



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Bacharelado em Estatística

**OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO DE
INVESTIMENTO COM ANÁLISE
ENVOLTÓRIA DE DADOS E
MARKOWITZ**

Bárbara Cunha da Silva

Uberlândia-MG

2022

Bárbara Cunha da Silva

**OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO DE
INVESTIMENTO COM ANÁLISE
ENVOLTÓRIA DE DADOS E
MARKOWITZ**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Co-
ordenação do Curso de Bacharelado em Estatística
como requisito parcial para obtenção do grau de
Bacharel em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Tavares

Uberlândia-MG

2022



**Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática**

Coordenação do Curso de Bacharelado em Estatística

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Uberlândia, _____ de _____ de 20_____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Tavares

Lúcio Borges de Araújo

Rogério De Melo Costa Pinto

**Uberlândia-MG
2022**

AGRADECIMENTOS

Agradeço meus pais, Renata e Valdiney por todo apoio, amor e carinho durante esse processo. Minha admiração por vocês dois é imensa e minha gratidão maior ainda. Sem vocês não seria possível fazer esta graduação.

Agradeço a toda minha família por sempre me incentivarem e sempre acreditarem em mim desde pequena.

Agradeço imensamente ao meu noivo, Rafael, por me ajudar a enxegar a universidade com outros olhos e por todo companheirismo e suporte durante toda essa trajetória. Seu apoio neste trabalho foi fundamental para que eu conseguisse dar o meu melhor.

Agradeço a todos os professores que estiveram presentes em minha jornada acadêmica, em especial meu orientador Dr. Marcelo Tavares por todo suporte, compreensão e conselhos dados durante este trabalho.

Agradeço aos amigos e colegas que fizeram parte da minha formação, especialmente a minha parceira de todas as horas nessa graduação, Letícia, que esteve comigo desde o momento do vestibular até o suporte deste TCC.

RESUMO

O processo de construção de uma carteira de investimentos é um dos maiores desafios do mercado financeiro. Equilibrar ativos com boas perspectivas de valorização aliados a um baixo risco é muito grande, montar um portfólio com bons rendimentos exige muito estudo, pois o mercado de ações é variável e dependente de muitos fatores, que vão desde fatores econômicos ao nível mundial até o emocional do investidor. Para contornar o ponto do emocional do investidor algumas técnicas matemáticas foram desenvolvidas ao longo dos anos tendo Harry Markowitz como pioneiro.

Neste trabalho foi estudado o modelo de média-variância desenvolvido por Markowitz, unindo a Análise Envoltória de Dados para compor portfólios distintos, sob diferentes aspectos, como diferentes períodos de análise e diferentes níveis de aceitação de risco, com intuito de avaliar o desempenho destes portfólios. Após o desenvolvimento dos modelos para construção de 8 portfólios foram utilizados testes de comparação estatística.

Conclui-se que a utilização de tais técnicas para construção e comparação dessas carteiras mostrou-se eficiente para o investidor(a), sendo possível identificar portfólios com diferenças significativas em seus retornos dependendo da longevidade dos dados analisados, do nível de aceitação de risco e de técnica utilizada. Sendo o portfólio com maior desempenho o que uniu as duas técnicas de otimização, com o menor nível de risco possível e analisando dados mais recentes.

Palavras-chave: Otimização de portfólio. Markowitz. Análise envoltória de dados. Carteira Quantitativa.

ABSTRACT

The building process of an investment portfolio is one of the biggest challenges of the stock market. Balancing assets with excellent perspectives of valuation alongside low risk is a considerable challenge. To assemble a portfolio with good revenues requires much study because the stock market is variable and dependent on many factors, since worldwide economical factors levels to the investor's emotions. To bypass the investor's emotions some mathematical techniques were developed during the years with Harry Markowitz being a pioneer.

This essay studied the model called mean-variance developed by Markowitz, combining Data Envelopment Analysis to compose different portfolios, under different aspects, as a different periods of analysis and different levels of risk acceptance with the intention to evaluate the performance of these portfolios. After the development of the models for the construction of eight portfolios, it was used statistics comparison tests.

The conclusion is the utilization of such techniques for the construction e comparison of the portfolios should efficient for the investor, being possible to identify portfolios with meaningful differences in their revenues depending on the longevity of the data analyzed, the level of risk acceptance, and the technique used. Being the portfolio the one with the best performance that combined both optimization techniques, with the lower risk level that is possible and analyzing the latest data.

Keywords: portfolio optimization, Markowitz, Data envelopment analysis.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	I
Lista de Tabelas	II
Lista de Abreviações e Símbolos	III
1 Introdução	1
2 Metodologia	3
2.1 Mercado de Capitais	3
2.1.1 Índice Bovespa	4
2.1.2 IPCA	4
2.1.3 Indicadores Financeiros	5
2.2 Markowitz	6
2.2.1 Modelo média-variância	7
2.2.2 Modelo mínima-variância	7
2.3 Análise Envoltória de dados	8
2.4 Base de dados	11
2.5 Teste de hipótese: U de Mann-Whitney	14
2.6 Construção dos Portfólios	16
3 Resultados	17
3.1 Portfólios construídos	17
3.1.1 Markowitz com Fronteira Eficiente e Longo Prazo	17
3.1.2 Markowitz com Mínima-variância e Longo Prazo	19
3.1.3 Markowitz com Média-variância e Curto Prazo	20
3.1.4 Markowitz com Mínima-variância e Curto Prazo	21
3.2 Carteiras DEA	22
3.2.1 Seleção de ativos Eficientes - Longo Prazo	22
3.2.2 Seleção de ativos Eficientes - Curto Prazo	24
3.2.3 DEA com Fronteira Eficiente e Longo Prazo	25
3.2.4 DEA com Mínima-variância e Longo Prazo	26
3.2.5 DEA com Fronteira Eficiente e Curto Prazo	27
3.2.6 DEA com Mínima-variância e Curto Prazo	28
3.2.7 Teste comparativo entre carteiras	29
4 Conclusões	31
Referências Bibliográficas	32

LISTA DE FIGURAS

2.1	Froteira de Eficiência [17]	9
3.1	Histograma da relação de empresas por setor Bovespa	17
3.2	Desempenho da carteira MK-FE-LP vs IBOV vs CDI	18
3.3	Desempenho da carteira MK-MV-LP vs IBOV vs CDI	19
3.4	Desempenho da carteira MK-FE-CP vs IBOV vs CDI	20
3.5	Desempenho da carteira MK-MV-CP vs IBOV vs CDI	21
3.6	Desempenho da carteira DEA-FE-LP vs IBOV vs CDI	26
3.7	Desempenho da carteira DEA-MV-LP vs IBOV vs CDI	27
3.8	Desempenho da carteira DEA-FE-CP vs IBOV vs CDI	28
3.9	Desempenho da carteira DEA-MV-CP vs IBOV vs CDI	29

LISTA DE TABELAS

2.1	Inputs e Outputs	11
2.2	Descritivo dos ativos do IBrX 100	12
2.3	Descritivo dos portfólios contruídos	16
3.1	Portfólio 1: MK-FE-LP	18
3.2	Retornos Anuais - MK-FE-LP	18
3.3	Portfólio 2: MK-MV-LP	19
3.4	Retornos Anuais - MK-MV-LP	20
3.5	Portfólio 3: MK-FE-CP	20
3.6	Retornos Anuais - MK-FE-CP	21
3.7	Portfólio 4: MK-MV-CP	21
3.8	Retornos Anuais - MK-MV-CP	22
3.9	Inputs e Outputs - Longo Prazo	22
3.10	Inputs e Outputs - Curto Prazo	24
3.11	Portfólio 5: DEA-FE-LP	26
3.12	Retornos Anuais - DEA-FE-LP	26
3.13	Portfólio 6: DEA-MV-LP	27
3.14	Retornos Anuais - DEA-MV-LP	27
3.15	Portfólio 7: DEA-FE-CP	28
3.16	Retornos Anuais - DEA-FE-CP	28
3.17	Portfólio 8: DEA-MV-CP	29
3.18	Retornos Anuais - DEA-MV-CP	29
3.19	Resultados dos portfólios	30
3.20	Resultado - Testes de Hipótese	30

LISTA DE ABREVIACÕES E SÍMBOLOS

LISTA DE ABREVIACÕES

- B3 Brasil, Bolsa, Balcão
- DEA Data Envelopment Analysis
- DMU Decision Making Units
- DY Dividend Yield
- HEM Hipótese de Eficiência do Mercado
- IBOV ndice Bovespa
- Ibovespa ndice Bovespa
- IBrX100 ndice Brasil 100
- MV Máxima Verossimilhança
- P/L Preço sobre Lucro

1. INTRODUÇÃO

Educação financeira é um dos assuntos mais comentados nas redes sociais no Brasil, função da expansão da internet e das redes sociais, que deixaram bem mais fácil encontrar conteúdos que tentam ensinar o brasileiro a cuidar do próprio dinheiro. Com conteúdos mais acessíveis aos brasileiros a busca por conhecimento se intensificou e como consequência, o número de CPFs na Bolsa de Valores de São Paulo (B3) mais que dobrou nos últimos anos [13].

A busca por retornos positivos através do mercado financeiro, principalmente em investimento de renda variável escancara um dos maiores desafios do mercado financeiro, o processo de construção de uma carteira de investimentos. Montar um portfólio com bons rendimentos exige muito estudo, pois o mercado de ações é variável e dependente de muitos fatores, que vão desde fatores econômicos ao nível mundial até o emocional do investidor. Investidores quando veem seus retornos negativos tendem a retirar o dinheiro de seus investimentos, podendo gerar o que os especialistas chamam de efeito manada [21].

Harry Markowitz foi pioneiro em realizar estudos que utilizassem métodos matemáticos para tirar o fator emocional de vez de uma boa construção de portfólio. Seu trabalho Portfolio Selection [24] deu origem à Teoria Moderna de Portfólio e fez com que o processo de alocação de ativos pudesse ser visto como uma otimização matemática, fundamentando seu modelo na Hipótese de Eficiência do Mercado (HEM). Este se baseia no retorno máximo esperado e nas expectativas racionais, considerando que os investidores ordenam de forma lógica e racional suas preferências, buscando maximizar os retornos de seus investimentos [20].

Tal abordagem revolucionou o mercado financeiro à época ao focar em diversificação de ativos ao invés de se analisar cada ativo individualmente, utilizando de bases sólidas e matemáticas para encontrar uma boa relação entre risco e retorno, mostrando que o risco da carteira não depende apenas do risco associado a cada ativo, mas da relação (covariância) entre ativos individuais. Este modelo é denominado média-variância.

O fundamento proposto por Markowitz é a distinção entre a variabilidade dos retornos de cada ativo individualmente e sua contribuição para o risco da carteira. Em complemento, o autor constatou que um dos artifícios interessantes para se minimizar o risco é o investimento em ativos que não são altamente correlacionados, ou seja, não tem alta interdependência.

O modelo de média-variância leva em consideração apenas risco e retorno sem se preocupar com nenhuma outra variável e propõe uma carteira ótima por meio de maximização dos retornos esperados expostos a determinado tipo de risco, ou o contrário, por meio de minimização do nível de risco exposto a determinado retorno esperado.

Apesar da relevância dos estudos de Markowitz, contemplado por um prêmio Nobel, o modelo, na prática mostrou algumas vulnerabilidades como um número restrito de ativos na carteira, frequentemente produzindo alocações extremas concentrada em alguns poucos ativos e zerados nos demais, tendo resultados pouco intuitivos e que não levam em conta a opinião do gestor da carteira sobre o desempenho no futuro.

Buscando solucionar algumas dificuldades intrínsecas ao modelo proposto pelo economista, vários estudiosos da área buscaram criar modelos de otimização usando como base a teoria de Markowitz. Nesse sentido algumas técnicas de Pesquisa Operacional começaram a ser utilizadas como uma via interessante de se fazer tal otimização, sendo uma das mais populares e que vem recebendo grande atenção do mundo acadêmico ao longo dos anos a Data Envelopment Analysis - DEA, conhecido também como Análise Envoltória de Dados, empregada geralmente em modelos originais, menos sofisticados, mas que demonstram grande eficiência na otimização através da avaliação de múltiplos atributos [19].

A DEA foi desenvolvida por Charnes, Cooper e Rhodes [5], com o objetivo de calcular a eficiência relativa de unidades tomadoras de decisão, denominadas DMUs – do inglês Decision Making Units. A DEA é uma técnica de programação matemática, não estocástica e não-paramétrica utilizada para medir a eficiência das DMUs, como constatado no trabalho de Santos e Casa Nova [26].

No contexto apresentado, o presente trabalho tem a intenção de fazer um estudo unindo e comparando as duas metodologias de otimização supracitadas para testar qual modelo poderá ser mais efetivo. A ideia se sustenta em fazer uma pré-seleção de ativos listados na B3 e que façam parte do índice IBrX100, índice este que tem como objetivo, ser o indicador do desempenho médio das cotações dos 100 ativos de maior liquidez e representatividade do mercado de ações brasileiro.

Primeiramente, será utilizada a abordagem tradicional de Markowitz com base no modelo de otimização por média-variância, com intuito de se obter uma alocação ótima ao longo da fronteira eficiente que minimize o risco da carteira dado nível de retorno esperado. Em seguida será apresentado o modelo de otimização por mínima variância. Este pode ser interpretado como um caso particular do modelo média-variância, no qual a carteira ótima resultante é a de menor volatilidade [29].

