas topológicos através de métodos puramente algébricos, e um conceito importante é o de homologia. Segundo Croom (4): *“Para um espaço topológico X , o grupo de homologia associado $H^*(X)$ reflete a estrutura geométrica de X , particularmente o arranjo dos “buracos” no espaço.”*

Já a Característica de Euler é outro importante invariante topológico, que associa aos espaços um número inteiro. Através dela é possível obter uma classificação das superfícies compactas, conexas e sem bordo.

O principal objetivo desse trabalho é estudar esses dois invariantes topológicos: a homologia simplicial e a característica de Euler-Poincaré. Como aplicação desses invariantes, serão identificados espaços não homeomorfos. Por fim, relacionar a característica de Euler com a homologia simplicial, por meio da definição dos números de Betti.

O trabalho está dividido em três capítulos. O primeiro aborda alguns conceitos básicos de topologia, como espaços topológicos, continuidade e homeomorfismo. As principais referências são (1), (3), (7) e (8).

Em seguida, o capítulo dois concentra-se no estudo da homologia simplicial. Serão estudados os seguintes tópicos: poliedros, triangularização, complexo simplicial, homologia simplicial e possíveis aplicações. Para o estudo destes tópicos, usaremos principalmente (4), (5), (9), (10), (11) e (13).

Finalmente, o capítulo três dedica-se ao estudo da característica de Euler e

relação com a homologia simplicial. As principais referências desse capítulo são: (2), (4), (5), (6), (11) e (12).

Espaços Métricos e Topológicos

Nesse capítulo, apresenta-se alguns resultados básicos de Topologia Geral, para maiores detalhes consultar (1), (3), (7) e (8).

1.1 Métrica e exemplos de espaços métricos

Definição 1.1.1. *Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, que chamamos de distância de x a y , de modo que, para todo x, y e z pertencentes a M , sejam satisfeitas as seguintes condições:*

I) $d(x, x) = 0$;

II) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

III) $d(x, y) = d(y, x)$;

IV) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Portanto, um espaço métrico será um conjunto M munido de uma métrica d .

Exemplo 1.1.1. *A métrica "zero-um".*

Qualquer conjunto M pode tornar-se um espaço métrico de maneira muito simples. Basta definir a métrica $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira: $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$.

De fato, vale:

d1) $d(x, x) = 0$ pela própria definição.

d2) Se $x \neq y$, $d(x, y) = 1 > 0$.

d3) Se $x = y$ temos que $d(x, y) = 0 = d(y, x)$.

Se $x \neq y$ temos que $d(x, y) = 1 = d(y, x)$.

d4) Se $x \neq z \neq y \neq x$, $d(x, z) = 1 \leq 2 = 1 + 1 = d(x, y) + d(y, z)$.

Se $x = y \neq z$, $d(x, z) = 1 = 0 + 1 = d(x, y) + d(y, z)$.

Se $x = z \neq y$, $d(x, z) = 0 \leq 2 = 1 + 1 = d(x, y) + d(y, z)$.

Se $x \neq z = y$, $d(x, z) = 1 = 1 + 0 = d(x, y) + d(y, z)$.

Se $x = z = y$, $d(x, z) = 0 = 0 + 0 = d(x, y) + d(y, z)$.

Observação 1.1.1. *O espaço métrico que se obtém desta maneira é, naturalmente, bastante trivial, embora seja útil para contraexemplos.*

Exemplo 1.1.2. *A reta, ou seja, o conjunto \mathbb{R} dos números reais é um espaço métrico. A distância entre os pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$.*

As condições são verificadas abaixo:

d1) $d(x, x) = |x - x| = |0| = 0$.

d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) = |x - y| > 0$.

d3) $d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| = d(y, x)$.

d4) $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$.

Esta é a chamada “métrica usual” da reta.

Exemplo 1.1.3. *O espaço euclidiano \mathbb{R}^n é um espaço métrico. Os pontos de \mathbb{R}^n são $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$. Dados $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n , as três principais distâncias definidas neste espaço são:*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

$$d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

As funções $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são métricas. A métrica d é chamada **euclidiana**.

Exemplo 1.1.4. Se (M, d) é um espaço métrico, todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado, de modo natural, como espaço métrico. Para isso, basta considerar a restrição de d a $S \times S$, ou seja, usar entre os elementos de S a mesma distância que eles possuíam como elementos de M . Quando isto é feito, S chama-se um **subespaço** de M e a métrica de S diz-se **induzida** pela métrica de M .

Definição 1.1.2. Num espaço métrico (M, d) define-se uma bola aberta, de centro a e raio r como

$$B(a, r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

Um subconjunto A de M é um **conjunto aberto** se cada ponto de A é centro de uma bola aberta inteiramente contida em A .

Observação 1.1.2. Essas bolas abertas formam o que chama-se de base para os espaços métricos, no sentido que cada conjunto aberto, é uma reunião de bolas abertas. Tendo essa noção de conjuntos abertos, temos a definição de espaço topológico. No geral, em um espaço topológico não possui uma noção de distância, mas, os conjuntos abertos que caracterizam o espaço.

Exemplo 1.1.5. Se M está munido da métrica zero-um então, para todo $a \in M$, tem-se $B(a; r) = M$ se $r > 1$, $B(a; r) = \{a\}$ se $r < 1$ e se $r = 1$ temos que $B(a; 1) = \{a\}$.

Definição 1.1.3. *Seja S um subespaço do espaço métrico M . Para cada $a \in S$ e cada $r > 0$, seja $B_S(a; r)$ a bola aberta de centro a e raio r , relativamente à métrica induzida em S .*

Observação 1.1.3. *Tem-se $B_S(a; r) = B(a; r) \cap S$, onde $B(a; r)$ é a bola aberta de centro a e raio r no espaço métrico M .*

Definição 1.1.4. *Um conjunto F diz-se **fechado** num espaço métrico (M, d) se o seu complementar F^C for um conjunto aberto.*

Proposição 1.1.1. *Os subconjuntos abertos de um espaço métrico M satisfazem as seguintes propriedades:*

- 1) *o espaço M e o conjunto vazio \emptyset são subconjuntos abertos de M ;*
- 2) *Se $(A_\lambda)_{\lambda \in J}$ for uma família qualquer (finita ou infinita) de subconjuntos abertos de M , sua reunião $A = \cup A_\lambda$ é um subconjunto aberto de M ;*
- 3) *A interseção $A_1 \cap \dots \cap A_n$ de uma família (finita) de subconjuntos A_1, \dots, A_n abertos em M é um subconjunto aberto de M .*

Demonstração:

- 1) *É evidente que M é aberto. Para mostrarmos que \emptyset é aberto basta notar que um subconjunto $X \subset M$ só deixa de ser aberto quando existe um ponto $x \in X$ tal que nenhuma bola de centro x esteja contida em X . Como não existe $x \in \emptyset$, o conjunto vazio não contradiz a condição que define os conjuntos abertos.*
- 2) *Dado $x \in A$, existe um índice $\lambda \in J$ de forma que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe uma bola $B(x; \varepsilon)$ contida em A_λ . Logo, $B(x; \varepsilon) \subset A$.*
- 3) *Seja $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n$. Para cada $i = 1, \dots, n$ existe uma bola aberta $B(x; \varepsilon_i)$ contida em A_i . Tome $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$. Então $\varepsilon > 0$ e $B(x; \varepsilon) \subset B(x; \varepsilon_i) \subset A_i$ para cada i . Portanto, $B(x; \varepsilon) \subset A_1 \cap \dots \cap A_n$. □*

Uma pergunta natural, após a demonstração acima é: Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ abertos em M , então $\cap A_{\lambda \in L}$ é aberto?

A resposta é não! Tal fato pode ser comprovado pelo contraexemplo a seguir.

Exemplo 1.1.6. Considere o intervalo $(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, conforme Figura 1.1.



Figura 1.1: Interseção infinita de abertos

Sabemos que se trata de um intervalo aberto, para todo n . Note que $\cap (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$. Ou seja, $\{0\}^c = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ é aberto, e portanto $\{0\}$ é fechado.

1.2 Funções Contínuas

Definição 1.2.1. Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $x_0 \in M$ quando, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

ou seja, quando dado qualquer bola aberta $B' = B(f(x_0), \varepsilon)$ de centro $f(x_0)$, existe uma bola $B = B(x_0, \delta)$ de centro x_0 tal que $f(B) \subset B' = B(f(x_0), \varepsilon)$. Diz-se que $f : M \rightarrow N$ é contínua se for contínua em todos os pontos de M .

