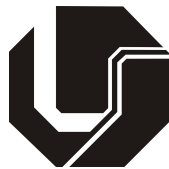


**KEVEN BELLO DO NASCIMENTO**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE  
UM DISCO DE PALHETAS FLEXÍVEIS NA  
PRESENÇA DE UMA TRINCA TRANSVERSAL  
MODELADA PELA ABORDAGEM FLEX**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**2022**

**KEVEN BELLO DO NASCIMENTO**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM DISCO DE PALHETAS FLEXÍVEIS NA PRESENÇA DE UMA TRINCA TRANSVERSAL MODELADA PELA ABORDAGEM FLEX**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

**Área de concentração:** Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

**Linha de Pesquisa:** Dinâmica de Sistemas Mecânicos.

**Orientador:** Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Junior

Uberlândia - MG

2022

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

N244 Nascimento, Keven Bello do, 1997-  
2022 Análise do Comportamento Dinâmico de um Disco de  
Palhetas Flexíveis na Presença de uma Trinca Transversal  
Modelada pela Abordagem FLEX [recurso eletrônico] /  
Keven Bello do Nascimento. - 2022.

Orientador: Aldemir Aparecido Cavalini Junior.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de  
Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica.  
Modo de acesso: Internet.  
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.337>  
Inclui bibliografia.  
Inclui ilustrações.

1. Engenharia mecânica. I. Cavalini Junior, Aldemir  
Aparecido, 1983-, (Orient.). II. Universidade Federal  
de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica.  
III. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:  
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091  
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



## UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico nº 614, COPEM				
Data:	03/08/2022	Hora de início:	08:00h	Hora de encerramento:	10:07h
Matrícula do Discente:	12012EMC015				
Nome do Discente:	Keven Bello do Nascimento				
Título do Trabalho:	Análise do Comportamento Dinâmico de um Disco de Palhetas Flexíveis na Presença de uma Trinca Transversal Modelada pela Abordagem FLEX				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por Webconferência via Microsoft Teams, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Valder Steffen Júnior - FEMEC/UFU; Rodrigo Nicoletti - USP/São Carlos e Aldemir Aparecido Cavalini Júnior - FEMEC/UFU orientador(a) do(a) candidato(a).

Iniciando os trabalhos o(a) presidente da mesa, Dr(a). Aldemir Aparecido Cavalini Júnior, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato(a), agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimeada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.





no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Nicoletti, Usuário Externo**, em 03/08/2022, às 10:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Valder Steffen Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 03/08/2022, às 10:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3773862** e o código CRC **E42240C9**.

---

*Aos meus pais, Carlos Enrique e Cristina.*

# Agradecimentos

Aos meu pais, Carlos Enrique e Cristina, por todos ensinamentos, lições, incentivos e motivações, os quais foram essenciais para moldar minha personalidade e fundamentais para alcançar meus objetivos.

Aos meus familiares por fornecerem o suporte necessário aos meus estudos e acreditarem no meu potencial.

Ao meu orientador, Prof. Aldemir, pela disponibilidade, atenção e compreensão, pelos esclarecimentos, e pelas oportunidades oferecidas para participar de diferentes projetos de pesquisa.

À Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e à Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica (POSFEMEC) por proverem os meios necessários para o fornecimento de um programa de pós graduação de excelência.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Petróleo Brasileiro S.A. (Petrobras) pelo incentivo financeiro destinado à execução de atividades de ensino e pesquisa.

*“Na adversidade, uns desistem, enquanto  
outros batem recordes.”  
(Ayrton Senna)*

NASCIMENTO, K. B. do. **Análise do Comportamento Dinâmico de um Disco de Palhetas Flexíveis na Presença de uma Trinca Transversal Modelada pela Abordagem FLEX.** 2022. 86 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

## Resumo

Detectar trincas incipientes em sistemas rotativos por meio de técnicas clássicas pode ser uma tarefa bastante onerosa. Em contrapartida, tendo em vista que o comportamento dinâmico de um sistema manifesta alterações em suas propriedades mecânicas, modelos matemáticos podem ser empregados para simular a presença de trincas nessas estruturas, permitindo compreender precisamente os efeitos induzidos por essa não linearidade e, conseqüentemente, auxiliando procedimentos de diagnóstico e identificação desse tipo de falha. Neste sentido, esta dissertação tem o intuito de analisar o comportamento dinâmico de um disco de palhetas flexíveis na presença de trincas transversais incipientes mediante a implementação numérica-computacional de modelos desenvolvidos em pesquisas anteriores. Para tal, considera-se como objeto de estudo um sistema composto por um rotor rígido de fundação flexível e quatro palhetas flexíveis conectadas a uma massa rígida na extremidade livre, possuindo uma trinca transversal em uma das palhetas e com movimento restrito ao plano. Na modelagem das vigas girantes são considerados o método dos elementos finitos aplicado à teoria de vigas de Euler-Bernoulli e o vetor de deformação linearizado de segunda ordem. Quanto à trinca, sua presença em uma das palhetas, para diferentes profundidades e posições, é simulada fazendo uso do modelo FLEX. As equações do movimento são desenvolvidas aplicando o método de Lagrange e resolvidas com auxílio da técnica de integração no tempo de Newmark associada ao processo iterativo de Newton-Raphson. As respostas dinâmicas são avaliadas e comparadas ao sistema saudável no domínio do tempo, modal e da frequência, e com auxílio de mapas de estabilidade, os quais são construídos considerando a teoria de Floquet. Os resultados demonstram que a modelagem de trincas transversais por meio da abordagem FLEX é adequada para representar a dinâmica de sistemas rotativos trincados.

**Palavras-chave:** Modelo de trinca FLEX. Dinâmica de sistemas rotativos. Não-linearidades. Método dos Elementos Finitos.

NASCIMENTO, K. B. do. **Analysis of the Dynamic Behavior of a Flexible-Blades Disc in the Presence of a Transverse Crack Modeled by FLEX Approach.** 2022. 86 p. Master Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia.

## Abstract

Detecting incipient cracks in rotating systems using classical techniques can be a very onerous task. On the other hand, as the dynamic behavior of a system manifests changes in its mechanical properties, mathematical models can be used to simulate the presence of cracks in these structures, allowing a precise understanding of the effects induced by this non-linearity and consequently helping diagnostic procedures and identification of this type of failure. In this sense, this dissertation aims to analyze the dynamic behavior of a flexible-blade disk in the presence of incipient transverse cracks through the numerical-computational implementation of models developed in previous researches. To this end, it is considered as object of study a system composed of a rigid rotor with a flexible foundation and four flexible blades connected to a rigid mass at the free end, having a transverse crack in one of the blades and with movement restricted to the plane. In the modeling of rotating beams, the finite element method applied to the Euler-Bernoulli beam theory and the second-order linearized strain vector are considered. For the crack, the presence in one of the blades, for different depths and positions, is simulated using the FLEX model. The equations of motion are developed applying the Lagrange method and solved using the Newmark time integration technique associated with the Newton-Raphson iterative process. The dynamic responses are evaluated and compared to the healthy system in the time, modal and frequency domains, and with stability maps, which are constructed considering Floquet's theory. The results demonstrate that the modeling of transverse cracks using the FLEX approach is appropriate to represent the dynamics of cracked rotating systems.

**Keywords:** FLEX crack model. Dynamics of rotating systems. Non-linearities. Finite Element Method.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Palhetas de turbocompressor de locomotiva danificadas: (a) Vista frontal do rotor e das palhetas fraturadas; (b) Em detalhe a marca de ruptura de três palhetas devido à propagação de trincas; (c) Presença de trinca na extremidade fixa de uma das palhetas. . . . .	24
Figura 2 – Modelo físico do sistema rotor-palhetas flexíveis. . . . .	32
Figura 3 – Referenciais auxiliares empregados no sistema rotor-palhetas flexíveis. . . . .	33
Figura 4 – Presença de desbalanceamento no sistema rotor-palhetas flexíveis. . . . .	37
Figura 5 – Elemento finito retangular. . . . .	40
Figura 6 – Sistema rotor-palhetas discretizado em elementos finitos. . . . .	42
Figura 7 – Malha da seção transversal do elemento de viga trincado. . . . .	45
Figura 8 – Comprimento equivalente da trinca para eixos. . . . .	46
Figura 9 – Campo de tensão na seção transversal do elemento de viga trincado. . . . .	47
Figura 10 – Evolução temporal da trinca localizada a 5% da extremidade fixa para diferentes profundidades: (a) $I_{yy}$ ; (b) $I_{zz}$ ; (c) $I_{zy}$ ; (d) $A_r$ . . . . .	56
Figura 11 – Evolução temporal da trinca localizada a 50% da extremidade fixa para diferentes profundidades: (a) $I_{yy}$ ; (b) $I_{zz}$ ; (c) $I_{zy}$ ; (d) $A_r$ . . . . .	57
Figura 12 – Evolução temporal da trinca localizada a 95% da extremidade fixa para diferentes profundidades: (a) $I_{yy}$ ; (b) $I_{zz}$ ; (c) $I_{zy}$ ; (d) $A_r$ . . . . .	58
Figura 13 – Mapas de estabilidade do sistema para uma trinca com diferentes profundidades e localizada, da extremidade fixa, a: (a) 5%; (b) 50%; (c) 95%. . . . .	59
Figura 14 – Multiplicadores característicos do sistema para uma trinca com diferentes profundidades e localizada, da extremidade fixa, a: (a) 5%; (b) 50%; (c) 95%. . . . .	60
Figura 15 – Mapas de estabilidade do sistema alternativo para uma trinca com diferentes profundidades e localizada, da extremidade fixa, a: (a) 5%; (b) 50%; (c) 95%. . . . .	61
Figura 16 – 1° ao 5° modo de vibrar do sistema operando a 360 rpm em 0.1 s: (a) Saudável; (b) $p = 5\%$ , $d = 50\%$ . . . . .	63
Figura 17 – 6° ao 10° modo de vibrar do sistema operando a 360 rpm em 0.1 s: (a) Saudável; (b) $p = 5\%$ , $d = 50\%$ . . . . .	64
Figura 18 – Comparação entre as respostas temporais do sistema a 360 rpm para uma trinca com diferentes profundidades e localizada, da extremidade fixa, a: (a) 5%; (b) 50%; (c) 95%. . . . .	66

Figura 19 – Comparação entre as respostas temporais do sistema a 1080 <i>rpm</i> para uma trinca com diferentes profundidades e localizada, da extremidade fixa, a: (a) 5%; (b) 50%; (c) 95%. . . . .	67
Figura 20 – Comparação entre os espectros de frequência do sistema a 360 <i>rpm</i> para uma trinca com diferentes profundidades e localizada, da extremidade fixa, a: (a) 5%; (b) 50%; (c) 95%. . . . .	69
Figura 21 – Comparação entre os espectros de frequência do sistema a 1080 <i>rpm</i> para uma trinca com diferentes profundidades e localizada, da extremidade fixa, a: (a) 5%; (b) 50%; (c) 95%. . . . .	70



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros físicos e geométricos do sistema. . . . .	55
Tabela 2 – Dez primeiras frequências naturais do sistema ( $Hz$ ) para diferentes posições ( $p$ ) e profundidades ( $d$ ) de trinca com o rotor operando a 360 $rpm$ em 0.1 s. . . . .	62

# Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
Antissim.	Antissimétrica
cte	Constante
gdls	Graus de Liberdade
MEF	Método dos Elementos Finitos
MPT	Manutenção Produtiva Total
SERR	Strain Energy Release Rate
Sim.	Simétrica
TPM	Total Productive Maintenance

# Lista de símbolos

## Letras Gregas

$\alpha_i, \dot{\alpha}_i$	Deslocamento e velocidade angular do corpo rígido $i$ no plano $xy$ com respeito ao referencial $B_b$
$\Gamma$	Vetor deformação linearizado de segunda ordem
$\gamma_1, \gamma_2$	Constante de proporcionalidade da matriz de massa e rigidez
$\delta$	Vetor de graus de liberdade
$\delta_a, \delta_t$	Vetor de graus de liberdade axiais e transversais
$\dot{\delta}_a, \dot{\delta}_t$	Derivada temporal do vetor de graus de liberdade axiais e transversais
$\epsilon_{cv}$	Erro admitido para o critério de convergência do modelo FLEX
$\epsilon_{xx}, \epsilon_{zz}$	Deformação na direção $x$ (longitudinal) e $z$
$\Theta_p$	Posição dos eixos principais de inércia
$\Theta_p^{n-1}, \Theta_p^n$	Posição dos eixos principais de inércia na iteração $n - 1$ e $n$
$\theta_a$	Fase do número complexo $r_a$
$\theta_{n,b_i}$	Rotação em torno de $z$ de um nó genérico da palheta $b_i$
$\theta_n, \theta_{n+1}$	Rotação em torno de $z$ do nó à esquerda e à direita
$\dot{\theta}_n, \dot{\theta}_{n+1}$	Velocidade angular em torno de $z$ do nó à esquerda e à direita
$\theta_{y,n}, \theta_{z,n}$	Rotação em torno de $y$ e $z$ do nó à esquerda
$\theta_{y,n+1}, \theta_{z,n+1}$	Rotação em torno de $y$ e $z$ do nó à direita
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Rotação em torno de $x, y$ e $z$
$\lambda$	Regulador de velocidade do rotor
$\lambda_j$	Multiplicador característico $j$
$\nu_b$	Coefficiente de Poisson das palhetas
$\rho_b$	Massa específica das palhetas
$\rho_j$	Expoente característico $j$

$\sigma$	Tensão axial
$\sigma_a$	Tensões atuantes nas áreas elementares
$\Phi, \dot{\Phi}$	Matriz de transição de estados e sua derivada temporal
$\phi_0$	Posição angular inicial do rotor no plano $xy$ em relação a $x$
$\varphi$	Posição angular da massa desbalanceada no plano $xy$ em relação a $x$
$\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}$	Deslocamento, velocidade e aceleração angular do rotor no plano $xy$
$\Psi$	Vetor de funções de forma
$\Psi_a, \Psi_t$	Vetor de funções de forma dos graus de liberdade axiais e transversais
$\psi_i$	Posição da palheta $i$ em relação à primeira no plano $xy$
$\Omega_{c,I}$	Vetor velocidade angular do centro do rotor em relação ao referencial $B_I$ no plano $xy$
$\Omega_{b_i,b}, \Omega_{b_i,I}$	Vetor velocidade angular de um ponto genérico $x_i$ da palheta $i$ em relação ao referencial $B_b$ e $B_I$ no plano $xy$
$\Omega_{t_i,I}, \Omega_{t_i,t}$	Vetor velocidade angular do centro de massa do corpo rígido $i$ na extremidade livre em relação ao referencial $B_I$ e $B_t$ no plano $xy$
$\Omega, \dot{\Omega}$	Velocidade e aceleração angular do rotor no plano $xy$

### Letras Latinas

<b>A</b>	Matriz de espaço de estados
$A_b$	Área transversal das palhetas
$A_r$	Área resistente, remanescente ou fechada
$a$	Profundidade da trinca
$a, c, e, f, j, w$	Coefficientes da matriz $\mathbf{K}_{Flex}$
<b>B</b>	Matriz de monodromia
$\mathbf{b}_{b,b}, \mathbf{b}_{b,I}$	Vetor genérico $b_b$ descrito no referencial $B_b$ e $B_I$
$\mathbf{b}_{t,b}, \mathbf{b}_{t,t}$	Vetor genérico $b_t$ descrito no referencial $B_b$ e $B_t$
$B_b$	Referencial móvel solidário ao movimento da palheta não deformada

$B_I$	Referencial inercial
$B_t$	Referencial móvel solidário ao movimento do corpo rígido na extremidade
$b_i$	Palheta $i$
$b_b, b_t$	Largura das palhetas e dos corpos rígidos na extremidade livre
$\mathbf{C}$	Matriz de amortecimento somada a de efeito giroscópico global
$\mathbf{C}_{gir,b}$	Matriz de coriolis elementar da palheta
$\mathbf{C}_{gir,t}$	Matriz de coriolis elementar do corpo rígido na extremidade livre
$\mathbf{c}_{b_i}^{(g)}$	Submatriz de coriolis escrita em função dos gdl globais da palheta $i$
$\mathbf{c}_{x_i}^{(g)}, \mathbf{c}_{y_i}^{(g)}$	Submatriz de coriolis associada ao acoplamento dos gdl do rotor com os gdl globais da palheta $i$ na direção $x$ e $y$
$\mathbf{c}_{b_i,b}^{(e)}, \mathbf{c}_{b_i,t}^{(e)}$	Submatriz de coriolis escrita em função dos gdl elementares da palheta $i$ associada à própria palheta e ao corpo rígido na extremidade livre
$\mathbf{c}_{x_i,b}^{(e)}, \mathbf{c}_{y_i,b}^{(e)}$	Submatriz de coriolis associada ao acoplamento dos gdl do rotor com os gdl elementares da palheta $i$ na direção $x$ e $y$
$\mathbf{c}_{x_i,t}^{(e)}, \mathbf{c}_{y_i,t}^{(e)}$	Submatriz de coriolis associada ao acoplamento dos gdl do rotor com os gdl elementares da palheta $i$ na direção $x$ e $y$ devido ao corpo rígido na extremidade livre
$C$	Centro geométrico do rotor
$c_x, c_y$	Amortecimento do suporte do rotor na direção $x$ e $y$
$c_2, c_3$	Constantes referentes ao acoplamento dos gdl da $\mathbf{K}_{Flex}$
$\mathbf{D}$	Matriz de amortecimento proporcional global
$d$	Deslocamento de $m_u$ em relação a $C$ (excentricidade)
$E_b$	Módulo de elasticidade das palhetas
$\mathbf{F}$	Vetor de forças global
$\mathbf{F}_{Flex}^{(e)}$	Vetor de forças elementar associado à trinca
$\mathbf{f}_{b_i}^{(g)}$	Vetor de forças escrito em função dos gdl globais da palheta $i$
$\mathbf{f}_{b_i,b}^{(e)}, \mathbf{f}_{b_i,t}^{(e)}$	Vetor de forças escrito em função dos gdl elementares da palheta $i$ associada à própria palheta e ao corpo rígido na extremidade livre

$\mathbf{f}_{g,b}, \mathbf{f}_{g,t}$	Vetor de forças elementar gravitacional da palheta e da massa rígida
$\mathbf{f}_{\Omega,b}, \mathbf{f}_{\Omega,t}$	Vetor de forças elementar da palheta e da massa rígida devido à velocidade angular
$\mathbf{f}_{\alpha_1,b}, \mathbf{f}_{\alpha_2,b}, \mathbf{f}_{\alpha,t}$	Vetor de forças elementar da palheta e da massa rígida devido à aceleração angular
$f_{ct}$	Força centrífuga total
$f_x, f_y$	Força total na direção $x$ e $y$
$\mathbf{G}$	Matriz de efeito giroscópico ou coriolis global
$\mathbf{g}_I$	Vetor aceleração da gravidade em relação ao referencial $B_I$
$G$	Centro geométrico da seção fechada
$g$	Aceleração da gravidade
$h_t$	Altura dos corpos rígidos na extremidade livre
$h, h_b$	Espessura das palhetas
$\mathbf{I}$	Matriz identidade
$I_b$	Momento de inércia de área das palhetas em relação a $z$
$I_y, I_z$	Momentos de inércia de área das palhetas em relação a $y$ e $z$
$I_{yy}, I_{zz}, I_{zy}$	Momentos de inércia de área da seção fechada
$i$	Índice da palheta
$J_r, J_t$	Inércia de rotação do rotor e dos corpos rígidos na extremidade livre em relação ao eixo $z$
$j$	Índice do multiplicador e expoente característico
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global
$\mathbf{K}_{Flex}$	Matriz de rigidez do elemento trincado
$\mathbf{K}_s$	Matriz de rigidez elementar estrutural da palheta
$\mathbf{K}_{c_b}, \mathbf{K}_{c_t}$	Matriz de rigidez elementar geométrica da palheta e da massa rígida
$\mathbf{K}_{g_b}, \mathbf{K}_{g_t}$	Matriz de rigidez elementar gravitacional da palheta e da massa rígida
$\mathbf{K}_{g_1}, \mathbf{K}_{g_2}, \mathbf{K}_{g_3}$	Matrizes de rigidez elementares geométricas (auxiliares)

$\mathbf{k}_{b_i}^{(g)}$	Submatriz de rigidez escrita em função dos gdl globais da palheta $i$
$\mathbf{k}_{x_i}^{(g)}, \mathbf{k}_{y_i}^{(g)}$	Submatriz de rigidez associada ao acoplamento dos gdl do rotor com os gdl globais da palheta $i$ na direção $x$ e $y$
$\mathbf{k}_{b_i,b}^{(e)}, \mathbf{k}_{b_i,t}^{(e)}$	Submatriz de rigidez escrita em função dos gdl elementares da palheta $i$ associada à própria palheta e ao corpo rígido na extremidade livre
$\mathbf{k}_{x_i,b}^{(e)}, \mathbf{k}_{y_i,b}^{(e)}$	Submatriz de rigidez associada ao acoplamento dos gdl do rotor com os gdl elementares da palheta $i$ na direção $x$ e $y$
$\mathbf{k}_{x_i,t}^{(e)}, \mathbf{k}_{y_i,t}^{(e)}$	Submatriz de rigidez associada ao acoplamento dos gdl do rotor com os gdl elementares da palheta $i$ na direção $x$ e $y$ devido ao corpo rígido na extremidade livre
$K$	Número de intervalos em um período
$k_x, k_y$	Rigidez do suporte do rotor na direção $x$ e $y$
$\mathbf{L}_{n_e}$	Matriz de transformação linear que relaciona os gdl do último elemento com os globais da sua palheta
$\mathbf{L}_w$	Matriz de transformação linear que relaciona os gdl do elemento $w$ com os globais da sua palheta
$L$	Comprimento do elemento finito
$L_c$	Comprimento equivalente da trinca
$L_b, L_t$	Comprimento das palhetas e dos corpos rígidos na extremidade livre
$\mathbf{M}$	Matriz de massa global
$\mathbf{M}_I, \mathbf{M}_s$	Matriz de massa elementar devido à inércia de rotação e estrutural
$\mathbf{m}_{b_i}^{(g)}$	Submatriz de massa escrita em função dos gdl globais da palheta $i$
$\mathbf{m}_{x_i}^{(g)}, \mathbf{m}_{y_i}^{(g)}$	Submatriz de massa associada ao acoplamento dos gdl do rotor com os gdl globais da palheta $i$ na direção $x$ e $y$
$\mathbf{m}_{b_i,b}^{(e)}, \mathbf{m}_{b_i,t}^{(e)}$	Submatriz de massa escrita em função dos gdl elementares da palheta $i$ associada à própria palheta e ao corpo rígido na extremidade livre
$\mathbf{m}_{x_i,b}^{(e)}, \mathbf{m}_{y_i,b}^{(e)}$	Submatriz de massa associada ao acoplamento dos gdl do rotor com os gdl elementares da palheta $i$ na direção $x$ e $y$
$\mathbf{m}_{x_i,t}^{(e)}, \mathbf{m}_{y_i,t}^{(e)}$	Submatriz de massa associada ao acoplamento dos gdl do rotor com os gdl elementares da palheta $i$ na direção $x$ e $y$ devido ao corpo rígido na extremidade livre

$M_y, M_z$	Momento dinâmico em torno de $y$ e $z$
$m$	Quantidade de elementos entre uma seção e o raio externo do rotor
$m_u$	Massa desbalanceada
$m_r, m_t$	Massa do rotor e dos corpos rígidos na extremidade livre
$m_x, m_y$	Massa total do sistema na direção $x$ e $y$
$m_{rx}, m_{ry}$	Massa do rotor na direção $x$ e $y$
$m_{ux}, m_{uy}$	Massa desbalanceada na direção $x$ e $y$
$N$	Força normal
$N_{c,b_i}, N_{g,b_i}$	Força normal centrífuga e gravitacional geradas pela palheta $b_i$
$N_{c,t_i}, N_{g,t_i}$	Força normal centrífuga e gravitacional geradas pelo corpo rígido $t_i$ na extremidade livre
$n_e$	Número de elementos finitos
$P$	Energia potencial
$P_{b_i}, P_g, P_r$	Energia potencial de deformação da palheta $i$ , gravitacional do sistema e armazenada nos suportes elásticos do rotor
$\mathbf{Q}$	Matriz de transformação algébrica
$\mathbf{q}^{(e)}$	Vetor de coordenadas elementar
$\mathbf{q}_{t+\Delta t}$	Vetor de coordenadas generalizadas no instante $t + \Delta t$
$\mathbf{q}_{t+\Delta t}^{n-1}$	Vetor de coordenadas generalizadas da iteração $n - 1$ no instante $t + \Delta t$
$\mathbf{q}_{t+\Delta t}^n$	Vetor de coordenadas generalizadas da iteração $n$ no instante $t + \Delta t$
$\Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t}^n$	Correção do vetor de coordenadas generalizadas da iteração $n - 1$ no instante $t + \Delta t$
$\Delta \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^n$	Correção da primeira derivada temporal do vetor de coordenadas generalizadas da iteração $n - 1$ no instante $t + \Delta t$
$\Delta \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^n$	Correção da segunda derivada temporal do vetor de coordenadas generalizadas da iteração $n - 1$ no instante $t + \Delta t$
$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}, \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$	Derivadas temporais do vetor de coordenadas generalizadas em $t + \Delta t$