Em um segundo momento o modelo DEA será usado com variáveis de indicadores técnicos financeiro dos ativos, para encontrar ações eficientes e logo em seguida fazer o processo de Markowitz com estas ações e com isso verificar qual modelo será mais eficaz. Para tal verificação, será utilizado um teste de hipóteses para averiguar se os retornos das carteiras geradas possuem diferenças estatisticamente significativas.

2. METODOLOGIA

2.1 MERCADO DE CAPITAIS

Mercado de capitais é um segmento do sistema financeiro responsável por intermediar as negociações entre aqueles que necessitam de recursos para financiar seus investimentos e aqueles que tem excedente de capital para investir. Quando a empresa opta por financiar seu crescimento através da emissão de ações, ela busca recursos para realizar seus investimentos que só serão devolvidos aos investidores através da distribuição de lucros, ou seja, diferentemente do mercado de crédito, só serão devolvidos se houver lucro. Os recursos oriundos de emissão de ações são devolvidos ao investidor através da distribuição de dividendos e da retenção de lucros que, se forem adequadamente reaplicados, valorizarão o preço das ações no mercado.

O mercado de ações é uma parcela do mercado de capitais que opera com títulos de renda variável, objetiva canalizar recursos para as empresas através do capital de risco. No mercado acionário, os investidores compram participação no empreendimento, dessa forma, o proprietário da empresa capta recursos para a mesma [3]. O principal agente do mercado de capitais para se fazer as negociações de ativos é a bolsa de valores. No Brasil, a bolsa de valores se chama B3, abreviação de Brasil, Bolsa, Balcão. A principal função da B3 é proporcionar o funcionamento e a negociação de ativos na bolsa de valores, ela atua como um grande mercado de compra e venda de ações (e de outros ativos mobiliários), criando um ambiente seguro para que essas transações ocorram de forma transparente [30].

A B3 tem uma classificação econômica de setores própria, para melhor mapear e caracterizar seus ativos. As classificações com suas abrangências estão descritas a seguir [16]:

Bens industriais: Comércio, Construção e Engenharia, Máquinas e Equipamentos, Material de Transporte, Serviços e Transportes.

Comunicações: Mídia e Telecomunicações.

Consumo cíclico: Automóveis e Motocicletas, Eletrodomésticos, Construção Civil, Hotéis e Restaurantes, Tecidos, Vestuário e Calçados, Utilidades Domésticas, Viagens e Lazer.

Consumo não cíclico: Agropecuária, Alimentos Processados, Bebidas, Comércio e Distribuição (Alimentos) e Produtos de Uso Pessoal e Limpeza.

Financeiro: Exploração de Imóveis, Holdings Diversificadas, Intermediários Financeiros, Previdência e Seguros, Serviços Financeiros Diversos.

Materiais básicos: Embalagens, Madeira e Papel, Materiais Diversos, Mineração, Químicos, Siderurgia e Metalurgia.

Outros: Demais empresas que não se encaixam em nenhuma categoria.

Petróleo. Gás e Biocombustíveis: Equipamentos e Serviços, Exploração. Refino e Distribuição.

Saúde: Medicamentos e outros produtos, Serviços Médicos, Hospitalares, Análises e Diagnósticos.

Tecnologia da Informação: Computadores e Equipamentos, Programas e Serviços.

Utilidade pública: Água e Saneamento, Energia Elétrica e Gás.

Neste trabalho também serão considerados os setores nas montagens das carteiras, a fim de caracterizar as carteiras e verificar se há alguma relação entre as rentabilidades e os setores.

2.1.1 ÍNDICE BOVESPA

O Ibovespa é o principal indicador de desempenho das ações negociadas na B3 e reúne as empresas mais importantes do mercado de capitais brasileiro. Conhecido como IBOV, o índice funciona como um termômetro do mercado acionário do Brasil e mede, por meio de um sistema de pontos baseado na moeda Real, o desempenho médio de uma carteira teórica com as ações mais representativas e negociadas em Bolsa.

Ele foi criado em janeiro de 1968 e é um índice de retorno total. Ou seja, além de considerar as variações nos preços dos ativos que fazem parte de sua carteira teórica, ele reflete o impacto do pagamento de todos os tipos de proventos das empresas emissoras dessas ações [6].

Cada portfólio gerado será comparado com o IBOV com a intenção de se ter uma indicação das carteiras geradas em relação ao mercado.

2.1.2 IPCA

Calculado desde 1979 pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o IPCA é considerado o termômetro oficial da inflação no Brasil. Ele reflete o custo de vida e o poder de compra da população no país. Na prática, o IPCA mede mensalmente a variação nos preços de uma série de produtos e serviços comercializados no varejo e compara os números obtidos com os dados do mês anterior. A variação identificada nessa equação é a inflação do mês em questão.

O IPCA tem por objetivo englobar 90% das pessoas que vivem em áreas urbanas no país e é calculado mensalmente. Por isso, tanto o Bacen quanto o governo federal o utilizam para realizar alterações na taxa de juros. Como tal índice mede o poder de compra, o ideal é que os investimentos rendam no mínimo o mesmo valor da inflação para não se perder dinheiro [31]. Neste intuito o governo disponibiliza investimentos em títulos públicos atrelados ao IPCA para que investidores tenham opções seguras de fazer com que o dinheiro não perca valor no tempo.

Cada portfólio gerado também será comparado com o IPCA para verificar se os mesmos tiveram rendimento superior à inflação.

2.1.3 INDICADORES FINANCEIROS

Indicadores financeiros são métricas que coletam e geram informações sobre um determinado aspecto das demonstrações financeiras de uma empresa. Diante disso, o indicador fornece dados relevantes para o investidor, sobretudo acerca da saúde financeira da organização e o quão rentável ela pode ser [32].

Para a otimização via DEA serão utilizados alguns indicadores financeiros da amostra inicial. Foram selecionados 8 indicadores que estão descritos abaixo.

Índice Sharpe: O Índice de Sharpe, também chamado de Sharpe Ratio, mensura a relação entre retorno e risco de um investimento. O mesmo destaca qual alternativa tende a trazer a melhor remuneração com o menor risco possível. O Índice se dá pela fórmula:

$$S_a = \frac{E[R_a - R_b]}{\sigma_a} \quad (2.1)$$

em que,

S_a : Índice Sharpe

E : Valor esperado

R_a : Retorno do ativo

R_b : Retorno livre de risco

σ_a : Risco do ativo

Basicamente, a fórmula consiste em retorno do ativo menos taxa livre de risco dividido pela volatilidade. Para ter mais precisão, é importante usar o Índice de Sharpe para analisar períodos mais longos de determinada aplicação financeira [23].

Coefficiente Beta: O coeficiente Beta mede a volatilidade, do ativo ou portfólio em comparação com o mercado de modo geral. A volatilidade é utilizada como uma medida de risco, e significa as variações no preço de um determinado ativo. Quanto mais volátil for o preço de um ativo, maior o risco atrelado a ele. O beta, ou coeficiente beta, é calculado a partir de uma regressão levando em conta o mercado e o ativo alvo. O beta do ativo alvo é a covariância entre o ativo e o mercado, dividido pela variância do mercado em uma específica janela de tempo [8].

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_m)}{\sigma_{r_m}^2} \quad (2.2)$$

em que,

β_a : Índice Beta

Cov : Covariância

r_a : Retorno do ativo

r_m : Média do retorno de mercado

$\sigma_{r_m}^2$: Variância do retorno de mercado

Em termos estatísticos o beta informa qual é a possibilidade de que uma ação individual varie no mesmo sentido do mercado.

Preço/Lucro: Preço da ação é o quanto a ação da empresa está valendo no momento, e lucro por ação (LPA) é o quanto uma ação dessa empresa gera de lucro para o acionista. Um

dos indicadores mais tradicionais do mercado, o P/L é bastante utilizado na hora de avaliar se o preço de um determinado ativo é justo ou não [22].

$$P/L_a = \frac{P_a}{L_a} \quad (2.3)$$

em que,

P/L_a : Preço sobre Lucro

P_a : Preço do ativo

L_a : Lucro por unidade do ativo

Retorno (1,2 e 3 anos): O retorno de um ativo em determinado período pode ser dividido em duas partes: uma parte é composta pelos ganhos de dividendos e a segunda parte é o ganho de capital sobre investimento, que corresponde à variação do valor de mercado do ativo.

$$R_a = \frac{P_f - P_i + D_s}{P_i} \quad (2.4)$$

em que,

R_a : Retorno do ativo

P_f : Preço do ativo no fim do período

P_i : Preço do ativo no início do período

D_s : Dividendos do ativo

Dividend Yield: Dividend Yield (DY), que pode ser traduzido para o português como Rendimento de Dividendo, é um indicador que mede a performance da empresa de acordo com o lucro líquido das empresas pagos aos seus acionistas como forma de remuneração, chamado dividendos. Ele mostra a relação entres os dividendos distribuídos e o preço atual da ação da empresa.

$$DY_a = \frac{D_a}{P_a} \quad (2.5)$$

em que,

DY_a : Dividend Yield

D_a : Dividendos por unidade do ativo

P_a : Preço do ativo

2.2 MARKOWITZ

Harry Markowitz desenvolveu um estudo no qual desenvolve o conceito ao que hoje é chamado de Teoria Moderna do Portfólio. Nele o autor propõe a criação de carteiras com base em diversificação de ativos e otimização matemática, para que a preferência por ativos do investidor dependesse apenas da média e da variância dos retornos dos ativos, formando as carteiras em uma fronteira eficiente, que contém as carteiras com o maior retorno médio por unidade de risco.

Tal abordagem revolucionou o mercado financeiro à época ao focar em diversificação de ati-

vos ao invés de se analisar cada ativo individualmente, utilizando de bases sólidas e matemáticas para encontrar uma boa relação entre risco e retorno, mostrando que o risco da carteira não depende apenas do risco associado a cada ativo, mas da relação (covariância) entre ativos individuais. O fundamento proposto por Markowitz é a distinção entre a variabilidade dos retornos de cada ativo individualmente e sua contribuição para o risco da carteira. Em complemento, o autor constatou que um dos artifícios interessantes para se minimizar o risco é o investimento em ativos que não são altamente correlacionados.

Uma fragilidade do modelo é que a implementação destas estratégias, na prática esbarra na dificuldade de se obter estimações acuradas dos retornos esperados dos ativos e da matriz de covariâncias desses retornos. Tais estimativas amostrais são usualmente obtidas via máxima verossimilhança (MV), supondo retornos normalmente distribuídos [29]. No entanto, conforme argumentam DeMiguel Nogales [7], embora as estimativas de MV sejam muito eficientes para a distribuição normal presumida, seu desempenho é altamente sensível a desvios da distribuição empírica ou amostral da normalidade. A seguir são apresentados os modelos de média e mínima-variância.

2.2.1 MODELO MÉDIA-VARIÂNCIA

A otimização de média-variância proposta pelo autor, é a abordagem padrão para a construção de portfólios ótimos. Formalmente, dado um universo com N ativos de risco com retornos médios $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)'$ e matriz de covariância Σ , o problema de Markowitz em encontrar o vetor de pesos ou alocações em cada ativo $w = (w_1, \dots, w_N)'$, solução do problema abaixo para um nível de retorno médio desejado \bar{r} [28]:

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot x_j \text{COV}_{ij} \quad (2.6)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^j x_i E_{(r_i)} = E^*$$

$$\sum_{i=1}^j x_i = 1$$

em que,

x_i e x_j representam a participação percentual do ativo i e do ativo j na carteira ótima, r_i denota o retorno esperado para o ativo de i , de $i = 1$ e E_* é o retorno esperado da carteira. A solução da equação acima para diferentes níveis de retorno esperado gera a fronteira eficiente.

2.2.2 MODELO MÍNIMA-VARIÂNCIA

O modelo de mínima-variância pode ser visto como parte do modelo média variância, mas sem a restrição de retorno esperado.

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot x_j \text{COV}_{ij} \quad (2.7)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^j x_i = 1 \quad x_i \geq 0 \quad \forall_i$$

em que,

x_i e x_j representam a participação percentual do ativo i e do ativo j na carteira ótima, r_i denota o retorno esperado para o ativo de i , de $i = 1$ e E_* é o retorno esperado da carteira. O intuito do modelo com a menor variância é obter um portfolio com o menor risco possível, muito útil para investidores que se consideram conservadores ou em momentos de crise em que o mercado está muito volátil.

2.3 ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS

A análise envoltória de dados é uma técnica que envolve métodos de programação linear a fim de construir uma superfície não paramétrica por partes (piece-wise frontier) envolvendo os dados [18]. O primeiro modelo DEA foi proposto por Charnes, Cooper e Rhodes [5] que, a seu tributo, se designou DEA – CCR, tinha orientação ao input, pressupunha a existência de retornos constantes de escala (CRS) e seu objetivo é calcular a eficiência relativa das unidades tomadoras de decisão denominadas DMUs com múltiplos insumos (inputs) e produtos (outputs).

