ARIEL DE OLIVEIRA MONÇÃO

Espaços de operadores lineares, multilineares e polinômios regulares em espaços de Riesz e reticulados de Banach

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

2022

ARIEL DE OLIVEIRA MONÇÃO

Espaços de operadores lineares, multilineares e polinômios regulares em espaços de Riesz e reticulados de Banach

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG
2022

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

M739
2022

Monção, Ariel de Oliveira, 1997-
Espaços de operadores lineares, multilineares e polinômios regulares em espaços de Riesz e reticulados de Banach [recurso eletrônico] / Ariel de Oliveira Monção. - 2022.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.228
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo, 1962-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Ariel de Oliveira Monção.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 12012MAT002.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Espaços de operadores lineares, multilineares e polinômios regulares em espaços de Riesz e reticulados de Banach.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 07 de junho de 2022, às 10h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	**ASSINATURA**
Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho UFU - Universidade Federal de Uberlândia	GMAB
Prof. Dr. José Lucas Pereira Luiz IFNMG - Instituto Federal do Norte de Minas Gerais	José Lucas Pereira Luiz
Prof. Dr. Mario Henrique de Castro UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Mario H. de Castro

Uberlândia-MG, 07 de junho de 2022.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Claurindo e Antonia Izabel, e aos meus irmãos, Jonas e Silas.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por tudo.

Agradeço ao meu pai, Claurindo F. Monção, à minha mãe, Antonia Izabel P. de Oliveira, e aos meus irmãos, Jonas e Silas, por sempre estarem me apoiando quando necessário, e por terem possibilitado um ambiente favorável de estudo.

Agradeço ao professor Geraldo Márcio de A. Botelho pela orientação durante os dois anos e meio de mestrado.

Agradeço aos professores José Lucas P. Luiz e Mario H. de Castro pelas correções e sugestões.

Agradeço aos docentes do PPMAT que foram meus professores.

Agradeço à FAPEMIG por ter concedido apoio financeiro.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram no decorrer da minha formação acadêmica. Foram muitos!

Monção, A. O. *Espaços de operadores lineares, multilineares e polinômios regulares em espaços de Riesz e reticulados de Banach* 2022. (85) p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Os objetivos centrais desta dissertação são: (i) Discorrer sobre a introdução de uma relação de ordem nos conjuntos dos operadores lineares, operadores multilineares e polinômios homogêneos regulares entre espaços de Riesz de forma a torná-los espaços de Riesz. (ii) Discorrer sobre a definição de uma norma, chamada de norma regular, nos espaços dos operadores lineares, operadores multilineares e polinômios homogêneos regulares entre reticulados de Banach de forma a torná-los reticulados de Banach. Para alcançar esses objetivos provaremos, entre outros resultados, os seguintes teoremas fundamentais. O Teorema de Kantorovich, que estabelece que os operadores lineares positivos são determinados pelo cone positivo de seu domínio. O Teorema de F. Riesz-Kantorovich, o qual garante que o espaço dos operadores lineares regulares com contradomínio Dedekind completo é um espaço de Riesz Dedekind completo. E o resultado que assegura a continuidade dos operadores lineares positivos definidos em um reticulado de Banach a valores em um espaço de Riesz normado.

Palavras-chave: espaço de Riesz; Dedekind completo; reticulado de Banach; operadores lineares regulares; operadores multilineares regulares; polinômios homogêneos regulares; norma regular.

Monção, A. O. *Spaces of regular linear operators, multilinear operators and polynomials in Riesz spaces and Banach lattices* 2022. (85) p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The main purposes of this work are the following: (i) To show how an order relation can be introduced in the sets of regular linear operators, multilinear operators and homogeneous polynomials between Riesz spaces so that they become Riesz spaces. (ii) To show how a norm, called regular norm, can be defined in the spaces of regular linear operators, multilinear operators and homogeneous polynomials between Banach lattices so that they become Banach lattices. To achieve these tasks we prove, among several other results, the following fundamental theorems. The Kantorovich Theorem, which establishes that positive operators are fully determined by the positive cone of the domain space. The F. Riesz-Kantorovich Theorem, which guarantees that the space of regular linear operators taking values in a Dedekind complete space is a Dedekind complete Riesz space. And the result that assures that every positive linear operator from a Banach lattice to a normed Riesz space is continuous.

Keywords: Riesz spaces; Dedekind complete; Banach lattice; regular linear operators; regular multilinear operators; regular homogeneous polynomials; regular norm.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{N}_0^n$	$\mathbb{N}_0 \times \overset{(n)}{\cdots} \times \mathbb{N}_0$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	conjunto das sequências em $\mathbb{R}$
c	conjunto das sequências em $\mathbb{R}$ que são convergentes
c_0	conjunto das sequências em $\mathbb{R}$ que convergem para 0
ℓ_∞	conjunto das sequências em $\mathbb{R}$ que são limitadas
ℓ_p	$\left\{(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon \sum_{n=1}^\infty \lvert a_n\rvert^p < \infty\right\}$, onde $1 \leq p < \infty$
$L_p(\Omega)$	$\{[f]; f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \lvert f\rvert^p$ é μ-integrável sobre $\Omega\}$, onde $1 \leq p < \infty$
$C(K)$	espaço vetorial das funções reais contínuas no espaço topológico compacto de Hausdorff K
$E, E_1, \dots, E_n$ e F	espaços vetoriais reais
$E_1 \times \cdots \times E_n$	produto cartesiano dos espaços vetoriais $E_1, \dots, E_n$
E^n	$E \times \overset{(n)}{\cdots} \times E$
$ker(T)$	núcleo do operador linear T
$R(T)$	imagem do operador linear T
$L(E; F)$	espaço vetorial dos operadores lineares de E em F
$L_b(E; F)$	subespaço vetorial de $L(E; F)$ dos operadores lineares ordem limitados
$L_r(E; F)$	subespaço vetorial de $L(E; F)$ dos operadores lineares regulares
$\mathcal{L}(E; F)$	espaço vetorial dos operadores lineares contínuos de E em F
$\lVert \cdot \rVert_r$	norma regular (r-norma)
$\mathcal{L}_r(E; F)$	$\mathcal{L}(E; F) \cap L_r(E; F)$
$(\mathcal{L}_r(E; F), \lVert \cdot \rVert_r)$	$\mathcal{L}_r(E; F)$ munido com a norma regular
E^+	cone positivo do espaço vetorial ordenado E
B_E	bola unitária fechada do espaço normado E com centro em 0
${B_E}^+$	$E^+ \cap B_E$
E^*	dual algébrico do espaço vetorial E
E'	dual topológico do espaço normado E
$E^\sim$	ordem dual do espaço de Riesz E

$E^{\sim\sim}$	segundo ordem dual do espaço de Riesz E
x^+	parte positiva do vetor x no espaço de Riesz
x^-	parte negativa do vetor x no espaço de Riesz
$\|x\|$	módulo do vetor x no espaço de Riesz
$x_\lambda \uparrow$	a rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ é crescente no espaço de Riesz
$x_\lambda \uparrow x$	$x_\lambda \uparrow$ e $x = \sup\{x_\lambda \colon \lambda \in \Omega\}$ no espaço de Riesz
$D \uparrow$	o conjunto D é dirigido para cima no espaço de Riesz
$L(E_1, \ldots, E_n; F)$	espaço vetorial dos operadores n-lineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F
$L_r(E_1, \ldots, E_n; F)$	subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ dos operadores n-lineares regulares
$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$	espaço vetorial dos operadores n-lineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F
$\mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_n; F)$	$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \cap L_r(E_1, \ldots, E_n; F)$
$(\mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_n; F), \\|\cdot\\|_r)$	$\mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_n; F)$ munido com a norma regular
$L(^nE; F)$	$L(E, \overset{(n)}{\ldots}, E; F)$
$L^s(^nE; F)$	subespaço de $L(^nE; F)$ dos operadores n-lineares simétricos
$L^s_r(^nE; F)$	$L_r(^nE; F) \cap L^s(^nE; F)$
$\mathcal{L}^s_r(^nE; F)$	$L^s_r(^nE; F) \cap \mathcal{L}(^nE; F)$
$P(^nE; F)$	espaço vetorial dos polinômios n-homogêneos de E em F
$\mathcal{P}(^nE; F)$	subespaço vetorial de $P(^nE; F)$ dos polinômios n-homogêneos contínuos
$(\mathcal{P}(^nE; F), \\|\cdot\\|_r)$	$\mathcal{P}(^nE; F)$ munido com a norma regular
$\overset{\vee}{P}$	operador n-linear simétrico associado ao polinômio n-homogêneo P
$\widehat{A}$	polinômio n-homogêneo associado ao operador n-linear simétrico A

Sumário

Introdução

Na Análise Funcional estudamos os espaços vetoriais normados e as funções entre esses espaços, tais como os operadores lineares contínuos e também operadores não-lineares contínuos, por exemplo operadores multilineares e polinômios homogêneos. Várias subáreas se estabeleceram nessa área da Matemática, e uma delas é a que estuda os espaços vetoriais ordenados, com especial interesse nos espaços de Riesz e nos reticulados de Banach, os quais foram introduzidos por volta de 1930 pelo matemático F. Riesz. A inspiração veio da ordem usual da reta, e depois foi comprovado que grande parte dos espaços importantes em Análise Funcional também estão munidos de uma ordem compatível com a norma. Com a introdução de tais espaços, o estudo de operadores positivos, que tem suas raízes no século XIX, teve um avanço significativo. Nas últimas décadas, a teoria de espaços de Riesz, reticulados de Banach e operadores positivos, lineares e não-lineares, tem sido uma área de pesquisa muito ativa dentro da grande área de Análise Matemática.

Assim como na Álgebra Linear estudamos os operadores lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita e na Análise Funcional estudamos os operadores lineares contínuos entre espaços normados (veja [8]), em espaços de Riesz estudamos os operadores lineares regulares, que são operadores lineares entre espaços de Riesz que podem ser escritos como diferença de dois operadores positivos (veja [3]). O objetivo central desta dissertação é discorrer, com detalhes, sobre a introdução de uma ordem nos conjuntos dos operadores lineares, operadores multilineares e polinômios homogêneos regulares entre espaços de Riesz de forma a torná-los espaços de Riesz. E quando esses espaços subjacentes são reticulados de Banach, mostrar também como introduzir uma norma, chamada norma regular, nesses espaços de operadores lineares, multilineares e polinômios homogêneos regulares de forma a torná-los reticulados de Banach (veja [16, 23]).

A teoria de operadores lineares vem sendo desenvolvida há muito tempo, mesmo antes da Análise Funcional aparecer como disciplina matemática. Seu estudo é de grande interesse tanto para o desenvolvimento da matemática em si como também para as aplicações de matemática. Assim também é área de estudo deste trabalho. A teoria dos espaços de Riesz e operadores (lineares e não-lineares) positivos tem suas aplicações, por exemplo, em teoria dos jogos, economia, teoria nuclear e teoria de decisão estatística.

Inicialmente, o interesse da maioria das pesquisas acerca dos espaços vetoriais e espaços vetoriais normados se concentrava na estrutura algébrica e na estrutura topológica. A estrutura de ordem já era estudada, mas em menor escala. Em torno de 1960, os matemáticos começaram a perceber que, em um espaço vetorial normado, de uma estrutura de ordem compatível com as operações algébricas e com a norma decorrem resultados topológicos importantes. Um desses resultados, central na teoria, é o que garante a continuidade dos operadores lineares positivos definido em um reticulado de Banach a valores em um espaço de Riesz normado. Esse teorema é essencial para dar condições que garantam que espaços de operadores lineares, e também não-lineares, regulares contínuos entre reticulados de Banach sejam reticulados de Banach. Todos esses fatos serão demonstrados em detalhes nesta dissertação.

Descrevemos a seguir como os resultados da dissertação estão organizados.

No Capítulo 1 apresentaremos os conceitos e os resultados de Análise Funcional, com ênfase nos operadores lineares contínuos e nos operadores multilineares contínuos, que serão essenciais para o desenvolvimento do nosso estudo.

Os espaços de Riesz, que são espaços vetoriais munidos de uma estrutura de ordem compatível com as operações algébricas, e algumas de suas principais propriedades serão apresentados no Capítulo 2. A escolha dos resultados apresentados foi determinada pela importância de cada um deles e também pela necessidade de uso nos capítulos subsequentes. Os resultados referentes a essa parte podem ser encontrados com detalhes nos livros clássicos, por exemplo, [3, 23]. Serão abordadas as classes dos espaços de Riesz Dedekind completos e arquimedianos, muito importantes na teoria e no desenvolvimento deste trabalho. Ainda no Capítulo 2, trataremos dos reticulados de Banach, que são espaços de Riesz munidos de uma norma completa compatível com sua estrutura de ordem parcial, e veremos exemplos que comprovam que os espaços de Banach clássicos da Análise Funcional, sejam eles espaços de dimensão finita, de sequências ou de funções, são todos reticulados de Banach com ordens bem naturais.

Começamos o Capítulo 3 estudando os espaços de operadores lineares regulares entre espaços de Riesz e veremos, em particular, dois teoremas centrais, o Teorema de Kantorovich e o Teorema de F. Riesz-Kantorovich. O primeiro mostra a importância dos espaços de Riesz arquimedianos. No segundo veremos que o espaço formado pelos operadores lineares positivos com contradomínio Dedekind completo é um espaço de Riesz que é Dedekind completo. A seguir, ainda no Capítulo 3, mostraremos que, adicionando a hipótese dos espaços serem reticulados de Banach e munindo os espaços de operadores lineares com a norma regular, tal espaço é um reticulado de Banach. No decorrer do capítulo exibiremos exemplos que justificam a escolha dessas hipóteses.

Empreenderemos o estudo de espaços de operadores multilineares regulares no Capítulo 4. Utilizando condições e resultados vistos no caso linear, provaremos que o espaço dos operadores multilineares regulares entre espaços de Riesz é um espaço de Riesz. Mostraremos também que, quando os espaços subjacentes são reticulados de Banach, o espaço dos operadores multilineares regulares é um reticulado de Banach munido com a norma regular. Utilizaremos a abordagem feita por Loane em [21] para o primeiro caso. Para o caso dos espaços de operadores multilineares regulares, utilizaremos uma abordagem diferente daquela que é usualmente encontrada na literatura. Procedendo dessa forma, não será necessário desenvolver a teoria dos produtos tensoriais de espaços de Riesz, introduzida por D. H. Fremlin em [14] para tratar desse assunto.

O Capítulo 5 segue um desenvolvimento semelhante ao do Capítulo 4. Veremos que as condições para que o espaço dos polinômios homogêneos regulares entre espaços de Riesz seja um espaço de Riesz e para que o espaços dos polinômios homogêneos regulares entre reticulados de Banach seja um reticulado de Banach são as mesmas para o caso dos espaços dos operadores lineares. Apresentaremos resultados que mostram como os polinômios homogêneos estão relacionados com os operadores multilineares simétricos e utilizaremos essa relação para alcançar as propriedades que desejamos. Para tratar dos espaços de polinômios homogêneos regulares entre reticulados de Banach, novamente apresentamos uma metodologia distinta daquela usualmente encontrada na literatura. Neste caso evitamos o estudo dos produtos tensoriais simétricos de Fremlin.

As fórmulas para a parte positiva, a parte negativa e o módulo de operadores lineares, multilineares e polinômios homogêneos regulares são apresentadas em seus respectivos capítulos. Para operadores lineares regulares isso aparece no Teorema de F. Riesz-Kantorovich. A fórmula para o módulo de um operador bilinear entre espaços de Riesz é apresentada por Fremlin em [15] sem demonstração e é demonstrada em [9] por Buskes e Van Rooij utilizando o produto tensorial de Fremlin. Para operadores multilineares e polinômios homogêneos regulares exibiremos as fórmulas como em [21].

É importante ressaltar que todos os resultados apresentados são conhecidos, explicitamente ou de forma implícita nos livros e artigos da área. Como acontece com todas as áreas da matemática, muitos resultados e exemplos conhecidos e largamente utilizados aparecem na literatura com demonstrações pouco detalhadas, muitas vezes omitindo detalhes importantes, e algumas vezes até sem demonstração nenhuma. Um dos objetivos deste trabalho é apresentar todas essas demonstrações e exemplos com detalhes suficientes para a compreensão do leitor. Nossa aspiração é que, após estudar esta dissertação, o leitor estará preparado para acompanhar os avanços recentes na área e, eventualmente, se dedicar à pesquisa original no assunto.

Ariel de Oliveira Monção
Uberlândia-MG, 28 de abril de 2022.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar definições e resultados de Análise Funcional que são essenciais para o prosseguimento do nosso estudo, como também relembrar alguns conceitos e notações. As referências básicas que foram utilizadas neste capítulo são [8, 28].

Neste trabalho trataremos apenas de espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais.

1.1 Resultados básicos de Análise Funcional

Dados espaços vetoriais E e F, denotamos por $L(E;F)$ o conjunto de todos os operadores (transformações) lineares de E em F. Denotamos $L(E;\mathbb{R})$ por E^*, o qual chamamos de *dual algébrico* de E. Se os espaços vetoriais E e F forem normados, denotamos por $\mathcal{L}(E;F)$ o subespaço de $L(E;F)$ formado pelos operadores lineares contínuos. Chamamos $E' := \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ de *dual topológico* de E e seus elementos são chamados de *funcionais lineares*. Denotamos por B_E a bola unitária fechada de E com centro em 0, ou seja,

$$B_E = \{x \in E \colon \|x\| \leq 1\}.$$

O teorema a seguir é muito útil pois fornece condições necessárias e suficientes para a continuidade de um operador linear entre espaços normados.

Teorema 1.1.1. *Sejam E e F espaços normados e $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) T é contínuo.

(ii) T é contínuo na origem.

(iii) $\sup\{\|T(x)\| \colon x \in B_E\} < \infty$.

(iv) Existe uma constante real $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para cada $x \in E$.

Demonstração. Veja [8, Teorema 2.1.1]. □

Definição 1.1.2. Sejam E e F espaços vetoriais normados. Dizemos que $T \in \mathcal{L}(E;F)$ é um:

• *Isomorfismo topológico* se T é bijetivo e seu inverso é também contínuo.

• *Mergulho topológico* se T é um isomorfismo topológico entre E e o subespaço $T(E)$ de F, ou seja, se T é um isomorfismo sobre sua imagem.

• *Isomorfismo isométrico* se T é bijetivo e $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$.

• *Mergulho isométrico* se T é um isomorfismo isométrico entre E e o subespaço $T(E)$ de F.

Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço vetorial E são ditas *equivalentes* se o operador identidade $I\colon (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ é um isomorfismo topológico.

Relembremos que um espaço métrico M é dito *completo* se toda sequência de Cauchy em M é convergente em M.

Definição 1.1.3. Um *espaço de Banach* é um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ no qual a métrica induzida pela norma $d(x, y) = \|x - y\|$ torna E um espaço métrico completo.

Definição 1.1.4. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em um espaço normado E.

(i) Dizemos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é *convergente* em E se a sequência das somas parciais $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ converge para algum $x \in E$.

(ii) No caso acima dizemos que x é a *soma da série* e escrevemos $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

(iii) Quando $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, dizemos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é *absolutamente convergente.*

Teorema 1.1.5. *Um espaço normado E é um espaço de Banach se, e somente se, cada série absolutamente convergente é convergente em E.*

Demonstração. Veja [8, Proposição 10.1.4]. □

O teorema a seguir será muito útil neste trabalho.

Teorema 1.1.6. *Sejam E e F espaços normados.*

(i) A expressão

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|\colon x \in E \quad \text{e} \quad \|x\| \leq 1\}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E; F)$, chamada de norma usual de operadores.

(ii) Para todos $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e $x \in E$, vale

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|.$$

(iii) Se F é espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E; F)$ também é espaço de Banach.

Demonstração. Ver [8, Proposição 2.1.4]. $\square$

Proposição 1.1.7. *Seja F um subespaço de um espaço de Banach E. Então F é um espaço de Banach munido da norma induzida de E se, e somente se, F é fechado em E.*

Demonstração. Veja [8, Proposição 1.1.1]. $\square$

Seja E um espaço de Banach. Dizemos que um operador linear contínuo $P\colon E \longrightarrow E$ é uma *projeção* se $P^2 := P \circ P = P$. É claro que $\|P\| \geq 1$ quando $P \neq 0$ é uma projeção.

Proposição 1.1.8. *Seja F um subespaço de um espaço de Banach E. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe uma projeção $P\colon E \longrightarrow E$ tal que $P(E) = F$. Nesse caso, dizemos que P é uma projeção de E sobre F.

(ii) F é fechado em E e existe um subespaço fechado G de E tal que $E = F \oplus G$, isto é, $E = F + G$ e $F \cap G = \{0\}$.

Demonstração. Veja [8, Proposição 3.2..2]. $\square$

Combinando esses dois resultados anteriores podemos mostrar que um subespaço F de um espaço de Banach E é também um espaço de Banach se exibirmos uma projeção P de E sobre F. Usaremos esse raciocínio no Capítulo 5.

1.2 Operadores multilineares em espaços vetoriais e espaços normados

Definição 1.2.1. Dado $n \in \mathbb{N}$, sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços vetoriais reais. Dizemos que uma função $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é um *operador n-linear* (ou multilinear) se é linear em cada uma de suas variáveis, isto é,

$$A(x_1, \ldots, x_i + \lambda x_i', \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \lambda A(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n)$$

para todos $x_i, x_i' \in E_i$ com $i = 1, \ldots, n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $F = \mathbb{R}$ dizemos que A é uma *forma n-linear.*

Um operador 2-linear também é chamado de operador bilinear.

Denotamos o conjunto de todos os operadores n-lineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F por $L(E_1, \ldots, E_n; F)$. Quando $E = E_1 = \cdots = E_n$, denotamos $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ por $L(^nE; F)$.

Para todos $A, B \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos os operadores n-lineares

$$\begin{aligned} A + B\colon E_1 \times \cdots \times E_n &\longrightarrow F\,, \quad (A + B)(x) = A(x) + B(x), \quad \text{e} \\ \lambda A\colon E_1 \times \cdots \times E_n &\longrightarrow F\,, \quad (\lambda A)(x) = \lambda A(x). \end{aligned}$$

Com essas operações, $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.2.2. Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços vetoriais e sejam $\phi_1 \in {E_1}^*, \ldots, \phi_n \in {E_n}^*$ e $b \in F$. Definimos uma função $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ por

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) b.$$

É fácil ver que A está bem definido. A linearidade de cada ϕ_i implica que A é linear em cada variável. Então A é um operador n-linear.

Quando $E_1, \ldots, E_n$ são espaços normados sempre consideramos $E_1 \times \cdots \times E_n$ munido de uma das seguintes normas

$$\begin{aligned}
&\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|,\\
&\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = (\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}},\\
&\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\},
\end{aligned}$$

onde $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$.

Proposição 1.2.3. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços normados.*

(i) *As normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são equivalentes.*

(ii) *Se $E_1, \ldots, E_n$ são espaços de Banach, então $E_1 \times \cdots \times E_n$ também é um espaço de Banach com qualquer uma dessas três normas.*

Demonstração. Veja [28, Proposição 2.6]. □

Estabelecidas as normas no produto cartesiano de espaços vetoriais normados, podemos falar de operadores multilineares contínuos. Assim como no caso linear, temos um resultado com condições necessárias e suficientes para saber sobre a continuidade de um operador multilinear entre espaços normados.

Teorema 1.2.4. *Seja $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ um operador n-linear entre espaços normados. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *A é contínuo.*

(ii) *A é contínuo na origem.*

(iii) $\|A\| := \sup\{\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \colon x_i \in E_i \text{ e } \|x_i\| \leq 1,\ 1 \leq i \leq n\} < \infty$.

(iv) *Existe uma constante real $C \geq 0$ tal que $\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq C\|x_1\| \cdots \|x_n\|$ para todos $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$.*

Demonstração. Veja [28, Proposição 2.7]. □

Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados. Denotamos por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ o subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ formado pelos operadores multilineares contínuos. Se $E = E_1 = \cdots = E_n$, usamos as seguintes notações:

$$\mathcal{L}(^nE; F) = \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \ \text{ e } \ \mathcal{L}(^nE) = \mathcal{L}(^nE; \mathbb{R}).$$

O resultado a seguir generaliza o Teorema 1.1.6.

Teorema 1.2.5. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados.*

(i) A expressão

$$\|A\| = \sup\{\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \colon x_i \in E_i \quad \text{e} \quad \|x_i\| \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, chamada de norma usual de operadores multilineares.

(ii) Para todos $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$, vale

$$\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq \|A\|\|x_1\| \cdots \|x_n\|.$$

(iii) Se F é espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ também é espaço de Banach, munido com a norma $\| \cdot \|$.

Demonstração. Veja [28, Proposições 2.8 e 2.11]. □

A não ser que digamos o contrário, sempre consideramos $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ munido com a norma do teorema acima.

Exemplo 1.2.6. Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados e sejam $\phi_1 \in E_1{}', \ldots, \phi_n \in E_n{}'$ e $b \in F$. Então o operador n-linear $A \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$, dado por

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) b,$$

é contínuo. De fato,

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sup\{\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \colon x_i \in B_{E_i}, \quad 1 \leq i \leq n\} \\
&= \sup\{\|\phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) b\| \colon x_i \in B_{E_i}, \quad 1 \leq i \leq n\} \\
&= \|b\| \cdot \sup\{|\phi_1(x_1)| \cdots |\phi_n(x_n)| \colon x_i \in B_{E_i}, \quad 1 \leq i \leq n\} \\
&= \|b\| \cdot \sup_{x_1 \in B_{E_1}} |\phi_1(x_1)| \cdots \sup_{x_n \in B_{E_n}} |\phi_n(x_n)| \\
&= \|b\| \cdot \|\phi_1\| \cdots \|\phi_n\|.
\end{aligned}$$

Segue do Teorema 1.2.4(iii) que A é contínuo pois $\|A\| < \infty$.

Proposição 1.2.7. *Sejam $E_1, \ldots, E_{m+n}$ e F espaços vetoriais, com $m, n \in \mathbb{N}$.*

(i) O operador linear

$$\Phi \colon L(E_1, \ldots, E_{m+n}; F) \longrightarrow L(E_1, \ldots, E_m; L(E_{m+1}, \ldots, E_{m+n}; F)),$$

dado por

$$\Phi(A)(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) = A(x_1, \ldots, x_{m+n}),$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais, chamado de isomorfismo canônico.

(ii) Se $E_1, \ldots, E_{m+n}$ e F são espaços normados, então o isomorfismo Φ induz um isomorfismo isométrico de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{m+n}; F)$ em $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; \mathcal{L}(E_{m+1}, \ldots, E_{m+n}; F))$.

Demonstração. Veja [28, Proposição 2.12]. □

Por simplicidade, escrevemos L_A ao invés de $\Phi(A)$.

Apesar de ser um caso particular do teorema acima, enunciamos o seguinte resultado como uma proposição, pois ela será muito importante nos Capítulos 4 e 5.

Proposição 1.2.8. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados. Então a correspondência $A \longmapsto L_A$ é um isomorfismo isométrico de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ em $\mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2, \ldots, E_n; F))$.*

Seja $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ um operador n-linear entre espaços vetoriais. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixo, sejam $a_1 \in E_1, \overset{[i]}{\ldots}, a_n \in E_n$ e façamos $\alpha_i := (a_1, \overset{[i]}{\ldots}, a_n)$, onde $\overset{[i]}{\ldots}$ significa que a i-ésima coordenada foi retirada. Definimos um operador linear $A^i_{\alpha_i}\colon E_i \longrightarrow F$ por

$$A^i_{\alpha_i}(x_i) = A(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1} \ldots, a_n).$$

É claro que cada $A^i_{\alpha_i}$ é linear pois A é n-linear.

Definição 1.2.9. Seja $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ um operador n-linear entre espaços vetoriais normados. Dizemos que A é *separadamente contínuo* se o operador linear $A^i_{\alpha_i}$ é contínuo para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ e todos $a_1 \in E_1, \overset{[i]}{\ldots}, a_n \in E_n$ fixos.

Proposição 1.2.10. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços de Banach e F um espaço normado. Se $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é um operador n-linear separadamente contínuo, então A é contínuo.*

Demonstração. Para o caso bilinear veja [8, Corolário 2.3.5], para o caso geral veja [17, Theorem 7, página 4]. □

Capítulo 2

Espaços de Riesz e reticulados de Banach

Neste capítulo apresentamos a teoria básica de espaços de Riesz e de reticulados de Banach, com ênfase nas definições, resultados e exemplos que são relevantes para os capítulos subsequentes. As principais referências utilizadas para o material deste capítulo são [3, 23]. Para um estudo mais aprofundado sobre o assunto recomendamos [23, 27].

2.1 Espaços de Riesz

Uma relação $\leq$ em um conjunto não vazio X é dita *relação de ordem parcial* se, para todos $x, y, z \in X$, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $x \leq x$;

(ii) $x \leq y$ e $y \leq x$ implica $x = y$;

(iii) $x \leq y$ e $y \leq z$ implica $x \leq z$.

Um conjunto não vazio X munido com uma relação de ordem parcial $\leq$ é dito *conjunto ordenado*. Para $x, y \in X$, dizemos que x é menor do que y se $x \leq y$ (também escrevemos $y \geq x$ para denotar $x \leq y$ e dizemos que y é maior do que x). Seja A um subconjunto de X:

• Uma *cota superior* de A, se existir, é um elemento $s \in X$ tal que $x \leq s$ para todo $x \in A$.

• Uma *cota inferior* de A, se existir, é um elemento $r \in X$ tal que $r \leq x$ para todo $x \in A$.

• Dizemos que A é *limitado superiormente* (*limitado inferiormente*) se existir uma cota superior (inferior) de A. Se A for limitado inferior e superiormente, dizemos que A é *ordem limitado*.

• Se A for limitado superiormente e existir uma menor cota superior de A, tal elemento é chamado de *supremo de A* e denotado por $\sup A$, $\vee_{x\in A}$ ou $\sup\{x \colon x \in A\}$.

• Se A for limitado inferiormente e existir uma maior cota inferior de A, tal elemento é chamado de *ínfimo de A* e denotado por $\inf A$, $\wedge_{x\in A}$ ou $\inf\{x \colon x \in A\}$.

Definição 2.1.1. Um conjunto ordenado X é um *reticulado* se, para quaisquer dois elementos $x, y \in X$, o conjunto $\{x, y\}$ tem supremo, o qual denotamos por $\sup\{x, y\}$ ou $x \vee y$, e tem ínfimo, o qual denotamos por $\inf\{x, y\}$ ou $x \wedge y$.

Um espaço vetorial real E é chamado de *espaço vetorial ordenado* se E estiver munido com uma relação de ordem $\leq$ que satisfaz as seguintes condições: para $x, y \in E$,

$$x \leq y \text{ implica } x + z \leq y + z \text{ para todo } z \in E,$$

e

$$x \leq y \text{ implica } \alpha x \leq \alpha y \text{ para todo real } \alpha \geq 0.$$

Um vetor $x \in E$ é dito *positivo* se $x \geq 0$. O conjunto de todos os vetores positivos de E é chamado de *cone positivo* e denotado por E^+.

As funções

$$(x, y) \in E \times E \longrightarrow x \vee y \in E \quad \text{e} \quad (x, y) \in E \times E \longrightarrow x \wedge y \in E$$

são chamadas de *operações de reticulado.*

Definição 2.1.2. Um *espaço de Riesz* é um espaço vetorial ordenado que é um reticulado. A literatura também usa o termo *reticulado vetorial* para se referir a um espaço de Riesz.

Para um vetor x em um espaço de Riesz definimos

$$x^+ = x \vee 0, \qquad x^- = (-x) \vee 0 \qquad \text{e} \qquad |x| = x \vee (-x),$$

vetores esses que são chamados de *parte positiva* de x, *parte negativa* de x e *módulo* ou *valor absoluto* de x, respectivamente. É claro que $|x| = |-x|$.

Exemplo 2.1.3. (a) O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ com sua ordem usual é um espaço de Riesz. Nesse caso, as noções de supremo e ínfimo coincidem com as noções da Análise na Reta e o valor absoluto coincide com o módulo.

(b) Para todo n, $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Riesz com a ordem coordenada a coordenada, definida da seguinte forma:

$$(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n) \Longleftrightarrow a_j \leq b_j \text{ para todo } j = 1, \ldots, n.$$

Nesse caso,

$$(a_1, \ldots, a_n) \vee (b_1, \ldots, b_n) = (\max\{a_1, b_1\}, \ldots, \max\{a_n, b_n\}),$$

$$(a_1, \ldots, a_n) \wedge (b_1, \ldots, b_n) = (\min\{a_1, b_1\}, \ldots, \min\{a_n, b_n\}),$$
$$|(a_1, \ldots, a_n)| = (|a_1|, \ldots, |a_n|).$$

No Exemplo 2.2.13 veremos uma outra ordem que também faz de $\mathbb{R}^n$ um espaço de Riesz.

