

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS DO PONTAL
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

LARA LEANDRA FERREIRA SILVA

**NÚMEROS INTEIROS: Um estudo bibliográfico sobre as pesquisas em história da
matemática**

ITUIUTABA

2022

LARA LEANDRA FERREIRA SILVA

**NÚMEROS INTEIROS: Um estudo bibliográfico sobre as pesquisas em história da
matemática**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Ciências Exatas
e Naturais do Pontal da Universidade
Federal de Uberlândia (ICENP/UFU) como
requisito parcial para obtenção do título de
Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dra. Cristiane Coppe de
Oliveira.

ITUIUTABA

2022

LARA LEANDRA FERREIRA SILVA

NÚMEROS INTEIROS: Um estudo bibliográfico sobre as pesquisas em história da matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal da Universidade Federal de Uberlândia (ICENP/UFU), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática, à seguinte Banca Examinadora:

BANCA EXAMINADORA:

Prof^ª. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira - Orientadora (ICENP/UFU)

Prof. Dr. Leandro de Oliveira Souza (ICENP/UFU)

Prof. Dr. Rogério Fernando Pires (ICENP/UFU)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer a Deus, por eu ter chegado até aqui, e por Ele ter me sustentado.

Agradeço à minha família, em especial, à minha mãe, Marilyn, e ao meu pai, Leandro, que sempre estiveram me apoiando e me dando força. À minhas irmãs, Amanda e Lívia, que viveram comigo todo esse tempo, e hoje, almejam entrar em uma Universidade Federal.

Aos meus professores, por toda paciência e calma durante essa trajetória, por todos os ensinamentos, sem os quais, nada disso seria possível.

Quero agradecer, de forma especial, à minha orientadora, Professora Dra. Cristiane Coppe, que se propôs a me orientar, em meio a tudo que estava acontecendo.

Grata por todas as amizades conquistadas na Universidade, que me ajudaram todo o tempo e me deram forças para conquistar esse momento.

RESUMO

Este trabalho, de cunho qualitativo e bibliográfico, tem como objetivo investigar as pesquisas em história da matemática e em educação matemática acerca dos números inteiros. A questão que orientou esta investigação foi: O que trazem as pesquisas em história da matemática sobre os números inteiros e qual sua contribuição para a superação das dificuldades de aprendizagem desse conceito? A relevância dessa discussão está em entender como se processa essa dificuldade na aprendizagem matemática, sobretudo no entendimento sobre os números inteiros negativos, uma vez que essa questão foi problematizada nas discussões teóricas na graduação e em atividades práticas, especialmente, nas experiências do Estágio Supervisionado I. Tal disciplina trata-se de um componente curricular obrigatório do Curso de Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal – UFU. Por meio das observações iniciais, ao longo do estágio identificou-se a grande dificuldade dos alunos ao se depararem com os números inteiros negativos. A partir dos trabalhos investigados, constatou-se que foi possível recorrer a elementos históricos da sociedade medieval para compreender como se processa o trato com os números inteiros negativos e que é possível fazer aproximações entre o cotidiano do aluno e as sociedades e intelectuais matemáticos que, ao longo da história, rejeitavam a ideia dos números negativos. Tal proposta pôde evidenciar o interesse dos estudantes e revelar suas potencialidades. Em relação às contribuições teóricas e formativas do estudo, destaca-se que o contato com o material bibliográfico permitiu um aprofundamento às questões que foram discutidas no interior da graduação, contribuindo para a formação inicial da pesquisadora.

Palavras-chave: História da matemática. Matemática. Números inteiros negativos. Ensino.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

Figura 1: Sistema de Numeração Babilônica	12
Figura 2: Números egípcios.....	13
Figura 3: Números gregos	13
Figura 4: Números chineses	14
Figura 5: Números indianos	15
Figura 6: Números arábicos	15
Figura 7: Números maias	16
Figura 8: Números Romanos.....	17
Figura 9: Números Medievais	17

QUADROS

Quadro 1: Catálogo de Teses e Dissertações da Capes.....	25
Quadro 2: Exemplo de como poderia ser feita o registro numérico relacionando-o com os contrários.....	29

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS	08
1. CONTEXTUALIZANDO A PESQUISA: OS NÚMEROS INTEIROS	11
1.1. Os números inteiros.....	11
2. NÚMEROS INTEIROS NAS ANTIGAS CIVILIZAÇÕES	18
2.1 Conceito dos números inteiros negativos	18
2.2 Um esboço da história das antigas civilizações em relação aos números negativos	19
3. O ENSINO DOS NÚMEROS INTEIROS NO CONTEXTO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: diferentes abordagens.....	21
3.1 Aprendendo com o trabalho de Luna (2019)	25
3.1 Aprendendo com o trabalho de SILVA (2012)	30
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	34
REFERÊNCIAS	36

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No período de escolarização, estudantes se deparam com enfrentamentos acerca de muitas áreas do conhecimento. Alguns apresentam maior identificação com saberes específicos, relacionados a conteúdos; outros preferem saberes transversais, envolvendo aspectos da criticidade e produção de conhecimento. Essa aproximação, ou esse distancimento, está atrelado, dentre outras questões, ao modo como são apresentados aos estudantes, bem como à cultura escolar de que algumas “disciplinas” (competentes curriculares) são mais “fáceis” do que outras, na perspectiva do estudante. Esse julgamento se dá, muitas vezes, pela abordagem metodológica, de muitos professores, na transposição didática em sua formação inicial, nas horas excessivas de trabalho e na exaustão com sua prática docente, entre tantos outros fatores, revelando conteúdos que podem ser vistos como menos ou mais “difíceis” que outros. Dentre as disciplinas consideradas por alguns estudantes como mais difícil, a Matemática se destaca.

Segundo Alves (2003, p. 41), “[...] é possível que o problema esteja relacionado ao tipo de metodologia aplicada pelos professores que, geralmente, mal preparados, não levam em consideração fatores importantes, como o contexto social, econômico e cultural dos alunos [...]”. Neste sentido, uma das principais barreiras na aquisição de conhecimentos e de habilidades matemáticas está atrelada à forma como são ensinados os conteúdos aos educandos.

No entanto, de acordo com Soares (2007), as dificuldades de aprendizagem na Matemática estão ligadas, além da ineficiência didática de professores, também, à cultura universal de que a Matemática é uma disciplina difícil, estando reservado o seu entendimento às pessoas “mais inteligentes”. Outro fator a se considerar é que “o aluno tem que trabalhar em matemática porque a isso é obrigado pela escola; muitas vezes não tem qualquer interesse especial por este assunto, não sendo fácil ao professor levá-lo a assumir uma outra atitude” (PONTE, 1992, p. 3).

Apesar de ser uma área do saber que perpassa o ensino formal, estando presente na vida muitos indivíduos, em diferentes grupamentos sociais, a Matemática carrega o estigma de ser uma “matéria” difícil, diante das outras que compõem a grade curricular das escolas de Educação Básica (SOARES, 2007). Essa dificuldade caracterizada na aprendizagem dos saberes matemáticos acarreta sérios problemas no processo formativo do estudante, que passa toda a sua vida escolar levando consigo esse *déficit*, interferindo, sobretudo, em sua vida extraescolar.

Outrossim, dentro do conjunto de saberes presentes nessa área do conhecimento, alguns assuntos geram maior ou menor dificuldade entre os alunos. Ou seja, alguns educandos têm

maior facilidade na resolução de problemas com operações e/ou formas geométricas; outros já se deparam com a disposição em lidar com equações etc. Já outros encontram dificuldades, por exemplo, com conjuntos numéricos (números inteiros, reais, naturais, complexos etc.). No caso desta investigação, a discussão circunscreve-se nas dificuldades apresentadas por alunos no entendimento dos números inteiros, especificamente, no tratamento com os negativos.

Nessa perspectiva, a relevância dessa discussão está em entender como se processa essa dificuldade na aprendizagem matemática, sobretudo, no entendimento sobre os números inteiros negativos, uma vez que essa questão foi problematizada nas discussões teóricas na graduação e em atividades práticas, especialmente, nas experiências do Estágio Superacionado I. Tal disciplina trata-se de um componente curricular obrigatório do Curso de Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal da UFU. Por meio das observações iniciais, ao longo do estágio identificou-se a grande dificuldade dos alunos ao se depararem com os números inteiros negativos.

No decorrer do curso, a autora desse trabalho pôde participar de projetos como o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e o programa Residência Pedagogia, além de atividades profissionais, trabalhando em algumas escolas da rede pública e privada da cidade de Ituiutaba, em Minas Gerais. Por meio dessas experiências, teve-se o contato com a realidade da sala de aula; pôde-se notar que, de acordo com que os níveis de ensino iam aumentando, a dificuldade dos alunos ao se deparar com os números inteiros negativos nos resultados das contas, em equações, ou até mesmo em problemas mais simples propostos nas aulas, também iam se agravando.