De modo geral, pode-se dizer que os modelos DEA determinam as melhores condições de operação para cada unidade produtiva separadamente, de modo a maximizar o seu índice de desempenho, e aplicam as mesmas condições às demais unidades da amostra em análise. Resolvendo-se o problema para todas as unidades produtivas, obtêm-se as unidades produtivas que devem ser consideradas eficientes, que servirão de base para a determinação da fronteira de eficiência, e para o estabelecimento de metas as unidades ineficientes. [27]

A DEA otimiza cada observação com o intuito de se construir a Fronteira de Eficiência conforme a Figura 2.1, sendo que esta consiste em uma curva discreta formada unicamente por DMUs eficientes, que envelopa a área de ineficiência, na qual situam as unidades ineficientes [14].

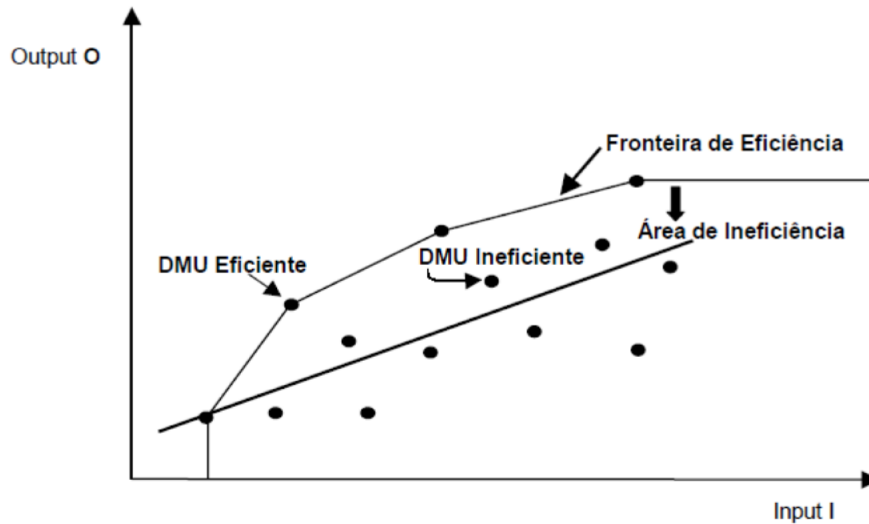


Figura 2.1: Fronteira de Eficiência [17]

Uma vez que a programação matemática é utilizada para medir a eficiência em termos de distância de cada DMU da fronteira de eficiência, então essa distância da fronteira pode ser entendida como meta de melhoria, ou seja, quanto cada empresa ineficiente precisa atingir de resultados para alcançar seus respectivos benchmarks na fronteira eficiente [14].

A metodologia DEA trabalha com dois modelos principais CCR e BBC. Entende-se que as variáveis de entrada e saída para DMU devem atender os seguintes critérios:

1. As variáveis e DMUs devem ser escolhidas de modo a representar o interesse dos gestores;
2. Há dados numéricos positivos para cada entrada e saída, sendo que se deve preferir um uso menor do número de entradas comparado ao de saídas.

O CCR proposto por Charnes, Cooper e Rhodes em 1978, também conhecido como CRS (Constant Returns to Scale), é dado pelas equações a seguir [5]:

$$w_0 = \max \sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{r0} \quad (2.8)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{i0} = 1 \quad (2.9)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{r0} - \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{i0} \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

$$u_r \geq 0, r = 1, \dots, s \quad (2.11)$$

$$v_i \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (2.12)$$

em que,

j : índice da DMU;

r : índice de saída;

s : índice de entrada;

y_{rj} : é o valor da r -ésima saída para a j -ésima DMU;

x_{ij} : é o valor da i -ésima entrada para a j -ésima DMU;

u_r : é o peso associado a r -ésima saída;

v_i : é o peso associado a i -ésima entrada;

E o modelo BCC proposto por Banker, Charnes e Cooper em 1984, também conhecido como VRS (Variable Returns to Scale), este pressupõe que as unidades sob análise apresentem retornos variáveis de escala, ou seja, os retornos consideram que o acréscimo em uma unidade de insumo pode gerar um acréscimo não proporcional no volume de produtos, permitindo identificar uma diferença entre a eficiência técnica e a eficiência de escala. A formulação matemática do Modelo BCC é expressa conforme segue:

$$w_0 = \max \sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{r0} + c_0 \quad (2.13)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{i0} = 1 \quad (2.14)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{r0} - \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{i0} + c_0 \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

$$u_r \geq 0, r = 1, \dots, s \quad (2.16)$$

$$v_i \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (2.17)$$

em que,

j : índice da DMU;

r : índice de saída;

s : índice de entrada;

y_{rj} : é o valor da r -ésima saída para a j -ésima DMU;

x_{ij} : é o valor da i -ésima entrada para a j -ésima DMU;

u_r : é o peso associado a r -ésima saída;

v_i : é o peso associado a i -ésima entrada;

Percebe-se que neste modelo é introduzida uma variável c_0 , essa variável não precisa atender à restrição de positividade e pode, portanto, assumir valores negativos, representando assim os

retornos variáveis de escala [17].

A escolha da orientação para a otimização é baseada em condições de mercado da DMU e, como regra geral, em mercados competitivos DMUs são orientadas a output desde que se assuma que os inputs estão sob o controle da DMU, na intenção de maximizar seus outputs de acordo com a demanda do mercado [27].

Um dos pontos mais relevantes para uma boa aplicação da DEA é a seleção de inputs e outputs, pois definições diferentes de inputs e outputs podem conduzir a diferenças significativas nos resultados. Além da seleção, a quantidade de inputs e outputs que devem ser consideradas em relação à quantidade de DMUs é outro ponto importante, pois o uso de muitos inputs e outputs é de pouca valia porque, quando o número de inputs e outputs aumenta, mais DMUs tendem a alcançar a fronteira eficiente, uma vez que se tornam especializadas demais para serem avaliadas em relação a outras unidades. O ideal é que a soma de inputs e outputs deve ser menor ou igual a um terço da quantidade de DMUs [17].

Foram selecionados indicadores financeiros para as entradas e saídas, sendo eles 4 Inputs e 4 Outputs. A descrição dos indicadores está descrita abaixo na Tabela 2.1

Tabela 2.1: Inputs e Outputs

Indicador	Descrição
Índice Sharpe	Input
Coef. Beta	Input
Preço/Lucro	Input
Volatilidade	Input
Retorno 1 ano	Output
Retorno 2 anos	Output
Retorno 3 anos	Output
Dividend Yield	Output

Neste trabalho, o modelo usado foi o BCC com orientação a output, pois é o mais adequado aos objetivos deste estudo dado que este modelo pressupõe retornos variáveis, enquanto a orientação a output buscaria maximizar os indicadores positivos.

2.4 BASE DE DADOS

A amostra inicial consiste nos 100 ativos que compunham o Índice Brasil 100. O IBrX 100 é o resultado de uma carteira teórica de ativos de companhias listadas na B3 que estejam entre os 100 primeiros ativos em ordem decrescente de Índice de Negociabilidade, tenham 95% de presença em pregão e não sejam ações negociadas na casa dos centavos [2].

A Tabela 2.2 apresenta o descritivo dos ativos compositores do Índice Brasil 100.

Tabela 2.2: Descritivo dos ativos do IBrX 100

Nome	Código	Setor Econômico
3r Petroleum	RRRP3	Petróleo gás e biocombustíveis
Alpargatas	ALPA4	Consumo cíclico
Ambev S/A	ABEV3	Consumo não cíclico
Americanas	AMER3	Consumo cíclico
Assai	ASAI3	Consumo não cíclico
Azul	AZUL4	Bens industriais
B3	B3SA3	Financeiro
Banco Inter	BIDI11	Financeiro
Banco Pan	BPAN4	Financeiro
BBSeguridade	BBSE3	Financeiro
BR Malls Par	BRML3	Financeiro
Bradesco	BBDC3	Financeiro
Bradesco	BBDC4	Financeiro
Bradespar	BRAP4	Materiais básicos
Brasil	BBAS3	Financeiro
Braskem	BRKM5	Materiais básicos
BRF SA	BRFS3	Consumo não cíclico
Btgp Banco	BPAC11	Financeiro
Carrefour BR	CRFB3	Consumo não cíclico
CCR SA	CCRO3	Bens industriais
Cemig	CMIG4	Utilidade pública
Cesp	CESP6	Utilidade pública
Cielo	CIEL3	Financeiro
Cogna ON	COGN3	Consumo cíclico
Copel	CPLE6	Utilidade pública
Cosan	CSAN3	Petróleo gás e biocombustíveis
CPFL Energia	CPFE3	Utilidade pública
Csn Mineracao	CMIN3	Materiais básicos
Cvc Brasil	CVCB3	Consumo cíclico
Cyrela Realt	CYRE3	Consumo cíclico

Continua

Continuação da Tabela 2.2

Nome	Código	Setor Econômico
Dexco	DXCO3	Materiais básicos
Ecorodovias	ECOR3	Bens industriais
Eletronbras	ELET3	Utilidade pública
Eletronbras	ELET6	Utilidade pública
Embraer	EMBR3	Bens industriais
Energias BR	ENBR3	Utilidade pública
Energisa	ENGI11	Utilidade pública
Eneva	ENEV3	Utilidade pública
Engie Brasil	EGIE3	Utilidade pública
Equatorial	EQTL3	Utilidade pública
Eztec	EZTC3	Consumo cíclico
Fleury	FLRY3	Saúde
Gerdau	GGBR4	Materiais básicos
Gerdau Met	GOAU4	Materiais básicos
Gol	GOLL4	Bens industriais
Grupo Natura	NTCO3	Consumo não cíclico
Grupo Soma	SOMA3	Consumo cíclico
Hapvida	HAPV3	Saúde
Hypera	HYPE3	Saúde
Iguatemi SA	IGTI11	Financeiro
Irbrazil Re	IRBR3	Financeiro
Itausa	ITSA4	Financeiro
ItauUnibanco	ITUB4	Financeiro
JBS	JBSS3	Consumo não cíclico
Klabin S/A	KLBN11	Materiais básicos
Light S/A	LIGT3	Utilidade pública
Localiza	RENT3	Consumo cíclico
Locamerica	LCAM3	Consumo cíclico
Locaweb	LWSA3	Tecnologia da informação
Lojas Marisa	AMAR3	Consumo cíclico
Lojas Renner	LREN3	Consumo cíclico
Magaz Luiza	MGLU3	Consumo cíclico
Marfrig	MRFG3	Consumo não cíclico
Meliuz	CASH3	Tecnologia da informação
Minerva	BEEF3	Consumo não cíclico
Movida	MOVI3	Consumo cíclico
MRV	MRVE3	Consumo cíclico
Multiplan	MULT3	Financeiro
P.Acucar-Cbd	PCAR3	Consumo não cíclico
Petrobras	PETR3	Petróleo gás e biocombustíveis
Petrobras	PETR4	Petróleo gás e biocombustíveis

Continua

Continuação da Tabela 2.2

Nome	Código	Setor Econômico
Petrório	PRI03	Petróleo gás e biocombustíveis
Petz	PETZ3	Consumo cíclico
Porto Seguro	PSSA3	Financeiro
Positivo Tec	POSI3	Tecnologia da informação
Qualicorp	QUAL3	Saúde
RaiaDrogasil	RADL3	Saúde
Rede D Or	RDOR3	Saúde
Rumo S.A.	RAIL3	Bens industriais
Sabesp	SBSP3	Utilidade pública
Santander BR	SANB11	Financeiro
Santos Brp	STBP3	Bens industriais
Sid Nacional	CSNA3	Materiais básicos
SLC Agricola	SLCE3	Consumo não cíclico
Sul America	SULA11	Financeiro
Suzano S.A.	SUZB3	Materiais básicos
Taesa	TAE11	Utilidade pública
Telef Brasil	VIVT3	Comunicações
Tim	TIMS3	Comunicações
Totvs	TOTS3	Tecnologia da informação
Ultrapar	UGPA3	Petróleo gás e biocombustíveis
Usiminas	USIM5	Materiais básicos
Vale	VALE3	Materiais básicos
Via	VIA3	Consumo cíclico
Vibra	VBBR3	Petróleo gás e biocombustíveis
Weg	WEGE3	Bens industriais
Yduqs Part	YDUQ3	Consumo cíclico

Os dados de negociações diárias da B3 dos ativos selecionados foram obtidos através do software R, extraídos do site Yahoo Finance por meio do pacote BatchGetSymbols. As cotações diárias dos ativos, além de coletados, foi tratado e analisado utilizando o Software R.

O conjunto de dados com o histórico dos indicadores técnicos foram coletados por meio do portal Economática. A Economática é uma plataforma online para análise de grande volume de dados do mercado financeiro [10]. Após a coleta dos dados através da Economática, o tratamento dos dados foi feito no Excel, assim como algumas análises preliminares. A otimização via DEA foi feita através do Software Siad. O objetivo do tratamento de dados é assegurar a qualidade dos mesmos para que seja feita uma análise consistente.

2.5 TESTE DE HIPÓTESE: U DE MANN-WHITNEY

A título de comparação foram feitos testes de hipóteses para averiguar se as diferenças de resultados das carteiras foram estatisticamente significativas. O teste utilizado foi o teste não paramétrico de U de Mann-Whitney, que é usado para testar se duas amostras independentes provém de populações com medianas iguais. O teste é uma alternativa ao teste paramétrico t de Student quando a amostra for pequena e/ou quando as suposições dos testes paramétricos não forem atendidas [25]. A escolha de um teste não paramétrico neste trabalho se deu pelos dados não atender as suposições de testes paramétricos.