$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^{n-1}, \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^{n-1}$	Derivadas temporais do vetor de coordenadas generalizadas da iteração $n - 1$ no instante $t + \Delta t$
$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^n, \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^n$	Derivadas temporais do vetor de coordenadas generalizadas da iteração $n$ no instante $t + \Delta t$
$\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$	Vetor de coordenadas generalizadas e suas derivadas temporais
$\mathbf{q}_t, \dot{\mathbf{q}}_t, \ddot{\mathbf{q}}_t$	Vetor de coordenadas generalizadas e suas derivadas temporais em $t$
$Q_\kappa$	Esforço generalizado $\kappa$
$q_\kappa, \dot{q}_\kappa$	Coordenada generalizada $\kappa$ e sua derivada temporal
$\mathbf{R}$	Matriz fundamental do sistema invariante no tempo
$\mathbf{R}_{t+\Delta t}^{n-1}$	Resíduo da iteração $n - 1$ no instante $t + \Delta t$
$\mathbf{R}_{t+\Delta t}^n$	Resíduo da iteração $n$ no instante $t + \Delta t$
$\dot{\mathbf{r}}_{b_i, I}$	Vetor velocidade linear de um ponto genérico $x_i$ da palheta $i$ em relação ao referencial $B_I$
$\dot{\mathbf{r}}_{c, I}$	Vetor velocidade linear do centro do rotor em relação ao referencial $B_I$
$\dot{\mathbf{r}}_{t_i, I}$	Vetor velocidade linear do centro de massa do corpo rígido $i$ na extremidade livre em relação ao referencial $B_I$
$\mathbf{r}_{b_i, b}, \mathbf{r}_{b_i, I}$	Vetor posição de um ponto genérico $x_i$ da palheta $i$ em relação ao referencial $B_b$ e $B_I$
$\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_{c, I}$	Vetor posição do centro do rotor em relação ao referencial $B_I$
$\mathbf{r}_{t_i, I}, \mathbf{r}_{t_i, t}$	Vetor posição do centro de massa do corpo rígido $i$ na extremidade livre em relação ao referencial $B_I$ e $B_t$
$\mathbf{r}_{u, I}, \dot{\mathbf{r}}_{u, I}$	Vetor posição e velocidade linear da massa desbalanceada em relação ao referencial $B_I$
$r$	Raio do rotor
$r_t$	Distância do centro de massa do corpo rígido ao seu ponto de fixação
$r_a, r_a^*$	Coordenada complexa na forma retangular e exponencial
$\mathbf{T}_{b, I}$	Matriz de transformação de coordenadas do referencial $B_b$ para $B_I$
$\mathbf{T}_{t, b}$	Matriz de transformação de coordenadas do referencial $B_t$ para $B_b$

$\mathbf{T}_{t+\Delta t}^n$	Matriz iterativa
$T$	Energia cinética ou período de tempo
$T_b, T_r, T_t$	Energia cinética de translação e rotação das palhetas, do rotor e dos corpos nas extremidades livres
$t_i$	Corpo rígido $i$ na extremidade livre
$\Delta t$	Intervalo de tempo entre dois instantes
$\Delta t_k$	Intervalo de tempo entre dois instantes de um intervalo $k$
$t, t_0$	Instante de tempo e tempo inicial
$t_{k-1}, t_k$	Instante de tempo inicial e final do intervalo $k$
$U_{n,b_i}$	Deslocamento longitudinal $x$ de um nó genérico da palheta $b_i$
$U_n, U_{n+1}$	Deslocamento longitudinal $x$ do nó à esquerda e à direita
$\dot{U}_n, \dot{U}_{n+1}$	Velocidade longitudinal $x$ do nó à esquerda e à direita
$u_i, \dot{u}_i$	Deslocamento e velocidade longitudinal de um ponto $x_i$
$V_{n,b_i}$	Deslocamento transversal $y$ de um nó genérico da palheta $b_i$
$V_n, V_{n+1}$	Deslocamento transversal $y$ do nó à esquerda e à direita
$\dot{V}_n, \dot{V}_{n+1}$	Velocidade transversal $y$ do nó à esquerda e à direita
$v_i, \dot{v}_i$	Deslocamento e velocidade transversal de um ponto $x_i$
$\mathbf{x}_0$	Condição inicial do vetor de espaço de estados
$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$	Vetor de espaço de estados e sua derivada temporal
$x_i$	Ponto genérico da palheta $i$
$x_r, \dot{x}_r$	Deslocamento e velocidade linear do rotor na direção $x$
$\bar{x}_1, \bar{x}_2$	Variável de integração 1 e 2
$x, y, z$	Eixo coordenado $x, y$ e $z$
$y_i$	Deslocamento transversal $y$ na extremidade da palheta $i$
$y_a, z_a$	Parte imaginária e real do número complexo $r_a$
$y_g, z_g$	Coordenada $y$ e $z$ de $G$
$y_r, \dot{y}_r$	Deslocamento e velocidade linear do rotor na direção $y$
$y_{ag}, z_{ag}$	Distância dos centros geométricas de cada área elementar à $G$

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>23</b>
1.1	Motivação pelo tema	23
1.2	Objetivos	24
1.3	Estrutura da Dissertação	25
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>32</b>
<b>3.1</b>	<b>Sistema Rotor-Palhetas Flexíveis</b>	<b>32</b>
3.1.1	Sistemas de Referência e Transformação de Coordenadas	33
3.1.2	Vetores Posição e Velocidade	35
3.1.3	Expressões de Energia	37
3.1.4	MEF Aplicado a Vigas de Euler-Bernoulli	39
3.1.5	Força Normal	41
3.1.6	Método de Lagrange e Equações do Movimento	43
<b>3.2</b>	<b>Modelagem de Trincas Transversais pela Abordagem FLEX</b>	<b>44</b>
<b>3.3</b>	<b>Teoria de Floquet e Análise de Estabilidade</b>	<b>49</b>
<b>3.4</b>	<b>Integração Numérica das Equações do Movimento</b>	<b>52</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>54</b>
4.1	Características do Sistema e Informações Adicionais	54
4.2	Evolução Temporal da Trinca (Fenômeno de <i>Breathing</i> )	55
4.3	Estabilidade do Sistema Saudável e Trincado	58
4.4	Análise Modal	61
4.5	Resposta Temporal	65
4.6	Função Resposta em Frequência	68
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>71</b>
5.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	73
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>74</b>
	<b>APÊNDICE A – MATRIZES DO SISTEMA</b>	<b>78</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação pelo tema

A evolução do capitalismo trouxe à tona dois quesitos imprescindíveis para uma organização se manter competitiva no mercado global: disponibilidade e confiabilidade. Em outras palavras, a relevância de uma empresa no seu segmento está associada ao tempo com que seus equipamentos ficam à disposição para atuarem de forma produtiva e à capacidade de mantê-los funcionando por um determinado período sem falhas. Neste sentido, possuir um eficiente plano de manutenção pode ser o diferencial, pois permite a redução do número de paradas inesperadas e não programadas de equipamentos, aumentando a produtividade e diminuindo os gastos com o processo produtivo.

A ABNT (1994) enumera três tipos básicos de manutenção: corretiva (programada e não-programada), preventiva e preditiva ou controlada. Cada abordagem engloba seus próprios conceitos, considerações, particularidades e condições de aplicação, cabendo ao gestor encarregado da manutenção definir aquela(s) que melhor se encaixa(m) ao perfil da corporação. De qualquer maneira, o plano de manutenção deve ser bem elaborado, a fim de otimizar as tarefas relacionadas à manutenção, garantir a melhor alocação de mão de obra, proporcionar um ambiente seguro, fornecer produtos de qualidade e, principalmente, reduzir custos.

Entretanto, no âmbito industrial, adota-se com frequência uma estratégia preditiva, consistindo em realizar o monitoramento constante das condições operacionais dos equipamentos para identificar falhas ainda nos estágios iniciais e, assim, estimar o melhor momento para efetuar intervenções.

Na indústria, sistemas rotativos dotados de palhetas são amplamente empregados, sendo encontrados em geradores, compressores, exaustores e turbinas. Devido a suas características de operação (sob variações de temperatura, pressão e velocidade de rotação, por exemplo), eles estão suscetíveis a diferentes tipos de falhas e danos, principalmente à presença de trincas, as quais, caso não sejam detectadas a tempo, podem alterar o comportamento dinâmico do sistema e, conseqüentemente, colapsar toda a estrutura (ver Figura 1).

Inúmeras técnicas preditivas podem ser empregadas para identificar trincas nesses componentes estruturais, tais como ultrassom, líquido penetrante, raio-X e radiação infravermelha, também conhecidas como técnicas clássicas. Apesar de serem eficazes, não são tão adequadas, tendo em vista que geralmente necessitam a interrupção do funcionamento do maquinário, ocasionando elevadas despesas. Por outro lado, padrões

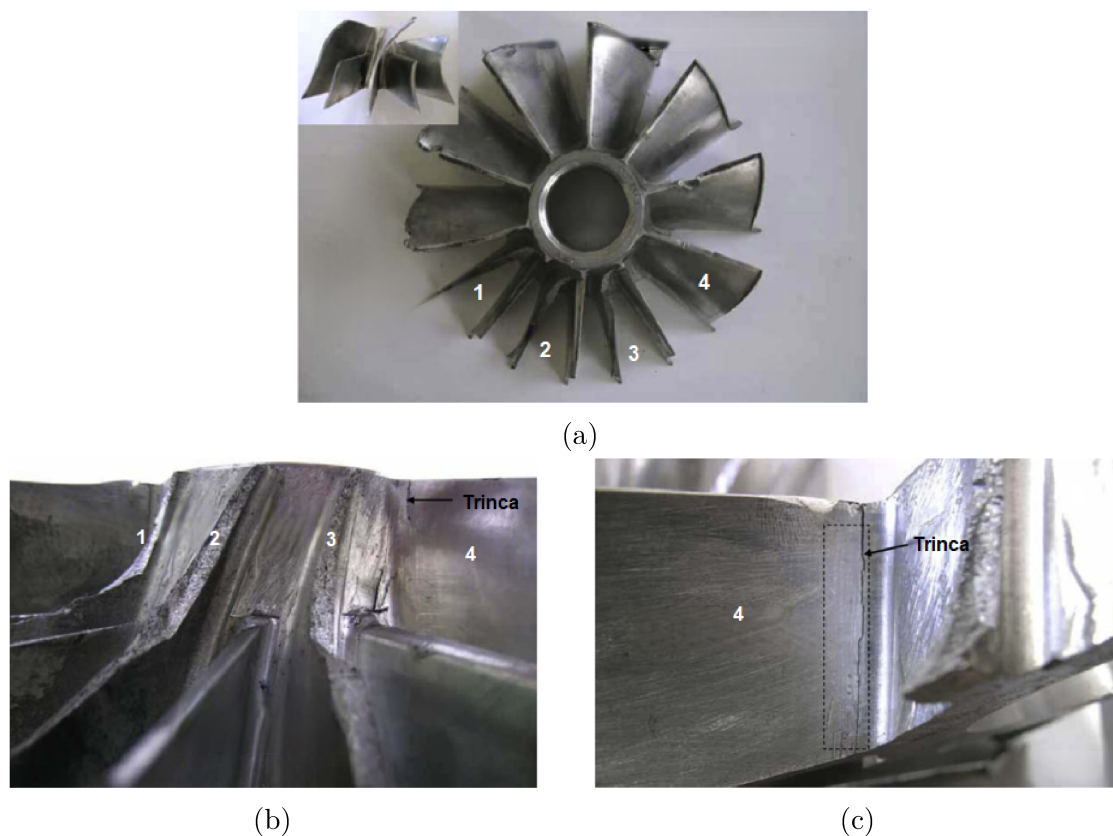


Figura 1 – Palhetas de turbocompressor de locomotiva danificadas: (a) Vista frontal do rotor e das palhetas fraturadas; (b) Em detalhe a marca de ruptura de três palhetas devido à propagação de trincas; (c) Presença de trinca na extremidade fixa de uma das palhetas.

Fonte: Yu e Xu (2009) - Adaptado.

de vibração refletem variações nas propriedades mecânicas de um sistema e, portanto, podem ser monitorados (normalmente sem parada) para diagnosticar, identificar e localizar trincas, caracterizando o típico problema inverso de engenharia (SIMÕES, 2002).

Dessa maneira, a aplicação de modelos matemáticos para simular a presença de trincas em estruturas se torna extremamente útil para compreender os efeitos dinâmicos induzidos por essa não-linearidade, servindo, também, como ferramenta auxiliar nos processos de diagnóstico de defeitos em máquinas rotativas.

## 1.2 Objetivos

Neste contexto, esta dissertação tem como objetivo geral analisar os efeitos dinâmicos induzidos pela presença de trincas transversais em palhetas flexíveis de sistemas rotativos considerando o modelo de trinca FLEX, na tentativa de reproduzir o comportamento vibratório real de equipamentos rotativos trincados e contribuir para os procedimentos de identificação dessa não-linearidade. Para alcançá-lo, os seguintes objetivos específicos são definidos:

- Determinar as expressões de energia cinética e potencial de um rotor rígido, provido de quatro palhetas flexíveis conectadas a massas rígidas na extremidade livre, suportado por apoios elásticos e de movimento restrito ao plano;
- Adotar o método dos elementos finitos sob as hipóteses da teoria de vigas de Euler-Bernoulli e considerar um vetor de deformação linearizado de segunda ordem para modelar matematicamente as palhetas;
- Obter as equações do movimento pelo método de Lagrange;
- Incorporar uma trinca transversal em uma das palhetas, para diferentes profundidades e posições, fazendo uso do modelo FLEX;
- Estabelecer parâmetros físicos e geométricos para caracterizar o sistema rotativo;
- Implementar computacionalmente o modelo matemático em *Python*;
- Integrar numericamente as equações do movimento combinando as técnicas de Newmark e Newton-Raphson;
- Verificar a abertura e fechamento da trinca ao longo do tempo a partir de grandezas associadas à seção transversal do elemento trincado;
- Apontar as condições estáveis e instáveis de operação do conjunto empregando a teoria de Floquet; e
- Avaliar as respostas dinâmicas do sistema saudável e trincado no domínio temporal, modal e da frequência, e através de mapas de estabilidade, tomando como base constatações da literatura.

### 1.3 Estrutura da Dissertação

Com o intuito de favorecer a compreensão do tema e dos propósitos desta dissertação, o texto é estruturado, além da introdução e das referências bibliográficas, em quatro capítulos e um apêndice, conforme descrito abaixo.

No Capítulo 2 são expostas diversas pesquisas desenvolvidas nos últimos cinquenta anos dedicadas à modelagem de trincas em componentes estruturais e ao estudo dos efeitos provocados pela sua presença, com ênfase em vigas estáticas, eixos rotativos e vigas girantes.

No Capítulo 3 é elucidada a teoria envolvida na dinâmica de sistemas rotativos trincados, sendo abordada a modelagem matemática do rotor, das palhetas, das massas e da trinca transversal na viga, a obtenção das equações do movimento, a resolução numérica do sistema dinâmico e a determinação da estabilidade do conjunto.

No Capítulo 4 são apontados e discutidos os resultados associados à implementação numérica-computacional do modelo matemático que representa o equipamento rotativo, tanto no estado saudável quanto no trincado.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões a respeito das respostas dinâmicas obtidas no desenvolvimento desta monografia, bem como sugestões para trabalhos futuros no âmbito da análise de defeitos em máquinas rotativas.

No Apêndice A são indicadas as matrizes que caracterizam o sistema rotor-palhetas flexíveis modelado no Capítulo 3.

## 2 Revisão Bibliográfica

De acordo com Wauer (1990), em meados da década de 1970, as organizações começaram a se interessar pelo monitoramento das condições operacionais de máquinas e equipamentos, buscando evitar intervenções desnecessárias de reparo e reduzir custos. Até então, era comum adotar uma abordagem puramente corretiva, ou seja, esperar que as falhas causassem uma queda acentuada de desempenho para corrigi-las. Essa mudança de posicionamento pode ser associada à difusão dos conceitos de manutenção preventiva e preditiva, e ao surgimento de um novo programa de manutenção no Japão, denominado manutenção produtiva total (MPT, ou do inglês *total productive maintenance* - TPM), que, somados ao desenvolvimento tecnológico do período, revolucionaram as técnicas de gerenciamento de manutenção empregadas no mundo (SANTOS, 2009).

Segundo o mesmo autor, haviam poucos trabalhos dedicados ao estudo do comportamento vibratório de estruturas trincadas na época, a exemplo das pesquisas pioneiras de Kirmser (1944) e Thomson (1949), que buscaram compreender experimentalmente as características vibratórias de uma viga na presença dessa não-linearidade mediante a introdução de pequenas descontinuidades, como fendas e ranhuras. Apenas com o desenvolvimento dos fundamentos da mecânica da fratura ao final da década de 1960 que diferentes modelos matemáticos passaram a ser propostos para entender os efeitos causados por trincas em estruturas unidimensionais (vigas e colunas) e bidimensionais (placas e cascas). A maioria desses modelos procuravam simular a trinca por meio de uma matriz de flexibilidade local (normalmente  $6 \times 6$ ) para descrever a redução da rigidez causada pela sua presença. Entre as publicações mais relevantes, podem ser citadas: Liebowitz, Vanderveldt e Harris (1967), Liebowitz e Claus (1968) e Okamura et al. (1969), que determinaram o elemento diagonal correspondente à tensão axial; Rice e Levy (1972), que computaram os quatro elementos correspondentes à tensão axial e de flexão, incluindo os termos de acoplamento; Dimarogonas e Massouros (1981), que calcularam o elemento diagonal relacionado ao cisalhamento paralelo à borda da fissura; e Anifantis e Dimarogonas (1983), que introduziram uma matriz  $5 \times 5$  negligenciando os efeitos de torção. Somente com Papadopoulos e Dimarogonas (1987) que a forma completa dessa matriz para um carregamento arbitrário de uma estrutura de viga foi apresentada, em razão das simplificações introduzidas nos modelos anteriores.

Outro trabalho interessante é o de Gudmundson (1982). Em sua pesquisa, formulou um método de perturbação para estimar, a partir das características originais de uma estrutura, mudanças nas suas frequências de ressonância devido à presença de trincas, entalhes e outras alterações geométricas. No caso de uma viga engastada-livre, verificou que para uma mesma profundidade de trinca, à medida que ela se afasta da fixação, menor



a alteração nas frequências naturais em relação à viga saudável. O mesmo foi notado quando mantida a localização da trinca, mas diminuída sua profundidade.

Mais tarde, Chen, L. e Chen, C. (1988) desenvolveram um modelo de elementos finitos simples e eficiente para a análise de vibração e estabilidade de palhetas rotativas espessas na presença de uma única trinca, assumida sempre aberta e localizada na aresta, além de considerarem os efeitos gerados pela deformação transversal e inércia de rotação. Eles verificaram que conforme a trinca se aproxima da extremidade fixa da palheta, maior a flexibilidade gerada por ela e, conseqüentemente, maior a redução das frequências naturais. Posteriormente, Chen, L. e Chen, J. (1990) estenderam o estudo anterior para a análise de estabilidade de uma palheta trincada submetida a esforços não conservativos, como momentos e forças aerodinâmicas, sendo observado que a presença de trincas, somada à velocidade de rotação, reduz a velocidade de *flutter* e causa instabilidades estruturais, com efeito mais significativo na velocidade aerodinâmica crítica.

Também considerando os efeitos provocados pela deformação por cisalhamento e a influência da inércia de rotação, Datta e Ganguli (1990) aplicaram elementos finitos para estudar a vibração transversal de uma barra rotativa uniforme com zonas localizadas de dano. De forma semelhante, notaram que a frequência natural do sistema diminui à medida que o dano se aproxima da extremidade engastada da barra, sendo mais evidente para grandes danos.

Ostachowicz e Krawczuk (1990), assumindo a não propagação da trinca e que ela pode abrir e fechar regularmente, estudaram os efeitos da sua posição e do seu tamanho no comportamento dinâmico de uma viga submetida a vibrações forçadas. Como resultado, concluíram que é possível identificar a localização da trinca e ter a noção de sua magnitude medindo a deflexão da viga. Sendo mais específico, eles constataram que para uma mesma localização, quanto maior a profundidade da trinca, maior a deflexão na extremidade livre. Para uma mesma profundidade, observaram que essa deflexão aumenta conforme a trinca se aproxima da fixação.

Seguindo essa linha de raciocínio, Rizos, Aspragathos e Dimarogonas (1990) desenvolveram um método não destrutivo de identificação e monitoramento de trincas transversais superficiais em estruturas unidimensionais, o qual consistia apenas na avaliação das características modais. Sua metodologia foi validada teoricamente com auxílio de um modelo de trinca para vigas sob flexão, caracterizado pela introdução de uma mola de torção com rigidez dependente das propriedades do elemento trincado (módulo de elasticidade, momento de inércia da seção transversal e espessura) e da profundidade da trinca, assumida sempre aberta e uniforme. Eles verificaram que o procedimento não era preciso para trincas muito pequenas (profundidades menores que 10%), mas, segundo eles, não se tratava de uma limitação à técnica, tendo em vista que trincas de pequenas dimensões não são indicadoras de falhas imediatas.

Wauer (1992) examinou a dinâmica de uma palheta rotativa trincada também empregando um modelo de mola para caracterizar a diminuição da rigidez efetiva do sistema causada pela trinca, assumida permanentemente aberta. Ele verificou que as frequências de ressonância, apesar de aumentarem com a velocidade de rotação (enrijecimento centrífugo), são menores no sistema trincado se comparadas ao saudável, sofrendo grandes reduções à medida que a trinca se move da extremidade livre até a fixação e com o acréscimo da profundidade.

De forma análoga, Wu e Huang (1998) investigaram o comportamento dinâmico de uma viga girante contendo uma trinca transversal modelada pelo método da taxa de liberação da energia de deformação (*strain energy release rate* - SERR), oriundo da mecânica da fratura. Seus resultados indicaram que os efeitos causados pela trinca sobre as frequências naturais e os deslocamentos são apreciáveis apenas com trincas relativamente profundas e próximas à raiz da palheta, podendo, ainda, tornar-se inexpressíveis devido a rigidez centrífuga.

Sob o ponto de vista teórico e experimental, Saavedra e Cuitiño (2001) efetuaram uma análise dinâmica de diferentes sistemas multi-vigas contendo uma trinca transversal, a qual foi modelada com auxílio da função de densidade de energia dada pela teoria da mecânica da fratura. Segundo os autores, a presença da trinca em um membro estrutural gera uma variação local de flexibilidade devido a sua extremidade estar sujeita a uma concentração de tensão sobre carregamentos. Suas análises apontam a aparição de picos em múltiplos inteiros da frequência de excitação no sinal espectral e a existência de pequenas oscilações nos picos da resposta temporal (os vales são representados normalmente). Além disso, eles ressaltam que pode ser inconveniente diagnosticar trincas moderadas a partir das frequências naturais e modos de vibrar, haja vista os pequenos efeitos que elas geram.

No intuito de avaliar a resposta dinâmica e estabilidade de um rotor trincado, o modelo de trinca aplicado por Rizos, Aspragathos e Dimarogonas (1990) foi empregado por Rende et al. (2017, 2019) para simular a presença de trincas transversais nas palhetas flexíveis de um disco rotativo, cuja representação matemática foi desenvolvida e validada experimentalmente por Santos et al. (2004). De forma geral, os autores evidenciaram que o aumento da profundidade de uma trinca localizada próxima à fixação provoca a redução das frequências naturais em relação ao sistema saudável (mais evidente para baixas velocidades de rotação), tende a aumentar a faixa de operação instável (fato associado à presença de palhetas com frequências de ressonância distintas - *mistuning*) e não necessariamente leva ao aumento da amplitude de vibração na extremidade livre das palhetas.

Apesar dos modelos mencionados permitirem entender razoavelmente bem a influência de trincas em estruturas de viga, não representam o comportamento e efeito real desse defeito quando em máquinas rotativas, tendo em vista que a maioria considera a trinca sempre aberta. Sabe-se que devido à rotação do sistema mecânico, combinado

aos carregamentos estáticos, a trinca pode abrir e fechar gradualmente de acordo com a distribuição de tensão e deformação sobre a área danificada, alterando a rigidez do sistema ao longo do tempo. Esse mecanismo é conhecido como *breathing* (HORRIGAN; WILLIAMS; PARSEWSKI, 1992; CAVALINI JR, 2013).

Certos autores, como Gasch (1976) e Mayes e Davies (1976, 1984), propuseram modelos para descrever esse fenômeno baseados em simples funções matemáticas. Entretanto, mesmo fornecendo resultados confiáveis, não são capazes de correlacionar o aumento da flexibilidade de um determinado elemento com a profundidade da trinca, uma vez que não fazem uso de distribuições de tensão e deformação (CAVALINI JR, 2013).

Outra abordagem frequentemente empregada é a simulação numérica de um elemento trincado por meio de um modelo de elementos finitos 2D ou 3D. A aplicação dessa técnica fornece resultados extremamente precisos (fiéis à realidade), contudo demandam elevado custo computacional.

De forma a contornar esses problemas, Bachschmid et al. (2003) descreveram e validaram um modelo unidimensional que permite simular o comportamento estático e dinâmico de uma trinca transversal em um rotor horizontal sob a ação de quaisquer carregamentos, incluindo efeitos térmicos. Em seguida, Bachschmid e Tanzi (2004), considerando o mesmo modelo de trinca, autointitulado modelo FLEX, analisaram as deflexões de uma viga de seção transversal circular na presença de diferentes profundidades de trinca para diversos tipos de carga aplicada (axial, de flexão, de torção e cisalhante) e compararam os resultados com os fornecidos por um modelo de elementos finitos 3D altamente refinado. Em ambas publicações, o modelo unidimensional demonstrou ser uma abordagem poderosa (tão precisa quanto o modelo 3D, mas menos custosa) para analisar rotores trincados.

