Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

João Victor Araújo Pinto

Caos linear para operadores entre espaços de Banach

Uberlândia - MG
2022

João Victor Araújo Pinto

Caos linear para operadores entre espaços de Banach

Monografia apresentada a Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

Uberlândia - MG
2022

João Victor Araújo Pinto

Caos linear para operadores entre espaços de Banach

Monografia apresentada a Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro (Orientador)

Profa. Dra. Marisa de Souza Costa

Prof. Dr. Valdair Bonfim

Agradecimentos

À Deus.

À minha mãe e meu pai, por sempre me aconselharem e me guiarem.

Aos meus irmãos.

Ao meu orientador de TCC Vinícius Vieira Fávaro por todos os ensinamentos.

Ao meu orientador de IC Valdair Bonfim por todos os ensinamentos.

Resumo

Neste trabalho estudaremos alguns tópicos sobre *caos linear*, que é um ramo da análise que estuda evoluções de sistemas dinâmicos lineares. Exploraremos principalmente as noções de hiperciclicidade, caos de Devaney e caos Li-Yorke no contexto de operadores lineares definidos entre espaços de Banach. O exemplo mais importante que estudaremos é o operador de Rolewicz definido em espaços de sequências absolutamente p-somáveis. Demonstraremos também um critério de hiperciclicidade que é utilizado para encontrar vários outros exemplos de operadores hipercíclicos. No último capítulo exploraremos as duas noções clássicas de caos de Devaney e caos Li-Yorke, no contexto mencionado.

Palavras-Chave: Espaços de Banach, hiperciclicidade, operador de Rolewicz, caos de Devaney, caos Li-Yorke.

Abstract

In this work we will study some topics about *linear chaos*, which is a branch of the analysis that study evolution of linear dynamical systems. We will explore, mainly, the notions of hypercyclicity, Devaney chaos and Li-Yorke chaos in the context of linear operators defined on Banach spaces. The most important example we will study is the Rolewicz operator defined on spaces of absolutely p-summable sequences. We will also prove a hyperciclicity criterion which is useful to find several examples of hypercyclic operators. In the last chapter we will explore the two classical notions of chaos, Devaney and Li-Yorke chaos, in the mentioned context.

Key-Words: Banach spaces, hypercyclicity, Rolewicz operator, Devaney chaos, Li-Yorke chaos.

Conteúdo

Introdução

A teoria de caos linear, em suma, pode ser vista como o ponto de encontro entre duas áreas clássicas da Matemática, a saber, Análise Funcional e Sistemas Dinâmicos. Um primeiro comentário clássico sobre tal ramo é a antítese causada pela frase "caos linear", visto que "caos"nos remete a desorganização e falta de regularidade, já a palavra "linear"nos dá a sensação de clareza e regularidade. De fato, esta sensação de que na linearidade não há caos, é verdadeira em dimensão finita. Ou seja, o caos linear é uma exclusividade da dimensão infinita. Neste trabalho, exploraremos o conceito de sistemas dinâmicos principalmente no caso linear, mais precisamente, um *sistema dinâmico linear* é um par (X, T), onde X é um espaço de Banach e T é um operador linear e contínuo em X. Um dos ingredientes importantes da teoria de caos é a noção de hiperciclicidade. Dizemos que um sistema dinâmico linear (X, T) é *hipercíclico*, se existe $a \in X$, tal que $\overline{Orb(T, a)} = X$, onde

$$Orb(T,a)=\{a, T(a), T^2(a), \ldots\}.$$

No Teorema 2.28 é demonstrado que hiperciclicidade só ocorre para operadores entre espaços de Banach de dimensão infinita, conforme já dito. Logo, os ambientes adequados para se estudar a teoria de caos linear são espaços normados de dimensão infinita, o que justifica a importância das ferramentas de Análise Funcional para o estudo do tema. As referências [1] e [6] fornecem em detalhes e de maneira bastante profunda todo o desenvolvimento da teoria até o ano de 2011.

Um conceito importante em sistemas dinâmicos é a *transitividade topológica*. Por meio do Teorema da Transitividade de Birkhoff será mostrado que, a nível de espaços de Banach separáveis, as noções de hiperciclicidade e transitividade topológica são equivalentes.

Buscaremos, neste trabalho, dar exemplos de operadores lineares entre espaços de Banach que satisfazem caracterizações de caos, a saber, o caos de Devaney e o caos Li-Yorke. O principal exemplo será o operador de Rolewicz, o qual foi construído em 1969 em [9]. Para $1 \leq p < \infty$ e α um escalar, o operador de Rolewicz $T = \alpha B : \ell_p \to \ell_p$ é dado por

$$T\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\right) = \alpha\left(x_2, x_3, \ldots\right),$$

onde ℓ_p denota o espaço de Banach de todas as sequências de escalares que são absolutamente p-somáveis.

Estudaremos também um critério de hiperciclicidade e, por meio dele, conseguiremos uma gama de exemplos de operadores lineares contínuos entre espaços de Banach que são hipercíclicos e que, *a posteriori*, irão satisfazer as caracterizações de caos de Devaney e caos Li-Yorke. Dentre eles, destacamos o operador de Rolewicz que estudaremos também em um contexto mais geral, isto é, nos espaços $\ell_p(X)$ das sequências p-somáveis com entradas em um espaço de Banach separável X.

Finalmente, discutiremos mais a fundo como explorar as noções de caos de Devaney e caos Li-Yorke no contexto linear. O estudo de caos Li-Yorke no contexto linear foi desenvolvido em [2] e [3].

Estrutura do Texto

Abaixo segue um breve resumo sobre o corpo do texto.

O texto conterá três capítulos. O primeiro capítulo receberá o nome de *Preliminares* e seu objetivo será expor definições e resultados de Análise Funcional, Espaços Métricos e Topologia Geral que serão utilizados ao longo do trabalho.

O segundo capítulo receberá o nome *Hiperciclicidade* e seu objetivo será trabalhar com as duas principais definições de todo o texto: Transitividade Topológica e Hiperciclicidade. Exploraremos estas definições sobre operadores lineares entre espaços de Banach. Tais conceitos serão fundamentais para as caracterizações de caos que trabalharemos no próximo capítulo.

O terceiro e último capítulo receberá o nome de *Caos Linear* e seu objetivo será trabalhar com duas caracterizações de caos sobre operadores lineares entre espaços de Banach: Caos de Devaney e Caos Li-Yorke.

1 Preliminares

Neste capítulo apresentaremos definições e resultados que serão utilizados nos capítulos posteriores.

1.1 Espaços Topológicos

Definição 1.1 Uma *topologia* sobre um conjunto não vazio X é uma coleção τ de subconjuntos de X que satisfazem as seguintes condições:
(i) $X, \emptyset \in \tau$;
(ii) Se $A_i \in \tau$ para todo $i \in I$, então $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$;
(iii) Se $A_i \in \tau$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.
Cada elemento de τ é chamado de *conjunto aberto*. O par (X, τ) é chamado de *espaço topológico*. Quando não houver perigo de confusão escreveremos simplesmente X para denotar um espaço topológico (X, τ). Dizemos que $F \subset X$ é *fechado* se $X - F \in \tau$.

Definição 1.2 Seja x um elemento do espaço topológico X. Dizemos que um conjunto $U \subset X$ é uma *vizinhança* de x se existe um aberto A de X tal que $x \in A \subseteq U$.
Dizemos que uma coleção B_x de vizinhanças de x é uma *base de vizinhanças de x* se para toda vizinhança U de x, existe $V \in B_x$ tal que $x \in V \subseteq U$.
Dizemos que B é uma *base para a topologia de X* se todo aberto de X pode ser escrito como uma união dos elementos de B.

Definição 1.3 Seja $f : X \to Y$ uma função entre espaços topológicos. Dizemos que *f é contínua no ponto $a \in X$* se para todo aberto V de Y contendo $f(a)$, existe uma aberto U de X contendo a tal que $f(U) \subseteq V$. Dizemos que f é *contínua* se f for contínua em todos os pontos de seu domínio.

Proposição 1.4 *As seguintes afirmações são equivalentes para uma função $f : X \to Y$ entre espaços topológicos:*
a) f é contínua;
b) $f^{-1}(A)$ é aberto em X, para todo aberto A em Y;
c) $f^{-1}(F)$ é fechado em X, para todo fechado F em Y.

Demonstração. Cf. [8, Proposição 8.3.,p.20] ■

Definição 1.5 Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$. Dizemos que f é:

i) *homeomorfismo* se f é contínua, bijetora e com inversa contínua.
ii)*aberta* se $f(A)$ é aberto em Y, para todo aberto $A \subset X$.
iii)*fechada* se $f(F)$ é fechado em Y, para todo fechado $F \subset X$.

Proposição 1.6 *Sejam (X, τ_X) um espaço topológico, Y um conjunto e $\pi : X \to X$ uma função sobrejetora. Então a coleção*

$$\tau_\pi := \{V \subseteq Y : \pi^{-1}(V) \in \tau_X\}$$

é uma topologia em Y, chamada de topologia quociente definida por π. Além disso, τ_π é a maior topologia em Y que torna π contínua.

Demonstração. Cf. [8, Proposição 11.3, p.29] ■

Proposição 1.7 *Sejam X e Y espaços topológicos e $\pi : X \to Y$ uma função contínua e sobrejetora. Se π é aberta ou fechada, então a topologia em Y coincide com a topologia quociente τ_π.*

Demonstração. Cf. [8, Proposição 11.5, p.29] ■

Se X é um espaço topológico, Y um conjunto qualquer e $\pi : X \to Y$ uma aplicação sobrejetora, então temos a seguinte relação de equivalência em X:

$$x, y \in X \quad x \sim y \Leftrightarrow \quad \pi(x) = \pi(y).$$

Denotando por $X/\sim$ o conjunto das classes de equivalência de elementos de X e por $\overline{x}$ a classe de equivalência de $x \in X$. Nestas condições, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.8 *Seja $\pi : X \to Y$ uma função sobrejetora e contínua e $\tilde{\pi} : X \to X/\sim$, dada por $\tilde{\pi}(x) = \overline{x}$. Então a função:*

$$\begin{array}{rcl} f : \left(X/\sim, \tau_{\tilde{\pi}}\right) & \to & (Y, \tau_\pi) \\ \overline{x} & \mapsto & \pi(x) \end{array}$$

está bem definida e é um homeomorfismo.

Demonstração. Cf. [8, Proposição 11.9, p.30] ■

Os principais exemplos de espaços topológicos que estudaremos neste trabalho econtram-se nas Seções 1.2, 1.3, 1.4 e nos Exemplos ???? e ????.

1.2 Espaços Métricos

Definição 1.9 Seja M um conjunto não vazio. Uma *métrica em M* é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:
(D1) $d(x, y) \geq 0$, para todos x e y em M, e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(D2) $d(x, y) = d(y, x)$, para todos x e y em M.
(D3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todos x, y e z em M.
O par (M, d) é chamado de *espaço métrico.* Quando não houver perigo de confusão escreveremos simplesmente M para denotar um espaço métrico (M, d).

Proposição 1.10 *Sejam $(M_1, d^1), \ldots, (M_n, d^n)$ espaços métricos. Para $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \prod_{i=1}^{n} M_i$ as funções*

$$d_1, d_2, d_\infty : \left(\prod_{i=1}^{n} M_i \times \prod_{i=1}^{n} M_i\right) \to \mathbb{R}$$

definidas por:

$$d_1(x, y) := \sum_{i=1}^{n} d^i(x_i, y_i),$$

$$d_2(x, y) := \left(\sum_{i=1}^{n} (d^i(x_i, y_i))^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$d_\infty(x, y) := \max\left\{d^i(x_i, y_i); i = 1, \ldots, n\right\},$$

são métricas em $\prod_{i=1}^{n} M_i$. Tais métricas são ditas métricas usuais *sobre o produto cartesiano.*

Demonstração. Cf. [7, Exemplo 8, p.7] ■

Definição 1.11 Seja (M, d) um espaço métrico, então todo subconjunto $N \subseteq M$ pode ser considerado um espaço métrico de maneira natural. Basta considerar a função d restrita a $N \times N$. Neste caso, dizemos que N é um *subespaço métrico* do espaço métrico M e a métrica de N é *induzida* de M.

Exemplo 1.12 Os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ dos números reais e dos números complexos respectivamente, com a métrica dada por $d(x, y) = |x - y|$, são espaços métricos. Utilizando a Proposição 1.10 $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são espaços métricos com qualquer uma das três métricas usuais.

Exemplo 1.13 Seja $B(X;\mathbb{R})$ o espaço das funções limitadas cujo domínio e contradomínio são X (um espaço métrico) e $\mathbb{R}$, respectivamente. A função

$$\begin{array}{rcl} d : (B(X;\mathbb{R}))^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \to & d(f,g) = \sup\limits_{x\in X}|f(x) - g(x)| \end{array}$$

faz de $B(X;\mathbb{R})$ um espaço métrico. Para nosso texto, estamos interessados em um subespaço de $B(X;\mathbb{R})$, o espaço das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ denotado por $C([0,1],\mathbb{R})$. Pela Definição 1.11 temos que $C([0,1],\mathbb{R})$ é uma espaço métrico com a métrica induzida de $B(X;\mathbb{R})$.

Definição 1.14 Seja (M,d) um espaço métrico $a \in M$ e $r > 0$.
a) A *bola aberta de centro a e raio r* é definida pelo conjunto

$$B(a,r) := \{x \in M : d(x,a) < r\}.$$

b) A *bola fechada de centro a e raio r* é definida pelo conjunto

$$B[a,r] := \{x \in M : d(x,a) \leq r\}.$$

c) A *esfera de centro a e raio r* é definida pelo conjunto

$$S(a,r) := \{x \in M : d(x,a) = r\}.$$

Definição 1.15 Sejam M um espaço métrico, $X \subseteq M$ e $a \in X$. Dizemos que a é um *ponto interior* de X se existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq X$.
O conjunto dos pontos interiores de X é denotado por $int(X)$. Dizemos que X é *aberto* se $X = int(X)$.
Dizemos que $F \subseteq M$ é *fechado* se $M - F$ é aberto em M.

Proposição 1.16 *Seja τ a coleção de todos os abertos de um espaço métrico M. Então:*
(i) $X, \emptyset \in \tau$;
(ii) Se $A_i \in \tau$ para todo $i \in I$, então $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \tau$;
(iii) Se $A_i \in \tau$ para todo $i = 1,\ldots,n$, então $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

Demonstração. Cf. [7, Proposição 2, p.65] ■

Observação 1.17 i) Utilizando as Leis de De Morgan da teoria de conjuntos é fácil ver que vale um resultado similar ao anterior para conjuntos fechados, mais precisamente: o espaço todo e o conjunto vazio são fechados; uniões finitas de fechados são fechadas; e intersecções arbitrárias de fechados são

fechadas.
ii) Segue também da proposição anterior que todo espaço métrico é um espaço topológico cujos abertos são exatamente os abertos da definição de métrica. Além disso, as bolas centradas em $x \in M$ formam uma base de vizinhanças de x.

Definição 1.18 Sejam M um espaço métrico, $X \subseteq M$ e $a \in M$. Dizemos que a é um *ponto aderente* a X se para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. O conjunto de todos os pontos aderentes a X é dito *fecho* de X e é denotado por $\overline{X}$.

Dizemos ainda que p é um ponto isolado do espaço métrico M se existe $\varepsilon > 0$ tal que $(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap M = \emptyset$.

Proposição 1.19 Sejam M um espaço métrico e $F \subseteq M$. Então F é fechado em M se, e somente se $F = \overline{F}$.

Demonstração. Cf. [7, Proposição 7, p.74] ■

Definição 1.20 Sejam M um espaço métrico e $D \subseteq M$. Dizemos que D é *denso* em M se $\overline{D} = M$.

Proposição 1.21 *Sejam M um espaço métrico, $D \subseteq M$ tal que D é denso em M e $a \in M$. Se existe $\varepsilon > 0$ tal que $(B(a, \varepsilon) - \{a\}) \cap D = \emptyset$, então a é um ponto isolado em M.*

Demonstração. Segue das definições 1.18 e 1.20. ■

Definição 1.22 Seja M um espaço métrico. Uma *sequência* em M é uma função $f : \mathbb{N} \to M$. Denotaremos a imagem $f(n)$ por $x_n \in M$. Assim utilizaremos as seguintes notações $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(x_n)_n$ para denotar uma sequência. Utilizaremos a seguinte notação $(x_n)_n \subset M$ para expressar que os termos de tal sequência são pontos de M.
Uma *subsequência* da sequência $(x_n)_n$ é uma restrição da função f acima a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\}$. Denotaremos uma subsequência da sequência $(x_n)_n$ por $(x_{n_k})_k$ ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots)$.