O teste U de Mann-Whitney pode ser considerado a versão não paramétrica do teste t, para amostras independentes. Ao contrário do teste t, que testa a igualdade das médias, o teste de U de Mann-Whitney testa a igualdade das medianas. Os valores de U calculados pelo

teste avaliam o grau de entrelaçamento dos dados dos dois grupos após a ordenação. A maior separação dos dados em conjunto indica que as amostras são distintas, rejeitando-se a hipótese de igualdade das medianas [4].

Testar a mediana ao invés da média pode ser muito vantajoso, pois a mediana não é sensível a valores extremos. Contextualizando, o teste em questão ao invés de construir a estatística com dados originais, converte os dados em postos (ordenados). Dessa forma as suposições de normalidade e homogeneidade não são necessárias, permitindo mais generalidade aos resultados, além de fazer com que outliers percam a influência, se tornando apenas uma ordenação da amostra.

Para a construção do teste, dá-se o seguinte passo a passo:

1. Formar um conjunto W com todos os dados das duas amostras
2. Ordenar o conjunto W de forma crescente, indicando sempre que grupo cada valor pertence

Às observações empatadas atribuir a média dos postos correspondentes

3. Considerar:

n_1 = número de observações na amostra 1;

n_2 = número de observações na amostra 2;

R_1 = soma dos postos da amostra 1;

R_2 = soma dos postos da amostra 2;

4. Calcular:

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1 \quad (2.18)$$

e

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - R_2 \quad (2.19)$$

5. Escolher o menor valor de U e se $n < 20$ utilizar a tabela de valores críticos de Mann-Whitney (U), caso contrário fazer o cálculo de z.
6. Para cálculo de z:

$$z = \frac{U - \mu_R}{\sigma_R} \quad (2.20)$$

em que,

$$\mu_R = \frac{n_1 \cdot n_2}{2} \quad (2.21)$$

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}} \quad (2.22)$$

7. Encontrar o valor crítico na tabela Z
8. Se $z >$ valor crítico na tabela z, então rejeita-se a hipótese nula e constata-se diferença entre as amostras, caso contrário não se rejeita a hipótese nula e conclui-se que não há diferença significativa entre as amostras.
9. Outro meio de interpretar o teste é através do *p-valor*. Se *p-valor* $< 0,05$ então rejeita-se a hipótese ao nível de 5% de significância.

Este trabalho utilizou o meio através do p – *valor* para rejeitar ou não a hipótese nula. A utilização de testes de comparação de medianas no presente estudo está em linha com trabalhos anteriores, no quais se destacam os trabalhos acima mencionados.

2.6 CONSTRUÇÃO DOS PORTFÓLIOS

Para confecção das carteiras foi considerado dois cenários:

Cenário 1: Modelo baseado em dados de longo prazo, contemplando o período de janeiro de 2016 a dezembro de 2020.

Cenário 2: Modelo baseado em dados de curto prazo, avaliando o ano inteiro de 2020.

A ideia é testar os dois cenários e verificar como os modelos se comportam nos dois casos. Será testado os modelos de mínima e média-variância em cada cenário utilizando apenas a metodologia concebida por Markowitz e também utilizando a análise envoltória de dados como selecionador de ativos eficientes para testagem dos modelos de Harry.

Após a criação das carteiras, as mesmas foram testadas ao longo de 2021. As comparações das carteiras foram feitas através de testes de hipóteses. Considerando todos os cenários descritos acima, temos 8 portfólios formados. Os mesmos estão descritos na Tabela 2.3 abaixo:

Tabela 2.3: Descritivo dos portfólios contruídos

Carteira	Descrição
MK-FE-LP	Markowitz, Fronteira Eficiente, Longo Prazo;
MK-MV-LP	Markowitz, Mínima Variância, Longo Prazo;
MK-FE-CP	Markowitz, Fronteria Eficiente, Curto Prazo;
MK-MV-CP	Markowitz, Mínima Variância, Curto Prazo;
DEA-FE-LP	DEA, Fronteira Eficiente, Longo Prazo;
DEA-MV-LP	DEA, Mínima Variância, Longo Prazo;
DEA-FE-CP	DEA, Fronteira Eficiente, Curto Prazo;
DEA-MV-CP	DEA, Mínima Variância, Curto Prazo;

em que,

DEA: Modelo usando otimização via Análise Envoltória de dados com união a Markowitz;

MK: Modelo usando o apenas o modelo de Markowitz;

FE: Fronteira Eficiente (ponto ótimo entre risco e retorno);

MV: Mínima Variância (risco mínimo);

CP: Curto Prazo - Dados analisados em 2020;

LP: Longo Prazo - Dados analisados entre 2016 e 2020;

Com os modelos de portfólios prontos, foram montadas as carteiras respeitando o peso de cada ativo proposto pelo modelo respectivo, como se fosse investido R\$100.000, iniciada no primeiro dia útil de janeiro de 2021, contemplando o período até o último dia útil do mesmo ano.

Por fim, foi analisado como as carteiras geradas se comportaram ao longo do ano e qual foi o modelo mais efetivo. Vale ressaltar que 2021 foi um ano atípico para o mercado de capitais por consequência da pandemia de Covid-19 e seus efeitos na economia global.

3. RESULTADOS

Inicialmente foi efetuado um estudo descritivo preliminar para a caracterização da amostra inicial e dos ativos em estudo. Será usada para a caracterização da amostra inicial, a classificação de setores econômicos própria do Bovespa, explanada na metodologia deste trabalho.

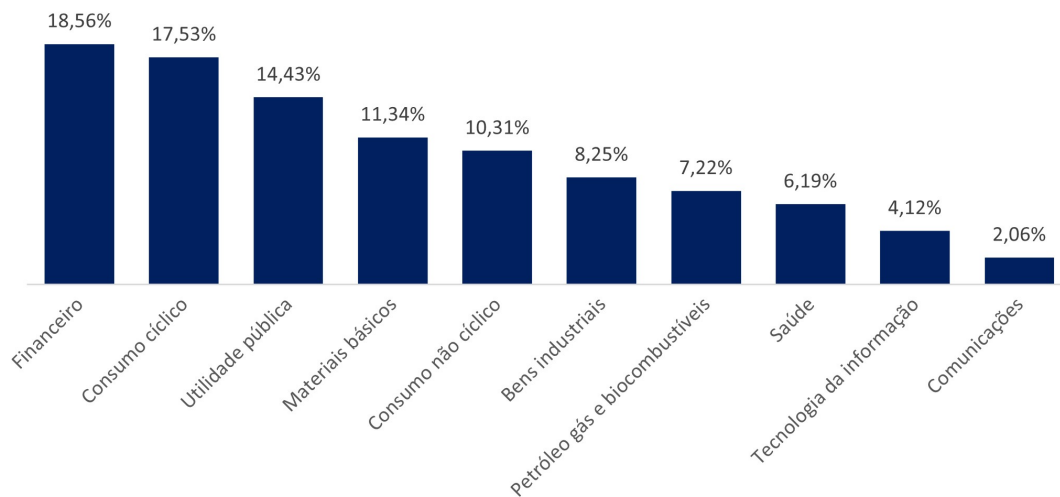


Figura 3.1: Histograma da relação de empresas por setor Bovespa

De acordo com a Figura 3.1, o setor econômico com maior representatividade dentre os ativos compositores do IBrX 100 é o Financeiro (18,56%). Em seguida estão os setores de Consumo cíclico (17,53%) e Utilidade pública (14,43%). Já o setor menos representativo é de Comunicações, com apenas 2,06% do total.

3.1 PORTFÓLIOS CONSTRUÍDOS

3.1.1 MARKOWITZ COM FRONTEIRA EFICIENTE E LONGO PRAZO

Em relação ao modelo de média-variância, testado com dados de longo prazo, denominada MK-FE-LP, a carteira construída está descrita na Tabela 3.1 abaixo.

Tabela 3.1: Portfólio 1: MK-FE-LP

Empresa	Código	Setor Econômico	Peso
Bradespar	BRAP4	Materiais básicos	10,69%
Eneva	ENEV3	Utilidade pública	1,57%
Locamerica	LCAM3	Consumo cíclico	17,62%
Magaz Luiza	MGLU3	Consumo cíclico	33,47%
Petrorio	PRI03	Petróleo gás e biocombustíveis	9,57%
RaiaDrogasil	RADL3	Saúde	8,22%
SLC Agrícola	SLCE3	Consumo não cíclico	3,58%
Santos Brp	STBP3	Bens industriais	1,52%
Suzano S.A.	SUZB3	Materiais básicos	11,09%
Weg	WEGE3	Bens industriais	2,69%

Foram selecionados 10 ativos, com destaque para *MGLU3*, que sozinha representa cerca de 1/3 da carteira (33,47%). Este ativo se mostrou com rendimentos consistentes ao longo tempo. As ações *MGLU3* valorizaram mais de 18.000% entre janeiro de 2015 e janeiro de 2019 [15]. Na Figura 3.2 abaixo, podemos observar o desempenho da carteira em comparação com o IBOV e o CDI.

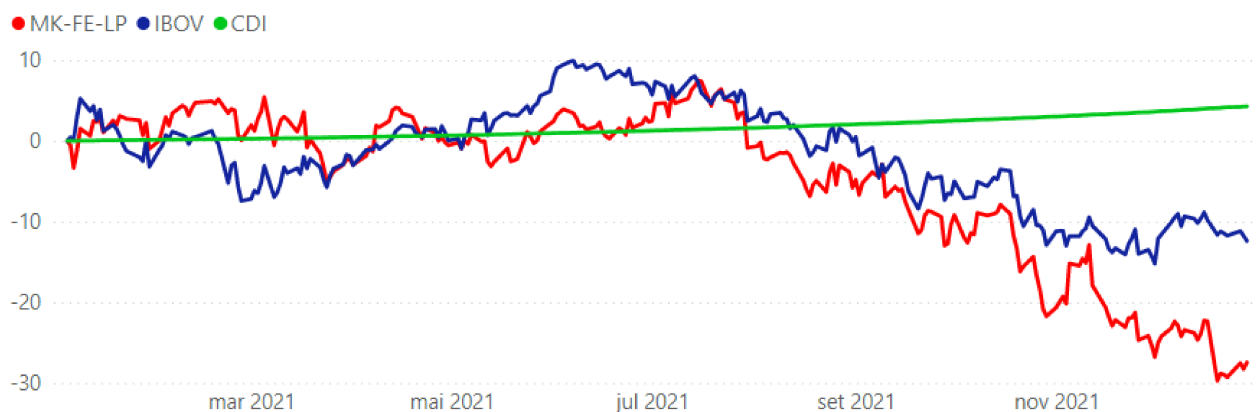


Figura 3.2: Desempenho da carteira MK-FE-LP vs IBOV vs CDI

Percebe-se visualmente que o desempenho da carteira no início do ano era predominantemente acima do mercado e CDI, porém aproximadamente em agosto o mercado despencou e a carteira o seguiu despencando mais ainda. Ao final do período o retorno acumulado era negativo e bem abaixo do mercado e CDI.

Tabela 3.2: Retornos Anuais - MK-FE-LP

Ano	Carteira	CDI	IBOV	IPCA
2021	-26,12%	4,33%	-11,79%	9,82

Verifica-se também que esta carteira tem um desempenho muito inferior a quando utilizamos o modelo mínima-variância. Esta carteira mostra que mesmo com certa concentração em um ativo com ótimos retornos há anos, não foi suficiente para tornar esta mesma atrativa, provando assim que rendimento passado não é garantia de retornos futuros.

3.1.2 MARKOWITZ COM MÍNIMA-VARIÂNCIA E LONGO PRAZO

A carteira resultante do modelo de mínima-variância e testado com dados de longo prazo foi denominada MK-MV-LP e está descrita na Tabela 3.3 abaixo.

Tabela 3.3: Portfólio 2: MK-MV-LP

Empresa	Código	Setor Econômico	Pesos
Ambev S/A	ABEV3	Consumo não cíclico	5,51%
BBSeguridade	BBSE3	Financeiro	0,50%
CPFL Energia	CPFE3	Utilidade pública	5,57%
Energisa	ENGI11	Utilidade pública	0,74%
Eneva	ENEV3	Utilidade pública	0,72%
Engie Brasil	EGIE3	Utilidade pública	10,32%
Equatorial	EQTL3	Utilidade pública	0,99%
Fleury	FLRY3	Saúde	2,84%
Klabin S/A	KLBN11	Materiais básicos	4,36%
Minerva	BEEF3	Consumo não cíclico	2,69%
P.Acucar-Cbd	PCAR3	Consumo não cíclico	2,29%
Porto Seguro	PSSA3	Financeiro	9,02%
RaiaDrogasil	RADL3	Saúde	7,40%
Santos Brp	STBP3	Bens industriais	0,29%
SLC Agricola	SLCE3	Consumo não cíclico	6,36%
Suzano S.A.	SUZB3	Materiais básicos	12,40%
Taesa	TAAE11	Utilidade pública	21,07%
Telef Brasil	VIVT3	Comunicações	6,91%

Foram selecionados 18 ativos, com uma concentração de 43,79% nos ativos *TAAE11* (21,07%), *SUZB3* (12,40%) e *EGIE3* (10,32%). Em relação aos setores, o destaque é o de Utilidade Pública, representando 1/3 dos ativos.