Assim, essa realidade percebida nos educandos provocou inquietações, uma vez que os professores não tinham desenvolvido nenhuma estratégia de ensino para que essa dificuldade fosse sanada, considerando as experiências vivenciadas pela autora desse trabalho. A esse respeito, Melo (2005) convida-nos a pensar sobre a formação docente. Para o autor, tratar sobre o processo formativo dos professores é uma ação urgente nos cursos superiores, pois muitos saem de seus cursos ainda despreparados para a realidade escolar, enfrentando dificuldades na transposição dos conhecimentos matemáticos aos seus alunos. No entanto, mesmo com as deficiências nos cursos superiores, sobretudo nos cursos de Matemática, conforme apontado pelo autor, ressalta-se que no sétimo período cursou-se uma disciplina do curso de Matemática, a saber: História da matemática. Na referida disciplina, estuda-se a história da matemática, abordando o princípio de tudo que vemos nessa área do conhecimento. Nesse contexto, percebeu-se que a história da matemática pode ser um ferramenta didática eficaz para o ensino

e aprendizagem e pode contribuir para auxiliar os professores em sua prática educativa e, ainda, sanar as dificuldades dos alunos no processo de ensino e aprendizagem. Desse modo, no contato com a disciplina, percebeu-se que a história da matemática poderia ser pensada/utilizada como recurso metodológico, articulando-a com o conteúdo de números inteiros a partir de sua história, investigando sua origem, a necessidade dos números inteiros negativos e como os matemáticos das antigas civilizações lidaram com a sua aceitação.

Sendo assim, propôs-se usar a história da matemática como recurso didático, pois as pesquisas apontam que essa alternativa está sendo eficaz na superação de dificuldades na aprendizagem e trazendo contribuições significativas. Diante disso, desenvolveu-se a seguinte pergunta para a pesquisa: O que trazem as pesquisas em história da matemática sobre os números inteiros e qual sua contribuição para a superação das dificuldades de aprendizagem desse conceito?

Para responder ao problema proposto, elencou-se objetivos. O objetivo geral foi investigar as pesquisas em história da matemática e em educação matemática acerca dos números inteiros. Quanto aos objetivos específicos, pretende-se: identificar as categorias emergentes nas pesquisas desenvolvidas sobre a história dos números inteiros; e conhecer as contribuições da história da matemática, essencialmente dos números inteiros, para o processo de ensino e aprendizagem

Desse modo, a presente pesquisa, denominada bibliográfica e de abordagem qualitativa, foi dividida em três capítulos. No primeiro capítulo, intitulado “Números inteiros nas antigas civilizações”, será abordado o conceito dos números inteiros, em particular, os negativos; a origem dos números inteiros negativos e como eram os sistemas de numeração. Apresenta-se um esboço da história das antigas civilizações, abordando alguns matemáticos da época e suas contribuições para a aceitação ou não dos números inteiros negativos.

No segundo capítulo, que tem o título “Contextualizando a pesquisa: os números inteiros”, será abordado o princípio dos números primitivos e de algumas civilizações que foram importantes para a formação do sistema numérico que hoje utilizamos.

No capítulo três, intitulado de “O ensino dos números inteiros no contexto da história da matemática: diferentes abordagens”, recorreremos a dois trabalhos que defendem diferentes concepções metodológicas de ensino dos números inteiros, no sentido de problematizar as possibilidades de práticas desse conteúdo para alunos do Ensino Fundamental. Um dos trabalhos analisados apontam uma perspectiva histórica sobre o conceito; o outro, sugere o uso da aproximação do conceito com a realidade dos alunos.

1. CONTEXTUALIZANDO A PESQUISA: OS NÚMEROS INTEIROS

1.1. Os números inteiros

Nos dias atuais, os números estão presentes na maioria das atividades que fazemos durante o nosso dia a dia, seja nas tecnologias, no sistema monetário ou financeiro, em códigos de barras, páginas de livros, embalagens de produtos, nos documentos pessoais, dentre outros. Diante disso, percebe-se que é impossível excluirmos os números de nossas vidas.

Não há estudos que apontem uma data ou época específica em que ocorreu a descoberta dos números, e nem se eles foram descobertos por um indivíduo ou por uma tribo, mas podemos imaginar que a matemática surgiu através da necessidade do homem ao realizar as atividades de seu cotidiano. Podemos pensar na ideia de que os números surgiram na idade da pedra lascada (Paleolítica).

Naquele tempo, os seres humanos viviam em cavernas, para se proteger dos animais selvagens e do frio. Os registros eram feitos através de marcações em varas ou de desenhos em paredes. De acordo com a evolução humana, iniciou-se a plantação, a produção de alimentos, a domesticação de animais e a construção de casas.

De acordo com Santos (2016), a contagem se iniciou através dos pastores, pois eles tinham a necessidade de fazer a contagem de seus rebanhos; então, para a realização do controle, eles utilizavam pedrinhas. Assim, de acordo com as saídas das ovelhas saindo para o pasto, soltava-se uma pedrinha, para que ele soubesse a quantidade de animais que tinha ido para o pasto. Feito esse processo, o monte de pedrinhas formado era guardado. Quando os animais retornavam, o mesmo procedimento era feito, mas de forma contrária, ou seja, as pedras eram retiradas do monte na medida em que as ovelhas iam passando. Então, se sobrasse alguma pedra, ele saberia que alguma ovelha tinha se perdido do grupo; e se faltasse, saberia que seu rebanho havia aumentado.

Os historiadores apontam evidências para a versão da origem da contagem por meio de pedrinhas. De acordo com Santos (2016) *apud* Imenes (1990, p. 15), a “[...] origem da contagem por meio de pedrinhas está associada a linguagem, ou seja, “a palavra **cálculo** originou-se da palavra latina *calculus*, que significa 'pedrinha'. Essa deve ser a origem da palavra **calcular**: contar com pedrinhas”.

Além das pedras, para representar a contagem, o homem primitivo fazia o uso de sementes, folhas secas, gravetos, pedaços de pau com talhos e os clássicos dedos das mãos, que

são utilizados até os dias atuais (SANTOS, 2016).

Com o passar do tempo e com o desenvolvimento da humanidade, a necessidade de registrar quantidades aumentou. Assim, cada civilização foi criando e desenvolvendo formas de representar a numeração escrita. Um marco importante na matemática foi a criação dos símbolos, para a representação de quantidades.

Iniciaremos nossa discussão com a civilização babilônica. As informações iniciais sobre essa civilização aconteceram no século XIX, em que foram encontrados textos em tábuas (ou tabuletas) de argila. Algumas dessas tábuas eram dedicadas, especialmente, para problemas matemáticos. Os primeiros babilônios tratavam a matemática de forma indutiva. Tal informação está em tábuas mais antigas. Outras mostram habilidades com um sistema sexagesimal que estava ligado a transações comerciais. Por meio de tábuas, foi possível identificar que os mesopotâmicos tinham conhecimentos e contato direto com faturas, recibos, notas promissórias, crédito, juro simples e composto, hipotecas e escrituras de venda e endossos.

Figura 1: Sistema de Numeração Babilônica

1	∩	11	<∩	21	≪∩	31	≪≪∩	41	≪≪∩	51	≪≪∩
2	∩∩	12	<∩∩	22	≪∩∩	32	≪≪∩∩	42	≪≪∩∩	52	≪≪∩∩
3	∩∩∩	13	<∩∩∩	23	≪∩∩∩	33	≪≪∩∩∩	43	≪≪∩∩∩	53	≪≪∩∩∩
4	∩∩∩∩	14	<∩∩∩∩	24	≪∩∩∩∩	34	≪≪∩∩∩∩	44	≪≪∩∩∩∩	54	≪≪∩∩∩∩
5	∩∩∩∩∩	15	<∩∩∩∩∩	25	≪∩∩∩∩∩	35	≪≪∩∩∩∩∩	45	≪≪∩∩∩∩∩	55	≪≪∩∩∩∩∩
6	∩∩∩∩∩∩	16	<∩∩∩∩∩∩	26	≪∩∩∩∩∩∩	36	≪≪∩∩∩∩∩∩	46	≪≪∩∩∩∩∩∩	56	≪≪∩∩∩∩∩∩
7	∩∩∩∩∩∩∩	17	<∩∩∩∩∩∩∩	27	≪∩∩∩∩∩∩∩	37	≪≪∩∩∩∩∩∩∩	47	≪≪∩∩∩∩∩∩∩	57	≪≪∩∩∩∩∩∩∩
8	∩∩∩∩∩∩∩∩	18	<∩∩∩∩∩∩∩∩	28	≪∩∩∩∩∩∩∩∩	38	≪≪∩∩∩∩∩∩∩∩	48	≪≪∩∩∩∩∩∩∩∩	58	≪≪∩∩∩∩∩∩∩∩
9	∩∩∩∩∩∩∩∩∩	19	<∩∩∩∩∩∩∩∩∩	29	≪∩∩∩∩∩∩∩∩∩	39	≪≪∩∩∩∩∩∩∩∩∩	49	≪≪∩∩∩∩∩∩∩∩∩	59	≪≪∩∩∩∩∩∩∩∩∩
10	<	20	≪	30	≪≪	40	≪≪≪	50	≪≪≪		


Fonte: Cipriano (2016, p. 18).

A matemática babilônica, como já foi dito, era baseada em um sexagesimal ou sistema numérico de base 60 (Figura 1), que poderia ser contado utilizando os 12 nós dos dedos de uma mão e os cinco dedos da outra. Os números babilônios usavam um verdadeiro sistema de valores posicionais, em que os dígitos escritos na coluna da esquerda representavam valores maiores, como no sistema decimal moderno, embora, é claro, usando a base 60, e não a base 10.

Os egípcios criaram o sistema de numeração de base 10 totalmente desenvolvido, sendo o mais antigo; isso por volta de 2700 A.c. (Figura 2). Números escritos usavam um traço para

unidades, um símbolo de osso do calcânhar para dezenas, uma bobina de corda para centenas e uma planta de lótus para milhares, bem como outros símbolos hieroglíficos para potências superiores de dez a um milhão. No entanto, não havia nenhum conceito de valor posicional; então, números maiores eram bastante difíceis de manejar (embora um milhão exigisse apenas um caractere e um milhão menos um exigisse 54 caracteres) (HISTORY OF MATEMATICS, 2020).