Definição 1.23 Dizemos que uma sequência $(x_n) \subset M$ *converge* para o ponto $a \in M$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$. Nesse caso, dizimos que a é o *limite* de (x_n) e denotamos por $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ ou $x_n \to a$.

Proposição 1.24 *Seja M um espaço métrico $(x_n) \subset M$ e $a, b \in M$. Então*
a) Toda subsequência de uma sequência convergente converge para o mesmo limite.
b) Se $x_n \to a$ e $x_n \to b$, então $a = b$.

Demonstração. Cf. [7, Proposição 2, Proposição 3, p.118] ■

Proposição 1.25 *Sejam X um subconjunto de um espaço métrico M e $a \in M$. Então:*
a) $a \in \overline{X}$ se, e somente se, existe $(x_n) \subset X$, tal que $x_n \to a$.
b) X é denso em M se, e somente se, todo ponto de M é limite de uma sequência de pontos em X.
c) X é fechado em M se, e somente se, X contém todos os limites de suas sequências convergentes em M.

Demonstração. Cf. [7, Proposição 10, Corolário 2, Corolário 3, p.126, p.127] ■

Definição 1.26 Sejam M e N espaços métricos, $a \in M$ e $f : M \to N$ uma função. Dizemos que f é *contínua* em a se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica que $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Dizemos que f é *contínua* se for contínua em todo ponto.

Proposição 1.27 *Sejam M, N espaços métricos, $a \in M$ e $f : M \to N$ uma função. Então:*
a) f é contínua em a se, e somente se para toda sequência $(x_n) \subset M$ tal que $x_n \to a$, têm-se $f(x_n) \to f(a)$.
b) As seguintes afirmações são equivalentes:
i) f é contínua.
ii) Para todo aberto $A \subseteq N$, têm -se $f^{-1}(A)$ aberto em M.
iii) Para todo fechado $F \subseteq N$, têm -se $f^{-1}(F)$ fechado em M.

Demonstração. Cf. [7, Proposição 9, Proposição 3, Proposição 9, p.125, p.68, p.76] ■

Proposição 1.28 *Se $f : M \to N$ é uma função contínua entre espaços métricos e $A \subseteq M$, então $f|_A : A \to N$ também é contína.*

Demonstração. Cf. [7, Corolário da Proposição 1, p.33] ■

Exemplo 1.29 Uma função $f : M \to N$ sobrejetora entre espaços métricos é dita uma *isometria*, se $d(x, y) = d(f(x), f(y))$, para todos $x, y \in M$. Note que toda isometria é um homeomorfismo. Se $d(x, y) \leq d(f(x), f(y))$, para todos $x, y \in M$, dizemos que f é uma *contração fraca*. Note que toda contração fraca é contínua.

Definição 1.30 Seja (M, d) um espaço métrico e $(x_n) \subset M$. Dizemos que (x_n) *é uma sequência de Cauchy*, ou simplesmente *é de Cauchy*, se para todo $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq n_0$ tem-se $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Dizemos que o espaço métrico M é *completo*, se toda sequência de Cauchy em M for convergente para um ponto de M.

Proposição 1.31 *a) Toda subsequência de uma sequência de Cauchy, é de Cauchy.*
b) Se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência convergente, então tal sequência é convergente.

Demonstração. Cf. [7, Proposição 3, p.162] ■

Exemplo 1.32 $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são exemplos de espaços métricos completos. A completude de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ se dá em qualquer uma das métricas d_1, d_2 e d_∞.

Definição 1.33 Seja M um espaço métrico.
a) Dizemos que M é um *espaço de Baire* se a intersecção de cada sequência de subconjuntos abertos e densos de M é ainda um subconjunto denso de M.
b) Diremos que $A \subseteq M$ é de *primeira categoria* em M se é possível escrever

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \text{ com } int(\overline{A_n}) = \emptyset, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso contrário, dizemos que A é de *segunda categoria.*

Proposição 1.34 *Cada espaço de Baire não vazio M é de segunda categoria em si mesmo.*

Demonstração. Suponha que M não é de segunda categoria, ou seja, M é de primeira categoria. Logo podemos escrever $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ com A_n fechado e $int(A_n) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim

$$\emptyset = M^{\complement} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^{\complement} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^{\complement},$$

$A_n^{\complement}$ é aberto e $\overline{A_n^{\complement}} = (int(A_n))^{\complement} = M$, ou seja, $A_n^{\complement}$ é denso em M o que é um absurdo, pois M é um espaço de Baire. ■

Teorema 1.35 *Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.*

Demonstração. Seja M um espaço métrico completo não-vazio (pois $M = \emptyset$ é trivial). Seja $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de abertos densos em M e provemos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ é denso em M. Para tal, basta mostrar que $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cap B(a,r) \neq \emptyset$ para todo $a \in M$ e $r > 0$. Fixe uma bola $B(a,r)$ em M. Como U_1 é denso em M, existe $x_1 \in M$ tal que $x_1 \in U_1 \cap B(a,r)$. Seja $\varepsilon_1 < 1$ tal que

$$B[x_1, \varepsilon_1] \subseteq U_j \cap B(a,r)$$

Agora para $j > 1$ temos que como U_j é denso em M, existe $x_j \in M$ tal que $x_j \in U_j \cap B(x_{j-1}, \varepsilon_{j-1})$. Seja $\varepsilon_j < \frac{1}{j}$ tal que

$$B[x_j, \varepsilon_j] \subseteq U_j \cap B(x_{j-1}, \varepsilon_{j-1})$$

Por recorrência, contruímos sequências $(x_n) \subset M$ e (ε_n) com $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$, satisfazendo

$$B[x_n, \varepsilon_n] \subseteq U_n \cap B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $B[x_n, \varepsilon_n] \subset B[x_m, \varepsilon_m]$ sempre que $n > m$, temos que $d(x_n, x_m) < \frac{1}{m}$ sempre que $n > m$. Portanto (x_n) é de Cauchy e como M é completo, existe $x \in M$ tal que $x_n \to x$. Note que

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B[x_n, \varepsilon_n] \subset \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cap B(a,r)$$

Portanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ é denso em M. ■

1.3 Espaços Normados

Definição 1.36 Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma *norma* em E é uma função $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in E$ o número real $\|x\|$, que satisfaz as seguintes propriedades:
(N1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$, e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, para todo $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in E$ (desigualdade triangular).
O par $(E, \|\cdot\|)$ é chamado de *espaço vetorial normado*, ou simplesmente, *espaço normado*. Dado um espaço normado $(E, \|\cdot\|)$, a função $d : E \times E \to \mathbb{R}$ dada por $d(x,y) = \|x - y\|$ é uma métrica em E. Portanto todo espaço normado é um espaço métrico e d é chamada de *métrica induzida da norma*. Se F é um subespaço vetorial de E, então $(F, \|\cdot\| \, |_F)$ também é um espaço normado com a *norma induzida de E*.

Exemplo 1.37 Dados $n \in \mathbb{N}$ e $p = 1$ ou 2, a função $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$, dada por

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ com } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

faz de $\mathbb{K}^n$ um espaço normado. A função $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$, dada por $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, também faz de $\mathbb{K}^n$ um espaço normado. Observe que d_1, d_2 e d_∞ são métricas induzidas de $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ respectivamente. Na verdade a primeira expressão define uma norma, qualquer que seja $p \geq 1$. Veremos isso, num contexto mais geral, adiante.

Exemplo 1.38 a) O espaço $B(X, \mathbb{R})$ se torna espaço normado com a função $\|\cdot\| : B(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.
b) O espaço $C([0,1], \mathbb{R})$ se torna espaço normado com a função $\|\cdot\| : C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$.

Proposição 1.39 *Sejam E e F espaços normados e $T : E \to F$ uma aplicação linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
a) T é contínua.
b) T é contínua na origem.
c) $\sup\{\|Tx\| : x \in E; \|x\| \leq 1\} < \infty$
d) Existe uma constante $c > 0$ tal que $\|Tx\| \leq c\|x\|$, para todo $x \in E$.

Demonstração. Cf. [5, Teorema 2.1.1., p.25] ■

Denotamos por $\mathfrak{L}(E; F)$ o espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas do espaço normado E no espaço normado F. Por meio da última proposição podemos enunciar o próximo resultado:

Proposição 1.40 *a) $(\mathfrak{L}(E; F), \|\cdot\|)$ é um espaço normado com a norma de $T \in \mathfrak{L}(E; F)$ dada por*

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in E; \|x\| \leq 1\}.$$

b) Sejam $A, B \in \mathfrak{L}(E; F)$. Então $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$.
c) Se E é um espaço normado de dimensão finita, $T_n, T \in \mathfrak{L}(E)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $T_n(x) \overset{n \to \infty}{\to} T(x)$ para todo $x \in E$, então $T^n \overset{n \to \infty}{\to} T$ em $\mathfrak{L}(E)$.

Demonstração. Para a letra a) confira em [5, Proposição 2.1.4, p.26]. A letra b) segue diretamente da definição em a). Para a letra c) confira em [4, Proposição 1.2.3, p.5] ■

Definição 1.41 Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $p \geq 1$. Definimos:
a) $\ell_p(X) = \left\{ x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^p < \infty \right\}$.
b) $\ell_\infty(X) = \left\{ x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \sup\limits_{i} \|\xi_i\| < \infty \right\}$.
c) $c_0(X) = \{x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \xi_n \to 0_X\}$, onde 0_X é o vetor nulo de X.
d) $c_{00}(X) = \{x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \exists n_0 \in \mathbb{N}, \xi_i = 0_X, \forall i \geq n_0\}$.

É fácil verificar, com a exceção de $\ell_p(X)$, que os conjuntos definidos acima são espaços vetoriais. Além disso $c_0(X)$ e $c_{00}(X)$ são subespaços de $\ell_\infty(X)$. Nosso próximo passo será apresentar funções que tornam tais espaços vetoriais em espaços normados. Tendo em vista os próximos capítulos, daremos um foco maior para os espaços $\ell_p(X)$. Quando $X = \mathbb{K}$, denotaremos $\ell_p(\mathbb{K})$ por ℓ_p.

Proposição 1.42 *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Então $(\ell_\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço normado, onde $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ é dada por $\|x\|_\infty = \sup\limits_{j} \|x_j\|$. Portanto $c_0(X)$ e $c_{00}(X)$ são espaços normados com a norma induzida de $\ell_\infty(X)$.*

Demonstração. Cf. [5, p.12] ∎

O próximo resultado, conhecido como desigualdade de Minkowski, garante que $\ell_p(X)$ é espaço vetorial, para todo $p \geq 1$.

Lema 1.43 *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Sejam $(x_j)_j, (y_j)_j \in \ell_p(X)$, com $1 \leq p < \infty$, então vale a seguinte desigualdade:*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_j + y_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|y_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Demonstração. Segue de [5, Proposição 1.4.2, p.12] ∎

Proposição 1.44 *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $1 \leq p < \infty$. Então $(\ell_p(X), \|\cdot\|_p)$ é um espaço normado, onde $\|\cdot\|_p : \ell_p(X) \to \mathbb{R}$ é dada por:*

$$\|(x_j)_j\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Demonstração. Sejam $(x_j)_j, (y_j)_j \in \ell_p(X)$.

(N1) $\|(x_j)_j\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \|x_1\| \geq 0$, e

$\|(x_j)_j\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_j\|^p = 0 \Leftrightarrow \|x_j\| = 0, \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$ $(x_j)_j = 0$.

(N2) $\|\lambda(x_j)_j\|_p = \|(\lambda x_j)_j\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|\lambda x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$ $|\lambda| \, \|(x_j)_j\|_p$.

(N3) $\|(x_j)_j + (y_j)_j\|_p = \|(x_j + y_j)_j\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_j + y_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} +$ $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|y_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_j)_j\|_p + \|(y_j)_j\|_p$. ■

O operador a seguir terá um papel fundamental em nosso trabalho.

Proposição 1.45 *Seja X um espaço normado e $a \in \mathbb{K}$. Então o operador*

$$\begin{array}{rcl} aB : \ell_p(X) & \to & \ell_p(X) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & a(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

é linear e contínuo.

Demonstração. Dados $(x_n)_n, (y_n)_n \in \ell_p(X)$ e $b \in \mathbb{K}$, a linearidade segue de

$$aB((x_n)_n + b(y_n)_n) = aB((x_n + by_n)_n) = a(x_{n+1} + by_{n+1})_n =$$

$$a(x_{n+1})_n + a(by_{n+1})_n = aB((x_n)_n) + baB((y_n)_n)$$

Para a continuidade, demonstraremos que $\|aB\| < \infty$. Vejamos que $\|B\| = 1$. De fato, note que para todo $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell_p(X)$ com $\|(x_1, x_2, x_3, \ldots)\|_p \leq 1$ temos

$$\|B(x_1, x_2, x_3, \ldots)\|_p = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|(x_1, x_2, x_3, \ldots)\|_p \leq 1$$

Agora, para $x \in X, x \neq 0$, segue que

$$\left\| B\left(0, \frac{x}{\|x\|}, 0, 0, \ldots\right) \right\|_p = 1.$$

Portanto $\|B\| = 1$ e daí $\|aB\| = |a|$, o que conclui a prova. ■
Seja $aR : \ell_p(X) \to \ell_p(X)$ o seguinte operador:

$$R(x_1, x_2, \ldots) = a(0, x_1, x_2, \ldots)$$

De forma análoga à última proposição prova-se que tal operador é linear, contínuo e $\|aR\| = |a|$.

Definição 1.46 Seja $T : E \to F$ uma transformação linear bijetora entre espaços normados. Dizemos que T é um *isomorfismo* se T for um homeomorfismo.

1.4 Espaços de Banach

Definição 1.47 Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Dizemos que E é um *espaço de Banach* se E for completo com a métrica $d(x, y) = \|x - y\|$, proveniente da norma.

Exemplo 1.48 $\mathbb{K}^n$ munido com qualquer uma das normas dadas no Exemplo 1.37 é um espaço de Banach.

Proposição 1.49 *O espaço $B(X, \mathbb{R})$, munido da norma apresentada no Exemplo 1.38, é um espaço de Banach.*

Demonstração. Cf. [5, Exemplo 1.1.2, p.2] ■

Proposição 1.50 *Seja E um espaço de Banach e F um subespaço de E. Se F é fechado em E, então F é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(x_n)_n \subset F$ uma sequência de Cauchy. Como E é um espaço de Banach e $(x_n)_n \subset F \subset E$, existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$. Como F é fechado $x \in F$. ■

Exemplo 1.51 $C(X, \mathbb{R})$ é um espaço de Banach. De fato, pela última proposição basta mostrarmos que $C(X, \mathbb{R})$ é fechado em $B(X, \mathbb{R})$. Para tal, seja $(f_n)_n \subset C(X, \mathbb{R})$ tal que $f_n \to f \in B(X, \mathbb{R})$. Devemos mostrar que f é contínua, e para isso mostraremos que f é contínua em todos os pontos de X. Seja $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como $f_n \to f$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall z \in X \quad \text{e} \quad n \geq n_0 \quad \text{tem-se} \quad |f_n(z) - f(z)| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Em particular como f_{n_0} é contínua em x, então existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall y \in B(x, \delta) \quad \text{tem-se} \quad |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Então para todo $y \in B(x, \delta)$ temos

$$|f(x) - f(y)| = |(f(x) - f_{n_0}(x)) + (f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)) + (f_{n_0}(y) - f(y))|$$

$$\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| < \varepsilon$$

Portanto f é contínua em x.