Figura 3.3: Desempenho da carteira MK-MV-LP vs IBOV vs CDI

Visualmente, percebe-se que ao longo do ano a carteira MK-MV-LP obteve um desempenho bem variável com momentos que o retorno acumulado ficou acima dos 10% aproximadamente em junho, mas também observa-se que foi um aumento do mercado em geral, pois o IBOV também estava com altos índices no mesmo período. Ao final de julho o mercado ainda tinha fôlego, mas a carteira não estava no mesmo patamar, e as duas chegaram a ficar com retornos bem próximos, mas no resto do ano o mercado perdeu fôlego caindo bastante enquanto a carteira conseguiu se segurar bem, tendo um resultado próximo a variação anual do CDI e superior ao IBOV. O que pode ser também observado na Tabela 3.4 dos retornos anuais abaixo.

Tabela 3.4: Retornos Anuais - MK-MV-LP

Data	Carteira	CDI	IBOV	IPCA
2021	5,79	4,33	-11,79	9,82

Esta é uma carteira bem diversificada, contendo diversos ativos de diversos setores, algo que, segundo Markowitz, é o caminho ideal a seguir, mas apesar do retorno satisfatório comparado ao IBOV, o desempenho da carteira foi abaixo da inflação no mesmo período. Ou seja, um investimento em títulos do governo atrelados ao IPCA, além de um risco menor, traria um retorno maior.

3.1.3 MARKOWITZ COM MÉDIA-VARIÂNCIA E CURTO PRAZO

Em relação ao modelo de média-variância, testado com dados de curto prazo foi denominada MK-FE-CP, a carteira construída está descrita na Tabela 3.5 abaixo.

Tabela 3.5: Portfólio 3: MK-FE-CP

Empresa	Código	Setor Econômico	Peso
Banco Inter	BIDI11	Financeiro	20,57%
Bradespar	BRAP4	Financeiro	1,74%
Sid Nacional	CSNA3	Materiais básicos	18,56%
Magaz Luiza	MGLU3	Consumo cíclico	3,92%
Suzano S.A.	SUZB3	Materiais básicos	13,09%
Weg	WEGE3	Bens industriais	42,12%

Foram selecionados apenas 6 ativos, sendo a menor diversificação até então. Há um destaque para a *WEGE3*, que sozinha representa mais de 40% da carteira. Ao longo do tempo a *WEGE3* tem se mostrado um ativo diferenciado, com indicadores consistentes e retornos atrativos. A cotação do mesmo subiu cerca de 22.500% nos últimos 20 anos [9].

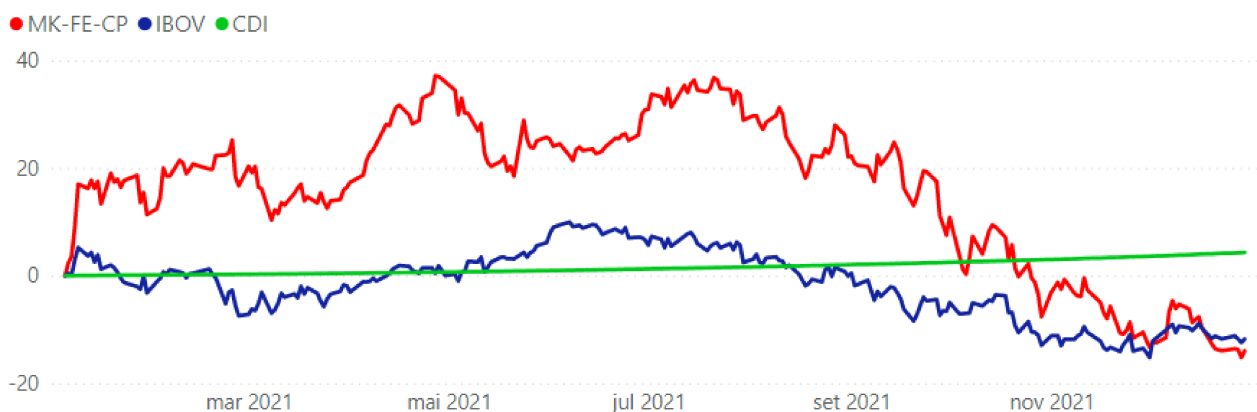


Figura 3.4: Desempenho da carteira MK-FE-CP vs IBOV vs CDI

Percebe-se na Figura 3.4 que na maior parte do ano a carteira estava com rendimentos altos, bem acima do mercado e CDI, mas no final de setembro o rendimento da carteira despenca e finaliza o ano abaixo do IBOV.

Tabela 3.6: Retornos Anuais - MK-FE-CP

Ano	Carteira	CDI	IBOV	IPCA
2021	-13,99%	4,33%	-11,79%	9,82

Na Tabela 3.6 acima conseguimos ver claramente o quão inferior ao CDI e IPCA e ligeiramente abaixo do mercado foi o retorno. Esse movimento brusco de declínio se deu, principalmente, por conta do Banco Inter (*BID11*), que chegou a valorizar cerca de 637% entre abril de 2020 e abril de 2021, porém o ativo perdeu força por uma série de motivos, dentre eles a alta da taxa de juros no Brasil, o que faz com que empresas ligadas a tecnologia tenham mais dificuldade de financiar seus negócios. Os valores das fintechs caíram bastante 2021, dada a alta de juros na tentativa de controlar a inflação [11]. Para contextualizar o tamanho da queda, o ativo começou o ano valendo R\$31,97, chegou a valer R\$84,88 no dia 22/07/2021 e no último dia do ano estava valendo R\$28,39.

3.1.4 MARKOWITZ COM MÍNIMA-VARIÂNCIA E CURTO PRAZO

Em relação ao modelo de mínima-variância, testado com dados de curto prazo, a carteira foi denominada MK-MV-CP e está descrita na Tabela 3.7 abaixo.

Tabela 3.7: Portfólio 4: MK-MV-CP

Empresa	Código	Setor Econômico	Peso
BBSeguridade	BBSE3	Financeiro	0,33%
Carrefour BR	CRFB3	Consumo não cíclico	0,70%
P.Acucar-Cbd	PCAR3	Consumo não cíclico	0,95%
Porto Seguro	PSSA3	Financeiro	13,53%
RaiaDrogasil	RADL3	Saúde	8,14%
SLC Agrícola	SLCE3	Consumo não cíclico	8,05%
Suzano S.A.	SUZB3	Materiais básicos	6,80%
Taesa	TAE11	Utilidade pública	61,23%
Telef Brasil	VIVT3	Comunicações	0,26%

Foram selecionados 9 ativos, com grande destaque para *TAE11* que representa mais de 60% do portfólio. Este ativo chama atenção por seus indicadores financeiros, que se mostraram crescentes e positivos ao longo do tempo e principalmente o pagamento de dividendos, um grande diferencial [1].

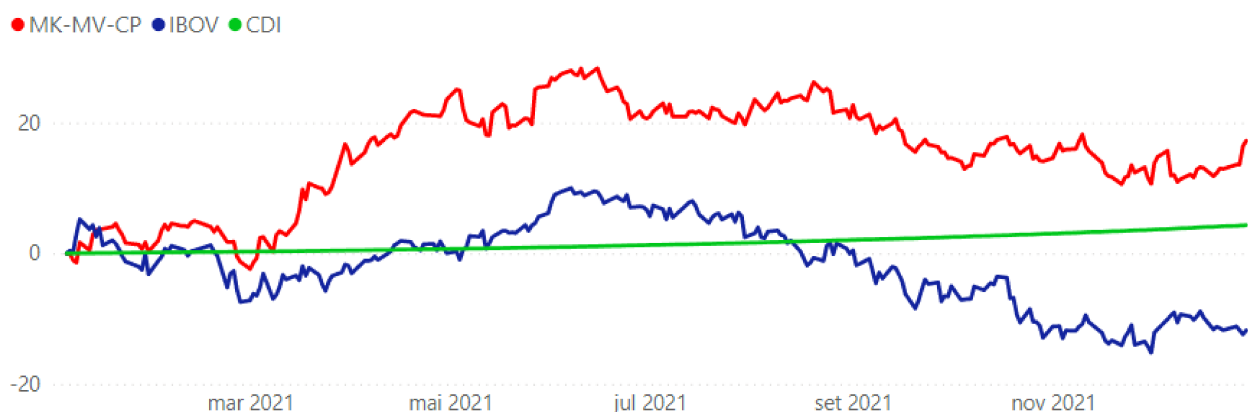


Figura 3.5: Desempenho da carteira MK-MV-CP vs IBOV vs CDI

Visualmente, nota-se que o início do desempenho da carteira foi tímido até meados de março, quando a carteira subiu bastante. Percebe-se também na carteira há uma tendência de mercado com as movimentações parecidas entre IBOV e a MK-MV-CP, porém com a carteira sempre acima do mercado. Ao final do período o rendimento da carteira foi satisfatório e bem superior ao IBOV, superando também o CDI.

Tabela 3.8: Retornos Anuais - MK-MV-CP

Ano	Carteira	CDI	IBOV	IPCA
2021	17,24%	4,33%	-11,79%	9,82

O retorno da carteira também foi acima da inflação no mesmo período, algo extremamente positivo dado a inflação alta em 2021.

3.2 CARTEIRAS DEA

Para confecção dos portfólios baseados no DEA em conjunto de Markowitz o processo inicial foi encontrar os ativos eficientes através do DEA. Foram usados como Inputs: Índice Sharpe, Coeficiente Beta, Volatilidade e Preço sobre Lucro. Como Outputs os indicadores foram: Retornos de 1, 2 e 3 anos e Dividend Yield. Os Inputs e Outputs analisados a longo e curto prazo estão descritos nas Tabelas 3.9 e 3.10, respectivamente.

Em seguida, foi feito o mesmo processo para a otimização de Markowitz já anteriormente explanado. Nessas circunstâncias foram formados portfólios diferentes fundamentados na união de DEA e Markowitz.

3.2.1 SELEÇÃO DE ATIVOS EFICIENTES - LONGO PRAZO

Tabela 3.9: Inputs e Outputs - Longo Prazo

DMU	Sharpe	Beta	Vol	P/L	Retrono1	Retorno2	Retorno3	DY	Eficiência
ABEV3	-0,10	0,58	28,80	21,63	-13,95	-19,99	1,64	2,64	1,00
ALPA4	1,30	0,62	42,18	173,40	26,70	210,96	706,20	0,13	0,58
AMAR3	0,35	2,15	63,51	-4,11	-48,71	-6,07	40,41	0,00	0,17
AMER3	0,91	1,22	59,80	-191,00	20,69	274,41	416,00	0,00	1,00
B3SA3	1,21	0,98	38,62	30,23	50,26	198,24	556,90	3,14	0,70
BBAS3	0,68	1,52	47,47	8,72	-23,58	39,34	224,60	3,81	0,44
BBDC3	0,54	1,24	37,86	12,92	-19,73	23,18	152,90	2,61	0,30
BBDC4	0,66	1,24	38,19	14,49	-15,21	30,90	203,40	2,56	0,28
BBSE3	0,32	0,76	31,83	15,36	-11,44	37,90	82,28	9,39	1,00
BEEF3	-0,08	0,76	41,34	7,21	-18,70	-1,98	-19,30	2,54	1,00
BPAN4	1,02	1,13	60,49	17,48	-6,69	454,27	541,00	3,90	1,00
BRAP4	1,70	1,12	49,23	15,11	73,54	154,56	1464,00	3,14	0,93
BRFS3	-0,35	1,18	43,19	12,89	-37,38	-39,78	-59,10	0,00	0,00
BRKM5	0,14	0,73	52,36	-2,80	-21,03	-41,03	4,62	0,00	0,06
BRML3	0,22	1,10	42,58	-28,40	-45,18	-16,19	44,36	0,00	0,36
CCRO3	0,19	0,99	43,22	142,40	-26,28	-3,82	34,21	3,58	0,55
CESP6	0,57	0,67	35,41	5,49	-0,72	148,91	160,80	7,86	1,00
CIEL3	-0,49	0,91	47,75	-22,10	-51,31	-79,74	-78,40	2,15	1,00
CMIG4	0,71	1,25	48,96	7,57	13,11	156,93	243,90	2,23	0,62
COGN3	-0,11	1,88	53,52	-1,46	-59,49	-73,63	-46,30	0,00	0,00
CPFE3	0,56	0,68	28,18	10,29	-3,16	82,89	143,50	5,53	0,86
CPLE6	0,84	0,96	41,76	5,25	13,10	255,68	308,50	4,14	1,00