Proposição 1.2.1. Sejam A, B e C espaços métricos, f e g funções contínuas. Se $f : A \rightarrow B$ é contínua no ponto a , e $g : B \rightarrow C$ é contínua no ponto $f(a)$, então

$g \circ f : A \rightarrow C$ é contínua no ponto a , ou seja, a composta de duas funções contínuas é contínua.

Demonstração:

Seja $\varepsilon > 0$, como por hipótese g é contínua em $f(a)$ podemos obter $\lambda > 0$ de forma que para $y \in B$

$$d(y, f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(y), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Agora para $\lambda > 0$, como f é contínua no ponto a , obtemos que $\delta > 0$ tal que:

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \lambda.$$

Logo,

$$d(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Portanto, a composta de duas funções contínuas é contínua. \square

Corolário 1.2.1. Seja M um espaço métrico e o conjunto $X \subset M$. Se $f: M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in X$ então $f|_X : X \rightarrow N$ é contínua no ponto a .

Demonstração:

Essa restrição $f|_X$ é uma composição do tipo $f \circ \iota$, onde $\iota : X \rightarrow M$ é uma função de inclusão, ou seja, $\iota(x) = x$ com $x \in X$.

\square

Proposição 1.2.2. Sejam M, N espaços métricos. Para que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(A')$ de todo subconjunto aberto $A' \subset N$ seja um subconjunto aberto de M .

Demonstração:

Seja f contínua e $A' \subset N$ um aberto, devemos provar que $A = f^{-1}(A')$ é aberto em M . De fato, para cada ponto $a \in A$, $f(a) \in A'$. Como A' é aberto, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a); \varepsilon) \subset A'$. Sendo f contínua no ponto a , temos que existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon) \subset A'$. No entanto, note que

$f(B(a; \delta)) \subset A'$ o que significa que $B(a; \delta) \subset f^{-1}(A') = A$. Logo, A é um aberto pois, para cada ponto $a \in M$, existe uma bola $B(a; \delta)$ contida em A .

Reciprocamente, suponhamos que $f : M \rightarrow N$ é tal que, para todo aberto $A' \subset N$, $A = f^{-1}(A')$ é aberto em M . Seja $a \in M$ um ponto qualquer prova-se que f é contínua no ponto a . De fato, dada a bola $B(f(a); \varepsilon) = A'$ é um aberto de N que contem $f(a)$, conseqüentemente $A = f^{-1}(A')$ é um aberto de M contendo a . Portanto, existe bola $B(a; \delta) \subset A$, assim $f(B(a; \delta)) \subset A'$.

□

1.3 Espaços Topológicos

Definição 1.3.1. Uma topologia num conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X , chamados os subconjuntos abertos (topologia τ) satisfazendo as condições:

- I) X e o subconjunto vazio ϕ são abertos;
- II) a reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;
- III) a interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.

Um espaço topológico é um par (X, τ) onde X é um conjunto de τ é uma topologia em X . No geral, dizemos apenas "espaço topológico X ". Dessa forma, a topologia τ somente será mencionada nos casos em que houver risco de ambigüidades.

Observação 1.3.1. O par (X, τ) é chamado espaço topológico, e os elementos de τ são chamados de subconjuntos abertos de X . O complementar de um aberto de X é dito **fechado** em X .

Todo espaço métrico M pode ser considerado, como um espaço topológico, quando tomamos M a coleção de abertos definidos a partir da métrica de M .

Observação 1.3.2. Diz-se que X é **metrizável** quando for possível definir uma métrica d em X tal que os abertos definidos por d , coincidem com os abertos da topologia de X . Nem todo espaço topológico é metrizável.

Exemplo 1.3.1. Seja X um conjunto qualquer, pode-se definir uma topologia τ_0 em X tomando todos os subconjuntos de X como abertos. Tal topologia é chamada de topologia **discreta**.

O par (X, τ_0) é um espaço metrizável.

De fato, basta considerarmos a métrica “zero-um”. Se d é a métrica “zero-um” sobre um conjunto X , então todo $A \subset X$ é aberto. Assim, se $A = \emptyset$ é imediato. Se $A \neq \emptyset$, então $A = \bigcup_{p \in A} \{p\}$ e como cada $\{p\}$ é uma bola aberta de centro p e raio $\epsilon \leq 1$, então A é aberto.

Exemplo 1.3.2. Pode-se considerar uma topologia τ_1 em X , na qual os únicos abertos são X e o conjunto vazio \emptyset . Essa topologia chama-se **caótica**.

Se X contiver pelo menos dois pontos, (X, τ_1) não é espaço metrizável.

De fato, seja $X = \{a, b\}$, com a topologia caótica, temos que $\{a\}$ e $\{b\}$ não são abertos.

Mas em todo espaço métrico, dados dois pontos distintos $a, b \in X$, existem duas bolas abertas disjuntas com centros em a e b , respectivamente. Para isso, basta tomar $0 < r < \frac{d(a,b)}{2}$.

Com a topologia caótica não é possível o resultado acima para o conjunto $X = \{a, b\}$. Portanto, (X, τ_1) não é metrizável.

1.4 Homeomorfismos

Definição 1.4.1. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, de um espaço topológico X num espaço topológico Y , é contínua quando a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo aberto $B \subset Y$ for um aberto em X .

Existem funções contínuas bijetivas $f : X \rightarrow Y$ tais que $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é descontínua.

Exemplo 1.4.1. Seja $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ o círculo unitário do plano euclidiano. A função $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$, definida por $f(t) = (\cos t, \sin t)$ é contínua, pois suas funções coordenadas, cosseno e seno, são contínuas. Na Figura 1.2 temos a representação da função f , denominada função de Euler.

Além disso, f é bijetiva. A aplicação inversa, $g = f^{-1} : S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$ é descontínua precisamente no ponto $p = (1, 0) \in S^1$.

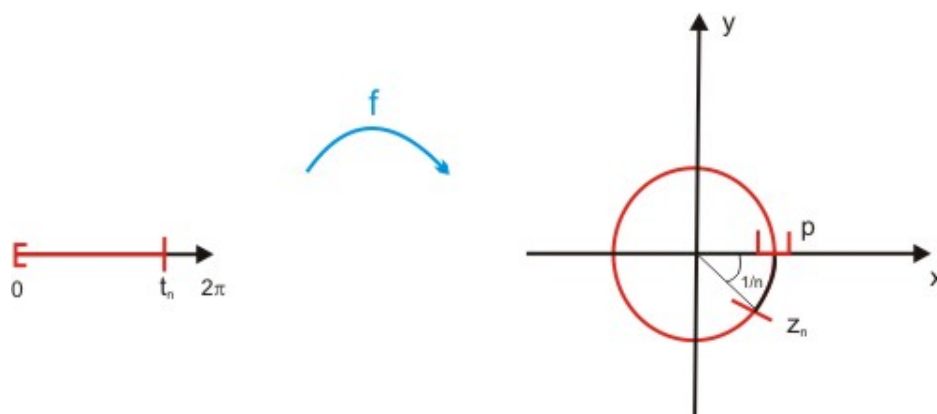


Figura 1.2: Função de Euler

De fato, temos $g(p) = 0$. Sabe-se que a bola aberta de centro p e raio δ em S^1 , que é subespaço do espaço métrico \mathbb{R}^2 , é a interseção de tal bola em \mathbb{R}^2 com S^1 , ou seja, $B_{S^1}(p, \delta) = B_{\mathbb{R}^2}(p, \delta) \cap S^1$.

Para qualquer $\delta > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z_n = f(t_n) = f\left(2\pi - \frac{1}{n}\right) \in B_{S^1}(p, \delta)$. Considerando $\epsilon = \pi$, para todo $\delta > 0$, existe

$$z_n \in B_{S^1}(p, \delta) = \{x \in S^1; d(x, p) < \delta\},$$

logo $d(z_n, p) < \delta$ e

$$|g(z_n) - g(p)| = \left|2\pi - \frac{1}{n} - 0\right| = 2\pi - \frac{1}{n} > \pi = \epsilon.$$

Definição 1.4.2. Um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$, de um espaço topológico X

sobre um espaço topológico Y é uma aplicação contínua e biunívoca de X sobre Y , cuja inversa $h^{-1} : Y \rightarrow X$ também é contínua.

Exemplo 1.4.2. (Projeção estereográfica) Seja $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ e $P = (0, 1) \in S^1$ o seu pólo norte. A projeção estereográfica $\pi : S^1 - \{P\} \rightarrow \mathbb{R}$ estabelece um homeomorfismo entre a esfera menos o pólo norte e a reta \mathbb{R} .