Exemplo 1.52 Seja X um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Então $(\ell_p(X). \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach.
De fato, seja $(x_n)_n \subset \ell_p(X)$ uma sequência de Cauchy. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $x_n = (\alpha_j^n)_j \subset X$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m \geq n_0$ tem-se

$$(1) \quad \|x_n - x_m\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\alpha_j^n - \alpha_j^m\right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Em particular

$$\left\|\alpha_j^n - \alpha_j^m\right\| \leq \|x_n - x_m\|_p < \varepsilon$$

para todos $n, m \geq n_0$ e $j \in \mathbb{N}$. Portanto $(\alpha_j^n)_n$ é uma sequência de Cauchy em X para cada $j \in \mathbb{N}$. Como X é completo existe $\alpha_j = \lim\limits_n \alpha_j^n$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Seja $x = (\alpha_j)_j$ e provemos que $x \in \ell_p(X)$ e que $x_n \to x$. De fato, segue de (1) que

$$(2) \quad \left(\sum_{j=1}^{k} \left\|\alpha_j^n - \alpha_j^m\right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

para todos $n, m \geq n_0$ e $j \in \mathbb{N}$. Fazendo $m \to \infty$ segue que

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \left\|\alpha_j^n - \alpha_j\right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$ e $k \in \mathbb{N}$. Logo

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\alpha_j^n - \alpha_j\right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Assim $x_n - x \in \ell_p(X)$ e $\|x_n - x\|_p \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Segue que $x = -(x_n - x) + x_n \in \ell_p(X)$ e que $x_n \to x$.

Exemplo 1.53 Não é difícil verificar que $(\ell_\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach e que $c_0(X)$ é um subespaço fechado de $\ell_\infty(X)$, portanto é também um espaço de Banach.

Definição 1.54 Um espaço métrico é dito *separável* se existir um subconjunto enumerável $D \subseteq X$, tal que $\overline{D} = X$.

Exemplo 1.55 É fácil ver que $\mathbb{K}^n$ é um espaço separável. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, basta ver que $\mathbb{Q}^n$ é enumerável e que $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$. Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, basta trabalhar com $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^n$.

Proposição 1.56 *Seja $P_{\mathbb{Q}}([a,b],\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios definidos no intervalo $[a,b]$ que possuem coeficientes racionais. Então $\overline{P_{\mathbb{Q}}([a,b],\mathbb{R})} = C([a,b],\mathbb{R})$.*

Demonstração. Cf. [5, Teorema 1.6.6, p.17] $\blacksquare$

Exemplo 1.57 $C([a,b],\mathbb{R})$ é separável. Primeiro observe que $P_{\mathbb{Q}}([a,b],\mathbb{R})$ é enumerável por conta da bijeção abaixo:

$$\begin{array}{rcl} f : P_{\mathbb{Q}}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{(q_i)_{i=0}^n : q_i \in \mathbb{Q}\} \\ \\ \sum\limits_{i=0}^{n} q_i x^i & \mapsto & (q_i)_{i=0}^n \end{array}$$

tendo em vista que o contradomínio é enumerável por ser uma união enumerável de conjuntos enumeráveis. Pela última proposição concluímos que $C([a,b],\mathbb{R})$ é separável.

Proposição 1.58 *Se $(X, ||\cdot||)$ é um espaço separável, então $\ell_p(X)$ é um espaço separável, para $1 \leq p < \infty$,.*

Demonstração. Como X é separável, existe um conjunto enumerável $D_1 \subseteq X$, tal que $\overline{D_1} = X$. Defina

$$D = \{(\alpha_j)_j \in c_{00}(X) : \alpha_i \in D_1\}$$

Tal conjunto é enumerável, visto que ele está em bijeção com o conjunto $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D^n$, que é enumerável por ser uma união enumerável de conjuntos enumeráveis. Provaremos que D é denso em $\ell_p(X)$. Sejam $(\alpha_j)_j \in \ell_p(X)$ e $\varepsilon > 0$ dados. Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\alpha_j\|^p < \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|\alpha_j\|^p < (\tfrac{\varepsilon}{2})^p.$$

Seja $y = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_0}, 0, 0, \ldots)$. Como D_1 é denso em X, para cada $j = 1, \ldots, n_0$, existe $\beta_j \in D_1$ arbitrariamente próximo de α_j. Ou seja, existe

$$z = (\beta_1, \ldots, \beta_{n_0}, 0, 0, \ldots) \in D$$

tal que

$$\sum_{n=1}^{n_0} \|\alpha_j - \beta_j\|^p < (\tfrac{\varepsilon}{2})^p.$$

Daí

$$\|x - z\|_p \leq \|x - y\|_p + \|y - z\|_p =$$

$$\left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|\alpha_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{n_0} \|\alpha_j - \beta_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Portanto D é denso em $\ell_p(X)$. ■

1.5 Limite Superior e Limite Inferior

Os conceitos abordados nessa seção serão úteis para o Capítulo 3. Aqui estaremos utilizando as definições de ínfimo e supremo trabalhadas em um curso básico de Análise Real. Dada uma sequência $(a_n)_n$, denotaremos o conjunto de seus termos por $A = \{a_n\}_n$ e o supremo do conjunto A por $\sup_n \{a_n\}$. Analogamente denotaremos o ínfimo de A por $\inf_n \{a_n\}$.

Definição 1.59 Seja $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ e $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o conjunto dos termos dessa sequência.
a) Para cada $N \in \mathbb{N}$, defina $A_N = \sup_n \{a_n\}_{n\geq N}$. Definimos o *limite superior* de $(a_n)_n$ como sendo o limite da sequência $(A_N)_N$, e o denotaremos por $\limsup_n a_n$.
b) Para cada $N \in \mathbb{N}$, defina $B_N = \inf_n \{a_n\}_{n\geq N}$. Definimos o *limite inferior* de $(a_n)_n$ como sendo o limite da sequência $(B_N)_N$, e o denotaremos por $\liminf_n a_n$.

A seguinte proposição diz respeito à algumas propriedades aritméticas envolvendo limite superior e limite inferior. A demonstração da mesma é simples e decorre da definição acima.

Proposição 1.60 *Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sequências de números reais e $\lambda > 0$. Então:*
a) $\liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n$.
b) $\liminf_n \lambda a_n = \lambda \liminf_n a_n$ *e* $\limsup_n \lambda a_n = \lambda \limsup_n a_n$.

c) $\liminf_n - a_n = -\limsup_n a_n$.
d) $\limsup_n (a_n + b_n) \leq \limsup_n a_n + \limsup_n b_n$.
e) $\liminf_n (a_n + b_n) \geq \liminf_n a_n + \liminf_n b_n$.

2 Hiperciclicidade e Transitividade Topológica

Esse capítulo foi baseado no Capítulo 2 de [10], na Seção 2.1 de [4], nos dois primeiros capítulos de [6] e no Capítulo 1 de [1]. Trabalharemos inicialmente com o conceito de transitividade topológica e posteriormente com o conceito de hiperciclicidade. Veremos no Teorema da Transitividade de Birkhoff que tais conceitos são equivalentes quando se trabalha com espaços de Banach separáveis. Veremos também o clássico exemplo do operador de Rolewicz e, por meio de um critério de hiperciclicidade, faremos uma generalização do mesmo.

2.1 Transitividade Topológica

Definição 2.1 Um par (X, T) onde X é um espaço métrico e $T : X \to X$ é uma aplicação contínua, recebe o nome de *sistema dinâmico*. Observamos que tal definição pode ser estendida para espaços topológicos.

Definição 2.2 Dados (X, T) um sistema dinâmico e $x \in X$, definimos a *órbita de x em relação a T* por

$$Orb(T,x)=\{T^n(x); n \in \mathbb{N}\}$$

Definição 2.3 Seja (X, T) um sistema dinâmico. Dizemos que $x \in X$ é um *ponto periódico* de T, se existe algum $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$ tal que $T^n(x) = x$. O menor n que sastisfaz tal propriedade é dito *período* de x.

Observe que, no caso de x ser ponto periódico, $Orb(T, x)$ tem exatamente n elementos. De fato, para todo $p \in \mathbb{N}$, pelo teorema da divisão, podemos escrever $p = nq + r$ com $0 \leq r < n$. Portanto $T^p(x) = T^r(T^{nq}(x)) = T^r(x)$, onde $0 \leq r < n$.

Definição 2.4 Um sistema dinâmico (X, T) é dito *topologicamente transitivo* se, para quaisquer $A_1, A_2 \subseteq X$, abertos e não vazios, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(A_1) \cap A_2 \neq \emptyset$.

Durante o texto trabalharemos somente com abertos **diferentes do conjunto vazio**, a menos que seja dito o contrário. A seguir, demonstraremos uma proposição que nos auxiliará a provar que os sistemas dinâmicos mostrados nos próximos exemplos são topologicamente transitivos.

Proposição 2.5 *Seja (X, T) um sistema dinâmico, onde X não possui pontos isolados. Então:*

i) *Se $x \in X$ é tal que $\overline{Orb(T,x)} = X$, então $\overline{Orb(T,T^n(x))} = X$ para todo $n \geq 1$.*
ii) *Se existe $x \in X$ tal que $\overline{Orb(T,x)} = X$, então (X,T) é topologicamente transitivo.*

Demonstração. i) Suponha, por absurdo, que existam $a \in X$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$B(a,\varepsilon) \cap Orb(T,T^n(x)) = \emptyset \qquad (1).$$

Logo

$$B(a,\varepsilon) \cap \left\{T^j(x); j = 1, \dots, n-1\right\} \neq \emptyset,$$

pois caso contrário $Orb(T,x)$ não seria densa em X.

Observe que se $i \neq j$, então $T^i(x) \neq T^j(x)$, pois caso contrário x teria órbita periódica, logo existiria $k > n-1$ tal que $T^k(x) = T^j(x)$. Portanto teríamos

$$B(a,\varepsilon) \cap Orb(T,T^n(x)) \neq \emptyset. \qquad (2)$$

Seja $B = \{T^{m_1}(x), \dots, T^{m_p}(x)\} \subset B(a,\varepsilon)$ com $m_i, p \leq n-1$, para todo $i = 1, \dots, p$. Tome

$$\delta = \min\left\{d(T^{m_1}(x),a), \dots, d(T^{m_p}(x),a)\right\}.$$

Se $\delta > 0$, então $B(a,\delta) \cap Orb(T,x) = \emptyset$, logo $Orb(T,x)$ não é densa (Absurdo). Se $\delta = 0$, então existe um $T^{m_j(x)} \in B$ tal que $d(T^{m_j}(x),a) = 0$, ou seja $T^{m_j}(x) = a$. Por (2),

$$\delta_1 := min\left\{d(T^{m_i}(x),T^{m_j}(x)); i = 1, \dots, n-1; i \neq j\right\} > 0.$$

Portanto, pela Proposição 1.21, $T^{m_j}(x)$ é ponto isolado em X, pois

$$(B(T^{m_j}(x),\delta_1) - \{T^{m_j}(x)\}) \cap Orb(T,x) = \emptyset$$

e $Orb(T,x)$ é denso em X (Absurdo).

ii) Sejam $A_1, A_2 \subseteq X$ abertos. Como $\overline{Orb(T,x)} = X$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) \in A_1$. Pelo item i), $\overline{Orb(T,T^n(x))} = X$. Portanto existe $m \in \mathbb{N}$, com $m > n-1$, tal que $T^m(T^n(x)) \in A_2$. Chamando $T^n(x) = a$, temos que $a \in A_1$ e $T^m(a) \in A_2$. Portanto $T^m(A_1) \cap A_2 \neq \emptyset$. ■

Exemplo 2.6 Seja $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Dado $\alpha \in [0, 2\pi)$ definimos a aplicação *rotação pelo ângulo* α como sendo

$$R_\alpha : S^1 \to S^1,\ R_\alpha(z) = e^{i\alpha} z$$

Primeiro observe que tal aplicação está bem definida. De fato, dado $z \in S^1$ temos que $|R_\alpha(z)| = |e^{i\alpha}|\,|z| = 1$, portanto $R_\alpha(z) \in S^1$.
Utilizando a métrica induzida pela métrica usual em $\mathbb{C}$ note que

$$\left|e^{i\alpha} z_1 - e^{i\alpha} z_2\right| = \left|e^{i\alpha}\right| |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|\,, \forall z_1, z_2 \in S^1.$$

Portanto R_α é uma isometria, logo contínua. Além disso, prova-se de forma análoga que R_α^n é isometria, para todo n natural. Logo (S^1, R_α) é um sistema dinâmico.
Note que $R_\alpha^n(z) = e^{in\alpha} z$. De fato, para $n = 1$ a igualdade é trivial. Agora, supondo que a igualdade seja satisfeita para algum $j \geq 1$, temos $R_\alpha^j(z) = e^{ij\alpha} z$. Aplicando R_α em ambos os lados obtemos

$$R_\alpha(R_\alpha^j(z)) = R_\alpha(e^{ij\alpha} z) \Rightarrow (R_\alpha^{j+1}(z)) = (e^{i\alpha} e^{ij\alpha} z) = e^{i(j+1)\alpha} z\ .$$

Portanto, por indução, tal igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.7 *Se $\alpha = 2.\pi.\frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$ são primos entre si, então todo $z \in S^1$ tem órbita periódica em relação a aplicação R_α.*

Demonstração. Dado $z \in S^1$, para provar que sua órbita é periódica, basta mostrar que existe algum $n \geq 1$ tal que $R_\alpha^n(z) = z$. Tomando $n = q$ obtemos $R_\alpha^q(z) = e^{qi2.\pi.\frac{p}{q}} z = e^{i2.\pi.p} z = z$. ■

Quando α é como acima, segue do *Teorema da Transitividade de Birkhof* (que será provada mais adiante) que (S^1, R_α) não é topologicamente transitivo.

Para a próxima proposição precisaremos do lema abaixo que, além de ser bem intuitivo, pode ser facilmente demonstrado.

Lema 2.8 *Dados $a, b \in S^1$, o tamanho do arco menor compreendido entre a e b, denotado por $\widehat{ab}$, é maior que $d(a, b)$, onde d é a metrica induzida da métrica usual em $\mathbb{C}$.*

Proposição 2.9 *Sejam a um número irracional e $\alpha = 2\pi a$. Então $\overline{Orb(R_\alpha, z)} = S^1$, para todo $z \in S^1$.*

Demonstração. Observe que, para qualquer $z \in S^1$, se $R_\alpha^m(z) = R_\alpha^n(z)$ então $m = n$. De fato,
$R_\alpha^m(z) = R_\alpha^n(z) \Rightarrow e^{i2\pi ma} z = e^{i2\pi na} z \overset{z \neq 0}{\Rightarrow} e^{i2\pi(m-n)a} = 1 \Rightarrow \cos(2\pi(m-n)a) + i(2\pi(m-n)a) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(2\pi(m-n)a) = 0 \Rightarrow (m-n)a = k \in \mathbb{Z} \overset{a \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}}{\Rightarrow} m = n.$

Dados $w \in S^1$ e $\varepsilon > 0$, vamos encontrar $n \in \mathbb{N}$, tal que $d(R_a^n(z), w) < \varepsilon$. Para tal, tome N como sendo o menor natural que satisfaz $\frac{2\pi}{N} < \varepsilon$. Considere os $N+1$ pontos de S^1 dados por $R_\alpha^i(z)$, onde $i = 0, \ldots, N$. Pelo último parágrafo, sabemos que são todos distintos. Particionando S^1 em N arcos de mesmo tamanho, note que cada arco terá tamanho menor que ε. Portanto, pelo *Princípio da Casa dos Pombos*, pelo menos 2 dos $N+1$ pontos estarão em um mesmo arco. Logo existem $0 \leq m < n \leq N+1$, tais que $d(R_\alpha^m(z), R_\alpha^n(z)) < \varepsilon$.

Como R_α^m é isometria, então $d(z, R_\alpha^{n-m}(z)) < \varepsilon$. Por R_α^{n-m} também ser isometria, para todo $j \in \mathbb{N}$, tem-se $d(R_\alpha^{(j-1)(n-m)}(z), R_\alpha^{j(n-m)}(z)) < \varepsilon$. Como w está no arco $\widehat{R_\alpha^{(j_0-1)(n-m)}(z)R_\alpha^{j_0(n-m)}}(z)$, para algum $j_0 \in \mathbb{N}$, cujo tamanho é menor que ε, segue do lema acima que $d(w, R_\alpha^{(j_0-1)(n-m)}(z)) < \varepsilon$. ■

Quando α é como acima, segue do item ii) da Proposição 2.5 que (S^1, R_α) é topologicamente transitivo.