DMU	Sharpe	Beta	Vol	P/L	Retrono1	Retorno2	Retorno3	DY	Eficiência
CSAN3	0,76	0,86	38,79	34,34	11,17	95,91	254,80	1,98	0,42
CSNA3	1,19	1,75	63,68	11,58	125,97	307,61	753,90	0,03	1,00
CVCB3	0,41	1,75	60,25	-2,68	-50,06	-54,04	74,82	0,00	0,27
CYRE3	0,93	1,61	49,27	6,44	54,60	174,82	400,80	6,16	1,00
DXCO3	0,76	1,26	46,38	29,10	16,43	132,20	272,00	1,64	0,47
ECOR3	0,64	1,30	46,45	-17,50	-17,97	17,20	203,70	0,00	0,66
EGIE3	0,51	0,60	24,95	12,81	-10,13	86,58	124,70	3,92	1,00
ELET3	1,10	1,45	62,02	8,92	11,81	124,21	652,80	12,17	1,00
ELET6	0,80	1,29	53,87	9,00	12,06	77,52	316,80	4,82	0,55
EMBR3	-0,40	0,73	46,85	-1,80	-55,14	-55,49	-69,80	0,00	0,00
ENBR3	0,41	0,52	30,57	7,87	-8,39	58,34	105,90	2,97	0,63
ENEV3	0,85	0,63	47,43	19,45	42,14	346,76	343,50	0,00	1,00
ENGI1	1,09	0,85	31,34	12,93	-1,00	104,73	319,70	1,15	0,53
EQTL3	0,91	0,85	28,26	7,86	29,51	83,94	264,00	1,38	0,90
EZTC3	1,01	1,13	46,78	24,03	-16,60	149,91	462,60	0,69	0,43
FLRY3	0,91	0,81	34,22	33,32	-9,29	17,08	309,90	2,73	0,28
GGBR4	0,98	1,54	51,38	17,57	23,99	109,26	462,30	1,31	0,37
GOAU4	1,12	1,78	56,94	13,94	23,49	107,81	635,10	1,60	0,35
GOLL4	1,30	2,40	84,08	-1,48	-32,22	70,82	889,60	0,00	1,00
HYPE3	0,37	0,59	33,64	16,71	-0,51	82,33	95,59	3,43	0,75
ITSA4	0,68	1,04	32,64	13,98	-12,22	50,09	196,20	5,50	0,57
ITUB4	0,58	1,06	33,93	16,31	-11,15	33,95	162,20	4,12	0,43
JBSS3	0,46	0,33	55,32	13,69	-6,17	148,11	107,00	2,28	1,00
KLBN1	0,12	0,26	32,64	-11,40	43,94	67,73	33,87	0,08	1,00
LCAM3	2,35	1,30	49,42	38,37	32,45	395,60	3139,00	1,53	0,90
LIGT3	0,54	1,77	53,32	10,67	22,73	48,16	150,90	0,00	0,30
LREN3	0,71	0,98	39,88	31,48	-21,90	39,64	230,00	0,74	0,18
MGLU3	4,41	0,97	61,69	412,80	109,83	908,53	36969,00	0,24	1,00
MRFG3	0,48	0,56	47,48	3,06	45,68	98,22	128,50	0,00	0,76
MRVE3	0,69	1,10	42,74	16,49	-10,35	76,61	229,50	1,79	0,32
MULT3	0,40	1,01	38,72	14,57	-27,22	5,40	102,80	2,57	0,30
NTCO3	0,90	1,07	46,30	-100,00	35,77	224,67	369,80	0,00	1,00
PETR3	0,72	1,77	52,30	52,94	-8,93	76,95	249,10	0,83	0,25
PETRA	0,86	1,85	53,16	52,00	-6,09	89,56	355,50	0,00	0,25
POSI3	0,67	1,67	65,16	3,64	-49,58	65,18	204,30	0,63	0,30
PRIO3	2,32	2,08	77,85	20,95	112,31	758,06	5629,00	0,00	1,00
PSSA3	0,46	0,66	32,36	9,36	-18,26	60,07	120,90	4,37	0,61
QUAL3	0,73	0,79	48,90	25,13	-5,19	40,17	259,30	0,50	0,15
RADL3	0,86	0,32	31,43	85,23	12,78	39,53	267,80	0,52	0,33
RENT3	1,40	1,29	45,88	49,47	46,53	238,51	889,10	0,50	0,59
SANB1	0,79	1,15	38,68	12,41	-3,15	65,90	269,90	6,26	0,62
SBSP3	0,57	1,02	40,62	31,20	-24,13	41,24	168,40	3,10	0,35
SLCE3	0,92	-0,01	37,41	10,51	15,15	135,72	337,20	3,59	1,00
SULA1	0,70	0,99	38,31	7,41	-21,17	168,04	224,60	4,08	0,81
TAAE1	0,90	0,46	25,05	5,07	18,88	112,19	235,10	9,63	1,00
TIMS3	0,53	0,79	34,28	19,23	-2,77	23,04	144,30	3,75	0,39
TOTS3	0,64	0,69	38,83	55,45	34,61	195,87	198,10	0,74	0,86
UGPA3	-0,02	1,02	42,89	28,90	-5,65	-32,60	-12,20	1,01	1,00
USIM5	1,26	2,13	64,49	26,70	55,06	65,52	888,30	0,30	0,46
VALE3	1,21	0,74	48,65	16,79	70,93	141,69	684,50	2,75	0,97
VIAA3	1,32	2,03	71,89	23,55	44,67	104,08	1021,00	0,00	0,40
VIVT3	0,38	0,24	31,48	16,46	36,23	43,97	96,48	8,96	1,00
WEGE3	1,33	0,51	36,46	67,87	120,28	325,57	617,40	0,57	1,00
YDUQ3	0,64	1,66	54,11	100,90	-29,38	11,51	201,20	1,55	0,16

3.2.2 SELEÇÃO DE ATIVOS EFICIENTES - CURTO PRAZO

Tabela 3.10: Inputs e Outputs - Curto Prazo

DMU	Sharpe	Beta	Vol	P/L	Retorno1	Retorno2	Retorno3	DY	Eficiência
ABEV3	-0,14	0,71	46,80	216,37	-13,95	71,89	-19,99	2,64	1,00
ALPA4	0,81	0,77	65,30	173,41	26,70	208,93	210,96	0,13	0,79
AMAR3	-0,19	2,31	101,60	-41,19	-48,71	31,21	-6,07	0,00	1,00
AMER3	0,75	0,98	76,88	-191,50	20,69	82,66	274,41	0,00	1,00
AZUL4	0,23	2,15	116,78	-12,40	-32,56	91,67	46,10	0,00	1,00
B3SA3	1,28	0,92	56,65	302,32	50,26	145,86	198,24	3,13	0,71
BBAS3	-0,16	1,36	62,18	871,54	-23,58	-8,57	39,34	3,80	1,00
BBDC3	-0,15	1,20	56,38	129,22	-19,73	24,97	23,18	2,60	1,00
BBDC4	-0,05	1,17	56,95	144,92	-15,21	0,78	30,90	2,55	1,00
BBSE3	-0,16	0,72	40,81	153,63	-11,44	27,18	37,90	9,39	1,00
BEEF3	-0,08	1,03	61,19	721,22	-18,70	109,19	-1,98	2,54	1,00
BPAC11	0,85	1,67	79,36	209,87	25,32	320,27	458,99	1,28	0,88
BPAN4	0,37	1,44	86,69	174,83	-6,69	414,52	454,27	3,89	1,00
BRAP4	1,81	0,64	52,18	151,14	73,54	122,57	154,56	3,14	1,00
BRFS3	-0,43	1,40	62,25	128,96	-37,38	0,50	-39,78	0,00	1,00
BRKM5	0,16	0,83	89,21	-28,04	-21,03	-48,85	-41,03	0,00	0,00
BRML3	-0,46	1,15	70,44	-28,42	-45,18	-19,00	-16,19	0,00	0,00
CCRO3	-0,17	1,07	64,82	142,43	-26,28	31,46	-3,82	3,57	1,00
CESP6	0,13	0,61	41,32	548,81	-0,72	50,39	148,91	7,85	1,00
CIEL3	-0,51	1,05	73,78	-22,19	-51,31	-51,60	-79,74	2,14	1,00
CMIG4	0,52	1,16	56,97	756,64	13,11	18,53	156,93	2,23	0,50
COGN3	-0,54	2,09	83,74	-14,69	-59,49	-47,18	-73,63	0,00	0,00
CPFE3	0,08	0,74	43,31	102,95	-3,16	21,29	82,89	5,53	0,94
CPLE6	0,51	0,80	53,20	525,27	13,10	167,61	255,68	4,13	0,88
CRFB3	-0,27	0,21	40,83	144,10	-15,87	99,53	33,47	1,28	1,00
CSAN3	0,48	0,95	56,86	343,46	11,17	136,20	95,91	1,97	0,60
CSNA3	2,58	1,24	78,75	115,85	125,97	286,40	307,61	0,02	1,00
CVCB3	-0,10	2,14	111,94	-2,68	-50,06	-63,88	-54,04	0,00	0,00
CYRE3	0,53	1,74	80,78	643,85	54,60	117,03	174,82	6,16	1,00
DXCO3	0,65	1,26	70,45	291,04	16,43	68,66	132,20	1,64	0,38
ECOR3	0,02	1,40	69,40	-17,58	-17,97	42,54	17,20	0,00	1,00
EGIE3	-0,19	0,62	35,68	128,18	-10,13	43,24	86,58	3,92	1,00
ELET3	0,59	1,42	74,75	892,26	11,81	78,97	124,21	12,17	1,00
ELET6	0,32	1,31	63,59	900,29	12,06	43,05	77,52	4,82	0,56
EMBR3	-0,54	0,93	77,51	-18,02	-55,14	-59,17	-55,49	0,00	0,00
ENBR3	-0,09	0,56	39,52	787,34	-8,39	44,86	58,34	2,97	1,00
ENEV3	1,16	0,61	51,52	194,52	42,14	285,95	346,76	0,00	1,00
ENGI11	0,16	0,93	47,05	129,36	-1,00	46,48	104,73	1,14	0,56
EQTL3	0,24	0,98	44,18	786,47	29,51	59,18	83,94	1,38	0,97
EZTC3	0,09	1,23	74,36	240,33	-16,60	110,78	149,91	0,68	0,68
FLRY3	-0,03	0,71	46,96	333,25	-9,29	47,15	17,08	2,72	1,00
GGBR4	0,77	1,21	66,00	17,57	23,99	70,69	109,26	1,30	0,73
GOAU4	0,77	1,29	68,54	139,43	23,49	68,88	107,81	1,59	0,49
GOLL4	0,22	2,28	114,83	-14,81	-32,22	-0,64	70,82	0,00	0,58
HYPE3	0,22	0,62	53,22	167,13	-0,51	21,80	82,33	3,42	0,50
IRBR3	-0,57	2,01	108,24	-56,00	-76,88	-66,58	-13,94	1,60	1,00
ITSA4	-0,13	1,02	44,37	139,82	-12,22	12,22	50,09	5,49	1,00
ITUB4	-0,06	1,00	47,93	163,15	-11,15	0,33	33,95	4,12	1,00
JBSS3	0,16	0,43	60,43	136,97	-6,17	108,88	148,11	2,28	1,00
KLBN11	1,22	0,45	47,48	-11,40	43,94	75,66	67,73	0,08	1,00
LCAM3	0,99	1,59	81,47	383,72	32,45	145,13	395,60	1,53	0,71

Continua

DMU	Sharpe	Beta	Vol	P/L	Retorno1	Retorno2	Retorno3	DY	Eficiência
LIGT3	0,42	1,90	74,65	10,67	22,73	48,63	48,16	0,00	1,00
LREN3	-0,11	1,06	63,58	314,86	-21,90	15,31	39,64	0,74	1,00
MGLU3	2,34	0,65	69,97	412,84	109,83	345,53	908,53	0,23	1,00
MOVI3	0,53	1,83	74,14	563,46	87,25	145,74	215,12	0,64	1,00
MRF3	1,19	0,71	71,71	306,43	45,68	165,75	98,22	0,00	0,69
MRVE3	0,13	1,12	66,84	16,49	-10,35	66,43	76,61	1,79	0,72
MULT3	-0,17	1,13	67,35	145,75	-27,22	0,72	5,40	2,57	1,00
NTCO3	1,00	1,13	68,32	-100,38	35,77	136,22	224,67	0,00	1,00
PETR3	0,23	1,71	75,13	529,44	-8,93	16,67	76,95	0,82	0,22
PETR4	0,24	1,65	71,12	520,08	-6,09	29,10	89,56	0,00	0,27
POSI3	-0,25	1,72	95,51	364,07	-49,58	129,33	65,18	0,62	1,00
PRIO3	2,63	2,05	113,46	209,55	112,31	607,56	758,06	0,00	1,00
PSSA3	-0,38	0,70	38,17	935,71	-18,26	22,81	60,07	4,37	1,00
QUAL3	0,17	0,89	60,08	251,34	-5,19	225,24	40,17	0,49	0,96
RADL3	0,48	0,33	41,66	852,40	12,78	122,07	39,53	0,51	0,87
RAIL3	-0,25	0,45	58,73	107,81	-26,28	13,18	48,34	0,00	1,00
RENT3	1,19	1,39	74,57	494,74	46,53	147,69	238,51	0,50	0,56
SANB11	0,19	1,16	56,80	124,18	-3,15	17,48	65,90	6,25	0,78
SBSP3	-0,20	1,20	59,41	312,08	-24,13	49,49	41,24	3,09	1,00
SLCE3	0,54	0,00	42,33	105,14	15,15	43,02	135,72	3,59	1,00
STBP3	-0,26	0,99	72,50	-274,67	-35,53	24,80	55,86	0,33	1,00
SULA11	-0,19	1,16	55,67	7,41	-21,17	70,21	168,04	4,08	1,00
SUZB3	1,23	0,20	55,59	-73,65	47,53	55,41	218,17	0,00	1,00
TAAE11	0,79	0,48	24,77	507,40	18,88	68,24	112,19	9,63	1,00
TIMS3	0,12	0,71	47,48	192,34	-2,77	33,72	23,04	3,75	0,43
TOTS3	0,96	0,98	60,18	554,56	34,61	223,19	195,87	0,74	0,79
UGPA3	0,27	1,23	73,13	289,02	-5,65	-7,34	-32,60	1,01	0,10
USIM5	1,34	1,48	74,52	26,70	55,06	62,65	65,52	0,29	0,94
VALE3	1,71	0,34	54,44	167,93	70,93	83,37	141,69	2,75	1,00
VBBR3	-0,18	1,27	59,81	660,22	-23,28	0,43	60,96	4,19	1,00
VIIA3	1,29	2,22	94,30	23,55	44,67	268,10	104,08	0,00	1,00
VIVT3	0,24	0,10	42,20	164,60	36,23	30,93	43,97	8,95	1,00
WEGE3	2,71	0,59	58,31	678,71	120,28	342,11	325,57	0,57	1,00
YDUQ3	-0,11	1,92	76,49	100,90	-29,38	43,79	11,51	1,54	1,00

Os ativos eficientes estão sinalizados com 1 na coluna Eficiência. São tais ativos que serão usados como amostra inicial para se fazer a otimização via Markowitz. A descrição dos ativos que fazem parte da seleção eficiente a longo e curto prazo estão descritos abaixo:

Ativos Eficientes LP: ABEV3, AMER3, BBSE3, BEEF3, BPAN4, CESP6, CIEL3, CPLE6, CSNA3, CYRE3, EGIE3, ELET3, ENEV3, GOLL4, JBSS3, KLBN11, MGLU3, NTCO3, PRIO3, SLCE3, TAAE11, UGPA3, VIVT3 e WEGE3.