(c) Seja E o espaço vetorial de todas as funções reais definidas em um conjunto X, com as operações usuais (pontuais) de funções. Munimos E com a ordem pontual:

$$f \leq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Para todos $f, g \in E$ e $x \in X$, temos

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \;\text{ e }\; (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Segue que E é um espaço de Riesz e que

$$|f|(x) = |f(x)|$$

para toda $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ e todo $x \in X$.

(d) Seja $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{R} \text{ para todo } n\}$ o espaço vetorial de todas as sequências de números reais com as operações usuais (coordenada a coordenada) de sequências. Identificando $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ com o conjunto das funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, do item (c), segue que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um espaço de Riesz com a ordem pontual, que neste caso é chamada de *ordem coordenada a coordenada*. Também, se $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ são vetores de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, então

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \vee (b_n)_{n=1}^{\infty} = (\max\{a_n, b_n\})_{n=1}^{\infty} \;\text{ e }\; (a_n)_{n=1}^{\infty} \wedge (b_n)_{n=1}^{\infty} = (\min\{a_n, b_n\})_{n=1}^{\infty}.$$

É claro que

$$|(a_n)_{n=1}^{\infty}| = (|a_n|)_{n=1}^{\infty}$$

para toda sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reais.

(e) Dados $m, n \in \mathbb{N}$, seja $M_{m\times n}$ o espaço vetorial das matrizes reais $m \times n$. É fácil ver que a ordem parcial coordenada a coordenada,

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \leq (b_{ij})_{m\times n} = B \Longleftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij} \;\text{ para todos }\; 1 \leq i \leq m \;\text{ e }\; 1 \leq j \leq n,$$

faz de $M_{m\times n}$ um espaço de Riesz; e que

$$A \vee B = (\max\{a_{ij}, b_{ij}\})_{m\times n},\; A \wedge B = (\min\{a_{ij}, b_{ij}\})_{m\times n},\; |A| = (|a_{ij}|)_{m\times n}$$

para todas $A, B \in M_{m\times n}$.

(f) Seja $\{E_i\colon i \in I\}$ uma família de espaços de Riesz. O produto cartesiano generalizado $\prod\limits_{i\in I} E_i$ é definido como sendo o conjunto de todas as funções

$$f\colon I \longrightarrow \bigcup_{j\in I} E_j$$

tais que $f(i) \in E_i$ para todo $i \in I$. Chamando $f(i) = x_i$ para todo $i \in I$, podemos denotar um elemento $f \in \prod\limits_{i\in I} E_i$ por $(x_i)_{i\in I}$. No caso em que $I = \mathbb{N}$ usamos a notação usual $(x_1, x_2, \dots)$ de sequências. Não é difícil verificar que $\prod\limits_{i\in I} E_i$ é um espaço vetorial ordenado com as operações algébricas pontuais e com a ordem parcial

$$(x_i)_{i\in I} \leq (y_i)_{i\in I} \Longleftrightarrow x_i \leq y_i \;\text{ para todo }\; i \in I.$$

Dados $(x_i)_{i\in I}$ e $(y_i)_{i\in I}$ em $\prod\limits_{i\in I} E_i$, é fácil ver que

$$(x_i)_{i\in I} \vee (y_i)_{i\in I} = (x_i \vee y_i)_{i\in I},\; (x_i)_{i\in I} \wedge (y_i)_{i\in I} = (x_i \wedge y_i)_{i\in I} \;\text{ e }\; |(x_i)_{i\in I}| = (|x_i|)_{i\in I}.$$

Segue que $\prod_{i\in I} E_i$ é um espaço de Riesz.

Observamos também que se $A_i \subset E_i, i \in I$, são subconjuntos que têm supremos, então

$$\sup\{(x_i)_{i\in I} \colon x_i \in A_i \text{ para todo } \ i \in I\} = (\sup A_i)_{i\in I}.$$

De fato, por um lado, se $x_i \in A_i$ para cada $i \in I$, então $(x_i)_{i\in I} \leq (\sup A_i)_{i\in I}$, e logo

$$\sup\{(x_i)_{i\in I} \colon x_i \in A_i \ \text{ para todo } \ i \in I\} \leq (\sup A_i)_{i\in I}.$$

Por outro lado, seja $(s_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ tal que

$$(x_i)_{i\in I} \leq (s_i)_{i\in I} \leq (\sup A_i)_{i\in I},$$

sempre que $x_i \in A_i$ para cada $i \in I$. Como a ordem é feita pontualmente, vale que $x_i \leq s_i \leq \sup A_i$ para todo $x_i \in A_i$ e todo $i \in I$. Segue que $s_i = \sup A_i$ para todo $i \in I$, donde concluímos a igualdade desejada.

As propriedades listadas no resultado a seguir serão úteis adiante e evidenciam a harmonia, em um espaço de Riesz, entre as operações algébricas de espaço vetorial e as operações de reticulado.

Teorema 2.1.4. *Se x, y e z são vetores de um espaço de Riesz, então:*

(i) $x + y = x \vee y + x \wedge y$.

(ii) $x \vee y = -(-x) \wedge (-y)$.

(iii) $x \vee y + z = (x + z) \vee (y + z)$ *e* $x \wedge y + z = (x + z) \wedge (y + z)$.

(iv) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ *e* $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.

(v) $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y)$ *e* $\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y)$ *para todo real* $\alpha \geq 0$.

(vi) $x = x^+ - x^- = x \wedge y + (x - y)^+$ *e* $x^+ \wedge x^- = 0$.

(vii) $|x| = x^+ + x^-$, $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ *e* $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(viii) $x \leq y$ *se, e somente se,* $x^+ \leq y^+$ *e* $y^- \leq x^-$.

(ix) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y = |x \vee z - y \wedge z| + |x \wedge z - y \wedge z|$.

Demonstração. Veja [23, Theorem 1.1.1]. □

Corolário 2.1.5. *Sejam x e y vetores de um espaço de Riesz. Então:*

(i) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}|x - y|$ e $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y) - \frac{1}{2}|x - y|$.

(ii) $(x + y)^+ \leq x^+ + y^+$.

Demonstração. Para ver o item (i) basta somar e subtrair as igualdades dos itens (i) e (ix) do teorema acima.

Agora, pelo item (viii) do teorema acima sabemos que $x \leq x^+$ e $y \leq y^+$. Dessa forma, $0 \leq x^+ - x$ e $0 \leq y^+ - y$ implicam $x + y \leq x^+ + y^+$. Como $x^+ + y^+$ é positivo, então $x^+ + y^+$ é cota superior do conjunto $\{x + y, 0\}$. Portanto,

$$(x + y)^+ = (x + y) \vee 0 \leq x^+ + y^+,$$

provando o item (ii). □

Para subconjuntos A e B de um espaço de Riesz E e $a \in E$, definimos

$$A + B \coloneqq \{x + y \colon x \in A \text{ e } y \in B\},$$

$$a \vee A \coloneqq \{a \vee x \colon x \in A\},$$
$$a \wedge A \coloneqq \{a \wedge x \colon x \in A\}.$$

Proposição 2.1.6. *Seja A um subconjunto não vazio de um espaço de Riesz E. Se* $\sup A$ *existe, então para qualquer $x \in E$ existem* $\sup(x + A)$ *e* $\sup(x \wedge A)$*. Além disso,*

$$x + \sup A = \sup(x + A) \quad \text{e} \quad x \wedge \sup A = \sup(x \wedge A).$$

Se $\inf A$ *existe, então para qualquer $x \in E$ existem* $\inf(x + A)$ *e* $\inf(x \vee A)$*. Mais ainda,*

$$x + \inf A = \inf(x + A) \quad \text{e} \quad x \vee \inf A = \inf(x \vee A).$$

Demonstração. Veja [23, Proposition 1.1.2] ou [3, Theorem 1.8]. □

Proposição 2.1.7. *Seja E um espaço de Riesz e sejam A e B subconjuntos formados apenas por vetores positivos de E. Se* $\sup A$ *e* $\sup B$ *existem, então existe* $\sup\{A + B\}$*. Além disso,*

$$\sup A + \sup B = \sup\{A + B\}.$$

Demonstração. É claro que $\sup A$ e $\sup B$ são positivos. Se $x \in A$ e $y \in B$, então

$$0 \leq x \leq \sup A \Longrightarrow x + y \leq \sup A + y;$$

e

$$0 \leq y \leq \sup B \Longrightarrow \sup A + y \leq \sup A + \sup B.$$

Logo $x + y \leq \sup A + \sup B$, ou seja, $\sup A + \sup B$ é cota superior do conjunto $A + B$. Mostremos que se $t \in E^+$ é tal que

$$x + y \leq t \leq \sup A + \sup B$$

para todos $x \in A$ e $y \in B$, então $t = \sup A + \sup B$. De fato, para $y \in B$ fixo temos $x \leq t - y$ para todo $x \in A$. Logo, $\sup A \leq t - y$ vale sempre que $y \in B$. Assim, $y \leq t - \sup A$ para todo $y \in B$ implica que $\sup A + \sup B \leq t$. Portanto, $\sup A + \sup B = t$, e isso significa que $\sup\{A + B\}$ existe e é igual a $\sup A + \sup B$. □

Proposição 2.1.8. *Sejam $x, x_1 \ldots, x_n$ vetores positivos de um espaço de Riesz. Então*

$$x \wedge (x_1 + \cdots + x_n) \leq x \wedge x_1 + \cdots + x \wedge x_n.$$

Demonstração. Veja [3, Lemma 1.4]. $\square$

Às vezes é útil decompor um vetor de um espaço de Riesz como soma de outros vetores e ainda garantir que as parcelas dessa soma satisfaçam uma condição limitante. Os dois teoremas a seguir são úteis nesse sentido.

Teorema 2.1.9 (Propriedade da decomposição)**.** *Sejam $x, y_1, \ldots, y_n$ vetores de um espaço de Riesz E satisfazendo $|x| \leq |y_1 + \cdots + y_n|$. Então existem $x_1, \ldots, x_n \in E$ tais que $|x_i| \leq |y_i|$ para todo $i = 1, \ldots, n$, e $x = x_1 + \cdots + x_n$. Mais ainda, se x for positivo, então cada x_i pode ser tomado positivo.*

Demonstração. Veja [3, Theorem 1.13]. $\square$

Teorema 2.1.10 (Propriedade da decomposição de Riesz)**.** *Sejam $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ vetores positivos de um espaço de Riesz E satisfazendo $x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_m$. Então existem vetores positivos $z_{ik} \in E$, $i = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, m$, tais que*

$$x_i = \sum_{k=1}^{m} z_{ik} \quad e \quad y_k = \sum_{i=1}^{n} z_{ik}.$$

Demonstração. Veja [23, Proposition 1.1.3] ou [3, Theorem 1.20]. $\square$

O seguinte diagrama ilustra a propriedade da decomposição de Riesz:

$$\begin{array}{ccccccc}
z_{1,1} & + & \cdots & + & z_{1,m} & = & x_1 \\
+ & & & & + & & + \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
+ & & & & + & & + \\
z_{n,1} & + & \cdots & + & z_{n,m} & = & x_n \\
\shortparallel & & & & \shortparallel & & \shortparallel \\
y_1 & + & \cdots & + & y_m & = & x
\end{array}$$

Antes de definir subespaço de Riesz, vejamos que nem todo subespaço vetorial de um espaço de Riesz é espaço de Riesz.

Exemplo 2.1.11. Seja

$$E = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \text{ a série } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ é convergente} \right\}$$

com a ordem coordenada a coordenada. Das propriedades de séries convergentes segue que E é subespaço vetorial do espaço de Riesz $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ do Exemplo 2.1.3(d).

Vejamos que E não é espaço de Riesz com essa ordem. De fato, da Análise na Reta sabemos que a série harmônica alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-1}$ é convergente mas não é absolutamente convergente. Logo, a sequência $((-1)^n n^{-1})_{n=1}^{\infty}$ pertence a E enquanto que

$$\left| ((-1)^n n^{-1})_{n=1}^{\infty} \right| = (n^{-1})_{n=1}^{\infty}$$

não pertence a E.

Definição 2.1.12. Um subespaço vetorial F de um espaço de Riesz E é chamado *subespaço de Riesz de* E se F é fechado com respeito às operações de reticulado, isto é, para todos $x, y \in F$, os vetores $x \vee y \in E$ e $x \wedge y \in E$ pertencem a F.

A condição para ser subespaço de Riesz pode ser enfraquecida:

Proposição 2.1.13. *Seja F um subespaço vetorial de um espaço de Riesz que é fechado com respeito à operação de reticulado $\vee$ (ou $\wedge$), isto é, para todos x e y em F tem-se $x \vee y \in F$ (ou $x \wedge y \in F$). Então F é subespaço de Riesz.*

Demonstração. Suponha que F seja subespaço vetorial fechado com respeito à operação de reticulado $\vee$. Para todos $x, y \in F$, $-(-x) \vee (-y) \in F$. Do Teorema 2.1.4(ii) temos

$$x \wedge y = -(-x) \vee (-y) \in F.$$

O outro caso é análogo. $\square$

Exemplo 2.1.14. (a) Uma ordem parcial $\leq$ em um conjunto M é chamada de *ordem total* se todos os elementos de M são comparáveis, isto é, dados dois elementos $x, y \in M$ tem-se $x \leq y$ ou $y \leq x$. Nesse caso, dizemos que M é *totalmente ordenado.* Se E é um espaço vetorial munido de uma ordem total, então E é um espaço de Riesz. Com efeito, para $x, y \in E$ temos

$$x \wedge y = x \leq y = x \vee y \quad \text{ou} \quad x \wedge y = y \leq x = x \vee y.$$

Consequentemente, todo subespaço vetorial de um espaço de Riesz com uma ordem total é subespaço de Riesz.

(b) Sejam K um espaço topológico compacto de Hausdorff e $C(K)$ o espaço vetorial das funções contínuas $f \colon K \longrightarrow \mathbb{R}$. Então $C(K)$ é subespaço de Riesz do espaço de Riesz das funções de K em $\mathbb{R}$ do Exemplo 2.1.3(c) pois, para todas $f, g \in C(K)$, a função

$$x \in K \mapsto (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \in \mathbb{R},$$

é contínua. Segue que $C(K)$ é espaço de Riesz com a ordem pontual.

(c) Seja c o subespaço vetorial do espaço de Riesz $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ do Exemplo 2.1.3(d) formado pelas sequências convergentes. Então c é subespaço de Riesz de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, pois se $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \in c$, digamos $a_n \longrightarrow a$ e $b_n \longrightarrow b$, então

$$\max\{a_n, b_n\} = \frac{a_n + b_n + |a_n - b_n|}{2} \longrightarrow \frac{a + b + |a - b|}{2} = \max\{a, b\};$$

e portanto $(a_n)_{n=1}^{\infty} \vee (b_n)_{n=1}^{\infty} = (\max\{a_n, b_n\})_{n=1}^{\infty} \in c$. Segue que c é espaço de Riesz com a ordem coordenada a coordenada.

Terminamos a seção introduzindo e estudando uma classe muito importante de espaços de Riesz.

Definição 2.1.15. Um espaço de Riesz é dito *Dedekind completo* se qualquer subconjunto não vazio limitado superiormente tem supremo. Um espaço de Riesz é chamado *σ-Dedekind completo* se qualquer subconjunto não vazio enumerável e limitado superiormente tem supremo.

É claro que ser Dedekind completo implica que qualquer subconjunto não vazio limitado inferiormente tem ínfimo. É imediato que todo espaço de Riesz Dedekind completo é σ-Dedekind completo.

Proposição 2.1.16. *Seja E um espaço de Riesz. Se todo subconjunto de vetores positivos limitado superiormente tem supremo em E, então E é Dedekind completo.*

Demonstração. Sejam $A \subset E$ limitado superiormente e t uma cota superior de A. Do Teorema 2.1.4(viii), temos $0 \leq x^+ \leq t^+$ e $0 \leq t^- \leq x^-$ para todo $x \in A$. Em particular, o conjunto $\{x^+ \colon x = x^+ - x^- \in A\}$ é formado por vetores positivos e limitado superiormente. Notemos que se $y = y^+ - y^- \in A$, então y^- é uma cota superior para o conjunto

$$\{r \colon 0 \leq r \leq x^- \text{ para todo } x = x^+ - x^- \in A\}.$$

Por hipótese, os conjuntos

$$\{x^+ \colon x = x^+ - x^- \in A\} \quad \text{e} \quad \{r \colon 0 \leq r \leq x^- \text{ para todo } x = x^+ - x^- \in A\}$$

possuem supremo, digamos s^+ e s^-, respectivamente. Afirmamos que $s = s^+ - s^-$ é o supremo do conjunto A. De fato, para cada $x \in A$ temos $x^+ \leq s^+ \leq t^+$ e $t^- \leq s^- \leq x^-$, e novamente do Teorema 2.1.4(viii), $x \leq s \leq t$. Como t é uma cota superior qualquer de A, segue que $s = \sup A$, concluindo que E é Dedekind completo. □

Exemplo 2.1.17. Da Análise na Reta sabemos que o corpo dos números reais munido com a ordem usual é Dedekind completo.

Vejamos que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ são Dedekind completos com a ordem coordenada a coordenada.

Começamos com um subconjunto limitado superiormente A de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, digamos que $b = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma cota superior para A. Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina $A_i = \{a_i \colon (a_n)_{n=1}^{\infty} \in A\}$. Então b_i é uma cota superior para A_i, mostrando que $A_i \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente. Como $\mathbb{R}$ é Dedekind completo, temos $\sup A_i \in \mathbb{R}$. Logo $(\sup A_n)_{n=1}^{\infty}$ é o supremo do conjunto A já que qualquer cota superior $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ de A é tal que $a_i \leq \sup A_i \leq s_i$ para cada i, sempre que $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in A$.

Argumento análogo pode ser usado para $\mathbb{R}^n$.

Veremos no Exemplo 2.2.8 um espaço de Riesz que não é Dedekind completo.

Sabemos da Análise na Reta que para números reais positivos podemos fazer a troca do supremo com a soma, isto é, a soma dos supremos é o supremo da soma. O próximo resultado mostra que isso também vale para um espaço de Riesz Dedekind completo.

Proposição 2.1.18. *Seja E um espaço de Riesz Dedekind completo e sejam A e B subconjuntos formados apenas por vetores positivos de E. Então $\sup A$ e $\sup B$ existem se, e somente se, existe $\sup\{A + B\}$. Neste caso,*

$$\sup A + \sup B = \sup\{A + B\}.$$

Demonstração. A Proposição 2.1.7 garante uma implicação. Para provar a outra implicação, suponha que $\sup\{A + B\}$ exista em E^+. Então $x + y \leq \sup\{A + B\}$ para todos $x \in A$ e $y \in B$. Logo, para $y \in B$ fixo temos $x \leq \sup\{A + B\} - y$ para todo $x \in A$. Segue que $\sup A$ existe, pois E é Dedekind completo, e $\sup A \leq \sup\{A + B\} - y$. Dessa forma, $y \leq \sup\{A + B\} - \sup A$ vale para qualquer $y \in B$. Como E é Dedekind completo, $\sup B$ existe e $\sup A + \sup B \leq \sup\{A + B\}$. Agora, usando a Proposição 2.1.7 temos que $\sup A + \sup B = \sup\{A + B\}$. □

A proposição a seguir, que foi inspirada em [25, Lema 2.4.10], também será útil para avaliar o supremo de um conjunto.

Proposição 2.1.19. *Sejam A e B conjuntos não vazios e seja E um espaço de Riesz Dedekind completo. Se $f\colon A \times B \longrightarrow E$ é uma função limitada superiormente, ou seja, sua imagem é um conjunto limitado superiormente de E, então*

$$\sup_{x\in A}\sup_{y\in B} f(x,y) = \sup_{y\in B}\sup_{x\in A} f(x,y) = \sup\{f(x,y)\colon x\in A \ \text{ e } \ y\in B\}.$$

Demonstração. Seja

$$s = \sup\{f(x,y)\colon x\in A \ \text{ e } \ y\in B\},$$

o qual existe porque f é uma função limitada superiormente e E é Dedekind completo. Então $f(x,y) \le s$ para cada $x\in A$ e $y \in B$. Assim, s é cota superior para o conjunto $\{\sup_{y\in B} f(x,y)\colon x\in A\}$; e como E é Dedekind completo existe

$$t \coloneqq \sup\{\sup_{y\in B} f(x,y)\colon x\in A\} = \sup_{x\in A}\sup_{y\in B} f(x,y).$$

É claro que $t \le s$. Por outro lado, para todos $a\in A$ e $b\in B$,

$$f(a,b) \le \sup_{y\in B} f(a,y) \le \sup\{\sup_{y\in B} f(x,y)\colon x\in A\} = t.$$

Logo $s \le t$, e portanto, $t = s$. De modo análogo, existe

$$u \coloneqq \sup\{\sup_{x\in A} f(x,y)\colon y\in B\} = \sup_{y\in B}\sup_{x\in A} f(x,y)$$

e $u = s = t$. □

2.2 Reticulados de Banach

Um reticulado de Banach é uma estrutura muito rica que combina, de forma compatível, as operações algébricas de espaço vetorial, as operações de reticulado de um espaço de Riesz e as propriedades topológicas provenientes de uma norma completa. Mais precisamente:

Definição 2.2.1. Uma norma $\|\cdot\|$ em um espaço de Riesz E é chamada de *norma reticulada* se satisfaz a seguinte implicação:

$$x, y \in E,\ |x| \le |y| \Longrightarrow \|x\| \le \|y\|.$$

Nesse caso, dizemos que $(E, \|\cdot\|)$ é um *espaço de Riesz normado*. Um espaço de Riesz normado que é completo com respeito à sua norma é chamado de *reticulado de Banach*.

Proposição 2.2.2. *Se E é um espaço de Riesz normado, então $\||x|\| = \|x\|$ para todo $x\in E$.*

Demonstração. É claro que $|x| = |(|x|)|$ para todo $x \in E$. Como E é espaço de Riesz normado, temos que $|x| \le |(|x|)|$ implica $\|x\| \le \||x|\|$ e $|(|x|)| \le |x|$ implica $\||x|\| \le \|x\|$. □

Apresentaremos alguns exemplos de reticulados de Banach. Veremos, em particular, que os espaços de Banach clássicos são todos reticulados de Banach.

Exemplo 2.2.3. Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos $\mathbb{R}^n$ com a ordem coordenada a coordenada, que já sabemos ser espaço de Riesz Dedekind completo (Exemplo 2.1.17). Sabemos também que são completas as normas usuais em $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 &= |x_1| + \cdots + |x_n|, \\
\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 &= (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}, \\
\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty &= \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\},
\end{aligned}$$

($\|\cdot\|_2$ é chamada *norma euclidiana*). Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ vetores de $\mathbb{R}^n$ tais que $|x| \leq |y|$, ou seja, $|x_i| \leq |y_i|$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Segue que

$$|x_1| + \cdots + |x_n| \leq |y_1| + \cdots + |y_n|,$$

$$\begin{aligned}
(|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} &\leq (|y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2)^{\frac{1}{2}}, \\
\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} &\leq \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\},
\end{aligned}$$

e logo $\|x\| \leq \|y\|$ para qualquer uma dessas três normas em $\mathbb{R}^n$. Portanto, $\mathbb{R}^n$ é um reticulado de Banach com qualquer uma dessas três normas.

Exemplo 2.2.4. Seja $\ell_\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o subespaço vetorial de todas as sequências limitadas. A função

$$\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

é uma norma que faz de ℓ_∞ um espaço de Banach. É fácil ver que ℓ_∞ é um espaço de Riesz com a ordem coordenada a coordenada (veja Exemplo 2.1.14(c)). Notemos que se $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ são tais que

$$(|a_n|)_{n=1}^\infty = |(a_n)_{n=1}^\infty| \leq |(b_n)_{n=1}^\infty| = (|b_n|)_{n=1}^\infty,$$

então

$$\sup\{|a_n| \colon n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{|b_n| \colon n \in \mathbb{N}\},$$

e portanto $\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_\infty \leq \|(b_n)_{n=1}^\infty\|_\infty$. Isso mostra que ℓ_∞ é reticulado de Banach.

Agora, em ℓ_∞ consideremos o subespaço

$$c_0 \coloneqq \{(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon a_n \longrightarrow 0\}.$$

Então c_0 é espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\infty$; logo subespaço fechado de ℓ_∞. Também, c_0 é espaço de Riesz porque se $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in c_0$, então

$$\max\{a_n, b_n\} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|) \longrightarrow 0,$$

uma vez que $|a_n - b_n| \longrightarrow 0$ pois a função módulo é contínua em $\mathbb{R}$. Assim, c_0 é reticulado de Banach.

Aplicando o mesmo raciocínio utilizado para $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no Exemplo 2.1.17 conclui-se que ℓ_∞ e c_0 são Dedekind completos.

Exemplo 2.2.5. Para $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial

$$\ell_p := \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

é um espaço de Banach com a norma

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(veja, por exemplo, [8, 1.4]). Notemos que $|\max\{a,b\}|^p \leq |a|^p + |b|^p$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$, e disso decorre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\max\{a_n, b_n\}|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p$$

para quaisquer sequências reais $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Segue que ℓ_p é subespaço de Riesz do espaço de Riesz $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Agora, se as sequências reais $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ são tais que $(|a_n|)_{n=1}^{\infty} \leq (|b_n|)_{n=1}^{\infty}$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p.$$

Como a função real $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ é crescente, segue que ℓ_p é espaço de Riesz normado, logo é um reticulado de Banach.

Provemos que ℓ_p é Dedekind completo usando a Proposição 2.1.16. Dado um subconjunto A de vetores positivos limitado superiormente de ℓ_p, seja $(s_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ uma cota superior de A. Vimos no Exemplo 2.1.17 que $(\sup A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é o supremo do conjunto $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, onde $A_i = \{a_i \colon (a_n)_{n=1}^{\infty} \in A\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Como $(s_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $0 \leq (\sup A_n)_{n=1}^{\infty} \leq (s_n)_{n=1}^{\infty}$, segue que $\sup A = (\sup A_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$.

Exemplo 2.2.6. Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Consideremos a relação de equivalência em que duas funções de Ω em $\mathbb{R}$ são equivalentes se elas são diferentes apenas em um conjunto de medida nula. Para $1 \leq p < \infty$, seja $L_p(\Omega) = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ o conjunto de todas as classes de equivalência $[f]$ de funções mensuráveis $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é integrável com respeito a μ sobre Ω. Com as operações usuais de classes de equivalência, $L_p(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|[f]\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

(veja, por exemplo, [7, Theorem 6.14]).

Para $p = \infty$, seja $L_\infty(\Omega) = L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ o conjunto de todas as classes de equivalência $[f]$ de funções mensuráveis que são limitadas μ-quase sempre, isto é, existem uma constante $K \geq 0$ e um conjunto $N \in \Sigma$ tais que $\mu(N) = 0$ e $|f(x)| \leq K$ para todo $x \notin N$. Para $[f] \in L_\infty(\Omega)$ e $N \in \Sigma$ com $\mu(N) = 0$ definimos $S(N) = \sup\{|f(x)| \colon x \notin N\}$. Com as operações usuais de classes de equivalência, $L_\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|[f]\|_\infty = \inf\{S(N) \colon N \in \Sigma \ \text{ e } \ \mu(N) = 0\}$$

(veja, por exemplo, [7, Theorem 6.16]).

Como é usual, passaremos a escrever f no lugar de $[f]$.

Para $1 \leq p \leq \infty$, munimos $L_p(\Omega)$ com a seguinte ordem parcial: $f \leq g$ se existe um conjunto $N \in \Sigma$ tal que $\mu(N) = 0$ e $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \notin N$. Neste caso diz-se que $f(x) \leq g(x)$ para quase todo $x \in \Omega$. Das propriedades da integral e de supremo, dadas $f, g \in L_p(\Omega)$, a função

$$x \in \Omega \mapsto (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \in \mathbb{R}$$

é o supremo do conjunto $\{f, g\}$ em $L_p(\Omega)$.

Sejam $f, g \in L_p(\Omega)$ tais que $|f| \leq |g|$. No caso em que $1 \leq p < \infty$ temos $|f|^p \leq |g|^p$, e assim

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \leq \int_\Omega |g|^p d\mu \Longrightarrow \|[f]\|_p \leq \|[g]\|_p.$$

No caso em que $p = \infty$, seja $N_0 \in \Sigma$ tal que $\mu(N_0) = 0$ e $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \notin N_0$. Então

$$\sup\{|f(x)| \colon x \notin N \cup N_0\} \leq \sup\{|g(x)| \colon x \notin N \cup N_0\}$$

para qualquer conjunto $N \in \Sigma$ tal que $\mu(N) = 0$. Daí, $\|[f]\|_\infty \leq \|[g]\|_\infty$.

Dessa forma, $\|\cdot\|_p$ é norma reticulada e segue que $L_p(\Omega)$ é espaço de Riesz normado para todo $1 \leq p \leq \infty$. No caso em que $1 \leq p \leq \infty$ e μ é σ-finita, é verdade que $L_p(\Omega)$ é Dedekind completo (veja [1, Theorem 1.80]).

Exemplo 2.2.7. Da teoria dos espaços topológicos sabemos que se K é um espaço topológico compacto de Hausdorff, então o espaço vetorial $C(K)$ das funções reais contínuas em K é um espaço de Banach com a norma

$$\|\cdot\|_\infty \colon C(K) \longrightarrow [0, +\infty) \ , \ \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \colon x \in X\},$$

chamada de norma do sup. Do Exemplo 2.1.14(b) sabemos que a ordem pontual faz de $C(K)$ um espaço de Riesz. Para verificar que $C(K)$ é um reticulado de Banach, sejam $f, g \in C(K)$ tais que $|f| \leq |g|$. Isso implica $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo $x \in K$, e portanto $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, de modo que $C(K)$ é um reticulado de Banach.

Exemplo 2.2.8. Vejamos que o reticulado de Banach $C[0, 1]$ não é Dedekind completo. De fato, consideremos o conjunto A formado pelas funções contínuas $f_n \colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{n} + \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Essas funções foram inspiradas por [6, Example 2.30]. É imediato que a função constante igual a 1 é uma cota superior de A, e portanto A é um subconjunto limitado superiormente de C$[0, 1]$.

Observe que $(f_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência crescente de funções contínuas que converge pontualmente para a função descontínua

$$f \colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Note também que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função contínua

$$g_n \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 & \text{se } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$$

é cota superior de A, e $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência estritamente decrescente de funções contínuas que converge pontualmente para a função descontínua

$$g \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ \ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1 & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Sendo assim, se $h \in C[0,1]$ fosse o supremo de A, então $f_n \le h \le g_m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Segue que, para cada $0 \le x < \frac{1}{2}$ existe m tal que $g_m(x) = 0$, e daí

$$0 = f_m(x) \le h(x) \le g_m(x) = 0 \Longrightarrow h(x) = 0.$$

Fazendo o limite quando x tende a $\frac{1}{2}$ pela esquerda, a continuidade de h implica que $h(\frac{1}{2}) = 0$. E para cada $\frac{1}{2} < x \le 1$ existe n tal que $f_n(x) = 1$, e daí

$$1 = f_n(x) \le h(x) \le g_m(x) = 1 \Longrightarrow h(x) = 1.$$

Fazendo o limite quando x tende a $\frac{1}{2}$ pela direita, a continuidade de h implica que $h(\frac{1}{2}) = 1$. Essa contradição nos garante que A não tem supremo, e portanto $C[0,1]$ não é Dedekind completo.

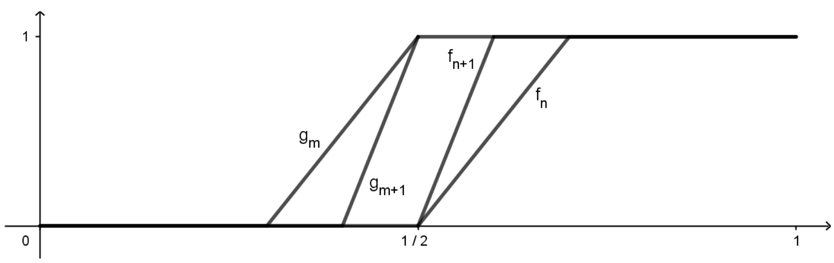

Figura 2.1: Gráfico que mostra a relação das funções f_n e g_m.