Exemplo 2.10 Seja $\Sigma_2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}; x_n \in \{0,1\}\}$, isto é, o conjunto das sequências cujas coordenadas são 0 ou 1. Dados $x, y \in \Sigma_2$ definimos a seguinte métrica em Σ_2 :

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

Considere a aplicação $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ dada por $\sigma(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$. Observe que σ é continua, visto que é uma contração fraca. De fato,

$$d(\sigma(x), \sigma(y)) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} = d(x,y).$$

Portanto (Σ_2, σ) é um sistema dinâmico. A seguir, provaremos que tal sistema dinâmico é topologicamente transitivo. Mostraremos que há uma sequência em Σ_2, cuja órbita é densa. Para nos auxiliar, provaremos o seguinte lema:

Lema 2.11 Sejam $x, y \in \Sigma_2$, então $x_j = y_j$ para $j = 1, \ldots, m$ se, e somente se, $d(x,y) \leq \frac{1}{2^m}$.

Demonstração.
$\Rightarrow$) $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m}$.

$\Leftarrow$) Suponha, por absurdo, que para algum $j \in \{1, \ldots, m\}$, $x_j \neq y_j$. Se $j = m$, então $x_m \neq y_m$ e

$$\frac{1}{2^m} = \frac{|x_m - y_m|}{2^m} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \leq \frac{1}{2^m},$$

ou seja, $x_m = y_m$, contradição. Logo $j \in \{1, \ldots, m-1\}$. Mas, neste caso,

$$\frac{1}{2^j} = \frac{|x_j - y_j|}{2^j} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \leq \frac{1}{2^m},$$

o que também é um absurdo, visto que a função $f(x) = \frac{1}{2^x}$ é decrescente. ■

Proposição 2.12 (Σ_2, σ) *é topologicamente transitivo.*

Demonstração. Seja $z = (z_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Sigma_2$, tal que, z contém todas as sequências finitas cujas coordenadas são 0 ou 1, ou seja, dada uma sequência finita $(y_1, \ldots, y_m)$ com $y_j \in \{0, 1\}$ para $j = 1, \ldots, m$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $z_p = y_1, z_{p+1} = y_2, \ldots, z_{p+m-1} = y_m$. Provaremos que $\overline{Orb(\sigma, z)} = \Sigma_2$.

Seja $w = (w_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Sigma_2$ e $\varepsilon > 0$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Pela definição de z, existe $p \in \mathbb{N}$, tal que

$$z_p = w_1, z_{p+1} = w_2, \ldots, z_{p+n_0-1} = w_{n_0}.$$

Portanto $\sigma^{p-1}(z) = (w_1, \ldots, w_{n_0}, \ldots)$, ou seja, $\sigma^{p-1}(z)$ e w possuem as n_0 primeiras coordenadas iguais. Pelo lema anterior,

$$d(\sigma^{p-1}(z), w) < \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

Portanto, $\overline{Orb(\sigma, z)} = \Sigma_2$ e segue da Proposição 2.5 item ii) que (Σ_2, σ) é topologicamente transitivo. ■

Proposição 2.13 *Seja (X, T) um sistema dinâmico tal que T é inversível e possui inversa contínua. Então (X, T) é topologicamente transitivo se, e somente se (X, T^{-1}) é topologicamente transitivo.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Devemos mostrar que dados $A_1, A_2 \subset X$, abertos, existe um $m \in \mathbb{N}$, tal que $T^{-m}(A_1) \cap A_2 \neq \emptyset$. Como (X, T) é topologicamente transitivo, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $T^m(A_2) \cap A_1 \neq \emptyset$. Logo existe $x \in A_2$ tal que $T^m(x) \in A_1$. Assim, $x \in T^{-m}(A_1) = \{y; T^m(y) \in A_1\}$ e $x \in A_2$. Portanto $T^{-m}(A_1) \cap A_2 \neq \emptyset$.
$\Leftarrow$) Análoga à ida. ■

Proposição 2.14 *Seja (X, T) um sistema dinâmico tal que T é inversível e possui inversa contínua. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *(X, T) é topologicamente transitivo.*

ii) *Para todo aberto $A \subset X$ tem-se $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} T^n(A)} = X$.*

iii) *Para todo aberto $A \subset X$ tem-se $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)} = X$.*

Demonstração. **i)** $\Rightarrow$ **ii)**: Seja $A \subset X$ um aberto. Devemos mostrar que dado um elemento $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} T^n(A)$ tal que $a \in B(x, \varepsilon)$. Ora, como (X, T) é topologicamente transitivo e A e $B(x, \varepsilon)$ são abertos, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(A) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$.

ii) $\Rightarrow$ **iii)**: Seja $A \subset X$ um aberto. Devemos mostrar que dado um elemento $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)$, tal que $a \in B(x, \varepsilon)$. Como $B(x, \varepsilon)$ é aberto, por hipótese temos $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} T^n(B(x, \varepsilon))} = X$. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(B(x, \varepsilon)) \cap A \neq \emptyset$. Portanto, existe $y \in B(x, \varepsilon)$ tal que $T^m(y) \in A$, isto é, $y \in T^{-m}(A) = \{z \in X; T^m(z) \in A\}$. Portanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$.

iii) $\Rightarrow$ **i)**: Dados A_1, A_2, abertos quaisquer de X, devemos mostrar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(A_1) \cap A_2 \neq \emptyset$. Por hipótese temos que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A_2)} = X$, logo existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-m}(A_2) \cap A_1 \neq \emptyset$. Portanto, há um $x \in A_1$ tal que $T^m(x) \in A_2$. Assim, $T^m(x) \in T^m(A_1)$, pois $x \in A_1$ e $T^m(x) \in A_2$. Então $T^m(A_1) \cap A_2 \neq \emptyset$. $\blacksquare$

Na próxima definição, daremos uma noção de "igualdade"entre dois sistemas dinâmicos.

Definição 2.15 Sejam (X, T) e (Y, F) sistemas dinâmicos.
i) Dizemos que (X, T) é *quase conjugado* à (Y, F), se existe uma função contínua $\phi : Y \to X$, com imagem densa, tal que $T \circ \phi = \phi \circ F$, ou seja, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{F} & Y \\ {\scriptstyle \phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

ii) Dizemos que (Y, F) e (X, T) são *conjugados*, se ϕ é um homeomorfismo.

Observação 2.16 É claro que se (Y, F) e (X, T) são conjugados, então (X, T) é quase conjungado a (Y, F) e vice-versa.

Proposição 2.17 *Se (X, T) é quase conjugado à (Y, F) e (Y, F) é topologicamente transitivo, então (X, T) é topologicamente transitivo. Ou seja, a transitividade topológica é preservada por quase conjugação.*

Demonstração. Seja $\phi : Y \to X$ contínua e com imagem densa, tal que $T \circ \phi = \phi \circ F$. Observe que $T^n \circ \phi = \phi \circ F^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De fato, vale para $n = 1$ por hipótese. Suponha que tal propriedade vale para algum $j \in \mathbb{N}$, ou seja, $T^j \circ \phi = \phi \circ F^j$. Portanto,

$$T \circ (T^j \circ \phi) = T \circ (\phi \circ F^j) \Rightarrow (T^{j+1} \circ \phi) = (T \circ \phi) \circ F^j \Rightarrow$$
$$(T^{j+1} \circ \phi) = (\phi \circ F) \circ F^j \Rightarrow F^{j+1} \circ \phi = \phi \circ F^{j+1},$$

ou seja, vale para $j + 1$. Logo por indução vale para todo $n \in \mathbb{N}$.
Dados $A_1, A_2 \subset X$ abertos, queremos mostrar que existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $T^m(A_1) \cap A_2 \neq \emptyset$. Pela continuidade de ϕ, temos que $\phi^{-1}(A_1), \phi^{-1}(A_2)$ são abertos em Y e não vazios pela densidade de ϕ.

Como (Y, F) é topologicamente transitivo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$F^m(\phi^{-1}(A_1)) \cap \phi^{-1}(A_2) \neq \emptyset.$$

Portanto, existe $y \in \phi^{-1}(A)$, tal que $\phi(y) \in A_1$ e $F^m(y) \in \phi^{-1}(A_2)$, ou seja, $\phi(F^m(y)) \in A_2$.

Como $\phi(y) \in A_1$, então $T^m(\phi(y)) \in T^m(A_1)$. Por outro lado, como $\phi(F^m(y)) \in A_2$ e

$$\phi(F^m(y)) = (\phi \circ F^m)(y) = (T^m \circ \phi)(y) = T^m(\phi(y)),$$

então $T^m(\phi(y)) \in A_2$. Logo $T^m(A_1) \cap A_2 \neq \emptyset$. ■

Corolário 2.18 Se (Y, F) e (X, T) são conjugados, então (Y, F) é topologicamente transitivo se, e somente se (X, T) é topologicamente transitivo.

Demonstração. Segue diretamente da Observação 2.16 juntamente com a Proposição 2.17. ■

Exemplo 2.19 Vamos definir a seguinte relação em $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = k$$

Tal relação é de equivalência, de fato:
i) $x \sim x$, pois $x - x = 0$.
ii) Se $x \sim y$, então existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $x - y = k$. Logo $y \sim x$, visto que $y - x = (-k)$.
iii) Se $x \sim y$ e $y \sim z$, então existem $k, l \in \mathbb{Z}$, tais que $x - y = k$ e $y - z = l$. Portanto $x \sim z$, visto que $x - z = (k + l)$.

Denotamos o conjunto quociente dessa relação de equivalência por $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Provaremos a seguir que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, com a topologia quociente, é homeomorfo à S^1.

Proposição 2.20 *$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \tau_{\tilde{\pi}})$ é homeomorfo à S^1.*

Demonstração. Para tal demonstração, utilizaremos as Proposições 1.7 e 1.8. Considere a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow & S^1 \\ t & \mapsto & e^{2\pi i t} \end{array}$$

Primeiro, observe que tal aplicação é contínua e é claramente sobrejetora. Além disso, f é aberta, de fato, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, $f(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ será um arco de tamanho menor que π sem suas extremidades. Portanto, $f(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ é aberto, visto que é a interseção de algum semiplano aberto com S^1. Portanto, dado U um aberto da reta e $x \in U$, existe $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in U$. Logo

$$f(x) \in \underbrace{f(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}_{Aberto} \subseteq f(U)$$

Portanto f é aberta. Observe que :

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow e^{2\pi i x} = e^{2\pi i y} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Portanto, pela Proposição 1.8, temos que $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \tau_{\tilde{\pi}})$ é homeomorfo à (S^1, τ_f). Pela Proposição 1.7 temos que $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \tau_{\tilde{\pi}})$ é homeomorfo à (S^1, τ), onde τ é a topologia usual em S^1. ■

Denotaremos por $\tilde{f}$ esse homeomorfismo proveniente da Proposição 1.8. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e defina

$$\begin{array}{rcl} T_\alpha : (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \tau_{\tilde{\pi}}) & \rightarrow & (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \tau_{\tilde{\pi}}) \\ \overline{x} & \mapsto & \overline{x+\alpha} \end{array}$$

É fácil ver que tal função está bem definida e é uma bijeção. Provemos a continuidade. Seja V um aberto de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \tau_{\tilde{\pi}})$. Por definição da topologia quociente, temos que $U := \tilde{\pi}^{-1}(V)$ é um aberto da reta. Dado $A \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definimos $A + \bar{\alpha} := \{\overline{x+\alpha} : x \in A\}$.

Observe que $T_\alpha^{-1}(V) = V - \bar{\alpha}$. Portanto devemos provar que $\tilde{\pi}^{-1}(V - \bar{\alpha})$ é um aberto da reta. Note que

$$U = \pi^{-1}(V) \Rightarrow U - \alpha = \pi^{-1}(V - \bar{\alpha}),$$

onde $U - \alpha := \{x - \alpha : x \in U \subset \mathbb{R}\}$. Como U é aberto, então $U - \alpha$ é aberto (pois a função translação na reta é um homeomorfismo). Logo $\pi^{-1}(V - \bar{\alpha})$ é aberto. Portanto $T_\alpha^{-1}(V) \in \tau_{\tilde{\pi}}$. Logo T_α é contínua. Portanto $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T_\alpha)$ é um sistema dinâmico.

Note que $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T_\alpha)$ é conjugado a $(S^1, R_{2\pi\alpha})$, visto que $T_\alpha \circ \tilde{f}^{-1} = \tilde{f}^{-1} \circ R_\alpha$, de fato:

$$T_\alpha \circ \tilde{f}^{-1}(e^{2\pi i t}) = T_\alpha(\bar{t}) = \overline{t+\alpha} \text{ e } \tilde{f}^{-1} \circ R_{2\pi\alpha}(e^{2\pi i t}) = \tilde{f}^{-1}(e^{2\pi i(t+\alpha)}) = \overline{t+\alpha}$$

Portanto, pelo Corolário 2.18, se $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, então $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T_\alpha)$ é topologicamente transitivo. Agora, se $\alpha \in \mathbb{Q}$, então $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T_\alpha)$ não é topologicamente transitivo, visto que se fosse topologicamente transitivo, então $(S^1, R_{2\pi\alpha})$ seria. Porém isto não é verdade, conforme visto anteriormente.

Teorema 2.21 ***(Transitividade de Birkhoff)*** *Seja X um espaço métrico completo, separável e sem pontos isolados. Um sistema dinâmico (X,T) é topologicamente transitivo se e somente se existe $a \in X$, tal que $\overline{Orb(T,a)} = X$.*

Demonstração. $\Leftarrow$) Foi feita na Proposição 2.5 item ii).

$\Rightarrow$) Seja

$$D(T) = \left\{ a \in X; \overline{Orb(T,a)} = X \right\}.$$

Nosso objetivo é mostrar que tal conjunto é não vazio. Como X é separável, existe um conjunto denso e enumerável em X, denotemos esse conjunto por $D = \{a_k; k \in \mathbb{N}\}$. Portanto, dado $n \in \mathbb{N}$, as bolas $B_{k,n} = B(a_k, \frac{1}{n})$ formam uma base enumerável para a topologia em X. De fato, seja A um aberto em X. Então dado $y \in A$, existe $\varepsilon > 0$, tal que $B(y,\varepsilon) \subset A$. Como D é denso em X, existem $a_m \in D$ e $n \in \mathbb{N}$, tais que $d(a_m, y) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4}$. Afirmamos que $B_{m,n} = B(a_m, \frac{1}{n}) \subset B(y,\varepsilon)$. De fato, dado $z \in B_{m,n}$, temos

$$d(z,y) \leq d(z,a_m) + d(a_m,y) < \tfrac{\varepsilon}{2},$$

logo

$$A = \bigcup_{y \in A} \{y\} \subseteq \bigcup B_{m,n} \subset A.$$

Portanto, A se escreve como uma união de bolas do tipo $B_{m,n}$.

Afirmamos que $x \in D(T)$ se, e somente se, $\forall k, n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(x) \in B_{k,n}$. De fato, se x tem órbita densa, então dados a_k e $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, $d(T^m(x), a_k) < \frac{1}{n}$, ou seja, $T^m(x) \in B_{k,n}$. Agora provaremos a volta, ou seja, que x tem órbita densa. Dado $a \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Como D é denso em X, existe $a_k \in D$, onde $d(a_k, a) < \frac{1}{2n}$. Portanto $a \in B_{k,2n}$. Por hipótese, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(x) \in B_{k,2n}$, logo

$$d(T^m(x), a) \leq d(T^m(x), a_k) + d(a_k, a) < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Reescrevendo o que acabamos de provar, em notação de conjuntos, temos

$$D(T) = \bigcap_{k,m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(B_{k,m}).$$

Como T é contínua e $B_{k,m}$ é aberto para todos $k, m \in \mathbb{N}$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $T^{-n}(B_{k,m})$ é aberto. Como qualquer união de abertos em X é aberto em X, temos que $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(B_{k,m})$ é aberto. Como (X, T) é topologicamente transitivo, segue da Proposição 2.14 item iii) que $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(B_{k,m})$ é denso em X. Portanto, temos uma união enumerável de conjuntos abertos densos, logo pelo Teorema de Baire (Proposição 1.35) $D(T)$ é denso em A e, portanto, não vazio. ■

2.2 Hiperciclicidade

Definição 2.22 O par (X, T) é dito um *sistema dinâmico linear*, se X é um espaço de Banach e $T : X \to X$ é um operador linear contínuo.

