

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Modelagem Matemática e Simulação Numérica de um Sistema
Rotativo Eixo-Disco-Palhetas**

Marcela Andréa Teodoro Sousa

Uberlândia

2022

Marcela Andréa Teodoro Sousa

**Modelagem Matemática e Simulação Numérica de um Sistema
Rotativo Eixo-Disco-Palhetas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

Linha de pesquisa: Dinâmica de Sistemas Mecânicos

Orientador: Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Jr.

Uberlândia

2022

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S725
2022 Sousa, Marcela Andréa Teodoro, 1997-
Modelagem Matemática e Simulação Numérica de um
Sistema Rotativo Eixo-Disco-Palhetas [recurso
eletrônico] / Marcela Andréa Teodoro Sousa. - 2022.

Orientador: Aldemir Aparecido Cavalini Junior.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.296>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Engenharia mecânica. I. Cavalini Junior, Aldemir
Aparecido, 1983-, (Orient.). II. Universidade Federal
de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica.
III. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074


UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br


ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 612, COPEM				
Data:	28/06/2022	Hora de início:	08:00	Hora de encerramento:	10:00
Matrícula do Discente:	12012EMC018				
Nome do Discente:	Marcela Andréa Teodoro Sousa				
Título do Trabalho:	Modelagem Matemática e Simulação Numérica de um Sistema Rotativo Eixo-Disco-Palhetas				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Antônio Marcos Gonçalves de Lima - FEMEC/UFU; Leonardo Sanches - ISAE/SUPAERO; e Aldemir Aparecido Cavolini Junior - FEMEC/UFU, orientador da candidata. Ressalta-se que os Prof. Aldemir Aparecido Cavolini Junior, Antônio Marcos Gonçalves de Lima e a Discente participaram da defesa por meio de videoconferência desde a cidade de Uberlândia/MG, e o Prof. Leonardo Sanches desde a cidade de Toulouse/França, em atendimento a Portaria nº 36, de 19 de março de 2020, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Aldemir Aparecido Cavolini Júnior, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 28/06/2022, às 10:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos Gonçalves de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 28/06/2022, às 10:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Sanches, Usuário Externo**, em 28/06/2022, às 10:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3706939** e o código CRC **9E1A5758**.

Página intencionalmente deixada em branco.

À minha família

Página intencionalmente deixada em branco.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais, Heloísa e Marcelo, pelo amor, carinho e apoio incondicionais. A minha irmã, Ana Cláudia, por ser minha consultora de assuntos pessoais e acadêmicos e a meu irmão, Gabriel, por ser minha família em Uberlândia. Às minhas tias, Márcia, Marta e Rosângela (*in memoriam*), por todo amor e apoio.

Gostaria também de agradecer ao Professor Aldemir pela confiança, dedicação e paciência ao me orientar desde a graduação, sendo parte fundamental da minha formação como engenheira e mestre.

Agradeço também aos amigos que fiz ao longo dos anos na UFU: Amanda, Ana Gabriela, Andressa, Breno, Dimas, Diogo, Luis Henrique, Thiago e Vívian; e aos amigos de Pará de Minas: Bárbara, Caio, Camila, Carol, Isadora, Érick, Lucas, Naide, Rafael; pela amizade. Agradeço em especial à Ana Gabriela e à Isadora, por me conhecerem e me entenderem como ninguém.

Ao Reubler, pela compreensão, paciência e apoio.

Agradeço aos colegas do LMEst, que me fizeram companhia nesses últimos meses, pelo acolhimento.

Agradeço ao Programa de Pós-graduação de Engenharia Mecânica e à Universidade Federal de Uberlândia pela oportunidade de obter o grau de mestre.

Por fim, agradeço à CAPES e às empresas Foz do Chapecó, Baesa, Enercan, Cerran, CSC Energia e CPFL Energia, através do projeto de Pesquisa e Desenvolvimento PD-02949-3007/2021 – “Solução integrada para o diagnóstico de defeitos, análise dinâmica e monitoramento contínuo de unidades geradoras francis” com recursos do programa de P&D da ANEEL, pelo apoio financeiro concedido durante a realização deste trabalho.

Página intencionalmente deixada em branco.