Exemplo 2.2.9. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach E é uma *base de Schauder* se para todo $x \in E$ existe uma única sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Para bases de Schauder nos referimos a [8, 10.3].

A base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é *1-incondicional* se, para todo $m \in \mathbb{N}$, todos escalares $a_1, \ldots, a_m$ e toda escolha de sinais $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m = \pm 1$,

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n x_n \right\| \le \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n x_n \right\|.$$

Para bases incondicionais nos referimos a [13, 4.5].

Seja E um espaço de Banach com base de Schauder 1-incondicional $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. De [13, Lemma 4.38] segue que se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in E$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x_n \in E$ são tais que $|a_n| \leq |b_n|$ para todo n, então

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n \right\|.$$

Neste caso, E se torna um reticulado de Banach com a ordem

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \geq 0 \iff a_n \geq 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Diz-se que essa é a ordem determinada pela base 1-incondicional $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Esta classe de reticulados de Banach tem uma grande importância na teoria. Para maiores informações, veja [20, 22].

Definição 2.2.10. Dizemos que uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ em um espaço de Riesz é:
- *Decrescente* se $x_\lambda \leq x_\gamma$ sempre que $\lambda, \gamma \in \Omega$ são tais que $\lambda \geq \gamma$.
- *Crescente* se $x_\lambda \leq x_\gamma$ sempre que $\lambda, \gamma \in \Omega$ são tais que $\lambda \leq \gamma$.

Para uma rede decrescente $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$, escrevemos $x_\lambda \downarrow x$ para significar $x = \inf\{x_\lambda \colon \lambda \in \Omega\}$, quando este ínfimo existir.

Se a rede é crescente, escrevemos $x_\lambda \uparrow x$ para significar $x = \sup\{x_\lambda \colon \lambda \in \Omega\}$, quando este supremo existir.

Como toda sequência é uma rede, esses termos e notações também se aplicam a sequências em espaços de Riesz.

Atenção deve ser dada ao fato de que, normalmente, na Análise na Reta usamos os termos não decrescente e não crescente onde aqui estamos usando crescente e decrescente.

Teorema 2.2.11. *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências em um espaço de Riesz normado E.*

(i) Se $x_n \longrightarrow x \in E$ e $y_n \longrightarrow y \in E$, então

$$x_n \vee y_n \longrightarrow x \vee y, \;\; x_n \wedge y_n \longrightarrow x \wedge y \quad \text{e} \quad |x_n| \longrightarrow |x|.$$

Em outras palavras, as operações de reticulado são contínuas.

(ii) O cone positivo $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ é um conjunto fechado.

(iii) Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é crescente e convergente, então $x_n \uparrow \lim\limits_{k \to \infty} x_k$.

(iv) Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente e convergente, então $x_n \downarrow \lim\limits_{k \to \infty} x_k$.

Demonstração. Veja [23, Proposition 1.1.6]. □

Veremos agora uma importante propriedade dos espaços de Riesz, que é inspirada na propriedade arquimediana em $\mathbb{R}$.

Definição 2.2.12. Dizemos que um espaço de Riesz é *arquimediano* se, para todo vetor positivo x, a sequência $(n^{-1}x)_{n=1}^{\infty}$ satisfaz $n^{-1}x \downarrow 0$.

Vejamos primeiramente que nem todo espaço de Riesz é arquimediano.

Exemplo 2.2.13. Em $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, consideremos uma relação $\leq$ definida da seguinte forma:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n) = y$$

se, e somente se, $x = y$ ou existe $k \in \{0, \dots, n-1\}$ com $x_1 = y_1, \dots, x_k = y_k$ e $x_{k+1} < y_{k+1}$. Essa relação é uma ordem parcial, chamada *ordem lexicográfica* (ou ordem do dicionário).

Como a ordem usual de $\mathbb{R}$ é total, então a ordem lexicográfica é ordem total. Segue do Exemplo 2.1.14 que $\mathbb{R}^n$ é espaço de Riesz com a ordem lexicográfica. Mais ainda, como $\mathbb{R}$ é Dedekind completo, então $\mathbb{R}^n$ é Dedekind completo com a ordem lexicográfica.

Vejamos que esse espaço de Riesz não é arquimediano. De fato, tomando $x = (0, 1, 0, \dots, 0)$ e $y = (1, 0, \dots, 0)$, então $nx \leq y$, isto é, $x \leq n^{-1}y$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x > 0$ é cota inferior para $(n^{-1}y)_{n=1}^{\infty}$, e portanto, o ínfimo dessa sequência não pode ser zero.

O resultado a seguir fornece muitos exemplos de espaços de Riesz arquimedianos.

Proposição 2.2.14. *Espaços de Riesz normados e espaços de Riesz σ-Dedekind completos são arquimedianos. Em particular, todo reticulado de Banach é arquimediano.*

Demonstração. Sejam x e y vetores positivos em um espaço de Riesz normado tais que $y \leq n^{-1}x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela propriedade de norma reticulada,

$$\|y\| \leq \|n^{-1}x\| \leq n^{-1}\|x\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $n\|y\| \leq \|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $\|y\| = 0$, e portanto $y = 0$. Segue que $n^{-1}x \downarrow 0$.

Agora, sejam x e y vetores positivos em um espaço de Riesz σ-Dedekind completo tais que $y \leq n^{-1}x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então o conjunto enumerável $\{ny \colon n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente por x, logo existe $z = \sup\{ny \colon n \in \mathbb{N}\}$ pela hipótese. Temos

$$z = \sup\{ny \colon n \in \mathbb{N}\} \geq \sup\{(2n)y \colon n \in \mathbb{N}\} = 2\sup\{ny \colon n \in \mathbb{N}\} = 2z,$$

donde segue que $z = 0$, e portanto $y = 0$. Isso prova que $n^{-1}x \downarrow 0$. $\square$

Segue da Proposição 2.2.14 e do Exemplo 2.2.13 que não existe norma em $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, que o torne um espaço de Riesz normado com a ordem lexicográfica. Concluímos também que nem todo espaço de Riesz Dedekind completo é arquimediano. Em [31] encontra-se uma abordagem mais detalhada sobre espaços de Riesz arquimedianos.

Na Seção 3.2 provaremos que, a menos de equivalência, existe apenas uma norma reticulada em um espaço de Riesz que o faz ser reticulado de Banach (veja Corolário 3.2.2).

Capítulo 3

Operadores lineares regulares

Assim como na Álgebra Linear estudamos os operadores lineares (transformações lineares) e na Análise Funcional estudamos os operadores lineares contínuos, em espaços de Riesz e reticulados de Banach estudamos os operadores lineares regulares. Os objetivos centrais deste capítulo são:

• Introduzir uma ordem no conjunto dos operadores lineares regulares entre espaços de Riesz de forma a torná-lo um espaço de Riesz.

• Introduzir uma norma no espaço de Riesz dos operadores lineares regulares entre reticulados de Banach de forma a torná-lo um reticulado de Banach.

Salvo menção em contrário, todos os espaços de Riesz são arquimedianos.

Denotamos o espaço vetorial dos operadores lineares do espaço de Riesz E no espaço de Riesz F por $L(E;F)$.

As principais referências utilizadas para o material deste capítulo são [3, 23].

3.1 Operadores regulares entre espaços de Riesz

Definição 3.1.1. Sejam E e F espaços vetoriais ordenados e seja $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. Dizemos que T é:

(i) *Positivo* se $T(E^+) \subset F^+$, e denotamos isso por $T \geq 0$. Escrevemos $L(E;F)^+$ para simbolizar o conjunto de todos os operadores lineares positivos em $L(E;F)$.

(ii) *Regular* se T é a diferença de dois operadores lineares positivos. Denotamos o conjunto de todos os operados lineares regulares em $L(E;F)$ por $L_r(E;F)$.

(iii) *Ordem limitado* se a imagem de qualquer subconjunto de E ordem limitado é ordem limitado em F. Denotamos o conjunto de todos os operadores lineares ordem limitados em $L(E;F)$ por $L_b(E;F)$.

Apesar de simples, a desigualdade a seguir é muito útil.

Proposição 3.1.2. *Seja $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear positivo entre espaços de Riesz. Então $|T(x)| \leq T(|x|)$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. Para qualquer $x \in E$ temos $0 \leq |x| \pm x$, donde segue que

$$0 = T(0) \leq T(|x| \pm x) = T(|x|) \pm T(x) \Longrightarrow \pm T(x) \leq T(|x|).$$

Portanto, $|T(x)| = T(x) \vee (-T(x)) \leq T(|x|)$. $\square$

Teorema 3.1.3. *Se E e F são espaços de Riesz, então $L_r(E;F) \subset L_b(E;F)$. Em particular, todo operador linear positivo é ordem limitado.*

Demonstração. Sejam $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear regular, digamos $T = T_1 - T_2$ com $T_1, T_2 \in L(E;F)^+$, A um subconjunto de E ordem limitado com uma cota superior s e uma cota inferior r. Notemos que para $x \in A$ temos $r \leq x \leq s$ e $-s \leq -x \leq -r$, e portanto $(-s) \wedge r \leq |x| \leq s \vee (-r)$ para todo $x \in A$. Então

$$\begin{aligned} T(x) &\leq |T(x)| = |T_1(x) - T_2(x)| \leq |T_1(x)| + |T_2(x)| \\ &\leq T_1(|x|) + T_2(|x|) \leq T_1(s \vee (-r)) + T_2(s \vee (-r)), \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade é óbvia, a segunda segue do Teorema 2.1.4(vii), a terceira da Proposição 3.1.2 e a última do fato de T_1 e T_2 serem positivos e $0 \leq s \vee (-r) - |x|$. Dessa forma, $T(A)$ é limitado superiormente em F. De maneira análoga prova-se que $T(A)$ limitado inferiormente em F. Isso prova que T é ordem limitado. $\square$

A inclusão do teorema acima pode ser estrita:

Exemplo 3.1.4. Do Exemplo 2.1.14(c) sabemos que $C[-1,1]$ é um espaço de Riesz com a ordem pontual. Para cada função $f \in C[-1,1]$, defina

$$T(f)\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ T(f)(t) = \begin{cases} f(\operatorname{sen}(t^{-1})) - f(\operatorname{sen}(t + t^{-1})), & \text{se } t \neq 0, \\ 0, & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Em [3, Example 1.16] está provado que $T(f) \in C[-1,1]$ e que $T\colon C[-1,1] \longrightarrow C[-1,1]$ é um operador linear ordem limitado mas não regular. Assim, $L_r(C[-1,1];C[-1,1])$ está contido propriamente em $L_b(C[-1,1];C[-1,1])$.

O resultado abaixo garante que um operador linear positivo é univocamente determinado pelo cone positivo do seu domínio.

Teorema 3.1.5 (Kantorovich)**.** *Sejam E e F espaços de Riesz com F arquimediano. Seja $f\colon E^+ \longrightarrow F^+$ uma função aditiva, isto é, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in E^+$. Então existe um único operador $T \in L(E;F)^+$ tal que f é a restrição de T a E^+, ou seja, T é uma extensão de f a E. Mais ainda, $T(x) = f(x^+) - f(x^-)$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. Como diz o próprio enunciado, definamos

$$T\colon E \longrightarrow F\ ,\ T(x) = f(x^+) - f(x^-).$$

Devemos mostrar que T é o operador linear positivo desejado. Como $T(x) = f(x)$ sempre que $x \in E^+$, T é uma extensão de f a E. Assim, basta provar que T é linear e positivo e a unicidade.

É fácil ver que T é positivo: a aditividade de f garante que $f(0) = 0$, logo para todo $x \in E^+$,

$$T(x) = f(x) - f(0) = f(x) \in F^+.$$

Provaremos a linearidade por etapas. Primeiro, vejamos que se $x \in E$ é escrito como diferença de dois vetores positivos, digamos $x = x_1 - x_2$ com $x_1, x_2 \in E^+$, então $T(x) = T(x_1) - T(x_2)$. De fato, temos $x = x^+ - x^- = x_1 - x_2$, logo $x^+ + x_2 = x_1 + x^- \in E^+$. Da aditividade de f segue que

$$f(x^+) + f(x_2) = f(x^+ + x_2) = f(x_1 + x^-) = f(x_1) + f(x^-),$$

e assim,

$$T(x) = f(x^+) - f(x^-) = f(x_1) - f(x_2) = T(x_1) - T(x_2).$$

Usaremos o que acabamos de mostrar para provar que T é uma função aditiva. Realmente, para $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}
T(x+y) &= T(x^+ - x^- + y^+ - y^-) = T(\underbrace{(x^+ + y^+)}_{\in E^+} - \underbrace{(x^- + y^-)}_{\in E^+}) \\
&= T(x^+ + y^+) - T(x^- + y^-) = f(x^+ + y^+) - f(x^- + y^-) \\
&= f(x^+) + f(y^+) - f(x^-) - f(y^-) \\
&= f(x^+) - f(x^-) + f(y^+) - f(y^-) \\
&= T(x) + T(y).
\end{aligned}$$

Um argumento simples de indução mostra que $T(mx) = mT(x)$ para todos $x \in E$ e $m \in \mathbb{N}$. E observando que

$$T(-x) = T(x^- - x^+) = f(x^-) - f(x^+) = -(f(x^+) - f(x^-)) = -T(x),$$

temos por indução simples que $T(mx) = mT(x)$ para todos $x \in E$ e $m \in \mathbb{Z}$. Para $x \in E$ e $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
T\left(\frac{1}{n}x\right) &= T\left(x - \left(\frac{n-1}{n}\right)x\right) = T(x) + T\left(-\left(\frac{n-1}{n}\right)x\right) \\
&= T(x) - (n-1)T\left(\frac{1}{n}x\right) = T(x) - nT(n^{-1}x) + T(n^{-1}x),
\end{aligned}$$

donde segue que $T(n^{-1}x) = n^{-1}T(x)$. E portanto, para todos $x \in E$ e $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$,

$$T(rx) = T\left(m(n^{-1})x\right) = mT\left((n^{-1})x\right) = mn^{-1}T(x) = rT(x).$$

A fim de provar que $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ para todos $x \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, mostraremos primeiro que T é uma função monótona crescente, ou seja, se $x \leq y$ em E, então $T(x) \leq T(y)$ em F. De fato: $x \leq y \Longrightarrow 0 \leq y - x \Longrightarrow T(y-x) = f(y-x) \geq 0 \Longrightarrow$

$$T(y) = T(y - x + x) = T(y-x) + T(x) = f(y-x) + T(x) \geq T(x),$$

pois $f(y-x) \geq 0$.

Fixemos $x \in E^+$ e seja $\alpha \geq 0$. Da densidade dos racionais em $\mathbb{R}$ existem sequências de racionais não negativos $(r_n)_{n=1}^\infty$ e $(s_n)_{n=1}^\infty$ tais que $r_n \uparrow \alpha$ e $s_n \downarrow \alpha$. Como $x \geq 0$, então $r_n x \leq \alpha x \leq s_n x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e por T ser monótona crescente,

$$r_n T(x) = T(r_n x) \leq T(\alpha x) \leq T(s_n x) = s_n T(x). \tag{3.1}$$

Das convergências de $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\alpha - r_n) \leq k^{-1}$ e $(s_n - \alpha) \leq k^{-1}$ sempre que $n \geq n_0$. Com isso, para $n \geq n_0$,

$$0 \leq T((\alpha - r_n)x) \leq T\left(\frac{1}{k}x\right) = \frac{1}{k}T(x) \quad \text{e} \quad 0 \leq T((s_n - \alpha)x) \leq T\left(\frac{1}{k}x\right) = \frac{1}{k}T(x).$$

Segue que

$$\inf\{T((\alpha - r_n)x) \colon n \in \mathbb{N}\} \leq k^{-1}T(x) \quad \text{e} \quad \inf\{T((s_n - \alpha)x) \colon n \in \mathbb{N}\} \leq k^{-1}T(x)$$

para todo k. Como F é arquimediano, temos $k^{-1}T(x) \downarrow 0$; e daí

$$\begin{aligned} 0 = \inf_{k \in \mathbb{N}} k^{-1}T(x) &\geq \inf_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \in \mathbb{N}} T((s_n - \alpha)x) \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}} T((s_n - \alpha)x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{s_n T(x)\} - T(\alpha x) \geq 0, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de (3.1). Isso mostra que $\inf\{s_n T(x) \colon n \in \mathbb{N}\} = T(\alpha x)$; e analogamente tem-se $\inf\{r_n T(x) \colon n \in \mathbb{N}\} = T(\alpha x)$.

Temos que $(s_n - \alpha) \leq k^{-1}$ para todo $n \geq n_0$, logo $(s_n - \alpha)T(x) \leq k^{-1}T(x)$ para todo $n \geq n_0$, o que implica $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} (s_n - \alpha)T(x) \leq k^{-1}T(x)$ para todo k. Segue que

$$\begin{aligned} T(\alpha x) - \alpha T(x) &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \{s_n T(x)\} - \alpha T(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{s_n T(x) - \alpha T(x)\} \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}} (s_n - \alpha)T(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \in \mathbb{N}} (s_n - \alpha)T(x) \\ &\leq \inf_{k \in \mathbb{N}} k^{-1}T(x) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha T(x) - T(\alpha x) \geq 0$. E também, $(\alpha - r_n) \leq k^{-1}$ para todo $n \geq n_0$ implica que $(\alpha - r_n)T(x) \leq k^{-1}T(x)$ para todo $n \geq n_0$, e logo $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} (\alpha - r_n)T(x) \leq k^{-1}T(x)$ para todo k. Então

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha T(x) - T(\alpha x) &= \alpha T(x) - \inf_{n \in \mathbb{N}} \{r_n T(x)\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{\alpha T(x) - r_n T(x)\} \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}} (\alpha - r_n)T(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \in \mathbb{N}} (\alpha - r_n)T(x) \\ &\leq \inf_{k \in \mathbb{N}} k^{-1}T(x) = 0. \end{aligned}$$

Isso prova que $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ para todos $x \in E^+$ e $\alpha \geq 0$. Como já sabemos também que $T(-x) = -T(x)$ para todo $x \in E$, segue que, para todos $x \in E^+$ e $\alpha < 0$,

$$T(\alpha x) = T(-(-\alpha x)) = -T(-\alpha x) = -(-\alpha)T(x) = \alpha T(x).$$

Temos agora $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ para todos $x \in E^+$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Finalmente, para $x \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(\alpha x) &= T(\alpha x^+ - \alpha x^-) \\ &= T(\alpha x^+) + T((-\alpha)x^-) \\ &= \alpha T(x^+) - \alpha T(x^-) \\ &= \alpha(T(x^+) - T(x^-)) \\ &= \alpha T(x), \end{aligned}$$

o que termina a demonstração de que T é linear.

Por fim, suponha que $U \in L(E;F)^+$ seja uma extensão de f a E. Para todo $x \in E$, como $x^+, x^- \in E^+$ e U é linear,

$$U(x) = U(x^+ - x^-) = U(x^+) - U(x^-) = f(x^+) - f(x^-) = T(x),$$

mostrando a unicidade. □

O exemplo a seguir mostra que o Teorema de Kantorovich não é verdade se F não for arquimediano.

Exemplo 3.1.6. Seja $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função aditiva que não é linear, ou seja, para todo $c \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) \neq cx$. Para a existência de uma tal função, veja, por exemplo, [4]. Tomamos $F = \mathbb{R}^2$ com a ordem lexicográfica (veja Exemplo 2.2.13) e consideramos a função

$$T\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow F^+ \ , \quad T(x) = (x, \phi(x)).$$

Vejamos primeiramente que, de fato, ϕ toma valores em F^+. Dado $x \in \mathbb{R}^+$, se $x = 0$, então $\phi(x) = 0$ pois ϕ é aditiva; e neste caso $T(x) = (0,0) \in F^+$. E se $x > 0$, então $T(x) = (x, \phi(x)) > (0,0)$ pois F tem a ordem lexicográfica.

Vejamos agora que se T pudesse ser estendida para um operador linear $\overline{T}$ de $\mathbb{R}$ em F, então ϕ seria linear. Com efeito, para todos $\alpha, x \in \mathbb{R}^+$ teríamos

$$(\alpha x, \phi(\alpha x)) = \overline{T}(\alpha x) = \alpha \overline{T}(x) = \alpha(x, \phi(x)) = (\alpha x, \alpha\phi(x)).$$

Logo $\phi(\alpha x) = \alpha\phi(x)$ para todos $\alpha, x \in \mathbb{R}^+$. Observando que ϕ é aditiva, então ϕ deveria ser linear, o que é uma contradição.

É fácil verificar que se E e F são espaços vetoriais ordenados, então o espaço vetorial (real) $L(E;F)$, munido com a ordem parcial

$$S \leq T \iff (T - S) \in L(E;F)^+ \iff S(x) \leq T(x) \text{ para todo } x \in E^+, \tag{3.2}$$

é um espaço vetorial ordenado. A não ser que digamos o contrário, sempre consideraremos $L(E;F)$ munido com essa ordem parcial.

Definição 3.1.7. Sejam E e F espaços de Riesz e seja $T \in L(E;F)$. Suponha que exista em $L(E;F)$ o supremo do conjunto $\{T, -T\}$. Nesse caso, denotamos $|T| \coloneqq T \vee (-T)$ e chamamos este operador de *módulo* de T.

No caso em que $|T|$ existe, como $\pm T(x) \leq |T|(x)$ implica $0 \leq T(x) \vee T(-x) \leq |T|(x)$ para todo $x \geq 0$, então o módulo de um operador linear é sempre positivo, logo ordem limitado pelo Teorema 3.1.3.

Existem casos em que o módulo de um operador linear entre espaços de Riesz E e F não existe. Nesses casos o espaço vetorial ordenado $L(E;F)$ não é um espaço de Riesz. Apresentaremos a seguir dois exemplos de operadores lineares que não têm módulo. O leitor deve observar que no primeiro exemplo temos um operador linear cujo contradomínio é Dedekind completo, e no segundo exemplo temos um operador linear regular.

Exemplo 3.1.8 (Krengel)**.** Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos o espaço de Riesz Dedekind completo $E_n := \mathbb{R}^{2^n}$ munido com a ordem pontual (Exemplo 2.1.17), com a base canônica $\{e_n^1, \ldots, e_n^{2^n}\}$ – onde, para todo $1 \leq k \leq 2^n$, o vetor $e_n^k \in E_n$ é tal que a k-ésima coordenada é igual a 1 e as outras coordenadas são iguais a 0 – e a norma euclidiana (Exemplo 2.2.3). Consideremos o espaço vetorial real

$$E := \left\{(x_1, x_2, x_3, \ldots) \colon x_n \in E_n \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0\right\},$$

em que a adição e a multiplicação por escalar são feitas coordenada a coordenada. Munindo E com a relação

$$x = (x_1, x_2, \ldots) \leq (y_1, y_2, \ldots) = y \Longleftrightarrow x_n \leq y_n \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N},$$

é fácil ver que E é um espaço vetorial ordenado. Com argumentos similares aos que fizemos para $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mostra-se que E é um espaço de Riesz Dedekind completo (veja os Exemplos 2.1.3(d) e 2.1.17).

Apresentaremos um operador $T \colon E \longrightarrow E$ que não tem módulo.

Para isso, começamos observando que para $A = (a_{ij})$ uma matriz real $m \times m$ vale que $|A| = (|a_{ij}|)$ pelo Exemplo 2.1.3(e). Para cada $A = (a_{ij})$ matriz $2^n \times 2^n$, denotamos por $T_A \colon E_n \longrightarrow E_n$ o operador linear cuja matriz com relação à base canônica é a matriz A. Então a matriz com relação à base canônica do operador $|T_A| \colon E_n \longrightarrow E_n$ é a matriz $|A| = (|a_{ij}|)$ (veja Exemplo 3.3.11). Agora, seja $A_n = (a_{ij})$ uma matriz $2^n \times 2^n$ com entradas 1 ou -1 de forma que suas linhas são vetores ortogonais de E_n, isto é, para todos $1 \leq i, k \leq 2^n$ com $i \neq k$, temos

$$\sum_{j=1}^{2^n} a_{ij} a_{kj} = 0.$$

Uma maneira de construir tais matrizes $A_n, n \in \mathbb{N}$, é proceder indutivamente da seguinte forma:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \ \text{ e } \ A_{n+1} = \begin{bmatrix} A_n & A_n \\ A_n & -A_n \end{bmatrix}, \quad n \geq 2.$$

Como $|A_n|$ é uma matriz com todos os termos iguais a 1, então

$$|A_n|(1, \ldots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ \vdots \\ 2^n \end{pmatrix}.$$

E portanto,

$$\||A_n|(1, \ldots, 1)\| = \left(\sum_{i=1}^{2^n} (2^n)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (2^n 2^{2n})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3n}{2}}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos o operador linear

$$T_{2^{-\frac{n}{2}} A_n} \colon E_n \longrightarrow E_n.$$

Para aliviar um pouco a notação, escrevemos T_n ao invés de $T_{2^{-\frac{n}{2}} A_n}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, notemos que as linhas da matriz $2^{-\frac{n}{2}} A_n$ formam um conjunto de vetores ortonormais em

E_n, então a matriz $2^{-\frac{n}{2}}A_n$ é ortogonal, isto é, a inversa da matriz $2^{-\frac{n}{2}}A_n$ coincide com sua transposta (veja [26, Proposição 7.6]); de modo que o operador T_n é um isomorfismo isométrico. Em particular, $\|T_n\| = 1$ para todo n.

Definimos agora um operador linear que não tem módulo:

$$T\colon E \longrightarrow E \ , \ T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\alpha_1 T_1(x_1), \alpha_2 T_2(x_2), \alpha_3 T_3(x_3), \dots),$$

onde $\alpha_n = 2^{-\frac{n}{3}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Vejamos que o operador T está bem definido: para todo $(x_1, x_2, \dots) \in E$ temos $\alpha_k \|x_k\| \longrightarrow 0$, e como $\|T_n\| = 1$, vale que

$$\|\alpha_n T_n(x_n)\| \leq \alpha_n \|T_n\| \cdot \|x_n\| = \alpha_n \|x_n\|$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue que $\|\alpha_n T_n(x_n)\| \longrightarrow 0$.

A linearidade de T segue facilmente da linearidade de cada T_n.

Vejamos que o módulo de T não existe em $L(E; E)$. Para isso suponhamos que $|T|\colon E \longrightarrow E$ exista. Neste caso, pelo Teorema de F. Riesz-Kantorovich a ser demonstrado em breve (veja Teorema 3.1.12), para todo $x = (x_1, x_2, \dots) \in E^+$ temos

$$\begin{aligned}
|T|(x) &= \sup\{|T(y)|\colon |y| \leq x\} \\
&= \sup\{(\alpha_1 |T_1(y_1)|, \alpha_2 |T_2(y_2)|, \dots)\colon (|y_1|, |y_2|, \dots) \leq (x_1, x_2, \dots)\} \\
&= (\sup\{\alpha_1 |T_1(y_1)|\colon |y_1| \leq x\}, \sup\{\alpha_2 |T_2(y_2)|\colon |y_2| \leq x\}, \dots) \\
&= (\alpha_1 |T_1|(x_1), \alpha_2 |T_2|(x_2), \dots),
\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade segue do Exemplo 2.1.3(f). Por fim, fazendo $y_n = 2^{-\frac{7n}{12}}(1, \dots, 1) \in E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\left\| 2^{-\frac{7n}{12}}(1, \dots, 1) \right\| = 2^{-\frac{7n}{12}} \cdot 2^{\frac{n}{2}} = 2^{-\frac{n}{12}} \longrightarrow 0$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Isso prova que $(y_1, y_2, \dots) \in E$. Entretanto, temos

$$\begin{aligned}
\|\alpha_n |T_n|(y_n)\| &= \left\| 2^{-\frac{n}{3}} \cdot 2^{-\frac{n}{2}} \cdot |A_n| \left(2^{-\frac{7n}{12}}, \dots, 2^{-\frac{7n}{12}} \right) \right\| \\
&= 2^{-\frac{n}{3}} \cdot 2^{-\frac{n}{2}} \cdot 2^{-\frac{7n}{12}} \cdot \| |A_n|(1, \dots, 1) \| \\
&= 2^{-\frac{n}{3} - \frac{n}{2} - \frac{7n}{12} + \frac{3n}{2}} = 2^{\frac{n}{12}},
\end{aligned}$$

o que nos dá $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha_n |T_n|(y_n)\| = +\infty$. Disso segue que $|T|(y_1, y_2, \dots) \notin E$, contradição essa que nos permite concluir que o operador T não possui módulo.

Exemplo 3.1.9 (Kaplan)**.** Seja c o espaço de Riesz das sequências reais convergentes do Exemplo 2.1.14(c). Definimos dois operadores lineares positivos $S, T\colon c \longrightarrow c$ por

$$S(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, \dots)$$

e

$$T(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_1, x_3, x_3, x_5, x_5, \dots).$$

É fácil ver que esses operadores estão bem definidos e são lineares e positivos. Mostremos que o módulo do operador regular $R = S - T$ não existe em $L(c; c)$: Notemos que

$$R(x_1, x_2, \dots) = (x_2 - x_1, 0, x_4 - x_3, 0, x_6 - x_5, 0, \dots).$$

Suponhamos por absurdo que exista o módulo do operador R em $L(c;c)$. Afirmamos que a imagem de qualquer elemento de c por $|R|$ tem coordenadas pares iguais a zero. Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $P_n\colon c \longrightarrow c$ o operador positivo dado por

$$P_n(x_1, \dots, x_n, \dots) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0, x_{n+1}, \dots).$$

Agora, para todos $x \in c^+$ e $n \in \mathbb{N}$, temos $\pm R(x) \leq |R|(x)$ e a $2n$-ésima coordenada de $\pm R(x)$ é zero. Então $\pm R(x) \leq P_{2n}(|R|(x))$ pois $P_{2n}(|R|(x))$ difere de $|R|(x)$ apenas na $2n$-ésima coordenada e a ordem parcial é coordenada a coordenada. Por esse mesmo motivo vale $P_{2n}(|R|(x)) \leq |R|(x)$. Assim, temos

$$\pm R(x) \leq P_{2n}(|R|(x)) \leq |R|(x)$$

para todos $x \in c^+$ e $n \in \mathbb{N}$. Como $|R|$ é a menor cota superior do conjunto $\{R, -R\}$, segue que $P_{2n} \circ |R| = |R|$ sempre vale para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que a imagem de qualquer elemento de c por $|R|$ tem coordenadas pares iguais a zero.

Por outro lado, tomando $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \in c$ com 1 na n-ésima coordenada, e $e = (1, 1, 1, \dots) \in c$, temos imediatamente

$$e_{2n-1} = -R(e_{2n-1}) \leq |R|(e_{2n-1}) \leq |R|(e)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\pm R \leq |R|$ e $e_{2n-1} \leq e$. Logo $|R|(e)$ tem as coordenadas ímpares maiores ou iguais a um, de modo que a subsequência das coordenadas ímpares não pode convergir para 0, que é o limite da subsequência das coordenadas pares (todas iguais a zero). Dessa forma $|R|(e) \notin c$. Portanto, $|R|$ não existe.

Observação 3.1.10. O exemplo anterior foi retirado de [3, Example 1.17], onde encontramos um erro que dificulta seu entendimento. No argumento acima esse erro foi corrigido. Um outro exemplo de um operador regular que não tem módulo pode ser encontrado em [2] ou em [18].

O seguinte teorema nos dá uma condição suficiente para que exista o módulo de um operador linear entre espaços de Riesz.

Teorema 3.1.11. *Sejam E e F espaços de Riesz e seja $T \in L(E;F)$ um operador linear tal que* $\sup\{|T(y)|\colon |y| \leq x\}$ *existe para todo $x \in E^+$. Então o módulo de T existe em $L(E;F)$ e*

$$|T|(x) = \sup\{|T(y)|\colon |y| \leq x\}$$

para todo $x \in E^+$.

Demonstração. A hipótese garante que a seguinte função está bem definida:

$$S\colon E^+ \longrightarrow F^+ \ , \ S(x) = \sup\{|T(y)|\colon |y| \leq x\}.$$

Será conveniente escrever S de uma outra forma: para $x \in E^+$ e $y \in E$ com $|y| \leq x$ vale que

$$\sup\{T(y)\colon |y| \leq x\} \leq \sup\{|T(y)|\colon |y| \leq x\},$$

pois $\pm T(y) \leq |T(y)|$. Como T é linear, temos

$$|T(y)| = \sup\{T(y), -T(y)\} = \sup\{T(y), T(-y)\} \leq \sup\{T(z)\colon |z| \leq x\}.$$

Tomando o supremo no lado esquerdo para $|y| \leq x$, segue que

$$S(x) = \sup\{T(y)\colon |y| \leq x\}$$

para todo $x \in E^+$.