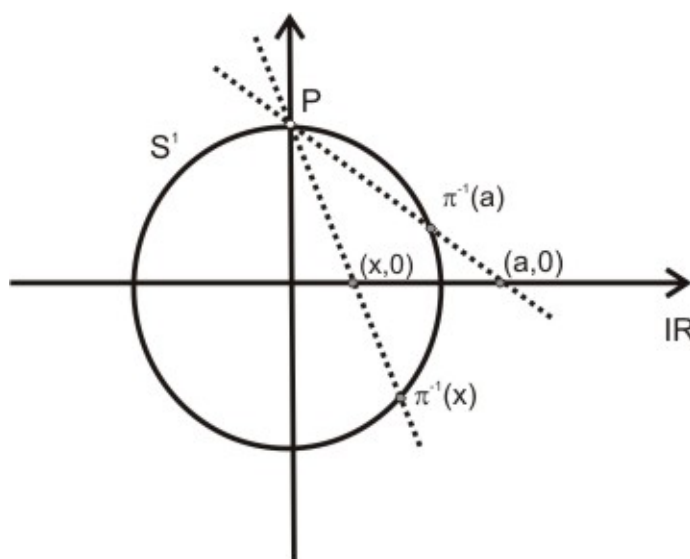


Figura 1.3: Projeção estereográfica

Considere a Figura 1.3, a fim de obter uma fórmula para π , encontramos a equação da reta que passa pelo pólo norte e um ponto (a, b) pertencente a $S^1 - \{P\}$, tal equação é $y = \frac{(b-1)x + a}{a}$, ou seja, qualquer ponto pertencente a reta é da forma $\left(x, \frac{(b-1)x + a}{a}\right)$. Tal ponto pertence a reta \mathbb{R} quando $y = 0$, logo quando $x = \frac{-a}{(b-1)}$. Portanto, $\pi(a, b) = \frac{-a}{(b-1)}$. De modo geral, $\pi(x, y) = \frac{-x}{(y-1)}$, para qualquer $(x, y) \in S^1 - \{P\}$. Note que essa função é contínua.

Mostremos que π é um homeomorfismo. De fato, a função

$$\begin{aligned}\pi^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 - \{P\} \\ x &\mapsto \left(\frac{2x}{x^2 + 1}, \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)\end{aligned}$$

é a função inversa de π .

Primeiramente, note que $\pi^{-1}(x) \in S^1 - \{P\}$, pois

$$\left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^2 = \left(\frac{4x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} \right) + \left(\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} \right) = \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} \right) = 1.$$

Além disso, $\pi^{-1}(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 1}, \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) \neq (0, 1) = P$.

A função $\pi^{-1}(x)$ é contínua, pois suas funções coordenadas são contínuas.

Calculemos as composições:

$$\begin{aligned}
\pi \circ \pi^{-1}(x) &= \pi\left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \left(\frac{-\frac{2x}{x^2+1}}{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)-1}\right) = \left(\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}\right) = \\
&= \left(\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^2+1}}\right) = \left(\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{2}{x^2+1}}\right) = \frac{2x}{x^2+1} \cdot \frac{x^2+1}{2} = \frac{2x}{2} = x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\pi^{-1} \circ \pi)(x, y) &= \pi^{-1}\left(\frac{-x}{y-1}\right) = \pi^{-1}\left(\frac{x}{1-y}\right) = \\
&= \left(\frac{2 \cdot \left(\frac{x}{1-y}\right), \left(\frac{x}{1-y}\right)^2 - 1}{\left(\frac{x}{1-y}\right)^2 + 1, \left(\frac{x}{1-y}\right)^2 + 1}\right) = \\
&= \left(\frac{\frac{2x}{1-y}, \left(\frac{x^2}{1+y^2-2y}\right) - 1}{\left(\frac{x^2}{1+y^2-2y}\right) + 1, \left(\frac{x^2}{1+y^2-2y}\right) + 1}\right) = \\
&= \left(\frac{\frac{2x}{1-y}, \left(\frac{x^2-1-y^2+2y}{1+y^2-2y}\right)}{\left(\frac{x^2+1+y^2-2y}{1+y^2-2y}\right), \left(\frac{x^2+1+y^2-2y}{1+y^2-2y}\right)}\right) = \\
&= \left(\frac{2x}{1-y} \cdot \frac{1+y^2-2y}{x^2+1+y^2-2y}, \frac{x^2-1-y^2+2y}{1+y^2-2y} \cdot \frac{1+y^2-2y}{x^2+1+y^2-2y}\right) = \\
&= \left(\frac{2x}{1-y} \cdot \frac{(1-y)^2}{x^2+1+y^2-2y}, \frac{x^2-1-y^2+2y}{x^2+1+y^2-2y}\right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{x^2+y^2=1}{=} \left(\frac{2x(1-y)}{x^2+1+y^2-2y}, \frac{x^2-(x^2+y^2)-y^2+2y}{2-2y}\right) = \\
&= \left(\frac{2x(1-y)}{2-2y}, \frac{x^2-x^2-y^2-y^2+2y}{2-2y}\right) \\
&= \left(\frac{2x(1-y)}{2(1-y)}, \frac{-2y^2+2y}{2(1-y)}\right) = \left(x, \frac{2y(-y+1)}{2(-y+1)}\right) = (x, y).
\end{aligned}$$

Observação 1.4.1. De maneira análoga, pode-se provar que $S^n - \{P\}$, onde

$P = (0, 0, \dots, 0, 1)$ é homeomorfa ao \mathbb{R}^n , considerando

$$\begin{aligned} \pi : S^n - \{p\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &\mapsto \frac{-1}{x_{n+1} - 1} \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Homologia Simplicial

A homologia simplicial surgiu como uma forma de estudar os espaços topológicos, mais especificamente os n -simplexos. Essa ferramenta calcula os grupos de homologia de um espaço homeomorfo a um poliedro, esse homeomorfismo se refere a uma triangularização do espaço dado. As principais referências são: (4), (5), (9), (10), (11) e (13).

2.1 Definições e propriedades da Homologia

Definição 2.1.1. Um conjunto $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ de $n + 1$ pontos em \mathbb{R}^n é geometricamente independente quando os vetores $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_n - a_0$ são linearmente independentes.

Definição 2.1.2. O conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n$, que são gerados pelo conjunto de pontos geometricamente independentes $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, para os quais existem números reais não negativos $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tal que $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$ e

$\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, é chamado de n -simplexo, e podemos denotar por σ^n .

Observação 2.1.1. O **0-simplexo** é um conjunto unitário, o **1-simplexo** é conhecido como um segmento de reta fechado, o **2-simplexo** é um triângulo (interior

e arestas), o **3-simplexo** é um tetraedro. Quando se trata de simplexos abertos teremos respectivamente: o conjunto unitário para o **0-simplexo**, um segmento de linha com os pontos finais removidos para o **1-simplexo**, o interior de um triângulo para o **2-simplexo** e o interior de um tetraedro para o **3-simplexo**. Os simplexos estão representados na Figura 2.1.

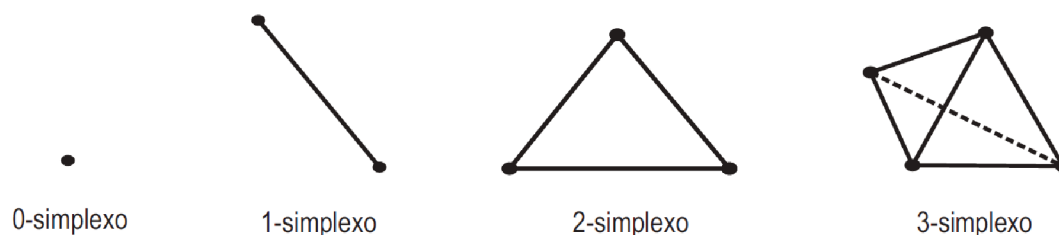


Figura 2.1: Simplexos

Definição 2.1.3. Dizer que um simplexo σ^k é uma face de um simplexo σ^n , $k \leq n$, significa que cada vértice de σ^k é um vértice de σ^n . Se σ^n é o simplexo com vértices a_0, a_1, \dots, a_n , escrevemos $\sigma^n = \langle a_0 \dots a_n \rangle$.