Devido a essa característica, alguns autores optaram por adotar a abordagem FLEX para descrever o fenômeno de *breathing* da trinca em sistemas mecânicos e obtiveram bons resultados em seus estudos. Morais, Steffen e Bachschmid (2008) propuseram uma técnica de identificação de parâmetros desconhecidos e variantes no tempo usando funções ortogonais, a qual se mostrou útil na detecção de trincas em máquinas rotativas. Morais et al. (2010) apresentaram uma metodologia para simulação de um sistema viga-trinca-PZT em elementos finitos, onde os autores precisaram adaptar o modelo FLEX de eixos para vigas. Morais, Steffen e Mahfoud (2012) avaliaram a possibilidade de monitorar e controlar o comportamento dinâmico de máquinas rotativas com eixos trincados utilizando um atuador eletromagnético. Cavalini Jr et al. (2020) investigaram as melhores condições de aplicação da técnica de combinação de ressonância para detecção de trincas incipientes em eixos rotativos.

Considerando essas informações e de forma semelhante a Rende et al. (2017, 2019), este trabalho será dedicado à análise do comportamento dinâmico do sistema rotor-palhetas flexíveis desenvolvido por Santos et al. (2004) na presença de trincas transversais incipientes,

---

mas modelando a não-linearidade por meio da abordagem FLEX adaptada a vigas por Moraes et al. (2010). Assim, espera-se que este estudo contribua para pesquisas futuras no que se refere a procedimentos de diagnóstico de falhas em máquinas rotativas.

# 3 Fundamentação Teórica

## 3.1 Sistema Rotor-Palhetas Flexíveis

Sustentando-se nos trabalhos elaborados por Saracho (2002), Santos et al. (2004), Zanitti (2018) e Rende (2020), esta seção é destinada à modelagem matemática do sistema rotor-palhetas flexíveis ilustrado na Figura 2, a fim de analisá-lo dinamicamente na presença de trincas transversais incipientes.

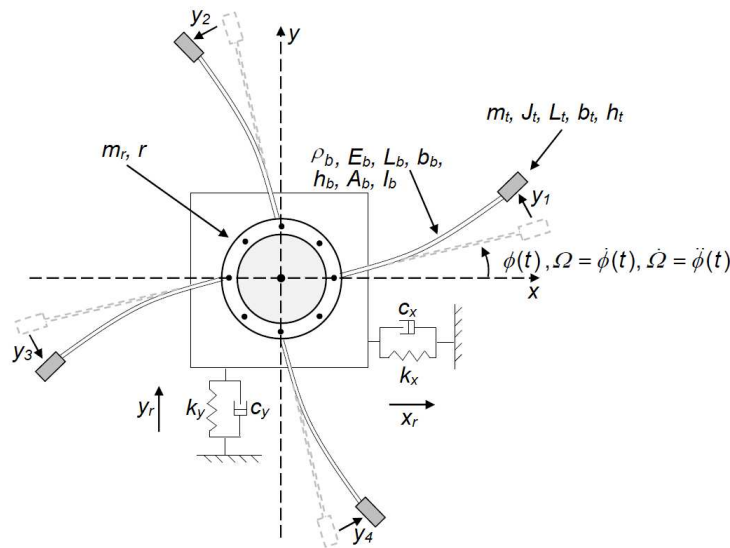


Figura 2 – Modelo físico do sistema rotor-palhetas flexíveis.  
Fonte: Rende (2020) - Adaptado.

Como pode ser visualizado acima, o conjunto gira em função do tempo  $t$  com velocidade angular  $\Omega$  e é composto pelos seguintes elementos:

- Um rotor rígido de massa  $m_r$  e raio  $r$ , suportado na base por apoios elásticos de rigidezes  $k_x$  e  $k_y$  e amortecimentos  $c_x$  e  $c_y$ , os quais permitem sua movimentação apenas em dois graus de liberdade (deslocamento horizontal  $x_r$  e vertical  $y_r$ , desprezando-se a rotação associada);
- Quatro palhetas retangulares idênticas (igualmente espaçadas), possuindo massa específica  $\rho_b$ , módulo de elasticidade  $E_b$ , comprimento  $L_b$ , largura  $b_b$ , espessura  $h_b$ , área transversal  $A_b$  e momento de inércia  $I_b$ , fixadas ao rotor sem ângulo de pré-torção (também se movimentam estritamente no plano  $xy$ , estabelecendo graus de liberdade longitudinais e transversais); e

- Quatro corpos rígidos idênticos, apresentando massa  $m_t$ , inércia de rotação  $J_t$ , comprimento  $L_t$ , largura  $b_t$  e altura  $h_t$ , instalados na extremidade de cada palheta unicamente para potencializar seus efeitos inerciais, uma vez que elas são bastante delgadas.

Sendo assim, propõe-se determinar as equações diferenciais que descrevem seu movimento aplicando o método de Lagrange combinado à discretização em elementos finitos, o que implica utilizar a formulação cinemática de partículas e obter as expressões das energias cinética e potencial do sistema.

### 3.1.1 Sistemas de Referência e Transformação de Coordenadas

Para facilitar a representação dos vetores posição e velocidade que caracterizam todo o modelo e, assim, desenvolver corretamente suas equações do movimento, é conveniente adotar sistemas de referência auxiliares, conforme mostra a Figura 3, definidos como:

- Referencial inercial  $B_I$ ;
- Referencial móvel  $B_b$ , com origem no centro  $C$  do rotor e solidário à viga não deformada; e
- Referencial móvel  $B_t$ , fixado na extremidade da palheta e solidário ao movimento do corpo rígido.

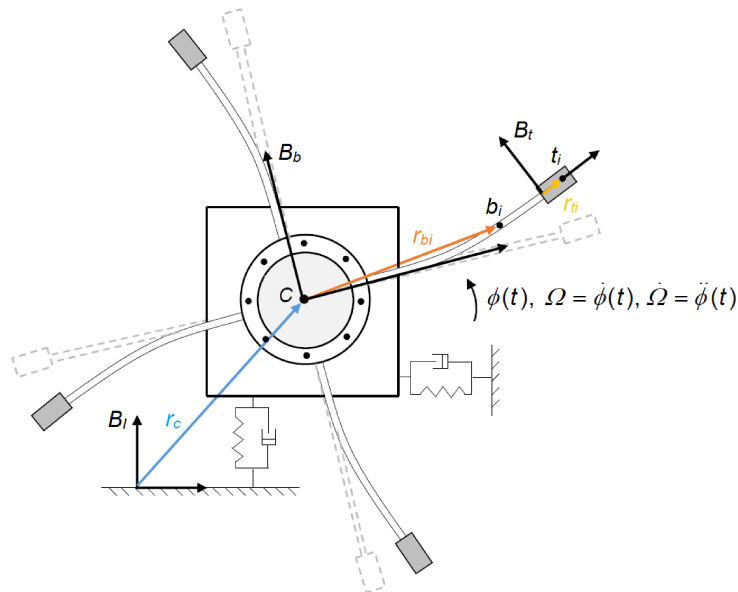


Figura 3 – Referenciais auxiliares empregados no sistema rotor-palhetas flexíveis.

Fonte: Rende (2020) - Adaptado.

Esses referenciais são relacionados por meio de matrizes de transformação de coordenadas, as quais são lineares e ortogonais entre si. Em outras palavras, pode-se passar um vetor descrito no referencial  $B_b$  ( $\mathbf{b}_{b,b}$ ) para o  $B_I$  ( $\mathbf{b}_{b,I}$ ) fazendo uso da matriz  $\mathbf{T}_{b,I}$  e outro descrito no referencial  $B_t$  ( $\mathbf{b}_{t,t}$ ) para o  $B_b$  ( $\mathbf{b}_{t,b}$ ) com auxílio da matriz  $\mathbf{T}_{t,b}$ , de acordo com as Equações (3.1) e (3.2).

$$\mathbf{b}_{b,I} = \mathbf{T}_{b,I} \mathbf{b}_{b,b} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{b}_{t,b} = \mathbf{T}_{t,b} \mathbf{b}_{t,t} \quad (3.2)$$

Em que:

$$\mathbf{T}_{b,I} = \begin{bmatrix} \cos[\phi(t) + \psi_i] & -\sin[\phi(t) + \psi_i] & 0 \\ \sin[\phi(t) + \psi_i] & \cos[\phi(t) + \psi_i] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{T}_{t,b} = \begin{bmatrix} \cos[\alpha_i(L_b, t)] & -\sin[\alpha_i(L_b, t)] & 0 \\ \sin[\alpha_i(L_b, t)] & \cos[\alpha_i(L_b, t)] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Nessas matrizes, os ângulos  $\phi$ ,  $\psi_i$  e  $\alpha_i$  se referem à, respectivamente, posição angular do rotor (medido em relação ao eixo coordenado  $x$ , definido na Figura 2), posição da palheta  $i$  relativa à primeira e rotação do corpo rígido  $i$  no plano  $xy$  com respeito ao referencial  $B_b$ , sendo  $i = [1, 2, 3, 4]$ .

No entanto, caso sejam assumidas pequenas rotações no ponto de fixação da massa à extremidade livre da palheta, é possível considerar as seguintes aproximações:  $\cos[\alpha_i(L_b, t)] \approx 1$  e  $\sin[\alpha_i(L_b, t)] \approx \alpha_i(L_b, t)$ . Desse modo, reescrevendo a matriz  $\mathbf{T}_{t,b}$ , tem-se:

$$\mathbf{T}_{t,b} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_i(L_b, t) & 0 \\ \alpha_i(L_b, t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

### 3.1.2 Vetores Posição e Velocidade

Retornando à Figura 3, verifica-se que os vetores posição do centro do rotor ( $\mathbf{r}_{c,I}$ ), de um ponto genérico  $x_i$  da palheta  $i$  ( $\mathbf{r}_{b_i,b}$ ) e do centro de massa do corpo rígido  $i$  ( $\mathbf{r}_{t_i,t}$ ), descritos nos seus próprios referenciais, são dados por:

$$\mathbf{r}_{c,I} = \left\{ x_r(t) \quad y_r(t) \quad 0 \right\}^T \quad (3.6)$$

$$\mathbf{r}_{b_i,b} = \left\{ r + x_i + u_i(x_i, t) \quad v_i(x_i, t) \quad 0 \right\}^T \quad (3.7)$$

$$\mathbf{r}_{t_i,t} = \left\{ r_t \quad 0 \quad 0 \right\}^T \quad (3.8)$$

onde  $u_i(x_i, t)$  e  $v_i(x_i, t)$  correspondem, nessa ordem, aos deslocamentos longitudinais e transversais do ponto genérico  $x_i$  causados pela deformação da palheta, e  $r_t$  à distância do centro de massa do corpo rígido ao seu ponto de fixação, sendo igual a  $L_t/2$ .

Entretanto, é adequado reescrever os vetores  $\mathbf{r}_{b_i,b}$  e  $\mathbf{r}_{t_i,t}$  no referencial inercial. Para tal, aplicam-se as matrizes de transformação de coordenadas apresentadas anteriormente, fornecendo os vetores indicados abaixo. Ressalta-se que as variáveis dependentes  $t$  e  $x_i$  foram suprimidas para melhor representação.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{b_i,I} &= \mathbf{r}_{c,I} + \mathbf{T}_{b,I} \mathbf{r}_{b_i,b} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x_r + [r + x_i + u_i] \cos[\phi + \psi_i] - v_i \sin[\phi + \psi_i] \\ y_r + [r + x_i + u_i] \sin[\phi + \psi_i] + v_i \cos[\phi + \psi_i] \\ 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{t_i,I} &= \mathbf{r}_{c,I} + \mathbf{T}_{b,I} (\mathbf{r}_{b_i,b})_{x_i=L_b} + \mathbf{T}_{b,I} \mathbf{T}_{t,b} \mathbf{r}_{t_i,t} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x_r + [r + L_b + u_i + r_t] \cos[\phi + \psi_i] - [v_i + r_t \alpha_i] \sin[\phi + \psi_i] \\ y_r + [r + L_b + u_i + r_t] \sin[\phi + \psi_i] + [v_i + r_t \alpha_i] \cos[\phi + \psi_i] \\ 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Quanto aos vetores velocidade linear, pode-se encontrá-los calculando a derivada temporal absoluta dos vetores posição descritos no referencial inercial, o que resulta em:



$$\dot{\mathbf{r}}_{c,I} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_r & \dot{y}_r & 0 \end{Bmatrix}^T \quad (3.11)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{b_i,I} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_r - \Omega [r + x_i + u_i] \sin[\phi + \psi_i] + \dot{u}_i \cos[\phi + \psi_i] \\ -\Omega v_i \cos[\phi + \psi_i] - \dot{v}_i \sin[\phi + \psi_i] \\ \dot{y}_r + \Omega [r + x_i + u_i] \cos[\phi + \psi_i] + \dot{u}_i \sin[\phi + \psi_i] \\ -\Omega v_i \sin[\phi + \psi_i] + \dot{v}_i \cos[\phi + \psi_i] \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{t_i,I} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_r - \Omega [r + L_b + u_i + r_t] \sin[\phi + \psi_i] + \dot{u}_i \cos[\phi + \psi_i] \\ -\Omega [v_i + r_t \alpha_i] \cos[\phi + \psi_i] - [\dot{v}_i + r_t \dot{\alpha}_i] \sin[\phi + \psi_i] \\ \dot{y}_r + \Omega [r + L_b + u_i + r_t] \cos[\phi + \psi_i] + \dot{u}_i \sin[\phi + \psi_i] \\ -\Omega [v_i + r_t \alpha_i] \sin[\phi + \psi_i] + [\dot{v}_i + r_t \dot{\alpha}_i] \cos[\phi + \psi_i] \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

De forma análoga aos vetores posição, definem-se os vetores velocidade angular do centro do rotor ( $\boldsymbol{\Omega}_{c,I}$ ), de um ponto genérico  $x_i$  da palheta  $i$  ( $\boldsymbol{\Omega}_{b_i,b}$ ) e do centro de massa do corpo rígido  $i$  ( $\boldsymbol{\Omega}_{t_i,t}$ ):

$$\boldsymbol{\Omega}_{c,I} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \Omega(t) \end{Bmatrix}^T \quad (3.14)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{b_i,b} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \dot{\alpha}_i(x_i, t) \end{Bmatrix}^T \quad (3.15)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{t_i,t} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \dot{\alpha}_i(L_b, t) \end{Bmatrix}^T \quad (3.16)$$

Nota-se que os vetores  $\boldsymbol{\Omega}_{b_i,b}$  e  $\boldsymbol{\Omega}_{t_i,t}$  estão descritos nos referenciais rotativos. Logo, transformado-os para o referencial inercial, chega-se a:

$$\boldsymbol{\Omega}_{b_i,I} = \boldsymbol{\Omega}_{c,I} + \mathbf{T}_{b,I} \boldsymbol{\Omega}_{b_i,b} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \Omega(t) + \dot{\alpha}_i(x_i, t) \end{Bmatrix}^T \quad (3.17)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{t_i,I} = \boldsymbol{\Omega}_{c,I} + \mathbf{T}_{b,I} \mathbf{T}_{t,b} \boldsymbol{\Omega}_{t_i,t} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \Omega(t) + \dot{\alpha}_i(L_b, t) \end{Bmatrix}^T \quad (3.18)$$

Além dos elementos considerados, percebe-se, com frequência, a não coincidência entre o centro de massa e o centro geométrico do rotor, o que caracteriza o desbalanceamento de máquinas rotativas. Para modelá-lo, é assumida a existência de uma massa  $m_u$  deslocada em  $d$  do centro geométrico e posicionada em um ângulo  $\varphi$  do eixo coordenado  $x$ , de acordo com o ilustrado na Figura 4.

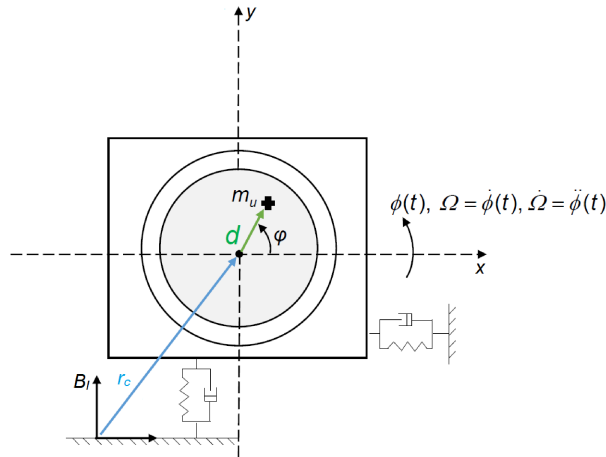


Figura 4 – Presença de desbalanceamento no sistema rotor-palhetas flexíveis.

Fonte: Rende (2020) - Adaptado.

Nesse sentido, também é necessário conhecer os vetores posição e velocidade que descrevem o movimento dessa massa, os quais são representados, no referencial inercial, pelas Equações (3.19) e (3.20), respectivamente.

$$\mathbf{r}_{u,I} = \left\{ x_r(t) + d \cos[\phi(t) + \varphi] \quad y_r(t) + d \sin[\phi(t) + \varphi] \quad 0 \right\}^T \quad (3.19)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{u,I} = \left\{ \dot{x}_r(t) - \Omega d \sin[\phi(t) + \varphi] \quad \dot{y}_r(t) + \Omega d \cos[\phi(t) + \varphi] \quad 0 \right\}^T \quad (3.20)$$

### 3.1.3 Expressões de Energia

A energia total do sistema mecânico é composta pela soma das suas energias cinética  $T$  e potencial  $P$ . A primeira é constituída pelas energias cinéticas de translação e rotação do rotor (Equação (3.21)), das palhetas (Equação (3.22)) e das pequenas massas nas extremidades (Equação (3.23)), todas provenientes dos vetores velocidade estabelecidos no tópico anterior. De forma semelhante, a segunda é formada pela energia armazenada nos suportes elásticos do rotor (Equação (3.24)), energia potencial gravitacional do conjunto (Equação (3.25)) e energia de deformação de cada palheta (Equação (3.26)).

$$T_r = \frac{1}{2} \left[ m_r \dot{\mathbf{r}}_{c,I}^T \dot{\mathbf{r}}_{c,I} + m_u \dot{\mathbf{r}}_{u,I}^T \dot{\mathbf{r}}_{u,I} + J_r \boldsymbol{\Omega}_{c,I}^T \boldsymbol{\Omega}_{c,I} \right] \quad (3.21)$$

$$T_b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \left[ \int_0^{L_b} \rho_b A_b \dot{\mathbf{r}}_{b_i,I}^T \dot{\mathbf{r}}_{b_i,I} dx_i + \int_0^{L_b} \rho_b I_b \boldsymbol{\Omega}_{b_i,I}^T \boldsymbol{\Omega}_{b_i,I} dx_i \right] \quad (3.22)$$

$$T_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \left[ m_t \dot{\mathbf{r}}_{t_i,I}^T \dot{\mathbf{r}}_{t_i,I} + J_t \boldsymbol{\Omega}_{t_i,I}^T \boldsymbol{\Omega}_{t_i,I} \right] \quad (3.23)$$

$$P_r = \frac{1}{2} \left[ k_x x_r^2 + k_y y_r^2 \right] \quad (3.24)$$

$$P_g = m_r \mathbf{g}_I^T \mathbf{r}_{c,I} + \sum_{i=1}^4 \left[ \int_0^{L_b} \rho_b A_b \mathbf{g}_I^T \mathbf{r}_{b_i,I} dx_i + m_t \mathbf{g}_I^T \mathbf{r}_{t_i,I} \right] \quad (3.25)$$

$$P_{b_i} = \int_V \frac{E_b}{2} (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{zz}^2) dV \quad (3.26)$$

Nessas igualdades, tem-se que:

$$A_b = b_b h_b, \quad I_b = \frac{b_b h_b^3}{12}, \quad J_t = \frac{m_t (L_t^2 + h_t^2)}{12}, \quad J_r = \frac{m_r r^2}{2} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{g}_I = \{0 \quad -g \quad 0\}^T \quad (3.28)$$

Os termos presentes na Equação (3.26) se referem às deformações ocasionadas somente pela presença de cargas axiais e momentos fletores, tendo em vista que os efeitos dos esforços cortantes são desprezados para vigas delgadas. Ainda assim, é possível reproduzir corretamente o enrijecimento centrífugo do sistema, ou seja, o aumento da rigidez com a velocidade de rotação, ao utilizar um vetor de deformação linearizado de segunda ordem no cálculo da energia de deformação. Este vetor, indicado pela Equação (3.29), pode ser obtido ao adotar uma aproximação não-linear para uma das funções trigonométricas do vetor de deformação original, conforme a Equação (3.30).

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) \cos(\alpha_i) + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \sin(\alpha_i) - 1 \\ - \left(1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) \sin(\alpha_i) + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \cos(\alpha_i) \\ -y_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^2 \\ -\alpha_i - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \\ -y_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\cos[\alpha_i(x_i, t)] \approx 1 - \frac{\alpha_i(x_i, t)^2}{2}, \quad \sin[\alpha_i(x_i, t)] \approx \alpha_i(x_i, t) \quad (3.30)$$

Desse modo, inserindo as componentes do vetor deformação linearizado na Equação (3.26) e eliminando os termos de ordem superior a dois, chega-se a outra formulação para a expressão da energia de deformação de cada palheta, fornecida pela Equação (3.31).

$$P_{b_i} = \frac{E_b A_b}{2} \int_0^{L_b} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 dx_i + \frac{E_b I_b}{2} \int_0^{L_b} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2}\right)^2 dx_i + \frac{E_b A_b}{2} \int_0^{L_b} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^2 dx_i \quad (3.31)$$

### 3.1.4 MEF Aplicado a Vigas de Euler-Bernoulli

De acordo com Rade (2013), o método dos elementos finitos (MEF) é uma técnica de análise numérica destinada à obtenção de soluções aproximadas para problemas, geralmente complexos, regidos por equações diferenciais. Basicamente, ele consiste em transformar um problema infinito-dimensional em finito-dimensional por meio da discretização de um domínio contínuo em várias regiões, denominadas elementos, interconectadas por pontos limítrofes, os nós, formando uma malha. Sua aplicação se torna vantajosa devido à robustez, eficiência computacional e facilidade de implementação.

Neste método, assume-se que os deslocamentos e as rotações no interior de cada elemento podem ser aproximados a partir da multiplicação das coordenadas nodais  $\delta$  (também denominadas graus de liberdade ou gdl) pelas funções de interpolação ou de forma  $\Psi$ . Essas funções, normalmente polinomiais, são determinadas com a imposição de condições que garantem a continuidade da solução nos nós compartilhados por vários elementos.

Baseando-se nesses aspectos, em virtude da flexibilidade das palhetas, convém empregar esse procedimento de discretização. A Figura 5 ilustra o elemento finito e os gdl adotados, a saber: deslocamentos longitudinais  $x$  dos nós à esquerda  $U_n$  e à direita  $U_{n+1}$ ; deslocamentos transversais  $y$  dos nós à esquerda  $V_n$  e à direita  $V_{n+1}$ ; e rotações em torno de  $z$  dos nós à esquerda  $\theta_n$  e à direita  $\theta_{n+1}$ .

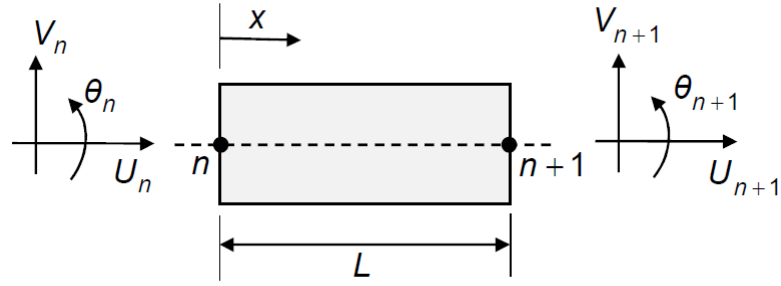


Figura 5 – Elemento finito retangular.

Fonte: Rende (2020).

Para vigas esbeltas, cuja espessura é inferior a 10% do seu comprimento (caso das palhetas desse sistema mecânico), as funções de forma podem ser definidas considerando as hipóteses da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, isto é: a seção transversal se mantém plana e normal à linha neutra após a deformação; o coeficiente de Poisson é negligenciável; assume-se pequenos deslocamentos e rotações; os materiais apresentam comportamento linear-elástico (seguem a Lei de Hooke); e os efeitos associados ao cisalhamento transversal são desprezados.