Vejamos que S é uma função aditiva. Sejam $u, v \in E^+$. Se $|y| \leq u$ e $|z| \leq v$, então $|y+z| \leq |y| + |z| \leq u + v$, e daí

$$T(y) + T(z) = T(y+z) \leq S(u+v).$$

Com isso, $S(u+v) - T(z)$ é cota superior para o conjunto $\{T(y)\colon |y| \leq u\}$, de modo que $S(u) \leq S(u+v) - T(z)$. Agora, $S(u+v) - S(u)$ é cota superior para o conjunto $\{T(z)\colon |z| \leq v\}$, logo $S(u) + S(v) \leq S(u+v)$. Por outro lado, se $|y| \leq u + v$, então pelo Teorema 2.1.9 existem $y_1, y_2 \in E$ tais que $|y_1| \leq u$ e $|y_2| \leq v$ com $y = y_1 + y_2$. Assim,

$$T(y) = T(y_1) + T(y_2) \leq S(u) + S(v)$$

e, portanto, $S(u+v) \leq S(u) + S(v)$. Concluímos que $S(u+v) = S(u) + S(v)$. Pelo Teorema de Kantorovich, a função aditiva S pode ser estendida para um operador linear positivo $\overline{S}\colon E \longrightarrow F$.

Resta mostrar que $\overline{S}$ é o supremo do conjunto $\{T, -T\}$. De

$$\pm T(x) \leq |T(x)| \leq S(x) = \overline{S}(x) \text{ para todo } x \in E^+,$$

segue que $\overline{S}$ é cota superior desse conjunto, ou seja, $\pm T \leq \overline{S}$ em $L(E;F)$. Tomemos $R \in L(E;F)$ tal que $\pm T \leq R$. Em particular,

$$R(x) \geq T(x) \vee (-T(x)) = |T(x)| \geq 0 \text{ para todo } x \in E^+,$$

e portanto, R é um operador positivo. Fixemos $x \in E^+$. Temos

$$|y| \leq x \Longrightarrow 0 \leq x - |y| \Longrightarrow 0 \leq R(x - |y|) \Longrightarrow R(|y|) \leq R(x) \Longrightarrow$$

$$T(y) = T(y^+) - T(y^-) \leq R(y^+) + R(y^-) = R(|y|) \leq R(x).$$

Consequentemente, da definição de S temos $\overline{S}(x) = S(x) \leq R(x)$ para todo $x \in E^+$, e logo $\overline{S}$ é a menor cota superior do conjunto $\{T, -T\}$, isto é, $\overline{S} = T \vee (-T) = |T|$ em $L(E;F)$. $\square$

O próximo teorema estabelece que o espaço vetorial ordenado dos operadores lineares ordem limitados é um espaço de Riesz Dedekind completo quando o espaço de chegada é Dedekind completo.

Teorema 3.1.12 (F. Riesz-Kantorovich)**.** *Sejam E e F espaços de Riesz com F Dedekind completo. Então o espaço vetorial ordenado $L_b(E;F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo. E suas operações de reticulado satisfazem o seguinte:*

$$\begin{aligned}
(S \vee T)(x) &= \sup\{S(y) + T(z)\colon y, z \in E^+ \text{ e } x = y + z\},\\
(S \wedge T)(x) &= \inf\{S(y) + T(z)\colon y, z \in E^+ \text{ e } x = y + z\} \text{ e}\\
|T|(x) &= \sup\{|T(y)|\colon |y| \leq x\},
\end{aligned}$$

para todos $S, T \in L_b(E;F)$ e $x \in E^+$.

Mais ainda, para uma rede $(T_\alpha)_\alpha$ em $L_b(E;F)$ vale que

$$T_\alpha \downarrow 0 \Longleftrightarrow T_\alpha(x) \downarrow 0 \text{ em } F \text{ para todo } x \in E^+.$$

Demonstração. Fixemos $T \in L_b(E;F)$. Como T é ordem limitado, para cada $x \in E^+$ o conjunto $\{T(y) \colon |y| \leq x\}$ é ordem limitado em F. E como F é Dedekind completo, para cada $x \in E^+$ o supremo

$$\sup\{T(y) \colon |y| \leq x\} = \sup\{|T(y)| \colon |y| \leq x\}$$

existe em F. Pelo Teorema 3.1.11, o módulo de T existe em $L(E;F)$ e é tal que

$$|T|(x) = \sup\{T(y) \colon |y| \leq x\}.$$

E como $|T|$ é positivo, temos $|T| \in L_b(E;F)$ pelo Teorema 3.1.3.

Fixado $x \in E^+$, observemos que, para $y, z \in E^+$, vale:

$$x = y + z \iff \text{ existe } u \in E \text{ tal que } |u| \leq x, y = \frac{1}{2}(x+u) \text{ e } z = \frac{1}{2}(x-u). \tag{3.3}$$

De fato, basta tomar $u = y - z$. Vejamos que o operador ordem limitado

$$\frac{1}{2}(S + T + |S - T|) =: U$$

é o supremo do conjunto $\{S, T\}$ (veja Corolário 2.1.5). Para todo $x \in E^+$,

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{2}(S(x) + T(x) + |S-T|(x)) \\ &= \frac{1}{2}(S(x) + T(x) + \sup\{(S-T)(u) \colon |u| \leq x\}) \\ &= \frac{1}{2}\sup\{S(x) + T(x) + S(u) - T(u) \colon |u| \leq x\} \\ &= \sup\left\{S\left(\frac{1}{2}(x+u)\right) + T\left(\frac{1}{2}(x-u)\right) \colon |u| \leq x\right\} \\ &= \sup\{S(y) + T(z) \colon y, z \in E^+ \text{ e } x = y + z\}, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade vem do Teorema 3.1.11 e a última igualdade vem de (3.3). Agora, se $R \in L_b(E;F)$ é tal que $S \leq R$ e $T \leq R$, então devemos ter $S(y) \leq R(y)$ e $T(z) \leq R(z)$ para todos $y, z \in E^+$ com $x = y + z$, daí

$$S(y) + T(z) \leq R(y) + R(z) = R(x).$$

Segue que $U \leq R$, o que mostra que $U = S \vee T$. De modo análogo vale para $S \wedge T$. Isso prova que $L_b(E;F)$ é espaço de Riesz.

Falta mostrar que $L_b(E;F)$ é Dedekind completo. Para isso, da Proposição 2.1.16 é suficiente provar que existe o supremo de conjuntos limitados formados por elementos positivos. Seja então A um subconjunto de $L_b(E;F)$ ordem limitado tal que $0 \leq U \leq T$ ocorre em $L_b(E;F)$ para todo $U \in A$ e algum $T \in L_b(E;F)$. Defina

$$A_0 = \{U_1 \vee \cdots \vee U_n \colon n \in \mathbb{N} \text{ e } U_1, \ldots, U_n \in A\},$$

e considere a função

$$S \colon E^+ \longrightarrow F^+ \ , \ S(x) = \sup\{R(x) \colon R \in A_0\}.$$

A boa definição de S vem do fato de F ser Dedekind completo. Mais ainda, $R(x) \leq T(x)$ para todos $R \in A_0$ e $x \in E^+$. Vejamos que S é uma função aditiva. Com efeito, se $x, y \in E^+$ e $R \in A_0$, então

$$R(x+y) = R(x) + R(y) \leq S(x) + S(y),$$

logo $S(x+y) \leq S(x) + S(y)$. Por outro lado, se $R_1, R_2 \in A_0$, digamos $R_1 = U_1 \vee \cdots \vee U_n$ e $R_2 = W_1 \vee \cdots \vee W_m$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e $U_1, \ldots, U_n, W_1, \ldots, W_m \in A$, então

$$R_3 := U_1 \vee \cdots \vee U_n \vee W_1 \vee \cdots \vee W_m \in A_0$$

é tal que $R_1 \leq R_3$ e $R_2 \leq R_3$, e portanto

$$R_1(x) + R_2(y) \leq R_3(x) + R_3(y) = R_3(x+y).$$

Segue que

$$\begin{aligned} S(x) + S(y) &= \sup\{R(x) \colon R \in A_0\} + \sup\{R(y) \colon R \in A_0\} \\ &= \sup\{R_1(x) + R_2(y) \colon R_1, R_2 \in A_0\} \\ &\leq \sup\{R_3(x+y) \colon R_3 \in A_0\} \\ &= S(x+y), \end{aligned}$$

o que prova que $S(x+y) = S(x) + S(y)$. Chamemos de $\overline{S} \colon E \longrightarrow F$ a extensão linear de S garantida pelo Teorema de Kantorovich. Dado $x \in E^+$, notemos que $\overline{S}(x) = S(x) \leq T(x)$ e ainda valem as desigualdades

$$U(x) \leq \overline{S}(x) \quad \text{e} \quad R(x) \leq \overline{S}(x)$$

para quaisquer $U \in A_0$ e $R \in A$. Com isso, $\overline{S} = \sup A_0 = \sup A$. Além disso, $\overline{S} \leq T$ implica $\overline{S} \in L_b(E; F)$. Concluímos que $L_b(E; F)$ é Dedekind completo. □

Segue do Teorema de F. Riesz-Kantorovich que o espaço de Riesz c das sequências reais convergentes não é Dedekind completo, pois no Exemplo 3.1.9 temos um operador regular de c em c que não tem módulo. Também, o operador T do Exemplo 3.1.8 não é ordem limitado, pois caso contrário ele deveria ter módulo já que seu contradomínio é Dedekind completo.

Alcançamos no corolário a seguir o principal objetivo desta seção.

Corolário 3.1.13. *Sejam E e F espaços de Riesz com F Dedekind completo. Então*

$$L_r(E; F) = L_b(E; F).$$

Em particular, $L_r(E; F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo. Além disso, para um operador $T \in L_b(E; F)$,

$$T^+(x) = \sup\{T(y) \colon 0 \leq y \leq x\} \quad \text{e} \quad T^-(x) = \sup\{-T(y) \colon 0 \leq y \leq x\}$$

para cada $x \in E^+$.

Demonstração. Já sabemos que o espaço dos operadores regulares é subconjunto do espaço dos operadores ordem limitado (Teorema 3.1.3). Notemos que para um operador $T \in L_b(E;F)$, os operadores $T^+ = T \vee 0$ e $T^- = (-T) \vee 0$ existem no espaço de Riesz $L_b(E;F)$, e são positivos por definição. Agora, $T = T^+ - T^-$ pelo Teorema 2.1.4(vi), e isso implica que todo operador ordem limitado é escrito como diferença de dois operadores positivos, ou seja, T é regular. Portanto, o espaço gerado pelos operadores positivos em $L(E;F)$ coincide com o espaço $L_b(E;F)$, isto é, $L_r(E;F) = L_b(E;F)$.

Por fim, do Teorema 3.1.12 segue que

$$\begin{aligned} T^+(x) &= ((T) \vee 0)(x) \\ &= \sup\{T(y) + 0(z) \colon y, z \in E^+ \text{ e } x = y + z\} \\ &= \sup\{T(y) \colon 0 \leq y \leq x\} \end{aligned}$$

para cada $x \in E^+$. □

Dizemos que um subconjunto D de um espaço de Riesz é *dirigido para cima* se para quaisquer $x, y \in D$ existir $z \in D$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$, e denotamos isso por $D \uparrow$. Escrevemos $D \uparrow x$ para significar que D é dirigido para cima e $x = \sup D$, se esse supremo existir. Definimos conjunto *dirigido para baixo* e os símbolos $D \downarrow$ e $D \downarrow x$ de forma análoga.

Veremos a seguir uma outra forma, muito útil, de escrever as operações de reticulado em $L_b(E;F)$.

Proposição 3.1.14. *Sejam E e F espaços de Riesz com F Dedekind completo. Para todos $S, T \in L_b(E;F)$ e $x \in E^+$,*

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} S(x_i) \vee T(x_i) \colon n \in \mathbb{N}, x_i \in E^+ \text{ e } x = \sum_{i=1}^{n} x_i\right\} \uparrow (S \vee T)(x),$$
$$\left\{\sum_{i=1}^{n} S(x_i) \wedge T(x_i) \colon n \in \mathbb{N}, x_i \in E^+ \text{ e } x = \sum_{i=1}^{n} x_i\right\} \downarrow (S \wedge T)(x) \quad \text{e}$$
$$\left\{\sum_{i=1}^{n} |T(x_i)| \colon n \in \mathbb{N}, x_i \in E^+ \text{ e } x = \sum_{i=1}^{n} x_i\right\} \uparrow |T|(x).$$

Demonstração. Consideremos o conjunto

$$D_x = \left\{\sum_{i=1}^{n} S(x_i) \vee T(x_i) \colon n \in \mathbb{N}, x_i \in E^+ \text{ e } x = \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}.$$

Se $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in E^+$ são tais que $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{k=1}^{m} y_k = x$, então pelo Teorema 2.1.10 existem vetores positivos z_{ik}, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$, tais que

$$x_i = \sum_{k=1}^{m} z_{ik} \quad \text{e} \quad y_k = \sum_{i=1}^{n} z_{ik}.$$

É claro que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} z_{ik}$. Usando o Corolário 2.1.5, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} S(x_i) \vee T(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}(S(x_i) + T(x_i) + |S(x_i) - T(x_i)|) \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} S(z_{ik}) + \sum_{k=1}^{m} T(z_{ik}) + \left| \sum_{k=1}^{m} (S(z_{ik}) - T(z_{ik})) \right| \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} (S(z_{ik}) + T(z_{ik}) + |S(z_{ik}) - T(z_{ik})|) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} S(z_{ik}) \vee T(z_{ik}).
\end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\sum_{k=1}^{m} S(y_k) \vee T(y_k) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} S(z_{ik}) \vee T(z_{ik}).$$

Isso mostra que D_x é dirigido para cima.

Se $x_1, \ldots, x_n \in E^+$ são tais que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x$, então

$$\sum_{i=1}^{n} S(x_i) \vee T(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} (S \vee T)(x_i) \vee (S \vee T)(x_i) = (S \vee T)(x),$$

mostrando que D_x é limitado superiormente em F por $(S \vee T)(x)$. Como F é Dedekind completo, o supremo de D_x existe e $\sup D_x \leq (S \vee T)(x)$. Agora, se s é cota superior de D_x, então para todos $y, z \in E^+$ com $y + z = x$,

$$S(y) + T(z) \leq S(y) \vee T(y) + S(z) \vee T(z) \leq \sup D_x \leq s,$$

de modo que, pelo Teorema de F. Riesz-Kantorovich,

$$(S \vee T)(x) = \sup\{S(y) + T(z) \colon y, z \in E^+ \text{ e } x = y + z\} \leq s.$$

Isso mostra que $(S \vee T)(x)$ é a menor cota superior de D_x, isto é, $\sup D_x = (S \vee T)(x)$, conforme queríamos provar.

Para as outras igualdades basta observar que $S \wedge T = -(-S) \vee (-T)$ pelo Teorema 2.1.4(ii), e por definição $|T| = T \vee (-T)$. $\square$

Relembremos que um espaço de Riesz é chamado σ-Dedekind completo se qualquer subconjunto não vazio enumerável e limitado superiormente tem supremo.

Dizemos que dois elementos x e y de um espaço de Riesz são *disjuntos* se $|x| \wedge |y| = 0$, e simbolizamos isso por $x \perp y$.

A seguir provaremos uma propriedade de aproximação local (ou pontual) para operadores positivos.

Teorema 3.1.15. *Sejam E e F espaços de Riesz com F σ-Dedekind completo e seja $T \in L(E;F)$ um operador linear positivo. Então para cada $x \in E^+$ existe um operador positivo $S \colon E \longrightarrow F$ tal que:*

(i) $0 \leq S \leq T$.

(ii) $S(x) = T(x)$.

(iii) $S(y) = 0$ *para todo* $y \perp x$.

Demonstração. Para cada $x \in E^+$ fixo,

$$y \wedge nx \leq y \Longrightarrow T(y \wedge nx) \leq T(y)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, pois T é positivo. Logo o conjunto enumerável $\{T(y \wedge nx) \colon n \in \mathbb{N}\}$ possui supremo uma vez que F é σ-Dedekind completo. Então a função $f \colon E^+ \longrightarrow F^+$ dada por

$$f(y) = \sup\{T(y \wedge nx) \colon n \in \mathbb{N}\}$$

está bem definida. É claro que

$$T(y \wedge nx) \leq f(y) \leq T(y) \tag{3.4}$$

para cada $y \in E^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Para provar que f é uma função aditiva, sejam $y, z \in E^+$. Por um lado, dado $n \in \mathbb{N}$, pela Proposição 2.1.8 temos

$$(y + z) \wedge nx \leq y \wedge nx + z \wedge nx,$$

e logo

$$T((y + z) \wedge nx) \leq T(y \wedge nx) + T(z \wedge nx) \overset{(3.4)}{\leq} f(y) + f(z),$$

o que acarreta $f(y + z) \leq f(y) + f(z)$. Por outro lado, para todos $m, n \in \mathbb{N}$,

$$y \wedge nx + z \wedge mx = (y + z \wedge mx) \wedge (nx + z \wedge mx) \leq (y + z) \wedge (n + m)x,$$

onde a igualdade vem do Teorema 2.1.4(iii). Segue que

$$T(y \wedge nx) + T(z \wedge mx) \leq T((y + z) \wedge (n + m)x) \leq f(y + z)$$

para todos $m, n \in \mathbb{N}$, e assim $f(y) + f(z) \leq f(y + z)$. Portanto, $f(y + z) = f(y) + f(z)$ para todos $y, z \in E^+$, ou seja, f é aditiva.

O Teorema 2.2.14 garante que F é arquimediano. Pelo Teorema de Kantorovich, f pode ser estendida para um operador linear positivo $S \colon E \longrightarrow F$ tal que $S(y) = f(y^+) - f(y^-)$ para todo $y \in E$. Afirmamos que S é o operador desejado. De fato, (i) segue de (3.4) e (ii) segue do fato de que $x = x \wedge nx$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por fim, se $y \in E$ é tal que $y \perp x$, então

$$|y| \wedge x = 0 \Longrightarrow |y| \wedge nx = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 3.1.2,

$$|S(y)| \leq S(|y|) = f(|y|) = \sup\{T(|y| \wedge nx) \colon n \in \mathbb{N}\},$$

logo $S(y) = 0$ sempre que $y \perp x$, provando (iii). □

No Corolário 3.1.13 vimos como a imagem de um vetor positivo pela parte positiva e pela parte negativa de um operador regular podem ser escritas. O próximo teorema ensina como escrever, para um operador positivo, a imagem da parte positiva e da parte negativa de um vetor qualquer.

Teorema 3.1.16. *Sejam E e F espaços de Riesz com F σ-Dedekind completo e seja $T \in L(E;F)$ um operador linear positivo. Então para cada $x \in E$ temos:*

$$\begin{aligned} T(x^+) &= \max\{S(x) \colon S \in L(E;F) \;\; e \;\; 0 \leq S \leq T\}. \\ T(x^-) &= \max\{-S(x) \colon S \in L(E;F) \;\; e \;\; 0 \leq S \leq T\}. \\ T(|x|) &= \max\{S(x) \colon S \in L(E;F) \;\; e \;\; -T \leq S \leq T\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Fixemos $x \in E$. Se $S \in L(E;F)$ é tal que $0 \leq S \leq T$, então

$$x \leq x^+ \Longrightarrow S(x) \leq S(x^+) \leq T(x^+).$$

Pelo Teorema 2.1.4(vi) sabemos que $x^+ \perp x^-$. Então o Teorema 3.1.15 garante que existe um operador positivo $R \colon E \longrightarrow F$ tal que

$$0 \leq R \leq T, \quad R(x^+) = T(x^+) \;\text{ e }\; R(x^-) = 0.$$

Segue que $T(x^+) = R(x^+) - R(x^-) = R(x)$. Isso mostra a primeira fórmula.

Observando que $x^- = (-x)^+$, a segunda fórmula segue imediatamente da primeira.

Finalmente, se $S \in L(E;F)$ satisfaz $-T \leq S \leq T$, então

$$S(x) = S(x^+) - S(x^-) \leq T(x^+) + T(x^-) = T(|x|).$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.1.15 existem dois operadores lineares positivos $R_1, R_2 \colon E \longrightarrow F$ tais que $R_1 \leq T$, $R_2 \leq T$,

$$\begin{aligned} R_1(x^+) &= T(x^+) \;\text{ e }\; R_1(x^-) = 0, \\ R_2(x^-) &= T(x^-) \;\text{ e }\; R_2(x^+) = 0. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$-T(y) \leq -R_2(y) \leq R_1(y) - R_2(y) \leq R_1(y) \leq T(y)$$

para todo $y \in E^+$. Então o operador regular $S = R_1 - R_2$ satisfaz

$$-T \leq S \leq T \;\text{ e }\; T(|x|) = R_1(x^+) + R_2(x^-) = S(x),$$

o que prova a terceira fórmula. □

Dizemos que dois espaços vetoriais ordenados E e F são *isomorfos como espaços vetoriais ordenados* se existe um operador linear bijetor $T \colon E \longrightarrow F$ que satisfaz a seguinte equivalência:

$$x \leq y \text{ em } E \Longleftrightarrow T(x) \leq T(y) \text{ em } F.$$

Observe que a equivalência acima é o mesmo que dizer que T e T^{-1} são operadores positivos. Nesse caso, dizemos que T é um *isomorfismo entre espaços vetoriais ordenados.*

Em alguns espaços vetoriais ordenados pode ser difícil mostrar a existência do supremo ou ínfimo de dois elementos dados, ou seja, mostrar que tais espaços são espaços de Riesz.

Para facilitar isso temos o próximo resultado, que mostra que se dois espaços vetoriais ordenados são isomorfos como espaços vetoriais ordenados, onde sabemos que um deles é espaço de Riesz, então o outro também é espaço de Riesz.

De certa maneira, a proposição a seguir nos permite dizer que o espaço de Riesz F induz uma estrutura de espaço de Riesz no espaço vetorial ordenado E. E é nesse sentido que usaremos esta proposição nos capítulos subsequentes.

Proposição 3.1.17. *Sejam E um espaço vetorial ordenado e F um espaço de Riesz, e seja $T\colon E \longrightarrow F$ um isomorfismo entre espaços vetoriais ordenados. Então:*

(i) E também é um espaço de Riesz.

(ii) $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ para todos $x, y \in E$.

(iii) Se F é Dedekind completo, então E também é Dedekind completo.

Demonstração. Sabendo que F é espaço de Riesz, devemos mostrar que o espaço vetorial ordenado E é espaço de Riesz. Então fixemos x e y em E, e consideremos o supremo $T(x) \vee T(y) =: u$ em F, o qual existe porque F é espaço de Riesz. Como T é bijetor, existe um único $T^{-1}(u) =: s \in E$. Afirmamos que s é o supremo do conjunto $\{x, y\}$. De fato, temos

$$T(x) \leq u \Longrightarrow x \leq s \ \text{ e } \ T(y) \leq u \Longrightarrow y \leq s,$$

pois T é isomorfismo entre espaços vetoriais ordenados. De modo que s é cota superior do conjunto $\{x, y\}$. Novamente, como T é isomorfismo entre espaços vetoriais ordenados, se $t \in E$ é tal que $x \leq t$ e $y \leq t$, então

$$T(x) \leq T(t) \ \text{ e } \ T(y) \leq T(t).$$

Isso implica que $u \leq T(t)$, e portanto $s \leq t$. Mostramos que dados quaisquer dois vetores de E, existe o supremo do conjunto $\{x, y\}$. Agora e igualdade $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ é imediata. Com argumentos semelhantes mostra-se o análogo para o ínfimo do conjunto $\{x, y\}$.

Resta mostrar o item (iii). Suponhamos que F seja Dedekind completo. Seja $A \subset E$ um conjunto limitado superiormente e seja $t \in E$ uma cota superior de A. Como T é isomorfismo entre espaços vetoriais ordenados, então $x \leq t$ implica $T(x) \leq T(t)$ para todo $x \in A$. Logo $T(t)$ é cota superior para $T(A) \subset F$. E como F é Dedekind completo, existe $v \coloneqq \sup T(A)$. Notemos que para cada $x \in A$ temos $T(x) \leq v \leq T(t)$, e portanto,

$$x \leq T^{-1}(v) \leq t.$$

Isso mostra que $T^{-1}(v) \in E$ é o supremo de A, concluindo que E é Dedekind completo. □

Observação 3.1.18. No próximo capítulo usaremos a tese [21] como referência básica. De certa forma, a proposição acima é usada implicitamente nessa tese. Como ela não aparece na tese e nem é citada explicitamente, optamos por enunciá-la e demonstrá-la.

No exemplo a seguir usaremos a proposição anterior para dar uma outra demonstração de que o espaço vetorial das matrizes reais $m \times n$ é um espaço de Riesz Dedekind completo.

Exemplo 3.1.19. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ consideremos os espaços de Riesz R^m e $\mathbb{R}^n$ com suas respectivas as bases canônicas, e $M_{m\times n}$ o espaço vetorial das matrizes reais $m \times n$ (veja Exemplo 2.1.3(e)).

Para cada matriz $A = (a_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}$ chamemos de $T_A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ o operador linear cuja matriz com relação às bases canônicas é a matriz A. Da Álgebra Linear sabemos que

$$\Phi\colon M_{m\times n} \longrightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)\ ,\ \Phi(A) = T_A,$$

é um operador linear bijetor. Para todos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$T_A(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}.$$

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$. Para $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ temos

$$\begin{aligned}(a_{ij})_{m\times n} \leq (b_{ij})_{m\times n} &\Longrightarrow a_{ij}x_j \leq b_{ij}x_j \ \text{ para todos } \ 1 \leq i \leq m \ \text{ e } \ 1 \leq j \leq n \\ &\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j \ \text{ para todo } \ 1 \leq i \leq m \\ &\Longrightarrow T_A(x_1, \ldots, x_n) \leq T_B(x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Agora suponhamos que $T_A(x_1, \ldots, x_n) \leq T_B(x_1, \ldots, x_n)$ para todos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$. Então

$$\begin{gathered}T_A(1, 0, \ldots, 0) \leq T_B(1, 0, \ldots, 0) \Longrightarrow (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) \leq (b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{m1})\,, \\ \vdots \\ T_A(0, \ldots, 0, 1) \leq T_B(0, \ldots, 0, 1) \Longrightarrow (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) \leq (b_{1n}, b_{2n}, \ldots, b_{mn}).\end{gathered}$$

Como a ordem em $\mathbb{R}^m$ é coordenada a coordenada, $a_{ij} \leq b_{ij}$ para todos $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, logo $A \leq B$.

Segue que

$$A \leq B \ \text{ em } \ M_{m\times n} \Longleftrightarrow \Phi(A) \leq \Phi(B) \ \text{ em } \ L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m).$$

Isso mostra que Φ é um isomorfismo entre espaços vetoriais ordenados. Como sabemos do Teorema de F. Riesz-Kantorovich que $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo, então $M_{m\times n}$ também é um espaço de Riesz pela Proposição 3.1.17.

3.2 Operadores regulares entre reticulados de Banach

Para espaços de Riesz normados E e F, denotamos por $\mathcal{L}(E; F)$ o subespaço de $L(E; F)$ composto de todos os operadores lineares contínuos de E em F. Denotamos por $\mathcal{L}_r(E;F)$ o subespaço de $\mathcal{L}(E;F)$ formado pelos operadores regulares contínuos e por $\mathcal{L}(E;F)^+$ o conjunto dos operadores positivos contínuos de E em F. Em relação à ordem, continuamos a trabalhar com a ordem dada em (3.2), e em relação à topologia consideramos $\mathcal{L}_r(E;F)$ como espaço normado, espaço de Banach se F for completo, com a norma dada na Proposição 1.1.6.

O primeiro resultado que provaremos é central no nosso estudo e é um típico representante do que se chama em Topologia de *continuidade automática* (veja [11]). Nesse caso, uma propriedade que tem a ver apenas com a estrutura de ordem implica automaticamente na continuidade.

Teorema 3.2.1. *Sejam E reticulado de Banach e F espaço de Riesz normado. Então todo operador linear positivo $T\colon E \longrightarrow F$ é contínuo. Além disso,*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|\colon x \in {B_E}^+\},$$

onde ${B_E}^+ = B_E \cap E^+$. Dessa forma, $\mathcal{L}(E;F)^+ = L(E;F)^+$, e, mais ainda, todo operador regular é contínuo, isto é, $\mathcal{L}_r(E;F) = L_r(E;F)$.

Demonstração. Suponhamos que exista um operador linear $T\colon E \longrightarrow F$ positivo que não seja contínuo. Pelo Teorema 1.1.1(iii), o conjunto $\{\|T(x)\|\colon x \in B_E\}$ não é limitado. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in E$ tal que $\|y_n\| \leq 1$ e $n2^n \leq \|T(y_n)\|$. Tomando $x_n = 2^{-n}y_n$ temos

$$\|x_n\| = \|2^{-n}y_n\| \leq 2^{-n} \quad \text{e} \quad n \leq \|T(x_n)\|$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Da Proposição 3.1.2 sabemos que $|T(x_n)| \leq T(|x_n|)$, daí

$$n \leq \|T(x_n)\| = \||T(x_n)|\| \leq \|T(|x_n|)\|,$$

onde a igualdade segue da Proposição 2.2.2 e desigualdade final do fato da norma ser reticulada. Combinando isso com $\||x_n|\| = \|x_n\|$, podemos supor, a menos de ter que trocar x_n por $|x_n|$, que cada x_n é positivo. De

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty,$$

a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente no espaço de Banach E. Pelo Teorema 1.1.5 essa série é convergente em E, digamos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x \in E$. Como $\sum\limits_{n=1}^{k} x_j \geq 0$ para todo k e o cone positivo de E é fechado pelo Teorema 2.2.11(ii), concluímos que $x \geq 0$. Para todo n,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} x_j}_{\geq 0} + x_n + \underbrace{\sum_{j=n+1}^{\infty} x_j}_{\geq 0} \geq x_n.$$

Aplicando novamente o fato da norma ser reticulada, e também a positividade de T, de x_n e de x, temos

$$x_n \leq x \Longrightarrow T(x_n) \leq T(x) \Longrightarrow n \leq \|T(x_n)\| \leq \|T(x)\| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Essa contradição prova que todo operador linear positivo é contínuo.

Agora, para cada $x \in B_E$, de

$$\||x|\| = \|x\| \text{ e } \|T(x)\| \leq \|T(|x|)\|,$$

segue que $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|\colon x \in {B_E}^+\}$. A segunda afirmação segue da igualdade $T = T^+ - T^-$ e do fato de $\mathcal{L}_r(E;F)$ ser subespaço vetorial de $L_r(E;F)$. □

Essencialmente, o seguinte corolário diz que existe apenas uma norma reticulada em um espaço de Riesz que o faz ser reticulado de Banach.

Corolário 3.2.2 (Goffman)**.** *Todas as normas reticuladas que fazem um espaço de Riesz ser um reticulado de Banach são equivalentes.*

Demonstração. Consideremos um espaço de Riesz E que é um reticulado de Banach com as normas reticuladas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$. O operador identidade

$$I\colon (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2),$$

é claramente positivo e tem inversa positiva, logo é um isomorfismo topológico pelo Teorema 3.2.1. Segue que as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes. □

Entretanto, nem todo operador linear continuo é regular:

Exemplo 3.2.3. Consideremos o operador linear $T\colon C[0,1] \longrightarrow c_0$ dado por

$$T(f) = \left(f(1) - f(0), f\left(\tfrac{1}{2}\right) - f(0), f\left(\tfrac{1}{3}\right) - f(0), \dots\right).$$

O operador T está bem definido porque f é contínua e, como $n^{-1} \longrightarrow 0$, temos $f(\frac{1}{n}) - f(0) \longrightarrow 0$. Para todo n,

$$\left|f\left(\tfrac{1}{n}\right) - f(0)\right| \leq \left|f\left(\tfrac{1}{n}\right)\right| + |f(0)| \leq 2\|f\|_\infty,$$

logo $\|T(f)\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$ vale para cada $f \in C[0,1]$. Segue do Teorema 1.1.1 que T é um operador linear contínuo.

Vejamos T não é regular. Provaremos isso mostrando que T não é ordem limitado. Suponhamos que T seja ordem limitado. Nesse caso existe $s = (s_1, s_2, s_3, \dots) \in c_0$ tal que $|T(f)| \leq s$ para cada $0 \leq f \leq \mathbf{1}$, onde $\mathbf{1}$ denota a função constante igual a um. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $f_n \in C[0,1]$ tal que $0 \leq f_n \leq \mathbf{1}$ com $f_n(0) = 0$ e $f_n(\frac{1}{n}) = 1$. Veja que

$$1 = \left|f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) - f_n(0)\right| \leq s_n$$

para todo n. Isso implica que $s \notin c_0$, uma contradição. Portanto T não é ordem limitado, e como todo operador regular é ordem limitado, T não é regular.