Resumo

Sousa, M. A. T. *Modelagem Matemática e Simulação Numérica de um Sistema Rotativo Eixo-Disco-Palhetas*. 2022. 108 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

Sistemas rotativos compostos pelo conjunto eixo-disco-palhetas (EDP) possuem diversas aplicações industriais, especialmente em turbomáquinas como turbinas, compressores e motores aeronáuticos à reação. Neste contexto, as palhetas rotativas são componentes críticos por possuírem considerável flexibilidade e operarem a altas rotações, estando sujeitas a falhas por fadiga. Sendo assim, é importante estabelecer modelos dinâmicos para esses sistemas, possibilitando o entendimento de seu comportamento ainda na fase de projeto. Desta maneira, este trabalho apresenta um modelo matemático para um sistema EDP que considera a flexibilidade de eixo e palhetas, modelando-os como vigas. Os deslocamentos são discretizados a partir do Método dos Modos Assumidos e as Equações de Lagrange são aplicadas para obter as equações do movimento para o sistema acoplado. O modelo é validado por meio da comparação com resultados obtidos utilizando um modelo de elementos finitos e experimentos realizados por outros autores, mostrando representatividade satisfatória. A influência da rotação, número de palhetas e posição do disco nas frequências naturais são estudadas. Por fim, a resposta ao desbalanceamento é avaliada para o sistema com e sem amortecimento, identificando-se a presença de frequências paramétricas nas repostas do sistema. Os resultados mostram que o modelo consegue descrever o comportamento dinâmico do sistema estudado.

Palavras-chave: Dinâmica de Rotores. Modelagem Matemática. Eixo-disco-palhetas. Vibrações Acopladas.

Página intencionalmente deixada em branco.

Abstract

Sousa, M. A. T. *Mathematical Modeling and Numerical Simulation of a Rotating Shaft-Disc-Blades System*. 2022. 108 p. Master's Dissertation - Federal University of Uberlândia, Uberlândia.

Rotating systems composed of a shaft-disc-blades assembly (SDB) have several industrial applications, specially on turbo machinery such as turbines, compressors, and aircraft engines. In this context, the rotating blades are critical components due to their considerable flexibility and high rotation operation, being subject to failure due to fatigue. Therefore, it is important to establish dynamical models to these systems, allowing the understanding of its behavior in the design phase. In this context, the present work formulates a mathematical model devoted to represent the dynamic behavior a SDB system that considers the flexibility both of shaft and blades, modeled as beams. Their displacements are discretized by the Assumed Modes Method, and the Lagrange's Equation are used to obtain the equations of movement of the coupled system. The model is validated by comparing finite elements simulation with experimental results achieved by other authors, showing good accuracy. The influence of rotation speed, number of blades and disc position on the natural frequencies is assessed. Finally, the unbalance response is analyzed for the damped and undamped system, identifying the presence of parametric frequencies on the corresponding vibration responses. The results show that the model is capable of describing the system's dynamic behavior.

Keywords: Rotordynamics. Mathematical Modeling. Shaft-disc-blades. Coupling Vibrations.

Sumário

Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xvii
Lista de Símbolos	1
1 Introdução	1
1.1 Contextualização	1
1.2 Objetivos e justificativas	5
1.3 Organização da dissertação	6
2 Revisão Bibliográfica	7
2.1 Modelos de rotores rígidos acoplados a palhetas flexíveis	7
2.2 Modelos de discos palhetados	9
2.3 Modelos de sistemas eixo-disco-palhetas	10
3 Modelo matemático do sistema eixo-disco-palhetas	15
3.1 Modelo matemático do eixo	18
3.1.1 Energia cinética do eixo	18
3.1.2 Energia de deformação do eixo	19
3.2 Modelo matemático do disco	21
3.2.1 Desbalanceamento	23
3.3 Modelo matemático da i-ésima palheta rotativa	24
3.3.1 Energia cinética da i-ésima palheta	25
3.3.2 Energia potencial da i-ésima palheta	27

4	Discretização das Equações do Movimento	31
4.1	Discretização do eixo	32
4.2	Discretização da i-ésima palheta	35
4.3	Montagem das equações globais do movimento	38
4.4	A transformação de coordenadas multi-pás	44
5	Resultados e Discussões	51
5.1	Convergência do MMA	51
5.2	Validação do modelo	53
5.2.1	Comparação com modelo de elementos finitos	53
5.2.2	Comparação com resultados experimentais	55
5.3	Resultados numéricos	61
5.3.1	Diagrama de Campbell	61
5.3.2	Influência dos parâmetros do sistema em seu comportamento dinâmico	64
5.3.3	Respostas temporais do sistema	69
6	Conclusões	79
6.1	Perspectivas de trabalhos futuros	80
	Referências	81

Página intencionalmente deixada em branco.