Definição 2.23 Dizemos que o sistema dinâmico linear (X, T) é *hipercíclico*, se existe $a \in X$, tal que $\overline{Orb(T, a)} = X$. Tal ponto é dito *vetor hipercíclico.*

Exemplo 2.24 ***(Operador de Rolewicz)****: Na Seção 1.3 vimos que, em ℓ_p, para $1 \leq p < \infty$, o operador $T = aB : \ell_p \to \ell_p$, com $a \in \mathbb{K}$, dado por*

$$T\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\right) = a\left(x_2, x_3, \ldots\right)$$

é linear e contínuo. A seguir, daremos uma condição para que (ℓ_p, T) seja hipercíclico.

Teorema 2.25 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $a \in \mathbb{K}$, tal que $|a| > 1$. Então (ℓ_p, T) é hipercíclico.*

Demonstração. Na Seção 1.3, mostramos que os operadores aB e aR, em ℓ_p, além de serem lineares e contínuos, têm norma igual a $|a|$ (Proposição 1.45).

Note que $B \circ R = Id$, de fato, dado $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell_p$, temos que $B \circ R(x_1, x_2, x_3, \ldots) = B(0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Suponha agora que $B^j \circ R^j = Id$ para algum $j \in \mathbb{N}$. Aplicando B a esquerda e R a direita temos que $B^{j+1} \circ R^{j+1} = R \circ B = Id$. Portanto por indução, tem-se $B^n \circ R^n = Id$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, definindo $S := \frac{1}{a}R$, temos que $T^n \circ S^n = Id$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|T\| = |a|$ e $\|S\| = \frac{1}{|a|}$.

Sabemos que o conjunto

$$D = \left\{x^n = (x_j^n)_j \in c_{00} : x_j^n \in \mathbb{Q}^i, \forall n, j \in \mathbb{N}\right\},$$

onde $i = 1$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $i = 2$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, é denso em ℓ_p. Denotaremos por $k(n)$ o maior índice j de x^n tal que $x_j^n \neq 0$. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\|S^m x^n\|_p \leq \|S\|^m \|x^n\|_p = \tfrac{\|x^n\|_p}{|a|^m}$$

Como $|a| > 1$, segue que $\|S^m x^n\|_p \overset{m \to \infty}{\to} 0$. Logo é possível construir uma sequência crescente r_n de números naturais tais que

$$r_n > \max\{k(i); 1 \leq i \leq n\}$$

e

$$\|S^{r_n} x^n\|_p < \left(\tfrac{1}{2^n}\right)^p.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$p(n) := \sum_{i=1}^{n} r_i.$$

Provaremos a seguir que

$$x_0 := \sum_{n=1}^{\infty} S^{p(n)} x^n$$

tem órbita densa em ℓ_p, o que conclui a prova. Note que $x_0 \in \ell_p$. De fato, como para $n > 1$ temos $p(n) = p(n-1) + r_n$, então

$$\left\|S^{p(n)} x^n\right\|_p = \left\|S^{p(n-1)}(S^{r_n} x^n)\right\|_p \leq \|S\|^{p(n-1)} \|S^{r_n} x^n\|_p$$

$$< \tfrac{1}{|a|^{p(n-1)}} \left(\tfrac{1}{2^n}\right)^p < \left(\tfrac{1}{2^n}\right)^p.$$

E para $n = 1$ temos que $\left\|S^{p(1)} x^1\right\|_p < \left(\frac{1}{2}\right)^p$, portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\|S^{p(n)} x^n\right\|_p < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2^n}\right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} < \infty.$$

Observe que se $x^m = (x_1^m, x_2^m, \ldots, x_{k(m)}^m, 0, 0, \ldots)$ então $T^{k(m)} x^m = 0$, em particular, $T^i x^m = 0$ para todos $m \in \mathbb{N}$ e $i \geq k(m)$. Fixando um $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$T^{p(n)} x_0 = \sum_{m=1}^{\infty} T^{p(n)} S^{p(m)} x^m =$$

$$\sum_{m=1}^{n-1} T^{p(n)} S^{p(m)} x^m + T^{p(n)} S^{p(n)} x^n + \sum_{m=n+1}^{\infty} T^{p(n)} S^{p(m)} x^m$$

$$\sum_{m=1}^{n-1} T^{p(n)-p(m)} x^m + x^n + \sum_{m=n+1}^{\infty} S^{p(m)-p(n)} x^m$$

Para $1 \leq m \leq n-1$, temos

$$p(n) - p(m) = \sum_{i=m+1}^{n} r_i \geq r_m > k(m),$$

portanto

$$T^{p(n)}x_0 - x^n = \sum_{m=n+1}^{\infty} S^{p(m)-p(n)}x^m.$$

Logo

$$\left\|T^{p(n)}x_0 - x^n\right\|_p = \left\|\sum_{m=n+1}^{\infty} S^{p(m)-p(n)}x^m\right\|_p \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \left\|S^{p(m)-p(n)}x^m\right\|_p$$

$$\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \left\|S^{p(m-1)-p(n)}\right\| \left\|S^{r_m}x^m\right\|_p = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{|a|^{p(m-1)-p(n)}} \left\|S^{r_m}x^m\right\|_p$$

$$\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \left\|S^{r_m}x^m\right\|_p < \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^n}.$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\left\|T^{p(n)}x_0 - x^n\right\|_p < \frac{1}{2^n}$.

Dado $x \in \ell_p$, como D é denso em ℓ_p, existe uma sequencia $(x^{m_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset D$ tal que $x^{m_j} \overset{j\to\infty}{\to} x$. Dado $\varepsilon > 0$ então existe $m_{j_0} \in \mathbb{N}$ tal que

$$m_j \geq m_{j_0} \Rightarrow \|x^{m_j} - x\|_p < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando m_j de forma que $m_j \geq m_{j_0}$ e $\frac{1}{2^{m_j}} < \frac{\varepsilon}{2}$, segue que

$$\left\|T^{p(m_j)}x_0 - x\right\|_p \leq \left\|T^{p(m_j)}x_0 - x^{m_j}\right\|_p + \|x^{m_j} - x_0\|_p < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto a órbita de x_0 é densa em ℓ_p, portanto (ℓ_p, T) é hipercíclico. ■

A seguir discutiremos algumas propriedades sobre hiperciclicidade. A primeira observação que faremos é que pela definição de hiperciclicidade, podemos escrever o Teorema da Transitividade de Birkhof da seguinte forma:

Teorema 2.26 ***(Transitividade de Birkhoff)***: *Seja (X,T) um sistema dinâmico linear, onde X é um espaço de Banach separável. Então (X,T) é hipercíclico se, e somente se, (X,T) é topológicamente transitivo.*

Proposição 2.27 *Se (X,T) é um sistema dinâmico linear hipercíclico, então $\|T\| > 1$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $\|T\| \leq 1$. Como (X, T) é hipercíclico, então existe $a \in X$ tal que $\overline{Orb(T, a)} = X$. Por $\|T\| \leq 1$ e pela propriedade $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, temos que

$$\|T^n(a)\| \leq \|T\|^n \|a\| \leq \|a\|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $Orb(T, a) \subset B(0, \|a\|)$, ou seja, a órbita de a é limitada, portanto não pode ser densa em X, visto que todo espaço normado não nulo é ilimitado (Absurdo). ■

Pela última proposição, se o operador $T = aB$, apresentado no exemplo 2.24, for tal que $|a| \leq 1$, então $\|T\| = |a| \|B\| \leq 1$. Portanto ele não é hipercíclico.

O resultado a seguir garante que os ambientes adequados para se estudar hiperciclicidade de operadores lineares são os espaços normado de dimensão infinita.

Teorema 2.28 *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear, onde X é um espaço normado de dimensão finita. Então (X, T) não é hipercíclico.*

Demonstração. Faremos uma demonstração por absurdo, ou seja, suponha que $\dim(X) = n < \infty$ e que (X, T) é hipercíclico. Logo, existe $a \in X$ tal que $\overline{Orb(T, a)} = X$. Afirmamos que $\{a, T(a), \ldots, T^{n-1}(a)\}$ é linearmente independente. Suponha, por absurdo, que tal conjunto é linearmente dependente. Logo existe uma combinação linear não trivial desses vetores resultando em zero, ou seja, existem $a_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, \ldots, n-1$, onde $\{a_i, i = 0, \ldots, n-1\} \neq \{0\}$, tais que

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i(a) = 0.$$

Retirando todos os elementos $a_j = 0$ de $\{a_i, i = 0, \ldots, n\}$, e reordenando os elementos temos que

$$\sum_{i=0}^{l} a_i T^i(a) = 0$$

com $l \leq n-1$, portanto aplicando T^{n-l} em ambos os lados da expressão e utilizando a linearidade de T temos

$$T^{n-l}(\sum_{i=0}^{l} a_i T^i(a)) = T^{n-l}(0) \Rightarrow \sum_{i=0}^{l} a_i T^{n+i-l}(a) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{l-1} a_i T^{n+i-l}(a) = -a_l T^n(a) \Rightarrow \sum_{i=0}^{l-1} -\frac{a_i}{a_l} T^{n+i-l}(a) = T^n(a)$$

Portanto $T^n(a)$ é uma combinação linear dos elementos de

$$\left\{T^{n-i+l}(a) : i = 0, \ldots, l-1\right\}.$$

Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$, $T^k(a)$ é uma combinação linear dos elementos de $\left\{T^{n-i+l}(a) : i = 0, \ldots, l-1\right\}$, visto que, todo $T^k(a)$, com $k \geq n$, pode ser decomposto em somas $\sum\limits_{i=0}^{l-1} \frac{a_i}{a_l} T^{n+i-l}(a)$. Portanto

$$Orb(T, a) \subset \left[a, T(a), \ldots, T^{n-1}(a)\right] \text{ e } \dim \left[a, T(a), \ldots, T^{n-1}(a)\right] < n,$$

visto que tal conjunto é linearmente dependente. Logo $\overline{Orb(T, a)} \neq X$, que é um absurdo por hipótese. Portanto, temos que $\{a, T(a), \ldots, T^{n-1}(a)\}$ é uma base para X, a qual denotaremos por B.

Dado $\beta \in \mathbb{R}$, com $\beta > 0$, por X ser um espaço vetorial e $a \in X$, temos que $\beta a \in X$. Pela densidade da órbita de a, existe uma sequência de naturais $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $T^{n_k}(a) \overset{k\to\infty}{\to} \beta a$. Em particular, dado $j < n$ temos que

$$T^{n_k}(T^j(a)) = T^j(T^{n_k}(a)) \overset{k\to\infty}{\to} T^j(\beta a) = \beta T^j(a).$$

Dado $x \in X$, como B é base de X temos que

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} b_j T^j(a).$$

Logo, aplicando T^{n_k} em ambos os lados da expressão acima, temos

$$T^{n_k}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j T^{n_k}(T^j(a)) \overset{k\to\infty}{\to} \beta \sum_{j=0}^{n-1} b_j (T^j(a)) = \beta x.$$

Portanto, para todo $x \in X$ tem-se $T^{n_k}(x) \to \beta x$.

Seja $S_\beta : X \to X$ um operador linear tal que a matriz de S_β na base B é βI, onde I é matriz identidade. Por X ter dimensão finita, temos que $S_\beta \in \mathfrak{L}(X)$. Dado $x \in X$, note que $S_\beta(x) = \beta I x = \beta x$, portanto para todo $x \in X$ tem-se $T^{n_k}(x) \to S_\beta(x)$. Logo, pela Proposição 1.40, temos que $T^{n_k} \to S_\beta$ em $\mathfrak{L}(X)$.

Agora considere a função determinante $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. Note que tal função é contínua, visto que o determinante pode ser visto como um polinômio de várias variáveis. Portanto, como $T^{n_k} \to S_\beta$ então $\det(T^{n_k}) \to det(S_\beta) = \beta^n$. Tomando qualquer outro $\theta \in \mathbb{R}$ e realizando o mesmo procedimento acima, encontraremos outra sequência de números naturais $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $\det(T^{m_k}) \to det(S_\theta) = \theta^n$. Portanto $\overline{\{|\det T^n| \,;\, n \in \mathbb{N}\}} = \mathbb{R}_+$, porém isso é um absurdo, visto que se $|\det T| \geq 1$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$|\det T^n| = |\det T|^n \geq 1$, ou seja tal conjunto não é denso em $\mathbb{R}_+$. De maneira análoga, teremos o mesmo absurdo se $|\det T| \leq 1$. ■

O próximo resultado nos permitirá provar de maneira simples que a generalização do operador de Rolewicz, visto no Exemplo 2.24, é hipercíclico. Tal resultado é um critério de hiperciclicidade, ou seja, se um sistema dinâmico linear satisfaz as hipóteses desse teorema, então o mesmo sistema será hipercíclico. Com esse critério, não precisaremos construir um vetor hipercíclico como foi feito no Teorema 2.25.

Teorema 2.29 ***(Critério de Hiperciclicidade)*** *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear, onde X é um espaço de Banach separável e T é limitado, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}_+$ tal que $\|T\| < c$. Sejam $A_1, A_2 \subset X$ densos em X, (n_k) uma sequência crescente de naturais e funções $S_{n_k} : A_2 \to X$ tais que*

i) *$T^{n_k}(a) \to 0$, $\forall a \in A_1$;*
ii) *$S_{n_k}(a) \to 0$, $\forall a \in A_2$;*
iii) *$T^{n_k} \circ S_{n_k}(a) \to a$, $\forall a \in A_2$.*

Então (X, T) é hipercíclico.

Demonstração. Sejam U, V dois abertos de X. Como A_1 e A_2 são densos em X, então existem $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$ tais que $a_1 \in A_1 \cap U$ e $a_2 \in A_2 \cap V$. Por i) temos que $T^{n_k}(a_1) \to 0$ e por ii) $S_{n_k}(a_2) \to 0$. Logo definindo $b_k := a_1 + S_{n_k}(a_2)$, temos que $b_k \to a_1$. Como $a_1 \in U$ e U é aberto, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq k_0 \Rightarrow b_k \in U.$$

Utilizando a linearidade de T e os itens i) e iii), temos

$$T^{n_k}(b_k) = T^{n_k}(a_1 + S_{n_k}(a_2)) = T^{n_k}(a_1) + T^{n_k} \circ S_{n_k}(a_2) \to a_2$$

Fazendo a mesma análise anterior, como V é aberto segue que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq k_1 \Rightarrow T^{n_k}(b_k) \in V.$$

Tomando $k > \max\{k_0, k_1\}$ temos que $b_k \in U$ e $T^{n_k}(b_k) \in V$, portanto $T^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $k > \max\{k_0, k_1\}$. Logo (X, T) é topologicamente transitivo. Pelo Teorema de Birkhoff, (X, T) é hipercíclico. ■

Corolário 2.30 *Sejam $1 \leq p < \infty$, $a \in \mathbb{K}$, tal que $|a| > 1$ e X um espaço de Banach separável. Então $(\ell_p(X), aB)$ é hipercíclico.*

Demonstração. Utilizaremos o critério de hiperciclicidade nessa demonstração. Sabemos que $\ell_p(X)$ é um espaço de Banach separável e que aB é limitado, por ser um operador linear contínuo (Proposições 1.58 e 1.45). Tomaremos $(n_k)_k$ como sendo a sequência dos naturais. Defina $S_n := \frac{1}{a^n} R^n$, onde $R : \ell_p(X) \to \ell_p(X)$, é dada por $R(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$. Note que para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $((aB)^n \circ S_n) = I_d$. Tomaremos os conjuntos A_1 e A_2 do enunciado do critério como sendo o conjunto $c_{00}(X)$. Note que dado $x \in c_{00}(X)$ temos

$$\|S_n(x)\| \leq \|S_1\|^n \|x\| = \tfrac{\|x\|}{|a|^n} \overset{a>1}{\to} 0.$$

Portanto o item ii) do critério é satisfeito. O item i) do critério é trivial visto que, dado $x \in c_{00}(X)$, seja n_0 o maior índice de x tal que a n_0-ésima coordenada de x seja diferente de zero. Portanto $(aB)^{n_0+1}(x) = 0$. Por outro lado, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $((aB)^n \circ S_n)(x) = x \to x$, logo é satisfeito o item iii) do critério. Portanto $\ell_p(X)$ é hipercíclico. ■

Corolário 2.31 *$(\ell_p(C[0,1]), T)$ para $1 \leq p < \infty$ é hipercíclico, onde $T = aB$ com $a \in \mathbb{C}$ tal que $|a| > 1$.*

Demonstração. Já foi provado que $C[0,1]$ é espaço de Banach separável (Exemplo 1.57), portanto usando o Corolário 2.30 concluímos o resultado. ■

3 Caos Linear

Esse capítulo foi baseado na Seção 2.4 de [10], no Capítulo 1 de [6], e em [2] e [3]. Inicialmente, por meio dos conceitos trabalhados no Capítulo 2 e da definição de dependência sensível às condições iniciais, trabalharemos com a noção de caos segundo Devaney. A saber, o operador de Rolewicz e sua generalização serão caóticos nesse sentido e tal fato é bem interessante visto que, intuitivamente, imagina-se que operadores lineares são bem comportados e portanto não se espera que eles satisfaçam condições de caos. Por fim, trabalharemos também com outra clássica noção de caos: o caos Li-Yorke.