Figura 2: Números egípcios

Value	1	10	100	1,000	10,000	100,000	1,000,000
Hieroglyph		∩	ϣ	⊥	∩	⤴ or ⤵	⊥
Example: 4,622 would be shown as:							

Fonte: History of Matematics (2020).

Embora a civilização egípcia se preocupasse com o sistema de numeração, o foco dela, em especial, era a geometria, que era área que a auxiliava em grandes realizações, como as monumentais pirâmides. Por diversos fatos, a matemática do Egito não atingiu o mesmo nível da Matemática babilônica.

Na civilização grega, o número era observado e até mesmo venerado pelos pitagóricos, que consideravam que o número era a essência de todas as coisas, e fizeram desse pensamento uma doutrina das Escolas Pitagóricas. Os povos dessa civilização conceituavam os números como números inteiros positivos. Eles utilizaram alguns elementos da matemática dos babilônios e dos egípcios, mas logo desenvolveram seu próprio sistema numérico com méritos deles (Figura 3).

Figura 3: Números gregos

Value	1	2	3	4	5	10	20	21	50	100	500	1,000
Greek Herodianic Numeral	I	II	III	IIII	Γ	Δ	ΔΔ	ΔΔI	Ϟ	H	Ϟ	Χ

Example:

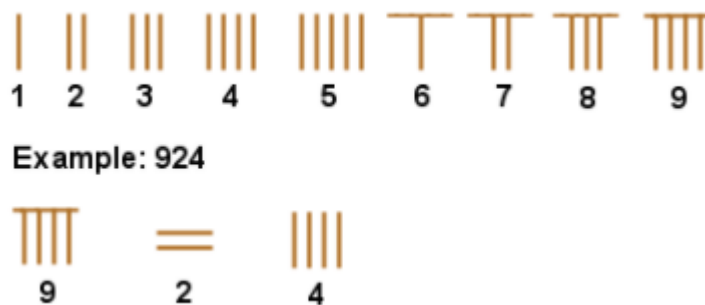
4,672 would be shown as: XXXXHHHHHHHϞΔΔII

Fonte: <https://www.storyofmathematics.com/greek.html/>.

O antigo sistema de numeração grego, conhecido como numerais áticos ou herodiânicos, foi totalmente desenvolvido por volta de 450 a.C., e em uso regular, possivelmente já no século 7 a.C. Era um sistema de base 10 semelhante ao egípcio anterior (e ainda mais semelhante ao sistema romano posterior), com símbolos para 1, 5, 10, 50, 100, 500 e 1.000 repetidos quantas vezes fossem necessárias, para representar o número desejado.

Na china medieval, as descobertas em relação à matemática iniciaram-se por volta de 1030 a.C.; no entanto, há divergência quanto as datas das obras chinesas. O desenvolvimento do império comercial chinês levou a matemática a patamares cada vez maiores (HISTORY OF MATHEMATICS, 2020).

Figura 4: Números chineses



Fonte: <https://www.storyofmathematics.com/chinese.html/>.

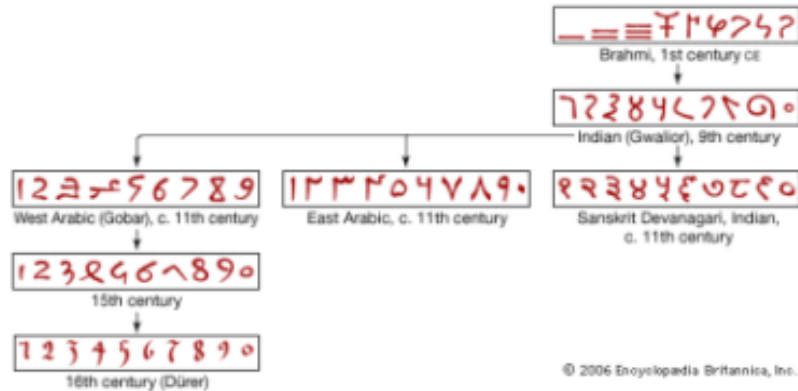
O antigo **sistema de numeração chinês** simples (Figura 4), mas eficiente, remonta, pelo menos, ao segundo milênio a.C; usava pequenas hastes (barras) de bambu, dispostas para representar os números de 1 a 9, que eram colocados em colunas – representando unidades, dezenas, centenas, milhares etc. Era, portanto, um **sistema de valor de casas decimais**, muito semelhante ao que usamos hoje – na verdade, foi o primeiro sistema numérico adotado pelos chineses mais de mil anos antes de ser adotado no Ocidente (HISTORY OF MATHEMATICS, 2020).

Os números escritos, no entanto, empregavam o sistema um pouco menos eficiente de usar um símbolo diferente para dezenas, centenas, milhares etc. Isso ocorria, principalmente, porque não havia conceito ou símbolo de zero e tinha o efeito de limitar a utilidade da escrita número em chinês.

A civilização indiana teve contribuições importantes para a matemática, pela forma que usava sistema de numeração decimal e posicional, com o uso de nove símbolos e do zero (Figura 5). O sistema prático e contínuo serviu de sustentação para a evolução da matemática. Porém,

o sistema de numeração dos hindus foi criado por meio de várias ideias anteriores ao conhecimento desse povo. Como referência, os povos dessa civilização tiveram a matemática chinesa e a babilônica para chegar ao referido sistema de numeração.

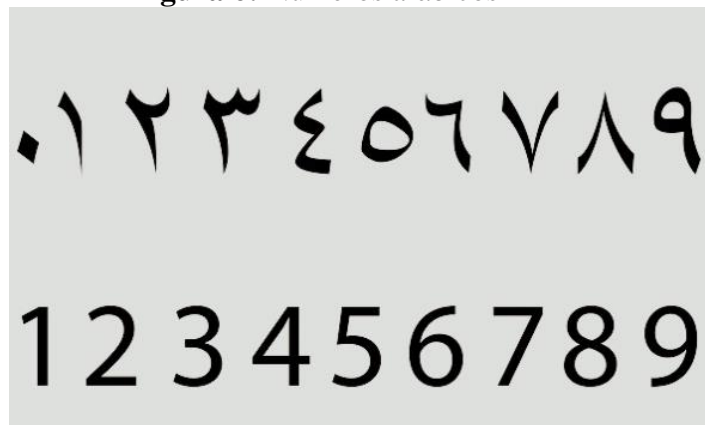
Figura 5: Números indianos



Fonte: <https://www.storyofmathematics.com/indian.html/>.

A civilização Árabe, em relação ao conhecimento matemático, foi fortemente influenciada pela aritmética hindu. Diante disso, os povos dessa civilização passaram a ter facilidade em usar números (Figura 6) e se tornaram especialistas em cálculos, pois, antes desse ocorrido, eles escreviam os números em palavras. Segundo Souza (2010), a forma como os hindus articulavam os cálculos matemáticos, por meio dos seus algarismos, de certo modo, facilitava “[...] a prática de todas as operações aritméticas”. Ademais, acerca da forma como eram feitas as operações aritméticas pelos ocidentais, os árabicos a denominavam de “[...] *ghobar* (poeira), por causa da poeira fina com a qual os calculadores costumavam salpicar suas tábuas para traçar os algarismos e efetuar todo tipo de operações” (SOUZA, 2010, n.p.).

Figura 6: Números arábicos



Fonte: <https://www.significados.com.br/algarismos-arabicos/>.

Além da cultura dos hindus, os árabes herdaram alicerces da Grécia Clássica. Sendo assim, essa cultura também teve forte influência em relação ao desenvolvimento da matemática. Além disso, pode-se notar forte semelhança entre o sistema numérico dos hindus e o dos árabes.

A civilização Maia, por volta de 300 a.C, utilizava um sistema vigesimal com base 20 (e, até certo ponto base 5), possivelmente originado a partir da contagem dos dedos das mãos e dos pés. Esse sistema era organizado por meio de dois símbolos o ponto (.) para representar o numeral 1 e a barra (-) para representar o numeral 5 (Figura 7) (HISTORY OF MATEMATICS, 2020).

Figura 7: Números maias



Example:

$$28 = (1 \times 20) + 8 = \begin{array}{c} \bullet \\ \text{—} \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

$$433 = (1 \times 400) + (1 \times 20) + 13 = \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \text{—} \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

Fonte: <https://www.storyofmathematics.com/mayan.html/>.

Para os povos maias, a astrologia era muito importante. Diante disso, para desenvolver os cálculos necessários para formar o calendário, “o ano Maia estava dividido em 18 meses com 20 dias cada, e os maias não trabalhavam com as posições 200 , 20^1 , 20^2 , ..., mas sim 200 , $20^1 \cdot 18$ (360); $20^2 \cdot 18$ (7200); $20^3 \cdot 18$ (144000); e assim por diante” (TEODORO, 2013, n.p.). Então, os maias construíram um sistema numérico sofisticado e o mais avançado do que qualquer um outro no mundo na época (embora não se tenha certeza das datações).

A civilização romana, em meados do século 1 a.C, havia reforçado seu domínio sobre os antigos impérios gregos e helenísticos, e a revolução matemática dos gregos parou. Apesar dos avanços em outras áreas, na matemática não ocorreu nenhuma inovação sob os Impérios Romano e Republicano.