Dados E e F reticulados de Banach com F Dedekind completo, o subespaço $\mathcal{L}_r(E;F)$ nem sempre é fechado em $(\mathcal{L}(E;F), \|\cdot\|)$, isto é, podem existir sequências de operadores regulares (contínuos) que convergem para operadores que não são regulares. Um exemplo de um espaço onde existe uma sequência desse tipo pode ser encontrado em [10, página 459]. Sendo assim, faz sentido buscar uma norma reticulada em $\mathcal{L}_r(E;F)$ que o torne um espaço de Banach.

Sejam E e F reticulados de Banach. Para todo operador linear regular $T\colon E \longrightarrow F$ que tem módulo definimos sua *norma regular* ou r-norma por

$$\|T\|_r := \||T|\| = \sup\{\||T|(x)\|\colon x \in B_E\}.$$

O teorema a seguir mostra que a norma regular faz o que dela se espera.

Teorema 3.2.4. *Sejam E e F reticulados de Banach. Se F é Dedekind completo, então $(\mathcal{L}_r(E;F), \|\cdot\|_r)$ é um espaço de Riesz normado. E também,*

$$\|T\| \leq \|T\|_r. \tag{3.5}$$

Demonstração. Como $T(x) \leq |T|(x)$ para cada $x \in E^+$, então pelo Teorema 3.2.1 e pelo fato da norma de F ser reticulada,

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|\colon x \in {B_E}^+\} \leq \sup\{\||T|(x)\|\colon x \in {B_E}^+\} = \||T|\| = \|T\|_r.$$

Também pelo Teorema 3.2.1 sabemos que $\mathcal{L}_r(E;F)$ é igual a $L_r(E;F)$, o qual é um espaço de Riesz Dedekind completo pelo Corolário 3.1.13, ou seja, $\mathcal{L}_r(E;F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo. Mostremos que a função

$$\|\cdot\|_r\colon \mathcal{L}_r(E;F) \longrightarrow \mathbb{R}^+,\, T \longmapsto \|T\|_r,$$

é uma norma em $\mathcal{L}_r(E;F)$. Observando que para cada $T \in \mathcal{L}_r(E;F)$ o operador $|T|$ é contínuo, pois $\mathcal{L}_r(E;F)$ é espaço de Riesz, vemos que $\|\cdot\|_r$ está bem definida. Também,

$$\|T\|_r = 0 \Longrightarrow \||T|\| = 0 \Longrightarrow |T| = T^+ + T^- = 0.$$

Logo $T^+ = 0$ e $T^- = 0$, o que implica $T = T^+ - T^- = 0$.

Para $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_r(E;F)$,

$$\|T_1 + T_2\|_r = \||T_1 + T_2|\| \leq \||T_1| + |T_2|\| \leq \||T_1|\| + \||T_2|\| = \|T_1\|_r + \|T_2\|_r.$$

Agora, se $T \in \mathcal{L}_r(E;F)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\|\alpha T\|_r = \||\alpha T|\| = \||\alpha| \cdot |T|\| = |\alpha| \cdot \||T|\| = |\alpha| \cdot \|T\|_r.$$

Portanto, $\|\cdot\|_r$ é uma norma em $\mathcal{L}_r(E;F)$.

Resta mostrar que $\|\cdot\|_r$ é norma reticulada. Para ver isso, sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_r(E;F)$ tais que $|T_1| \leq |T_2|$. Novamente do Teorema 3.2.1,

$$\begin{aligned}\|T_1\|_r = \||T_1|\| &= \sup\{\||T_1(x)|\|\colon x \in {B_E}^+\}\\ &\leq \sup\{\||T_2(x)|\|\colon x \in {B_E}^+\} = \||T_2|\| = \|T_2\|_r.\end{aligned}$$

□

Veremos a seguir um exemplo que mostra que a desigualdade (3.5) pode ser estrita.

Exemplo 3.2.5. Lembremos que $\mathbb{R}^2$ é um reticulado de Banach quando ordenado com a ordem coordenada a coordenada e munido da norma euclidiana (Exemplo 2.2.3). Consideremos $\mathbb{R}^2$ com a base canônica e também o operador linear

$$T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ,\ T(x,y) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(x+y, x-y)\,.$$

De

$$T(x,y) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(x+y, x) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(0,y)\,,$$

segue imediatamente que T é regular. Pelo Teorema 3.2.4 existe $|T|$. Por um lado,

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\left\{\sqrt{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}\colon x^2+y^2 \le 1\right\}\\ &= \sup\{\sqrt{x^2+y^2}\colon x^2+y^2\le 1\} = 1.\end{aligned}$$

E por outro lado, pelo Teorema de F. Riesz-Kantorovich,

$$\begin{aligned}|T|(1,0) &= \sup\left\{\tfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y,x-y)\colon (|x|,|y|)\le(1,0)\right\} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\\ |T|(0,1) &= \sup\left\{\tfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y,x-y)\colon (|x|,|y|)\le(0,1)\right\} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1).\end{aligned}$$

Sendo assim, $|T|\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é dado por

$$|T|(x,y) = |T|(x,0) + |T|(0,y) = x\cdot|T|(1,0) + y\cdot|T|(0,1) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(x+y,x+y)\,.$$

Então

$$\|T\|_r = \||T|\| \ge \left\||T|\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\| = \|(1,1)\| = \sqrt{2} > 1 = \|T\|,$$

como queríamos mostrar.

Para uma discussão sobre quando a igualdade $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{L}_r(E;F)$ ocorre ou não ocorre, e ainda quando a r-norma coincide com a norma usual de operadores, veja [29, 30].

Precisamos dos dois lemas a seguir para demonstrar o resultado principal desta seção.

Lema 3.2.6. *Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência que converge para x no espaço normado E. Então, para todo $n\in\mathbb{N}$, a série $\sum\limits_{i=n}^\infty (x_{i+1}-x_i)$ converge para $x-x_n$ em E.*

Demonstração. Para $n\le k\in\mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=n}^k (x_{i+1}-x_i) &= (x_{n+1}-x_n) + (x_{n+2}-x_{n+1}) + \cdots + (x_k - x_{k-1}) + (x_{k+1}-x_k)\\ &= x_{k+1}-x_n.\end{aligned}$$

Assim, dado $n\in\mathbb{N}$, temos que a sequência das somas parciais $\left(\sum\limits_{i=n}^k (x_{i+1}-x_i)\right)_{k=n}^\infty$ é a sequência $(x_{k+1}-x_n)_{k=n}^\infty$, a qual converge para $x-x_n$ quando $k\longrightarrow\infty$. $\square$

Lema 3.2.7. *Sejam* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *e* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *sequências em um espaço de Riesz normado* E *tais que* $0 \leq x_n$ *e* $y_n \leq x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se as séries* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *convergem para* x *e* y *em* E, *respectivamente, então* $y \leq x$.

Demonstração. Para $k \in \mathbb{N}$, façamos $s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} x_n$ e $r_k = \sum\limits_{n=1}^{k} y_n$. Temos

$$0 \leq x_{k+1} \Longrightarrow s_k \leq x_{k+1} + s_k = s_{k+1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Com isso, a sequência das somas parciais $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ no conjunto fechado E^+ (Teorema 2.2.11(ii)) é crescente e converge para x em E^+. Pelo Teorema 2.2.11(iii), $x = \sup\{s_j \colon j \in \mathbb{N}\} \in E^+$. Agora, como $0 \leq (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \cdots + (x_k - y_k)$, temos

$$r_k \leq s_k \leq x$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $(x - r_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de elementos de E^+ que converge para $x - y$, pois a sequência das somas parciais $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ converge para y em E. Como E^+ é um conjunto fechado, segue que $x - y \in E^+$, ou seja, $y \leq x$. □

Chegamos no nosso principal resultado desta seção.

Teorema 3.2.8. *Sejam* E *e* F *reticulados de Banach com* F *Dedekind completo. Então o espaço* $\mathcal{L}_r(E; F)$ *dos operadores regulares contínuos munido com a* r*-norma é um reticulado de Banach.*

Demonstração. Já sabemos que $(\mathcal{L}_r(E; F), \|\cdot\|_r)$ é um espaço de Riesz normado, faltando mostrar que é completo. Para isso, seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}_r(E; F)$ com a r-norma. Então, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $j(n) \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_m - T_k\|_r < 2^{-n}$ para todos $m, k \geq j(n)$. Em particular, $\|T_m - T_{j(n)}\|_r < 2^{-n}$ para todo $m \geq j(n)$. Seja $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathbb{N}$ dada por: $k_1 = j(1)$, e para $n \geq 2$ seja

$$k_n = \begin{cases} j(n) & \text{se } \ k_{n-1} < j(n), \\ k_{n-1} + 1 & \text{se } \ k_{n-1} \geq j(n). \end{cases}$$

Então $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência crescente em $\mathbb{N}$ que satisfaz

$$\|T_{k_{n+1}} - T_{k_n}\|_r = \||T_{k_{n+1}} - T_{k_n}|\| < 2^{-n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Desse modo, $(T_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E; F)$ pois $\|T_{k_{n+1}} - T_{k_n}\| \leq \|T_{k_{n+1}} - T_{k_n}\|_r$. Como F é espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E; F)$ é também espaço de Banach (Teorema 1.1.6), e portanto existe $T \in \mathcal{L}(E; F)$ tal que $\|T - T_{k_n}\| \longrightarrow 0$.

Fixemos $x \in E^+$. Como $\||T_{k_{n+1}} - T_{k_n}|\| < 2^{-k_n}$, então a série $\sum\limits_{i=n}^{\infty} |T_{k_{i+1}} - T_{k_i}|(x)$ é absolutamente convergente, logo converge no espaço de Banach F (Proposição 1.1.5). Seja $y \in E$ tal que $|y| \leq x$. Pelo Teorema de F. Riesz-Kantorovich,

$$(T_{k_{i+1}} - T_{k_i})(y) \leq |T_{k_{i+1}} - T_{k_i}|(x).$$

Aplicando primeiro o Lema 3.2.6 e em seguida o Lema 3.2.7 segue que

$$(T - T_{k_n})(y) = \sum_{i=n}^{\infty} (T_{k_{i+1}} - T_{k_i})(y) \leq \sum_{i=n}^{\infty} |T_{k_{i+1}} - T_{k_i}|(x)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então o conjunto $\{(T - T_{k_n})(y) \colon |y| \leq x\}$ é limitado superiormente no espaço Dedekind completo F, de modo que seu supremo existe em F. Segue do Teorema 3.1.11 que o módulo de $T - T_{k_n}$ existe em $L(E; F)$ e

$$|T - T_{k_n}|(x) = \sup\{(T - T_{k_n})(y) \colon |y| \leq x\} \leq \sum_{i=n}^{\infty} |T_{k_{i+1}} - T_{k_i}|(x) \tag{3.6}$$

para todos $x \in E^+$ e $n \in \mathbb{N}$.

Vejamos que T é operador regular. Pelo Teorema 3.1.3 o operador positivo $|T - T_{k_n}|$ é ordem limitado para cada $n \in \mathbb{N}$, isto é, $|T - T_{k_n}| \in L_b(E; F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, de $T = (T - T_{k_1}) + T_{k_1}$ concluímos que T é um operador ordem limitado, logo operador regular pelo Corolário 3.1.13.

Agora, de (3.6) segue que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|T - T_{k_n}\|_r &= \sup\{\||T - T_{k_n}|(x)\| \colon x \in {B_E}^+\} \\
&\leq \sup\left\{\left\|\sum_{i=n}^{\infty} |T_{k_{i+1}} - T_{k_i}|(x)\right\| : x \in {B_E}^+\right\} \\
&\leq \sup\left\{\sum_{i=n}^{\infty} \||T_{k_{i+1}} - T_{k_i}|(x)\| \colon x \in {B_E}^+\right\} \\
&\leq \sum_{i=n}^{\infty} \|T_{k_{i+1}} - T_{k_i}\|_r \leq 2^{1-n}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|T - T_{k_n}\|_r \longrightarrow 0$, e logo a sequência de Cauchy $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para T em $\mathcal{L}_r(E; F)$ com a r-norma pois contém uma subsequência convergindo para T com a r-norma. Concluímos que $\mathcal{L}_r(E; F)$ munido com a r-norma é um reticulado de Banach. $\square$

No Exemplo 3.2.3 vimos que existe operador contínuo que não é regular. Nosso próximo resultado, devido a Garrett Birkhoff, mostra que todo funcional linear contínuo em um reticulado de Banach é regular.

Relembremos que quando E é um espaço normado escrevemos $E' \coloneqq \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ e chamamos este espaço de *dual topológico* de E. Dado um funcional linear $x' \in E'$, introduzimos a notação

$$\langle x', x \rangle \coloneqq x'(x).$$

Para um espaço de Riesz E escrevemos $E^{\sim} \coloneqq L_r(E; \mathbb{R})$ e chamamos este espaço de *ordem dual* de E.

Teorema 3.2.9. *Se E é reticulado de Banach, então o dual topológico E' munido com a norma usual de operadores é um reticulado de Banach. Além disso, $E' = E^{\sim}$.*

Demonstração. Primeiro, mostremos que todo funcional em E' é regular. Pelo Corolário 3.1.13 basta mostrar que cada funcional é ordem limitado. Fixemos um funcional $x' \in E'$. Temos $|\langle x', x \rangle| \leq \|x'\| \cdot \|x\|$ para todo $x \in E$. Então $r \leq x \leq s \in E$ implica

$$\langle x', x \rangle \leq |\langle x', x \rangle| \leq \|x'\| \cdot \|x\| = \|x'\| \cdot \||x|\| \leq \|x'\| \cdot \|s \vee (-r)\|, \tag{3.7}$$

onde a igualdade segue da Proposição 2.2.2 e a última desigualdade vale porque E é espaço de Riesz normado. Substituindo x por $-x$ em (3.7) temos $\langle x', -x\rangle \leq \|x'\| \cdot \|s \vee (-r)\|$, logo

$$-\|x'\| \cdot \|s \vee (-r)\| \leq \langle x', x\rangle.$$

Isso mostra que x' é ordem limitado, e assim, $E' \subset E^{\sim}$. Como todo funcional regular é contínuo quando E é reticulado de Banach (Teorema 3.2.1), então $E^{\sim} \subset E'$. Portanto, $E' = E^{\sim}$.

Pelo Teorema 1.1.6, E' é espaço de Banach com a norma usual de operadores, então resta mostrar que $\|\cdot\|$ é norma reticulada. Sejam $x', y' \in E'$ com $|x'| \leq |y'|$. Para cada $x \in E$ temos

$$\begin{aligned}|x'(x)| &\leq \sup\{|x'(y)| \colon |y| \leq |x|\} = |x'|(|x|) \\ &\leq |y'|(|x|) = \sup\{|y'(y)| \colon |y| \leq |x|\} \leq \|y'\| \cdot \|x\|,\end{aligned}$$

onde as igualdades seguem do Teorema de F. Riesz-Kantorovich, e a última desigualdade do Teorema 1.1.6 e por E ser espaço de Riesz normado. Logo, quando $x \in B_E$, temos $|x'(x)| \leq \|y'\|$. Dessa forma $\|x'\| \leq \|y'\|$. Sendo assim, E' é um espaço de Riesz normado, concluindo que E' é um reticulado de Banach. □

Como $\mathbb{R}$ é Dedekind completo, notemos que se E é reticulado de Banach, então o Teorema 3.2.8 garante que o dual topológico E' é um reticulado de Banach com a r-norma. Pelo Corolário 3.2.2 temos que o operador identidade $I \colon (E', \|\cdot\|) \longrightarrow (E', \|\cdot\|_r)$ é um isomorfismo topológico, ou seja, a norma regular é equivalente à norma usual de operadores. Em geral, basta que E seja espaço de Riesz normado para que o dual topológico E' seja um reticulado de Banach (veja [3, Theorem 4.1]).

3.3 Homomorfismos de Riesz

Nesta seção estudamos a classe dos operadores lineares entre espaços de Riesz que preservam as operações de reticulado, chamados de homomorfismos de Riesz.

Definição 3.3.1. Um *homomorfismo de Riesz* é um operador linear $T \colon E \longrightarrow F$ entre espaços de Riesz tal que

$$T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$$

para todos $x, y \in E$.

Exemplos serão vistos ao longo da seção, mas antes vejamos algumas propriedades e caracterizações dos homomorfismos de Riesz.

Proposição 3.3.2. *Todo homomorfismo de Riesz é um operador positivo.*

Demonstração. Seja $T \colon E \longrightarrow F$ um homomorfismo de Riesz. Então cada $x \in E^+$ tem imagem

$$T(x) = T(x \vee 0) = T(x) \vee T(0) = T(x) \vee 0 = (Tx)^+ \geq 0$$

em F, ou seja, T é um operador positivo. □

A seguir temos propriedades equivalentes que caracterizam um homomorfismo de Riesz.

Proposição 3.3.3. *Seja $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear entre espaços de Riesz. São equivalentes:*

(i) T é um homomorfismo de Riesz.

(ii) $T(x^+) = (Tx)^+$ para todo $x \in E$.

(iii) $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$ para todos $x, y \in E$.

(iv) $T(x) \wedge T(y) = 0$ em F sempre que $x \wedge y = 0$ em E.

(v) $T(|x|) = |T(x)|$ para todo $x \in E$.

Demonstração. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Por hipótese, T é homomorfismo de Riesz, logo

$$T(x^+) = T(x \vee 0) = T(x) \vee 0 = (Tx)^+$$

para todo $x \in E$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Para todos $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} T(x \wedge y) &= T(x - (x-y)^+) = T(x) - T((x-y)^+) \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} T(x) - (Tx - Ty)^+ = T(x) \wedge T(y), \end{aligned}$$

onde a primeira e última igualdades vêm do Teorema 2.1.4(vi).

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Se $x \wedge y = 0$, então $0 = T(x \wedge y) \overset{\text{(iii)}}{=} T(x) \wedge T(y)$.

(iv) $\Longrightarrow$ (v) Para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned} |T(x)| &= |T(x^+) - T(x^-)| = T(x^+) \vee T(x^-) - T(x^+) \wedge T(x^-) \\ &= T(x^+) \vee T(x^-) - 0 = T(x^+) + T(x^-) = T(x^+ + x^-) \\ &= T(|x|), \end{aligned}$$

onde a segunda e a quarta igualdades seguem dos itens (ix) e (i) do Teorema 2.1.4, respectivamente, e a terceira de (iv) e do item (vi) do Teorema 2.1.4.

(v) $\Longrightarrow$ (i) Do Corolário 2.1.5 segue que

$$\begin{aligned} T(x \vee y) &= T(\tfrac{1}{2}(x + y + |x-y|)) = \tfrac{1}{2}(T(x) + T(y) + T(|x-y|)) \\ &= \tfrac{1}{2}(T(x) + T(y) + |T(x) - T(y)|) = T(x) \vee T(y), \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade vem da hipótese. □

Os exemplos a seguir ilustram o conceito de homomorfismo de Riesz e evidenciam a utilidade das caracterizaçõe acima.

Exemplo 3.3.4. (a) Vejamos um exemplo que mostra que a recíproca da Proposição 3.3.2 não é verdadeira. Para isso considere

$$T\colon C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ T(f) = \int_0^1 f(t)dt.$$

As propriedades da integral de Riemann garantem que T está bem definido, é linear e positivo. Tomando a função $f(x) = x - \frac{1}{2}$, temos

$$T(f^+) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt = \frac{1}{8} \neq 0 = \int_{0}^{1} f(t)dt = (Tf)^+.$$

A Proposição 3.3.3(ii) garante que T não é um homomorfismo de Riesz.

(b) Relembremos que o espaço das funções reais contínuas em um espaço topológico compacto de Hausdorff é um espaço de Riesz com a ordem pontual (Exemplo 2.1.14(b)). Sejam K_1 e K_2 espaços métricos compactos de Hausdorff. Fixamos uma função contínua $\phi\colon K_2 \longrightarrow K_1$ e uma função $g \in C(K_2)^+$ e definimos

$$T\colon C(K_1) \longrightarrow C(K_2)\ ,\ T(f) = g \cdot (f \circ \phi).$$

Como a composta de funções contínuas é contínua e o produto de funções contínuas a valores reais é contínua, segue que T está bem definido. Para todas $f_1, f_2 \in C(K_1)$, todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e cada $x \in K_2$, temos

$$\begin{aligned} T(f_1 + \lambda f_2)(x) &= g(x) \cdot (f_1 + \lambda f_2)(\phi(x)) \\ &= g(x) \cdot f_1(\phi(x)) + g(x) \cdot \lambda f_2(\phi(x)) \\ &= T(f_1)(x) + \lambda T(f_2)(x) \\ &= [T(f_1) + \lambda T(f_2)](x). \end{aligned}$$

Isso prova a linearidade de T. É imediato que T é um operador positivo. Agora, para cada $f \in C(K_1)$ e cada $x \in K_2$ temos

$$T(|f|)(x) = g(x) \cdot |f|(\phi(x)) = g(x) \cdot |f(\phi(x))| = |g(x) \cdot f(\phi(x))| = |T(f)(x)|,$$

onde a terceira igualdade segue da positividade da função g. Isso prova que $T(|f|) = |T(f)|$, e portanto T é um homomorfismo de Riesz pela Proposição 3.3.3(v).

(c) Para $1 \leq p \leq \infty$, consideremos o espaço de Riesz $L_p(\Omega)$ como no Exemplo 2.2.3(d). Para cada função $h \in L_\infty(\Omega)^+$ fixada, definimos

$$T_h\colon L_p(\Omega) \longrightarrow L_p(\Omega)\ ,\ T_h(f) = h \cdot f.$$

Para a boa definição de T_h, note que, para toda $f \in L_p(\Omega)$, $\|h\|_\infty^p \cdot |f|^p$ é integrável e $|h \cdot f|^p \leq \|h\|_\infty^p \cdot |f|^p$. É imediato que T_h é um operador linear positivo. Para cada $f \in L_p(\Omega)$ temos

$$T_h(|f|) = h \cdot |f| = |h \cdot f| = |T_h(f)|,$$

mostrando que T_h é um homomorfismo de Riesz pela Proposição 3.3.3(v).

Consideremos um operador linear $T\colon E \longrightarrow F$ entre espaços vetoriais. Relembremos que o *núcleo de* T é o subespaço vetorial de E definido por

$$ker(T) \coloneqq \{x \in E\colon T(x) = 0\},$$

e a *imagem de* T é o subespaço vetorial de F definido por

$$R(T) \coloneqq \{T(x) : x \in E\}.$$

Veremos adiante que a imagem e o núcleo de um homomorfismo de Riesz são subespaços de Riesz do contradomínio e do domínio, respectivamente. Mas antes, vejamos que o núcleo ou a imagem de um operador regular entre espaços de Riesz podem não ser subespaços de Riesz.

Exemplo 3.3.5. (a) Novamente, consideremos o operador linear positivo

$$T\colon C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ T(f) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Notemos que $f(x) = x - \frac{1}{2}$ e $g(x) = -x + \frac{1}{2}$ são vetores do subespaço vetorial $ker(T)$. Entretanto, $f \vee g \in C[0,1]$ é a função $(f \vee g)(x) = |x - \frac{1}{2}|$, que claramente tem integral maior do que zero. De modo que $f \vee g \notin ker(T)$, e portanto, $ker(T)$ não é subespaço de Riesz de $C[0,1]$.

(b) Tomemos $S\colon C[-1,1] \longrightarrow C[-1,1]$ definido por

$$S(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

As propriedades da integral de Riemann garantem que S está bem definido e é um operador linear positivo. Para cada $f \in C[-1,1]$, $S(f)$ é uma função diferenciável em $[-1,1]$ pelo Teorema Fundamental do Cálculo (veja, por exemplo, [19, cap. IX, Teorema 8]). Em outras palavras, todas as funções da imagem de S são diferenciáveis. Tomando f como sendo a função constante igual a 1 e g como a função constante igual a -1, temos $S(f)(x) = x$ e $S(g)(x) = -x$ para todo $x \in [-1,1]$. Segue que $S(f) \vee S(g)$ é a função módulo, que não é diferenciável em $x = 0$. Isso mostra que $S(f) \vee S(g) \notin R(S)$, e então a imagem de S não é subespaço de Riesz de $C[-1,1]$.

Veremos a seguir mais um resultado que é útil para identificar quando um operador linear entre espaços de Riesz não é um homomorfismo de Riesz.

Teorema 3.3.6. *Seja $T\colon E \longrightarrow F$ um homomorfismo de Riesz. Então seu núcleo $ker(T)$ e sua imagem $R(T)$ são subespaços de Riesz de E e F, respectivamente.*

Demonstração. Se $x, y \in ker(T)$, então $T(x) = T(y) = 0$. Segue que

$$T(x \vee y) = T(x) \vee T(y) = 0$$

pois T é homomorfismo de Riesz, provando que $x \vee y \in ker(T)$. Está provado que $ker(T)$ é subespaço de Riesz de E.

Agora, se $u, v \in R(T)$, então existem $x, y \in$ tais que $T(x) = u$ e $T(y) = v$. Como T é homomorfismo de Riesz,

$$u \vee v = T(x) \vee T(y) = T(x \vee y) \in R(T),$$

provando que $R(T)$ é subespaço de Riesz de F. □

O teorema acima mostra, em particular, que os operadores T e S do Exemplo 3.3.5 não são homomorfismos de Riesz.

Um subconjunto A de um espaço de Riesz é denominado *sólido* sempre que

$$|x| \leq |y| \ \text{ e } \ y \in A \ \text{ implica } \ x \in A.$$

Um subespaço vetorial sólido de um espaço de Riesz é chamado de *ideal*.

Proposição 3.3.7. *Todo ideal de um espaço de Riesz é subespaço de Riesz.*

Demonstração. Se x é vetor de um ideal, então $|x| \leq |x|$ implica que todo ideal contém o módulo dos seus vetores. Assim, o resultado segue da identidade $x \vee y = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ para todos x e y no ideal. $\square$

O seguinte resultado garante que um homomorfismo de Riesz leva ideal em ideal somente quando sua imagem é um ideal.

Teorema 3.3.8. *Seja $T\colon E \longrightarrow F$ um homomorfismo de Riesz. Então $T(E)$ é um ideal em F se, e somente se, $T(A)$ é sólido em F sempre que A é sólido em E.*

Demonstração. Suponhamos que $T(E)$ seja um ideal em F. Seja $A \subset E$ sólido e fixemos $x \in A$. Se $y \in F$ é tal que $|y| \leq |T(x)|$, então $y \in T(E)$ pois $T(E)$ é ideal em F. Logo existe $z \in E$ tal que $T(z) = y$. Chamemos $w = z^+ \wedge |x| - z^- \wedge |x|$ e notemos que

$$
\begin{aligned}
-z^- \wedge |x| \leq 0 &\Longrightarrow w \leq z^+ \wedge |x| \leq |x|, \\
-z^+ \wedge |x| \leq 0 &\Longrightarrow -w \leq z^- \wedge |x| \leq |x|.
\end{aligned}
$$

Disso segue que $|w| \leq |x|$. Uma vez que A é sólido e $x \in A$, então $w \in A$. Como T é homomorfismo de Riesz, dos itens (ii), (iii) e (v) da Proposição 3.3.3 e do fato de que $y^+ + y^- = |y| \leq |T(x)|$, temos

$$
\begin{aligned}
T(w) &= T(z^+ \wedge |x| - z^- \wedge |x|) \\
&= (Tz)^+ \wedge T(|x|) - (Tz)^- \wedge T(|x|) \\
&= y^+ \wedge |T(x)| - y^- \wedge |T(x)| \\
&= y^+ - y^- = y.
\end{aligned}
$$

Portanto, $y = T(w) \in T(A)$ mostrando que $T(A)$ é sólido. Para a recíproca basta notar que E é sólido e $T(E)$ é subespaço vetorial de F. $\square$

Lembremos que se E é um espaço de Riesz, então o espaço ordem dual $E^\sim = L_r(E;\mathbb{R})$ é um espaço de Riesz Dedekind completo pelo Corolário 3.1.13, e portanto é também σ-Dedekind completo. Tomando o ordem dual de $E^\sim$, chamamos de *segundo ordem dual* o espaço de Riesz Dedekind completo $E^{\sim\sim} := (E^\sim)^\sim$.

Veremos agora um homomorfismo de Riesz muito importante na teoria. De forma análoga ao que é feito no caso de espaços normados, dado um espaço de Riesz E, o operador linear

$$J_E\colon E \longrightarrow E^{\sim\sim} \ , \ \langle J_E(x), x' \rangle = \langle x', x \rangle = x'(x),$$

é chamado de *mergulho canônico.* A boa definição e a linearidade de J_E são imediatas. E também J_E é positivo: para cada $x \in E^+$ temos $0 \leq \langle J_E(x), x' \rangle$ sempre que x' é positivo; portanto $J_E(x) \in E^{\sim\sim}$ é positivo quando $x \in E^+$.

Apesar do nome e ao contrário do caso de espaços normados, J_E nem sempre é injetor. Veremos a seguir que J_E é mais que um operador positivo e quando ele é injetor.

Teorema 3.3.9. *Seja E um espaço de Riesz.*
(a) *O mergulho canônico $J_E\colon E \longrightarrow E^{\sim\sim}$ é um homomorfismo de Riesz.*
(b) *Se $E^\sim$ separa pontos de E, isto é, para todos $x, y \in E, x \neq y$, existe $\varphi \in E^\sim$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, então J_E é injetor.*

Demonstração. (a) Seja $x \in E$ e seja $x' \in E^\sim$ positivo. Temos

$$\begin{aligned}\langle (J_E(x))^+, x'\rangle &= \sup\{\langle J_E(x), y'\rangle \colon y' \in E^\sim \ \text{ e } \ 0 \le y' \le x'\}\\ &= \sup\{\langle y', x\rangle \colon y' \in E^\sim \ \text{ e } \ 0 \le y' \le x'\}\\ &= \langle x', x^+\rangle = \langle J_E(x^+), x'\rangle,\end{aligned}$$

onde a primeira igualdade vem do Corolário 3.1.13 e a terceira vem do Teorema 3.1.16. Segue que $(J_E(x))^+ = J_E(x^+)$, e portanto o mergulho canônico J_E é um homomorfismo de Riesz pela Proposição 3.3.3(ii).

(b) Suponha que $E^\sim$ separe pontos de E. Temos:

$$\begin{aligned}x, y \in E, x \neq y &\Longrightarrow \ \text{existe } \varphi \in E^\sim \text{ tal que } \varphi(x) \neq \varphi(y)\\ &\Longrightarrow J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) \neq \varphi(y) = J_E(y)(\varphi)\\ &\Longrightarrow J_E(x) \neq J_E(y).\end{aligned}$$

Isso prova que J_E é injetor. $\square$

Para informação do leitor mencionamos que o mergulho canônico nem sempre preserva supremos e ínfimos de conjuntos infinitos (veja [3, Exercício 10 do Capítulo 1]).

Um *isomorfismo de Riesz* é um homomorfismo de Riesz que é bijetor. Dizemos que dois espaços de Riesz E e F são *Riesz isomorfos* se existe um isomorfismo de Riesz de E sobre F. Nesse caso, no sentido de espaços de Riesz podemos considerar E e F como sendo idênticos.

Vejamos que os isomorfismos de Riesz são exatamente os operadores lineares positivos com inverso positivo.

Teorema 3.3.10. *Seja $T \colon E \longrightarrow F$ um operador linear bijetor entre espaços de Riesz. Então T é um isomorfismo de Riesz se, e somente se, T e T^{-1} são positivos.*

Demonstração. Se T é isomorfismo de Riesz, então T é operador positivo, pois os homomorfismos de Riesz são positivos pela Proposição 3.3.2. Vejamos que T^{-1} também é operador positivo. De fato, se $u \in F^+$, então existe $x \in E$ tal que $T(x) = u$ pois T é sobrejetor. Daí,

$$T(x \vee 0) = T(x) \vee T(0) = u \vee 0 = u$$

pois T é homomorfismo de Riesz. E como T é injetor,

$$T(x) = u = T(x \vee 0) \Longrightarrow x = x \vee 0,$$

o que nos permite concluir que $x \in E^+$. Assim, T^{-1} é operador positivo pois $T^{-1}(u) \in E^+$ para todo $u \in F^+$.