Dessa maneira, os deslocamentos ( $u_i$  e  $v_i$ ) e as rotações ( $\alpha_i$ ) ao longo dos elementos de cada palheta, bem como suas respectivas derivadas temporais ( $\dot{u}_i$ ,  $\dot{v}_i$  e  $\dot{\alpha}_i$ ), são aproximados por:

$$u_i(x_i, t) = \Psi_a(x_i) \delta_a(t), \quad \dot{u}_i(x_i, t) = \Psi_a(x_i) \dot{\delta}_a(t) \quad (3.32)$$

$$v_i(x_i, t) = \Psi_t(x_i) \delta_t(t), \quad \dot{v}_i(x_i, t) = \Psi_t(x_i) \dot{\delta}_t(t) \quad (3.33)$$

$$\alpha_i(x_i, t) = \frac{\partial \Psi_t(x_i)}{\partial x_i} \delta_t(t), \quad \dot{\alpha}_i(x_i, t) = \frac{\partial \Psi_t(x_i)}{\partial x_i} \dot{\delta}_t(t) \quad (3.34)$$

em que:

$$\delta_a(t) = \{U_n \quad U_{n+1}\}^T, \quad \dot{\delta}_a(t) = \{\dot{U}_n \quad \dot{U}_{n+1}\}^T \quad (3.35)$$

$$\delta_t(t) = \{V_n \quad \theta_n \quad V_{n+1} \quad \theta_{n+1}\}^T, \quad \dot{\delta}_t(t) = \{\dot{V}_n \quad \dot{\theta}_n \quad \dot{V}_{n+1} \quad \dot{\theta}_{n+1}\}^T \quad (3.36)$$

$$\Psi_a(x_i) = \left\{ 1 - \frac{x_i}{L} \quad \frac{x_i}{L} \right\}^T \quad (3.37)$$

$$\Psi_t(x_i) = \left\{ 1 - \frac{3x_i^2}{L^2} + \frac{2x_i^3}{L^3} \quad x_i - \frac{2x_i^2}{L} + \frac{x_i^3}{L^2} \quad \frac{3x_i^2}{L^2} - \frac{2x_i^3}{L^3} \quad -\frac{x_i^2}{L} + \frac{x_i^3}{L^2} \right\}^T \quad (3.38)$$

### 3.1.5 Força Normal

Uma simplificação plausível para a terceira parcela da Equação (3.31) é descrevê-la em função da solução do problema de tensão inicial, ou seja, considerar que a deformação longitudinal da palheta nos instantes iniciais do movimento pode ser dada por:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (3.39)$$

Em função disso, conhecida uma força  $N(x_i)$  normal à seção transversal da viga, a tensão axial será calculada por:

$$\sigma = \frac{N(x_i)}{A_b} \quad (3.40)$$

Pela Lei de Hooke:

$$\sigma = E_b \epsilon_{xx} \quad (3.41)$$

Combinando as equações anteriores, chega-se à seguinte expressão para a taxa de variação dos deslocamentos na direção longitudinal da viga:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{N(x_i)}{E_b A_b} \quad (3.42)$$

Reescrevendo a Equação (3.31) em função do novo equacionamento:

$$P_{b_i} = \frac{E_b A_b}{2} \int_0^{L_b} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 dx_i + \frac{E_b I_b}{2} \int_0^{L_b} \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \right)^2 dx_i + \frac{1}{2} \int_0^{L_b} N(x_i) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 dx_i \quad (3.43)$$

Nota-se que a expressão da energia de deformação de cada palheta passará a ser representada como função explícita da força normal atuante na viga, caracterizando a influência da aceleração centrífuga no enrijecimento do sistema. Entretanto, como essa força depende dos deslocamentos, os quais foram discretizados em elementos finitos, ela não será constante ao longo das palhetas, sendo preciso determiná-la também com base na discretização.

Para esse propósito, adota-se o método desenvolvido por Hoa (1979), descrito a seguir tomando como referência a Figura 6.

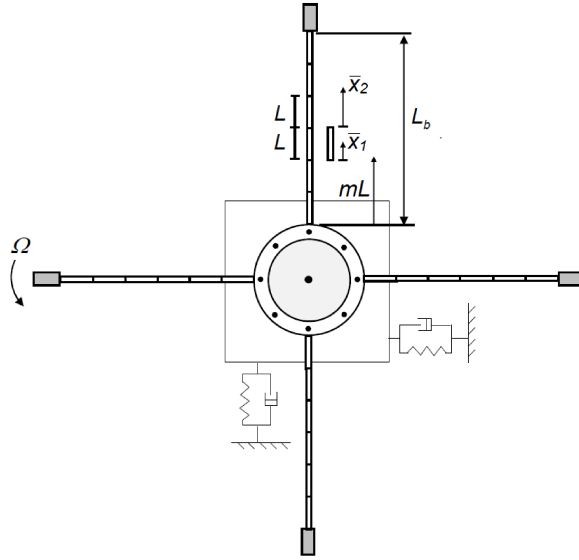


Figura 6 – Sistema rotor-palheta discretizado em elementos finitos.  
Fonte: Rende (2020) - Adaptado.

Seja um elemento finito retangular localizado em qualquer uma das palhetas e distante  $m$  elementos do raio externo  $r$  do rotor. Segundo esse autor, a força normal atuante na sua seção transversal é composta pelos efeitos centrífugos e gravitacionais causados pelo próprio elemento, por todos aqueles posteriores a ele e pela massa rígida na extremidade livre. Matematicamente:

$$N(x_i) = N_{c,b_i}(x_i) + N_{g,b_i}(x_i) + N_{c,t_i}(L_b) + N_{g,t_i}(L_b) \quad (3.44)$$

em que:

$$N_{c,b_i}(x_i) = \rho_b A_b \Omega^2 \left[ \int_{x_i}^L (r + mL + \bar{x}_1) d\bar{x}_1 + \int_{(m+1)L}^{L_b} (r + \bar{x}_2) d\bar{x}_2 \right] \quad (3.45)$$

$$N_{g,b_i}(x_i) = -\rho_b A_b g \sin[\phi + \psi_i] \left[ \int_{x_i}^L d\bar{x}_1 + \int_{(m+1)L}^{L_b} d\bar{x}_2 \right] \quad (3.46)$$

$$N_{c,t_i}(L_b) = m_t \Omega^2 (r + L_b + r_t) \quad (3.47)$$

$$N_{g,t_i}(L_b) = -m_t g \sin[\phi + \psi_i] \quad (3.48)$$

### 3.1.6 Método de Lagrange e Equações do Movimento

O método de Lagrange consiste em utilizar as energias cinética e potencial associadas aos componentes de um sistema mecânico e o trabalho realizado por esforços externos sobre ele (denominados esforços generalizados  $Q_\kappa$ ) para obter, a partir da Equação (3.49), as equações diferenciais do seu movimento de acordo com as coordenadas generalizadas  $q_\kappa$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\kappa} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\kappa} + \frac{\partial P}{\partial q_\kappa} = Q_\kappa \quad (3.49)$$

Quanto ao sistema em questão, considerando a discretização de cada palheta  $b_i$  em  $n_e$  elementos finitos, seu vetor de graus de liberdade total é dado por:

$$\mathbf{q} = \left\{ x_r \quad y_r \quad U_{1,b_1} \quad V_{1,b_1} \quad \theta_{1,b_1} \quad \dots \quad U_{n_e,b_4} \quad V_{n_e,b_4} \quad \theta_{n_e,b_4} \right\}^T \quad (3.50)$$

Sendo assim, ao introduzir a mesma discretização nas expressões de energia indicadas na subseção 3.1.3 e resolver as equações de Lagrange para esse vetor de coordenadas, obtêm-se  $\kappa$  equações do movimento, representadas matricialmente pela Equação (3.51).

$$\mathbf{M}(t) \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{G}(t) \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t) \mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.51)$$

Cabe ressaltar que é extremamente complexo modelar o amortecimento do sistema. Entretanto, pode-se inseri-lo nas equações do movimento como uma matriz de amortecimento proporcional  $\mathbf{D}$ , a qual caracteriza numericamente o amortecimento natural do conjunto mecânico. Logo, reescrevendo a equação anterior, tem-se que:

$$\mathbf{M}(t) \ddot{\mathbf{q}}(t) + \underbrace{[\mathbf{G}(t) + \mathbf{D}(t)]}_{\mathbf{C}(t)} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t) \mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.52)$$

Para melhor compreensão, a forma dos termos dessa equação é apresentada no Apêndice A. Contudo, adianta-se que as matrizes de massa  $\mathbf{M}$ , coriolis  $\mathbf{G}$ , amortecimento proporcional  $\mathbf{D}$  e rigidez  $\mathbf{K}$ , bem como o vetor de forças  $\mathbf{F}$ , são descritos em função de uma ou mais componentes angulares do rotor ( $\phi$ ,  $\dot{\phi} = \Omega$  e  $\ddot{\phi} = \dot{\Omega}$ ), definindo, portanto, um sistema variante com o tempo.



## 3.2 Modelagem de Trincas Transversais pela Abordagem FLEX

Alguns aspectos relativos ao modelo de trinca FLEX foram brevemente mencionados no Capítulo 2. Porém, devido a sua importância para este trabalho, nesta seção são explorados seus conceitos, fundamentos e implementação.

Inicialmente, sabe-se que Bachschmid et al. (2003) desenvolveram essa abordagem para simular o comportamento de trincas transversais em estruturas unidimensionais sob a ação de quaisquer carregamentos, inclusive na presença de efeitos térmicos. Como será discutido adiante, uma de suas contribuições foi a apresentação de uma matriz de rigidez completa (quadrada, simétrica e de dimensão 12 x 12), a qual armazena, indiretamente, os parâmetros da trinca, engloba os efeitos gerados pela não-linearidade no elemento trincado e possibilita adotar a teoria da viga de Timoshenko (ou seja, pode-se assumir a hipótese de que a seção transversal da estrutura deformada não permanece perpendicular à linha neutra em função do cisalhamento). Portanto, um modelo totalmente alinhado à análise em elementos finitos e passível de ser implementado computacionalmente.

Apesar de Bachschmid e Tanzi (2004) validarem o método para diferentes condições de carregamento, há duas questões que devem ser ressaltadas quanto à metodologia aplicada: a utilização de um elemento de viga cilíndrico e a adoção de trincas que se estendem transversalmente até 50% de profundidade. Em relação à primeira, acredita-se que o modelo FLEX também possa ser empregado para modelar trincas transversais em vigas esbeltas de seção retangular, mas é necessário adaptar o cálculo das propriedades geométricas, assim como foi feito por Morais et al. (2010). Quanto à segunda, não necessariamente é uma limitação do modelo, tendo em vista que trincas mais profundas caracterizam um estágio bastante avançado da falha e podem ser detectadas com facilidade por técnicas convencionais de monitoramento.

Observa-se que este modelo é não-linear, pois a matriz de rigidez associada à trinca deve ser determinada iterativamente em cada passo de tempo da simulação. Isso pode gerar um custo computacional adicional, ainda assim menor que o demandado pelo modelo de elementos finitos 3D. Ademais, permite representar corretamente o fenômeno de *breathing* a partir da especificação do campo de tensão gerado pelos momentos dinâmicos atuantes na seção transversal onde a trinca está localizada.

Embasando-se nessas informações e em um fluxograma apresentado por Morais (2010), na sequência são discriminados os passos a serem adotados na implementação computacional desse modelo para simular a presença de uma trinca transversal em uma das palhetas do sistema rotativo analisado neste trabalho.

O procedimento começa com a discretização do sistema rotor-palhetas flexíveis em elementos finitos e a definição dos parâmetros da trinca (profundidade e localização ao longo de uma das *blades*). Identificado o elemento trincado, procede-se com a divisão da

sua seção transversal em elementos retangulares, conforme Figura 7.

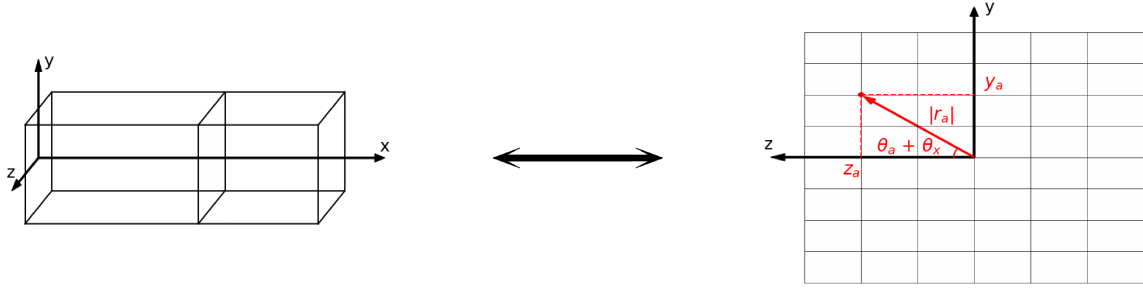


Figura 7 – Malha da seção transversal do elemento de viga trincado.

Fonte: Morais et al. (2010) - Adaptado.

Como indicado nessa figura, coordenadas complexas são utilizadas para localizar os pontos de intersecção entre as retas horizontais e verticais que formam as áreas elementares da seção trincada (Equação (3.53)). De acordo com Morais (2010), isso facilita a manipulação da malha, principalmente na presença de rotação em torno do eixo axial da estrutura trincada (não existente no sistema considerado, *i.e.*,  $\theta_x = 0$ ).

$$r_a = z_a + i y_a \quad \Rightarrow \quad r_a^* = |r_a| \exp [i (\theta_a + \theta_x)] \quad (3.53)$$

Em seguida, com ajuda das Equações (3.54) e (3.55), calculam-se os momentos dinâmicos ( $M_y$  e  $M_z$ ) atuantes na seção transversal do elemento trincado, tomando como base a resposta dinâmica do sistema em cada instante de tempo (normalmente após o terceiro instante, afim de permitir a acomodação inicial da estrutura).

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{M_y}{E_b I_y}, \quad \partial \theta_y = \theta_{y,n+1} - \theta_{y,n}, \quad \partial x = L_c \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \theta_z}{\partial x} = \frac{M_z}{E_b I_z}, \quad \partial \theta_z = \theta_{z,n+1} - \theta_{z,n}, \quad \partial x = L_c \quad (3.55)$$

Nessas equações,  $\theta_{z,n}$  e  $\theta_{z,n+1}$  se referem aos gdl's de rotação em torno do eixo  $z$  nos nós  $n$  e  $n + 1$  do elemento trincado, respectivamente. Os gdl's  $\theta_y$  seguem a mesma ideia, contudo, nesta dissertação, devido à restrição do movimento do rotor ao plano  $xy$ , eles são nulos, assim como seus momentos dinâmicos.  $I_z$  e  $I_y$  são os momentos de inércia de área da seção transversal do elemento de viga em relação aos eixos indicados pelos subscritos.  $L_c$  corresponde ao comprimento equivalente da trinca (comprimento imposto ao elemento trincado), determinado com auxílio da Figura 8, considerando que o ajuste estabelecido para eixos pode ser aproveitado para vigas esbeltas retangulares (MORAIS et al., 2010).

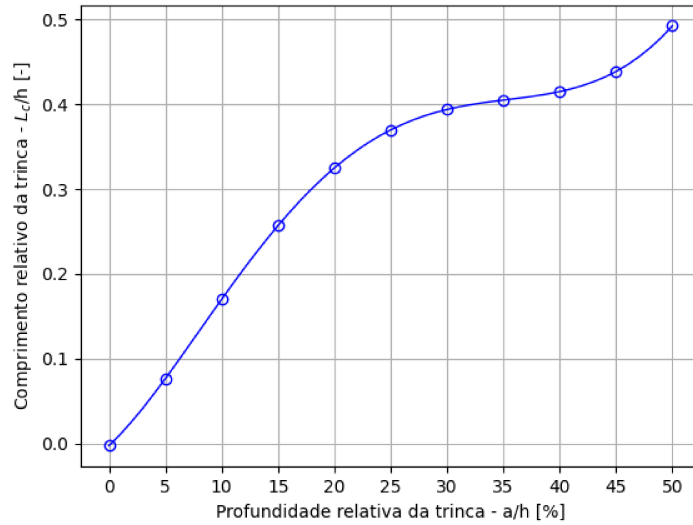


Figura 8 – Comprimento equivalente da trinca para eixos.  
Fonte: Bachschmid et al. (1999) - Adaptado.

Os pontos destacados na curva são relativos aos valores de  $L_c$  definidos por Bachschmid et al. (1999) ao comparar os resultados fornecidos pelos modelos SERR, de elementos finitos (com auxílio do programa *Abaqus*) e FLEX quanto à simulação estática e dinâmica de uma viga circular engastada-livre e rotativa na presença de trinca. Esses pontos podem ser interpolados por meio do polinômio representado na Equação (3.56).

$$\begin{aligned} \frac{L_c}{h} = & -33.3333 \left(\frac{a}{h}\right)^5 + 77.5641 \left(\frac{a}{h}\right)^4 - 49.5542 \left(\frac{a}{h}\right)^3 \\ & + 9.0485 \left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1.2415 \left(\frac{a}{h}\right) - 0.0024 \end{aligned} \quad (3.56)$$

A partir desse momento, precisa-se encontrar, em cada instante de tempo, o campo de tensão na seção transversal do elemento trincado. Conseqüentemente, serão determinadas as áreas que realmente contribuem para a rigidez do elemento, formando um conjunto denominado área resistente ou remanescente  $A_r$ . Nesse sentido, com auxílio da Equação (3.57), verificam-se os sinais das tensões atuantes nas áreas elementares da seção, de tal forma que:

- Se  $\sigma_a < 0$  (tensão de compressão): a trinca está fechada, logo há forças de contato e contribuição para a área resistente (área de trinca fechada); e
- Se  $\sigma_a \geq 0$  (tensão de tração): a trinca está aberta, logo não há forças de contato ou contribuição para a área resistente (área de trinca aberta).

$$\sigma_a = \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{zy}}{I_{zz} I_{yy} - I_{zy}^2} z_{ag} - \frac{M_z I_{yy} + M_y I_{zy}}{I_{zz} I_{yy} - I_{zy}^2} y_{ag} \quad (3.57)$$

Na equação anterior,  $I_{zz}$ ,  $I_{yy}$  e  $I_{zy}$  são os momentos de inércia de área da seção fechada com relação aos eixos coordenados que passam pelo seu centro geométrico  $G$ , calculados pela Equação (3.58), e  $z_{ag}$  e  $y_{ag}$  correspondem às distâncias dos centros geométricos de cada área elementar à  $G$  nas direções  $z$  e  $y$ , respectivamente. Quanto ao  $G$ , pode-se obtê-lo pela Equação (3.59). Ressalta-se que a área resistente/fechada é formada pelas regiões não trincada e trincada submetida a compressão.

$$I_{zz} = \int_{A_r} y^2 dA_r, \quad I_{yy} = \int_{A_r} z^2 dA_r, \quad I_{zy} = \int_{A_r} zy dA_r \quad (3.58)$$

$$G = z_g + i y_g = \frac{\int_{A_r} z dA_r}{\int_{A_r} dA_r} + i \frac{\int_{A_r} y dA_r}{\int_{A_r} dA_r} \quad (3.59)$$

Assim, espera-se um campo de tensão semelhante ao ilustrado na Figura 9.

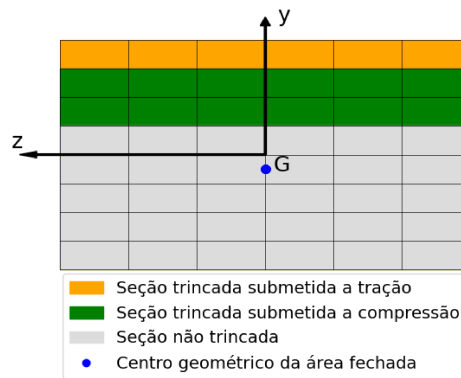


Figura 9 – Campo de tensão na seção transversal do elemento de viga trincado.

Fonte: Morais et al. (2010) - Adaptado.

Como o campo de tensão inicial não representa a situação atual da trinca, os passos anteriores se repetem até atingir um critério de convergência, dado pela variação mínima da posição dos eixos principais de inércia com origem em  $G$  entre duas iterações subsequentes, ou seja:

$$\| \Theta_p^n - \Theta_p^{n-1} \| < \epsilon_{cv} \quad (3.60)$$

em que:

$$\Theta_p = \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{-2I_{zy}}{I_{zz} - I_{yy}} \right] \quad (3.61)$$

Desse modo, estabelecidos os segundos momentos de área que caracterizam o estado real da trinca, basta determinar a matriz de rigidez do elemento trincado, indicada na Equação (3.62) em sua forma reduzida, sob as hipóteses da teoria da viga de Euler-Bernoulli e rearranjada de acordo com os gdl's considerados neste trabalho.

$$\mathbf{K}_{Flex} = \begin{bmatrix} t & w & j & -t & -w & -j \\ & a & c & -w & -a & c \\ & & e & -j & -c & f \\ & & & t & w & j \\ & & & & a & -c \\ Sim. & & & & & e \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Na matriz acima, tem-se que:

$$a = \frac{12E_b I_{zz}}{L_c^3}, \quad c = \frac{6E_b I_{zz}}{L_c^2}, \quad e = \frac{4E_b I_{zz}}{L_c}, \quad f = \frac{2E_b I_{zz}}{L_c} \quad (3.63)$$

$$j = c_2 y_g t, \quad w = c_3 y_g t, \quad t = \frac{E_b A_r}{L_c} \quad (3.64)$$

As constantes  $c_2$  e  $c_3$  são referentes ao acoplamento entre os gdl's, sendo ajustadas pelo modelo 3D. No entanto, nesta dissertação, adota-se a hipótese de que esse acoplamento não influencia a dinâmica do elemento trincado e, por isso, foram consideradas ambas nulas.

Finalmente, para determinar corretamente a resposta dinâmica do sistema mecânico trincado em todos instantes de tempo da simulação, essa matriz deve ser inserida nas equações do movimento (Equação (3.52)). Contudo, ao invés de atuar diretamente sobre a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , entrará na forma de uma força elementar ( $\mathbf{F}_{Flex}^{(e)}$ ) que aumentará a flexibilidade do elemento trincado (de rigidez estrutural  $\mathbf{K}_s$ ) nos gdl's correspondentes ( $\mathbf{q}^{(e)}$ ), conforme a (Equação (3.65)).

$$\mathbf{F}_{Flex}^{(e)} = (\mathbf{K}_s - \mathbf{K}_{Flex}) \mathbf{q}^{(e)} \quad (3.65)$$

### 3.3 Teoria de Floquet e Análise de Estabilidade

Grande parcela dos problemas dinâmicos de engenharia envolvem a análise de sistemas físicos descritos por equações diferenciais de coeficientes variantes no tempo, também conhecidos como sistemas não-autônomos. Diferentemente dos sistemas invariantes no tempo, ditos autônomos, possuem um tratamento matemático bastante complicado, com resoluções analíticas complexas e, normalmente, sem soluções fechadas. Entretanto, alguns casos particulares são possíveis de serem estudados sem ter conhecimento da forma da solução, principalmente quanto à estabilidade, como os sistemas que apresentam coeficientes periodicamente variantes no tempo, os quais são examinados com auxílio da teoria de Floquet.

Considerando que o sistema mecânico em estudo tem comportamento periódico quando opera com velocidade de rotação constante, esta seção é dedicada à elucidação dessa teoria e à determinação das condições de estabilidade, tomando como base os conceitos apresentados no livro de Meirovitch (1970) e explorados nos trabalhos de Saracho (2002) e Rende (2020).

As equações do movimento de sistemas dinâmicos periódicos podem ser representadas pela seguinte notação matricial na forma homogênea:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (3.66)$$

em que:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{A}(t + T) = \mathbf{A}(t), \quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(t)\mathbf{K}(t) & -\mathbf{M}^{-1}(t)\mathbf{C}(t) \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Nas equações acima, a matriz  $\mathbf{A}(t)$ , periódica no tempo com período  $T$ , corresponde à matriz de espaço de estados, o vetor  $\mathbf{x}(t)$  caracteriza o estado do sistema em um instante de tempo  $t$ , sendo  $\mathbf{x}_0$  sua condição inicial, e a matriz  $\mathbf{I}$  se refere à matriz identidade.

Para um intervalo de tempo em que  $\mathbf{A}(t)$  é contínua, existe uma matriz, denominada matriz de transição de estados  $\Phi(t, t_0)$ , cujas colunas formam uma base para o espaço de soluções da equação diferencial indicada anteriormente. Ou seja, trata-se de uma matriz fundamental, que satisfaz a equação do sistema:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0) \quad (3.69)$$

Dessa maneira, essa matriz permite relacionar a solução do sistema em um determinado  $t$  com as condições iniciais do problema, conforme a Equação (3.70).

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (3.70)$$

De acordo com o teorema de Floquet, se  $\Phi(t, t_0)$  é a matriz de transição de estados do sistema representado pela Equação (3.66), então  $\Phi(t + T, t_0)$  também é uma solução do sistema, determinando, assim, outra matriz fundamental, as quais se associam por meio de uma matriz constante não-singular  $\mathbf{B}$ :

$$\Phi(t + T, t_0) = \Phi(t, t_0)\mathbf{B} \quad (3.71)$$

Além disso, para cada  $\Phi(t, t_0)$ , existe uma matriz periódica não-singular  $\mathbf{Q}(t, t_0)$ , com período  $T$ , e uma matriz constante  $\mathbf{R}$ , tal que:

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{Q}(t, t_0) \exp[(t - t_0)\mathbf{R}], \quad \mathbf{Q}(t + T, t_0) = \mathbf{Q}(t, t_0) \quad (3.72)$$

Apesar das matrizes  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{B}$  serem constantes, possuem características e funcionalidades distintas. A primeira corresponde à matriz fundamental de um sistema invariante no tempo algebricamente equivalente a um determinado sistema variante no tempo, sendo vinculados a partir de uma transformação algébrica dada pela matriz periódica  $\mathbf{Q}(t, t_0)$ . A segunda é conhecida como matriz de monodromia, uma vez que é semelhante (invariante pela transformação de similaridade) às matrizes constantes de outras matrizes fundamentais referentes ao mesmo problema dinâmico. De qualquer forma, ambas matrizes se relacionam pela Equação (3.73).

$$\mathbf{R} = \frac{1}{T} \ln [\mathbf{B}] \quad (3.73)$$

Conseqüentemente, os autovalores de  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{R}$ , designados por multiplicadores característicos  $\lambda_j$  e expoentes característicos  $\rho_j$ , respectivamente, são associados por:

$$\rho_j = \frac{1}{T} [\ln |\lambda_j| + i \cdot \arg(\lambda_j)], \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.74)$$

No equacionamento acima, a parte real é bem definida (única para cada  $j$ ), enquanto a parte imaginária apresenta infinitos valores diferidos por múltiplos de  $2\pi/T$ .