Figura 8: Números Romanos

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1,000

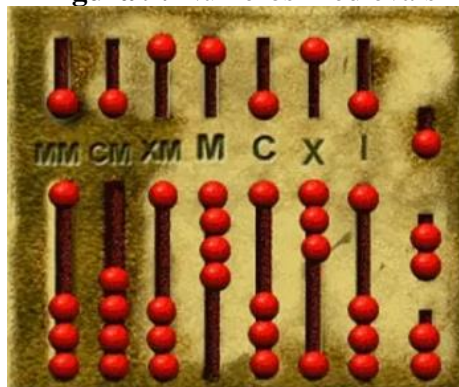
Example:

$$1,944 = \text{MDCCCXXXIII} = \text{MCMXLIV}$$

Fonte: <https://www.infoescola.com/matematica/numeros-romanos/>.

Os algarismos romanos (Figura 8) são bem conhecidos hoje em dia e foram o sistema de numeração dominante para comércio e administração na maior parte da Europa, durante a maior parte do milênio. Era um sistema decimal (base 10), mas não posicional diretamente, e não incluía um zero, de modo que, para fins aritméticos e matemáticos, era um sistema desajeitado e ineficiente. Foi baseado em letras do alfabeto romano - I, V, X, L, C, D e M - combinadas para significar a soma de seus valores (por exemplo, VII = V + I + I = 7). Posteriormente, também foi adotada uma notação subtrativa, em que VIII, por exemplo, foi substituído por IX (10 - 1 = 9), o que simplificou um pouco a escrita dos números, mas dificultou, ainda mais, o cálculo, exigindo conversão da notação subtrativa no início de uma soma e, em seguida, sua reaplicação no final.

Na idade média, na Europa, mais conhecida como “Idade das Trevas”, houve uma baixa evolução científica alcançada pelos medievais em todas as áreas do conhecimento; diante disto, alguns historiadores consideram que os empreendimentos intelectuais estagnaram; então, pouco se falou sobre os números inteiros nesse período.

Figura 9: Números Medievais

Fonte: <https://www.storyofmathematics.com/medieval.html/>.

Destaca-se que o ábaco medieval da Figura 9 foi baseado nos modelos romano e grego.

2. NÚMEROS INTEIROS NAS ANTIGAS CIVILIZAÇÕES

2.1 Conceito dos números inteiros negativos

O número é um conceito fundamental em matemática que tomou forma com o desenvolvimento histórico da matemática. Os números inteiros, em especial os negativos, segundo Anjos (2008), apareceram pela primeira vez na China antiga, em um livro, em que eles separavam os gravetos ou barra em duas cores, vermelho e preto. Os gravetos e barras vermelhos eram usados para se referir aos números positivos e os pretos, aos negativos; e embora os chineses usassem números negativos, eles não aceitavam que os resultados das resoluções fossem negativos.

Alguns matemáticos dos séculos XVI e XVII tiveram a não aceitação dos números negativos. Para eles, os números negativos representavam somente símbolos, e os que aceitavam não os consideravam como raízes de equações. O matemático Cardan reconhecia a importância das raízes negativas, mas as chamava de fictícias. Em uma de suas obras, ele dividiu os números em dois grupos, um intitulado como verdadeiros e o outro como fictício – que, nesse contexto, seriam os falsos; os verdadeiros seriam os números reais de sua época (os naturais, as frações positivas e alguns irracionais) e os fictícios seriam os negativos e suas raízes quadradas.

Viète, o apresentador dos símbolos $+$, $-$ e $=$, e um dos primeiros a inserir coeficientes lineares nas equações, não aceitou os negativos como capazes de ser representado por tais coeficientes. Segundo Medeiros e Medeiros (1992, n.p.), para Viète,

O símbolo $-$, por outro lado, referia-se apenas a operação de subtração entre números ‘verdadeiros’, não carregando o duplo significado, que posteriormente viria a ser adotado, de número e operação e que muitas pessoas, por estarem hoje acostumadas, tomam por natural. Para Viète; os números negativos eram desprovidos do significado intuitivo e físico que os negativos possuíam (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, n.p.).

A aceitação dos números negativos, mesmo após tanto tempo, ainda é um caso a se discutir; muitos os enxergam com complexidade, e por isso acreditam não saber operar com eles (ANJOS, 2008).

Diante das dificuldades para compreender a utilização dos números negativos, usamos exemplificações de perdas e ganhos, associação com temperaturas, lucro e prejuízo, para mostrar que esses números fazem parte do nosso cotidiano e que são utilizados constantemente (SOUZA; ALVARENGA; SILVEIRA, 2014). Contudo, ao fazer essas associações no ensino,

corre-se o risco de se criar generalizações que não são verdadeiras como, por exemplo: na adição de dois inteiros, dizemos que a parcela negativa significa uma dívida, e à parcela positiva damos a conotação de uma quantia que se tem. Assim, ao realizar a operação de adição, faz-se uma subtração e o resultado terá o sinal daquilo que for maior a dívida ou a quantia que se tem. Porém, esse mesmo raciocínio não pode ser generalizado para todas as operações com inteiros, por exemplo: se estendermos esse pensamento (inteiro negativo é dívida) para a operação de multiplicação, como explicar para o estudante que, ao multiplicar dois negativos, a dívida desaparece?

Esse é um exemplo de obstáculos que podemos encontrar no conceito de número, em especial, dos números inteiros. Obstáculos como esse estiveram presentes na evolução do conceito de número durante a história e também serviram como elementos que motivaram a evolução na compreensão das noções de números (GRANDE; PIRES, 2016).

2.2 Um esboço da história das antigas civilizações em relação aos números negativos

O aparecimento dos números inteiros negativos foi marcado por incertezas que passaram, ao longo da história, por delimitações cronológicas. Portanto, é preciso fazer um estudo do contexto matemático de onde se deram os primeiros indícios do conceito dos números negativos. Desse modo, traçaremos um esboço dos fundamentos da matemática nas civilizações que apresentaram inicialmente a ideia de números negativos na antiguidade (ANJOS, 2008).

Na civilização egípcia, os egípcios utilizavam uma malha quadriculada para elaborar obras de arte gráficas, com o intuito de garantir a nitidez das imagens produzidas. As malhas quadriculadas eram aplicadas na construção de pirâmides. Para a realização dessas construções, eles desenvolveram um método, que era traçar uma linha no nível do chão, denominada como linha zero; o numeral zero era intitulado de (NFR). A partir desta linha, denominada NFR, as outras linhas que eram traçadas e eram chamadas de um cúbico acima de zero, dois cúbicos acima de zero, e deste modo, as linhas traçadas abaixo de zero, eram denominadas de um cúbico abaixo de zero, dois cúbicos abaixo de zero. Assim, essas linhas de níveis abaixo de zero evidenciam o uso posicional do número, o que nos dá a ideia de número negativo. Mas isso não foi suficiente para que houvesse o uso explícito do número negativo (GAY ROBINS; CHARLES SHUTE, 1985 *apud* ANJOS, 2008).

Na Índia, a matemática é reconhecida, historicamente, pelo trato sistemático dos números negativos, mas isso só veio a ocorrer depois de um longo tempo do ocorrido na China.

A civilização chinesa, por ser mais próxima dos hindus, teve uma grande influência sobre eles. Além disso, sobre as datações dos textos, foram encontradas certas incertezas, pois os textos eram escritos em versos e, diante disto, apresentavam dificuldades elevadas para serem interpretados.

A matemática, na Índia, foi inserida em um momento que eles estavam passando por guerras e invasões, e em virtude disso, houve algumas interrupções no seu desenvolvimento. Apesar das dificuldades encontradas para interpretar os textos hindus, a desenvoltura da identidade de matemática na antiga Índia teve contribuições importantes para a matemática, como a aplicação do princípio do valor-lugar, do sistema sexagesimal babilônio para a base 10 e a criação do zero como número, ou seja, como símbolo; a álgebra sincopada e o uso sistemático dos números negativos, que são alvo desta pesquisa. Essas foram algumas contribuições importantes dos hindus.

O hindu Bhahmagupta apresentou o uso sistemático dos números negativos, elaborou a regra de sinais e generalizou as equações quadráticas e as lineares diofantinas ($ax + by = c$), deixando, assim, a aceitação dos números negativos como possibilidade de solução para as equações. Porém, não foram todos os matemáticos hindus que tiveram a mesma aceitação dos negativos; por exemplo, o matemático Bhaskara desconsidera as raízes negativas. Para ele, o segundo valor das raízes é inválido; mas, apesar disso, os negativos foram inseridos e tiveram um uso crescente.

Já na antiga civilização grega não há indícios dos números negativos, como os chineses estavam afastados diante disto, dificultou que eles tivessem influência sobre os gregos; pois os hindus tiveram a desenvoltura do uso dos números negativos após a formação da matemática grega clássica e por estarem próximos dos chineses facilitou a aceitação dos números negativos. Os egípcios eram mais próximos dos gregos, e eles tinham uma considerável influência sobre os gregos, mas apesar de eles usarem as linhas de níveis, não usaram os números negativos explicitamente. Desse modo, os números negativos não estiveram presentes na civilização grega.

Os árabes, apesar de terem como referências os textos traduzidos dos hindus, gregos e chineses, demonstraram a não aceitação dos números negativos e tiveram uma cultura matemática independente.

No contexto dos centros italianos, os europeus desenvolveram uma matemática significativa e independente a partir do século XIII, através dos comércios entre o Oriente e as cidades italianas. O matemático Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, foi o responsável

por tornar a matemática explícita na sua época. Fibonacci teve influência de Diofanto, e com isso, aceitou facilmente os números negativos, e, mais do que isso, aceitou os negativos como raízes de uma equação.