Reciprocamente, suponhamos que T e T^{-1} sejam positivos. Sejam $x, y \in E$. De $x \le x \vee y$ e $y \le x \vee y$ segue que

$$T(x) \le T(x \vee y) \ \text{ e } \ T(y) \le T(x \vee y),$$

pois T é positivo. Consequentemente,

$$T(x) \vee T(y) \le T(x \vee y).$$

Analogamente, como T^{-1} também é positivo, para todos $u, v \in F$ temos

$$T^{-1}(u) \vee T^{-1}(v) \leq T^{-1}(u \vee v).$$

Dessa forma, se $T(x) = u$ e $T(y) = v$, então

$$x \vee y = T^{-1}(u) \vee T^{-1}(v) \leq T^{-1}(u \vee v) = T^{-1}(T(x) \vee T(y)).$$

E como T é positivo, $T(x \vee y) \leq T(x) \vee T(y)$. Com isso, concluímos que $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ vale para todos $x, y \in E$, ou seja, T é um homomorfismo de Riesz. $\square$

No exemplo a seguir apresentamos uma aplicação do teorema que acabamos de provar.

Exemplo 3.3.11. No Exemplo 3.1.19 vimos que o espaço vetorial das matrizes reais $M_{m\times n}$ é um espaço de Riesz mostrando que o operador linear bijetor $\Phi\colon M_{m\times n} \longrightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, dado por $\Phi(A) = T_A$, é um isomorfismo entre espaços vetoriais ordenados. Então

$$0 \leq A \quad \text{em} \quad M_{m\times n} \Longleftrightarrow 0 = \Phi(0) \leq \Phi(A) \quad \text{em} \quad L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m).$$

Logo Φ e Φ^{-1} são operadores lineares positivos. Do Teorema 3.3.10 temos que Φ é um isomorfismo de Riesz. Em particular, pelo Teorema 3.3.3(v),

$$T_{|A|} = \Phi(|A|) = |\Phi(A)| = |T_A|.$$

Portanto, pelo Teorema F. Riesz-Kantorovich, se $A = (a_{ij})_{m\times n}$, então

$$\begin{aligned}
T_{|A|}(x_1, \ldots, x_n) &= \begin{pmatrix} |a_{11}| & \ldots & |a_{1n}| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |a_{m1}| & \ldots & |a_{mn}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{1j}| x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{mj}| x_j \end{pmatrix} \\
&= \sup\{|T_A(y_1, \ldots, y_n)| \colon |y_i| \leq x_i, \quad 1 \leq i \leq n\}.
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Operadores multilineares regulares

Neste capítulo veremos que alguns resultados sobre operadores lineares regulares entre espaços de Riesz podem ser generalizados para o caso multilinear. Faremos um desenvolvimento semelhante ao feito no caso linear. Usamos [21] como referência base para este capítulo. Dito isso, nosso propósito agora é:

• Introduzir uma ordem no conjunto dos operadores multilineares regulares entre espaços de Riesz de forma a torná-lo um espaço de Riesz.

• Introduzir uma norma no espaço de Riesz dos operadores multilineares regulares entre reticulados de Banach de forma a torná-lo um reticulado de Banach.

Como no capítulo anterior, neste capítulo todos os espaços de Riesz são arquimedianos.

Para começar, devemos estabelecer uma ordem parcial no produto cartesiano $E_1 \times \cdots \times E_n$, onde $E_1, \ldots, E_n$ são espaços de Riesz. Dados $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, é de se esperar que a primeira ideia de ordem parcial que surge é a ordem pontual:

$$(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n) \iff x_i \leq y_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Como caso particular do Exemplo 2.1.3(f) sabemos que essa relação é uma ordem parcial que faz com que $E_1 \times \cdots \times E_n$ seja um espaço de Riesz. Suas operações de reticulado satisfazem

$$\begin{aligned}
(x_1, \ldots, x_n) \vee (y_1, \ldots, y_n) &= (x_1 \vee y_1, \ldots, x_n \vee y_n), \\
(x_1, \ldots, x_n) \wedge (y_1, \ldots, y_n) &= (x_1 \wedge y_1, \ldots, x_n \wedge y_n), \\
|(x_1, \ldots, x_n)| &= (|x_1|, \ldots, |x_n|).
\end{aligned}$$

É fácil ver que se E_i é Dedekind completo para todo $1 \leq i \leq n$, então $E_1 \times \cdots \times E_n$ é também Dedekind completo (basta raciocinar como no Exemplo 2.1.17). Sempre consideramos $E_1 \times \cdots \times E_n$ munido dessa ordem parcial, salvo menção explícita em contrário.

4.1 Espaço dos operadores multilineares regulares

Começamos definindo operadores multilineares positivos e regulares.

Definição 4.1.1. Seja $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ um operador n-linear entre espaços vetoriais ordenados. Dizemos que A é:

(i) *Positivo* se $A(x_1, \dots, x_n) \in F^+$ sempre que $x_i \in {E_i}^+$ para todo $1 \leq i \leq n$, e denotamos isso por $A \geq 0$. Escrevemos $L(E_1, \dots, E_n; F)^+$ para simbolizar o conjunto de todos os operadores multilineares positivos em $L(E_1, \dots, E_n; F)$.

(ii) *Regular* se A é a diferença de dois operadores n-lineares positivos. O subespaço vetorial dos operadores multilineares regulares de $L(E_1, \dots, E_n; F)$ é denotado por $L_r(E_1, \dots, E_n; F)$.

Um resultado muito importante que vimos para o caso linear foi o Teorema de Kantorovich, o qual garante que um operador positivo é unicamente determinado pelo cone positivo do seu domínio. Nosso primeiro resultado para operadores multilineares entre espaços de Riesz generaliza esse teorema. Mas antes apresentamos um exemplo para auxiliar no entendimento do leitor.

Exemplo 4.1.2. Sejam E_1, E_2 e F espaços de Riesz e seja $A\colon E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ um operador bilinear (2-linear). Então, para todos $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$,

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2) &= A({x_1}^+ - {x_1}^-, {x_2}^+ - {x_2}^-) \\ &= A({x_1}^+, {x_2}^+ - {x_2}^-) - A({x_1}^-, {x_2}^+ - {x_2}^-) \\ &= A({x_1}^+, {x_2}^+) - A({x_1}^+, {x_2}^-) - A({x_1}^-, {x_2}^+) + A({x_1}^-, {x_2}^-). \end{aligned}$$

Com essa igualdade já é possível perceber que o operador A é determinado pelo cone positivo do seu domínio $E_1 \times E_2$. Agora, se para cada $x_i = {x_i}^+ - {x_i}^- \in E_i$ escrevermos $x_{i,0} = {x_i}^+$ e $x_{i,1} = {x_i}^-$, então

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2) &= A(x_{1,0}, x_{2,0}) - A(x_{1,0}, x_{2,1}) - A(x_{1,1}, x_{2,0}) + A(x_{1,1}, x_{2,1}) \\ &= (-1)^{0+0} A(x_{1,0}, x_{2,0}) + (-1)^{0+1} A(x_{1,0}, x_{2,1}) \\ &+ (-1)^{1+0} A(x_{1,1}, x_{2,0}) + (-1)^{1+1} A(x_{1,1}, x_{2,1}) \\ &= \sum_{k_1, k_2 \in \{0,1\}} (-1)^{\sum k_i} A(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}). \end{aligned}$$

É usando a notação acima que estendemos a fórmula para o caso multilinear

Teorema 4.1.3 (Teorema multilinear de Kantorovich)**.** *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Riesz e seja $A\colon {E_1}^+ \times \cdots \times {E_n}^+ \longrightarrow F^+$ uma função que é aditiva em cada variável, isto é,*

$$A(x_1, \dots, x_i + x_i', \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + A(x_1, \dots, x_i', \dots, x_n),$$

para todos $x_i, x_i' \in {E_i}^+$ com $1 \leq i \leq n$. Então A pode ser estendida de forma única para um operador n-linear positivo $\overline{A}$ de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F. Mais ainda, a extensão $\overline{A}$ é dada por

$$\overline{A}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \{0,1\}} (-1)^{\sum k_i} A(x_{1,k_1}, \dots, x_{n,k_n}),$$

em que, para cada $x_i = {x_i}^+ - {x_i}^- \in E_i$ escrevemos $x_{i,0} = {x_i}^+$ e $x_{i,1} = {x_i}^-$.

Demonstração. Provaremos o resultado por indução sobre o grau de multilinearidade n. O Teorema de Kantorovich nos garante o caso $n = 1$. Suponhamos agora que o resultado seja válido para n e provemos que vale para $n+1$. Seja $A\colon {E_1}^+ \times \cdots \times {E_{n+1}}^+ \longrightarrow F^+$ uma função aditiva em cada variável. Para cada $x_1 \in {E_1}^+$ definimos

$$A_{x_1}\colon {E_2}^+ \times \cdots \times {E_{n+1}}^+ \longrightarrow F^+ \ , \ A_{x_1}(x_2, \ldots, x_{n+1}) = A(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}).$$

É imediato que A_{x_1} é aditiva em cada variável. Pela hipótese de indução, para cada $x_1 \in {E_1}^+$, a função A_{x_1} pode ser estendida de maneira única para um operador n-linear positivo $\overline{A}_{x_1}$ de $E_2 \times \cdots \times E_{n+1}$ em F dado por

$$\overline{A}_{x_1}(x_2, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{k_2, \ldots, k_{n+1} \in \{0,1\}} (-1)^{\sum k_i} A(x_1, x_{2,k_2}, \ldots, x_{n+1,k_{n+1}}),$$

em que, para cada $x_i = {x_i}^+ - {x_i}^- \in E_i$ escrevemos $x_{i,0} = {x_i}^+$ e $x_{i,1} = {x_i}^-$ (com $2 \leq i \leq n+1$).

Agora, defina $\overline{A}$ de $E_1 \times \cdots \times E_{n+1}$ em F por

$$\overline{A}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \overline{A}_{x_1^+}(x_2, \ldots, x_{n+1}) - \overline{A}_{x_1^-}(x_2, \ldots, x_{n+1}).$$

É claro que $\overline{A}$ coincide com A em ${E_1}^+ \times \cdots \times {E_{n+1}}^+$. Mostremos que $\overline{A}$ é o operador $(n+1)$-linear positivo desejado.

Primeiro, notemos que

$$\begin{aligned}
\overline{A}(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= \overline{A}_{x_1^+}(x_2, \ldots, x_{n+1}) - \overline{A}_{x_1^-}(x_2, \ldots, x_{n+1}) \\
&= \sum_{k_2, \ldots, k_{n+1} \in \{0,1\}} (-1)^{\sum k_i} A({x_1}^+, x_{2,k_2}, \ldots, x_{n+1,k_{n+1}}) \\
&- \sum_{k_2, \ldots, k_{n+1} \in \{0,1\}} (-1)^{\sum k_i} A({x_1}^-, x_{2,k_2}, \ldots, x_{n+1,k_{n+1}}) \\
&= \sum_{k_1, \ldots, k_{n+1} \in \{0,1\}} (-1)^{\sum k_i} A(x_{1,k_1}, \ldots, x_{n+1,k_{n+1}}),
\end{aligned}$$

onde, para cada $x_i = {x_i}^+ - {x_i}^- \in E_i$ escrevemos $x_{i,0} = {x_i}^+$ e $x_{i,1} = {x_i}^-$ (com $1 \leq i \leq n+1$).

Para ver que $\overline{A}$ é operador $(n+1)$-linear, fixemos vetores $x_2 \in E_2, \ldots, x_{n+1} \in E_{n+1}$ e, para cada $k = (k_2, \ldots, k_{n+1})$ com $k_i \in \{0,1\}$ para $2 \leq i \leq n+1$, façamos

$$A_k\colon {E_1}^+ \longrightarrow F^+ \ , \quad A_k(x_1) = A(x_1, x_{2,k_2}, \ldots, x_{n+1,k_{n+1}}),$$

onde escrevemos $x_{i,0} = {x_i}^+$ e $x_{i,1} = {x_i}^-$ para $2 \leq i \leq n+1$. Então cada A_k é uma função aditiva de ${E_1}^+$ em F^+, a qual pode ser estendida, usando o Teorema de Kantorovich, para um único operador linear positivo $\overline{A_k}\colon E_1 \longrightarrow F$ tal que $\overline{A_k}(x_1) = A_k({x_1}^+) - A_k({x_1}^-)$. Sendo assim, como $\overline{A_{x_1^+}}$ e $\overline{A_{x_1^-}}$ são lineares em cada variável $x_2, \ldots, x_{n+1}$ e $\overline{A_k}$ é linear na variável x_1, então da igualdade

$$\overline{A}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{k_1, \ldots, k_{n+1} \in \{0,1\}} (-1)^{\sum k_i} A(x_{1,k_1}, \ldots, x_{n+1,k_{n+1}})$$

segue que $\overline{A}$ é um operador $(n+1)$-linear positivo de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F que estende A.

Por fim, o operador multilinear $\overline{A}$ é único. De fato, se B é um operador $(n+1)$-linear positivo que estende A, então para cada $x_1 \in {E_1}^+$ o operador n-linear

$$B_{x_1}\colon E_2 \times \cdots \times E_{n+1} \longrightarrow F \ , \ B_{x_1}(x_2, \ldots, x_{n+1}) = B(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}),$$

coincide com A_{x_1} em ${E_2}^+ \times \cdots \times {E_{n+1}}^+$ pois B estende A. Logo B_{x_1} coincide com o operador n-linear $\overline{A_{x_1}}$ em $E_2 \times \cdots \times E_{n+1}$, o qual é o único que estende A. Sendo assim, para $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in E_1 \times \cdots \times E_{n+1}$ temos

$$\begin{aligned}
\overline{A}(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= \overline{A_{x_1^+}}(x_2, \ldots, x_{n+1}) - \overline{A_{x_1^-}}(x_2, \ldots, x_{n+1}) \\
&= B_{x_1^+}(x_2, \ldots, x_{n+1}) - B_{x_1^-}(x_2, \ldots, x_{n+1}) \\
&= B({x_1}^+, x_2, \ldots, x_{n+1}) - B({x_1}^-, x_2, \ldots, x_{n+1}) \\
&= B(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}),
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

O próximo resultado generaliza a desigualdade dada na Proposição 3.1.2. Em [14, Lemma 3.2] encontra-se o caso bilinear $n = 2$.

Proposição 4.1.4. *Seja $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ um operador n-linear positivo entre espaços de Riesz. Então*

$$|A(x_1, \ldots, x_n)| \leq A(|x_1|, \ldots, |x_n|)$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.4(vii), para qualquer $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ temos

$$(|x_1|, \ldots, |x_n|) = ({x_1}^+ + {x_1}^-, \ldots, {x_n}^+ + {x_n}^-).$$

Segue do Teorema multilinear de Kantorovich que

$$\begin{aligned}
|A(x_1, \ldots, x_n)| &= |A({x_1}^+ - {x_1}^-, \ldots, {x_n}^+ - {x_n}^-)| \\
&= \left| \sum_{k_1, \ldots, k_n \in \{0,1\}} (-1)^{\sum k_i} A(x_{1,k_1}, \ldots, x_{n,k_n}) \right| \\
&\leq \sum_{k_1, \ldots, k_n \in \{0,1\}} |A(x_{1,k_1}, \ldots, x_{n,k_n})| \\
&= \sum_{k_1, \ldots, k_n \in \{0,1\}} A(x_{1,k_1}, \ldots, x_{n,k_n}) \\
&= A({x_1}^+ + {x_1}^-, \ldots, {x_n}^+ + {x_n}^-) \\
&= A(|x_1|, \ldots, |x_n|)
\end{aligned}$$

em que, para cada $x_i = {x_i}^+ - {x_i}^- \in E_i$ escrevemos $x_{i,0} = {x_i}^+$ e $x_{i,1} = {x_i}^-$. Na conta acima, a desigualdade vem do Teorema 2.1.4(vii) e a terceira igualdade é verdadeira uma vez que A é positivo e as partes positiva e negativa de um vetor são vetores positivos por definição. □

Queremos uma ordem parcial no conjunto dos operadores multilineares entre espaços vetoriais ordenados que generaliza a ordem parcial estabelecida no caso linear. Notemos que se $E_1, \ldots, E_n$ e F são espaços vetoriais ordenados, então o espaço vetorial $L(E_1, \ldots, E_n; F)$, munido com a ordem parcial

$$A \leq B \Longleftrightarrow (B - A) \in L(E_1, \ldots, E_n; F)^+, \tag{4.1}$$

é um espaço vetorial ordenado. Claramente, essa ordem parcial satisfaz o que queremos. Então sempre consideraremos $L(E_1, \dots, E_n; F)$ munido com essa ordem parcial, a não ser que digamos o contrário.

Da mesma forma definimos o módulo de um operador multilinear:

Definição 4.1.5. Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Riesz e seja $A \in L(E_1, \dots, E_n; F)$. Se existir o supremo do conjunto $\{A, -A\}$ em $L(E_1, \dots, E_n; F)$, chamamos $A \vee (-A)$ de *módulo* de A e o denotamos por $|A|$.

A proposição a seguir nos permitirá apresentar, no Exemplo 4.1.16, um operador multilinear entre espaços de Riesz, com contradomínio Dedekind completo, que não têm módulo.

Proposição 4.1.6. *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais ordenados. Para cada $A \in L_r(E_1, \dots, E_n; F)$ e para $x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$ fixos, o operador linear*

$$A_{x_2,\dots,x_n}\colon E_1 \longrightarrow F, \quad A_{x_2,\dots,x_n}(x_1) = A(x_1, x_2, \dots, x_n)\,,$$

é regular.

Demonstração. Fixemos $A \in L_r(E_1, \dots, E_n; F)$ e $x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$. A linearidade de $A_{x_2,\dots,x_n}$ segue da linearidade de A na primeira variável. Sejam $R, S \in L_r(E_1, \dots, E_n; F)$ operadores multilineares positivos tais que $A = R - S$. Para cada $x_i = {x_i}^+ - {x_i}^- \in E_i$, com $2 \leq i \leq n$, escrevamos $x_{i,0} = {x_i}^+$ e $x_{i,1} = {x_i}^-$. Não é difícil ver que os operadores lineares $R_{x_{2,k_2},\dots,x_{n,k_n}}$ e $S_{x_{2,k_2},\dots,x_{n,k_n}}$ são positivos para quaisquer $k_2, \dots, k_n \in \{0, 1\}$.

Seja $x_1 \in {E_1}^+$. Do Teorema multilinear de Kantorovich temos

$$R(x_1, x_2 \dots, x_n) = \sum_{k_2,\dots,k_n \in \{0,1\}} (-1)^{\sum k_i} R(x_1, x_{2,k_2}, \dots, x_{n,k_n}).$$

Segue que $R_{x_2,\dots,x_n}$ é regular por ser uma combinação linear de operadores lineares positivos, digamos $R_{x_2,\dots,x_n} = R_1 - R_2$ com $R_1, R_2 \geq 0$. Da mesma forma temos que $S_{x_2,\dots,x_n}$ é regular, digamos $S_{x_2,\dots,x_n} = S_1 - S_2$ com $S_1, S_2 \geq 0$.

Assim, para cada $x_1 \in E_1$,

$$\begin{aligned}
A_{x_2,\dots,x_n}(x_1) &= A(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= R(x_1, x_2, \dots, x_n) - S(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= R_{x_2,\dots,x_n}(x_1) - S_{x_2,\dots,x_n}(x_1) \\
&= R_1(x_1) - R_2(x_1) - (S_1(x_1) - S_2(x_1)) \\
&= R_1(x_1) + S_2(x_1) - (R_2(x_1) + S_1(x_1)) \\
&= [R_1 + S_2](x_1) - [R_2 + S_1](x_1).
\end{aligned}$$

Isso mostra que $A_{x_2,\dots,x_n} = [R_1 + S_2] - [R_2 + S_2]$ e conclui a demonstração. $\square$

Seguindo o mesmo desenvolvimento feito no caso linear, prosseguiremos no sentido de estudar o espaço dos operadores multilineares regulares entre espaços de Riesz, com contradomínio Dedekind completo, a fim de mostrar que é um espaço de Riesz Dedekind completo. E nesse caso, também apresentaremos as fórmulas para a parte positiva, a parte negativa e o módulo de um operador multilinear regular (à luz do que foi feito na Proposição 3.1.14). Para isso, o seguinte isomorfismo entre espaços vetoriais será muito útil.

Definição 4.1.7. Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços vetoriais. Para cada $1 \leq i \leq n$ fixo definimos

$$\Phi_i \colon L(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow L(E_i; L(E_1, \ldots, E_{i-1}, E_{i+1}, \ldots, E_n; F))\,, \quad \Phi_i(A) = L_A^i,$$

onde

$$L_A^i \colon E_i \longrightarrow L(E_1, \ldots, E_{i-1}, E_{i+1}, \ldots, E_n; F)$$

é dado por

$$L_A^i(x_i)(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n).$$

Proposição 4.1.8. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços vetoriais e $1 \leq i \leq n$. Então Φ_i é um isomorfismo entre espaços vetoriais.*

Demonstração. Dado $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$, a função L_A^i é um operador linear pois A é linear em cada variável. Também não é difícil ver que, dado um operador linear $L^i \in L(E_i; L(E_1, \ldots, E_{i-1}, E_{i+1}, \ldots, E_n; F))$, a função

$$A \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F, \quad A(x_1, \ldots, x_n) = L^i(x_i)(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

é um operador n-linear. Basta notar que L^i é um operador linear e $L^i(x_i)$ é um operador $(n-1)$-linear.

Para $A, B \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} L_{A+\lambda B}^i(x_i)(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) &= (A + \lambda B)(x_1, \ldots, x_n) \\ &= A(x_1, \ldots, x_n) + \lambda B(x_1, \ldots, x_n) \\ &= L_A^i(x_i)(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ &\quad + \lambda L_B^i(x_i)(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Segue que Φ_i é linear. Portanto, a correspondência $A \longmapsto L_A^i$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $L(E_i; L(E_1, \ldots, E_{i-1}, E_{i+1}, \ldots, E_n; F))$. □

Note que tomando $m = 1$ na Proposição 1.2.7, o isomorfismo canônico Φ daquela proposição coincide com o isomorfismo Φ_1 da proposição acima. Por conveniência, também usaremos o símbolo L_A para denotar o operador linear L_A^1.

Em resumo, as duas proposições a seguir mostram, usando o isomorfismo canônico com algumas condições, que a estrutura de espaço de Riesz do espaço vetorial dos operadores multilineares regulares é a mesma de um espaço vetorial de operadores lineares regulares. Isso nos permitirá usar resultados do caso linear para resolver alguns problemas do caso multilinear.

Proposição 4.1.9. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços vetoriais ordenados. Então, para todo $1 \leq i \leq n$,*

$$L_r(E_1, \ldots, E_n; F) \text{ e } L_r(E_i; L_r(E_1, \ldots, E_{i-1}, E_{i+1}, \ldots, E_n; F))$$

são isomorfos como espaços vetoriais ordenados.

Demonstração. Devemos mostrar que um operador multilinear é regular se, e somente se, seu operador linear associado é regular. Para isso, fixemos $i \in \{1, \dots, n\}$ e consideremos um operador n-linear
$$A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F.$$

Primeiro vejamos o caso em que A é positivo:
$$\begin{aligned} A \geq 0 &\iff A(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \text{ para todos } x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ &\iff L_A^i(x_i)(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0 \text{ para todos } x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ &\iff L_A^i(x_i) \geq 0 \text{ para todo } x_i \geq 0 \\ &\iff L_A^i \geq 0. \end{aligned}$$

Para completar a demonstração dessa implicação, suponhamos que A seja regular, digamos $A = A_1 - A_2$, onde A_1 e A_2 são operadores positivos. Pelo que vimos acima $L_{A_1}^i$ e $L_{A_2}^i$ são positivos, logo $L_A^i = L_{A_1}^i - L_{A_2}^i$ é regular.

Reciprocamente, suponhamos que L_A^i seja regular, digamos $L_A^i = T_1 - T_2$, onde T_1 e T_2 são operadores lineares positivos. Dessa forma, tomando os operadores multilineares (positivos) associados aos operadores T_1 e T_2, digamos A_1 e A_2, respectivamente, temos
$$A(x_1, \dots, x_n) = A_1(x_1, \dots, x_n) - A_2(x_1, \dots, x_n).$$
Portanto, A é um operador multilinear regular. $\square$

Do que foi provado acima, se A e B são operadores multilineares regulares, temos $A \leq B$ se, e somente se, $L_A \leq L_B$, onde L_A e L_B são operadores lineares regulares. Então a aplicação multilinear $A \vee B$ (ou $A \wedge B$) é a que corresponde, se existir, com o operador linear $L_A \vee L_B$ (ou $L_A \wedge L_B$). Vejamos que quando $E_1, \dots, E_n$ e F são espaços de Riesz com F Dedekind completo, podemos dizer que a estrutura de espaço de Riesz em $L_r(E_1, \dots, E_n; F)$ é induzida pelo isomorfismo canônico
$$L_r(E_1, \dots, E_n; F) \longleftrightarrow L_r(E_1; L(E_2, \dots, E_n; F)).$$
Em particular,
$$(L_A)^+ = L_{A^+}, \quad (L_A)^- = L_{A^-} \text{ e } |L_A| = L_{|A|}. \tag{4.2}$$

Proposição 4.1.10. *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Riesz com F Dedekind completo. Então $L_r(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo.*

Demonstração. Provaremos por indução sobre n. Para quaisquer espaços de Riesz E e F com F Dedekind completo, o Teorema de F. Riesz-Kantorovich garante que $L_r(E; F)$ é espaço de Riesz, e ainda é Dedekind completo. Dado $n \in \mathbb{N}$, suponhamos que o resultado valha para espaços de operadores n-lineares e mostremos que vale para espaços de operadores $(n+1)$-lineares. Pela hipótese de indução, $L_r(E_2, \dots, E_{n+1}; F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo. E pelo Teorema de F. Riesz-Kantorovich sabemos que $L_r(E_1; L_r(E_2, \dots, E_{n+1}; F))$ também é espaço de Riesz Dedekind completo. Usando a Proposição 4.1.9 temos o isomorfismo entre espaços vetoriais ordenados
$$A \in L_r(E_1, \dots, E_{n+1}; F) \longleftrightarrow L_A \in L_r(E_1; L_r(E_2, \dots, E_{n+1}; F)).$$
Como $L_r(E_1; L_r(E_2, \dots, E_{n+1}; F))$ é espaço de Riesz Dedekind completo, a Proposição 3.1.17 garante que $L_r(E_1, \dots, E_{n+1}; F)$ também é espaço de Riesz Dedekind completo. $\square$

Podemos notar facilmente que a demonstração da proposição acima pode ser feita escolhendo qualquer um dos isomorfismos canônicos

$$L_r(E_1,\ldots,E_n;F) \longleftrightarrow L_r(E_i;L_r(E_1,\ldots,E_{i-1},E_{i+1},\ldots,E_n;F)).$$

Ou seja, se considerarmos o espaço vetorial ordenado $L_r(E_1,\ldots,E_n;F)$ munido da estrutura de espaço de Riesz induzida pela correspondência $A \longmapsto L_A^i$, então teremos a mesma estrutura de espaço de Riesz em $L_r(E_1,\ldots,E_n;F)$ induzida por $A \longmapsto L_A$. Isso implica que

$$L_r(E_i;L_r(E_1,\ldots,E_{i-1},E_{i+1},\ldots,E_n)) \text{ e } L_r(E_j;L_r(E_1,\ldots,E_{j-1},E_{j+1},\ldots,E_n)),$$

são isomorfos como espaços de Riesz, com o isomorfismo sendo $L_A^i \longmapsto L_A^j$, onde $A \in L_r(E_1,\ldots,E_n;F)$.

Do Teorema de F. Riesz-Kantorovich sabemos também que se E e F são espaços de Riesz com F Dedekind completo, então para uma rede crescente $(T_\alpha)_{\alpha\in I}$ em $L_r(E;F)$ vale que

$$T_\alpha \uparrow T \Longleftrightarrow T_\alpha(x) \uparrow T(x) \text{ em } F \text{ para todo } x \in E^+.$$

Em particular,

$$\left(\sup_{\alpha\in I} T_\alpha\right)(x) = \sup_{\alpha\in I} T_\alpha(x).$$

Isso nos diz que, para vetores positivos, o supremo pode ser avaliado pontualmente no caso linear. A proposição a seguir estabelece uma versão desse resultado para operadores multilineares regulares.

Proposição 4.1.11. *Sejam $E_1,\ldots,E_n$ e F espaços de Riesz com F Dedekind completo e seja $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma rede crescente em $L_r(E_1,\ldots,E_n;F)$ limitada superiormente. Então*

$$\left(\sup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)(x_1,\ldots,x_n) = \sup_{\alpha\in I} A_\alpha(x_1,\ldots,x_n)$$

para todos $x_1 \in {E_1}^+,\ldots,x_n \in {E_n}^+$.

Demonstração. A Proposição 4.1.10 nos diz que $L_r(E_1,\ldots,E_n;F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo, logo está garantida a existência do supremo da rede $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$, que é limitada superiormente. Novamente usaremos indução sobre n para provar o resultado. O caso linear vem do Teorema de F. Riesz-Kantorovich. Dado $n \in \mathbb{N}$, suponhamos que o resultado seja verdadeiro para redes crescentes limitadas superiormente em espaços de operadores n-lineares regulares, e mostremos que também é verdade para espaços de operadores $(n+1)$-lineares regulares. Observando que a estrutura de espaço de Riesz em $L_r(E_1,\ldots,E_{n+1};F)$ é induzida pelo isomorfismo canônico

$$A \in L_r(E_1,\ldots,E_{n+1};F) \longleftrightarrow L_A^1 \in L_r(E_1;L_r(E_2,\ldots,E_{n+1};F)),$$

temos que $(L_{A_\alpha}^1)_{\alpha\in I}$ é uma rede crescente em $L_r(E_1;L_r(E_2,\ldots,E_{n+1};F))$ limitada superiormente. Sendo assim, temos a correspondência

$$\sup_{\alpha\in I} A_\alpha \longmapsto \sup_{\alpha\in I} L_{A_\alpha}^1,$$

que significa que

$$\left(\sup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)(x_1,\dots,x_{n+1}) = \left(\sup_{\alpha\in I} L^1_{A_\alpha}\right)(x_1)(x_2,\dots,x_{n+1})$$

para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_{n+1} \in E_{n+1}$.

Por outro lado, usando o Teorema de F. Riesz-Kantorovich para a rede de operadores lineares $(L^1_{A_\alpha})_{\alpha\in I}$ em $L_r(E_1; L_r(E_2,\dots,E_{n+1};F))$ temos

$$\left(\sup_{\alpha\in I} L^1_{A_\alpha}\right)(x_1) = \sup_{\alpha\in I} L^1_{A_\alpha}(x_1)$$

para cada $x_1 \in {E_1}^+$.

Como a rede de operadores lineares $(L^1_{A_\alpha})_{\alpha\in I}$ é crescente e limitada superiormente em $L_r(E_1; L_r(E_2,\dots,E_{n+1};F))$, para $\alpha_1,\alpha_2 \in I$ com $\alpha_1 \le \alpha_2$ temos $L^1_{A_{\alpha_1}} \le L^1_{A_{\alpha_2}}$. Isso significa que $L^1_{A_{\alpha_1}}(x_1) \le L^1_{A_{\alpha_2}}(x_1)$ para todo $x_1 \in {E_1}^+$. Segue que, para cada $x_1 \in {E_1}^+$, a rede de operadores n-lineares $(L^1_{A_\alpha}(x_1))_{\alpha\in I}$ é crescente e limitada superiormente em $L_r(E_2,\dots,E_{n+1};F)$. Logo, pela hipótese de indução,

$$\left(\sup_{\alpha\in I} L^1_{A_\alpha}(x_1)\right)(x_2,\dots,x_{n+1}) = \sup_{\alpha\in I} L^1_{A_\alpha}(x_1)(x_2,\dots,x_{n+1})$$

para todos $x_1 \in {E_1}^+, \dots, x_{n+1} \in {E_{n+1}}^+$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\left(\sup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)(x_1,\dots,x_{n+1}) &= \left(\sup_{\alpha\in I} L^1_{A_\alpha}\right)(x_1)(x_2,\dots,x_{n+1})\\ &= \left(\sup_{\alpha\in I} L^1_{A_\alpha}(x_1)\right)(x_2,\dots,x_{n+1})\\ &= \sup_{\alpha\in I} L^1_{A_\alpha}(x_1)(x_2,\dots,x_{n+1})\\ &= \sup_{\alpha\in I} A_\alpha(x_1,\dots,x_{n+1}).\end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração. □

Antes de continuarmos, introduziremos alguns conceitos importantes.