Ativos Eficientes CP: ABEV3, AMAR3, AMER3, AZUL4, BBAS3, BBDC3, BBDC4, BBSE3, BEEF3, BPAN4, BRAP4, BRFS3, CCRO3, CESP6, CIEL3, CRFB3, CSNA3, CYRE3, ECOR3, EGIE3, ELET3, ENBR3, ENEV3, FLRY3, IRBR3, ITSA4, ITUB4, JBSS3, KLBN11, LIGT3, LREN3, MGLU3, MOVI3, MULT3, NTCO3, POSI3, PRIO3, PSSA3, RAIL3, SBSP3, SLCE3, STBP3, SULA11, SUZB3, TAAE11, VALE3, VBBR3, VIIA3, VIVT3, WEGE3, YDUQ3.

3.2.3 DEA COM FRONTEIRA EFICIENTE E LONGO PRAZO

Em relação ao modelo de média-variância, testado com dados de longo prazo foi denominada DEA-FE-LP, a carteira construída está descrita na Tabela 3.11 abaixo.

Tabela 3.11: Portfólio 5: DEA-FE-LP

Empresa	Código	Setor Econômico	Peso
Banco Pan	BPAN4	Financeiro	0,73%
Eneva	ENEV3	Utilidade pública	6,22%
Magaz Luiza	MGLU3	Consumo cíclico	48,03%
Petrorio	PRI03	Petróleo gás e biocombustíveis	17,24%
SLC Agricola	SLCE3	Consumo não cíclico	9,48%
Santos Brp	STBP3	Bens industriais	2,94%
Weg	WEGE3	Bens industriais	15,35%

Para esta carteira foram selecionados 7 ativos, com grande destaque para *MGLU3* com quase de 50% de representatividade, com os setores econômicos diversificados.

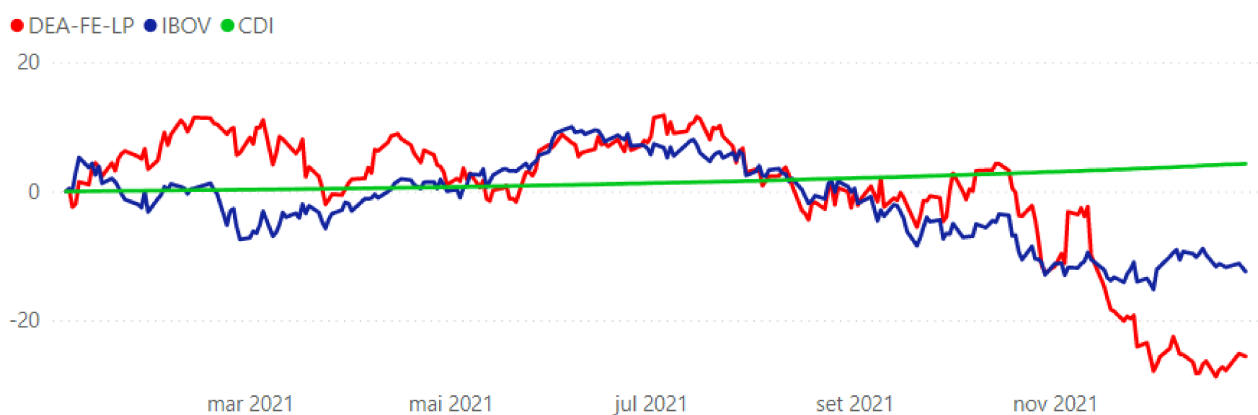


Figura 3.6: Desempenho da carteira DEA-FE-LP vs IBOV vs CDI

Percebe-se que visualmente durante a maior parte do período a carteira foi volátil e bem aderente ao mercado, terminando o ano com desempenho pior os dois índices do gráfico. Este portfólio ficou muito dependente da *MGLU3*, assim como na carteira MK-FE-LP, essa dependência acabou prejudicando a carteira, dado que em 2021 tal ativo se desvalorizou 71,06% [12] não repetindo as grandes valorizações dos anos anteriores.

Tabela 3.12: Retornos Anuais - DEA-FE-LP

Data	Carteira	CDI	IBOV	IPCA
2021	-23,38	4,33	-11,79	9,82

3.2.4 DEA COM MÍNIMA-VARIÂNCIA E LONGO PRAZO

Em relação ao modelo DEA de mínima-variância, testado com dados de longo prazo foi denominada DEA-MV-LP, a carteira construída está descrita na Tabela 3.13 abaixo.

Tabela 3.13: Portfólio 6: DEA-MV-LP

Empresa	Código	Setor Econômico	Peso
Ambev S/A	ABEV3	Consumo não cíclico	12,92%
BBSeguridade	BBSE3	Financeiro	6,56%
Minerva	BEEF3	Consumo não cíclico	6,73%
Cesp	CESP6	Utilidade pública	2,17%
Engie Brasil	EGIE3	Utilidade pública	17,25%
Eneva	ENEV3	Utilidade pública	2,71%
Klabin S/A	KLBN11	Materiais básicos	13,95%
SLC Agricola	SLCE3	Consumo não cíclico	8,37%
Santos Brp	STBP3	Bens industriais	0,66%
Taesá	TAEE11	Utilidade pública	28,66%

Foram selecionados 10 ativos, sendo as três com maiores pesos as *TAEE11* (28,66%), *EGIE3* (17,25%) e *KLBN11* (13,95%) respectivamente. Utilidade pública é o setor em destaque. Mais uma vez o ativo *TAEE11* se mostrando presente com considerável representatividade no portfólio.

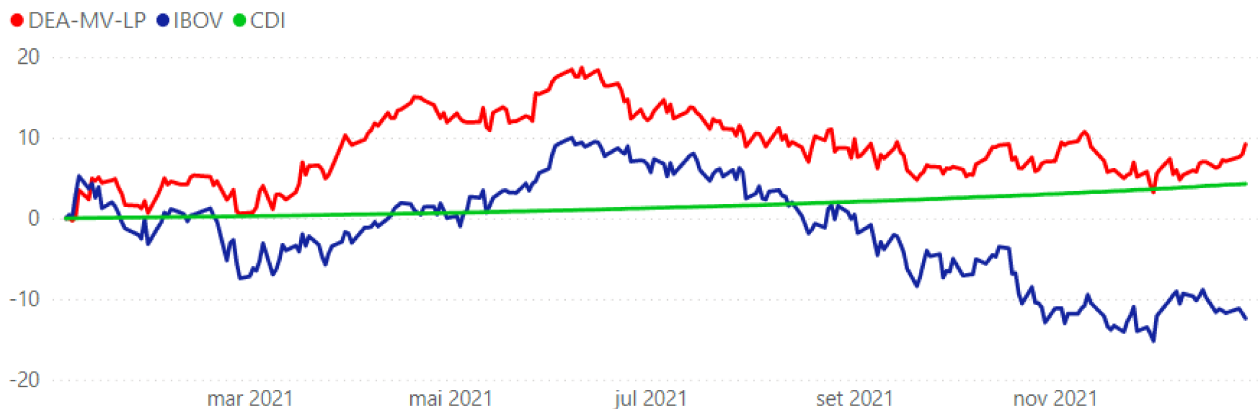


Figura 3.7: Desempenho da carteira DEA-MV-LP vs IBOV vs CDI

Através do gráfico, observa-se que há certa sincronia com o IBOV, mas com rendimentos superiores durante todo o período.

Tabela 3.14: Retornos Anuais - DEA-MV-LP

Data	Carteira	CDI	IBOV	IPCA
2021	10,11	4,33	-11,79	9,82

Nota-se também que o desempenho do portfólio em questão foi ligeiramente acima da inflação.

3.2.5 DEA COM FRONTEIRA EFICIENTE E CURTO PRAZO

Em relação ao modelo de média-variância, testado com dados de curto prazo foi denominada DEA-FE-CP, a carteira construída está descrita na Tabela 3.15 abaixo.

Tabela 3.15: Portfólio 7: DEA-FE-CP

Empresa	Código	Setor Econômico	Peso
Bradespar	BRAP4	FinaConsumo	5,54%
Sid Nacional	CSNA3	Materiais básicos	21,48%
Magaz Luiza	MGLU3	Consumo cíclico	9,65%
Petrorio	PRI03	Petróleo gás e biocombustíveis	0,67%
Suzano S.A.	SUZB3	Materiais básicos	13,88%
Weg	WEGE3	Bens industriais	48,78%

Foram selecionados 6 ativos com destaque para *WEGE3* com quase 50% de representatividade.



Figura 3.8: Desempenho da carteira DEA-FE-CP vs IBOV vs CDI

Na imagem acima observa-se que a carteira iniciou o ano com bom posicionamento e rendimentos superiores ao IBOV, porém ao final de maio a valorização da carteira foi caindo até ficar negativa em setembro e terminar o ano com o pior desempenho entre IBOV e CDI.

Tabela 3.16: Retornos Anuais - DEA-FE-CP

Data	Carteira	CDI	IBOV	IPCA
2021	-18,64	4,33	-11,79	9,82

O desempenho desse portfólio não foi satisfatório ficando bem abaixo da inflação e CDI, e perdendo para o IBOV.

3.2.6 DEA COM MÍNIMA-VARIÂNCIA E CURTO PRAZO

Em relação ao modelo de mínima-variância, testado com dados de curto prazo foi denominada DEA-MV-CP, a carteira construída está descrita na Tabela 3.17 abaixo.

Tabela 3.17: Portfólio 8: DEA-MV-CP

Empresa	Código	Setor Econômico	Peso
BBSeguridade	BBSE3	Financeiro	1,48%
Carrefour BR	CRFB3	Consumo não cíclico	4,26%
Porto Seguro	PSSA3	Financeiro	15,18%
SLC Agrícola	SLCE3	Consumo não cíclico	9,54%
Suzano S.A.	SUZB3	Materiais básicos	7,27%
Taesá	TAEE11	Utilidade pública	62,26%

Foram selecionados 6 ativos, com o grande destaque para *TAEE11* com mais de 60% de representatividade.

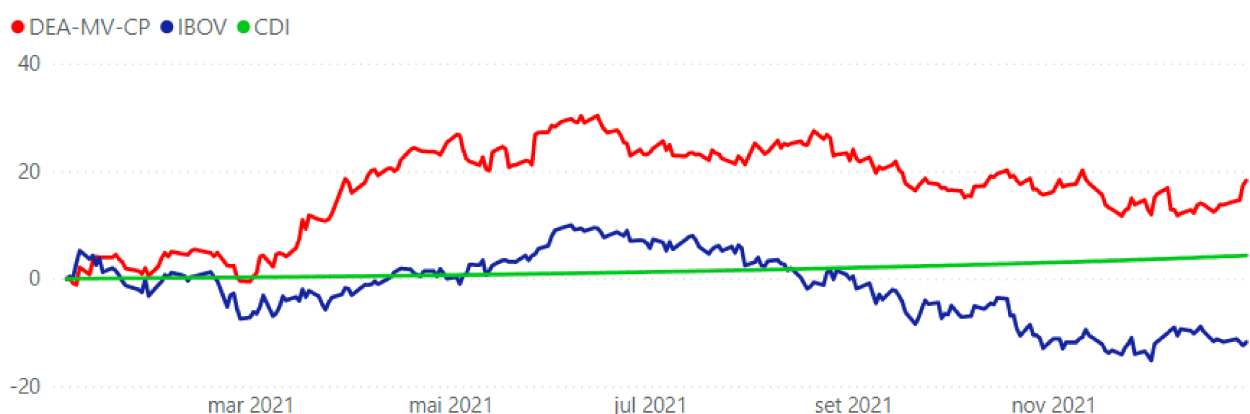


Figura 3.9: Desempenho da carteira DEA-MV-CP vs IBOV vs CDI

O desempenho da carteira foi consistente durante o ano inteiro, com retornos superiores ao IBOV e CDI, ao final do período constata-se que a carteira teve um desempenho excelente.