Retornando à Equação (3.71), verifica-se que:

$$\mathbf{B} = \Phi^{-1}(t, t_0)\Phi(t + T, t_0) \quad (3.75)$$

Contudo, a matriz de transição de estados no fim de um período é desconhecida, além de ser impossível de obtê-la analiticamente. Então, faz-se necessário adotar métodos numéricos para aproximá-la. Uma dessas técnicas, desenvolvida por Friedmann (1986), consiste em dividir o período em  $K$  pequenos intervalos de tamanho  $\Delta t$ , nos quais o sistema é tratado como invariante no tempo. Assim, considerando  $t = t_0$  e aplicando a teoria de sistemas invariantes e algumas propriedades de matrizes de transição de estado, chega-se a:

$$\mathbf{B} = \Phi(t_0 + T, t_0) \approx \prod_{k=1}^K \exp \left\{ \frac{\Delta t_k}{2} [\mathbf{A}(t_k) + \mathbf{A}(t_{k-1})] \right\} \quad (3.76)$$

Após essas constatações, pode-se, finalmente, definir as condições de estabilidade dos sistemas não-autônomos e periódicos (MEIROVITCH, 1970):

- Se todos os expoentes característicos possuem parte real negativa ou o módulo de todos multiplicadores característicos é menor que um, todas soluções são assintoticamente estáveis;
- Se pelo menos um dos expoentes característicos possui parte real positiva ou o módulo de pelo menos um multiplicador característico é maior que um, o sistema é instável; e
- Se algum expoente característico possui parte real negativa e os outros apresentam parte real nula, ou o módulo de algum multiplicador característico é menor que um e os outros são iguais a um, o sistema é marginalmente estável.

Friedmann (1986) ainda faz um adendo a respeito da teoria de Floquet voltada à análise de estabilidade de sistemas não-lineares e periódicos, principalmente na presença de não-linearidades geométricas, como trincas. Segundo ele, a teoria ainda pode ser empregada, devendo, no entanto, determinar os termos não-lineares com auxílio de um procedimento iterativo, como o método de Newton-Raphson (exposto na próxima seção), e estender seus efeitos para a matriz de espaço de estados em cada instante de tempo.



### 3.4 Integração Numérica das Equações do Movimento

Como mencionado na seção anterior, determinados tipos de sistemas são trabalhosos de se resolver analiticamente, implicando na necessidade de buscar outros recursos para efetuar uma análise mais detalhada e obter soluções precisas. Nesse sentido, a seguir é descrita uma técnica de integração numérica, passível de ser introduzida computacionalmente, frequentemente aplicada na resolução das equações do movimento.

Seja um sistema dinâmico representado pela Equação (3.77).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F} \quad (3.77)$$

Newmark (1959) propôs um método numérico para resolver essa equação diferencial, o qual se resume à predição dos campos de aceleração, velocidade e deslocamento generalizados em um instante de tempo  $t + \Delta t$  com base nos valores dos mesmos campos em um instante de tempo  $t$ , conforme as Equações (3.78), (3.79) e (3.80) (considerando a regra de integração trapezoidal).

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \ddot{\mathbf{q}}_t = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \quad (3.78)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{q}}_t + \frac{\Delta t}{2} \cdot (\ddot{\mathbf{q}}_t + \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}) \quad (3.79)$$

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{q}}_t + \frac{\Delta t^2}{4} \cdot (\ddot{\mathbf{q}}_t + \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}) \quad (3.80)$$

Os campos determinados nos novos instantes de tempo devem satisfazer a Equação (3.81).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{F} \quad (3.81)$$

Para sistemas de comportamento linear, os valores correspondentes a estes campos em qualquer instante de tempo são obtidos diretamente. Entretanto, na presença de termos não lineares, é necessário efetuar um processo iterativo para buscar o equilíbrio dinâmico do sistema em cada instante de tempo. Um método comumente empregado é o processo iterativo de Newton-Raphson.

Segundo Cavalini Jr et al. (2015), nesta técnica, procura-se reduzir a norma do resíduo associado à Equação (3.81) até uma determinada tolerância. Para tal, primeiramente é resolvido o sistema de equações indicado pela Equação (3.82).

$$\mathbf{T}_{t+\Delta t}^n \cdot \Delta \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^n = -\mathbf{R}_{t+\Delta t}^{n-1} \quad (3.82)$$

Em que:

$$\mathbf{T}_{t+\Delta t}^n = \frac{\Delta t^2}{4} \cdot \mathbf{K} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{M} \quad (3.83)$$

$$\mathbf{R}_{t+\Delta t}^{n-1} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^{n-1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^{n-1} + \mathbf{K} \mathbf{q}_{t+\Delta t}^{n-1} - \mathbf{F} \quad (3.84)$$

Em seguida,  $\Delta \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^n$  é utilizado para determinar  $\Delta \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^n$  e  $\Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t}^n$ , de acordo com as Equações (3.85) e (3.86).

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^n = \frac{\Delta t}{2} \cdot \Delta \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^n \quad (3.85)$$

$$\Delta \mathbf{q}_{t+\Delta t}^n = \frac{\Delta t^2}{4} \cdot \Delta \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^n \quad (3.86)$$

As variações dos campos de aceleração, velocidade e deslocamento obtidas pelas Equações (3.82), (3.85) e (3.86) são, então, somadas aos valores dos campos determinados na iteração anterior como correção e aplicadas na Equação (3.87) para determinar o resíduo associado à iteração presente. O processo perdura até que o critério de convergência seja alcançado.

$$\mathbf{R}_{t+\Delta t}^n = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^n + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^n + \mathbf{K} \mathbf{q}_{t+\Delta t}^n - \mathbf{F} \quad (3.87)$$

Observa-se que esse procedimento é aplicável tanto a sistemas invariantes quanto a variantes no tempo, sendo fundamental, neste último, determinar e associar corretamente as matrizes do sistema em cada instante de tempo. Além disso, para o caso específico do modelo de trinca FLEX e de outras aplicações que envolvem mudanças nas matrizes dinâmicas ao longo do tempo, seus efeitos precisam ser atualizados conforme novos valores são gerados para os campos.

## 4 Resultados e Discussões

Este capítulo é direcionado à apresentação e discussão dos resultados numéricos obtidos a partir da implementação computacional em *Python* do modelo matemático do sistema rotor-palhetas flexíveis trincado. Em um primeiro momento, são definidas as características do sistema simulado, bem como alguns parâmetros associados à resolução do problema. Posteriormente, estuda-se a abertura e o fechamento da trinca de acordo com o movimento angular do rotor. Por fim, compara-se o comportamento dinâmico do sistema trincado ao saudável quanto a suas condições estáveis e instáveis de operação, seus atributos modais, seus sinais temporais e suas propriedades espectrais. Dessa maneira, será possível avaliar a capacidade do modelo FLEX de representar os efeitos reais causados pela presença de trincas transversais neste tipo de sistema rotativo.

### 4.1 Características do Sistema e Informações Adicionais

A Tabela 1 indica os parâmetros físicos e geométricos adotados para caracterizar os componentes pertencentes ao sistema rotor-palhetas flexíveis analisado neste trabalho. Ressalta-se que seus valores foram definidos com base nas dimensões da bancada de testes utilizada por Rende (2020) para efetuar a análise numérica e experimental do mesmo sistema na ausência de trincas.

Como mencionado no capítulo anterior, em razão da flexibilidade associada à energia de deformação das palhetas, o método dos elementos finitos é aplicado para auxiliar a determinação dos seus deslocamentos durante o movimento do rotor. Nesse sentido, discretiza-se cada palheta do sistema em dez elementos retangulares idênticos com três gdl's por nó, os quais, se somados aos dois gdl's do rotor, totalizam 122 gdl's para representar todo o conjunto. De forma semelhante, nas análises que envolvem o sistema trincado, divide-se a seção transversal do elemento identificado com trinca em 400 áreas também retangulares (20 áreas horizontais por 20 áreas verticais).

Quanto à integração numérica das equações do movimento, a fim de manter um custo computacional relativamente baixo, sem comprometer a precisão dos resultados, adota-se  $1 \times 10^{-6}$  e 100 como, respectivamente, a mínima tolerância aceitável para a norma do resíduo e o máximo número de iterações, ambos vinculados ao método de Newton-Raphson. Apesar do segundo parâmetro parecer pequeno, notou-se que todas as simulações satisfazem o critério de convergência em menos iterações, exceto as relativas ao movimento do rotor em velocidades críticas ou instáveis (suas soluções não convergem adequadamente). Somado a isso, salvo para a análise de estabilidade, o integrador de Newmark foi executado em passos de tempo de  $1 \times 10^{-3}$  segundos.

Tabela 1 – Parâmetros físicos e geométricos do sistema.

Componente	Grandeza	Símbolo	Valor	Unidade S.I.
Palheta flexível	Comprimento	$L_b$	0.400	$m$
	Espessura	$h_b$	0.005	$m$
	Largura	$b_b$	0.080	$m$
	Massa específica	$\rho_b$	7800	$kg/m^3$
	Módulo de elasticidade	$E_b$	$210 \times 10^9$	$Pa$
	Coefficiente de Poisson	$\nu_b$	0.300	–
Corpo rígido na Extremidade	Altura	$h_t$	0.040	$m$
	Comprimento	$L_t$	0.080	$m$
	Massa	$m_t$	0.300	$kg$
Rotor rígido	Raio	$r$	0.075	$m$
	Posição inicial	$\phi_0$	$\pi/4$	$rad$
	Massa horizontal	$m_{rx}$	13.5	$kg$
	Massa vertical	$m_{ry}$	11.5	$kg$
	Rigidez horizontal	$k_x$	$1.090 \times 10^5$	$N/m$
	Rigidez vertical	$k_y$	$8.350 \times 10^4$	$N/m$
	Amortecimento horizontal	$c_x$	0.164	$Ns/m$
	Amortecimento vertical	$c_y$	0.100	$Ns/m$
	Regulador de velocidade	$\lambda$	$-1 \times 10^{-6}$	–
Massa Desbalanceada	Ângulo	$\varphi$	0	$rad$
	Excentricidade	$d$	0.001	$m$
	Massa horizontal	$m_{ux}$	13.5	$kg$
	Massa vertical	$m_{uy}$	11.5	$kg$
Outros	Aceleração da gravidade	$g$	9.81	$m/s^2$
	Cte proporcionalidade de $\mathbf{M}$	$\gamma_1$	0	–
	Cte proporcionalidade de $\mathbf{K}$	$\gamma_2$	$1 \times 10^{-5}$	–

Fonte: Próprio autor.

## 4.2 Evolução Temporal da Trinca (Fenômeno de *Breathing*)

Na tentativa de averiguar se o modelo FLEX simula adequadamente a redução da rigidez do elemento trincado, ocasionada pelo processo de abertura e fechamento gradual da trinca de acordo com a dinâmica do sistema (*breathing*), tem-se interesse em avaliar a alteração dessa propriedade com o tempo. No entanto, devido à formulação desse modelo de trinca, o qual está alinhado ao MEF, a rigidez é apresentada em função de vários gdl's, dificultando o procedimento. Por outro lado, os momentos de inércia se relacionam diretamente com as rigidezes, podendo ser utilizadas, assim como a área resistente, para entender esse comportamento.

As Figuras 10, 11 e 12 ilustram, sob condições distintas de trinca, as curvas dos momentos de inércia ( $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  e  $I_{zy}$ ) e da área remanescente ( $A_r$ ) associadas à seção transversal do elemento trincado em função do ângulo de rotação do rotor, definido desde sua posição inicial ( $\phi_0 = \pi/4$ ) até completar um período. Para obtê-las, uma trinca foi inserida, separadamente, na primeira palheta do sistema (numerada a partir do eixo coordenado  $x$  quando o rotor está na sua posição inicial) com diferentes profundidades (0, 10, 20, 30, 40 ou 50%) e posições (5, 50 ou 95% de  $L_b$  a partir da extremidade fixa), e executou-se a simulação assumindo a operação do rotor com velocidade de rotação constante e igual a 60 rpm.

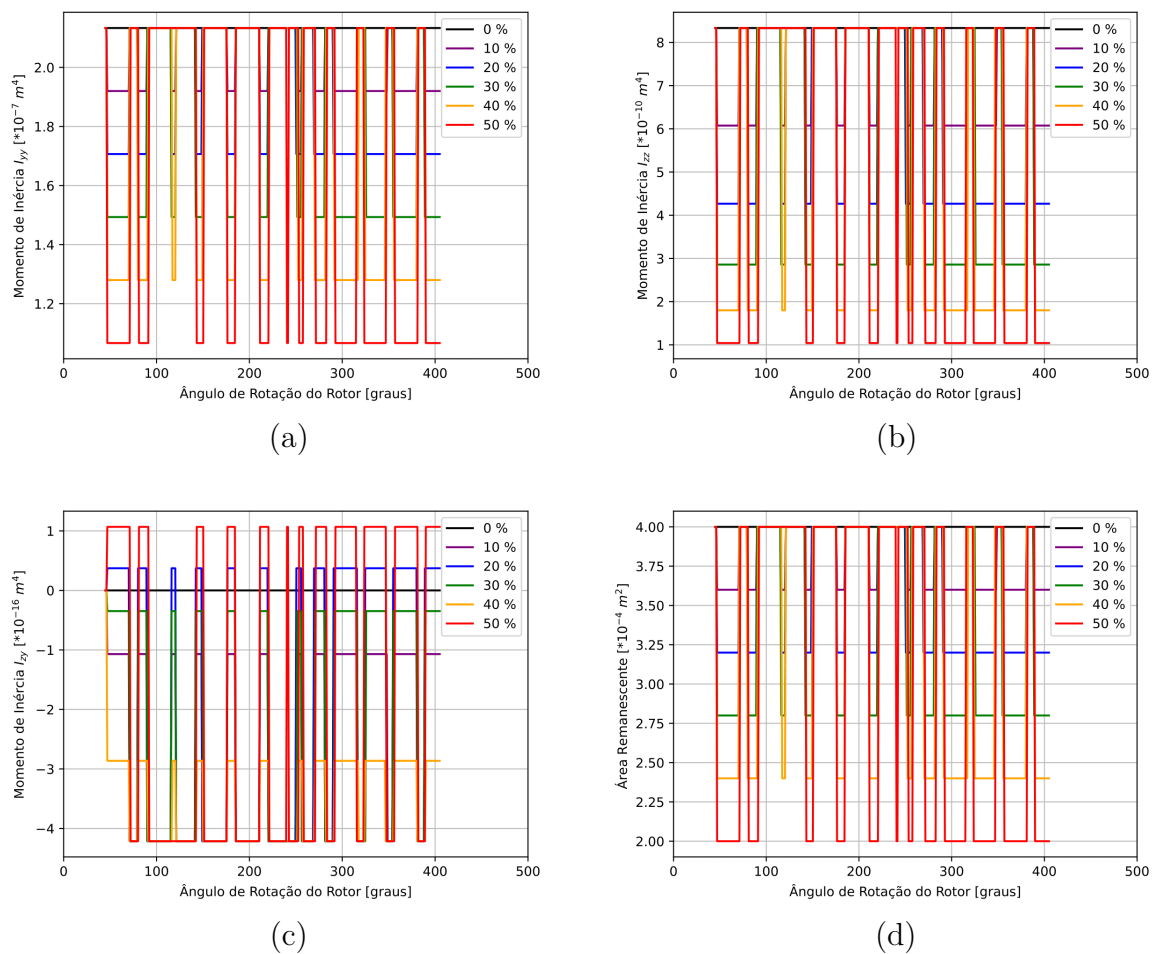


Figura 10 – Evolução temporal da trinca localizada a 5% da extremidade fixa para diferentes profundidades: (a)  $I_{yy}$ ; (b)  $I_{zz}$ ; (c)  $I_{zy}$ ; (d)  $A_r$ .

Fonte: Próprio autor.

Ao analisar o aspecto das curvas geradas, fica evidente a variação dessas grandezas com o movimento do rotor. Seus valores se alternam entre picos (maiores  $I$  e  $A_r$ ) e vales (menores  $I$  e  $A_r$ ), caracterizando, respectivamente, o fechamento e a abertura da trinca. Entretanto, a transição não ocorre gradualmente, mas de forma abrupta. Acredita-se que isto esteja ligado à adoção da teoria de vigas de Euler-Bernoulli.

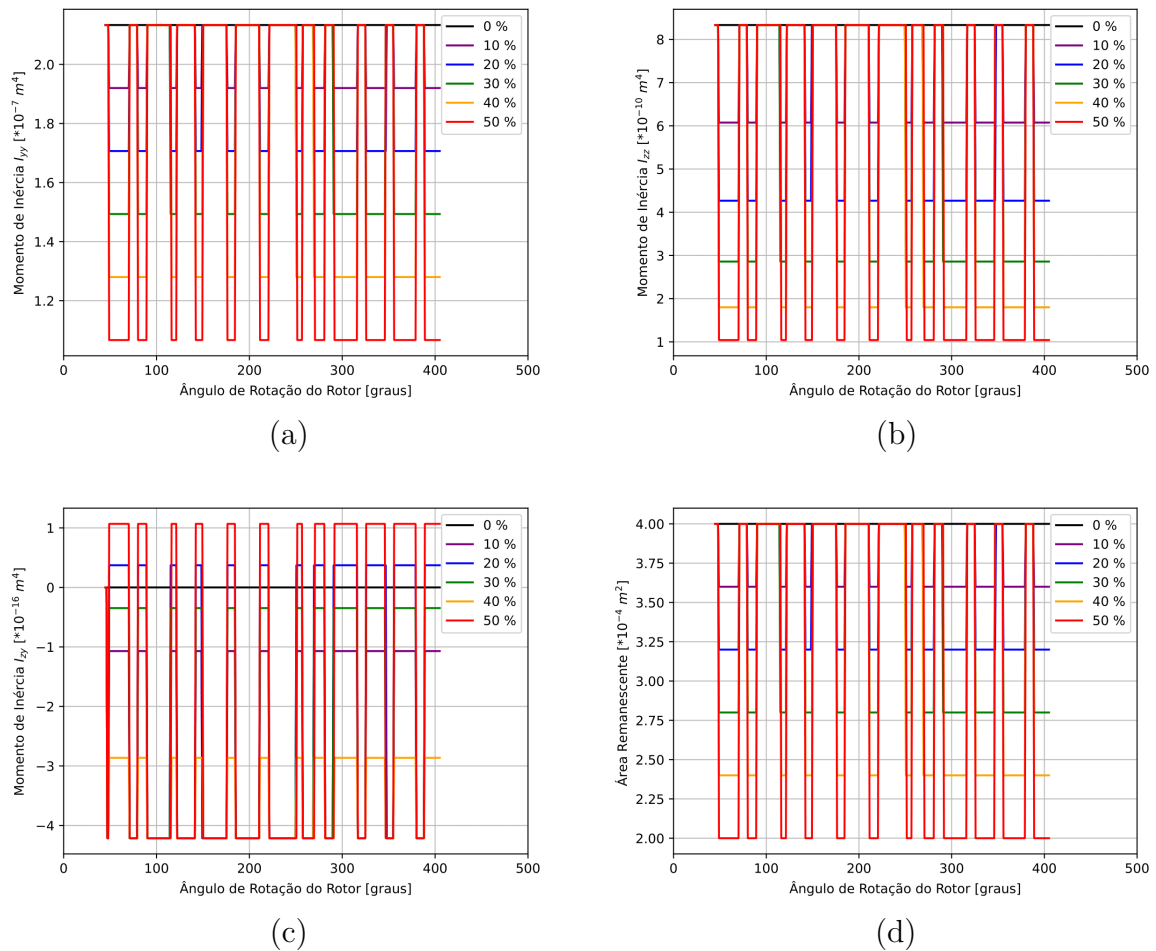


Figura 11 – Evolução temporal da trinca localizada a 50% da extremidade fixa para diferentes profundidades: (a)  $I_{yy}$ ; (b)  $I_{zz}$ ; (c)  $I_{zy}$ ; (d)  $A_r$ .

Fonte: Próprio autor.

Observa-se que, independente da localização da trinca, as curvas correspondentes oscilam em torno dos mesmos valores, diferindo, minimamente, apenas pela posição e frequência dos pontos extremos, as quais são modificadas pela dinâmica do sistema. Isso é esperado, uma vez que os momentos de inércia e a área dependem apenas dos parâmetros geométricos da seção transversal (fechada) e, conseqüentemente, da profundidade da trinca.

Notadamente, a profundidade da trinca interfere nas propriedades da seção transversal: tomando como referência o estado saudável (trinca com 0% de profundidade), quanto maior o dano, maior a redução da inércia e da área resistente. Essa proporção não fica clara ao examinar os gráficos do produto de inércia da seção ( $I_{zy}$ ), mas, em virtude da sua ordem de grandeza ( $10^{-16}$ ), isso não é relevante. Pode-se relacionar essa constatação à precisão da representação em ponto flutuante do próprio *Python*. De qualquer maneira, conclui-se que a trinca, sob as simplificações admitidas, não leva à assimetria da seção transversal da viga neste sistema rotativo.

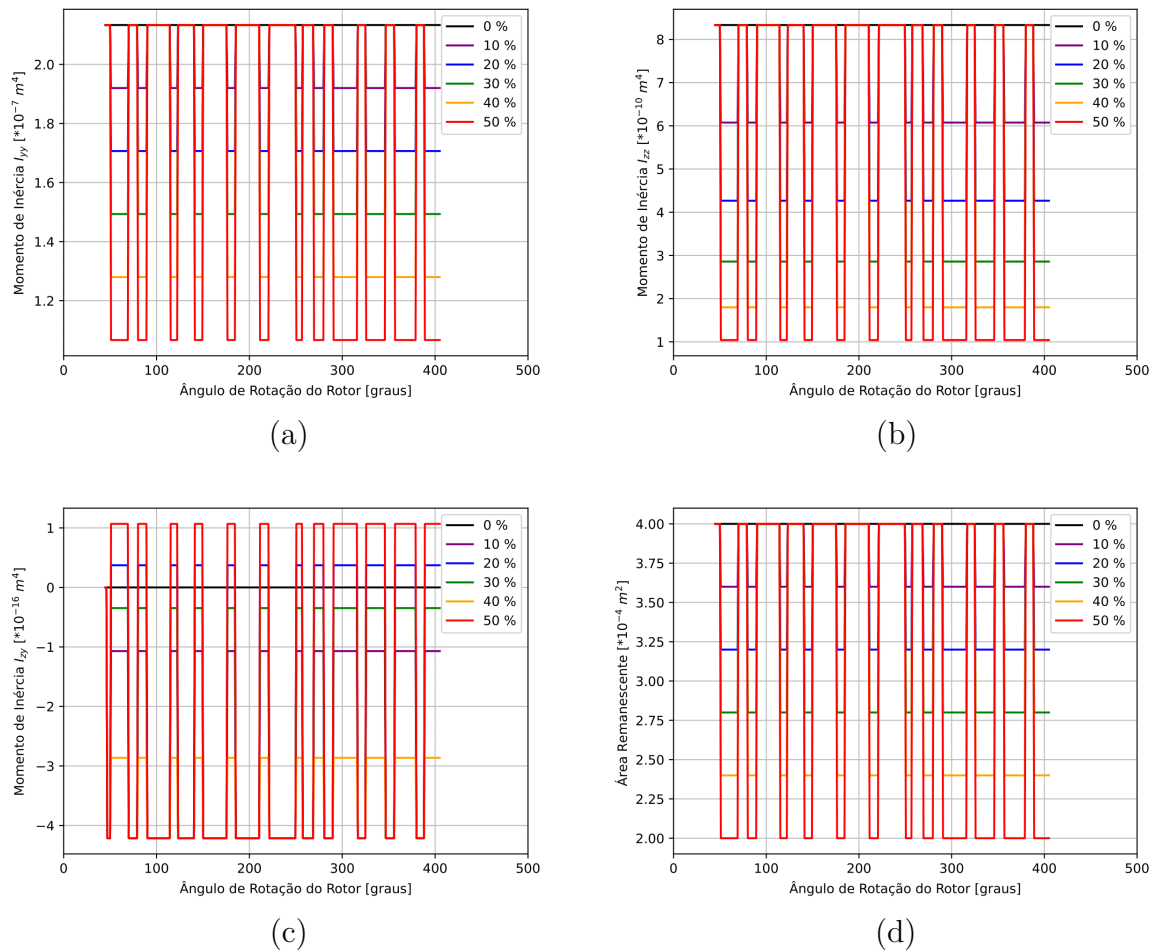


Figura 12 – Evolução temporal da trinca localizada a 95% da extremidade fixa para diferentes profundidades: (a)  $I_{yy}$ ; (b)  $I_{zz}$ ; (c)  $I_{zy}$ ; (d)  $A_r$ .

Fonte: Próprio autor.

### 4.3 Estabilidade do Sistema Saudável e Trincado

Para estudar a estabilidade do sistema, tanto no estado saudável quanto no trincado, é necessário aplicar a teoria de Floquet em conjunto com a aproximação numérica para a matriz de transição de estados, procedimento discutido na seção 3.3. Sendo assim, considerou-se suficiente dividir o período em 127 intervalos, ou 128 instantes de tempo, nos quais o sistema foi assumido invariante. Além disso, diferentemente de todas as outras simulações efetuadas nesta dissertação, o passo de tempo do integrador numérico não poderá ser fixo, mas sim calculado com base na velocidade angular do rotor, uma vez que essa análise se restringe ao próprio período.

Na Figura 13 são apresentados os mapas de estabilidade desse sistema para uma trinca localizada na primeira palheta com diferentes profundidades e posições (as mesmas condições utilizadas anteriormente). Destaca-se que eles foram construídos ao adotar velocidades de rotação para o modelo entre 0 e 5000 *rpm*, com passos de 50 *rpm*, mantendo-se constante as condições de operação, ou seja, sem aceleração.