Definição 4.1.12. Seja x um vetor positivo de um espaço vetorial ordenado E.

(i) Uma partição de x é um número finito de vetores positivos $a_1,\dots,a_k \in E$ tais que $x = a_1 + \cdots + a_k$. Denotamos essa partição por $(a_1,\dots,a_k)$, que pode ser simplesmente denotada por a. O conjunto das partições de x é denotado por Π_x.

(ii) Sejam $a = (a_1,\dots,a_N)$ e $b = (b_1,\dots,b_M)$ partições de x. Dizemos que a é um refinamento de b quando o conjunto $\{1,\dots,N\}$ pode ser escrito como união disjunta de conjuntos $I_1,\dots,I_M$ de modo que

$$b_m = \sum_{i\in I_m} a_i$$

para cada $1 \le m \le M$.

Da Propriedade da decomposição de Riesz segue que quaisquer duas partições têm um refinamento comum. Assim, temos que Π_x é naturalmente um conjunto dirigido com a seguinte ordem parcial: para todos $a, b \in \Pi_x$,

$$b \leq a \Longleftrightarrow a \text{ é um refinamento de } b.$$

O seguinte lema é uma consequência direta da Proposição 3.1.14.

Lema 4.1.13. *Sejam E e F espaços de Riesz com F Dedekind completo e seja $T \in L_r(E;F)$. Então para todo $x \in E^+$ vale que*

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}(T(x_i))^+ \colon k \in \mathbb{N}, x_i \in E^+ \text{ e } x = \sum_{i=1}^{k} x_i\right\} \uparrow T^+(x) \text{ e}$$
$$\left\{\sum_{i=1}^{k}(T(x_i))^- \colon k \in \mathbb{N}, x_i \in E^+ \text{ e } x = \sum_{i=1}^{k} x_i\right\} \uparrow T^-(x).$$

Demonstração. Da Proposição 3.1.14 temos

$$\left\{\sum_{i=1}^{k} T(x_i) \vee 0(x_i) \colon k \in \mathbb{N}, x_i \in E^+ \text{ e } x = \sum_{i=1}^{k} x_i\right\} \uparrow (T \vee 0)(x)$$

e

$$\left\{\sum_{i=1}^{k} (-T)(x_i) \vee 0(x_i) \colon k \in \mathbb{N}, x_i \in E^+ \text{ e } x = \sum_{i=1}^{k} x_i\right\} \uparrow ((-T) \vee 0)(x).$$

□

Em outras palavras, o lema anterior nos diz que a rede

$$\left(\sum_{i=1}^{k}(Ta_i)^+\right)_{a \in \Pi_x}$$

é crescente em F^+ e seu supremo é $T^+(x)$.

A fórmula para o módulo de um operador bilinear entre espaços de Riesz é apresentada por Fremlin em [15, pag. 93] sem demonstração e é demonstrada em [9, Theorem 3.1] por Buskes e Van Rooij utilizando o produto tensorial entre espaços de Riesz introduzido por Fremlin em [14]. A seguir apresentaremos as fórmulas para a parte positiva, a parte negativa e o módulo de um operador n-linear regular utilizando a abordagem feita em [21, Proposition 2.14].

Teorema 4.1.14. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços de Riesz com F Dedekind completo e seja $A \in L_r(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então*

$$\left\{\sum_{i_1,\ldots,i_n}^{j_1,\ldots,j_n} (A(z_{1,i_1}, \ldots, z_{n,i_n}))^+ \colon z_m \in \Pi_{x_m}, 1 \leq m \leq n\right\} \uparrow A^+(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\left\{\sum_{i_1,\ldots,i_n}^{j_1,\ldots,j_n} (A(z_{1,i_1}, \ldots, z_{n,i_n}))^- \colon z_m \in \Pi_{x_m}, 1 \leq m \leq n\right\} \uparrow A^-(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\left\{\sum_{i_1,\ldots,i_n}^{j_1,\ldots,j_n} |A(z_{1,i_1}, \ldots, z_{n,i_n})| \colon z_m \in \Pi_{x_m}, 1 \leq m \leq n\right\} \uparrow |A|(x_1, \ldots, x_n),$$

onde, para cada $1 \leq m \leq n$, temos $x_m = z_{m,1} + \cdots + z_{m,j_m} \in {E_m}^+$ e o vetor positivo $z_{m,i_m} \in E_m$ é a i_m-ésima coordenada da partição $z_m = (z_{m,1}, \ldots, z_{m,j_m}) \in \Pi_{x_m}$.

Demonstração. Novamente usaremos indução sobre n. Mostremos que

$$\left\{\sum_{i_1,\ldots,i_n}^{j_1,\ldots,j_n} (A(z_{1,i_1}, \ldots, z_{n,i_n}))^+ \colon z_m \in \Pi_{x_m}, 1 \leq m \leq n\right\} \uparrow A^+(x_1, \ldots, x_n).$$

O caso $n = 1$ é garantido pelo Lema 4.1.13. Dado $n \in \mathbb{N}$, suponhamos que essa fórmula seja válida para operadores n-lineares regulares e provemos que também vale para operadores $(n+1)$-lineares regulares. Para isso, seja $A \in L_r(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ e consideremos a parte positiva de A, ou seja, o operador $(n+1)$-linear positivo A^+.

Aplicando o Lema 4.1.13 para o operador linear $L_{A^+} = (L_A)^+$ temos

$$\left\{\sum_{i_1=1}^{j_1} (L_A(z_{1,i_1}))^+ \colon z_1 \in \Pi_{x_1}\right\} \uparrow (L_A)^+(x_1),$$

onde $x_1 = z_{1,1} + \cdots + z_{1,j_1} \in {E_1}^+$ e o vetor positivo $z_{1,i_1} \in E_1$ é a i_1-ésima coordenada da partição $z_1 = (z_{1,1}, \ldots, z_{1,j_1}) \in \Pi_{x_1}$. Logo, para $x_1 \in {E_1}^+, \ldots, x_{n+1} \in {E_{n+1}}^+$ fixos,

$$\begin{aligned} A^+(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= L_{A^+}(x_1)(x_2, \ldots, x_{n+1}) \\ &= (L_A)^+(x_1)(x_2, \ldots, x_{n+1}) \\ &= \left(\sup_{z_1 \in \Pi_{x_1}} \left\{\sum_{i_1=1}^{j_1} (L_A(z_{1,i_1}))^+\right\}\right)(x_2, \ldots, x_{n+1}), \end{aligned}$$

onde $z_1 = (z_{1,1}, \ldots, z_{1,j_1}) \in \Pi_{x_1}$.

Observemos que a rede

$$\left(\sum_{i_1=1}^{j_1} (L_A(z_{1,i_1}))^+\right)_{z_1 \in \Pi_{x_1}}$$

é crescente em $L_r(E_2, \ldots, E_{n+1}; F)$, com $z_1 = (z_{1,1}, \ldots, z_{1,j_1}) \in \Pi_{x_1}$. Então da Proposição 4.1.11,

$$\begin{aligned} \left(\sup_{z_1 \in \Pi_{x_1}} \left\{\sum_{i_1=1}^{j_1} (L_A(z_{1,i_1}))^+\right\}\right)(x_2, \ldots, x_{n+1}) &= \sup_{z_1 \in \Pi_{x_1}} \left\{\left(\sum_{i_1=1}^{j_1} (L_A(z_{1,i_1}))^+\right)(x_2, \ldots, x_{n+1})\right\} \\ &= \sup_{z_1 \in \Pi_{x_1}} \left\{\sum_{i_1=1}^{j_1} (L_A(z_{1,i_1}))^+(x_2, \ldots, x_{n+1})\right\}, \end{aligned}$$

com $z_1 = (z_{1,1}, \ldots, z_{1,j_1}) \in \Pi_{x_1}$.

Notemos que $L_A(z_{1,i_1}) \colon E_2 \times \cdots \times E_{n+1} \longrightarrow F$ é um operador n-linear regular, em que $z_{1,i_1} \in E_1$ é a i_1-ésima coordenada da partição $z_1 = (z_{1,1}, \ldots, z_{1,j_1}) \in \Pi_{x_1}$. A hipótese de indução garante que

$$\left\{\sum_{i_2,\ldots,i_{n+1}}^{j_2,\ldots,j_{n+1}} [L_A(z_{1,i_1})(z_{2,i_2}, \ldots, z_{n+1,i_{n+1}})]^+\right\} \uparrow (L_A(z_{1,i_1}))^+(x_2, \ldots, x_{n+1}), \tag{4.3}$$

onde, para cada $2 \leq m \leq n+1$, temos que $z_{m,i_m} \in {E_m}^+$ é a i_m-ésima coordenada da partição $z_m = (z_{m,1}, \ldots, z_{m,j_m}) \in \Pi_{x_m}$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
A^+(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= \sup_{z_1 \in \Pi_{x_1}} \left\{ \sum_{i_1} (L_A(z_{1,i_1}))^+(x_2, \ldots, x_{n+1}) \right\} \\
&= \sup_{z_1 \in \Pi_{x_1}} \left\{ \sum_{i_1} \sup_{\substack{z_m \in \Pi_{x_m} \\ 2 \leq m \leq n}} \left\{ \sum_{i_2, \ldots, i_{n+1}} [L_A(z_{1,i_1})(z_{2,i_2}, \ldots, z_{n+1,i_{n+1}})]^+ \right\} \right\} \\
&= \sup_{z_1 \in \Pi_{x_1}} \left\{ \sup_{\substack{z_m \in \Pi_{x_m} \\ 2 \leq m \leq n}} \left\{ \sum_{i_1} \sum_{i_2, \ldots, i_{n+1}} [L_A(z_{1,i_1})(z_{2,i_2}, \ldots, z_{n+1,i_{n+1}})]^+ \right\} \right\} \\
&= \sup_{\substack{z_m \in \Pi_{x_m} \\ 1 \leq m \leq n}} \left\{ \sum_{i_1, \ldots, i_{n+1}} [L_A(z_{1,i_1})(z_{2,i_2}, \ldots, z_{n+1 i_{n+1}})]^+ \right\} \\
&= \sup_{\substack{z_m \in \Pi_{x_m} \\ 1 \leq m \leq n}} \left\{ \sum_{i_1, \ldots, i_{n+1}} (A(z_{1,i_1}, \ldots, z_{n+1,i_{n+1}}))^+ \right\},
\end{aligned}
$$

onde a terceira igualdade segue da Proposição 2.1.18 e a quarta segue da Proposição 2.1.19.

Além disso, o conjunto

$$
\left\{ \sum_{i_1, \ldots, i_{n+1}}^{j_1, \ldots, j_{n+1}} (A(z_{1,i_1}, \ldots, z_{n+1,i_{n+1}}))^+ : z_m \in \Pi_{x_m}, 1 \leq m \leq n+1 \right\}
$$

é dirigido para cima. Prosseguiremos a partir deste ponto com o caso bilinear $n = 2$. O argumento deixa claro que o caso geral para qualquer natural $n > 2$ é análogo.

Vejamos que o conjunto

$$
D = \left\{ \sum_{i_1, i_2}^{j_1, j_2} (A(z_{1,i_1}, z_{2,i_2}))^+ : z_m = (z_{m,1}, \ldots, z_{m,j_m}) \in \Pi_{x_m}, m = 1, 2 \right\}
$$

é dirigido para cima. Em primeiro lugar, notemos que escolher elementos de D está univocamente relacionado a escolher partições de x_1 e x_2. Dito isso, para $m = 1, 2$ consideremos duas partições de x_m, digamos

$$
z_m = (z_{m,1}, \ldots, z_{m,j_m}) \quad \text{e} \quad y_m = (y_{m,1}, \ldots, y_{m,h_m}).
$$

Pela Propriedade da decomposição de Riesz podemos tomar uma partição

$$
v = (v_{1,1}, \ldots, v_{j_1,1}, \ldots, v_{1,h_1}, \ldots, v_{j_1,h_1}) \in \Pi_{x_1}
$$

tal que

$$
z_{1,i_1} = \sum_{k=1}^{h_1} v_{i_1,k} \quad \text{e} \quad y_{1,s_1} = \sum_{r=1}^{j_1} v_{r,s_1}
$$

para todo $1 \leq i_1 \leq j_1$ e todo $1 \leq l_1 \leq h_1$. Então v é um refinamento comum com as duas partições z_1 e y_1, ou seja, $z_1 \leq v$ e $y_1 \leq v$ em Π_{x_1}. É conveniente renomear os vetores $v_{1,1}, \ldots, v_{j_1,1}, \ldots, v_{1,h_1}, \ldots, v_{j_1,h_1}$ da seguinte forma:

$$v = (v_{1,1}, \ldots, v_{j_1,1}, \ldots, v_{1,h_1}, \ldots, v_{j_1,h_1}) = (u_{1,1}, \ldots, u_{1,p_1}).$$

Claramente $p_1 = j_1 \cdot h_1$. Em particular,

$$z_{1,i_1} = \sum_{k=0}^{h_1-1} u_{1,i_1+k}$$

para todo $1 \leq i_1 \leq j_1$.

Como Π_{x_2} é dirigido para cima, existe $u_2 = (u_{2,1}, \ldots, u_{2,p_2}) \in \Pi_{x_2}$ tal que $z_2 \leq u_2$ e $y_2 \leq u_2$. Para todo $1 \leq i_1 \leq j_1$ o operador linear $L_A(z_{1,i_1})\colon E_2 \longrightarrow F$ é regular. E como u_2 é um refinamento de z_2, segue do Lema 4.1.13 que

$$\sum_{i_2}^{j_2} [L_A(z_{1,i_1})(z_{2,i_2})]^+ \leq \sum_{l_2}^{p_2} [L_A(z_{1,i_1})(u_{2,l_2})]^+$$

para todo $1 \leq i_1 \leq j_1$; ou seja,

$$\sum_{i_2}^{j_2} (A(z_{1,i_1}, z_{2,i_2}))^+ \leq \sum_{l_2}^{p_2} (A(z_{1,i_1}, u_{2,l_2}))^+.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i_1,i_2}^{j_1,j_2} (A(z_{1,i_1}, z_{2,i_2}))^+ &\leq \sum_{i_1}^{j_1} \sum_{l_2}^{p_2} (A(z_{1,i_1}, u_{2,l_2}))^+ \\
&= \sum_{i_1}^{j_1} \sum_{l_2}^{p_2} \left[A \left(\sum_{k=0}^{h_1-1} u_{1,i_1+k}, u_{2,l_2} \right) \right]^+ \\
&= \sum_{i_1}^{j_1} \sum_{l_2}^{p_2} \left[\sum_{k=0}^{h_1-1} A\left(u_{1,i_1+k}, u_{2,l_2}\right) \right]^+ \\
&\leq \sum_{i_1}^{j_1} \sum_{l_2}^{p_2} \sum_{k=0}^{h_1-1} \left[A\left(u_{1,i_1+k}, u_{2,l_2}\right)\right]^+ \\
&= \sum_{l_1}^{p_1} \sum_{l_2}^{p_2} \left(A\left(u_{1,l_1}, u_{2,l_2}\right)\right)^+,
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade vem da bilinearidade de A e a segunda desigualdade segue do Corolário 2.1.5.

Analogamente, vale que

$$\sum_{s_1,s_2}^{h_1,h_2} (A(y_{1,s_1}, y_{2,s_2}))^+ \leq \sum_{l_1,l_2}^{p_1,p_2} (A(u_{1,l_1}, u_{2,l_2}))^+.$$

Isso mostra que $D \uparrow$.

Com argumento semelhante mostra-se a segunda fórmula. A terceira fórmula segue do fato de que $|A| = A^+ + A^-$ pelo Teorema 2.1.4(vii). $\square$

O resultado e o exemplo a seguir justificam a escolha do contradomínio ser Dedekind completo ao estudarmos os operadores multilineares (regulares) entre espaços de Riesz.

Proposição 4.1.15. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços de Riesz com F Dedekind completo. Para cada $A \in L_r(E_1, \ldots, E_n; F)$ e para $x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n$ fixos, o operador linear*

$$A_{x_2,\ldots,x_n} \colon E_1 \longrightarrow F, \quad A_{x_2,\ldots,x_n}(x_1) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

tem módulo em $L_r(E_1; F)$.

Demonstração. Pela Proposição 4.1.6, o operador linear $A_{x_2,\ldots,x_n} \colon E_1 \longrightarrow F$ é regular. Como $L_r(E_1; F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo, pelo Teorema de F. Riesz-Kantorovich segue que $A_{x_2,\ldots,x_n}$ tem módulo em $L_r(E_1; F)$. □

Notemos que se um operador multilinear A entre espaços vetoriais ordenados tem módulo, então esse operador é regular pois

$$A = |A| - (|A| - A).$$

Vejamos um exemplo de um operador bilinear sem módulo com contradomínio Dedekind completo.

Exemplo 4.1.16. No Exemplo 3.1.8 apresentamos um operador linear $T \colon E \longrightarrow E$ sem módulo, onde E é Dedekind completo. Seja $\phi \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear positivo tal que $\phi \neq 0$. Definimos

$$B \colon E \times E \longrightarrow E \ , \ B(x, y) = \phi(y)T(x).$$

É claro que B está bem definido. A bilinearidade de B vem da linearidade de T e de ϕ, e das propriedades distributivas do produto com a soma em espaços vetoriais.

Seja $y \in E$ tal que $\phi(y) = 1$. Então o operador linear

$$B_y \colon E \longrightarrow E \ , \ B_y(x) = \phi(y)T(x),$$

coincide com T. Segue da proposição acima que B não tem módulo pois T não tem módulo. Em particular, B não é regular.

4.2 Espaço dos operadores multilineares regulares entre reticulados de Banach

Na seção anterior nos importamos com a estrutura de Riesz do espaço vetorial ordenado $L_r(E_1, \ldots, E_n; F)$. Agora adicionaremos a condição de que os espaços de Riesz $E_1, \ldots, E_n$ e F são reticulados de Banach e seguiremos no sentido de estabelecer uma norma em $L_r(E_1, \ldots, E_n; F)$ de forma a torná-lo um reticulado de Banach.

Como já está claro a essa altura, um fato importante é que quando $E_1, \ldots, E_n$ e F são espaços de Riesz com F Dedekind completo, $L_r(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $L_r(E_1; L_r(E_2, \ldots, E_n; F))$ são Riesz isomorfos por meio do isomorfismo canônico

$$A \in L_r(E_1, \ldots, E_n; F) \longmapsto L_A \in L_r(E_1; L_r(E_2, \ldots, E_n; F))$$

(Proposições 4.1.10 e 4.1.11).

Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços normados. Consideramos $E_1 \times \cdots \times E_n$ munido de uma das seguintes normas equivalentes

$$\begin{aligned} \|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 &= \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|, \\ \|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 &= (\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty &= \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\}, \end{aligned}$$

onde $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$. Denotamos por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ o subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ formado pelos operadores multilineares contínuos.

Um resultado que devemos ressaltar é que o isomorfismo canônico $A \longmapsto L_A$ é um isomorfismo isométrico de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ em $\mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2, \ldots, E_n; F))$, onde a norma em $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é dada por

$$\|A\| = \sup\{\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \colon \|x_i\| \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

(Teorema 1.2.8).

Agora, quando $E_1, \ldots, E_n$ e F são espaços normados que são espaços de Riesz (a norma pode não ser uma norma reticulada), o conjunto dos operadores multilineares regulares é um subespaço vetorial (normado) de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, e o denotamos por $\mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Relembremos que, no caso linear em que E é um reticulado de Banach e F é um espaço de Riesz normado, todo operador regular é contínuo pelo Teorema 3.2.1, e portanto

$$L_r(E; F) = \mathcal{L}_r(E; F).$$

E ainda, adicionando a hipótese de F ser um reticulado de Banach Dedekind completo temos que o espaço de Riesz Dedekind completo $\mathcal{L}_r(E; F)$ é um reticulado de Banach munido da norma regular

$$\|T\|_r \coloneqq \||T|\| \coloneqq \sup\{\||T|(x)\| \colon \|x\| \leq 1\}$$

pelo Teorema 3.2.8. Veremos nesta seção que esse fato pode ser generalizado para os operadores multilineares regulares.

Para começar temos o seguinte resultado. Relembre a definição de operador multilinear separadamente contínuo na Definição 1.2.9.

Proposição 4.2.1. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ reticulados de Banach e seja F espaço de Riesz normado. Então*

$$L_r(E_1, \ldots, E_n; F) = \mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_n; F),$$

isto é, todo operador multilinear regular $A \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é contínuo.

Demonstração. É claro que $\mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_n; F) \subset L_r(E_1, \ldots, E_n; F)$. Por outro lado, seja $A \in L_r(E_1, \ldots, E_n; F)$ um operador multilinear positivo. Mostremos que A é separadamente contínuo. Para $a_2 \in E_2, \ldots, a_n \in E_n$ definimos um operador linear $A^1_{a_2, \ldots, a_n} \colon E_1 \longrightarrow F$ por

$$A^1_{a_2, \ldots, a_n}(x_1) = A(x_1, a_2, \ldots, a_n).$$

É imediato que $A^1_{a_2,\dots,a_n}$ está bem definido e é linear. Vejamos que para quaisquer vetores $a_2 \in E_2, \dots, a_n \in E_n$ o operador linear $A^1_{a_2,\dots,a_n}$ é contínuo. No caso em que $a_2 \in {E_2}^+, \dots, a_n \in {E_n}^+$ temos que $A^1_{a_2,\dots,a_n}$ é positivo pois $A \geq 0$, logo contínuo pelo Teorema 3.2.1. Tomemos qualquer $a_2 \in E_2$ e $a_3 \in {E_2}^+, \dots, a_n \in {E_n}^+$; então

$$A^1_{a_2,a_3,\dots,a_n} = A^1_{{a_2}^+,a_3,\dots,a_n} - A^1_{{a_2}^-,a_3,\dots,a_n}$$

é diferença de dois operadores lineares contínuos (positivos), de modo que $A^1_{a_2,a_3,\dots,a_n}$ é contínuo. Agora, para quaisquer $a_2 \in E_2$ e $a_3 \in E_3$, e $a_4 \in {E_4}^+, \dots, a_n \in {E_n}^+$,

$$A^1_{a_2,a_3,a_4,\dots,a_n} = A^1_{a_2,{a_3}^+,a_4,\dots,a_n} - A^1_{a_2,{a_3}^-,a_4,\dots,a_n}$$

é a diferença de dois operadores lineares contínuos pelo que vimos acima, e logo $A^1_{a_2,a_3,a_4,\dots,a_n}$ é contínuo. Prosseguindo dessa forma, concluímos, com $(n-1)$ passos, que o operador linear $A^1_{a_2,\dots,a_n}$ é contínuo para todos $a_2 \in E_2, \dots, a_n \in E_n$.

Com um argumento semelhante pode-se verificar o caso geral: fixado $i \in \{1, \dots, n\}$, sejam $a_1 \in E_1, \overset{[i]}{\dots}, a_n \in E_n$ e façamos $\alpha_i := (a_1, \overset{[i]}{\dots}, a_n)$, onde $\overset{[i]}{\dots}$ significa que a i-ésima coordenada foi retirada. Defina um operador linear $A^i_{\alpha_i} \colon E_i \longrightarrow F$ por

$$A^i_{\alpha_i}(x_i) = A(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1} \dots, a_n).$$

Então o operador linear $A^i_{\alpha_i}$ é contínuo. Portanto, o operador multilinear positivo A é separadamente contínuo, logo contínuo pela Proposição 1.2.10.

Por fim, se $A \in L_r(E_1, \dots, E_n; F)$ é regular, então A é contínuo por ser a diferença de operadores multilineares positivos que são contínuos pelo que vimos acima. Segue que $L_r(E_1, \dots, E_n; F) \subset \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_n; F)$. □

Vejamos uma consequência dessa proposição.

Corolário 4.2.2. *Sejam $E_1, \dots, E_n$ reticulados de Banach e seja F espaço de Riesz normado Dedekind completo. Então $\mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo.*

Demonstração. Da Proposição 4.1.10 temos que $L_r(E_1, \dots, E_n; F)$ é espaço de Riesz Dedekind completo, e da Proposição 4.2.1 temos que

$$L_r(E_1, \dots, E_n; F) = \mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_n; F),$$

concluindo o que queríamos. □

O teorema a seguir será usado para mostrar o que queremos nesta seção. Tenhamos em mente que o espaço de Riesz $\mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_n; F)$ pode não ser um espaço de Riesz normado com a norma usual de operadores.

Teorema 4.2.3. *Sejam $E_1, \dots, E_n$ reticulados de Banach e seja F espaço de Riesz normado. Então*

$$\mathcal{L}_r(E_1, \dots, E_n; F) \text{ e } \mathcal{L}_r(E_1; \mathcal{L}_r(E_2, \dots, E_n; F))$$

são canonicamente isomorfos como espaços vetoriais.

Demonstração. Consideremos novamente o operador linear canônico

$$L\colon \mathcal{L}_r(E_1,\ldots,E_n;F) \longrightarrow \mathcal{L}_r(E_1;\mathcal{L}_r(E_2,\ldots,E_n;F)),$$

dado por

$$L(A)(x_1)(x_2,\ldots,x_n) = A(x_1,\ldots,x_n).$$

Por simplicidade, usamos a notação L_A ao invés de $L(A)$. Primeiramente, mostremos que L está bem definido. De fato, quando $A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é um operador multilinear positivo, então L_A é um operador linear em $\mathcal{L}(E_1;\mathcal{L}(E_2,\ldots,E_n;F))$, pois o isomorfismo canônico $A \longmapsto L_A$ é um isomorfismo isométrico de $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ em $\mathcal{L}(E_1;\mathcal{L}(E_2,\ldots,E_n;F))$ pela Proposição 1.2.8. Além disso, L_A é um operador linear positivo pela Proposição 4.1.9. Logo, podemos escrever $L_A \in \mathcal{L}_r(E_1;\mathcal{L}(E_2,\ldots,E_n;F))$. Dizer que L_A é positivo significa que $L_A(x_1) \in \mathcal{L}(E_2,\ldots,E_n;F)$ é um operador multilinear positivo para todo $x_1 \in {E_1}^+$, e assim podemos escrever $L_A \in \mathcal{L}_r(E_1;\mathcal{L}_r(E_2,\ldots,E_n;F))$. Disso e do fato de que a soma de funções contínuas é contínua, temos que se $A \in \mathcal{L}_r(E_1,\ldots,E_n;F)$, então $L_A \in \mathcal{L}_r(E_1;\mathcal{L}_r(E_2,\ldots,E_n;F))$.

A linearidade e a injetividade de L são herdadas do isomorfismo canônico $A \longmapsto L_A$, já que ele é um isomorfismo isométrico pela Proposição 1.2.8.

Resta mostrar que o operador L é sobrejetor. Para cada $T \in \mathcal{L}_r(E_1;\mathcal{L}_r(E_2,\ldots,E_n;F))$ definimos

$$A_T\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F, \quad A_T(x_1,\ldots,x_n) = T(x_1)(x_2,\ldots,x_n).$$

É fácil ver que A_T é n-linear. Seja $T \in \mathcal{L}_r(E_1;\mathcal{L}_r(E_2,\ldots,E_n;F))$ positivo. Por definição, $T \geq 0$ significa que $T(x_1) \geq 0$ para todo $x_1 \in {E_1}^+$. E isso implica que

$$T(x_1)(x_2,\ldots,x_n) = A_T(x_1,\ldots,x_n) \geq 0$$

para todos $x_1 \in {E_1}^+,\ldots,x_n \in {E_n}^+$. Portanto, o operador linear A_T é positivo quando T é positivo.

Notemos que se $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_r(E_1;\mathcal{L}_r(E_2,\ldots,E_n;F))$ são positivos, então

$$\begin{aligned} A_{T_1-T_2}(x_1,\ldots,x_n) &= (T_1 - T_2)(x_1)(x_2,\ldots,x_n) \\ &= T_1(x_1)(x_2,\ldots,x_n) - T_2(x_1)(x_2,\ldots,x_n) \\ &= A_{T_1}(x_1,\ldots,x_n) - A_{T_2}(x_1,\ldots,x_n) \\ &= [A_{T_1} - A_{T_2}](x_1,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

para todos $x_1 \in E_1,\ldots,x_n \in E_n$. Assim, se $T \in \mathcal{L}_r(E_1;\mathcal{L}_r(E_2,\ldots,E_n;F))$ é regular, então A_T também é regular. Além disso, para todos $x_1 \in E_1,\ldots,x_n \in E_n$,

$$\begin{aligned} \|A_T(x_1,\ldots,x_n)\| &= \|T(x_1)(x_2,\ldots,x_n)\| \\ &\leq \|T(x_1)\| \cdot \|x_2\| \cdots \|x_n\|, \\ &\leq \|T\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|, \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade vem da continuidade do operador multilinear $T(x_1)$ e do Teorema 1.2.5(ii) e a segunda vem da continuidade do operador linear T e do Teorema 1.1.6. Segue que A_T é um operador multilinear contínuo pelo Teorema 1.2.4(iv), concluindo a verificação de que L é sobrejetor. Portanto, L é um isomorfismo linear entre espaços vetoriais. $\square$

Agora estamos em condições de provar o resultado principal desta seção.

Teorema 4.2.4. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F reticulados de Banach com F Dedekind completo. Então $\mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_n; F)$ é um reticulado de Banach munido com a norma regular (r-norma)*

$$\|A\|_r := \||A|\| = \sup\{\||A|(x_1, \ldots, x_n)\| \colon x_i \in B_{E_i}, \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

Demonstração. Sabemos do Corolário 4.2.2 que $\mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_n; F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo. Mostremos por indução sobre n que $\|\cdot\|_r$ é uma norma que faz com que o espaço de Riesz $\mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_n; F)$ seja um reticulado de Banach. O Teorema 3.2.8 garante que $\mathcal{L}_r(E; F)$ é um reticulado de Banach munido com a r-norma, então temos o caso $n = 1$. Suponhamos que o resultado seja verdade para espaços de operadores n-lineares regulares e provemos que também vale para espaços de operadores $(n + 1)$-lineares regulares. Dados reticulados de Banach $E_1, \ldots, E_n$ e F com F Dedekind completo, pela hipótese de indução o espaço de Riesz Dedekind completo $\mathcal{L}_r(E_2, \ldots, E_{n+1}; F)$ é um reticulado de Banach munido com r-norma. Logo, pelo Teorema 3.2.4 temos que $\mathcal{L}_r(E_1; \mathcal{L}_r(E_2, \ldots, E_{n+1}; F))$ é um espaço de Riesz normado (Dedekind completo) munido com a norma regular, e ainda é um reticulado de Banach pelo Teorema 3.2.8.

Consideremos operadores multilineares $A, B \in \mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ tais que $|A| \leq |B|$. Notemos que

$$L_{|A|} = |L_A| \leq |L_B| = L_{|B|}$$

no reticulado de Banach $\mathcal{L}_r(E_1; \mathcal{L}_r(E_2, \ldots, E_{n+1}; F))$. Logo

$$\|L_{|A|}\| = \||L_A|\| = \|L_A\|_r \leq \|L_B\|_r = \||L_B|\| = \|L_{|B|}\|.$$

Usando o fato de que o isomorfismo canônico $A \longmapsto L_A$ é um isomorfismo isométrico pela Proposição 1.2.8, temos que

$$\|A\|_r = \||A|\| = \|L_{|A|}\| \leq \|L_{|B|}\| = \||B|\| = \|B\|_r.$$

Isso mostra que a norma regular é uma norma reticulada em $\mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$.

Como $\mathcal{L}_r(E_1; \mathcal{L}_r(E_2, \ldots, E_{n+1}; F))$ é um reticulado de Banach, então, novamente pelo isomorfismo isométrico $A \longmapsto L_A$ segue que a r-norma faz de $\mathcal{L}_r(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ um reticulado de Banach. $\square$

Capítulo 5

Polinômios homogêneos regulares

Veremos neste capítulo que as condições para que o espaço dos polinômios homogêneos regulares entre espaços de Riesz seja um espaço de Riesz ou um reticulado de Banach são as mesmas para operadores regulares entre espaços de Riesz. Apresentaremos resultados que mostram como os polinômios homogêneos estão relacionados com os operadores multilineares simétricos e utilizaremos essa relação para alcançarmos as propriedades que desejamos. As referências utilizadas para a elaboração deste capítulo foram [5, 21, 24].

Começamos com a definição de polinômios homogêneos.