Definição 2.1.4. Dois simplexos σ^x e σ^y são **propriamente unidos**, se $\sigma^x \cap \sigma^y$ é vazio ou $\sigma^x \cap \sigma^y$ é uma face de ambos. Veja exemplos ilustrados nas Figuras 2.2 e 2.3

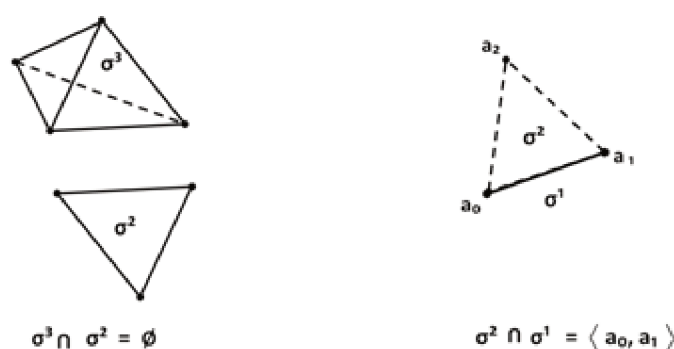


Figura 2.2: Simplexos propriamente unidos

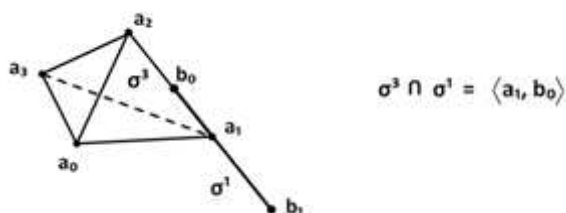


Figura 2.3: Simplexos não propriamente unidos

Definição 2.1.5. Um complexo simplicial é uma família finita K de simplexos geométricos, os quais, são propriamente unidos e tem a propriedade de que cada face de um elemento de K é também um elemento de K . A dimensão de K é o maior índice positivo r tal que K tenha um r -simplexo. Logo, podemos dizer que a união de elementos de K com a topologia do subespaço topológico Euclidiano é denotado por $|K|$ e chama-se de **poliedro** associado de K .

Definição 2.1.6. A triangularização de um espaço topológico X consiste num complexo simplicial K e um homeomorfismo $h : |K| \rightarrow X$.

Observação 2.1.2. Triangularizar uma superfície, nada mais é que cobri-la de formas triangulares, nos quais ou tem uma face em comum, ou um vértice, ou uma aresta.

Como exemplo, a seguir na Figura 2.4 uma triangularização da faixa de Möbius.



Figura 2.4: Faixa de Möbius

Definição 2.1.7. Um n -simplexo orientado, $n \geq 1$, é obtido de um n -simplexo $\sigma^n = \langle a_0 \dots a_n \rangle$ escolhendo a ordem para esses vértices. A classe equivalente de permutações pares para escolha da ordem, determina o simplexo orientado positivamente $+\sigma^n$, enquanto a classe equivalente das permutações ímpares determina o simplexo orientado negativamente. Um complexo simplicial orientado é obtido de um complexo simplicial atribuindo uma orientação para cada simplexo. Se os vértices a_0, \dots, a_p de um complexo K são os vértices de um p -simplexo σ^p , então o símbolo $+\langle a_0 a_1 \dots a_p \rangle$ denota a classe de permutações pares para indicar a ordem a_0, \dots, a_p e $-\langle a_0 a_1 \dots a_p \rangle$ denota a classe de permutações ímpares. Veja uma exemplificação na Figura 2.5

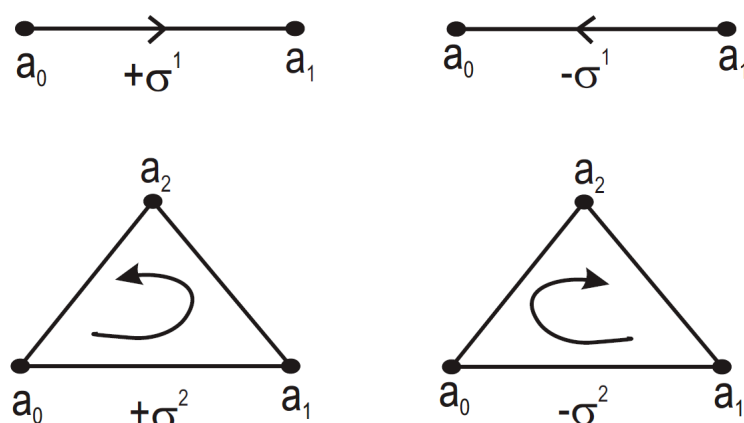


Figura 2.5: Orientação

Definição 2.1.8. Seja K um complexo geométrico orientado com simplexos σ^{p+1} e σ^p cuja suas dimensões diferem por 1, iremos associar em cada par (σ^{p+1}, σ^p) um número de incidência $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$ a ser definido por: Se σ^p não é uma face de σ^{p+1} , então $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 0$. Suponha ainda que σ^p é uma face de σ^{p+1} , agora ordene esses vértices de modo que $\sigma^p = \langle a_0 \dots a_p \rangle$. Seja ainda v o vértice de σ^{p+1} , no qual não é vértice de σ^p . Logo $\sigma^{p+1} = \pm \langle v a_0 \dots a_p \rangle$. Se for “+” a nossa expressão terá $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 1$, caso seja “-” será $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = -1$.

Definição 2.1.9. *Seja K um complexo simplicial orientado. Se p é um número inteiro positivo, então a p -dimensional cadeia, ou p -cadeia, é uma função $c_p : K \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que, para cada p -simplexo σ^p , $c_p(-\sigma^p) = -c_p(+\sigma^p)$.*

A família de p -cadeias forma um grupo $C_p(K)$ chamado de grupo p -dimensional cadeia K , com a operação adição induzida pelos inteiros.

Se K tem α_p p -simplexos, então $C_p(K)$ é isomorfo a soma direta de α_p cópias de \mathbb{Z} , através da seguinte correspondência

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} g_i \sigma_i^p \longleftrightarrow (g_1, g_2, \dots, g_{\alpha_p}).$$

Definição 2.1.10. *Seja $p \geq 1$ e $g \cdot \sigma^p$ é uma p -cadeia elementar, o bordo de $g \cdot \sigma^p$ é definido por*

$$\partial_p(g \cdot \sigma^p) = \sum [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] g \cdot \sigma_i^{p-1}, \quad \sigma_i^{p-1} \in K.$$

O operador bordo ∂ é estendido por linearidade para um homomorfismo

$$\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K).$$

Desse modo, se $c_p = \sum g_i \cdot \sigma_i^p$ é uma p -cadeia arbitrária, então definimos:

$$\partial_p(c_p) = \sum \partial_p(g_i \cdot \sigma_i^p).$$

O bordo de uma 0-cadeia é definido como sendo zero.

Teorema 2.1.1. *Se K é um complexo orientado e $p \geq 2$, então a composição $\partial_{p-1} \circ \partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-2}(K)$ no diagrama a seguir:*

$$C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2}(K)$$

é um homomorfismo trivial.

Demonstração: (4), Teorema 2.1. □

Seja K um complexo orientado.

Seja $p \geq 0$, um p -ciclo é uma p -cadeia z_p tal que $\partial(z_p) = 0$. O núcleo do homomorfismo $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ é um subgrupo de $C_p(K)$ e é a família de p -ciclos. Esse subgrupo é denotado por $Z_p(K)$, e é chamado de grupo ciclo p -dimensional de K . Como definimos o bordo de uma 0 -cadeia como sendo 0 , temos 0 -ciclo como sendo sinônimo de 0 -cadeia, ou seja, o grupo $Z_0(K)$ de 0 -ciclos é o grupo $C_0(K)$ de 0 -cadeias.

Seja $p \geq 0$, uma p -cadeia b_p é um p -bordo em K , se existe uma $(p+1)$ -cadeia c_{p+1} tal que $\partial(c_{p+1}) = b_p$. A imagem de $\partial_{p+1}(C_{p+1}(K))$ é um subgrupo de $C_p(K)$ e é a família de p -bordos. Esse subgrupo é denominado de p -dimensional grupo-bordo de K e é denotado por $B_p(K)$. Se n é a dimensão de K , então não existe p -cadeias em K para $p > n$. Note que não existe $(n+1)$ -cadeias em K tal que $C_{n+1}(K) = 0$ e portanto $B_n(K) = 0$.

Teorema 2.1.2. *Se K é um complexo orientado, então $B_p \subset Z_p$ para cada inteiro p tal que $0 \leq p \leq n$, onde n é a dimensão de K .*

Demonstração: (4), Teorema 2.2. □

Definição 2.1.11. *Dados dois p -ciclos x_p e y_p num complexo K , dizemos que ambos são homólogos, isto significa que, $x_p \sim y_p$, caso exista $p+1$ cadeia tal que $\partial(c_{p+1}) = x_p - y_p$. Assim, podemos dizer que se em um p -ciclo t_p é bordo de uma $p+1$ cadeia, dizemos ser homólogo a zero, isto é: $t_p \sim 0$.*

A relação definida anteriormente para p -ciclos é uma relação de equivalência.