3.1 Caos de Devaney

Definição 3.1 Seja (X, T) um sistema dinâmico com d sendo a métrica em X. Dizemos que (X, T) tem *dependência sensível às condições iniciais* se existe um $\delta > 0$, tal que para todo $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ com $d(x, y) < \varepsilon$ de modo que, para algum $n \in \mathbb{N}$, $d(T^n(x), T^n(y)) > \delta$. Quando existe, δ é dito *constante de sensibilidade de* (X, T).

Exemplo 3.2 Provaremos aqui que o sitema dinâmico (S^1, R_α) (visto no Exemplo 2.6) não tem dependência sensível às condições iniciais. Como já foi visto, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$d(R_\alpha^n(z_1), R_\alpha^n(z_1)) = d(z_1, z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in S^1 \quad (1)$$

Suponha por absurdo que tal sistema tem dependência sensível às condições iniciais, ou seja, existe um $\delta > 0$ que satisfaz a condição da definição acima. Em particular, tomando $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ e um $x \in S^1$ qualquer, temos que existe um $n \in \mathbb{N}$ e $y \in S^1$ com $d(x, y) < \frac{\delta}{2}$ tal que $d(R_\alpha^n(x), R_\alpha^n(y)) > \delta$. Logo por (1) temos que:

$$\tfrac{\delta}{2} > d(x, y) = d(R_\alpha^n(x), R_\alpha^n(y)) > \delta,$$

que é uma contradição.

Exemplo 3.3 Provaremos nesse exemplo que o sistema dinâmico (Σ_2, σ) (visto no Exemplo 2.10) tem dependência sensível às condições iniciais. De fato, provaremos que $\delta = \frac{1}{4}$ é uma constante de sensibilidade de tal sistema.

Dado $\varepsilon > 0$ e $x \in \Sigma_2$, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e $y \in \Sigma_2$ tal que suas n primeiras coordenadas sejam iguais às n primeiras coordenadas de x e as demais sejam diferentes. Portanto pelo Lema 2.11 temos que

$$d(x,y) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

Agora obeserve que $\sigma^n(x)$ e $\sigma^n(y)$ são duas sequências pertencentes a Σ_2 que se diferem coordenada a coordenada, portanto novamente pelo Lema 2.11 temos

$$d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) > \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \delta,$$

o que conclui a demonstração.

Vamos relembrar uma definição que foi dada no capítulo anterior, que será muito importante no desenvolvimento desse capítulo.

Definição 3.4 Seja (X,T) um sistema dinâmico. Dizemos que $x \in X$ é um *ponto periódico* de T se existe algum $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$ tal que $T^n(x) = x$. O menor n que sastisfaz tal propriedade é dito *período* de T. O conjunto dos pontos periódicos de (X,T) é donotado por $Per(T)$.

Exemplo 3.5 No Exemplo 2.6 provamos que no sistema dinâmico (S^1, R_α), todos os pontos são peródicos quando $\alpha = 2\pi a$, onde a é racional. E também vimos que quando a é irracional, nenhum ponto é periódico.

Proposição 3.6 *Se (X_1,T_1) é quase conjugado à (X_2,T_2) e $Per(T_2)$ é denso em X_2, então $Per(T_1)$ é denso em X_1, ou seja, "ter um conjunto denso de pontos periódicos" é preservado por quase conjugação.*

Demonstração. Como (X_1,T_1) é quase conjugado à (X_2,T_2), existe $\phi\colon X_2 \to X_1$ contínua, com imagem densa e tal que $T_1^m \circ \phi = \phi \circ T_2^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Tomando $x \in X_1$ qualquer, devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe um ponto periódico p de X_1 tal que $p \in B(x,\varepsilon)$. Para tal observe que $\phi^{-1}(B(x,\varepsilon))$ é um conjunto aberto em X_2 (visto que ϕ é contínua) e é não vazio (visto que ϕ tem imagem densa). Com $Per(T_2)$ é denso em X_2 existe um ponto periódico $y \in X_2$ (com $T_2^n(y) = y$, para algum $n \in \mathbb{N}$) tal que $y \in \phi^{-1}(B(x,\varepsilon))$.
Portanto $\phi(y) \in B(x,\varepsilon)$ e observe que $\phi(y)$ é um ponto periódico em X_1 de período n, de fato:

$$T_1^n(\phi(y)) = \phi(T_2^m(y)) = \phi(y),$$

o que conclui a demonstração. ■

Por meio das definições trabalhadas acima e da definição de transitividade topológica (trabalhada no Capítulo 2) definiremos a noção de caos segundo Devaney.

Definição 3.7 (Caos de Devaney - Versão 1): Seja (X, T) um sistema dinâmico onde (X, d) é um espaço métrico sem pontos isolados. Dizemos que (X, T) é *caótico* (no sentido de Devaney) se o mesmo satisfaz as seguintes condições:

i) (X, T) tem dependência sensível às condições iniciais.

ii) (X, T) é topologicamente transitivo.

iii) $Per(T)$ é denso em X.

Exemplo 3.8 (Σ_2, σ) é caótico.

Primeiro observe que Σ_2 não tem pontos isolados, de fato, dado $x \in \Sigma_2$ e $\varepsilon > 0$, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e tome $y \in \Sigma_2$ de modo que suas n primeiras coordenadas coincidam com as n primeiras coordenadas de x. Portanto, pelo Lema 2.11 temos

$$d(x, y) < \tfrac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Provamos no Exemplo 3.3 que (Σ_2, σ) satisfaz a condição i) da definição acima, e no Exemplo 2.10 provamos a condição ii). Nos resta mostrar que (Σ_2, σ) possui um conjunto denso de pontos periódicos. De fato, dado $x \in (\Sigma_2, \sigma)$ qualquer e $\varepsilon > 0$ devemos mostrar que existe um ponto periódico $y \in (\Sigma_2, \sigma)$ de modo que $y \in B(x, \varepsilon)$.

Tome $n \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Defina y de forma que suas n primeiras coincidam com as n primeiras coordenadas de x e que esse bloco de n coordenadas se repita consecutivamente em y. Mais precisamente, sendo $x_1, \ldots, x_n$ as n primeiras coordenadas de x, segue que y será da forma

$$y = (x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots).$$

Claramente y é um ponto periódico de período n visto que $\sigma^n(y) = y$, e $y \in B(x, \varepsilon)$ visto que, pelo Lema 2.11 temos $d(x, y) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, o que conclui a demonstração.

O proximo resultado será de grande importância. O mesmo mostra que não precisamos da condição i) da definição de caos (no sentido de Devaney) para caracterizarmos o caos de Devaney, ou seja, provaremos a seguir que os itens ii) e iii) da Definição 3.7 implicam o item i).

Teorema 3.9 ***(Banks–Brooks–Cairns–Davis–Stacey)***: *Seja (X, T) um sistema dinâmico, onde (X, d) é um espaço métrico que não possui pontos isolados. Se (X, T) é topologicamente transitivo e $Per(T)$ é denso em X, então (X, T) tem dependência sensível às condições iniciais.*

Demonstração. Nosso objetivo é encontrar uma constante de sensibilidade $\delta > 0$ que satisfaça a Definição 3.1. Nessa primeira parte da prova iremos conjecturar um possível $\delta > 0$; já na segunda parte mostraremos que ele cumpre a condição desejada.

Como X não possui pontos isolados, X possui uma infinidade de pontos, portanto conseguimos selecionar pelo menos dois pontos periódicos p_1 e p_2, com $p_1 \neq p_2$, tais que $Orb(T, p_1) \cap Orb(T, p_2) = \emptyset$. De fato, sejam n_1 e n_2 os respectivos períodos de p_1 e p_2. Suponha que existam $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $T^r(p_1) = T^s(p_2)$. Portanto, $p_1 = T^{rn_1n_2}(p_1) = T^{sn_1n_2}(p_2) = p_2$, absurdo. Por meio dessa observação defina

$$\eta := \tfrac{1}{2} \cdot \min \{d(T^n(p_1), T^m(p_2)); m, n \in \mathbb{N}_0\} > 0.$$

Dado $x \in X$, segue da desigualdade triangular que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$2\eta \leq d(T^n(p_1), T^n(p_2)) \leq d(T^n(p_1), x) + d(x, T^n(p_2)),$$

ou seja, $d(T^n(p_1), x) > \eta$ ou $d(T^n(p_2), x) > \eta$. Logo, obtemos uma constante η de tal forma que existe um ponto periódico p, tal que $d(T^n(p), x) > \eta$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Provaremos agora que $\delta = \frac{\eta}{4}$ é uma constante de sensibilidade. Como $Per(T)$ é denso em X existe um ponto periódico q tal que, dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, temos $d(x, q) < \min \{\delta, \varepsilon\}$.

Sabemos que existe um ponto periódico p (seja N o período dele) tal que $d(x, T^n(p)) > \eta = 4\delta$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Pela continuidade de T, existe uma vizinhaça V (aberta) de p tal que

$$d(T^n(p), T^n(y)) < \delta, \quad \forall n \in \{1, \ldots, N\}.$$

Como $B(x, \varepsilon)$ e V são abertos e T é topologicamente transitivo existem $z \in B(x, \varepsilon)$ e $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^k(z) \in V$. Tome $j \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq jN < k + N$. Portanto

$$d(T^{jN}(q), T^{jN}(z)) = d(q, T^{jN-k}(T^k(z))) \geq$$

$$d(x, T^{jN-k}(T^k(z))) - d(x, q) \geq$$

$$d(x, T^{jN-k}(p)) - d(T^{jN-k}(p), T^{jN-k}(T^k(z))) - d(x, q) >$$

$$4\delta - \delta - \delta = 2\delta$$

Logo,

$$2\delta < d(T^{jN}(q), T^{jN}(z)) \leq d(T^{jN}(x), T^{jN}(q)) + d(T^{jN}(x), T^{jN}(z)),$$

ou seja, $d(T^{jN}(x), T^{jN}(q)) > \delta$ ou $d(T^{jN}(x), T^{jN}(z)) > \delta$ e $d(x,z) < \varepsilon$ e $d(x,q) < \varepsilon$, o que conclui a demonstração. ■

O último resultado nos leva a uma nova definição de caos segundo Devaney.

Definição 3.10 (Caos de Devaney - Versão 2): Seja (X,T) um sistema dinâmico, onde (X,d) é um espaço métrico sem pontos isolados. Dizemos que (X,T) é *caótico* (no sentido de Devaney) se o mesmo satisfaz as seguintes condições:

i) (X,T) é topologicamente transitivo.

ii) $Per(T)$ é denso em X.

Observamos que, essa nova definição, faz sentido inclusive para espaços topológicos.

Proposição 3.11 *Se (X_1,T_1) é quase conjugado à (X_2,T_2) e o último é Devaney caótico, então (X_1,T_1) é Devaney caótico, ou seja, a propriedade de ser Devaney caótico é preservada por quase conjugação.*

Demonstração. Como (X_2,T_2) é Devaney caótico, então é topologicamente transitivo e possui um conjunto denso de pontos periódicos. Portanto, pelas Proposições 2.17 e 3.6 (X_1,T_1) satisfaz as condições i) e ii) da definição anterior. Portanto (X_1,T_1) é Devaney caótico. ■

Exemplo 3.12 No capítulo anterior provamos que $(S^1, R_{2\pi\alpha})$ é conjugado à $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T_\alpha)$. Sendo α racional, vimos que todos os pontos de S^1 são periódicos (em particular, S^1 tem um conjunto denso de pontos periódicos), portanto, pela proposição anterior $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T_\alpha)$ tem um conjunto denso de pontos periódicos.

Lema 3.13 Seja $(\ell_p(X), aB)$, onde X é um espaço de Banach separável e $a \in \mathbb{K}$, com $|a| > 1$. Então $x \in X$ é um ponto periódico se e somente se existe $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$ tal que

$$x = (x_1, \ldots, x_n, a^{-n}x_1, \ldots, a^{-n}x_n, a^{-2n}x_1, \ldots, a^{-2n}x_n, a^{-3n}x_1, \ldots)$$

Demonstração. $(\Leftarrow)$ Se x for da forma como enuncia o lema, x é um ponto periódico de período n, visto que $T^n(x) = x$. De fato, seja x_i a i-ésima coordenada de x com $i > n$. Podemos escrever i como $i = pn + r$, com $p \geq 1$ e $0 \leq r < n$. Portanto $x_i = a^{-pn}x_r$ e $x_{i+n} = a^{-(p+1)n}x_r$. Aplicando $(aB)^n$ em x, teremos que x_{i+n} se deslocará para a i-ésima coordenada, e será multiplicado por a^{-n}. Portanto a i-ésima coordenada de $(aB)^n(x)$ será igual a i-ésima coordenada de x, para todo $i \in \mathbb{N}$. Concluindo assim que $(aB)^n(x) = x$.

($\Rightarrow$) Suponha agora que x é um ponto periódico, seja n o período de x e $x_1, \ldots, x_n$ suas n primeiras coordenadas. Seja x_i a i-ésima coordenada de x com $i > n$. Podemos escrever i como $i = pn + r$ com $p \geq 1$ e $0 \leq r < n$. Provaremos por indução forte que $x_i = a^{pn} x_r$ para todo $i > n$, onde p e r são provenientes da igualdade $i = pn + r$ com $p \geq 1$ e $0 \leq r < n$.
Como $(aB)^n(x) = x$, para $i = n + 1$ teremos que x_{n+1} se deslocará para a primeira coordenada e será multiplicado por a^n. Utilizando igualdade de sequências temos:

$$a^n x_{n+1} = x_1 \Rightarrow x_{n+1} = a^{-n} x_1$$

Dado $i + 1 > n$ (sendo $i + 1 = pn + r$ com $p \geq 1$ e $0 \leq r < n$), suponha a validade da afirmação para todo j, onde $n < j < i + 1$. Como $(aB)^n(x) = x$, para $i+1$ teremos que x_{i+1} se deslocará para a $(i+1-n)$-ésima coordenada, e será multiplicado por a^n. Utilizando igualdade de sequências e a hipótese de indução forte, temos

$$a^n x_{i+1} = x_{i+1-n} = a^{n(p-1)} x_r \Rightarrow x_{n+1} = a^{-np} x_1,$$

o que conclui a demonstração. ■

Proposição 3.14 *Sejam $1 \leq p < \infty$, $a \in \mathbb{K}$, com $|a| > 1$, e X um espaço de Banach separável. Então $Per(aB)$ é denso em $\ell_p(X)$.*

Demonstração. Sabemos que $c_{00}(X)$ é denso em $\ell_p(X)$, logo se provarmos que o conjunto dos pontos periódicos é denso em $c_{00}(X)$, concluimos a prova.

Seja $\varepsilon > 0$ e $y = (y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots)$. Como $|a| > 1$, a série $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |a^p|^{-jm}$ converge para todo $m \in \mathbb{N}$. Portanto, conseguimos encontrar $N \geq n$ tal que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a^p|^{-jN} < \tfrac{\varepsilon^p}{\|y\|_p^p}.$$

Tome x um ponto periódico, de período N, tal que suas N primeiras coordenadas coincidam com as N primeiras coordenadas de y. Portanto pelo Lema 3.2 podemos escrever x da seguinte forma

$$x = (y_1, \ldots, y_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N-n}, a^{-N} y_1, \ldots, a^{-N} y_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N-n}, a^{-2N} y_1, \ldots).$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\|x-y\|_p^p &= \left\|(a^{-N}y_1,\ldots,a^{-N}y_n,a^{-2N}y_1,\ldots)\right\|_p^p \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\left\|a^{-jN}y_i\right\|^p = \sum_{j=1}^{\infty}\left|a^{-pjN}\right|\|y\|_p^p \\
&= \|y\|_p^p\sum_{j=1}^{\infty}|a^p|^{-jN} < \|y\|_p^p\,\frac{\varepsilon^p}{\|y\|_p^p} = \varepsilon^p,
\end{aligned}
$$

o que conclui a demonstração. ■

3.2 Caos Li-Yorke

Definição 3.15 Seja (X,T) um sistema dinâmico onde d é a métrica em X. Dizemos que o par de vetores $x,y\in X$ é *Li-Yorke caótico* se são satisfeitas as duas condições abaixo:

i) $\liminf\limits_{n\to\infty}[d(T^n(x),T^n(y))]=0.$

ii)$\limsup\limits_{n\to\infty}[d(T^n(x),T^n(y))]>0.$

Definição 3.16 $\Lambda\subset X$ é dito *Li-Yorke misturado* (ou simplesmente *misturado*) se qualquer par de vetores distintos de Λ for Li-Yorke caótico.