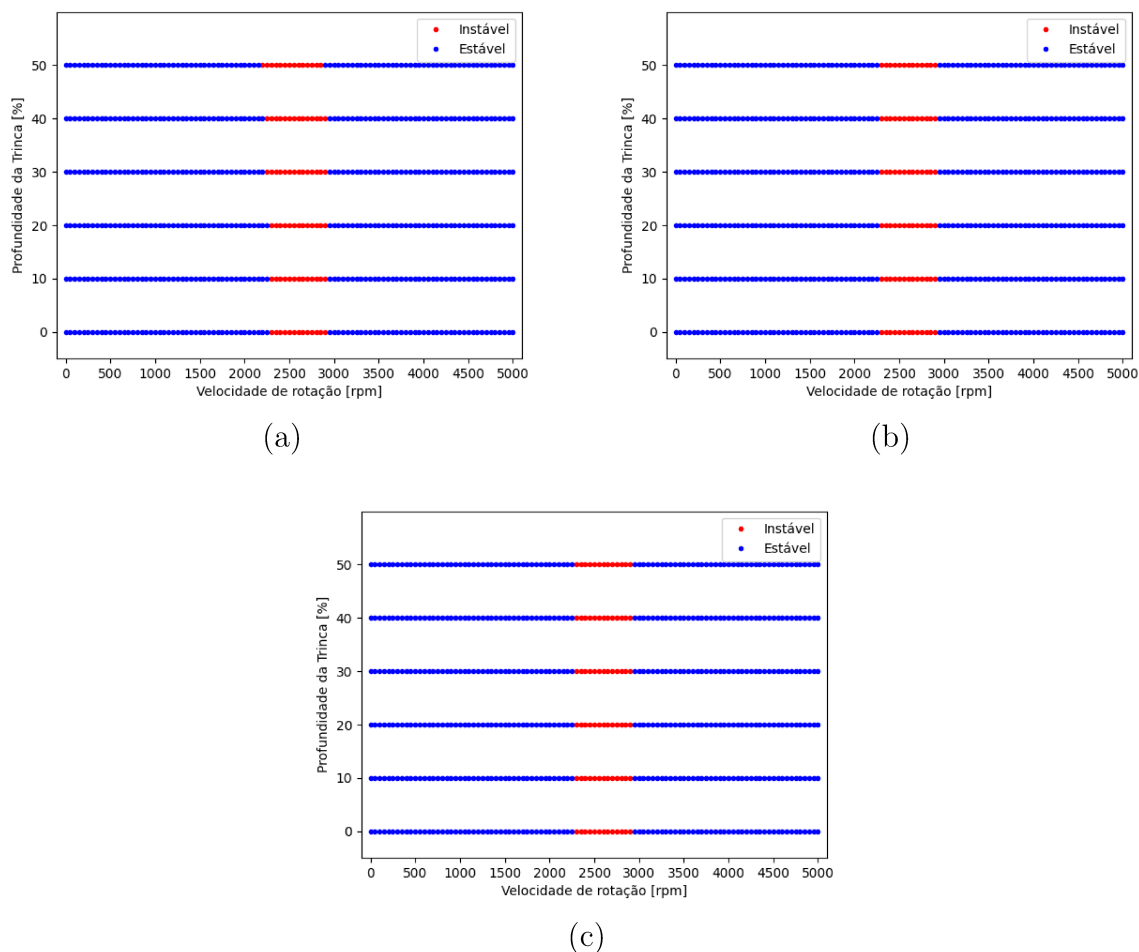


Figura 13 – Mapas de estabilidade do sistema para uma trinca com diferentes profundidades e localizada, da extremidade fixa, a: (a) 5%; (b) 50%; (c) 95%.

Fonte: Próprio autor.

A presença de trincas em uma estrutura provoca mudanças nas suas frequências naturais. Considerando que o sistema rotativo em questão é composto por quatro palhetas teoricamente idênticas, a inserção da trinca em uma delas conduzirá à perda de simetria geométrica, caracterizando a presença do *mistuning*. Segundo Saito (2009), uma das consequências desse fenômeno é a ocorrência de vibrações localizadas, com alta concentração de energia, que podem levar o sistema mecânico a operar em regiões de instabilidade.

Entretanto, a partir da figura acima, nota-se que, independente dos parâmetros da trinca, as faixas de instabilidade se mantêm praticamente as mesmas em relação ao sistema saudável, isto é, entre as velocidades de 2300 e 2900 rpm. Essa invariabilidade pode ser associada a algum(s) dos seguintes fatores: às simplificações introduzidas no modelo matemático; ao amortecimento do sistema; à presença de massa rígida na extremidade livre de cada palheta; aos efeitos centrífugos, que compensam a flexibilidade adicional causada pela trinca; à alternância entre a abertura e o fechamento da trinca; ou ao comportamento periódico do sistema.



A Figura 14 ilustra, perante as mesmas condições, os multiplicadores característicos associados à determinação da estabilidade do sistema. Verifica-se que não há qualquer tipo de diferenciação visual entre os autovalores para trincas posicionadas no meio ou no final da palheta. Por outro lado, os efeitos da profundidade da trinca são mais perceptíveis quando ela está próxima à extremidade fixa, apesar de não modificarem a faixa de instabilidade. De certa forma, isso está em conformidade com as referências citadas neste trabalho, haja vista que trincas mais profundas e próximas ao engaste causam maiores impactos ao sistema.

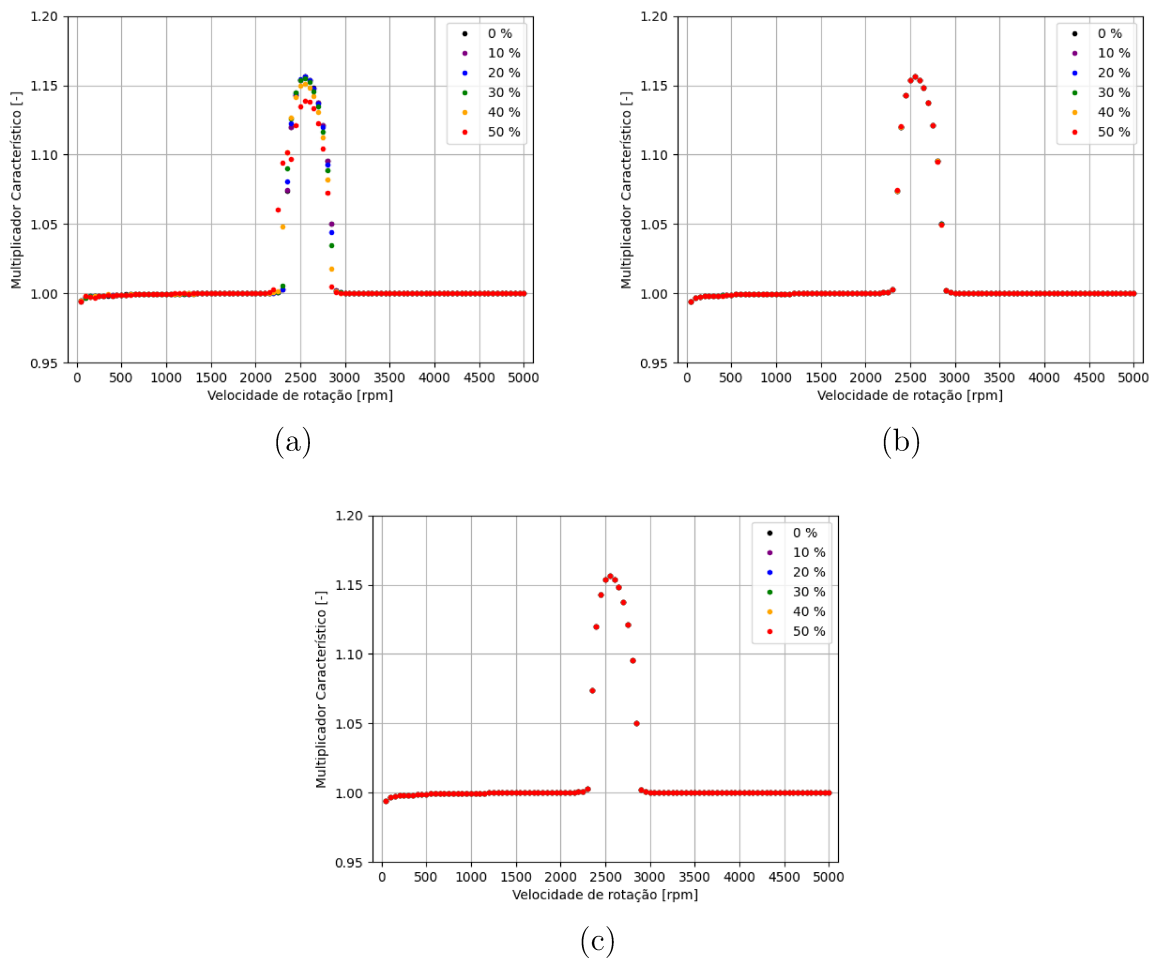


Figura 14 – Multiplicadores característicos do sistema para uma trinca com diferentes profundidades e localizada, da extremidade fixa, a: (a) 5%; (b) 50%; (c) 95%.

Fonte: Próprio autor.

Alguns testes foram conduzidos aplicando outras características físicas e geométricas para descrever o sistema, mas os resultados pouco destoaram dos aqui apresentados. Por exemplo, conforme a Figura 15, determinados sistemas aumentaram levemente a faixa de operação instável ao fixar massas muito pesadas (em torno de 2.5 kg) na extremidade livre das palhetas, porém isso é observado somente para trincas próximas ao ponto de engaste da viga e, ainda, com profundidades entre 30 e 50%.

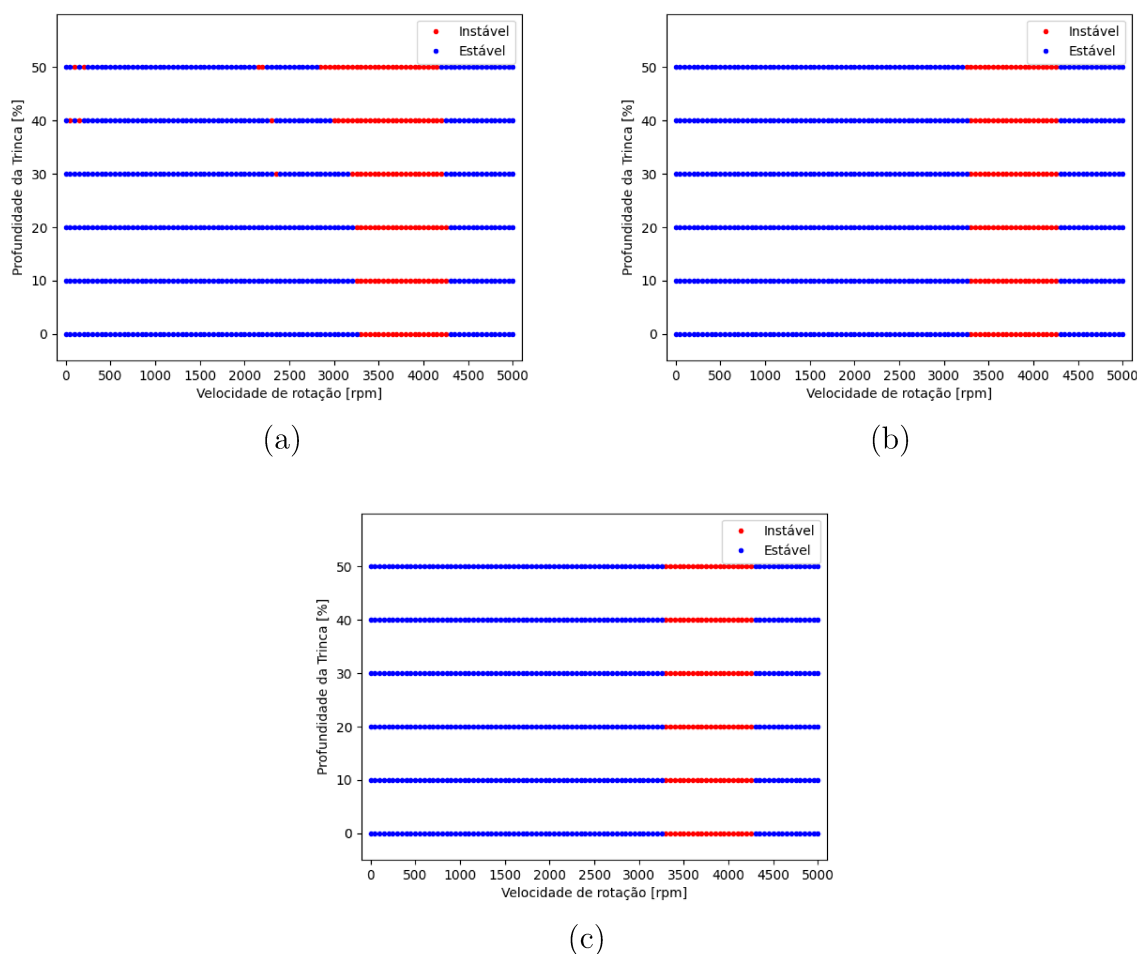


Figura 15 – Mapas de estabilidade do sistema alternativo para uma trinca com diferentes profundidades e localizada, da extremidade fixa, a: (a) 5%; (b) 50%; (c) 95%.

Fonte: Próprio autor.

## 4.4 Análise Modal

A trinca modelada pelo método FLEX tem seus efeitos determinados em função da resposta dinâmica do sistema a partir do terceiro instante de tempo da simulação. Assim, julga-se incoerente avaliar os atributos modais do sistema enquanto em repouso, uma vez que o estado trincado apresentará as mesmas propriedades modais do saudável independente dos parâmetros da trinca. O mesmo ocorrerá caso o rotor gire com velocidade angular constante e seja analisado em um instante que a trinca está fechada. Também, como há gdl's definidos em referenciais distintos, resultados equivocados serão obtidos ao extrair os parâmetros modais a partir da média das matrizes do sistema determinadas em cada posição angular do rotor. Desse modo, efetuou-se a análise modal sobre a matriz de espaço de estados definida em um instante específico de tempo, dado por 0.1 segundos, e considerando a operação do rotor a 360 *rpm*, situação na qual a trinca estará aberta para qualquer condição de dano associada ao sistema em estudo.

Na Tabela 2 são indicadas as dez primeiras frequências naturais do sistema no

estado saudável e trincado, este caracterizado pela presença de uma trinca na primeira palheta, posicionada a 5, 50 ou 95% da extremidade fixa com profundidade de 20 ou 50%.

Tabela 2 – Dez primeiras frequências naturais do sistema ( $Hz$ ) para diferentes posições ( $p$ ) e profundidades ( $d$ ) de trinca com o rotor operando a 360  $rpm$  em 0.1  $s$ .

Modos	1°	2°	3°	4°	5°
Saudável	10.4455	11.5037	17.7338	17.7342	18.4483
$p = 5\%$ , $d = 20\%$	10.4443	11.5005	17.6777	17.7342	18.4204
$p = 5\%$ , $d = 50\%$	10.4316	11.4663	16.9909	17.7341	18.2872
$p = 50\%$ , $d = 20\%$	10.4453	11.5032	17.7239	17.7342	18.4427
$p = 50\%$ , $d = 50\%$	10.4438	11.4989	17.6164	17.7342	18.3938
$p = 95\%$ , $d = 20\%$	10.4454	11.5037	17.7333	17.7342	18.4480
$p = 95\%$ , $d = 50\%$	10.4454	11.5035	17.7280	17.7342	18.4449
Modos	6°	7°	8°	9°	10°
Saudável	20.4677	112.3032	112.3035	114.0481	114.5892
$p = 5\%$ , $d = 20\%$	20.4449	111.9016	112.3035	113.8165	114.5287
$p = 5\%$ , $d = 50\%$	20.2937	106.7611	112.3033	113.3363	114.4715
$p = 50\%$ , $d = 20\%$	20.4625	112.1713	112.3109	113.9615	114.5662
$p = 50\%$ , $d = 50\%$	20.4155	110.1886	112.3105	113.4903	114.4937
$p = 95\%$ , $d = 20\%$	20.4674	112.2356	112.3033	113.9986	114.5713
$p = 95\%$ , $d = 50\%$	20.4644	111.3323	112.3033	113.6315	114.5019

Fonte: Próprio autor.

Avaliando esses resultados, percebe-se que as frequências naturais do sistema diminuem com o aumento da profundidade da trinca em uma mesma posição. Analogamente, mantida a profundidade, a redução dessas frequências fica mais evidente à medida que a trinca se aproxima da fixação. Em outras palavras, o sistema trincado tende a apresentar comportamento dinâmico próximo ao saudável na presença de trincas pouco profundas e próximas à extremidade livre.

Sabendo que o dano mais representativo é causado por uma trinca posicionada a 5% da extremidade fixa com profundidade de 50%, as Figuras 16 e 17 ilustram um comparativo entre esse sistema trincado e o saudável para os dez primeiros modos de vibrar, a fim de compreender a influência da não linearidade na forma como toda estrutura vibra em função da modificação das frequências naturais. Contudo, ao observá-las, nota-se que alterações significativas ocorrem apenas na forma do 1° modo, apesar de haver redução das frequências naturais de todos eles. Portanto, sob as condições impostas, não é adequado diagnosticar trincas para esse tipo de estrutura a partir das formas de vibrar.

Essas constatações estão em concordância com os trabalhos citados no Capítulo 2 que avaliaram os efeitos provocados por trincas em vigas girantes.

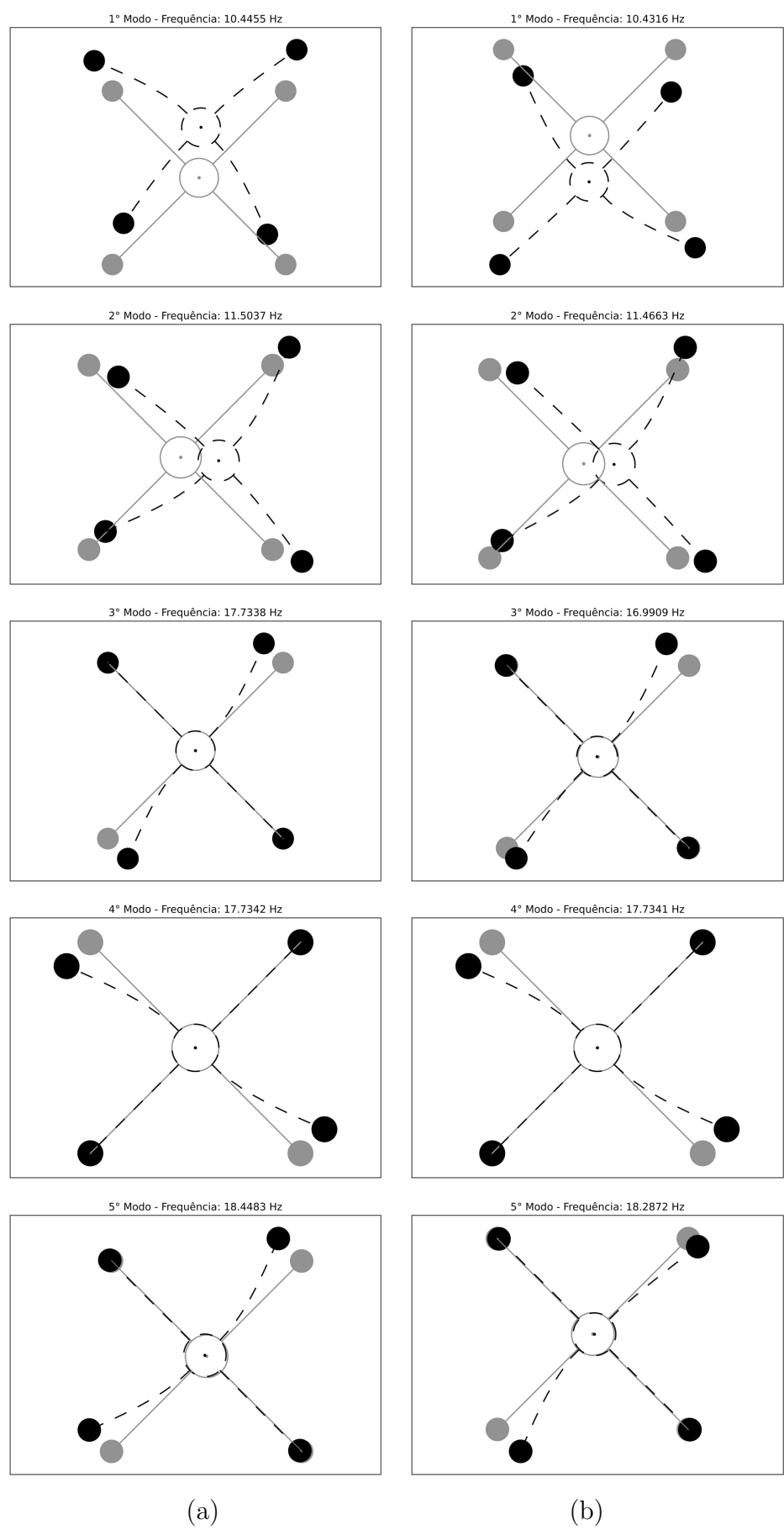


Figura 16 – 1° ao 5° modo de vibrar do sistema operando a 360 rpm em 0.1 s: (a) Saudável; (b)  $p = 5\%$ ,  $d = 50\%$ .

Fonte: Próprio autor.

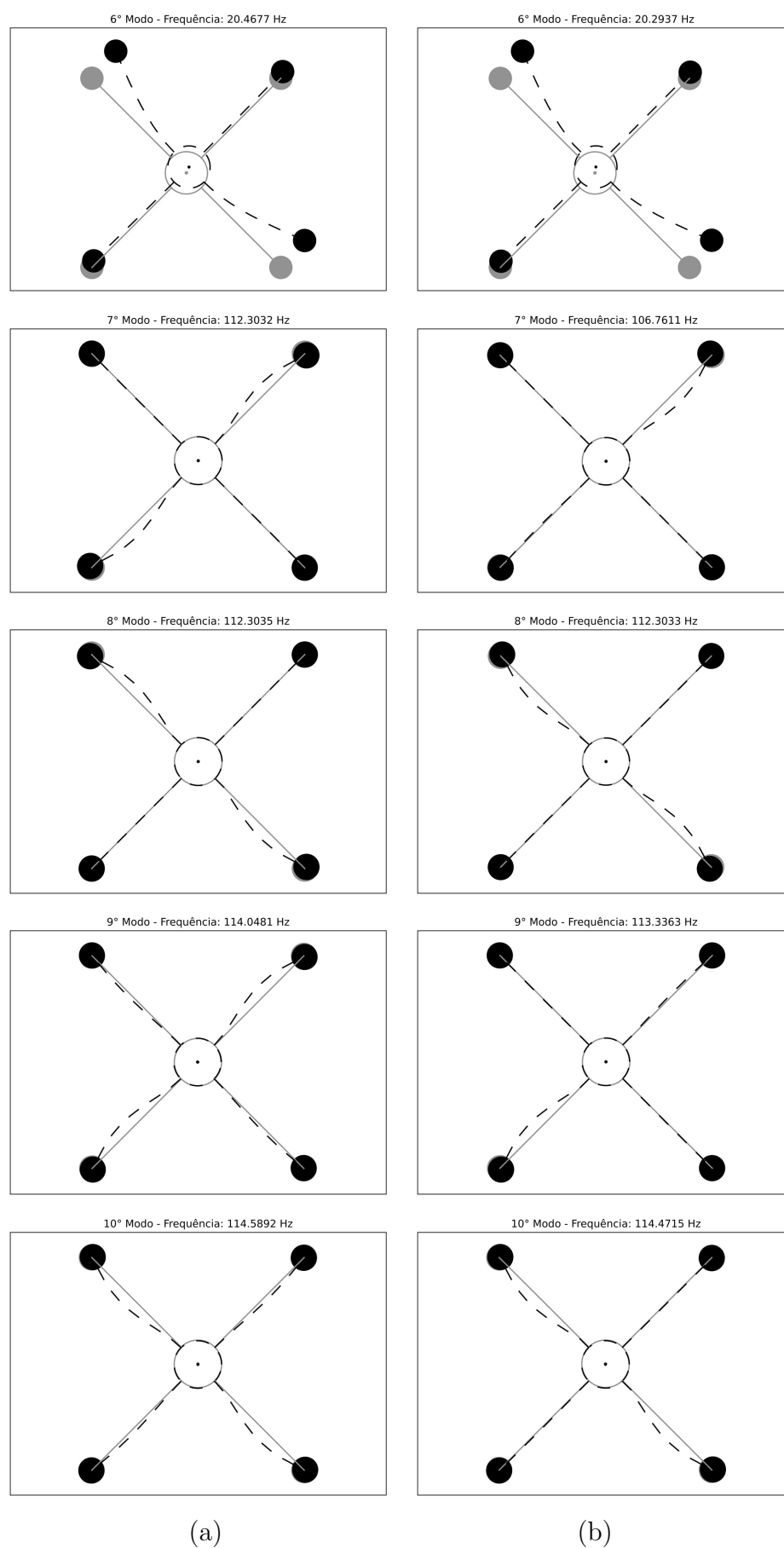


Figura 17 – 6° ao 10° modo de vibrar do sistema operando a 360 rpm em 0.1 s: (a) Saudável; (b)  $p = 5\%$ ,  $d = 50\%$ .

Fonte: Próprio autor.

## 4.5 Resposta Temporal

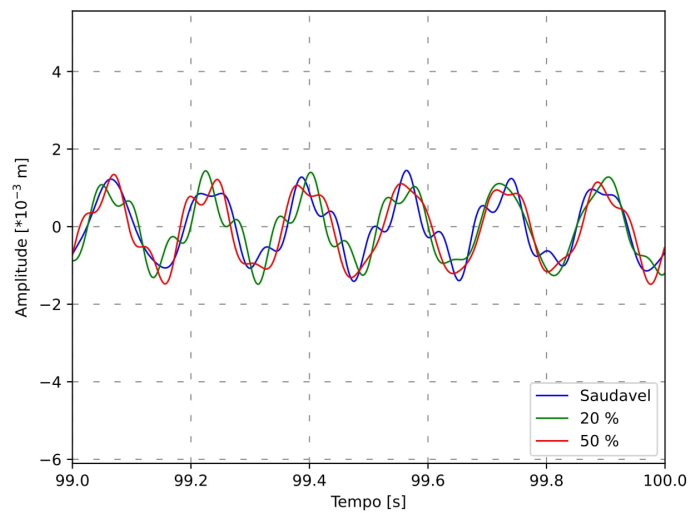
A quarta análise desta dissertação se refere ao estudo dos efeitos causados pela trinca no comportamento temporal do conjunto mecânico. Com esse fim, simula-se o sistema saudável e trincado operando a 360 e 1080 *rpm* (velocidades estáveis) durante 100 e 50 segundos, respectivamente. Em relação à trinca, ela foi inserida na primeira palheta em três posições (a 5, 50 ou 95% da fixação) com duas profundidades (20 ou 50%). Além disso, no instante inicial, aplica-se um impacto de 10 *N* na direção horizontal do rotor.