As classes de homologia de $Z_p(K)$ são $[y_p] = \{x_p \in Z_p(K) : x_p \sim y_p\}$. Suas classes laterais são: $y_p + B_p(K) = \{z_p + \partial_{p+1}(c_{p+1}) \in B_p(K)\}$.

Definição 2.1.12. *Seja $p \geq 0$ e K um complexo orientado, o grupo de homologia p -dimensional de K é o grupo quociente $H_p = \frac{Z_p(K)}{B_p(K)}$, onde $Z_p(K)$ é o núcleo do operador bordo de dimensão p e $B_p(K)$ é a imagem do operador bordo de dimensão $p + 1$.*

Teorema 2.1.3. *Se X e Y são espaços topológicos homeomorfos então, $H_p(X)$ e $H_p(Y)$ são isomorfos para cada p .*

Demonstração: (6), teorema 4.50. □

2.2 Grupos de Homologia Simplicial do Plano Projetivo

Considere a triangularização do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$, constituída de dois 0-simplexos v e w , três 1-simplexos a , b e c , e dois 2-simplexos U e L , conforme Figura 2.6 a seguir.

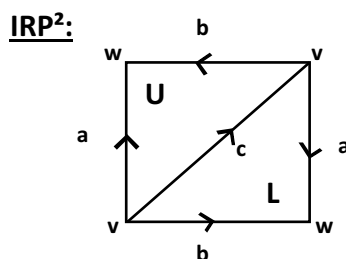


Figura 2.6: Triangularização do plano projetivo

Agora, será calculado os grupos de homologia simplicial do plano projetivo. A sequência de cadeia de $\mathbb{R}P^2$ é dada por:

$$0 \longrightarrow C_2(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow C_1(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow 0,$$

a qual é equivalente a

$$0 \longrightarrow \langle U, L \rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle a, b, c \rangle \xrightarrow{\partial_1} \langle v, w \rangle \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

O operador ∂_0 é nulo, então $Z_0(\mathbb{R}P^2) = \langle v, w \rangle$.

Temos que $\partial_1(a) = \partial_1(b) = w - v$ e $\partial_1(c) = 0$, logo $B_0(\mathbb{R}P^2) = \langle w - v \rangle$.

$$H_0(\mathbb{R}P^2) = \frac{Z_0(\mathbb{R}P^2)}{B_0(\mathbb{R}P^2)} = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w - v \rangle}.$$

Faz-se a mudança de geradores $\{v, w\}$ para $\{v, w - v\}$.

$$H_0(\mathbb{R}P^2) = \frac{\langle v, w - v \rangle}{\langle w - v \rangle} = \langle v \rangle \approx \mathbb{Z}.$$

Calcula-se $Z_1(\mathbb{R}P^2)$:

$$\begin{aligned} \partial_1(g_1a + g_2b + g_3c) = 0 &\iff g_1\partial_1(a) + g_2\partial_1(b) + g_3\partial_1(c) = 0 \\ &\iff (g_1 + g_2) \cdot (w - v) = 0 \iff g_1 = -g_2 \\ &\iff Z_1(\mathbb{R}P^2) = \langle a - b, c \rangle. \end{aligned}$$

Utilizando a mudança de geradores de $\{a - b, c\}$ para $\{a - b + c, c\}$, obtemos $Z_1(\mathbb{R}P^2) = \langle a - b + c, c \rangle$.

Observe que $\partial_2(U) = a - b - c$ e $\partial_2(L) = a - b + c$, então $\text{Im}\partial_2 = \langle a - b - c, a - b + c \rangle$.

Faça a mudança de geradores $\{U, L\}$ para $\{L, -U + L\}$.

Calcula-se o operador bordo ∂_2 em $C_2(\mathbb{R}P^2) = \langle L, -U + L \rangle$, ou seja, $\partial_2(L) = a - b + c$ e $\partial_2(-U + L) = 2c$. Logo, $B_1(\mathbb{R}P^2) = \langle a - b + c, 2c \rangle$. Assim,

$$H_1(\mathbb{R}P^2) = \frac{Z_1(\mathbb{R}P^2)}{B_1(\mathbb{R}P^2)} = \frac{\langle a - b + c, c \rangle}{\langle a - b + c, 2c \rangle} = \frac{\langle c \rangle}{\langle 2c \rangle} \approx \mathbb{Z}_2.$$

Como não há 3-simplexos, temos que $B_2(\mathbb{R}P^2) = \{0\}$. Resta calcular o núcleo

de ∂_2 :

$$\begin{aligned} \partial_2(g_1U + g_2L) = 0 &\iff g_1(a - b - c) + g_2(a - b + c) = 0 \\ &\iff \begin{cases} (a - b)(g_1 + g_2) = 0 \\ c(g_2 - g_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g_1 - g_2 = 0 \\ g_2 + g_1 = 0 \end{cases} \\ &\iff g_1 = g_2 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $Z_2(\mathbb{R}P^2) = \{0\}$.

Desse modo,

$$H_2(\mathbb{R}P^2) = \frac{Z_2(\mathbb{R}P^2)}{B_2(\mathbb{R}P^2)} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = \{0\}.$$

Conclui-se que

$$H_n(\mathbb{R}P^2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } n = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

2.3 Grupos de Homologia Simplicial da Garrafa de Klein

Considere K , a garrafa de Klein com a triangularização composta por um 0-simplexo v , três 1-simplexos a , b e c , e dois 2-simplexos U e L , ilustrado na Figura 2.7.

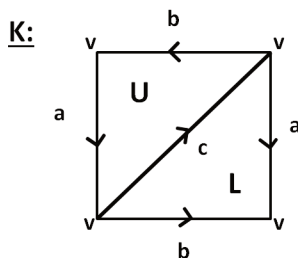


Figura 2.7: Triangularização da garrafa de Klein

Calculamos, os grupos de homologia da garrafa de Klein:

$$0 \longrightarrow C_2(K) \longrightarrow C_1(K) \longrightarrow C_0(K) \longrightarrow 0,$$

equivalente a

$$0 \longrightarrow \langle U, L \rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle a, b, c \rangle \xrightarrow{\partial_1} \langle v \rangle \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Temos que $Z_0(K) = \langle v \rangle$, uma vez que ∂_0 é o operador nulo.

Como a imagem do operador bordo ∂_1 é nula, temos

$$H_0(K) = \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} = \frac{\langle v \rangle}{\{0\}} = \langle v \rangle \approx \mathbb{Z}.$$

Claramente, $Z_1(K) = \langle a, b, c \rangle$.

Considere a mudança de geradores $\{a, b, c\}$ para $\{a + b + c, b, c\}$. Dessa forma, $Z_1(K) = \langle a + b + c, b, c \rangle$.

Observe que calculamos ∂_2 nos geradores de $C_2(K) = \langle U, L \rangle$.

Faça a mudança de geradores $\{U, L\}$ para $\{U, U - L\}$.

Calcule o operador bordo em $C_2(K) = \langle U, U - L \rangle$, ou seja, $\partial_2(U) = a + b + c$ e $\partial_2(U - L) = 2b$.

Assim,

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = \frac{\langle a + b + c, b, c \rangle}{\langle a + b + c, 2b \rangle} = \frac{\langle b, c \rangle}{\langle 2b \rangle} = \langle c \rangle \oplus \frac{\langle b \rangle}{2\langle b \rangle} \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Finalmente, como o operador bordo ∂_3 é nulo, resta calcularmos o núcleo do operador bordo ∂_2 :

$$\begin{aligned} \partial_2(g_1U + g_2L) = 0 &\iff g_1(a + b - c) + g_2(a - b + c) = 0 \\ &\iff \begin{cases} (b - c)(g_1 - g_2) = 0 \\ a(g_2 + g_1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g_1 - g_2 = 0 \\ g_2 + g_1 = 0 \end{cases} \\ &\iff g_1 = g_2 = 0 \iff Z_2(K) = \{0\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$H_2(K) = \frac{Z_2(K)}{B_2(K)} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = \{0\}.$$

Portanto,

$$H_n(K) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

2.4 Grupos de Homologia Simplicial do Toro

Considere a triangularização do toro T , constituída por um 0-simplexo, três 1-simplexos, a, b e c , e dois 2-simplexos U e L orientados, conforme Figura 2.8.