Definição 3.17 Dizemos que (X,T) (ou simplesmeste T) é *Li-Yorke caótico* se existe $\Lambda\subset X$ misturado e não enumerável.

Teorema 3.18 *Seja (X,d) um espaço de Banach diferente do espaço nulo, com d induzida da norma $\|\cdot\|$. Se $T:X\to X$ é um operador linear contínuo hiperciclico então ele é Li-Yorke caótico.*

Demonstração. Dado $x\in X$ hipercíclico, provaremos que o conjunto $\Lambda:=\{\lambda x;|\lambda|<1\}$ é misturado. Tal conjunto é não enumerável visto que $\lambda\in(-1,1)$.
Sejam $y,z\in\lambda$, logo eles podem ser escritos como $y=\alpha.x$ e $z=\beta.x$ com $|\alpha|<1$ e $|\beta|<1$. Portanto, pela linearidade de T temos

$$\|T^n(y)-T^n(z)\|=\|T^n(\alpha.x)-T^n(\beta.x)\|=\|(\alpha-\beta)T^n(x)\|.$$

i): Vamos demonstrar a seguir que $\liminf\limits_{n\to\infty}\|(\alpha-\beta)T^n(x)\|=0.$

Como a órbita de x é densa, então $\exists (n_j)_j \subset \mathbb{N}$ tal que $T^{n_j}(x) \to \overrightarrow{0}$. Portanto, pela definição de $\liminf$ e como a norma é sempre maior ou igual a zero tem-se

$$\liminf_{n\to\infty} \|(\alpha-\beta)T^n x\| = |(\alpha-\beta)| \liminf_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0.$$

ii): Para demonstrar que $\limsup_{n\to\infty} \|(\alpha-\beta)T^n x\| > 0$, bastar tomar um elemento $w \in X$ com $w \neq \overrightarrow{0}$ (portanto $\|w\| > 0$) e repetir o mesmo procedimento acima. ■

Exemplo 3.19 Os espaços $\ell_p(X)$ (sendo X um espaço de Banach separável) com seus repectivos operadores trabalhados nas seções anteriores são Li-Yorke caóticos pelo teorema anterior.

A seguir, daremos um exemplo geral de que um operador ser Li-Yorke caótico, não implica que ele seja hipercíclico.

Exemplo 3.20 Dados $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(Y, \|\cdot\|_2)$ espaços de Banach diferentes do espaço nulo com $T: X \to X$ um operador Li-Yorke caótico, então tomando o espaço de Banach $(X \times Y, \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2)$ com $T_1 : X \times Y \to X \times Y$ dado por $T_1(x, y) = (Tx, y)$, temos que T_1 é Li-Yorke caótico mas não é hipercíclico.

De fato, como T é Li-Yorke caótico então existe $\Lambda \subset X$ misturado e não enumerável. Provaremos a seguir que $\Lambda_1 := \Lambda \times \{0_Y\} \subset X \times Y$ é misturado e não enumerável. A não enumerabilidade decorre diretamente de Λ ser não enumerável. Provaremos a seguir que tal conjunto é misturado:

i) Dados $(x_1, 0), (x_2, 0) \in \Lambda_1$ devemos mostrar que

$$\liminf_{n\to\infty} \|T_1^n[(x_1, 0) - (x_2, 0)]\| = 0.$$

De fato,

$$\liminf_{n\to\infty} \|T_1^n[(x_1, 0) - (x_2, 0)]\| = \liminf_{n\to\infty} \|(T^n(x_1 - x_2), 0)\| =$$

$$\liminf_{n\to\infty} (\|T^n(x_1 - x_2)\|_1 + \|0\|_2) = \liminf_{n\to\infty} \|T^n(x_1 - x_2)\|_1 = 0.$$

ii) Dados $(x_1, 0), (x_2, 0) \in \Lambda_1$ devemos mostrar que

$$\limsup_{n\to\infty} \|T_1^n[(x_1, 0) - (x_2, 0)]\| = 0.$$

De fato,

$$\limsup_{n\to\infty} \|T_1^n[(x_1, 0) - (x_2, 0)]\| = \limsup_{n\to\infty} \|(T^n(x_1 - x_2), 0)\| =$$

$$\limsup_{n\to\infty}(\|T^n(x_1-x_2)\|_1+\|0\|_2)=\limsup_{n\to\infty}\|T^n(x_1-x_2)\|_1>0.$$

Agora vamos demonstrar que T_1 não é hipercíclico, ou seja, não existe nenhum $(x,y)\in X\times Y$, de modo que $\overline{Orb[T_1,(x,y)]}=X\times Y$. De fato dado $(x,y)\in X\times Y$ mostraremos que sua órbita não é densa em $X\times Y$. Para tal, tomando $z\neq y$ com $z\in Y$, seque que dado (x,z) temos que, para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$\|T_1^n(x,y)-(x,z)\|\geq\|y-z\|,$$

ou seja, nenhum par (x,y) tem órbita densa com respeito ao operador T_1. Portanto ele não é hipercíclico.

Definição 3.21 Seja (X,T) um sistema dinâmico linear onde X é um espaço de Banach. Dizemos que $x\in X$ é vetor *irregular* se ele cumpre as duas condições abaixo:

i) $\liminf\|T^nx\|=0$.

ii) $\limsup\|T^nx\|=\infty$.

O próximo teorema nos dará uma boa caracterização de caos Li-Yorke; em tal resultado provaremos a equivalência entre caos Li-Yorke, a existência de um vetor irregular e a existência de um par Li-yorke caótico. Para tal precisaremos dos lemas a seguir.

Lema 3.22 *Sejam (X,T) um sistema dinâmico linear onde X é um espaço de Banach e $x\in X$ um vetor tal que $\liminf\|T^nx\|=0$. Então existe uma sequência crescente de naturais $(n_k)_k$ tal que a sequência de vetores $(T^{n_k}x)_k$ converge para zero e satisfaz:*

i) $\|T^{n_{2k}}\|<\frac{1}{4^k}$ *;*

ii) $\sum_{j=0}^{k}\frac{\|T^{n_{2j}+n_{2k+1}}x\|}{4^j\|T\|^{2j-1}\|T^{n_{2j}}x\|}<\|T^{n_{2k}}x\|$ *;*

iii) $\frac{\delta}{4^k\|T\|^{n_{2k-1}}\|T^{n_{2k}}x\|}>k+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{M}{4^j\|T\|^{n_{2j-1}}\|T^{n_{2j}}x\|}$*;*

onde $n_{-1}=n_0=0$ e δ e M são constantes positivas.

Demonstração. Primeiro observe que, como $\liminf_{n\to\infty}\|T^n(x)\|=0$, então existe uma sequência crescente $(m_k)_k$ de naturais tal que $\lim_{n\to\infty}\|T^{m_k}(x)\|=0$. Nosso trabalho aqui será construir uma sequência $(n_k)_k\subset(m_k)_k$ que cumpra as três condições do lema. Construiremos tal sequência de forma recursiva em relação aos índices pares e ímpares.

Por hipótese temos que $n_{-1} = n_0 = 0$. Agora, suponha que os termos $n_{-1}, n_0, \dots, n_{2k-1}$ já foram encontrados e vamos então definir os termos n_{2k} e n_{2k+1}. Pelos itens i) e iii) do lema (visto que n_{2k} aparece pela primeira vez nesses dois itens) devemos tomar n_{2k} de forma que o mesmo seja maior que todos predecessores e

$$\|T^{n_{2k}}\| < \tfrac{1}{4^k} \quad e \quad \tfrac{\delta}{4^k \|T\|^{n_{2k-1}} \|T^{n_{2k}}x\|} > k + \sum_{j=0}^{k-1} \tfrac{M}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \left\|T^{n_{2j}}x\right\|}.$$

A segunda condição acima equivale a

$$\tfrac{\delta}{4^k \|T\|^{n_{2k-1}}} \left(k + \sum_{j=0}^{k-1} \tfrac{M}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \left\|T^{n_{2j}}x\right\|} \right)^{-1} > \|T^{n_{2k}}x\|.$$

Como $\lim\limits_{n \to \infty} \|T^{m_k}(x)\| = 0$, conseguimos selecionar um n_{2k} suficientemente grande de forma que o mesmo seja maior que todos predecessores e

$$\|T^{n_{2k}}x\| < \min \left(\tfrac{1}{4^k}, \tfrac{\delta}{4^k \|T\|^{n_{2k-1}}} \left(k + \sum_{j=0}^{k-1} \tfrac{M}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \left\|T^{n_{2j}}x\right\|} \right)^{-1} \right)$$

Definindo n_{2k}, nos falta agora determinar o termo n_{2k+1}. Para tal trabalharemos com o item ii) do lema, visto que tal índice aparece pela primeira vez em ii). Utilizando a desigualdade

$$\|T^{n_{2j}+n_{2k+1}}x\| = \|T^{n_{2j}}(T^{n_{2k+1}}x)\| \leq \|T^{n_{2j}}\| \, \|T^{n_{2k+1}}x\|,$$

obtemos de ii)

$$\sum_{j=0}^{k} \tfrac{\left\|T^{n_{2j}+n_{2k+1}}x\right\|}{4^j \|T\|^{2j-1} \left\|T^{n_{2j}}x\right\|} \leq \sum_{j=0}^{k} \tfrac{\left\|T^{n_{2j}}\right\| \|T^{n_{2k+1}}x\|}{4^j \|T\|^{2j-1} \left\|T^{n_{2j}}x\right\|}$$

$= \|T^{n_{2k+1}}x\| \left(\sum_{j=0}^{k} \tfrac{\left\|T^{n_{2j}}\right\|}{4^j \|T\|^{2j-1} \left\|T^{n_{2j}}x\right\|} \right)$. Como $\lim\limits_{n \to \infty} \|T^{m_k}(x)\| = 0$, conseguimos tomar n_{2k+1} suficientemente grande de forma que o mesmo seja maior que seus predecessores e cumpra

$$\|T^{n_{2k+1}}x\| \left(\sum_{j=0}^{k} \tfrac{\left\|T^{n_{2j}}\right\|}{4^j \|T\|^{2j-1} \left\|T^{n_{2j}}x\right\|} \right) < \|T^{n_{2k}}x\|,$$

o que conclui a demonstração. ■

Lema 3.23 *Sejam (X,T) um sistema dinâmico linear, onde X é um espaço de Banach, $\|T\| > 1$, x um vetor tal que $\liminf\limits_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0$ e $(n_k)_k$ a sequência definida (com relação a x) no Lema 2.1. Então o vetor*

$$u := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^{n_{2j}}}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \left\|T^{n_{2j}} x\right\|}$$

está bem definido e $\liminf\limits_{n\to\infty} \|T^n u\| = 0$.

Demonstração. Para provar que o vetor u esta bem definido basta provar que a sequência

$$S_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{T^{n_{2j}}}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \left\|T^{n_{2j}} x\right\|}$$

é de Cauchy, visto que X é um espaço de Banach. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $\frac{1}{4^{n_0}} < \varepsilon$. Tomando $k > l > n_0$ obtemos

$$\|S_k - S_l\| = \left\| \sum_{j=0}^{k} \frac{T^{n_{2j}}}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \left\|T^{n_{2j}} x\right\|} - \sum_{j=0}^{l} \frac{T^{n_{2j}}}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \left\|T^{n_{2j}} x\right\|} \right\| =$$

$$\left\| \sum_{j=l+1}^{k} \frac{T^{n_{2j}}}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \left\|T^{n_{2j}} x\right\|} \right\| \leq \sum_{j=l+1}^{k} \frac{\left\|T^{n_{2j}}\right\|}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \left\|T^{n_{2j}} x\right\|} =$$

$$\sum_{j=l+1}^{k} \frac{1}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}}} < \sum_{j=l+1}^{k} \frac{1}{4^j} < \sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{1}{4^j} =$$

$$\frac{1}{4^l} < \frac{1}{4^{n_0}} < \epsilon.$$

Portanto u está bem definido, provemos agora que $\liminf\limits_{n\to\infty} \|T^n u\| = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ devemos encontrar um índice n_0 tal que $\|T^{n_0} u\| < \varepsilon$. Tome k de tal forma que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$ e $n_0 = n_{2k+1}$. Logo utilizando as propriedades da sequência $(n_k)_k$ do Lema 3.22 obtemos

$$\|T^{n_{2k+1}} u\| = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^{n_{2j}+n_{2k+1}} x}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \left\|T^{n_{2j}} x\right\|} \right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left\|T^{n_{2j}+n_{2k+1}} x\right\|}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \left\|T^{n_{2j}} x\right\|}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{\left\|T^{n_{2j}+n_{2k+1}} x\right\|}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \left\|T^{n_{2j}} x\right\|} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\left\|T^{n_{2j}+n_{2k+1}} x\right\|}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \left\|T^{n_{2j}} x\right\|}$$

$$\overset{ii)}{<} \|T^{n_{2k}} x\| + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\left\|T^{n_{2j}+n_{2k+1}} x\right\|}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \left\|T^{n_{2j}} x\right\|}$$

$$\leq \|T^{n_{2k}}\| + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\|T^{n_{2k+1}}\| \left\|T^{n_{2j}}x\right\|}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \left\|T^{n_{2j}}x\right\|} \overset{i)}{<} \frac{1}{4^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\|T^{n_{2k+1}}\|}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}}}$$

$$\leq \frac{1}{4^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\|T\|^{n_{2k+1}}}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}}} = \frac{1}{4^k} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|T\|^{n_{2k+1}}}{4^{j+k+1} \|T\|^{n_{2j+2k+1}}}$$

$$= \frac{1}{4^k} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^{j+k+1} \|T\|^{n_{2j}}} \overset{\|T\|>1}{<} \frac{1}{4^k} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^{j+k+1}} = \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^{k+1}} \cdot \frac{4}{3}$$

$$< \frac{2}{4^k} < \frac{1}{2^k} < \varepsilon,$$

o que conclui a demonstração. ■

Teorema 3.24 *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear, onde X é um espaço de Banach. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1) T é Li-Yorke caótico.

2) T admite um par de vetores Li-Yorke caótico.

3) T admite um vetor irregular.

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2): Tal implicação é óbvia, visto que se T é Li-Yorke caótico, então X admite um subconjunto Λ misturado que contém uma quantidade não enumerável de pares Li-Yorke caóticos.

2) $\Rightarrow$ 3): Seja $y, z \in X$ um par Li-Yorke caótico e defina $x := y - z$. Logo,

$$\liminf_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0 \quad e \quad \limsup_{n\to\infty} \|T^n x\| > 0.$$

Se $\limsup_{n\to\infty} \|T^n x\| = \infty$, acabou pois x será um vetor irregular. Caso contrário, existe $M > 0$ tal que $\limsup_{n\to\infty} \|T^n x\| = M$. Observe também que $\|T\| > 1$ visto que, dado $\delta < M$, existem naturais $n > m$ tais que $\|T^n x\| > \delta$ e $\|T^m x\| < \frac{\delta}{2}$. Logo

$$2 = \frac{\delta}{\frac{\delta}{2}} < \frac{\|T^n x\|}{\|T^m x\|} < \frac{\|T\|^n}{\|T\|^m} = \|T\|^{n-m}$$

e, portanto, $\|T\| > 1$.