Com o crescimento do comércio no final do século XIII, os comerciantes precisaram desenvolver habilidades nas finanças e surgiu, também, a necessidade de contabilizar, pois, com o surgimento do crédito, eles passaram a aderir ao uso dos números negativos. Diante desse contexto, os comerciantes tinham que aprender os primeiros elementos da aritmética e da álgebra, e assim se deu início às chamadas Escolas de Abacus. No processo de aceitação dos números negativos, as escolas tiveram um papel muito importante. Quem ensinava, nas escolas, eram os mestres abacus, e o conhecimento deles não tinha a teoria de Fibonacci – apesar da forte influência que ele tinha. Os escritos preparados pelos mestres eram na língua vinículas e no formato de livros textos, com a finalidade de ensinar métodos aritméticos e algébricos para não-matemáticos, ou seja, jovens comerciantes. Como o intuito das escolas eram inserir e ensinar os números negativos, então podemos imaginar que eram feitos o ensino e o uso dos números negativos.

3. O ENSINO DOS NÚMEROS INTEIROS NO CONTEXTO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: DIFERENTES ABORDAGENS

A história da matemática é uma referência essencial para encontrar teorias e práticas matemáticas que foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época. “Conhecer historicamente pontos altos da matemática de ontem pode orientar no aprendizado e no desenvolvimento na matemática de hoje” (D'AMBROSIO, 1996).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) abordam algo importante sobre a história da matemática, que pode ser englobado ao conteúdo,

Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno frente ao conhecimento matemático. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem-se em veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural (BRASIL, 1998, p. 42).

Assim, o recurso histórico pode colaborar para um olhar mais humano dos conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula.

Fossa (2008) afirma que a história da matemática pode agir como corretivo:

Em primeiro lugar, a história mostra como a matemática faz parte integral da cultura humana e isto, por sua vez, embasa a consciência da significância de conhecimentos matemáticos. Ainda mais, em segundo lugar, a História da Matemática também pode ser eficaz no próprio ensino dessa disciplina (FOSSA, 2008, p. 10).

Inserida ainda nessa temática, a história da matemática revela a própria matemática dando-se condições, com certas finalidades e propósitos (FOSSA, 2008). Assim, Fossa (2008) evidencia a importância de se abordar a história da matemática em sala de aula e o que ela proporciona aos alunos.

a história proporciona ao aluno o significado da investigação matemática proposta e, em consequência, a mesma deixa de ser algo misterioso e ininteligível. Ao focar elementos pré-formais e, frequentemente, aplicados da matemática, a história leva o aluno a pensar sobre conceitos matemáticos sem a linguagem técnica que poderá ser uma barreira inicial ao seu entendimento. Ao mesmo tempo, mostra como o formalismo surge naturalmente em resposta ao refinamento e precisão das ideias e, portanto, capacita o aluno para a compreensão do formalismo por fazer ele pensar e repensar conceitos matemáticos (FOSSA, 2008, p. 13).

Miguel e Amorim (2005) destacam que é possível buscar, na história da matemática,

[...] apoio para se atingir, com os alunos, objetivos pedagógicos que os levem a perceber, por exemplo: (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova (MIGUEL; AMORIM, 2005, p. 53).

A história da matemática deve ser vista de um modo que ela seja a mediadora do processo de ensino e aprendizagem, compreendendo que ela deve ser ensinada por alguém que goste de matemática, caso contrário, este processo será cansativo e desgastante (ROSSETTO, 2014).

Assim os conhecimentos em história da matemática nos possibilitam a ter melhor compreensão de como chegamos as evidências atuais e porque necessitamos de ensinar este ou aquele conteúdo. Devemos estudar a necessidade que levou o homem de certa época a buscar conteúdos até suas utilizações práticas. Deste modo isto seria um incentivo para o aluno se motivar mais, e ter mais interesse e prazer pela matemática, pois as explicações ficariam mais claras, mostrando suas dificuldades seus anseios, suas angústias, fazendo que o aluno perceba que o esforço faz parte da

aprendizagem (ROSSETTO, 2014, p. 44).

Assim, o estudo da história da matemática, por parte do professor, se dá pelo desejo do mesmo em que o aluno compreenda o raciocínio matemático presente em uma demonstração.

Segundo Lins e Gimenes (2000),

O professor tem que estudar a produção de conhecimento na história da matemática, e assim talvez encorparemos no futuro novas formas e novas ideias. O fato de que isto não é a parte de formação inicial do professor é evidente [...]. Consideremos que o professor não deve esquecer os problemas da história e que pode, também, usar esses elementos na aprendizagem (LINS; GIMENES, 2000, p. 38).

A história da matemática, quando presente no cotidiano do ensino matemático, pode ajudar o aluno a ter uma percepção de entendimento do que se está falando, pois, na maioria das vezes, não se dá significado histórico ao que se está ensinando.

Diante das considerações acerca da história da matemática, destaca-se que, por meio do trabalho de Lima e Miotto (2007), apontamos que esse trabalho é uma pesquisa qualitativa, considerando, como procedimento técnico, o estudo bibliográfico. Os autores afirmam que a pesquisa bibliográfica implica em um conjunto ordenado de procedimentos de busca por soluções, atento ao objeto de estudo, e que, por isso, não pode ser aleatório.

Segundo Cerco, Bervian e Silva (2007),

A pesquisa bibliográfica procura explicar um problema a partir de referências teóricas publicadas em artigos, livros, dissertações e teses. Pode ser realizada independentemente ou como parte da pesquisa descritiva ou experimental. Em ambos os casos, busca-se conhecer e analisar as contribuições culturais ou científicas do passado sobre determinado assunto, tema ou problema. (CERCO; BERVIAN; SILVA, 2007, p. 61).

Através disso, para a realização dessa pesquisa, foram utilizados dois bancos de dados: o do CREPHIMat⁵ e o da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Destaca-se que o primeiro foi fundamental para construir o referencial teórico que subsidiou essa discussão. No segundo, buscamos e selecionamos dois trabalhos (dissertações de Mestrado) para a análise do problema proposto.

O CREPHIMat é um repositório digital criado pelo prof. Dr. Iran Abreu Mendes e tem como suporte financeiro o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), com o intuito de divulgar estudos e pesquisas em história da matemática. Esse repositório tem o objetivo de organizar e de disponibilizar a toda a comunidade acadêmica o maior acervo digital de produções acadêmica-científica sobre a história da matemática

produzido no Brasil. Além disso, também são disponibilizadas sugestões didáticas e orientações a estudantes, professores da Educação Básica, Ensino Superior e pesquisadores que necessitam buscar referências relacionadas ao tema, com foco no ensino da matemática, através de arquivos publicados, para servir de aporte para a pesquisa sobre história da matemática, em suas diversas abordagens metodológicas.

Contudo, o repositório cede um espaço para a realização de seminários e cursos a distância sobre história da matemática, para o ensino da matemática e história da educação matemática, e até mesmo ateliês de pesquisa nesse campo de estudo e pesquisas (MARTINS, 2021).

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) foi criada para facilitar o acesso a informações que consistem em refletir sobre as atividades do sistema nacional de pós-graduação brasileiro. Está à disposição da comunidade acadêmica e do público, em geral, o Banco de Teses e Dissertações (BTD), ou Catálogo de Teses e Dissertações, desde julho de 2002, facilitando o acesso a trabalhos acadêmicos defendidos na pós-graduação brasileira ano a ano.

O BTD da Capes é uma plataforma constituída com informações de teses e dissertações defendidas juntamente a programas de pós-graduação do país, e faz parte do portal de periódicos da instituição. Desse modo, o BTD tem como objetivo facilitar o acesso a esses arquivos que foram publicados.

Nesse sentido, é disponibilizada uma ferramenta que possibilita a realização de buscas e consultas das teses e dissertações a partir do nome do autor, do título, e/ ou palavras-chaves. O uso das informações contidas na plataforma está sujeito às leis de direitos autorais vigentes.

++As informações do BTD são fornecidas diretamente à Capes pelo programa de pós-graduação, que é responsável pela veracidade dos dados. Inicialmente, foram coletados 125.000 resumos de teses e dissertações no período de 1996 a 2001, os quais foram obtidos através do sistema de coleta em parceria com a área de conhecimento da Capes. Para a melhoria e ampliação da base de dados bibliográficos disponíveis, os trabalhos defendidos desde 1987 foram resgatados e inseridos na plataforma. Desde então, os dados são atualizados anualmente, após o informe de atividades pelo programa de pós-graduação do país à Capes. A coleta de dados foi reformulada e as informações contidas no BTD passaram a ser obtidas através da plataforma Sucupira.

Em 2013, devido à necessidade de alimentação do Banco e a desenvoltura da tecnologia avançada, o banco de dados foi atualizado e essa atualização foi desenvolvida pela

SilverStream, uma tecnologia da Novell. Então, tornou-se pública uma nova versão para o Banco de Teses, passando a utilizar a tecnologia Google Search Appliance (GSA) e Hypertext Preprocessor (PHP). Desse modo, a ferramenta, agora, também permite a pesquisa nos campos resumo, palavras-chave, biblioteca, linha de pesquisa, área de conhecimento, programa, agência financiadora, nível e, caso deseje, existe a possibilidade de pesquisar em todos os campos. Lembrando que, por ser uma base referencial, o BTD permite apenas a consulta a resumos de teses e dissertações; no entanto, alguns autores indicam o endereço para acesso ao texto completo.

O Quadro 1 apresenta duas dissertações que orientaram a pesquisa no campo do conceito, em uma perspectiva histórica, e abordagens didático-metodológicas do números inteiros.