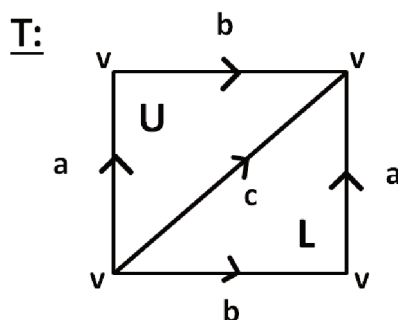


Figura 2.8: Triangularização do toro

Agora, calculemos os grupos de homologia simplicial do toro. A sequência de cadeia de T é dada por:

$$0 \longrightarrow C_2(T) \longrightarrow C_1(T) \longrightarrow C_0(T) \longrightarrow 0,$$

a qual é equivalente a

$$0 \longrightarrow \langle U, L \rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle a, b, c \rangle \xrightarrow{\partial_1} \langle v \rangle \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

O operador ∂_0 é nulo, então $Z_0(T) = \langle v \rangle$.

Temos que $\partial_1(a) = \partial_1(b) = \partial_1(c) = v - v = 0$, logo $B_0(T) = \langle 0 \rangle$.

$$H_0(T) = \frac{Z_0(T)}{B_0(T)} = \frac{\langle v \rangle}{\{0\}} = \langle v \rangle \approx \mathbb{Z}.$$

Utilizando a mudança de geradores de $\{a, b, c\}$ para $\{a, b, a + b - c\}$, obtemos $Z_1(T) = \langle a, b, a + b - c \rangle$.

Observe que $\partial_2(U) = \partial_2(L) = a + b - c$, então $B_1 = \langle a + b - c \rangle$.

Assim,

$$H_1(T) = \frac{Z_1(T)}{B_1(T)} = \frac{\langle a, b, a + b - c \rangle}{\langle a + b - c \rangle} = \langle a, b \rangle \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Como não há 3-simplexos, temos que $B_2(\mathbb{R}P^2) = \{0\}$. Resta calcular o núcleo de ∂_2 :

$$\begin{aligned} \partial_2(g_1U + g_2L) = 0 &\iff g_1(a + b - c) + g_2(a + b - c) = 0 \\ &\iff (a + b - c)(g_1 + g_2) = 0 \\ &\iff g_2 = -g_1 \\ &\iff g_1U - g_2L \in Z_2(T^2). \end{aligned}$$

Portanto, $Z_2(T)$ é um grupo cíclico infinito gerado por $U - L$, ou seja,

Desse modo,

$$H_2(T) = \frac{Z_2(T)}{B_2(T)} = \frac{\langle U - L \rangle}{\langle 0 \rangle} \approx \mathbb{Z}.$$

Concluimos que

$$H_n(T) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } n = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n \geq 3. \end{cases}$$

2.5 Grupos de Homologia Simplicial da Esfera

Considere a triangularização da esfera S^2 , constituída por quatro 2-simplexos M, N, U, L , seis 1-simplexos a, b, c, d, e, f e quatro 0-simplexos x, y, z, v . Visualize as Figuras 2.9 e 2.10.

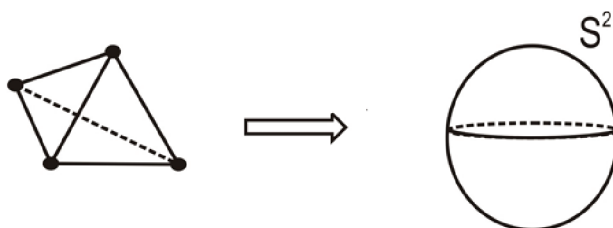


Figura 2.9: Triangularização da esfera

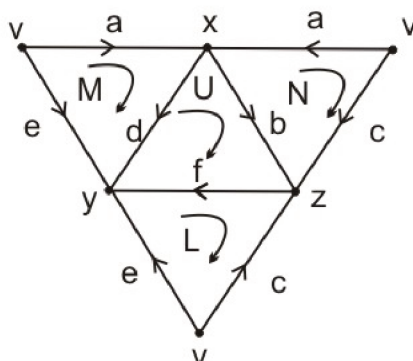


Figura 2.10: Planificação da triangularização da esfera

Agora, calcula-se os grupos de homologia simplicial da esfera. A sequência de cadeia de S^2 é dada por:

$$0 \longrightarrow C_2(S^2) \longrightarrow C_1(S^2) \longrightarrow C_0(S^2) \longrightarrow 0,$$

a qual é equivalente a

$$0 \xrightarrow{\partial_3} \langle U, L, M, N \rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle a, b, c, d, e, f \rangle \xrightarrow{\partial_1} \langle x, y, z, v \rangle \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Desse modo, como ∂_0 é nulo, tem-se $Z_0(S^2) = \langle x, y, z, v \rangle$. Fazendo a mudança de geradores de $\{x, y, z, v\}$ para $\{x, y - x, z - x, x - v\} = \{A, B, C, D\}$, então $Z_0(S^2) = \langle A, B, C, D \rangle$.

Temos que: $\partial_1(a) = x - v = D$, $\partial_1(b) = z - x = C$, $\partial_1(c) = z - v = C + D$, $\partial_1(d) = y - x = B$, $\partial_1(e) = y - v = B + D$ e $\partial_1(f) = y - z = B - C$, logo obtém-se que $B_0(S^2) = \langle D, C, C + D, B, B + D, B - C \rangle = \langle D, C, B \rangle$. Segue que:

$$H_0(S^2) = \frac{Z_0(S^2)}{B_0(S^2)} = \frac{\langle A, B, C, D \rangle}{\langle D, C, B \rangle} = \langle A \rangle \approx \mathbb{Z}.$$

Calculamos $Z_1(S^2)$:

Mantém-se a mudança de geradores $\{x, y, z, v\}$ para $\{x, y - x, z - x, x - v\} = \{A, B, C, D\}$:

$$\begin{aligned} \partial_1(g_1a + g_2b + g_3c + g_4d + g_5e + g_6f) = 0 &\iff g_1(D) + g_2(C) + g_3(C + D) + \\ &+ g_4(B) + g_5(B + D) + g_6(B - C) = 0 \\ &\iff \begin{cases} B(g_4 + g_5 + g_6) = 0 \\ C(g_2 + g_3 - g_6) = 0 \\ D(g_1 + g_3 + g_5) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} g_4 + g_5 + g_6 = 0 \\ g_2 + g_3 - g_6 = 0 \\ g_1 + g_3 + g_5 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} g_1 = -g_3 - g_5 \\ g_2 = -g_3 + g_6 \\ g_4 = -g_5 - g_6 \end{cases} \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\sigma &= g_1a + g_2b + g_3c + g_4d + g_5e + g_6f \in Z_1(S^2) \iff \\
\iff \sigma &= (-g_3 - g_5)a + (-g_3 + g_6)b + g_3c + (-g_5 - g_6)d + g_5e + g_6f \iff \\
\iff \sigma &= g_3(-a - b + c) + g_5(-a - d + e) + g_6(b - d + f) \iff \\
Z_1(S^2) &= \langle -a - b + c, -a - d + e, b - d + f \rangle = \langle F, G, H \rangle.
\end{aligned}$$

Logo, $Z_1(S^2) = \langle F, G, H \rangle$. Calcula-se $B_1(S^2)$, temos

$$\begin{aligned}
\partial_2(U) &= b + f - d = H \\
\partial_2(L) &= -f - c + e = -F + G - H \\
\partial_2(M) &= a + d - e = -G \\
\partial_2(N) &= -a + c - b = F
\end{aligned}$$

Assim, $B_1(S^2) = \langle H, -F + G - H, -G, F \rangle = \langle H, -G, F \rangle$ e

$$H_1(S^2) = \frac{Z_1(S^2)}{B_1(S^2)} = \frac{\langle F, G, H \rangle}{\langle H, -G, F \rangle} = \{0\}.$$

Por fim, resta calcular $Z_2(S^2)$:

Mantém-se os geradores $\{-a - b + c, -a - d + e, b - d + f\} = \{F, G, H\}$:

$$\begin{aligned}
\partial_2(g_1U + g_2L + g_3M + g_4N) = 0 &\iff g_1(H) + g_2(-F + G - H) + g_3(-G) + g_4(F) = 0 \\
&\iff (g_4 - g_2)F + (g_2 - g_3)G + (g_1 - g_2)H = 0 \\
&\iff \begin{cases} g_4 - g_2 = 0 \\ g_2 - g_3 = 0 \\ g_1 - g_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} g_4 = g_2 \\ g_3 = g_2 \\ g_1 = g_2 \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \sigma = g_1U + g_2L + g_3M + g_4N \in Z_2(S^2) &\iff \\ \iff \sigma = g_2U + g_2L + g_2M + g_2N &\iff \\ \iff \sigma = g_2(U + L + M + N) &\iff \\ \iff Z_2(S^2) = \langle U + L + M + N \rangle. & \end{aligned}$$

Note que o operador ∂_3 é nulo, e $Z_2(S^2) = \langle U + L + M + N \rangle$.