Esses tempos totais de simulação foram adotados com intuito de permitir que o sistema entrasse ou, pelo menos, se aproximasse do regime permanente. Quanto à escolha das velocidades, sabe-se que elas correspondem, nessa ordem, a 1/2 e 3/2 de 720 *rpm*, frequência de excitação identificada pela análise espectral (assunto explorado na próxima seção) como a velocidade crítica associada à frequência de ressonância do rotor na direção horizontal. A primeira normalmente evidencia a existência de trincas em estruturas rotativas, enquanto a segunda permite compreender o comportamento do sistema trincado em rotações elevadas.

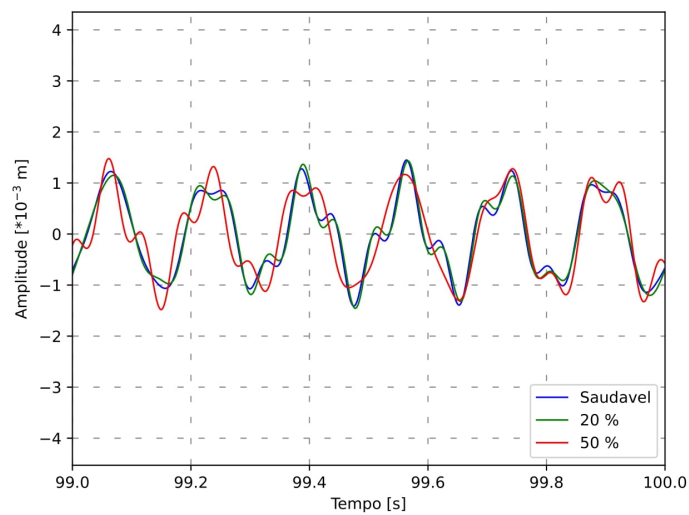
Considerando apenas os instantes finais de simulação, os deslocamentos transversais na extremidade da palheta trincada (*i.e.*, palheta  $b_1$ ) para as velocidades de 360 e 1080 *rpm* são ilustrados nas Figuras 18 e 19, respectivamente. Os gráficos temporais relativos aos demais gdl's do sistema não serão mostrados, mas os impactos gerados pela trinca foram percebidos em todos eles, mesmo que em menor intensidade.

Tomando a Figura 18, nota-se que os efeitos da trinca sobre as amplitudes de vibração não são distinguíveis quando localizada na extremidade livre, independente do dano. Comportamento semelhante é observado para uma trinca de 20% de profundidade no meio da viga, uma vez que os deslocamentos gerados são relativamente próximos aos apresentados pelo sistema saudável. Entretanto, uma trinca de 50% de profundidade na mesma posição ou com qualquer profundidade próxima à fixação levam a palheta a vibrar, em relação ao estado saudável, com intensidades distintas e levemente defasadas em alguns instantes. De qualquer forma, esses resultados não permitem estabelecer uma correlação direta entre a profundidade da trinca e o grau de vibração.

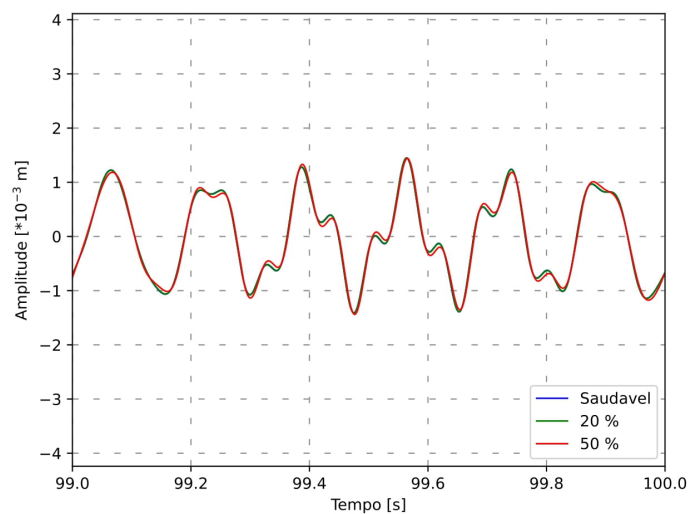
Quanto à Figura 19, verifica-se o aumento das amplitudes de vibração apenas para uma trinca de 50% de profundidade próxima ao engaste. Nos demais casos, fica clara a atuação do enrijecimento centrífugo sobre o sistema, uma vez que as oscilações do estado trincado praticamente não se diferenciam das relacionadas ao saudável. A partir disso, conclui-se que o aumento da rigidez proporcionado pela aceleração centrífuga compensa a flexibilidade ocasionada pela presença da trinca quando o sistema é submetido a maiores rotações. Consequentemente, os efeitos gerados pela não linearidade acabam sendo ocultados no domínio temporal.



(a)



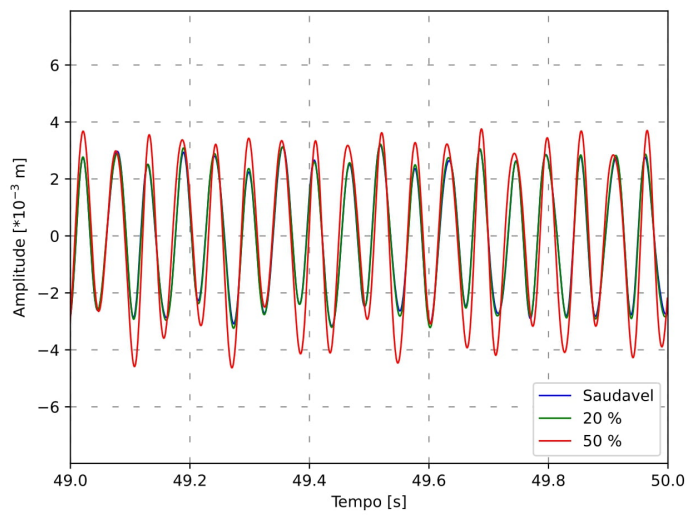
(b)



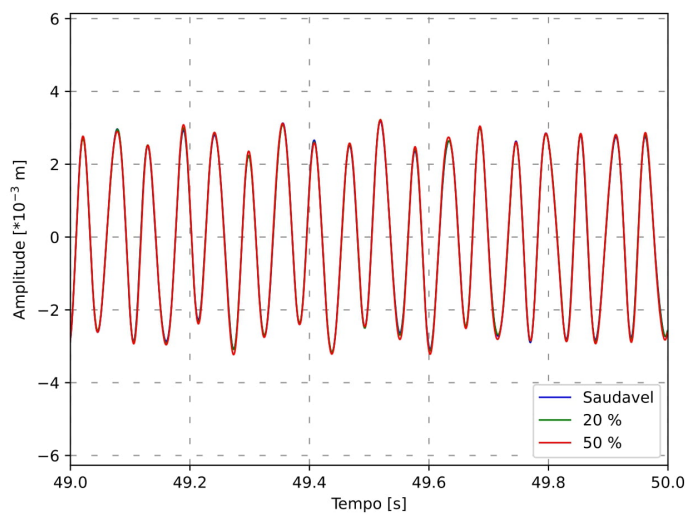
(c)

Figura 18 – Comparação entre as respostas temporais do sistema a 360 rpm para uma trinca com diferentes profundidades e localizada, da extremidade fixa, a: (a) 5%; (b) 50%; (c) 95%.

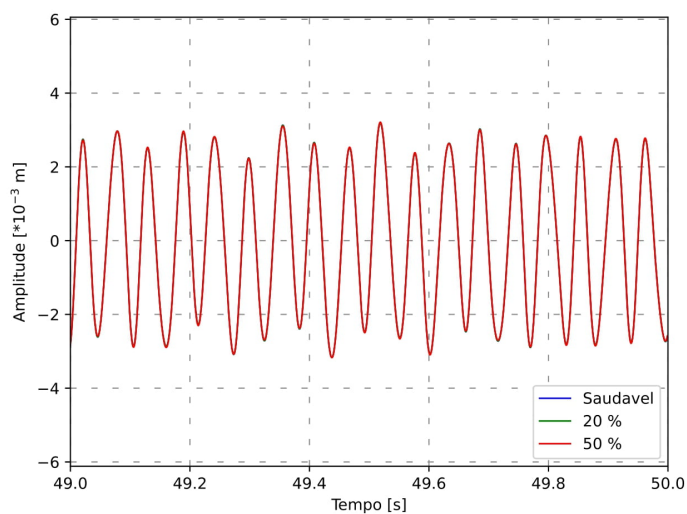
Fonte: Próprio autor.



(a)



(b)



(c)

Figura 19 – Comparação entre as respostas temporais do sistema a 1080 rpm para uma trinca com diferentes profundidades e localizada, da extremidade fixa, a: (a) 5%; (b) 50%; (c) 95%.

Fonte: Próprio autor.



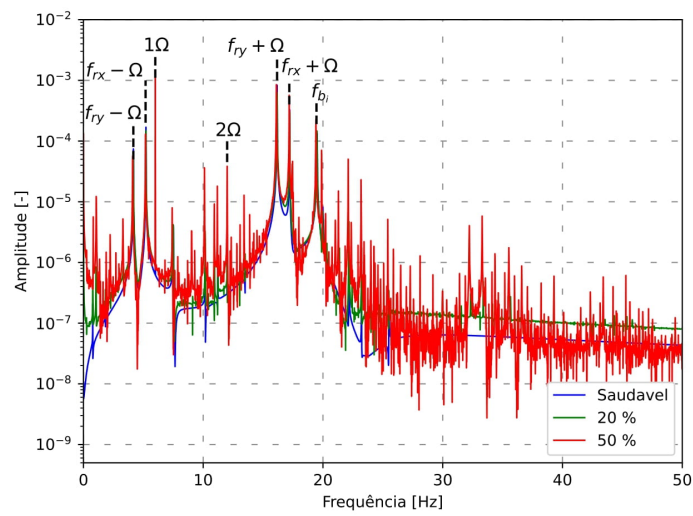
## 4.6 Função Resposta em Frequência

Esta última análise consiste em avaliar a influência da presença da trinca sobre o módulo das funções resposta em frequência do sistema. Para tal, os deslocamentos temporais obtidos na seção anterior são passados para o domínio da frequência por meio da transformada de Fourier. Até então não havia sido mencionado, mas, conforme exposto por Saracho (2002), em um sistema modelado por gdl's descritos em referenciais distintos, a aplicação de uma excitação forçada (como o impacto) no referencial inercial permite a intensificação das amplitudes do sinal espectral observado no referencial rotativo.

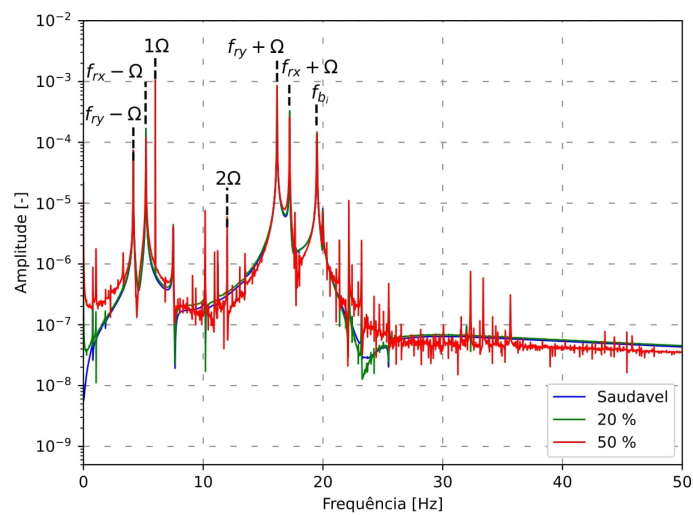
As Figuras 20 e 21 ilustram, de 0 a 50  $Hz$ , os espectros de frequência dos deslocamentos transversais na extremidade da palheta trincada para as velocidades de 360 e 1080  $rpm$ , respectivamente. Cabe ressaltar que esses espectros apresentam amplitudes proeminentes em frequências associadas à velocidade de rotação ( $\Omega$ ), às naturais básicas das palhetas ( $f_{b_i}$ ) e às naturais do rotor parametrizadas em função da velocidade angular (ou seja,  $f_{rx}$  e  $f_{ry}$  somadas a  $-\Omega$  e  $+\Omega$ ), fato ocasionado pelo movimento periódico do sistema combinado à utilização de gdl's em referenciais distintos. Para mais detalhes, recomenda-se consultar o trabalho de Rende (2020).

De forma geral, três aspectos podem ser observados nesses gráficos: mudanças no comportamento dinâmico em ressonâncias subcríticas já existentes; aparecimento de novas antirressonâncias; e intensificação do ruído. Esses efeitos ficam mais evidentes à medida que a trinca se aproxima da fixação com maiores profundidades, principalmente para 360  $rpm$ , demonstrando a importância de excitar um sistema a uma velocidade que corresponda à metade da sua velocidade crítica para manifestar a presença da trinca. Entretanto, para qualquer caso, não é constatado aumento significativo da amplitude do sinal nos múltiplos inteiros da velocidade de rotação, ou seja, nos harmônicos  $1\Omega$ ,  $2\Omega$  e  $3\Omega$ , componentes que costumam ser monitoradas em sistemas rotativos por serem fortes indicadoras de falhas.

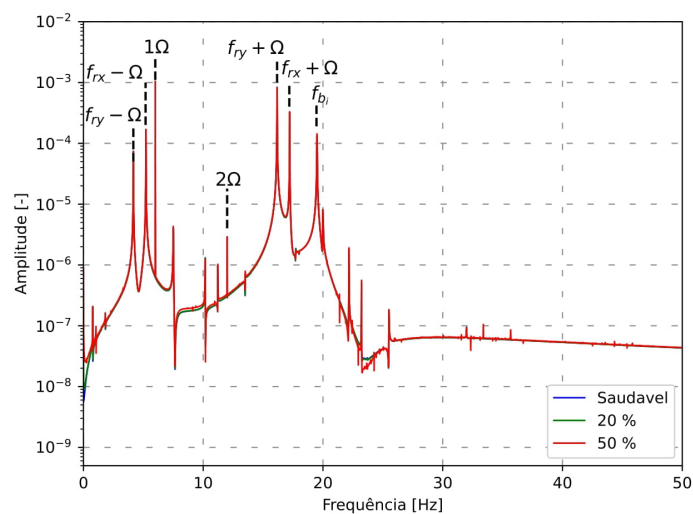
Além disso, nota-se, no espectro de frequências relacionado à velocidade de 1080  $rpm$ , a existência de um pico de amplitude ligado a palheta  $b_1$  ( $f_{b_1}$ ) e outro às demais ( $f_{b_i}$ ). Segundo Saracho (2002), esse comportamento é comum ocorrer nesse sistema rotativo e representa um afastamento entre os modos de vibrar das palhetas devido à velocidade de rotação, mesmo que elas sejam teoricamente idênticas. Ainda assim, para um trinca próxima à fixação com 50% de profundidade, percebe-se a redução de todas as frequências naturais do sistema em relação ao estado saudável, especialmente da relacionada à palheta trincada. Em contrapartida, nos gráficos gerados para 360  $rpm$  não é notória a diminuição das frequências de ressonância ou a diferenciação entre as frequências das palhetas saudáveis e com dano.



(a)



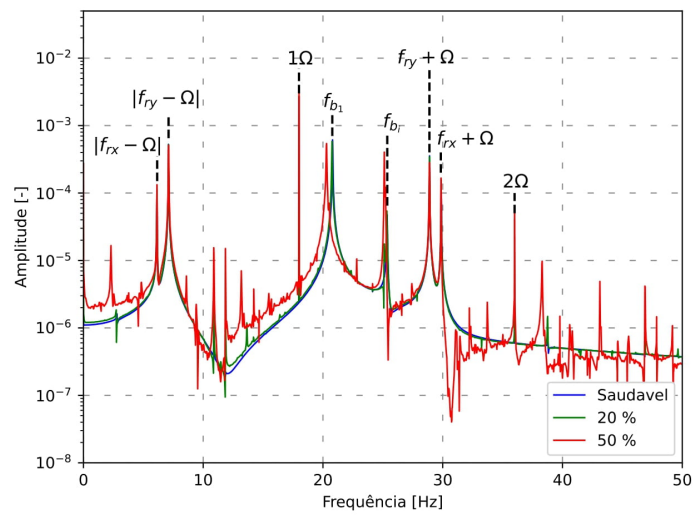
(b)



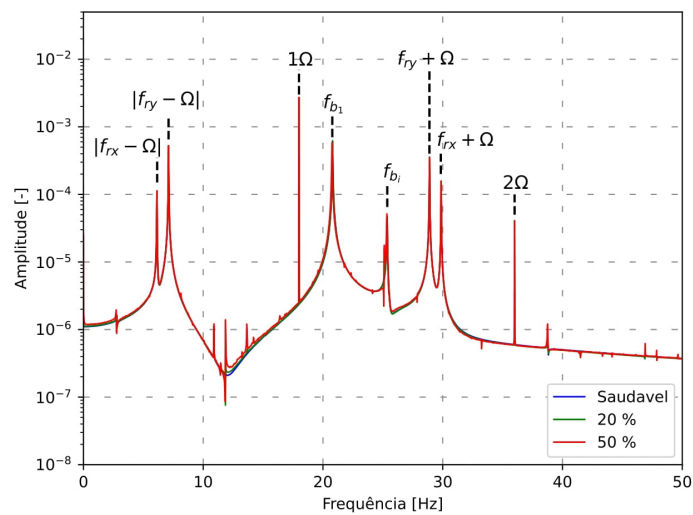
(c)

Figura 20 – Comparação entre os espectros de frequência do sistema a 360 rpm para uma trinca com diferentes profundidades e localizada, da extremidade fixa, a: (a) 5%; (b) 50%; (c) 95%.

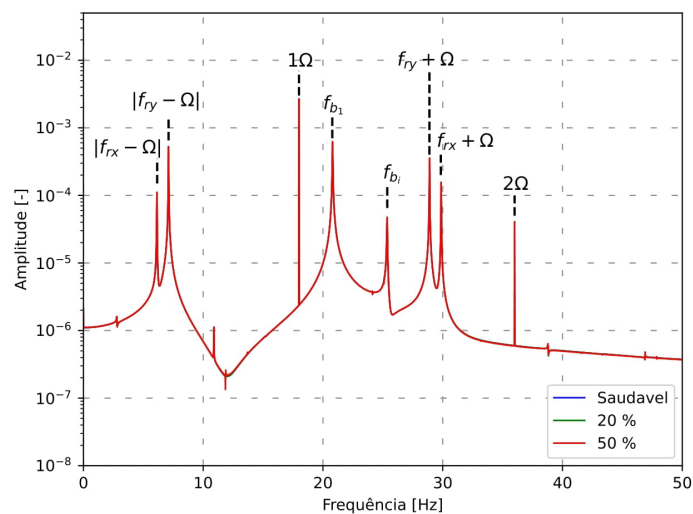
Fonte: Próprio autor.



(a)



(b)



(c)

Figura 21 – Comparação entre os espectros de frequência do sistema a 1080 rpm para uma trinca com diferentes profundidades e localizada, da extremidade fixa, a: (a) 5%; (b) 50%; (c) 95%.

Fonte: Próprio autor.

## 5 Conclusões

Com intuito de compreender o comportamento vibratório de sistemas rotativos trincados e contribuir para os procedimentos de diagnóstico de não-linearidades geométricas, este trabalho analisou, a partir da implementação numérica-computacional de modelos matemáticos desenvolvidos em pesquisas anteriores, os efeitos dinâmicos induzidos pela presença de trincas transversais em um disco palhetado.

O sistema mecânico estudado consistia em um rotor rígido acoplado a quatro palhetas flexíveis com pequenas massas rígidas na extremidade livre, sendo suportado por apoios elásticos que restringiam sua movimentação apenas no plano. Para modelar as palhetas, adotou-se um vetor de deformação linearizado de segunda ordem e as hipóteses da teoria da viga de Euler-Bernoulli. Quanto às equações diferenciais que descrevem o movimento, elas foram desenvolvidas combinando o método de Lagrange à discretização em elementos finitos. Finalmente, a trinca transversal foi inserida em uma das palhetas, para diferentes profundidades e posições, com auxílio da abordagem FLEX.

Na sequência, as equações do sistema saudável e trincado foram resolvidas aplicando a técnica de integração no tempo de Newmark associada ao procedimento iterativo de Newton-Raphson, fornecendo resultados no domínio do tempo e da frequência. Por outro lado, estudou-se a estabilidade com base nos multiplicadores e expoentes característicos associados a matriz de transição de estados, a qual foi definida pela teoria de Floquet e aproximada numericamente para um período. Em relação aos parâmetros modais, eles foram determinados em função da resolução do problema de autovalor e autovetor sobre a matriz de espaço de estados definida em um instante específico de tempo, uma vez que o sistema modelado apresenta gdl's descritos em referenciais distintos e propriedades periodicamente variantes com o tempo.

Diante das simplificações adotadas, notou-se que as análises efetuadas a partir da forma dos modos de vibrar ou por meio de mapas de estabilidade não são convenientes, uma vez que os sistemas trincados não demonstraram comportamentos dinâmicos que os permitissem diferenciar dos estados saudáveis. Apesar disso, com base em constatações da literatura, os demais resultados obtidos nesta monografia indicaram que o modelo FLEX simula, satisfatoriamente, o efeitos dinâmicos induzidos por trincas em palhetas de sistemas rotativos.

Em um primeiro momento, foi comprovada a relação do aumento da flexibilidade do elemento trincado com a abertura e o fechamento da trinca de acordo com a dinâmica do sistema, ou seja, o fenômeno de *breathing*. Entretanto, por adotar as hipóteses da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, detectou-se que esse processo não ocorre de forma gradual,

mas abruptamente.

Quanto aos efeitos causados pela variação dos parâmetros da trinca na primeira palheta do conjunto (sempre numerada a partir do eixo coordenado  $x$  quando o rotor está na sua posição inicial), verificou-se que trincas distantes da fixação e/ou pouco profundas levam o sistema a operar em condições próximas ao estado saudável, não apresentando diferenciações claras quanto às frequências naturais, ao comportamento temporal e ao sinal espectral. As análises também são dificultadas em velocidades elevadas, tendo em vista que o enrijecimento ocasionado pela aceleração centrífuga compensa a flexibilidade adicional introduzida pela trinca.

Em contrapartida, os efeitos ficaram nítidos para trincas profundas e próximas à fixação, principalmente ao excitar o sistema com uma velocidade igual à metade da crítica. Neste caso, apesar do sinal temporal não permitir estabelecer uma relação entre a intensidade do dano e a amplitude de vibração, os espectros de frequência evidenciaram a presença da trinca por meio de três características: mudanças no comportamento dinâmico em ressonâncias subcríticas já existentes; aparecimento de novas antirressonâncias; e intensificação do ruído.

Por fim, sabe-se que em um rotor real poderá não haver somente a influência da trinca, mas também a ação de outros defeitos, como folga, afrouxamento, desalinhamento, etc. De qualquer maneira, entender a influência dessa não-linearidade a partir de sua modelagem matemática representa um avanço interessante para os procedimentos de diagnóstico de defeitos ou falhas em máquinas rotativas. Neste contexto, as principais contribuições desta dissertação de mestrado à comunidade acadêmica são:

- A formulação matemática do sistema rotor-palhetas flexíveis em elementos finitos sob as hipóteses da teoria de vigas de Euler-Bernoulli e considerando um vetor de deformação linearizado de segunda ordem;
- O desenvolvimento das equações do movimento pelo método de Lagrange e sua resolução com auxílio da técnica de integração no tempo de Newmark associada ao processo iterativo de Newton-Raphson;
- A descrição e implementação computacional do modelo de trinca FLEX para representar o fenômeno de *breathing*;
- A aplicação da teoria de Floquet para efetuar a análise de estabilidade de sistemas rotativos periodicamente variantes no tempo; e
- As discussões a respeito do comportamento dinâmico apresentado por um sistema rotativo na presença de uma trinca transversal em uma de suas palhetas com diferentes profundidades e posições.

## 5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Como complementação a esta dissertação, sugere-se explorar os seguintes tópicos em trabalhos futuros:

- Construir uma bancada de testes para validar experimentalmente os resultados numéricos obtidos;
- Aplicar outras metodologias para determinar a estabilidade do sistema saudável e trincado;
- Considerar o modelo tridimensional do sistema trincado no desenvolvimento das equações do movimento;
- Efetuar as mesmas análises utilizando outros modelos de *breathing*;
- Estudar o comportamento dinâmico do rotor trincado em operações de *run-up* (aceleração) e *run-down* (desaceleração);
- Simular a propagação da trinca e compreender seu efeito sobre a dinâmica do sistema;
- Analisar os efeitos induzidos por trincas quando inseridas em duas ou mais palhetas e na presença de ângulo de torção na fixação; e
- Desenvolver ferramentas para identificar os parâmetros da trinca (palheta trincada, profundidade e posição) a partir da resposta vibratória do sistema.