Quadro 1: Catálogo de Teses e Dissertações da Capes

	Trabalho 1	Trabalho 2
Título	O pensamento dos comerciantes medievais como elemento textual para o ensino dos números inteiros na Educação Básica	Elaborações de estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental sobre números inteiros e suas operações
Autor	Everton Luiz Silva de Luna	Maristela Alves Silva
Instituição	USP/São Carlos	UFSCAR/São Carlos
Natureza do trabalho	Dissertação	Dissertação
Orientador(a)	Profa. Dra. Esther de Almeida Prado Rodrigues	Profª Dra. Maria do Carmo de Sousa.
Objetivos	Identificar os elementos textuais que contribuem para o desenvolvimento das ideias iniciais – conceitos - dos números inteiros.	Analisar os conhecimentos demonstrados por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental acerca do conceito de números inteiros e suas operações
Resultados	O uso da abordagem histórica constitui-se de um instrumento facilitador da aprendizagem do conceito de números inteiros.	O uso de abordagem metodológica que aproxima o conceito da realidade do aluno configura um elemento auxiliador no processo de aprendizagem.

Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

3.1 Aprendendo com o trabalho de Luna (2019)

O trabalho de Luna (2019) é organizado em cinco capítulos, além da introdução e das considerações finais. No capítulo 1, o autor expõe o seu problema de pesquisa, relacionando-o

com sua formação e prática docente. O pesquisador aponta que em sua trajetória profissional sentiu dificuldade de elaborar estratégias metodológicas para o ensino da Matemática; por isso, recorreu a autores, como Tardif (2002), Cardoso *et al.* (2012) e Shulman (2014), para problematizar os saberes fundamentais para o exercício da docência com sua formação profissional. No capítulo 2, Luna (2019) busca, em documentos oficiais orientadores do ensino¹ e livros didáticos do 7º Ano do Ensino Fundamental, elementos textuais para que se contribua para a construção do conceito de números inteiros.

O capítulo 3 do referido trabalho é dedicado para a apresentação dos resultados obtidos na pesquisa, feita com os livros didáticos e os documentos oficiais. De acordo com Luna (2019), os livros didáticos consultados demonstravam uma explicação dos números inteiros a partir de situações problemas relacionadas ao cotidiano dos alunos, considerando os conhecimentos prévios dos educandos acerca da matemática, essencialmente, dos números inteiros. Ao analisar os documentos oficiais, o autor identificou que o elemento histórico constituiu um aspecto relevante para a elaboração do conceito de números inteiros. Dessa forma, apoiado nesse indicador, Luna (2019), debruçou-se nas contribuições teóricas de Crosby (1999), Lima e Moisés (1998), Prado (2008) para o aprofundamento da questão conceitual e histórica da matemática – números inteiros.

Nos aspectos históricos da investigação de Luna (2019), foram consideradas as ideias de Crosby (1999), o qual analisa a relação dos comerciantes medievais com o números a partir de sua necessidade de sobrevivência. O uso dessa abordagem, segundo Luna (2019), configura-se como um elemento facilitador da aprendizagem, isto é, usar a forma como os comerciantes medievais, apontados por Crosby (1999), auxilia na elaboração de estratégias metodológicas de ensino dos números inteiros para uma aprendizagem significativa dos alunos.

Esse aspecto é aprofundado pelo autor ao analisar o conteúdo sobre o ensino da matemática nos PCN (BRASIL, 1998) e na BNCC (BRASIL, 2017). Segundo Luna (2019), esses documentos, ao traçarem um percurso histórico da humanidade e sua relação com números, indicam que a compreensão desses fenômenos é primordial para a elaboração de elementos textuais auxiliares na aprendizagem dos números inteiros. Outrossim, o Currículo do estado de São Paulo também aponta para uma jornada histórica da matemática, essencialmente dos números inteiros. Segundo o documento, “Tais situações podem estar apoiadas na história, como, por exemplo, a ampliação os números naturais para os inteiros

¹ Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), Base Nacional Comum Curricular – BNCC – (BRASIL, 2017) e o Currículo do estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012).

devido às necessidades prementes do desenvolvimento comercial e financeiro dos séculos XV e XVI” (SÃO PAULO, 2012, p. 40).

Nessa perspectiva, percebe-se que o Currículo do Estado de São Paulo infere a importância do resgate de elementos históricos para o aprofundamento e compreensão do conceito em questão, a fim de propiciar subsídios teóricos na construção de conhecimentos no âmbito da matemática.

Outro dispositivo consultado foram livros didáticos de Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental, indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático/PNLD/2017. Luna (2019), observa que nos seis livros analisados, dos 11 indicados pelo PNLD, com edições entre 2012 e 2015, os elaboradores se prendem a situações cotidianas e concretas do ensino dos números inteiros. Para o autor, houve uma carência de maiores explicações históricas sobre tais conceitos e, ainda, um aprofundamento nos contextos aos quais o conceito poderia ser analisado, como é o caso dos números negativos já utilizados pelas civilização chinesa antiga². Sobre a importância da ampliação da abordagem do ensino desse conceito, Prado (2008) argumenta que a matemática escolar não pode se limitar a ensinar conteúdos matemáticos apoiados, apenas, na cotidianidade dos alunos, mas abranger outros contextos, essencialmente, os históricos.

Destaca-se que, em seu trabalho/pesquisa, Luna (2019) recorre Lima e Moisés (1998) e Prado (2008) para acurar os elementos textuais acerca do ensino dos números inteiros no período de escolarização na Educação Básica. Segundo o autor, o diálogo com esses referenciais foi fundamental para articular os direcionamentos contidos nos documentos oficiais de orientação curricular com a bibliografia elaborada que aponta a importância de considerar o elementos textuais sobre os números inteiros em uma perspectiva histórica

O capítulo 4 foi dedicado a descrever o processo metodológico da pesquisa. O autor, nessa parte do trabalho, detalha como foi elaborado o percurso de investigação, bem como o trato com as fontes utilizadas para a obtenção dos resultados de sua pesquisa.

Por último, Luna (2019), a partir do que foi investigado, analisado e problematizado em seu trabalho, apresenta propostas didático-metodológicas para o ensino do conceito dos números inteiros. O intuito foi trazer elementos textuais que possam servir de instrumentos facilitadores para o processo de ensino e aprendizagem de professores e alunos na área em questão.

Nesse caso, as atividades elaboradas pelo autor se centravam na apresentação e

² Essa observação também é feita no trabalho de Gargarella e Utsumi (2017), analisando a forma como é abordado o conceito de números inteiros nos livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental.

problematização de elementos textuais que remetessem ao conceito de números inteiros negativos a partir da compreensão da concepção de contrários. Ao todo, foram cinco Elementos textuais elaborados e trabalhados pelo autor, em sua experiência. O primeiro: “Pensar com contrários”; o segundo: “Identificar os contrários em diferentes situações”; o terceiro: “Desenvolver a linguagem das palavras dos contrários”; o quarto: “Desenvolver a linguagem numérica dos contrários”; o quinto elemento textual, por sua vez, consistia em articular “[...] a escrita numérica criada pelos alunos com o desenvolvimento histórico da escrita numérica matemática” (LUNA, 2019, p. 61).

É importante destacar que cada atividade foi pensada e elaborada tendo como basilares as situações vivenciadas pelos comerciantes medievais – apresentados por Crosby (1999). Assim, na primeira atividade, o autor explorou as situações de contrários a partir de contextos contemporâneos, como as relações de ida e volta, quente e frio, depósito e saque, aceleração e frenagem etc.

Na segunda atividade, o autor, a partir de situações diversas, propõe a reflexão dos alunos para a existência de pares para uma determinada situação. Por exemplo, no elevador, os contrários que formam pares são os movimentos de subida e descida; em um depósito, há tanto a entrada como a saída do produto, em virtude da compra e da venda etc. Para o autor, com essa atividade, “Será possível aos alunos identificar os pares de contrários que compõem os movimentos, como ocorrido com os comerciantes na Idade Média” (LUNA, 2019, p. 63).

Na terceira atividade, o autor propõe um movimento de simplificação de textos, os quais contêm situações-problemas. O objetivo é fazer com que os alunos excluam informações “desnecessárias” e deixem apenas as que indicam quantidades. No exemplo dado pelo autor, falou-se de entrada e saída de arroz de um comerciante. No início do texto (exemplo), havia informações que caracterizavam tempo, lugar, personalidade etc., o que não contribuía para a captação dos contrários presentes no texto (que foi compra e venda e entrada e saída de arroz). Logo, o movimento de simplificação e identificação da linguagem dos contrários mostra-se ser uma possibilidade de recurso para o ensino do conceito em questão.

Na quarta atividade, o objetivo era familiarizar e desenvolver junto com os estudantes a linguagem dos contrários. Essa familiarização e esse desenvolvimento aconteceu por meio de registros numéricos acerca dos sentidos contrários de determinado movimento. Por exemplo, na situação da atividade anterior, os alunos podem esboçar a representação dos contrários, articulando-as com os respectivos valores, como

Quadro 2: Exemplo de como poderia ser feita o registro numérico relacionando-o com os contrários

30, 15, 20 e 3	Vendi 30, Comprei 15, Comprei 20, Vendi 3
30 Venda, 15 Compra, 20 Compra e 3 Venda	30 saiu, 15 entrou, 20 entrou e 3 saiu

Fonte: Luna (2019)

“Nesta etapa, entendemos que foi criado um registro numérico para indicar a quantidade e a qual contrário essa quantidade se refere” (LUNA, 2019, p. 66). Destaca-se que nessa proposição de atividade foi possível simplificar as palavras por letras, com V para venda e C para compra, por exemplo.