Definição 5.0.1. Sejam E e F espaços vetoriais e seja $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que uma função $P\colon E \longrightarrow F$ é um *polinômio n-homogêneo* ou polinômio homogêneo de grau n se existir um operador n-linear $A\colon E^n \longrightarrow F$ tal que $P(x) = A(x, \overset{(n)}{\ldots}, x)$ para todo $x \in E$.

Com essa definição podemos explicar o motivo pelo qual polinômios homogêneos e espaços de polinômios homogêneos são tão estudados em Análise Matemática. Se $P\colon E \longrightarrow F$ é um polinômio n-homogêneo, então, para todo $x \in E$ e todo escalar λ,

$$P(\lambda x) = A(\lambda x, \overset{(n)}{\ldots}, \lambda x) = \lambda^n A(x, \overset{(n)}{\ldots}, x) = \lambda^n P(x).$$

Isso mostra que os polinômios homogêneos satisfazem a propriedade fundamental do polinômio escalar

$$t \mapsto t^n \ , \ n \in \mathbb{N}.$$

Sabe-se que essas funções são fundamentais na Análise Real e na Análise Complexa, pois são as parcelas das séries de potências que definem as funções analíticas (ou holomorfas). Por isso, são os polinômios homogêneos que definem séries de potências e funções holomorfas em dimensão infinita. Daí vem o interesse por esse tipo de operadores. Para o leitor interessado sugerimos as referências [12, 24].

Das propriedades algébricas dos operadores multilineares é fácil ver que o conjunto dos polinômios n-homogêneos é um espaço vetorial real, e o denotamos por $P(^nE; F)$. No caso em que E e F são espaços normados, o conjunto dos polinômios n-homogêneos contínuos, denotado por $\mathcal{P}(^nE; F)$, é subespaço vetorial de $P(^nE; F)$.

Para simplificar a notação, escreveremos $A(x^n)$ no lugar de $A(x, \overset{(n)}{\ldots}, x)$.

5.1 Polinômios homogêneos e operadores multilineares simétricos entre espaços vetoriais

No estudo dos polinômios homogêneos, os operadores multilineares simétricos desempenham um papel essencial para a demonstração dos resultados que serão apresentados neste capítulo. Nesta seção ainda não falaremos de espaços vetoriais ordenados, por isso optamos por apenas referenciar as demonstrações dos resultados.

Relembremos que quando $E = E_1 = \cdots = E_n$, escrevemos $L({}^nE; F)$ para denotar $L(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Definição 5.1.1. Sejam E e F espaços vetoriais e seja $n \in \mathbb{N}$. Um operador multilinear $A \in L({}^nE; F)$ é dito *simétrico* quando

$$A(x_1, \ldots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in E$ e toda permutação σ do conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Denotamos por S_n o conjunto de todas as permutações do conjunto dos n primeiros números naturais.

Denotamos o conjunto dos operadores n-lineares simétricos por $L^s({}^nE; F)$. Se E e F forem espaços normados, o conjunto dos operadores n-lineares simétricos contínuos é denotado por $\mathcal{L}^s({}^nE; F)$.

É fácil ver que $L^s({}^nE; F)$ é subespaço vetorial de $L({}^nE; F)$ e que $\mathcal{L}^s({}^nE; F)$ é subespaço vetorial de $L^s({}^nE; F)$.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e seja $A \in L({}^nE; F)$. Para cada m vetores $x_1, \ldots, x_m \in E$ e cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$ tal que $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots \alpha_m = n$, denotamos

$$A(x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_m^{\alpha_m}) := A(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{x_m, \ldots, x_m}_{\alpha_m}).$$

Dessa forma, a notação

$$A(x^n) = A(\underbrace{x, \ldots, x}_{n})$$

introduzida acima é um caso particular.

Proposição 5.1.2. *Para cada $A \in L({}^nE; F)$, defina*

$$A^s \colon E^n \longrightarrow F \ , \ A^s(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Então as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) $A^s \in L^s({}^nE; F)$.

(ii) $A^s = A$ *se, e somente se,* $A \in L^s({}^nE; F)$.

(iii) $(A^s)^s = A^s$.

(iv) A função $s \colon L({}^nE; F) \longrightarrow L^s({}^nE; F)$, *dada por* $s(A) = A^s$, *é um operador linear.*

(v) Para todo $x \in E$, $A(x^n) = A^s(x^n)$.

Demonstração. Veja [5, Proposição 1.1.6]. $\square$

O teorema a seguir mostra como os polinômios homogêneos entre espaços vetoriais estão relacionados com os operadores multilineares simétricos entre espaços vetoriais.

Se E e F são espaços normados, para cada polinômio n-homogêneo $P \in P(^nE;F)$ definimos

$$\|P\| := \sup\{\|P(x)\| : x \in B_E\} \in [0, +\infty].$$

Teorema 5.1.3. *Sejam E e F espaços vetoriais. Para cada $A \in L(^nE;F)$, seja $\widehat{A}\colon E \longrightarrow F$ dado por $\widehat{A}(x) = A(x^n)$. Então*

(i) O operador linear $A \in L^s(^nE;F) \longmapsto \widehat{A} \in P(^nE;F)$ é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

(ii) Se E e F são espaços normados, então

$$\|\widehat{A}\| \leq \|A\| \leq \frac{n^n}{n!}\|\widehat{A}\|.$$

Demonstração. Veja [5, Teorema 1.2.2] ou [24, Theorem 2.2]. $\square$

Dado um polinômio n-homogêneo $P\colon E \longrightarrow F$ entre espaços vetoriais, do teorema acima decorre que existe um único operador n-linear simétrico $A\colon E^n \longrightarrow F$ tal que $\widehat{A} = P$. Denotaremos esse operador por $\overset{\vee}{P}$.

É claro que uma vez conhecido $\overset{\vee}{P}$, sabemos quem é P. Para obter $\overset{\vee}{P}$ a partir de P, usa-se a Fórmula de Polarização, enunciada a seguir.

Teorema 5.1.4 (Fórmula de Polarização)**.** *Seja $A \in L^s(^nE;F)$. Então*

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!2^n} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_n A(x_0 + \epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n)^n$$

para todos $x_0, \ldots, x_n \in E$.

Demonstração. Veja [24, Theorem 1.10]. $\square$

A Fórmula de Polarização também diz que um operador multilinear simétrico está totalmente determinado por seus valores na diagonal.

No seguinte teorema enunciamos condições equivalentes para que um polinômio homogêneo entre espaços vetoriais normados seja contínuo. Uma dessas condições é que seu operador multilinear simétrico associado seja contínuo.

Teorema 5.1.5. *Sejam E e F espaços normados e seja $P \in P(^nE;F)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) P é contínuo.

(ii) P é contínuo em algum vetor de E.

(iii) P *é contínuo na origem.*

(iv) $\|P\| < \infty$.

(v) Existe uma constante real $k \geq 0$ *tal que* $\|P(x)\| \leq k\|x\|^n$ *para todo* $x \in E$.

(vi) O operador n*-linear simétrico* $\overset{\vee}{P}$ *é contínuo.*

(vii) Existe $A \in \mathcal{L}(^nE; F)$ *tal que* $P(x) = A(x^n)$ *para todo* $x \in E$.

Demonstração. Veja [5, Proposição 1.2.7]. □

Teorema 5.1.6. *Sejam* E *e* F *espaços normados. Então* $\mathcal{P}(^nE; F)$ *é um espaço normado com a norma*

$$\|P\| := \sup\{\|P(x)\| \colon x \in B_E\}.$$

Além disso, $\|P(x)\| \leq \|P\| \cdot \|x\|^n$ *para todo* $x \in E$.

Demonstração. Veja [5, Proposição 1.2.8]. □

Relembremos que quando E e F são espaços normados, $\mathcal{L}(^nE; F)$ é um espaço normado pelo Teorema 1.2.5(i). Sendo assim, o espaço vetorial $\mathcal{L}^s(^nE; F)$ também é espaço normado.

Teorema 5.1.7. *Sejam* E *e* F *espaços normados. O operador*

$$A \in \mathcal{L}^s(^nE; F) \longmapsto \widehat{A} \in \mathcal{P}(^nE; F)$$

é um isomorfismo topológico entre espaços normados.

Demonstração. Veja [5, Proposição 1.2.9]. □

Teorema 5.1.8. *Se* E *é um espaço normado e* F *é um espaço de Banach, então* $\mathcal{P}(^nE; F)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [5, Proposição 1.2.10]. □

5.2 Polinômios homogêneos e operadores multilineares simétricos regulares entre espaços de Riesz

Dados espaços vetoriais ordenados E e F e $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $L_r^s(^nE; F)$ o conjunto dos operadores n-lineares simétricos regulares de E^n em F. Se E e F também forem normados, denotamos por $\mathcal{L}_r^s(^nE; F)$ o subconjunto dos operadores n-lineares simétricos regulares que são contínuos. Notemos que $L_r^s(^nE; F)$ é subespaço vetorial de $L_r(^nE; F)$ e que $\mathcal{L}_r^s(^nE; F)$ é subespaço vetorial de $L_r^s(^nE; F)$.

Definição 5.2.1. Seja $P \colon E \longrightarrow F$ um polinômio n-homogêneo entre espaços vetoriais ordenados. Dizemos que P é:

(i) *Positivo* se $\overset{\vee}{P} \in L(^nE; F)$ é um operador multilinear positivo. Neste caso escrevemos $P \geq 0$.

(ii) *Regular* se P é a diferença de dois polinômios n-homogêneos positivos. O subespaço vetorial dos polinômios n-homogêneos regulares de $P(^nE;F)$ é denotado por $P_r(^nE;F)$.

Naturalmente, $P(^nE;F)$ é um espaço vetorial ordenado munido com a ordem parcial

$$P \leq Q \text{ em } P(^nE;F) \Longleftrightarrow Q - P \geq 0 \text{ em } P(^nE;F).$$

O módulo de um polinômio n-homogêneo $P\colon E \longrightarrow F$, denotado por $|P|$, é o supremo do conjunto $\{P, -P\}$, quando esse supremo existir em $P(^nE;F)$.

Observemos que se $P \geq 0$, então $P(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$. O exemplo a seguir mostra que não vale a recíproca.

Exemplo 5.2.2. Seja F um espaço de Riesz e consideremos $\mathbb{R}^n$ com a ordem coordenada a coordenada e com a base canônica $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Em [21, Lemma 1.5] está mostrado que um polinômio n-homogêneo $P\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow F$ é positivo se, e somente se, os coeficientes de sua expansão com relação à base canônica são positivos.

O polinômio 2-homogêneo $P\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$P(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 = {x_1}^2 - 2x_1x_2 + {x_2}^2,$$

é tal que $P(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Entretanto, como um dos coeficientes na expansão de P é negativo, então P não é um polinômio 2-homogêneo positivo.

Sabemos que nem sempre existe o módulo de um operador linear ou multilinear entre espaços de Riesz. A seguir apresentamos um exemplo de um operador multilinear simétrico, com contradomínio Dedekind completo, que não têm módulo. Veremos na Proposição 5.2.5 que o polinômio associado a ele também não tem módulo.

Exemplo 5.2.3. Sejam $T\colon E \longrightarrow E$ o operador linear sem módulo do Exemplo 3.1.8 e $\phi\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear positivo tal que $\phi \neq 0$. Consideremos o operador bilinear simétrico

$$S\colon E \times E \longrightarrow E\,, \quad S(x,y) = \tfrac{1}{2}[\phi(y)T(x) + \phi(x)T(y)].$$

Seja $z \in E$ tal que $\phi(z) = 1$ e seja $w \coloneqq T(z) \in E$. Defina o operador linear

$$S_y\colon E \longrightarrow E\,, \quad S_y(x) = S(x,y) = \tfrac{1}{2}[T(x) + \phi(x)w].$$

Como $\phi \geq 0$, então $|\phi(y)| \leq \phi(x)$ quando $|y| \leq x$. Segue que o operador linear

$$W\colon E \longrightarrow E\,, \quad W(x) = \phi(x)w\,,$$

é tal que $\sup\{|W(y)|\colon |y| \leq x\}$ sempre existe em F para todo $x \in E^+$. Portanto, W tem módulo pelo Teorema 3.1.11.

Supondo que S tenha módulo, S_y teria módulo pela Proposição 4.1.15 e, consequentemente, $T = 2S_y - W$ também teria módulo. Segue que S não tem módulo.

Proposição 5.2.4. *Sejam E e F espaços de Riesz com F Dedekind completo. Então $L_r^s(^nE;F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo.*

Demonstração. Da Proposição 4.1.10 já sabemos que $L_r({}^nE;F)$ é um espaço de Riesz, e ainda é Dedekind completo. Vejamos que $L_r^s({}^nE;F)$ é um subespaço de Riesz de $L_r({}^nE;F)$. Seja $A \in L_r({}^nE;F)$ um operador multilinear simétrico. Segue da Proposição 4.1.14 que

$$\begin{aligned} A^+(x_1,\ldots,x_n) &= \sup\left\{\sum_{i_1,\ldots,i_n}(A(z_{1,i_1},\ldots,z_{n,i_n}))^+ \colon z_m \in \Pi_{x_m}, 1 \le m \le n\right\} \\ &= \sup\left\{\sum_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(n)}}(A(z_{\sigma(1),i_{\sigma(1)}},\ldots,z_{\sigma(n),i_{\sigma(n)}}))^+ \colon z_m \in \Pi_{x_m}, 1 \le m \le n\right\} \\ &= A^+(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}), \end{aligned}$$

para todos $x_1,\ldots,x_n \in E$, em que para cada $1 \le m \le n$, o vetor positivo $z_{m,i_m} \in E_m$ é a i_m-ésima coordenada da partição $z_m = (z_{m,1},\ldots,z_{m,j_m}) \in \Pi_{x_m}$, e $\sigma \in S_n$. Isso mostra que A^+ é um operador n-linear simétrico.

Pelo Teorema 2.1.4(vi) temos $A \wedge B = A - (A-B)^+$ para todos $A, B \in L_r({}^nE;F)$. Isso implica que $L_r^s({}^nE;F)$ é fechado com respeito à operação de reticulado $\wedge$. Isso nos permite concluir, pela Proposição 2.1.13, que $L_r^s({}^nE;F)$ é subespaço de Riesz de $L_r({}^nE;F)$, e portanto é um espaço de Riesz.

Resta mostrar que $L_r^s({}^nE;F)$ é Dedekind completo. Consideremos uma rede crescente $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ em $L_r^s({}^nE;F)$ limitada superiormente. Pela Proposição 4.1.11,

$$\begin{aligned} \left(\sup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)(x_1,\ldots,x_n) &= \sup_{\alpha\in I} A_\alpha(x_1,\ldots,x_n) \\ &= \sup_{\alpha\in I} A_\alpha(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) \\ &= \left(\sup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

para todos $x_1,\ldots,x_n \in E^+$ e toda permutação $\sigma \in S_n$. Isso garante que o operador $\sup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ é simétrico no cone positivo de seu domínio. Pelo Teorema multilinear de Kantorovich segue que $\sup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha \in L_r^s({}^nE;F)$, o que completa a demonstração. □

Com a proposição acima temos as condições para que o espaço dos polinômios homogêneos seja um espaço de Riesz.

Proposição 5.2.5. *Sejam E e F espaços de Riesz com F Dedekind completo. Então $P_r({}^nE;F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo. Mais ainda,*

$$P^+ = \widehat{\left(\overset{\vee}{P}\right)^+}, \quad P^- = \widehat{\left(\overset{\vee}{P}\right)^-} \quad \text{e} \quad |P| = \widehat{\left|\overset{\vee}{P}\right|}$$

para todo $P \in P_r({}^nE;F)$.

Demonstração. Pela Proposição 5.2.4, o espaço $L_r({}^nE;F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo. Além disso, sabemos que $P({}^nE;F)$ e $L^s({}^nE;F)$ são isomorfos como espaços vetoriais pelo Teorema 5.1.3. Pela definição de polinômios positivos é imediato notar que o operador

$$A \in L_r^s(^nE;F) \longmapsto \widehat{A} \in P_r(^nE;F)$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais ordenados. Portanto, segue da Proposição 3.1.17 que $P_r(^nE;F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo. $\square$

O próximo resultado mostra, entre outras coisas, que as fórmulas do tipo Fremlin para operadores multilineares simétricos funcionam considerando a mesma partição em cada variável.

Proposição 5.2.6. *Sejam E e F espaços de Riesz com F Dedekind completo e seja $P \in P_r(^nE;F)$. Então para todo $x \in E^+$:*

$$\left\{ \sum_{i_1,\ldots,i_n}^{j} (\overset{\vee}{P}(z_{i_1},\ldots,z_{i_n}))^+ \colon z \in \Pi_x \right\} \uparrow \left(\overset{\vee}{P}\right)^+(x^n) = P^+(x),$$

$$\left\{ \sum_{i_1,\ldots,i_n}^{j} (\overset{\vee}{P}(z_{i_1},\ldots,z_{i_n}))^- \colon z \in \Pi_x \right\} \uparrow \left(\overset{\vee}{P}\right)^-(x^n) = P^-(x),$$

$$\left\{ \sum_{i_1,\ldots,i_n}^{j} |\overset{\vee}{P}(z_{i_1},\ldots,z_{i_n})| \colon z \in \Pi_x \right\} \uparrow \left|\overset{\vee}{P}\right|(x^n) = |P|(x),$$

onde $x = z_1 + \cdots + z_j \in E^+$ e, para cada $1 \leq m \leq n$, o vetor positivo $z_{i_m} \in E$ é a m-ésima coordenada da partição $z = (z_1,\ldots,z_j) \in \Pi_x$.

Demonstração. Seja $P \in P_r(^nE;F)$ e consideremos o seu operador multilinear simétrico associado $\overset{\vee}{P} \in L_r(^nE;F)$. Do Teorema 4.1.14 temos

$$P^+(x) = \left(\overset{\vee}{P}\right)^+(x^n) = \sup\left\{ \sum_{i_1,\ldots,i_n} (\overset{\vee}{P}(y_{1,i_1},\ldots,y_{n,i_n}))^+ \colon y_m \in \Pi_x, 1 \leq m \leq n \right\}, \tag{5.1}$$

e, além disso, a rede

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n} (\overset{\vee}{P}(y_{1,i_1},\ldots,y_{n,i_n}))^+ \right)_{y_m \in \Pi_x}$$

é crescente em F. Dessa forma, para cada $1 \leq m \leq n$ podemos trocar a partição $y_m \in \Pi_x$ por um refinamento $z \in \Pi_x$ comum a essas partições, e ainda assim temos o mesmo supremo, ou seja,

$$P^+(x) = \left(\overset{\vee}{P}\right)^+(x^n) = \sup\left\{ \sum_{i_1,\ldots,i_n}^{j} (\overset{\vee}{P}(z_{i_1},\ldots,z_{i_n}))^+ \colon z \in \Pi_x, 1 \leq m \leq n \right\},$$

em que, para cada $1 \leq m \leq n$, o vetor $z_{i_m} \in E^+$ é a m-ésima coordenada da partição $z = (z_1,\ldots,z_j) \in \Pi_x$. $\square$

5.3 Polinômios homogêneos e operadores multilineares simétricos regulares entre reticulados de Banach

Vimos no Teorema 5.2.4 da seção anterior que o espaço $L_r^s(^nE;F)$ é um espaço de Riesz (Dedekind completo) quando E e F são espaços de Riesz com F Dedekind completo. Agora, adicionaremos a hipótese de que E e F são reticulados de Banach, e veremos que o espaço vetorial normado $(\mathcal{L}_r^s(^nE;F), \|\cdot\|_r)$ é também um reticulado de Banach. Consequentemente, teremos o mesmo para o espaço de polinômios $(\mathcal{P}_r(^nE;F)$ munido de sua norma regular $\|\cdot\|_r)$, que será oportunamente definida.

Notemos que o espaço de Riesz (Dedekind completo) $\mathcal{L}_r(^nE;F)$ é um reticulado de Banach munido com a norma regular

$$\|A\|_r = \||A|\| = \sup\{\||A|(x_1,\dots,x_n)\| \colon \|x_i\| \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

quando E e F são reticulados de Banach com F Dedekind completo pelo Teorema 4.2.4. Nesse caso, se mostrarmos que $\mathcal{L}_r^s(^nE;F)$ é subespaço (fechado) de Riesz de $\mathcal{L}_r(^nE;F)$, então teremos condições de mostrar que $\mathcal{P}_r(^nE;F)$ é um reticulado de Banach.

Começamos com o seguinte lema simples.

Lema 5.3.1. *Seja E um reticulado de Banach e seja F um espaço de Riesz normado. Então*

$$L_r^s(^nE;F) = \mathcal{L}_r^s(^nE;F).$$

Demonstração. Segue diretamente da igualdade $L_r(^nE;F) = \mathcal{L}_r(^nE;F)$, garantida pelo Teorema 4.2.1. □

É importante ressaltar que o lema anterior não garante que $\mathcal{L}_r^s(^nE;F)$ é um espaço de Riesz. Entretanto, isso ocorre se F for Dedekind completo (Proposição 5.2.4). E ainda, se F é um reticulado de Banach temos o resultado a seguir.

Teorema 5.3.2. *Sejam E e F reticulados de Banach com F Dedekind completo. Então $\mathcal{L}_r^s(^nE;F)$ é um espaço de Riesz normado munido com a r-norma, e também é Dedekind completo.*

Demonstração. Pela Proposição 5.2.4 sabemos que $L_r^s(^nE;F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo. Segue do Lema 5.3.1 que $L_r^s(^nE;F) = \mathcal{L}_r^s(^nE;F)$, e logo $\mathcal{L}_r^s(^nE;F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo. Agora, observando que $\mathcal{L}_r^s(^nE;F)$ é subespaço (de Riesz) do reticulado de Banach $(\mathcal{L}_r(^nE;F), \|\cdot\|_r)$, segue que a norma regular faz de $\mathcal{L}_r^s(^nE;F)$ um espaço de Riesz normado. □

O teorema a seguir mostra que a norma regular é completa no espaço dos operadores simétricos regulares entre reticulados de Banach.

Teorema 5.3.3. *Sejam E e F reticulados de Banach com F Dedekind completo. Então $\mathcal{L}_r^s(^nE;F)$ é um reticulado de Banach munido com a r-norma.*

Demonstração. Já sabemos que $(\mathcal{L}_r^s(^nE;F), \|\cdot\|_r)$ é um espaço de Riesz normado pelo Teorema 5.3.2, restando mostrar que a norma $\|\cdot\|_r$ faz de $\mathcal{L}_r^s(^nE;F)$ um espaço de Banach. Para isso, mostraremos que o operador simetrização

$$s\colon \mathcal{L}_r(^nE;F) \longrightarrow \mathcal{L}_r(^nE;F)\ ,\ s(A) = A^s\ ,$$

é uma projeção (linear) de $\mathcal{L}_r(^nE;F)$ sobre $\mathcal{L}_r^s(^nE;F)$. Uma vez provado isso, pela Proposição 1.1.8 seguirá que $\mathcal{L}_r^s(^nE;F)$ é subespaço fechado do espaço de Banach $(\mathcal{L}_r(^nE;F), \|\cdot\|_r)$, logo será espaço de Banach pela Proposição 1.1.7.

Primeiro vejamos que s está bem definido. De fato, é claro que se $A \in L(^nE;F)$ é positivo, então $A^s \in L^s(^nE;F)$ é positivo. Dessa forma, pelo item (iv) da Proposição 5.1.2, se $A \in L(^nE;F)$ é regular (logo contínuo pela Proposição 4.2.1), digamos $A = A_1 - A_2$, então $A^s = A_1^s - A_2^s$ é um operador multilinear simétrico regular, o qual é contínuo pelo Lema 5.3.1.

As igualdades

$$s^2 = s \ \text{ e } \ s(\mathcal{L}_r(^nE;F)) = \mathcal{L}_r^s(^nE;F)$$

vêm dos itens (iii) e (ii) da Proposição 5.1.2, respectivamente.

Por fim, é fácil ver que s é um operador linear positivo do reticulado de Banach $(\mathcal{L}_r(^nE;F), \|\cdot\|_r)$ nele mesmo. Segue que s é contínuo pelo Teorema 3.2.1. Isso mostra que s é uma projeção de $\mathcal{L}_r(^nE;F)$ em $\mathcal{L}_r^s(^nE;F)$, concluindo o que faltava para completar a demonstração. $\square$

A seguinte desigualdade, que segue diretamente da Proposição 4.1.4, será útil na demonstração do resultado principal da seção.

Lema 5.3.4. *Seja $P\colon E \longrightarrow F$ um polinômio n-homogêneo positivo entre espaços de Riesz. Então $|P(x)| \leq P(|x|)$ para todo $x \in E$.*

Sabemos pelo Teorema 3.2.1 que os operadores lineares positivos entre um reticulado de Banach e um espaço de Riesz normado são contínuos. Com essa hipótese, o lema a seguir mostra que os polinômios regulares são contínuos.

Lema 5.3.5. *Seja E um reticulado de Banach e F um espaço de Riesz normado. Então*

$$P_r(^nE;F) = \mathcal{P}_r(^nE;F).$$

Demonstração. Seja $P\colon E \longrightarrow F$ um polinômio n-homogêneo positivo. Por definição, o operador n-linear simétrico $\check{P} \in L^s(^nE;F)$ é positivo, logo contínuo pelo Lema 5.3.1. Segue dos itens (i) e (vi) do Teorema 5.1.5 que $P \in \mathcal{P}_r(^nE;F)$. Como todo polinômio homogêneo regular é a diferença de dois polinômios homogêneos positivos, logo contínuos, a igualdade desejada segue. $\square$

Finalizamos nosso trabalho com o resultado principal desta seção.

Teorema 5.3.6. *Sejam E e F reticulados de Banach com F Dedekind completo. Então $\mathcal{P}_r(^nE;F)$ é um reticulado de Banach munido com a r-norma*

$$\|P\|_r := \||P|\| = \sup\{\||P|(x)\|\colon x \in B_E\}.$$

Demonstração. Primeiro mostremos que $\mathcal{P}_r(^nE;F)$ é espaço de Riesz. Dos Lemas 5.3.1 e 5.3.5 temos

$$L_r^s(^nE;F) = \mathcal{L}_r^s(^nE;F) \quad \text{e} \quad P_r(^nE;F) = \mathcal{P}_r(^nE;F);$$

e segue da Proposição 5.2.5 que $L_r^s(^nE;F)$ e $P_r(^nE;F)$ são isomorfos como espaços de Riesz. Com isso, garantimos que $\mathcal{P}_r(^nE;F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo.

Observemos que para qualquer vetor x de um espaço de Riesz vale que $x \leq |x|$, e $\|x\| = \||x|\|$ pela Proposição 2.2.2. Então, pelo Lema 5.3.4 e por F ser um reticulado de Banach, dado um polinômio n-homogêneo positivo $P\colon E \longrightarrow F$ temos

$$\|P(x)\| = \||P(x)|\| \leq \|P(|x|)\|$$

para todo $x \in E$. Dito isso, notemos que a norma regular de um polinômio homogêneo $P \in \mathcal{P}_r(^nE;F)$ é alcançada tomando apenas vetores positivos de B_E, isto é,

$$\|P\|_r = \sup\{\||P|(x)\|\colon x \in {B_E}^+\}.$$

Sendo assim, consideremos polinômios homogêneos $P, Q \in \mathcal{P}_r(^nE;F)$ tais que $|P| \leq |Q|$. Como $|P|(x) \leq |Q|(x)$ para todo $x \in E^+$, então

$$\|P\|_r = \sup\{\||P|(x)\|\colon x \in {B_E}^+\} \leq \sup\{\||Q|(x)\|\colon x \in {B_E}^+\} = \|Q\|_r.$$

Logo, a norma regular é uma norma reticulada.

Finalmente, pelo fato do operador linear

$$A \in \mathcal{L}_r^s(^nE;F) \longmapsto \widehat{A} \in \mathcal{P}_r(^nE;F)$$

ser um isomorfismo entre espaços vetoriais ordenados, segue do Teorema 3.2.1 que esse operador linear também é um isomorfismo topológico entre espaços normados. Daí, como $\mathcal{L}_r^s(^nE;F); \|\cdot\|_r)$ é um reticulado de Banach pelo Teorema 5.3.3, concluímos que $\mathcal{P}_r(^nE;F)$ é um espaço de Banach com a norma regular. Portanto, $\mathcal{P}_r(^nE;F)$ é um reticulado de Banach Dedekind completo. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Abramovich, Y. A. e Aliprantis, C. D., *An Invitation to Operator Theory*, American Mathematical Society, 2002. `https://doi.org/10.1090/gsm/050`.

[2] Abramovich, Y. A. e Wickstead, A. W., *A compact regular operator without modulus*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 721–726. `https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1992-1098395-7`.

[3] Aliprantis, C. D. e Burkinshaw, O., *Positive Operators*, Springer, 2006. `https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5008-4`.

[4] Anderson, J. D., *Non-linear additive functions*, Pi Mu Epsilon Journal **7** (1979), no. 1, 7-12.

[5] Alves, T. R., *Polinômios dominados entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2011.

[6] Banasiak, J., *Banach lattices in applications*, Department of Mathematics and Applied Mathematics University of Pretoria, Disponível em:
<https://www.up.ac.za/media/shared/259/Documents/Teaching%20material/ablbook.zp158048.pdf>,
Acesso em: 22 de Novembro de 2021.

[7] Bartle, R., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, Inc., 1995. `https://doi.org/10.1002/9781118164471`.

[8] Botelho, G., Pellegrino, D. e Teixeira, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, 2a. Edição, Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[9] Buskes, G. e van Rooij, A., *Bounded variation and tensor products of Banach lattices*, Positivity **7** (2003), 47–59. `https://doi.org/10.1023/A:1025898718431`.

[10] Chen, Zi Li e Wickstead, A. W., *The order properties of r-compact operators on Banach lattices*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **23** (2007), no. 3, 457–466. `https://doi.org/10.1007/s10114-005-0783-2`.

[11] Dales, H. G., *Banach Algebras and Automatic Continuity*, Oxford Science Publications, 2000. `http://doi.org/10.1112/S002460930221125X`.

[12] Dineen, S., *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Sringer, 1999. `https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0869-6`.

[13] Fabian, M., Habala, P., Hájek, P., Montesinos, V., Zizler, V., *Banach Space Theory, The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer, 2011. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7515-7.

[14] Fremlin, D. H., *Tensor products of archimedean vector lattices*, Amer. J. Math. **94** (1972), no. 3, 777-798. https://doi.org/10.2307/2373758.

[15] Fremlin, D. H., *Tensor products of Banach lattices*, Math. Ann. **211** (1974), 87-106. https://doi.org/10.1007/BF01344164.

[16] Fremlin, D. H., *Topological Riesz Spaces and Measure Theory*, Cambridge University Press, 1974. https://doi.org/10.1017/CBO9780511897207.

[17] Hájek, P., Johanis, M., *Smooth Analysis in Banach Spaces*, De Gruyter, 2014. https://doi.org/10.1515/9783110258998.

[18] Kaplan, S., *An example in the space of bounded operators from $C(X)$ to $C(Y)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1973), 595–597. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1973-0318959-3.

[19] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 1, 14.ed., IMPA, 2017.

[20] Lindenstrauss, J., Tzafriri, L., *Classical Banach Spaces II - Function Spaces*, Springer, 1996. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53294-2.

[21] Loane, J., *Polynomials on Riesz Spaces*, PhD. Thesis, Department of Mathematics, National University of Ireland, Galway, 2007.

[22] Luiz, J. L. P., *Propriedades de Schur positivas em reticulados de Banach e reticulabilidade em espaços de sequências vetoriais*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 2021.

[23] Meyer-Nieberg, P., *Banach Lattices*, Springer-Verlag, 1991. https://doi.org/10.1007/978-3-642-76724-1.

[24] Mujica, J., *Complex Analysis in Banach Spaces*, Dover Publications, 2010.

[25] Nogueira, D. F., *Espaços de sequências vetoriais e ideais de operadores*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2016.

[26] Santos, R. J., *Introdução à Álgebra Linear*, Imprensa Universitária da UFMG, 2013.

[27] Schaefer, H., *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, 1974. https://doi.org/10.1007/978-3-642-65970-6.

[28] Silva, A. R., *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2010.

[29] Wickstead, A. W., *Regular Operators between Banach Lattices*, Positivity, Trends in Mathematics, 255-279, Birkhäuser Verlag, 2007. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8478-4_9.

[30] Xiong, H. Y., *On whether or not $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{L}^r(E;F)$ for some classical Banach lattices E and F*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 46 (1984), no. 3, 267–282. https://doi.org/10.1016/1385-7258(84)90027-1.

[31] Zaanen, A. C., *Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces*, Springer-Verlag, 1997. https://doi.org/10.1007/978-3-642-60637-3.