Tabela 3.18: Retornos Anuais - DEA-MV-CP

Data	Carteira	CDI	IBOV	IPCA
2021	18,25	4,33	-11,79	9,82

3.2.7 TESTE COMPARATIVO ENTRE CARTEIRAS

Foram feitas comparações a fim de verificar se as carteiras tiveram diferenças estatisticamente significativas em seus desempenhos. A ideia é testar se a diferença de técnica utilizada, níveis de risco aceitáveis ou longevidade dos dados analisados afetam significativamente o desempenho final da carteira. Na Tabela 3.19 estão descritos os retornos acumulados durante o ano de cada carteira, além de sua média e mediana.

Tabela 3.19: Resultados dos portfólios

Carteira	Acumulado	Médio	Mediano
CDI	4,33%	1,58%	1,30%
IBOV	-11,79%	-1,66%	-0,079%
IPCA	9,82%	-	-
MK-FE-LP	-26,12%	-4,85%	-0,93%
MK-MV-LP	5,79%	6,10%	5,95%
MK-FE-CP	-13,99%	16,05%	19,50%
MK-MV-CP	17,24%	15,45%	16,76%
DEA-FE-LP	-23,38%	-0,28%	2,38%
DEA-MV-LP	10,11%	8,60%	8,24%
DEA-FE-CP	-18,64%	-0,17%	2,20%
DEA-MV-CP	18,25%	16,91%	18,65%

A listagem dos testes segue abaixo.

Tabela 3.20: Resultado - Testes de Hipótese

Carteiras comparadas	Testagem	Estatística do teste	$p - valor$
MK-MV-LP x MK-FE-LP	Diferença de risco com MK e LP	6128,5	0,0000**
MK-MV-CP x MK-FE-CP	Diferença de risco com MK e CP	34353	0,0153**
MK-MV-LP x MK-MV-CP	Diferença de prazo com MK e MV	10340	0,0000**
MK-FE-LP x MK-FE-CP	Diferença de prazo com MK e FE	8337	0,0000**
DEA-MV-LP x DEA-FE-LP	Diferença de risco com DEA e LP	11846	0,0000**
DEA-MV-CP x DEA-FE-CP	Diferença de risco com DEA e CP	5504,5	0,0000**
DEA-MV-LP x DEA-MV-CP	Diferença de prazo com DEA e MV	12769	0,0000**
DEA-FE-LP x DEA-FE-CP	Diferença de prazo com DEA e FE	31160	0,6799
MK-MV-LP x DEA-MV-LP	Diferença de modelo com MV e LP	40418	0,0000**
MK-MV-CP x DEA-MV-CP	Diferença de modelo com MV e CP	34550	0,0178**
MK-FE-LP x DEA-FE-LP	Diferença de modelo com FE e LP	40988	0,0000**
MK-FE-CP X DEA-FE-CP	Diferença de modelo com FE e CP	10685	0,0000**

Os $p - valores$ marcados com ** são os testes com diferença estatística significativa ao nível de 5% de significância.

Quando utilizada a técnica da junção do DEA com o modelo de Markowitz, aceitando o risco médio, não há diferenças significativas em analisarmos dados ao longo ou curto prazo. Dentre as comparações, vale observar que todos os aspectos se mostraram aspectos que fazem diferença no momento de se montar uma carteira, fazendo com que pudéssemos escolher o modelo mais vantajoso através do retorno anual.

4. CONCLUSÕES

A primeira observação relevante é que todas as carteiras testada com a média variância, equilibrando risco e retorno, obtiveram resultados negativos. Nesses casos seria mais eficiente para o investidor deixar seus investimentos em uma aplicação governamental simples, onde correria bem menos risco.

Já no caso das carteiras testada com a mínima variância, todas obtiveram resultados positivos, e apenas uma delas (MK-MV-LP) perdeu para a inflação.

Os maiores retornos foram obtidos nas carteiras DEA-MV-CP e MK-MV-CP, com retornos de 18,25% e 17,24%, respectivamente. Entre elas houve diferença estatisticamente significativa ao nível 5% de significância, fazendo assim com que tenhamos como melhor modelo aquele que utilizou a união das duas técnicas de otimização, DEA e Markowitz, com a mínima variância e analisando dados de curto prazo.

O estudo se mostrou eficiente ao atestar que existe diferença significativa entre os modelos de Markowitz e a otimização DEA aliada com Markowitz, entre escolhermos um baixo risco e risco moderado e entre analisarmos dados em curto ou longo prazo. Além de indicar que a análise mais robusta complementando duas técnicas diferentes, tendem a ser mais efetivo.

Vale salientar que este trabalho foi analisado e testado em períodos que a economia brasileira e mundial passa por grande recessão devido à pandemia de Covid-19. Este estudo mostra que em tempos de crise, correr o mínimo de risco possível, alocando o dinheiro em portfólios a intuito de minimizar o risco é mais eficaz.

Portanto, para realização de trabalhos futuros neste tema, ficam como sugestões: utilizar dados mais recentes para verificar se os resultados deste estudo estão sob influência de condições específicas do período analisado, como a recessão mundial devido à pandemia de Covid-19, ou se o que foi atestado neste trabalho continuaria prevalendo. Analisar outro conjunto de ativos com características diferentes, usar outras métricas para compor a otimização via DEA ou mesmo analisar o modelo em diferente períodos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Advisor, T.C.: *TAAE11: Análise de Qualidade da Taesa e do Preço da Ação*, 2022. <https://comoinvestir.thecap.com.br/taee11-analise-de-qualidade-da-taesa-e-do-preco-da-acao>, acessado em 10/07/2022.
- [2] B3: *Índice Brasil 100 (IBrX 100 B3)*, 2022. https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/indice-brasil-100-ibrx-100.htm, acessado em 07/02/2022.
- [3] B.F.RAMOS e JUNIOR, A.M.: *EDUCAÇÃO FINANCEIRA E MERCADO DE CAPITAIS: um estudo sobre a importância da desmistificação do mercado de capitais e educação financeira na sociedade brasileira*. Revista Eletrônica de Debates em Economia, 1(1):112–165, 2012. <https://periodicos.unifacef.com.br/index.php/rede/article/view/572/492>.
- [4] CARMO, V.: *Teste de Mann-Whitney*. in - Departamento do Informática e Estatística - UFSC, 2012. https://www.inf.ufsc.br/~vera.carmo/Testes_de_Hipoteses/Testes_ao_parametricos_Mann-Whitney.pdf.
- [5] CHARNES, A., COOPER, W. W. e RHODES, E.: *Measuring the efficiency of decision making units*. European Journal of Operational Research, 2(6):429–444, 1978. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0377221778901388>.
- [6] Clear, M.: *O QUE É IBOVESPA? ENTENDA COMO FUNCIONA O PRINCIPAL ÍNDICE DA BOLSA*, 2022. <https://master.clear.com.br/o-que-e-ibovespa/>, acessado em 15/03/2022.
- [7] DEMIGUEL, V. e NOGALES, F.: *Portfolio Selection with Robust Estimation*. Operations Research, 57(3):560–577, 2009. <http://faculty.london.edu/avmiguel/DeMiguel-Nogales-OR.pdf>.
- [8] digital, B.P.: *Coeficiente Beta: o que é, como calcular (fórmula) e como usar*, 2017. <https://www.btgpactualdigital.com/como-investir/artigos/investimentos/beta-como-calcular>, acessado em 15/03/2022.
- [9] dinheiro, S.: *WEGE3: por que a WEG é a melhor ação da Bolsa brasileira*, 2020. <https://www.seudinheiro.com/2020/patrocinado/empiricus/wege3-por-que-a-weg-e-a-melhor-acao-da-bolsa-brasileira/>, acessado em 10/07/2022.
- [10] Economática: *Plataforma Financeira*, 2022. <https://economatica.com/plataforma-financeira>, acessado em 20/01/2022.
- [11] e|Investidor: *Ações do Inter caem 70% em seis meses. Quais as perspectivas para 2022?*, 2022. <https://einvestidor.estadao.com.br/mercado/acoes-banco-inter-tendencia-2022-bidi11/>, acessado em 19/07/2022.

- [12] e|Investidor: *O que esperar das ações de Magazine Luiza e Via após tombo em 2021*, 2022. <https://einvestidor.estadao.com.br/mercado/magalu-via-acoes-2022-tendencia>, acessado em 19/07/2022.
- [13] Exame: *Número de investidores na bolsa cresce 43% e se aproxima dos 4 milhões*, 2021. <https://exame.com/invest/mercados/numero-de-investidores-na-bolsa-cresce-43-e-se-aproxima-dos-4-milhoes/>, acessado em 08/03/2022.
- [14] FERREIRA, C. M. C. e GOMES, A. P.: *Introdução à Análise Envoltória de Dados*. Editora UFV, 2ª ed., 2009.
- [15] Invest, A.: *Ações MGLU3: Veja porque vale a pena investir na Magazine Luiza*, 2021. <https://atrioinvest.com.br/investimentos/acoes-mglu3/>, acessado em 10/07/2022.
- [16] InvestSite: *Classificação setorial ações*, 2022. https://www.investsite.com.br/classificacao_setorial_acoes.php, acessado em 19/07/2022.
- [17] J, N. J. I., S., V. E. e L., B. J.: *Análise da eficiência na geração de retorno aos acionistas das empresas do setor da construção civil com ações negociadas na BMFBOVESPA nos anos de 2009 e 2010 por meio da análise envoltória de dados*. Revista Contemporânea de Contabilidade, 9(18):41–62, 2012. <https://periodicos.ufsc.br/index.php/contabilidade/article/view/2175-8069.2012v9n18p41>.
- [18] J.COELLI, T., D.S.P.RAO, C.J.O'Donnell e E.BATTESE, G.: *An introduction to efficiency and productivity analysis*. New York: Springer, 2:XVII–349, 2005. <https://doi.org/10.1007/b136381>.
- [19] LONGARAY, A. A., SÁ, A. F., MACHADO, C. M. S., MUNHOZ, P. R. e TONDOLO, V. G.: *Uso da técnica DEA-Sharpe na análise do comportamento de carteiras de investimento*. Exacta, 17(3):158–172, 2019. <https://www.redalyc.org/journal/810/81067068010/html/>.
- [20] LUCENA, W. G. L., SANTOS, J. M. A., ASSIS, J. T. e SANTOS, M. C.: *Fatores que influenciam o endividamento e a inadimplência no Setor Imobiliário da cidade de Toritama-PE à luz das Finanças Comportamentais*. HOLOS, 6:90–113, 2014. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2017.06.012>.
- [21] Magazine, W.: *Efeito manada: o que é e como ele impacta nos investimentos financeiros?*, 2020. <https://warren.com.br/magazine/efeito-manada/>, acessado em 25/02/2022.
- [22] Magazine, W.: *O que é P/L – Preço/Lucro*, 2020. <https://warren.com.br/magazine/o-que-e-preco-lucro/>, acessado em 15/03/2022.
- [23] Magazine, W.: *Índice de Sharpe: o que é e como utilizar ao comparar fundos de investimento*, 2020. <https://warren.com.br/magazine/indice-de-sharpe/>, acessado em 15/03/2022.
- [24] MARKOWITZ, H.: *Portfolio Selection*. Journal of Finance, 7(1):77–91, 1952. <https://doi.org/10.2307/2975974>.
- [25] MELO, R. A. d. e S. MACEDO, M. A. d.: *Análise Multicriterial do Desempenho de Longo Prazo das Carteiras de Ações de Fundos de Investimento Multimercado Macro no Brasil no Período de 2005 a 2010*. Revista Evidenciação Contábil Finanças, 1(2):69–89, 2013. <http://periodicos.ufpb.br/ojs2/index.php/recfin>.

- [26] NOVA, S. e SANTOS, A.: *Aplicação da análise por envoltória de dados utilizando variáveis contábeis*. Revista de Contabilidade e Organizações, 2(3):132–154, 2009. <https://doi.org/10.11606/rco.v2i3.34717>.
- [27] Rafaeli, L.: *A análise envoltória de dados como ferramenta para avaliação do desempenho relativo*. Dissertação de Mestrado, 2009.
- [28] RUBESAM, A. e BELTRAME, A. L.: *Carteiras de Variância Mínima no Brasil*. Revista Brasileira de Finanças, 11(1):81–118, 2013. <http://www.spell.org.br/documentos/ver/10052/carteiras-de-variancia-minima-no-brasil/i/pt-br>.
- [29] SANTOS, A. e TESSARI, C.: *Técnicas Quantitativas de Otimização de Carteiras Aplicadas ao Mercado de Ações Brasileiro*. Revista Brasileira de Finanças, 10(3):369–393, 2012. <https://www.redalyc.org/pdf/3058/305824788004.pdf>.
- [30] Serasa, B.: *O que é B3 e como funciona a bolsa de valores brasileira*, 2022. <https://www.serasa.com.br/blog/o-que-e-b3-e-como-funciona-a-bolsa-de-valores-brasileira/>, acessado em 19/07/2022.
- [31] XP, E.: *O que é IPCA e como ele impacta sua vida?*, 2022. <https://conteudos.xpi.com.br/aprenda-a-investir/relatorios/o-que-e-ipca/>, acessado em 11/07/2022.
- [32] XP, R.: *10 indicadores financeiros e sua importância na bolsa de valores*, 2021. <https://conteudos.xpi.com.br/aprenda-a-investir/relatorios/indicadores-financeiros/>, acessado em 15/03/2022.