Na última atividade, o autor propôs a articulação da escrita numérica desenvolvida pelos alunos com a forma como as civilizações iam desenvolvendo sua forma de registro matemático. Para tanto, o professor apresentou textos com referências matemáticas históricas, sobretudo, no contexto dos medievais. Os textos apresentados aos alunos, pelo autor, evidenciam que não foram matemáticos que criaram os sinais de mais (+) e de menos (-), mas sim, os comerciantes medievais. Com essa experiência, o autor pode proporcionar condições de reflexão e aprendizagem aos educandos “da mesma forma que os matemáticos no desenvolvimento da história, aprender a organizar a escrita com contrários, e escrever os contrários e suas quantidades, utilizando os símbolos (+) e (-)” (LUNA, 2019, p. 68).

Diante do exposto, entende-se que uma prática educativa do ensino de Matemática, a depender do contexto de aprendizagem, pode ganhar contornos diversos. No caso da experiência relatada por Luna (2019), a história da matemática pode constituir-se uma importante aliada no processo de ensino e aprendizagem em Matemática, no que se refere, sobretudo, aos números inteiros negativos. Logo, penso que a prática da pesquisadora e futura professora de Matemática pode se ancorar nessa perspectiva metodológica, a qual considera elementos históricos para contribuir para a construção dos alunos acerca de conceitos que, muitas vezes são rejeitados por falta de compreensão textual, a saber, os números inteiros negativos. No entanto, destaca-se que, por mais que haja essa possibilidade didático-metodológica do ensino da Matemática, no próximo fragmento veremos outra possibilidade que também pode ser eficaz para a aprendizagem dos alunos, que é o uso contextualizado de situações cotidianas do uso de números e sinais negativos.

3.2 Aprendendo com o trabalho de SILVA (2012)

O trabalho Silva (2012), por sua vez, trata-se de uma pesquisa desenvolvida com alunos de uma escola municipal de Fernandópolis – SP, com o objetivo de analisar os conhecimentos demonstrados por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental acerca do conceito de números inteiros e suas operações. Diferentemente do trabalho 1, que observou a importância da contextualização histórica como elemento facilitador da aprendizagem do conceito de números inteiros por parte dos alunos, o trabalho 2 se debruça em problematizar as elaborações dos alunos como indicativo para reformulação de propostas metodológicas para o ensino da matemática, sobretudo, na temática analisada nesta investigação.

A pesquisa, dividida em cinco capítulos, além da introdução, resulta de atividades desenvolvidas “[...] em uma escola de tempo integral, munida de 9 aulas por dia. Em uma sala de sétimo ano do ensino fundamental de 21 alunos com idade entre 11 e 12 anos” (SILVA, 2013, p. 14). Destaca-se que a professora regente é a autora desse trabalho.

Acerca da estrutura do trabalho, Silva (2013), organiza-o da seguinte forma: justificativa (capítulo 1); a história dos números inteiros (capítulo 2); metodologia, além da descrição e análise da experiência com as atividades desenvolvidas pelos alunos, à luz do estudo de uma vivência de aprendizagem “[...] sugerida pela revista do 7º ano do ensino fundamental, do programa “São Paulo faz escola” da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (2008)” (SILVA, 2013, p. 15) (capítulo 3); apresentação do processo de realização das atividades propostas com uma turma de 7º de uma escola do município de Fernandópolis – SP (capítulo 4). Por último, a autora apresenta a conclusão de sua pesquisa, indicando considerações finais sobre o que foi exposto ao longo do trabalho.

Inicialmente, as atividades seguiriam a sugestão do material curricular disponibilizado pela administração pública; todavia, ao longo do desenvolvimento das tarefas, Silva (2013) percebeu que os alunos tinham dificuldade de compreender as proposições do material. Nesse sentido, viu-se a necessidade de realizar adaptações metodológicas para alcançar melhor compreensão dos conteúdos por parte dos alunos. Adaptações das atividades se davam, devido ao fato de os alunos demonstrarem, além de muita dificuldade, baixa resposta de aprendizagem nas avaliações, indicando um déficit de compreensão, sobretudo, do conceito dos números inteiros.

As adaptações eram feitas a partir da devolutiva dos alunos, uma vez que no processo das vivências, a professora regente avaliava a aprendizagem dos educandos. Segundo Silva

(2013), o foco da avaliação era no processo, e não no resultado final das elaborações. Nas intervenções, Silva (2013, p. 91), deixa claro que a “[...] escolha da próxima atividade fica condicionada a elaboração feita pelos alunos que nesse momento será aquilo que eles concluíram”.

Considera-se importante destacar um apontamento e reflexão ressaltado por Silva (2003) sobre a necessidade de que as atividades façam sentido aos estudantes. A autora, apoiada nos pensamentos de Moura (2010) e Moura *et al.* (2010), assegura esse interesse pode ser despertado quando o aluno vê sentido no que faz ou enxerga a situação como uma necessidade e/ou motivo. Em outras palavras, as propostas oriundas do material curricular disponibilizado à escola não atendia aos anseios de aprendizagem daqueles sujeitos, não provocando interesse para aprender. Por isso, ao mudar a abordagem do ensino de números inteiros, essencialmente, os negativos, há uma melhora significativa no desempenho acadêmico dos educandos.

O que motivou a pesquisadora/professora a desenvolver tais atividades, materializadas em jogos e brincadeiras realizados com aquela turma foram as percepções de que aqueles estudantes não aceitavam a existência de números abaixo de zero (negativos), tampouco que o sinal de menos (subtração) não possuía nenhum significado e, ainda, que não era possível realizar operações matemáticas envolvendo números negativos. Para eles, a compreensão desse conceito era abstrato e distante de sua realidade cognitiva. Nesse sentido, as atividades e jogos foram pensados e desenvolvidos para superar essa visão que os alunos carregavam e que dificultava o entendimento maior/completo acerca dos números inteiros negativos. Ao longo de cada vivência, a noção de número negativo era mais aceita pela maioria dos alunos.

Para promover a aquisição de conhecimentos acerca dos números inteiros negativos, a professora/pesquisadora estruturou quatro propostas, denominadas Atividades Orientadoras de ensino. O conceito de Atividades Orientadoras do ensino (AOE) foi elaborado por Moura *et al.* (2010). Segundo o autor, essa forma de se pensar uma proposta pedagógica de ensino põe o foco na relação dialógica entre os sujeitos (professor e aluno), os objetivos (ensinar e aprender) os procedimentos/ações (definição dos procedimentos e resoluções de possíveis problemas de aprendizagem, além das operações que, para o autor, configura-se na elaboração e uso dos recursos metodológicos que auxiliarão no ensino e na aprendizagem (MOURA *et al.*, 2010).

A primeira AOE foi o jogo “vai e vem”, encontrado no livro “Experiências matemáticas da 6ª. Série, publicada pela CENP, Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, em 1996” (SILVA, 2013, p. 54). O objetivo do jogo é proporcionar aos educandos experiências as quais possam transitar entre sentidos opostos, operando valores com quantidades negativas.

A segunda AOE foi um jogo de autoria da professora/pesquisadora, denominado “jogo das tampinhas de garrafas plásticas”, cujo objetivo era possibilitar condições de aprendizagem representativa de quantidades negativas.

A terceira AOE se deu por meio da utilização de fichas representativas de variáveis contrárias. A atividade contou com o manuseio de um programa de computador. O programa fornecia fichas azuis – representando as quantidades positivas – e fichas vermelhas – representando quantidades negativas. O objetivo era trabalhar o conceito de números inteiros positivos e negativos utilizando as fichas de representação.

A quarta AOE consistiu em “uma adaptação de uma brincadeira sugerida pelo caderno do professor do 7º ano 1º bimestre (SEE/SP, 2008, p. 42) feita na sala de aula (SILVA, 2013, p. 54)”, a qual, segundo a autora, foi adequada para ser realizada na área externa da escola (pátio). O objetivo foi, a partir da organização de uma única fila, localizar, corretamente, os números inteiros em uma reta numérica.

É importante ressaltar que, por mais que a autora destaque as AOE, foram feitas outras atividades de registros, uma vez que o objetivo da pesquisa consistiu em analisar as elaborações dos alunos, quer sejam orais, quer sejam gráficas. Desse modo, ao longo da experiência, a autora percebia que o conceito de números inteiros negativos começara a se tornar significativo para os alunos que demonstravam resistência em encará-lo como um “número de verdade”.

Ancorada nas teorizações de D’ambrosio (1997), é possível refletir sobre o resultado do movimento ação-reflexão-ação. Esse movimento dialético é essencial para a prática de qualquer professor, pois, em um movimento de constante reflexão sobre sua prática, o docente perceberá as fragilidades de sua prática e elaborará melhores estratégias de ensino para promover uma aprendizagem significativa de seus alunos. Nessa perspectiva, recorre-se às reflexões de Luna (2019), ao trazer para o seu trabalho as contribuições de Tardif (2002), Cardoso *et al.* (2012) e Shulman (2014), os quais chamam a atenção para a importância de se atentar aos saberes docentes essenciais para a prática de ensino desse profissional.

Apoiada nas contribuições teóricas de Prado (2008), Silva (2013) defende que

As atividades aqui mencionadas procuram evidenciar e enfatizar as relações existentes entre alguns aspectos dos procedimentos de ensino e aprendizagem significativa dos alunos, que considera ser a compreensão dos conceitos que precedem a aquisição da habilidade de aplicá-los a novas situações, afastando-se de uma aprendizagem restrita à repetição mecânica de exercícios de cálculo (SILVA, 2013, p. 88 *apud* PRADO, 2008).