Desse modo, obtemos:

$$H_2(S^2) = \frac{Z_2(S^2)}{B_2(S^2)} = \frac{\langle U + L + M + N \rangle}{\{0\}} \approx \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$H_n(S^2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } n = 0, 2 \\ 0 & \text{para } n = 1. \end{cases}$$

2.6 Aplicações

O plano projetivo e a garrafa de Klein são homeomorfos?

A resposta é não!

De fato, obtemos $H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$ e $H_1(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, logo pelo Teorema 2.1.3 temos que o plano projetivo e a garrafa de Klein não são homeomorfos.

O Toro e a Esfera são homeomorfos?

A resposta é não!

De fato, obtemos $H_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $H_1(S^2) = 0$, logo pelo Teorema 2.1.3 temos que o Toro e a Esfera não são homeomorfos.

A Garrafa de Klein e o Toro são homeomorfos?

A resposta é não!

De fato, obtemos $H_1(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ e $H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, logo pelo Teorema 2.1.3 temos que a Garrafa de Klein e a Esfera não são homeomorfos.

Características de Euler e os números de Betti

Neste capítulo, apresenta-se a definição da Característica de Euler, que se destaca por ser apenas um número inteiro. Define-se números de Betti, utilizando-os para a generalização da Característica de Euler. As principais referências desse capítulo são: (2), (4), (5), (6), (11) e (12).

3.1 Características de Euler

Definição 3.1.1. *Seja P um poliedro e denotemos por v , o número de vértice, f o número de faces e a o número de arestas de P . O número $\chi(P) = v - a + f$ é chamado **Característica de Euler** de P .*

Definição 3.1.2. *Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos.*

Curiosidade: *Em 1750, Euler enviou uma carta a Goldbach onde falava que $\chi = 2$, para quaisquer poliedro. Mas por volta de 1813, Huillier chamou atenção para os poliedros não convexos onde a propriedade não era válida, ou seja, na realidade Euler demonstrou apenas para poliedros convexos.*

Exemplo 3.1.1. *Considere os seguintes poliedros, ilustrados na Figura 3.1*

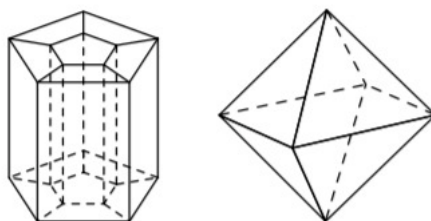


Figura 3.1: Poliedro não convexo e convexo

O número de vértices, arestas, faces e a característica dos seguintes poliedros são respectivamente:

$$v = 20; a = 40; f = 20; \chi = 0$$

$$v = 6; a = 12; f = 8; \chi = 2$$

Portanto, verificamos que $\chi \neq 2$ para o poliedro não convexo.

Apresentamos algumas definições topológicas para o próximo passo, que é calcular a Características de Euler de uma superfície.

Definição 3.1.3. *Um espaço topológico X é de Hausdorff se, dados dois pontos distintos a e b de X , existem abertos disjuntos A contendo a e B contendo b .*

Definição 3.1.4. *Dizemos que um espaço topológico X é conexo se os únicos subconjuntos simultaneamente abertos e fechados de X são \emptyset e o próprio X . Equivalentemente, podemos dizer que se X é conexo, A e B são abertos disjuntos tais que $X = A \cup B$, então $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.*

Definição 3.1.5. *Um espaço topológico X é compacto se toda família de abertos, cuja reunião é X , admite um número finito de abertos dessa família, cuja reunião ainda é X . Em outras palavras, X é compacto se toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura finita.*

Definição 3.1.6. *Uma superfície é um espaço de Hausdorff, compacto e conexo, tal que para cada ponto existe um aberto que o contém e que é homeomorfo à uma bola aberta do \mathbb{R}^2 .*

Definição 3.1.7. *Uma superfície é triangulável quando podemos dividi-la em um número finito de vértices, arestas e faces, com as seguintes condições:*

- 1) *Qualquer aresta é aresta de dois triângulos;*
- 2) *Dados dois triângulos existe uma sequência de triângulos começando em um e terminando no outro, de modo que dois triângulos consecutivos possuem uma aresta em comum.*

Teorema 3.1.1. *Se S_1 e S_2 são duas superfícies fechadas, então S_1 é homeomorfa a S_2 se, e somente se $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ e ambas são orientáveis ou ambas são não orientáveis.*

Demonstração: (6), Teorema 5.16.

□

3.2 Números de Betti

Agora, apresenta-se alguns conceitos básicos necessários para a definição de número de Betti.

Definição 3.2.1. *Um conjunto de geradores para um grupo G é um subconjunto S de G , tal que cada elemento de G é um produto de potências dos elementos de S . Um grupo que tem um conjunto finito de geradores é chamado de finitamente gerado. O número de geradores é chamado de **posto** de G .*

Definição 3.2.2. *Um grupo G é dito cíclico quando ele pode ser gerado por um elemento, isto é, quando $G = \langle g \rangle$, para algum $g \in G$.*

Definição 3.2.3. *Um grupo que é isomórfico a uma soma direta finita de \mathbb{Z} é chamado de grupo abeliano livre. Assim, um grupo abeliano livre com n*

geradores é isomórfico à soma direta $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ (n somas). O inteiro n é chamado de posto de um grupo.

Teorema 3.2.1. Um grupo abeliano finitamente gerado M é uma soma direta de subgrupos cíclicos C_{d_1}, \dots, C_{d_n} e um grupo abeliano livre L , ou seja,

$$M = C_{d_1} \oplus \dots \oplus C_{d_n} \oplus L.$$

Demonstração: (2), Teorema 14.7.3.

□

Definição 3.2.4. Seja G um grupo, um elemento de G diz-se um elemento de torção se é de ordem finita, ou seja, existe n inteiro positivo tal que $a^n = 1$. Caso contrário, o elemento tem ordem infinita.

Definição 3.2.5. Um grupo abeliano G é de torção se cada elemento de G tem ordem finita e é chamado livre de torção se cada elemento de G exceto a identidade é de ordem infinita.

Teorema 3.2.2. (O teorema fundamental de grupos abelianos finitamente gerados) Seja G um grupo abeliano finitamente gerado e seja T seu subgrupo de torção.

a) Existe um subgrupo abeliano livre H de G com posto finito β tal que $G = H \oplus T$.

b) Existem grupos cíclicos finitos T_1, \dots, T_k onde T_i tem ordem $t_i > 1$.

$$T = T_1 \oplus \dots \oplus T_k$$

c) O número β e t_1, \dots, t_k são unicamente determinados por G .

Demonstração: (11), Teorema 4.3.

Definição 3.2.6. O posto do subgrupo abeliano livre $H = G/T$, denotado por β , é chamado de número de Betti, os números t_1, \dots, t_k são chamados coeficientes de torção de G .

Este teorema mostra que qualquer grupo abeliano G finitamente gerado pode ser escrito como uma soma direta finita de grupos cíclicos, isto é:

$$G \simeq (\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}_{t_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{t_k}.$$

Esta representação é, em certo sentido, uma "forma canônica" para G . Existe outra forma canônica, derivada da seguinte forma:

Lembre-se primeiro do fato de que se m e n são números inteiros positivos relativamente primos, então:

$$\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{mn}$$

Segue que qualquer grupo cíclico finito pode ser escrito como uma soma direta de grupos cujas ordens são potências de primos. Qualquer grupo G finitamente gerado, tem-se:

$$G \simeq (\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}_{a_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{a_s})$$

onde cada a_i é uma potência de um número primo. Esta é outra forma canônica para G , já que os números a_i são determinados exclusivamente por G (até um rearranjo).

Observação 3.2.1. *Seja K um complexo simplicial orientado. Se $H_p(K)$ é finitamente gerado, o p -ésimo número de Betti de K , denotado por $R_p(K)$ é o número de betti associado ao grupo $H_p(K)$, conforme Definição 3.2.6.*

Teorema 3.2.3. *Seja K um complexo orientado de dimensões n e para $p = 0, \dots, n$ seja a_p o número de p -simplexos de K . Então:*

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p R_p(K)$$

onde $R_p(K)$ denota o p -ésimo número de Betti de K .