## Referências

- ANIFANTIS, N.; DIMAROGONAS, A. Stability of columns with a single crack subjected to follower and vertical loads. *International Journal of Solids and Structures*, Pergamon Press Ltd., v. 19, n. 4, p. 281–291, 1983. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(83\)90027-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(83)90027-6)>.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 5462: Confiabilidade e manutenibilidade*. Rio de Janeiro, 1994. 37 p.
- BACHSCHMID, N. et al. Transverse crack modeling and validation in rotor systems, including thermal effects. *International Journal of Rotating Machinery*, Taylor & Francis, v. 9, n. 2, p. 113–126, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/S1023621X03000101>>.
- BACHSCHMID, N.; TANZI, E. Deflections and strains in cracked shafts due to rotating loads: A numerical and experimental analysis. *International Journal of Rotating Machinery*, Taylor & Francis, v. 10, n. 4, p. 283–291, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/S1023621X04000296>>.
- BACHSCHMID, N. et al. Statical and dynamical behaviour of rotors with transversal crack – part I: comparison between different models. In: *Proceedings of the XIV Congresso Nazionale AIMETA*. Como: [s.n.], 1999.
- CAVALINI JR, A. A. *Deteção e Identificação de Trincas Transversais Incipientes em Eixos Horizontais Flexíveis de Máquinas Rotativas*. 270 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2013. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14730>>.
- CAVALINI JR, A. A. et al. Uncertainty analysis of a flexible rotor supported by fluid film bearings. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 12, n. 8, p. 1487–1504, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1679-78251582>>.
- CAVALINI JR, A. A. et al. Investigation of the favorable conditions to apply the combination resonances approach for crack detection purposes. *Journal of Vibration and Control*, v. 26, n. 15–16, p. 1345–1355, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1077546319896657>>.
- CHEN, L.; CHEN, C. Vibration and stability of cracked thick rotating blades. *Computers & structures*, Pergamon Journals Ltd, v. 28, n. 1, p. 67–74, 1988. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(88\)90093-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(88)90093-4)>.
- CHEN, L.; CHEN, J. Non-conservative stability of a cracked thick rotating blade. *Computers & structures*, Pergamon Press plc, v. 35, n. 6, p. 653–660, 1990. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(90\)90410-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(90)90410-4)>.
- DATTA, P. K.; GANGULI, R. Vibration characteristics of a rotating blade with localized damage including the effects of shear deformation and rotary inertia. *Computers & structures*, Pergamon Press plc, v. 36, n. 6, p. 1129–1133, 1990. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(90\)90221-M](https://doi.org/10.1016/0045-7949(90)90221-M)>.

DIMAROGONAS, A.; MASSOUROS, G. Torsional vibration of a shaft with a circumferential crack. *Engineering Fracture Mechanics*, Pergamon Press Ltd., v. 15, n. 3–4, p. 439–444, 1981. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0013-7944\(81\)90069-2](https://doi.org/10.1016/0013-7944(81)90069-2)>.

FRIEDMANN, P. P. Numerical methods for determining the stability and response of periodic systems with applications to helicopter rotor dynamics and aeroelasticity. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 12, n. 1, p. 131–148, 1986. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0898-1221\(86\)90091-X](https://doi.org/10.1016/0898-1221(86)90091-X)>.

GASCH, R. Dynamic behaviour of a simple rotor with a cross sectional crack. In: *International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*. Londres: IMechE, Paper C178/76, 1976. p. 123–128.

GUDMUNDSON, P. Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Pergamon Press Ltd, v. 30, n. 5, p. 339–353, 1982. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(82\)90004-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(82)90004-7)>.

HOA, S. Vibration of a rotating beam with tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 67, n. 3, p. 369–381, 1979. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(79\)90542-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(79)90542-X)>.

HORRIGAN, D. P. W.; WILLIAMS, J. F.; PARSEWSKI, Z. A. A finite element model for transverse cracks in rotors including some fracture mechanics aspects. In: *Rotordynamics '92*. London: Springer, 1992. p. 51–58. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-1-4471-1979-1\\_7](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-1979-1_7)>.

KIRMSER, P. G. The effect of discontinuities on the natural frequency of beams. In: *Proceedings of the American society for testing materials*. Philadelphia: ASTM, 1944. p. 897–904.

LIEBOWITZ, H.; CLAUS, W. D. Failure of notched columns. *Engineering Fracture Mechanics*, Pergamon Press Ltd., v. 1, n. 2, p. 379–383, 1968. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0013-7944\(68\)90010-6](https://doi.org/10.1016/0013-7944(68)90010-6)>.

LIEBOWITZ, H.; VANDERVELDT, H.; HARRIS, D. W. Carrying capacity of notched columns. *International Journal of Solids and Structures*, Pergamon Press Ltd., v. 3, n. 4, p. 489–500, 1967. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(67\)90003-0](https://doi.org/10.1016/0020-7683(67)90003-0)>.

MAYES, I. W.; DAVIES, W. G. R. The vibration behaviour of a rotating shaft system containing a transverse crack. In: *International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*. Londres: Paper C168/76, IMechE, 1976. p. 53–64.

MAYES, I. W.; DAVIES, W. G. R. Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, ASME, v. 106, n. 1, p. 139–145, 1984. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3269142>>.

MEIROVITCH, L. *Methods of analytical dynamics*. New York: McGraw-Hill, 1970. 524 p.

MORAIS, T. S. *Contribuição ao Estudo de Máquinas Rotativas na Presença de Não-Linearidades*. 173 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2010. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14866>>.



- MORAIS, T. S. et al. Modelagem de um sistema viga–trinca–PZT. In: *VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica — CONEM*. Campina Grande: ABCM, 2010.
- MORAIS, T. S.; STEFFEN, V.; BACHSCHMID, N. Time-varying parameter identification using orthogonal functions. In: *6th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*. Bristol: IOP Publishing Ltd, 2008. v. 135. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1742-6596/135/1/012072>>.
- MORAIS, T. S.; STEFFEN, V.; MAHFOUD, J. Control of the breathing mechanism of a cracked rotor by using electro-magnetic actuator: Numerical study. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 9, n. 5, p. 581–596, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1679-78252012000500004>>.
- NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. *Journal of Engineering Mechanics Division*, v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959. Disponível em: <<https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000098>>.
- OKAMURA, H. et al. A cracked column under compression. *Engineering Fracture Mechanics*, Pergamon Press Ltd., v. 1, n. 3, p. 547–564, 1969. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0013-7944\(69\)90011-3](https://doi.org/10.1016/0013-7944(69)90011-3)>.
- OSTACHOWICZ, W. M.; KRAWCZUK, M. Vibration analysis of a cracked beam. *Computers & Structures*, Pergamon Press plc, v. 36, n. 2, p. 245–250, 1990. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(90\)90123-J](https://doi.org/10.1016/0045-7949(90)90123-J)>.
- PAPADOPOULOS, C. A.; DIMAROGONAS, A. D. Coupling of bending and torsional vibration of a cracked timoshenko shaft. *Ingenieur-Archiv*, Springer-Verlag, v. 57, n. 4, p. 257–266, 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00534404>>.
- RADE, D. A. *Método dos Elementos Finitos*. Uberlândia: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, 2013. 84 p.
- RENDE, B. R. F. *Análise Numérica e Experimental do Comportamento Dinâmico de um Sistema Rotor-Palhetas*. 106 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2020. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/31022>>.
- RENDE, B. R. F. et al. The influence of a crack in the dynamic behavior of a flexible disc. In: *24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering – COBEM*. Curitiba: ABCM, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.26678/abcm.cobem2017.cob17-2053>>.
- RENDE, B. R. F. et al. Stability analysis of a cracked blade coupled with a rigid rotor. In: *Proceedings of the 10th International Conference on Rotor Dynamics – IFToMM*. Rio de Janeiro, 2018. Cham: Springer International Publishing, 2019. v. 62, p. 178–192. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-3-319-99270-9\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-319-99270-9_13)>.
- RICE, J. R.; LEVY, N. The part-through surface crack in an elastic plate. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, ASME, v. 39, n. 1, p. 185–194, 1972. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3422609>>.
- RIZOS, P. F.; ASPRAGATHOS, N.; DIMAROGONAS, A. D. Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 138, n. 3, p. 381–388, 1990. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90593-O](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90593-O)>.

SAAVEDRA, P. N.; CUITIÑO, L. A. Crack detection and vibration behavior of cracked beams. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 79, n. 16, p. 1451–1459, 2001. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00049-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00049-9)>.

SAITO, A. *Nonlinear Vibration Analysis of Cracked Structures – Application to Turbomachinery Rotors with Cracked Blades*. 157 f. Dissertação (Doctor of Philosophy in Mechanical Engineering) — University of Michigan, Michigan, 2009. Disponível em: <<https://hdl.handle.net/2027.42/62359>>.

SANTOS, F. M. R. dos. *Avaliação da qualidade da informação dos controles de eventos de falha e manutenção de equipamentos industriais*. 177 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Gestão do Conhecimento) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009. Disponível em: <<http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/93173>>.

SANTOS, I. F. et al. Contribution to experimental validation of linear and non-linear dynamic models for representing rotor-blade parametric coupled vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 271, n. 3–5, p. 883–904, 2004. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00758-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00758-2)>.

SARACHO, C. M. *Modelos Matemáticos Lineares e Não-Lineares para Representar o Acoplamento entre Rotor e Palhetas Flexíveis – Exemplos Numéricos e Verificação Experimental*. 264 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002. Disponível em: <<https://hdl.handle.net/20.500.12733/1593149>>.

SIMÕES, R. C. *Identificação de Falhas em Eixos de Rotores Flexíveis Utilizando Técnicas de Otimização*. 95 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2002. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/29947>>.

THOMSON, W. T. Vibration of slender bars with discontinuities in stiffness. *Journal of Applied Mechanics*, v. 16, n. 2, p. 203–207, 1949. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4009936>>.

WAUER, J. On the dynamics of cracked rotors: A literature survey. *Applied Mechanics Reviews*, ASME, v. 43, n. 1, p. 13–17, 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3119157>>.

WAUER, J. Vibrations of cracked rotating blades. In: *Rotordynamics '92*. London: Springer, 1992. p. 68–75. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-1-4471-1979-1\\_9](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-1979-1_9)>.

WU, M.; HUANG, S. On the vibration of a cracked rotating blade. *Shock and Vibration*, IOS Press, v. 5, n. 5-6, p. 317–323, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/1998/537518>>.

YU, Z.; XU, X. Failure investigation on failed inducer blades used in locomotive turbocharger. *Engineering Failure Analysis*, Elsevier, v. 16, n. 1, p. 402–408, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2008.05.017>>.

ZANITTI, M. de A. *Modelagem em Elementos Finitos de Vigas Flexíveis Girantes*. 91 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/154408>>.

# APÊNDICE A – Matrizes do Sistema

Neste apêndice são indicadas, sem demonstração, todas as matrizes associadas à modelagem matemática em elementos finitos do sistema rotor-palhetas flexíveis considerado neste trabalho. Ressalta-se a utilização dos sobrescritos “(g)” e “(e)” para se referir às matrizes de elementos finitos definidas, respectivamente, nos gdl's globais e elementares de cada palheta, as quais são relacionadas a partir da aplicação de transformações lineares  $\mathbf{L}_w$ . O procedimento para obtenção dessas transformações não será discutido, porém, caso o leitor deseje, recomenda-se verificar o texto elaborado por Rade (2013).

- *Matriz de Massa:*

Conforme a Equação (A.1), a matriz de massa  $\mathbf{M}$  é formada por termos relativos às massas existentes no sistema, podendo ser representados individualmente (elementos da diagonal principal) ou acoplados (demais elementos).

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & \mathbf{m}_{x_1}^{(g)} & \mathbf{m}_{x_2}^{(g)} & \mathbf{m}_{x_3}^{(g)} & \mathbf{m}_{x_4}^{(g)} \\ & m_y & \mathbf{m}_{y_1}^{(g)} & \mathbf{m}_{y_2}^{(g)} & \mathbf{m}_{y_3}^{(g)} & \mathbf{m}_{y_4}^{(g)} \\ & & \mathbf{m}_{b_1}^{(g)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mathbf{m}_{b_2}^{(g)} & 0 & 0 \\ & & & & \mathbf{m}_{b_3}^{(g)} & 0 \\ Sim. & & & & & \mathbf{m}_{b_4}^{(g)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$m_x = m_{rx} + m_u + 4(\rho_b A_b L_b + m_t) \quad (\text{A.2})$$

$$m_y = m_{ry} + m_u + 4(\rho_b A_b L_b + m_t) \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{m}_{x_i}^{(g)} = \sum_{w=1}^{n_e} \mathbf{m}_{x_i,b}^{(e)} \mathbf{L}_w + \mathbf{m}_{x_i,t}^{(e)} \mathbf{L}_{n_e} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{m}_{y_i}^{(g)} = \sum_{w=1}^{n_e} \mathbf{m}_{y_i,b}^{(e)} \mathbf{L}_w + \mathbf{m}_{y_i,t}^{(e)} \mathbf{L}_{n_e} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{m}_{b_i}^{(g)} = \sum_{w=1}^{n_e} \mathbf{L}_w^T \mathbf{m}_{b_i,b}^{(e)} \mathbf{L}_w + \mathbf{L}_{n_e}^T \mathbf{m}_{b_i,t}^{(e)} \mathbf{L}_{n_e} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{m}_{x_i,b}^{(e)} = \frac{\rho_b A_b L}{2} \begin{pmatrix} \cos[\phi + \psi_i] \\ -\sin[\phi + \psi_i] \\ -\frac{L}{6} \sin[\phi + \psi_i] \\ \cos[\phi + \psi_i] \\ -\sin[\phi + \psi_i] \\ \frac{L}{6} \sin[\phi + \psi_i] \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{m}_{y_i,b}^{(e)} = \frac{\rho_b A_b L}{2} \begin{pmatrix} \sin[\phi + \psi_i] \\ \cos[\phi + \psi_i] \\ \frac{L}{6} \cos[\phi + \psi_i] \\ \sin[\phi + \psi_i] \\ \cos[\phi + \psi_i] \\ -\frac{L}{6} \cos[\phi + \psi_i] \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{m}_{x_i,t}^{(e)} = m_t \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cos[\phi + \psi_i] \quad -\sin[\phi + \psi_i] \quad -r_t \sin[\phi + \psi_i] \right\} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{m}_{y_i,t}^{(e)} = m_t \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \sin[\phi + \psi_i] \quad \cos[\phi + \psi_i] \quad r_t \cos[\phi + \psi_i] \right\} \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{m}_{b_i,t}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & m_t & 0 & 0 \\ & & & & m_t & m_t r_t \\ \text{Sim.} & & & & & J_t + m_t r_t^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{m}_{b_i,b}^{(e)} = \mathbf{M}_s + \mathbf{M}_I \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{M}_s = \frac{\rho_b A_b L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & & & & 156 & -22L \\ \text{Sim.} & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{M}_I = \frac{\rho_b I_b}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ & & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 36 & -3L \\ \text{Sim.} & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

- Matriz de Coriolis:

A presença da matriz de coriolis ou de efeito giroscópico  $\mathbf{G}$  (Equação (A.15)) se deve ao acoplamento entre os gdl's axiais e transversais das palhetas. Sua montagem se assemelha à da matriz de massa, diferindo, no entanto, pela não existência de simetria em relação à diagonal principal.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} c_x & 0 & \mathbf{c}_{x_1}^{(g)} & \mathbf{c}_{x_2}^{(g)} & \mathbf{c}_{x_3}^{(g)} & \mathbf{c}_{x_4}^{(g)} \\ 0 & c_y & \mathbf{c}_{y_1}^{(g)} & \mathbf{c}_{y_2}^{(g)} & \mathbf{c}_{y_3}^{(g)} & \mathbf{c}_{y_4}^{(g)} \\ 0 & 0 & \mathbf{c}_{b_1}^{(g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{c}_{b_2}^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{c}_{b_3}^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{c}_{b_4}^{(g)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{c}_{x_i}^{(g)} = \sum_{w=1}^{n_e} \mathbf{c}_{x_i,b}^{(e)} \mathbf{L}_w + \mathbf{c}_{x_i,t}^{(e)} \mathbf{L}_{n_e} = -2\Omega \mathbf{m}_{y_i}^{(g)} \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{c}_{y_i}^{(g)} = \sum_{w=1}^{n_e} \mathbf{c}_{y_i,b}^{(e)} \mathbf{L}_w + \mathbf{c}_{y_i,t}^{(e)} \mathbf{L}_{n_e} = 2\Omega \mathbf{m}_{x_i}^{(g)} \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{c}_{b_i}^{(g)} = \sum_{w=1}^{n_e} \mathbf{L}_w^T \mathbf{c}_{b_i,b}^{(e)} \mathbf{L}_w + \mathbf{L}_{n_e}^T \mathbf{c}_{b_i,t}^{(e)} \mathbf{L}_{n_e} \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{c}_{b_i,b}^{(e)} = 2\Omega \mathbf{C}_{gir,b} \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{c}_{b_i,t}^{(e)} = 2\Omega \mathbf{C}_{gir,t} \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{C}_{gir,b} = \frac{\rho_b A_b L}{60} \begin{bmatrix} 0 & -21 & -3L & 0 & -9 & 2L \\ & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ & & 0 & 2L & 0 & 0 \\ & & & 0 & -21 & 3L \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

*Antissim.*

$$\mathbf{C}_{gir,t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & -m_t & -m_t r_t \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

*Antissim.*

- *Matriz de Amortecimento Proporcional:*

O amortecimento proporcional se refere ao amortecimento natural inerente a um sistema mecânico. Para modelá-lo, aplicam-se constantes de proporcionalidade  $\gamma$  sobre as matrizes de massa e rigidez, conforme a Equação (A.23).

$$\mathbf{D} = \gamma_1 \mathbf{M} + \gamma_2 \mathbf{K} \quad (\text{A.23})$$

- *Matriz de Rigidez:*

A matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  (Equação (A.24)) é a maior responsável pela correta representação do comportamento dinâmico desse sistema. Ela leva em consideração as rigidezes dos suportes elásticos do rotor, as estruturais das palhetas e das massas rígidas, e as ocasionadas pelos efeitos centrífugos e gravitacionais.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & \mathbf{k}_{x_1}^{(g)} & \mathbf{k}_{x_2}^{(g)} & \mathbf{k}_{x_3}^{(g)} & \mathbf{k}_{x_4}^{(g)} \\ 0 & k_y & \mathbf{k}_{y_1}^{(g)} & \mathbf{k}_{y_2}^{(g)} & \mathbf{k}_{y_3}^{(g)} & \mathbf{k}_{y_4}^{(g)} \\ 0 & 0 & \mathbf{k}_{b_1}^{(g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{k}_{b_2}^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{k}_{b_3}^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{k}_{b_4}^{(g)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{k}_{x_i}^{(g)} = \sum_{w=1}^{n_e} \mathbf{k}_{x_i,b}^{(e)} \mathbf{L}_w + \mathbf{k}_{x_i,t}^{(e)} \mathbf{L}_{n_e} = -\dot{\Omega} \mathbf{m}_{y_i}^{(g)} - \Omega^2 \mathbf{m}_{x_i}^{(g)} \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{k}_{y_i}^{(g)} = \sum_{w=1}^{n_e} \mathbf{k}_{y_i,b}^{(e)} \mathbf{L}_w + \mathbf{k}_{y_i,t}^{(e)} \mathbf{L}_{n_e} = \dot{\Omega} \mathbf{m}_{x_i}^{(g)} - \Omega^2 \mathbf{m}_{y_i}^{(g)} \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{k}_{b_i}^{(g)} = \sum_{w=1}^{n_e} \mathbf{L}_w^T \mathbf{k}_{b_i,b}^{(e)} \mathbf{L}_w + \mathbf{L}_{n_e}^T \mathbf{k}_{b_i,t}^{(e)} \mathbf{L}_{n_e} \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{k}_{b_i,b}^{(e)} = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_{c_b} + \mathbf{K}_{c_t} + \mathbf{K}_{g_b} + \mathbf{K}_{g_t} + \dot{\Omega} \mathbf{C}_{gir,b} - \Omega^2 (\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_I) \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{K}_s = \frac{E_b I_b}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{A_b L^2}{I_b} & 0 & 0 & -\frac{A_b L^2}{I_b} & 0 & 0 \\ & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ & & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ & & & \frac{A_b L^2}{I_b} & 0 & 0 \\ & & & & 12 & -6L \\ \text{Sim.} & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{K}_{c_b} = \rho_b A_b \Omega^2 \left\{ [r(L_b - mL) + 0.5(L_b^2 - m^2 L^2)] \mathbf{K}_{g_1} - [r + mL] \mathbf{K}_{g_2} + \mathbf{K}_{g_3} \right\} \quad (\text{A.30})$$

$$\mathbf{K}_{c_t} = m_t \Omega^2 [r_t + L_b + r] \mathbf{K}_{g_1} \quad (\text{A.31})$$

$$\mathbf{K}_{g_b} = -\rho_b A_b g \sin[\phi + \psi_i] \{ [L_b - mL] \mathbf{K}_{g_1} - \mathbf{K}_{g_2} \} \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbf{K}_{g_t} = -m_t g \sin[\phi + \psi_i] \mathbf{K}_{g_1} \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbf{K}_{g_1} = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ & & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 36 & -3L \\ \text{Sim.} & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

$$\mathbf{K}_{g_2} = \frac{1}{60L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 36 & 6L^2 & 0 & -36L & 0 \\ & & 2L^3 & 0 & -6L^2 & -L^3 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 36L & 0 \\ \text{Sim.} & & & & & 6L^3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$



$$\mathbf{K}_{g_3} = \frac{1}{420L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -72L^2 & -15L^3 & 0 & 72L^2 & 6L^3 & \\ & -4L^4 & 0 & 15L^3 & 3L^4 & \\ & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & -72L^2 & -6L^3 & \\ Sim. & & & & & -18L^4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

$$\mathbf{k}_{b_i,t}^{(e)} = \dot{\Omega} \mathbf{C}_{gir,t} + \Omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -m_t & 0 & 0 \\ & & & & -m_t & -m_t r_t \\ Sim. & & & & & m_t r_t (L_b + r) \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

- Vetor de Forças:

O vetor de forças  $\mathbf{F}$  (Equação (A.38)) abrange os esforços associados ao desbalanceamento, à gravidade, à velocidade angular e à aceleração angular.

$$\mathbf{F} = \left\{ f_x \quad f_y \quad \mathbf{f}_{b_1}^{(g)} \quad \mathbf{f}_{b_2}^{(g)} \quad \mathbf{f}_{b_3}^{(g)} \quad \mathbf{f}_{b_4}^{(g)} \right\}^T \quad (\text{A.38})$$

$$f_x = m_u d \left\{ \Omega^2 \cos [\phi + \varphi] + \dot{\Omega} \sin [\phi + \varphi] \right\} + f_{ct} \sum_{i=1}^4 \left\{ \Omega^2 \cos [\phi + \psi_i] + \dot{\Omega} \sin [\phi + \psi_i] \right\} \quad (\text{A.39})$$

$$f_y = m_u d \left\{ \Omega^2 \sin [\phi + \varphi] - \dot{\Omega} \cos [\phi + \varphi] \right\} + f_{ct} \sum_{i=1}^4 \left\{ \Omega^2 \sin [\phi + \psi_i] - \dot{\Omega} \cos [\phi + \psi_i] \right\} - m_y g \quad (\text{A.40})$$

$$f_{ct} = \rho_b A_b L_b \left( \frac{L_b}{2} + r \right) + m_t (r_t + L_b + r) \quad (\text{A.41})$$

$$\mathbf{f}_{b_i}^{(g)} = \sum_{w=1}^{n_e} \mathbf{L}_w^T \mathbf{f}_{b_i,b}^{(e)} + \mathbf{L}_{n_e}^T \mathbf{f}_{b_i,t}^{(e)} \quad (\text{A.42})$$

$$\mathbf{f}_{b_i,b}^{(e)} = \mathbf{f}_{g,b} + \mathbf{f}_{\Omega,b} + \mathbf{f}_{\alpha_1,b} + \mathbf{f}_{\alpha_2,b} \quad (\text{A.43})$$

$$\mathbf{f}_{b_i,t}^{(e)} = \mathbf{f}_{g,t} + \mathbf{f}_{\Omega,t} + \mathbf{f}_{\alpha,t} \quad (\text{A.44})$$

$$\mathbf{f}_{g,b} = -g \left[ \mathbf{m}_{y_i,b}^{(e)} \right]^T \quad (\text{A.45})$$

$$\mathbf{f}_{\Omega,b} = \rho_b A_b L \Omega^2 \left\{ \frac{L}{6} + \frac{r}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{L}{3} + \frac{r}{2} \quad 0 \quad 0 \right\}^T \quad (\text{A.46})$$

$$\mathbf{f}_{\alpha_1,b} = \rho_b A_b L \dot{\Omega} \left\{ 0 \quad \frac{3L+10r}{20} \quad \frac{L(2L+5r)}{60} \quad 0 \quad \frac{(7L+10r)}{20} \quad \frac{-L(3L+5r)}{60} \right\}^T \quad (\text{A.47})$$

$$\mathbf{f}_{\alpha_2,b} = \rho_b I_b \dot{\Omega} \left\{ 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \right\}^T \quad (\text{A.48})$$

$$\mathbf{f}_{g,t} = -g \left[ \mathbf{m}_{y_i,t}^{(e)} \right]^T \quad (\text{A.49})$$

$$\mathbf{f}_{\Omega,t} = m_t \Omega^2 \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad r_t + L_b + r \quad 0 \quad 0 \right\}^T \quad (\text{A.50})$$

$$\mathbf{f}_{\alpha,t} = -\dot{\Omega} \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad m_t (r_t + L_b + r) \quad J_t + m_t r_t (r_t + L_b + r) \right\}^T \quad (\text{A.51})$$