Desse modo, as abordagens adotadas no cumprimento das tarefas orientadas aos alunos foram significativas, promovidas de aprendizagens, rompendo com a visão reducionista

apresentada pelos alunos, ao arguirmos que a matemática era difícil e que só os inteligentes poderiam aprender. Ao final da intervenção, a autora infere que percebeu que os alunos “[...] construíram ao longo do percurso um pensamento consistente do ponto de vista matemático. Pois conseguiam resolver as situações corretamente com coerência e precisão” (SILVA, 2013, p. 89).

Assim, é possível destacar que a prática docente, ancorada na teoria e em um constante movimento de ação-reflexão-ação, é fundamental para o sucesso no processo de aprendizagem dos alunos. Embora Prado (2008) defenda a ideia de contextualização histórica para fortalecer esse processo de aquisição de conhecimentos acerca dos números inteiros, a mesma autora não ignora que usar elementos da cotidianidade dos alunos torna-se uma importante ferramenta para promover a aprendizagem, como, de fato, aconteceu a partir do redirecionamento metodológico de Silva (2013) em suas intervenções com a turma em questão.

Com essas considerações, traz-se que o aprendido com a experiência relatada por Silva (2013) é que o ensino dos números inteiros negativos pode ocorrer a partir da aproximação com situações do cotidiano. No entanto, a autora apresentou possibilidades que envolvem o lúdico; por isso, não se pode simplesmente transmitir conteúdos isolados, descontextualizados e sem perspectivas didático-metodológicas que alcancem os anseios de aprendizagem dos educandos.

Logo, a forma como Silva (2013) apresentou o conceito, fazendo com que os alunos aceitassem a ideia de números e sinal negativos, faz com que enxergue que o campo de ensino da Matemática não se esgota em práticas tradicionais ou em um único método, mas se constrói na realidade de sala de aula, a partir do contexto de aprendizagem dos alunos. Tanto a proposta de Luna (2019) quanto a de Silva (2013), apresentam propostas e resultados significativos que podem ser usados por diversos professores, pois, como se viu, o mais importante aconteceu com cada experiência: a aprendizagem foi efetiva.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática, importante campo do saber e também, componente curricular de cursos de formação de da Educação Básica, representa uma área do conhecimento fundamental para a dinâmica social não só na contemporaneidade, mas em toda a história da humanidade. Embora muitos a vejam como algo difícil e acessível apenas aos ditos “inteligentes”, é inegável que, mesmo aos que demonstram dificuldade em aprendê-la e apreender seus conceitos, usam-na, continuamente, em seu cotidiano. Um dos conceitos mais complexos de apreensão e aprendizagem são os números inteiros negativos.

Uma vez que este estudo objetivou investigar as pesquisas em história da matemática e educação matemática acerca dos números inteiros, vimos que, em uma perspectiva histórica, a Matemática, mesmo não havendo dados concretos de datas, vem fazendo parte da vida da humanidade desde os primórdios da humanidade. Auxiliava o homem antigo em tarefas cotidianas, mesmo que de forma rudimentar no trato com as quantidades e outras necessidades. Com a invenção dos registros gráficos, a humanidade continuou a depender dos recursos matemáticos para resolução de questões do dia-a-dia e, à medida que as relações sociais iam ficando mais complexas, a forma de utilizar a matemática se diversificava. Ou seja, o homem não mais a utilizava para contar coisas, mas já realizava operações aritméticas.

Acerca dos números inteiros, viu-se que os primeiros registros de utilização desse conceito e prática têm origem nas civilizações antigas da China. Entretanto, mesmo tendo certo domínio de seu uso e já reconhecendo os números inteiros negativos, a civilização chinesa não creditava tanta importância quanto era dada aos número inteiros positivos. Além dos chineses, as civilizações da idade moderna também tinham resistência de aceitar a variação numérica negativa, sendo que muitos matemáticos da época a via como “fictícia”.

No que se refere aos trabalhos analisados, percebeu-se que a Matemática pode ser explorada de formas diferentes. No trabalho de Luna (2019), por exemplo, o relato abordado enfatizava a importância de recorrer a elementos históricos da sociedade medieval para compreender como se processa o trato com os números inteiros negativos. Assim, ao contextualizar o uso do conceito, o autor demonstrou possibilidades metodológicas para que o conteúdo fosse mais fácil a aprendizagem dos alunos.

Outra forma de explorar o ensino do conceito em questão é a partir da aproximação do conteúdo com a realidade do aluno. Essa abordagem foi explorada por Silva (2012). A autora utilizou não só aquilo que era comum no cotidiano, mas, também os interesses e potencialidades dos educandos, uma vez que muitos deles, assim como muitas sociedades e intelectuais

matemáticos ao longo da história, rejeitavam a ideia de números negativos. Assim, por meio de atividades lúdicas e de aproximações com vivências do dia-a-dia, Silva (2012) conseguiu obter dos alunos respostas significativas de aceitação e de aprendizagem acerca dos números inteiros negativos.

Em relação às contribuições teóricas e formativas do estudo, destaca-se que o contato com material bibliográfico permitiu um aprofundamento às questões que foram discutidas durante o curso de graduação. Cada autor estudado, cada exemplo analisado no contexto histórico e nos trabalhos analisados, foi tecendo possibilidades didático-pedagógica para minha atuação como futura professora de Matemática. Sabe-se que a realidade da educação brasileira, sobretudo pública, apresenta suas fragilidades, porém, intenta-se adotar uma postura de agente de transformação social, ressignificando o ensino de matemática e rompendo com as estruturas tradicionais desse campo do conhecimento tão importante para os processos de formação humana.

REFERÊNCIAS

ALVES, R. **Por uma educação romântica**. 4. Ed. Campinas: Papirus, 2003.

ANJOS, Marta Figueredo dos. **A difícil aceitação dos números negativos: um estudo da teoria dos números de Peter Barlow (1776-1862)**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal Do Rio Grande do Norte, Natal, 2008.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Introdução. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>. Acesso em 24 fev. 2022.

CARDOSO, A. A. et al. **Os Saberes Profissionais dos Professores na Perspectiva de Tardif e Gauthier: Contribuições para o Campo de Pesquisa sobre os Saberes Docentes no Brasil**. Caxias do Sul, 2012. IX Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul, 2012.

CIPRIANO, Vivian Maria Barbosa Saraiva. **A construção dos Números Inteiros e Racionais pelo Método da Simetrização e Aplicações**. 2017.

CROSBY, A. **A mensuração da realidade: a quantificação e a sociedade ocidental 1250-1600**. São Paulo, SP: Ed. UNESP, 1999.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Papirus Editora, 1996.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. 2. ed. Campinas, SP: Papirus, 1997.

GRANDE, André Lúcio; PIRES, Rogério Fernando. Obstáculos referentes às relações numéricas sob três enfoques: aritmético, algébrico e geométrico. In: FONSECA, Laerte (Org). **Didática do Cálculo: epistemologia, ensino e aprendizagem**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

FOSSA, J. A. Matemática, história e compreensão. **Revista Cocar**, 2.4 (2008): 7-16.

MIGUEL, A.; MIORIN, M. A. **História na educação matemática: propostas e desafios**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

HISTORY OF MATEMATICS. 2020. Disponível em: <https://www.storyofmathematics.com/egyptian.html/>. Acesso em: 02 mai. 2022.

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. Números negativos: uma história de incertezas. **Bolema, Rio Claro**, v. 7, n. 8, p. 49-59, 1992.

LINS, R. C.; GIMENES, J. **Perspectiva em Aritmética e Álgebra Para o Século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LUNA, E. L. S. de. **O pensamento dos comercinantes medievais como elemento textual para o ensino dos números inteiros na educação básica.** 2018. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciêncas Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

MELO, G. N. Formação educacional no Brasil: em que ponto está?. In: IV CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO: feira de educação e tecnologias. Olinda – PE, SAPIENS, 2005.

MOURA, M. O. de et al., Atividade orientadora de ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Rev. Diálogo Educ.**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010. Disponível em: <https://periodicos.pucpr.br/dialogoeducacional/article/view/3094/3022> Acesso em: 24 fev. 2022.

MOURA, O. M. **A atividade pedagógica na teoria histórico cultural.** Brasília: Liber livro, 2010.

PONTE, J. P. da. **Concepções dos professores de matemática e processos de formação.** In: PONTE, J.P. et al. Educação matemática. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992.

PRADO, E. P. de A. **Os textos impressos para o ensino dos números inteiros na visão dos licenciandos em matemática.** 2008, n.p. Tese (Doutorado em Educação) – Unicamp, Campinas, 2008.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática. Ensino Fundamental: Ciclo II e Ensino Médio.** São Paulo, SP. 2012. Disponível em: <http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/783.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2022.

SANTOS, Sanileni Gutemberg dos. **Números inteiros: estratégias que visam facilitar a compreensão de conceitos e operações.** 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante Anhanguera, Rio de Janeiro, 2016.

SHULMAN, LEE S. “Knowledge and Teaching Foundations of the New Reform”, a **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-22, primavera 1987 (Copyright by the President and Fellows of Harvard College). Traduzido e publicado com autorização. Tradução de Leda Beck e revisão técnica de Paula Louzano. Disponível em <http://www.uepg.br/formped/disciplinas/OrganizacaoTrabalho/Texto%202%20Shulman.pdf>. Acesso em 08 fev. 2022.

SILVA, M. A. **Elaborações de estudantes do 7º ano do ensino fundamental sobre números inteiros e suas operações.** 2012, 122 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.

SOARES, J. F. Melhoria do desempenho cognitivo dos alunos do ensino fundamental. **Cadernos de Pesquisa**, v. 37, n. 130, p. 135-160, jan.-abr. 2007.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** Petrópolis: Vozes, 2002.