Demonstração: (6), teorema 5.18 □

Definição 3.2.7. Se K é um complexo de dimensão n , o número:

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^n (-1)^p R_p(K)$$

conhecido como *Característica de Euler de K* .

Agora, detalha-se o cálculo da característica de Euler das seguintes superfícies: plano projetivo, garrafa de Klein, toro e esfera.

3.3 Característica de Euler do Plano Projetivo

Considere a triangularização do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$, constituída de dois 0-simplexos v e w , três 1-simplexos a , b e c , e dois 2-simplexos U e L , conforme Figura 3.2.

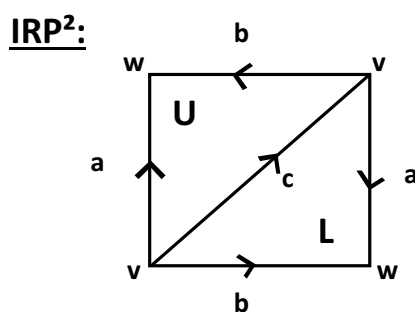


Figura 3.2: Triangularização do plano projetivo

Nota-se que nessa triangularização, temos $v = 2$, $a = 3$ e $f = 2$.

Logo, a **Característica de Euler** do plano projetivo é

$$\chi(\mathbb{R}P^2) = v - a + f = 2 - 3 + 2 = 1$$

Os grupos de homologia do plano projetivo calculados na sessão 2.2 são:

$$H_n(\mathbb{R}P^2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } n = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

Agora, calcula-se a **Característica de Euler do Plano Projetivo** usando os **Números de Betti**. Segue daí que:

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{R}P^2) &= \sum_{p=0}^2 (-1)^p R_p(\mathbb{R}P^2) \\ &= (-1)^0 R_0(\mathbb{R}P^2) + (-1)^1 R_1(\mathbb{R}P^2) + (-1)^2 R_2(\mathbb{R}P^2) \\ &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

3.4 Característica de Euler da Garrafa de Klein

Considere K , a garrafa de Klein com a triangularização composta por um 0-simplexo v , três 1-simplexos a , b e c , e dois 2-simplexos U e L , ilustrado na Figura 3.3.

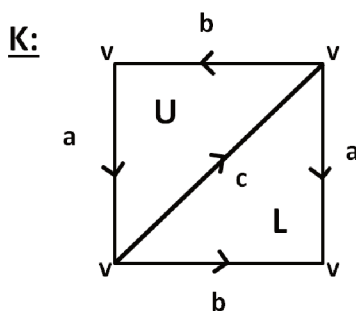


Figura 3.3: Triangularização da garrafa de Klein

Nota-se que nessa triangularização, temos $v = 1$, $a = 3$ e $f = 2$. Logo, a **Característica de Euler da garrafa de Klein** é

$$\chi(K) = v - a + f = 1 - 3 + 2 = 0$$

Na sessão 2.3, os grupos de homologia da Garrafa de Klein são:

$$H_n(K) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

Calcula-se a **Característica de Euler** da Garrafa de Klein através dos **Números de Betti**. Segue daí que:

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum_{p=0}^2 (-1)^p R_p(K) \\ &= (-1)^0 R_0(K) + (-1)^1 R_1(K) + (-1)^2 R_2(K) \\ &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

3.5 Característica de Euler do Toro

Considere a seguinte triangularização do toro T^2 , conforme Figura 3.4.

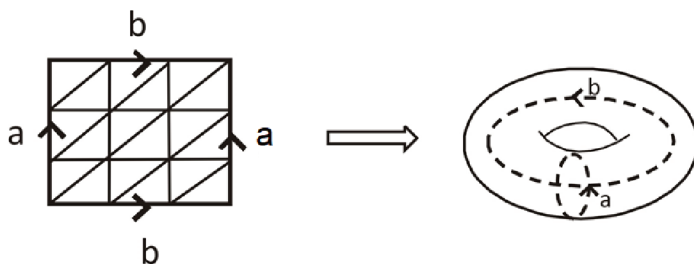


Figura 3.4: Triangularização do toro

Nota-se que temos $v = 9$, $a = 27$ e $f = 18$. Logo, a **Característica de Euler** do toro é

$$\chi(T^2) = v - a + f = 9 - 27 + 18 = 0$$

Concluiu-se na sessão 2.4 que o grupos de homologia do toro são:

$$H_n(T) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } n = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n \geq 3. \end{cases}$$

Agora, calcula-se a **Característica de Euler do Toro** usando os **Números de Betti**. Segue daí que:

$$\begin{aligned} \chi(T^2) &= \sum_{p=0}^2 (-1)^p R_p(T^2) \\ &= (-1)^0 R_0(T^2) + (-1)^1 R_1(T^2) + (-1)^2 R_2(T^2) \\ &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.6 Característica de Euler da Esfera

Considere a seguinte triangularização da esfera S^2 , ilustrada na Figura 3.5

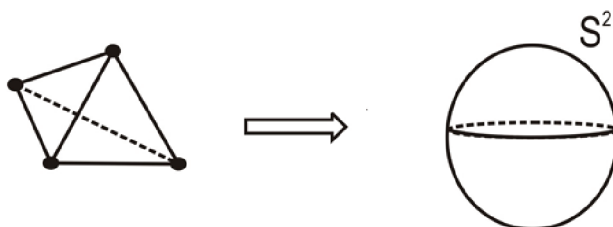


Figura 3.5: Triangularização da esfera

Nota-se que temos $v = 4$, $a = 6$ e $f = 4$. Logo, **Característica de Euler da esfera** é

$$\chi(S^2) = v - a + f = 4 - 6 + 4 = 2$$

Dado os grupos de homologia da esfera (sessão 2.5), tem-se:

$$H_n(S^2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } n = 0 \\ 0 & \text{para } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{para } n = 2 \end{cases}$$

Agora, resta calcular a **Característica de Euler da Esfera** usando os **Números de Betti**. Segue daí que:

$$\begin{aligned} \chi(S^2) &= \sum_{p=0}^2 (-1)^p R_p(S^2) \\ &= (-1)^0 R_0(S^2) + (-1)^1 R_1(S^2) + (-1)^2 R_2(S^2) \\ &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

3.7 Aplicações

O plano projetivo e a garrafa de Klein são homeomorfos?

A resposta é não!

De fato, vimos que $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$ e $\chi(K) = 0$, que são inteiros diferentes. Pelo teorema 3.1.1, comprovamos novamente que o plano projetivo e a garrafa de Klein não são homeomorfos.

O Toro e a Esfera são homeomorfos?

A resposta é não!

De fato, vimos que $\chi(T) = 0$ e $\chi(S^2) = 2$, que são inteiros diferentes. Pelo Teorema 3.1.1, comprovamos novamente que o Toro e a Esfera não são homeomorfos.

A Garrafa de Klein e o Toro são homeomorfos?

A resposta é não! Vimos na sessão 2.6.

De fato, vimos que $\chi(K) = 0$ e $\chi(T^2) = 0$, ou seja, são inteiros iguais. No entanto, note que isso não contradiz o Teorema 3.1.1 o Toro é orientável, já a Garrafa de Klein não é orientável.

Referências Bibliográficas

- [1] ARMSTRONG, M.A. *Basic Topology*; Springer Verlag, New York, 1983.
- [2] ARTIN, M. *Algebra*. Prentice-Hall, New Jersey, 1991.
- [3] CAIRNS, S. S. *Introductory Topology*, Ronald Press Company, New York, 1961.
- [4] CROOM, F.H. *Basic Concepts of Algebraic Topology*. New York: Springer Verlag, 1978.
- [5] HATCHER, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [6] LIBARDI, A. K. M.; VIEIRA, J. P.; MELO, T. *Invariantes Topológicos*, São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012.
- [7] LIMA, E.L. *Elementos de Topologia Geral*. Rio de Janeiro: SBM, 2009.
- [8] LIMA, E.L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.
- [9] LIMA, E.L. *Homologia Básica*. 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [10] MAUNDER, C. R. F. *Algebraic Topology*, Van Nostrand Reinhold Co., London, 1970.
- [11] MUNKRES, J.R.; *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1984.

-
- [12] ROTMAN, J.J.; An Introduction to the Theory of Groups, *Springer Verlag*, New York, 1995.
- [13] VALDÉS, W. D. FÊMINA, L. L. Calculando detalhadamente os grupos de homologia simplicial do toro, do plano projetivo e da garrafa de Klein. *Matemática e Estatística em Foco, Uberlândia*, v. 6, n. 1, p. 47-56, maio, 2018.