Pelo Lema 3.22 existe uma sequência crecente de naturais $(n_k)_k$ tal que $\|T^{n_k} x\| \to 0$ $(n_{-1} = n_0 = 0)$ e cumpra as seguintes condições:

i) $\|T^{n_{2k}}\| < \frac{1}{4^k}$

ii) $\sum_{j=0}^{k} \frac{\|T^{n_{2j}+n_{2k+1}}x\|}{4^j \|T\|^{2j-1} \|T^{n_{2j}}x\|} < \|T^{n_{2k}}x\|$

iii) $\frac{\delta}{4^k \|T\|^{n_{2k-1}} \|T^{n_{2k}}x\|} > k + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{M}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \|T^{n_{2j}}x\|}$

Pelo Lema 3.23 o vetor

$$u := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^{n_{2j}}}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \|T^{n_{2j}}x\|}$$

está bem definido e $\liminf_{n\to\infty} \|T^n u\| = 0$. Se provarmos que $\limsup_{n\to\infty} \|T^n u\| = \infty$, concluímos tal implicação. Pelo fato de $\limsup_{n\to\infty} \|T^n\| = M$, existe uma sequencia $(m_k)_k$ crescente de naturais tal que $\lim_{k\to\infty} \|T^{m_k}\| = M$, com $\|T^{m_k}\| > \delta$ para todo k. Como $(m_k)_k$ e $(n_k)_k$ são sequências claramente ilimitadas de naturais conseguimos rearranjar-las (excluindo se necessário termos de $(m_k)_k$ e indexando novamente) de modo que

$$(*)\ n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \cdots < n_j < m_j < n_{j+1} < m_{j+1} < \cdots$$

e $\lim_{k\to\infty} (m_{2k} - n_{2k}) = \infty$.

$(**)$: Como $\limsup_{n\to\infty} \|T^n x\| = M$, então para k fixo temos que $\|T^{m_{2k}-n_{2k}+n_{2j}}x\| < M$, para todo j.

Dado k temos

$$\|T^{m_{2k}-n_{2k}+n_{2j}}u\| = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^{m_{2k}-n_{2k}}x}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \|T^{n_{2j}}x\|} \right\| =$$

$$\left\| \frac{T^{m_{2k}}x}{4^k \|T\|^{n_{2k-1}} \|T^{n_{2k}}x\|} + \sum_{j\neq k}^{\infty} \frac{T^{m_{2k}-n_{2k}+n_{2j}}x}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \|T^{n_{2j}}x\|} \right\| \geq$$

$$\frac{\|T^{m_{2k}}x\|}{4^k \|T\|^{n_{2k-1}} \|T^{n_{2k}}x\|} - \left\| \sum_{j\neq k}^{\infty} \frac{T^{m_{2k}-n_{2k}+n_{2j}}x}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \|T^{n_{2j}}x\|} \right\| \geq$$

$$\frac{\|T^{m_{2k}}x\|}{4^k \|T\|^{n_{2k-1}} \|T^{n_{2k}}x\|} - \sum_{j\neq k}^{\infty} \frac{\|T^{m_{2k}-n_{2k}+n_{2j}}x\|}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \|T^{n_{2j}}x\|} >$$

$$\frac{\delta}{4^k \|T\|^{n_{2k-1}} \|T^{n_{2k}}x\|} - \sum_{j\neq k}^{\infty} \frac{\|T^{m_{2k}-n_{2k}+n_{2j}}x\|}{4^j \|T\|^{n_{2j-1}} \|T^{n_{2j}}x\|} =$$

$$\frac{\delta}{4^k\|T\|^{n_{2k-1}}\|T^{n_{2k}}x\|} - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\left\|T^{m_{2k}-n_{2k}+n_{2j}}x\right\|}{4^j\|T\|^{n_{2j-1}}\left\|T^{n_{2j}}x\right\|} - \sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{\left\|T^{m_{2k}-n_{2k}+n_{2j}}x\right\|}{4^j\|T\|^{n_{2j-1}}\left\|T^{n_{2j}}x\right\|} \overset{**}{\geq}$$

$$\frac{\delta}{4^k\|T\|^{n_{2k-1}}\|T^{n_{2k}}x\|} - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{M}{4^j\|T\|^{n_{2j-1}}\left\|T^{n_{2j}}x\right\|} - \sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{\|T\|^{m_{2k}-n_{2k}}\left\|T^{n_{2j}}x\right\|}{4^j\|T\|^{n_{2j-1}}\left\|T^{n_{2j}}x\right\|} \overset{iii)}{>}$$

$$k - \sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{\|T\|^{m_{2k}-n_{2k}}}{4^j\|T\|^{n_{2j-1}}} \overset{*}{>} k - \underbrace{\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{4^j}}_{convergente}.$$

Portanto $\|T^{m_{2k}-n_{2k}+n_{2j}}u\| > k - \sum\limits_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{4^j}$ e fazendo k tender a infinito em ambos os lados temos $\lim\limits_{k\to\infty}\|T^{m_{2k}-n_{2k}+n_{2j}}u\| = \infty$. Portanto $\limsup\limits_{n\to\infty}\|T^n u\| = \infty$.

3) $\Rightarrow$ 1) Para demonstrarmos tal implicação devemos mostrar a existência de um subconjunto Λ de X misturado. Afirmamos que o conjunto $\Lambda := \{\lambda x;\ \ \lambda \in \mathbb{K}\}$ é misturado, onde $\mathbb{K}$ é o corpo sobre o espaço X. Observe que a condição de não enumerabilidade é satisfeita, visto que $\mathbb{K}$ é não enumerável. Agora dados dois vetores quaisquer $\alpha x, \beta x \in \Lambda$ $(\alpha \neq \beta)$ temos

$$\liminf_{n\to\infty}\|T(\alpha x - \beta x)\| = |\alpha - \beta|\liminf_{n\to\infty}\|T(x)\| = 0$$

$$\limsup_{n\to\infty}\|T(\alpha x - \beta x)\| = |\alpha - \beta|\limsup_{n\to\infty}\|T(x)\| = \infty.$$

Assim, tal par é Li-Yorke caótico. ■

Para finalizar esse capítulo provaremos um terorema que nos dá outra caracterização para o caos de Li-Yorke. Tal teorema estabelece uma equivalência entre a definição de caos Li-Yorke e a definição a seguir.

Definição 3.25 Seja (X, T) um sistema dinâmico linear onde X é um espaço de Banach. Dizemos que T (ou (X, T)) satisfaz o *Critério do Caos de Li-Yorke* (CCLY) se existe uma sequência crescente $(n_k)_k$ de naturais e um subconjunto X_0 de X satisfazendo as condições abaixo:

a) $\lim\limits_{k\to\infty}\|T^{n_k}x\| = 0$ para todo $x \in X_0$.

b) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|T^n|_Y\| = \infty$. onde $Y := \overline{[X_0]}$.

Teorema 3.26 *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear onde X é um espaço de Banach. Então, T é Li-Yorke caótico se e somente se satisfaz o CCLY.*

Demonstração. Tal prova se baseará na caracterização do caos de Li-Yorke pela existência de um vetor irregular conforme o último teorema.

$\Rightarrow$) Suponha que T é Li-Yorke caótico. Pelo último teorema, existe $x_0 \in X$ tal que x_0 é irregular. Tome $X_0 = \{x_0\}$. Como x_0 é irregular, existe uma sequência crescente $(n_k)_k$ de naturais tal que $\lim_{k\to\infty} \|T^{n_k}x\| = 0$ visto que $\liminf_{n\to\infty} \|T^n x_0\| = 0$, portanto a condição a) do CCLY é satisfeita. Analisaremos agora a condição b):

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n|_Y\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{\|x\|\leq 1} \|T^n|_Y(x)\| \right) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| T^n|_Y \left(\tfrac{x_0}{\|x_0\|} \right) \right\| =$$

$$\tfrac{1}{\|x_0\|} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n|_Y(x_0)\| = \infty.$$

Portanto a condição b) é satisfeita, o que conclui essa implicação.

$\Leftarrow$) Suponha agora que T satisfaz o CCLY, ou seja existe uma sequência crescente $(s_k)_k$ de naturais e um subconjunto X_0 de X que satisfaz as condições da definição anterior. Se existir $x \in X_0$ tal que $\limsup_{n\to\infty} \|T^n x\| = \infty$, juntamente com a condição a) temos que x é irregular, portanto T será Li-Yorke caótico, o que conclui a prova. Suponha então que nenhum vetor de X_0 é irregular, ou seja para todo $u \in X_0$ temos que $\limsup_{n\to\infty} \|T^n u\| < \infty$ e $\lim_{k\to\infty} \|T^{s_k} u\| = 0$. Afirmamos que o mesmo ocorre para todos os elementos de $[X_0]$, visto que se existe algum $u \in [X_0]$ tal que $\limsup_{n\to\infty} \|T^n u\| = \infty$, então existem $u_1, \ldots, u_n \in X_0$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = u$ e

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n)\| = \infty \Rightarrow$$

$$\alpha_1 \limsup_{n\to\infty} \|T^n(u_1)\| + \cdots + \alpha_n \limsup_{n\to\infty} \|T^n(u_n)\| = \infty \Rightarrow$$

Portanto existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\limsup_{n\to\infty} \|T^n(u_j)\| = \infty$, o que é um absurdo. Nosso trabalho agora será construir um vetor irregular, para tal construiremos duas sequências crescentes de naturais $(n_k)_k$ e $(m_k)_k$ e uma sequência de vetores unitários $(u_j)_j$ de $[X_0]$ satisfazendo as duas condições abaixo:

i) $\|T^{n_k} u_j\| < \frac{1}{j}, j : 1, \ldots k, k \in \mathbb{N}$

ii)$\|T^{m_j}u_j\| > 3^j M_{j-1}, j \in \mathbb{N}$

onde $M_j := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{\|T^n u_i\|\,; i = 1, \ldots, j\} < \infty$ e $M_{-1} = 0$. Agora iremos explicitar o processo de construção de tais sequências. Tome u_1 como sendo um vetor unitário qualquer de $[X_0]$. Como $\|T^{s_k}u_1\| \to 0$ tome n_1 como sendo o menor termo de $(s_k)_k$, digamos s_{k0}, tal que $\|T^{s_{k0}}u_1\| < 1$ e, pela condição ii), tome m_1 qualquer.

Suponha agora que já foram definidos os j primeiros termos das sequências $(n_k)_k, (m_k)_k$ e $(u_k)_k$, trabalharemos agora em construir o termo de índice $j+1$ para cada uma das sequências. Como $u_1, \ldots, u_j$ já foram definidos temos que o número M_j está bem definido. Como $\limsup\limits_{n\to\infty} \|T^n|_Y\| = \infty$, existe um vetor unitário $u^{'}_{j+1} \in \overline{[X_0]}$ e $m_{j+1} > m_j$ tal que

$$\left\|T^{m_{j+1}}u^{'}_{j+1}\right\| > 3^{j+1}M_j + \delta,$$

onde $\delta > 0$. Como $u^{'}_{j+1} \in \overline{[X_0]}$, existe uma sequência de vetores unitários $(x_k)_k \subset [X_0]$ tal que $x_k \to u^{'}_{j+1}$. Logo

$$\|T^{m_{j+1}}x_k\| \overset{k\to\infty}{\to} \left\|T^{m_{j+1}}u^{'}_{j+1}\right\| > 3^{j+1}M_j + \delta.$$

Portanto, existe k_0 de forma que $\|T^{m_{j+1}}x_{k_0}\| > 3^{j+1}M_j$. Defina $u_{j+1} = x_{k_0}$. Para terminar, só nos resta definir n_{j+1}, para tal basta tomá-lo como o menor termo da sequência $(s_k)_k$ que satisfaz a condição i). Veja que isso é possível pois $\|T^{s_k}u\| \to 0$ para todo $u \in [X_0]$.

Agora construiremos um vetor e provaremos que o mesmo é irregular, o que concluirá a prova. Para tal, rearranjaremos as sequências $(n_k)_k$ e $(m_k)_k$ (excluindo e reindexando se necessário os termos de $(m_k)_k$) de tal forma que

$$n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \cdots < n_j < m_j < n_{j+1} < m_{j+1} < \cdots$$

Também considere um conjunto infinito $I \subset \mathbb{N}$ tal que, para todo $j \in \mathbb{N}$, se $i \in I$ e $i > j$ então $2^i > 2^j \|T\|^{n_j}$. Defina agora o vetor

$$u := \sum_{i\in I} \tfrac{u_i}{2^i}$$

e observe que tal vetor está bem definido visto que, considerando $I = \{i_j; j \in \mathbb{N}\}$, a sequência $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{u_{i_j}}{2^i}$ é de Cauchy. De fato, dados $k > l$ temos

$$\|S_k - S_l\| = \left\|\sum_{j=l+1}^{k} \frac{u_{i_j}}{2^{i_j}}\right\| \leq \sum_{j=l+1}^{k} \frac{\|u_{i_j}\|}{2^{i_j}} = \sum_{j=l+1}^{k} \frac{1}{2^{i_j}} \overset{k,l\to\infty}{\to} 0.$$

Como X é um espaço de Banach, tal sequência é convergente. Provaremos abaixo que $\limsup\limits_{n\to\infty} \|T^n u\| = \infty$, de fato, dado $j \in I$ temos

$$\|T^{m_j}u\| = \left\|\sum_{i\in I}\frac{T^{m_j}u_i}{2^i}\right\| = \left\|\frac{T^{m_j}u_j}{2^j} + \sum_{i\in I, i\neq j}\frac{T^{m_j}u_i}{2^i}\right\| \geq$$

$$\frac{\left\|T^{m_j}u_j\right\|}{2^j} - \sum_{i\in I, i\neq j}\frac{\left\|T^{m_j}u_i\right\|}{2^i} >$$

$$\frac{3^j M_{j-1}}{2^j} - \sum_{i\in I, i<j}\frac{M_{j-1}}{2^i} - \sum_{i\in I, i>j}\frac{\left\|T^{m_j}u_i\right\|}{2^i}$$

$$\frac{3^j M_{j-1}}{2^j} - M_{j-1} - \sum_{i\in I, i>j}\frac{1}{2^i} = \underbrace{\left(\frac{3^j}{2^j} - 1\right)}_{\to\infty}\underbrace{M_{j-1}}_{>0} - \underbrace{\sum_{i\in I, i>j}\frac{1}{2^i}}_{converge} \overset{j\in I, j\to\infty}{\to} \infty.$$

Provaremos abaixo que $\liminf\limits_{n\to\infty} \|T^n u\| = 0$, de fato, dado $j \in I$ temos

$$\|T^{n_j}u\| = \left\|\sum_{i\in I, i\leq j}\frac{T^{n_j}u_i}{2^i} + \sum_{i\in I, i>j}\frac{T^{n_j}u_i}{2^i}\right\| \leq$$

$$\sum_{i\in I, i\leq j}\frac{\left\|T^{n_j}u_i\right\|}{2^i} + \sum_{i\in I, i>j}\frac{\left\|T^{n_j}u_i\right\|}{2^i}$$

$$\sum_{i\in I, i\leq j}\frac{1}{2^i j} + \sum_{i\in I, i>j}\frac{\left\|T^{n_j}u_i\right\|}{2^i} <$$

$$\frac{1}{j} + \sum_{i\in I, i>j}\frac{1}{2^i} < \frac{1}{j} + \frac{1}{2^j} \overset{j\to\infty}{\to} 0$$

Portanto u é um vetor irregular, o que conclui a prova. ■

Referências

[**1**] BAYART, F.; MATHERON, E., *Dynamics of Linear Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[**2**] BERMÚDEZ T. , BONILLA A., MARTINÉZ-GIMÉNEZ F., PERIS A., *Li–Yorke and distributionally chaotic operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **373** (2011),83-93 .

[**3**] BERNARDES N. C., JR, BONILLA A., MÜLLER V. and PERIS A., *Li–Yorke chaos in linear dynamics*. Ergodic Theory and Dynamical Systems **35** (2015), 1723–1745.

[**4**] BRAZ, J. H., *Dinâmica de Operadores Lineares em Espaços de Frechét*. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017.

[**5**] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[**6**] GROSSE-ERDMANN, K. G.; MANGUILLOT, A. P., *Linear Chaos*, Springer Verlag, London, 2011.

[**7**] LIMA, E. L., *Espaços Métricos*, IMPA 2^a Ed, Rio de Janeiro, 2011.

[**8**] MUJICA, J., *Notas de Topologia Geral*, IMECC-UNICAMP, 2005.

[**9**] ROLEWICZ, S., *On orbits of elements*, Studia Mathematica **32** (1969), 17-22.

[**10**] SILVA, L.C., *Hiperciclicidade e Caos Linear*. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2018.