Lista de Figuras

1.1	Turbina a vapor fabricada pela General Electric. Fonte: (GE, 2022) . . .	2
1.2	Falha por fadiga em palheta do fan do motor Trent 700. Fonte: (ATSB, 2020)	3
3.1	Esquema do sistema rotor-palhetas modelado.	16
3.2	Vista frontal sistema modelado com eixo deslocado.	17
3.3	Modelo do eixo.	19
3.4	Coordenadas do centro geométrico C e de um ponto arbitrário B no eixo. Adaptado de: (LALANNE; FERRARIS, 1990).	20
3.5	Desbalanceamento no rotor. Adaptado de: (LALANNE; FERRARIS, 1990).	23
4.1	Modelo esquemático da viga simplesmente apoiada.	32
4.2	Esquema de uma viga engastada-livre.	35
5.1	Convergência das frequências naturais abaixo de 2 kHz.	52
5.2	Modos de vibrar obtidos pelo modelo matemático e pelo MEF para os modos 1 a 10.	56
5.3	Modos de vibrar obtidos pelo modelo matemático e pelo MEF para os modos 11 a 20.	57
5.4	Aparato experimental utilizado. Adaptado de: (YANG et al., 2022). . . .	58
5.5	Diagrama de Campbell do sistema no referencial não-rotativo.	62
5.6	Diagrama de Campbell do sistema com palhetas no referencial rotativo.	63
5.7	Diagrama de Campbell para modos de vibrar do eixo.	64
5.8	Variação das primeiras frequências naturais do sistema com o número de palhetas e posição do disco.	66

5.9	Efeito da posição do disco e do número de palhetas nos modos mais altos do eixo.	67
5.10	Frequências naturais para o terceiro modo do eixo em cada posição do disco.	68
5.11	Resposta ao desbalanceamento: eixo não amortecido.	71
5.12	Resposta ao desbalanceamento: eixo amortecido.	72
5.13	Resposta ao desbalanceamento: palheta 1 não amortecida.	73
5.14	Resposta ao desbalanceamento: palheta 1 amortecida.	74
5.15	Vibração para eixo e primeira palheta a 500 RPM.	75
5.16	Vibração para eixo e primeira palheta a 1000 RPM.	76
5.17	Vibração para eixo e primeira palheta a 1500 RPM.	77

Lista de Tabelas

5.1	Dados físicos e geométricos do sistema simulado.	53
5.2	Frequências naturais do sistema.	55
5.3	Dados da bancada experimental. (YANG et al., 2022)	59
5.4	Comparação entre frequências naturais obtidas pelo modelo e experi- mentais.	60
5.5	Comparação entre frequências naturais eixo-disco e eixo-disco-palhetas em repouso.	65
5.6	Comparação entre frequências naturais disco-palhetas e eixo-disco-palhetas em repouso.	65

Página intencionalmente deixada em branco.

Lista de Símbolos

Símbolos Gregos

α, β	Coeficientes do amortecimento proporcional	
β_i	Posição angular da i -ésima palheta	<i>rad</i>
ϵ	Deformação de um ponto B localizado na ST do eixo	<i>m/m</i>
ϵ_{zz}	Deformação de um ponto genérica na ST da palheta	<i>m/m</i>
η	Coordenada generalizada do eixo em X	
λ	Raízes da equação característica da viga	
Ω	Velocidade de rotação do sistema	<i>rad/s</i>
ω_d	Vetor velocidade de rotação do disco	<i>rad/s</i>
ϕ	Rotação em torno de Y	<i>rad</i>
Φ_i	Funções de discretização do MMA	
ψ	Rotação em torno de Z	<i>rad</i>
ρ_b	Densidade do material das palhetas	<i>kg/m³</i>
ρ_s	Densidade do material do eixo	<i>kg/m³</i>
ρ_{b_i}	Densidade do material da i -ésima palheta	<i>kg/m³</i>
σ	Tensão inicial atuante na direção normal da palheta	<i>N/m²</i>
θ	Rotação em torno de X	<i>rad</i>
ξ	Coordenada generalizada do eixo em Z	
ξ_1, ξ_1	Coeficientes de amortecimento dos dois primeiros modos de vibrar do sistema	

Símbolos Latinos

A_{b_i}	Área da ST da i -ésima palheta	<i>m²</i>
b_{b_i}	Largura da i -ésima palheta	<i>m</i>
d	Excentricidade do desbalanceamento	<i>m</i>

E_b	Módulo de Elasticidade do material das palhetas	Pa
E_s	Módulo de Elasticidade do material do eixo	Pa
f_n	Frequência natural	Hz
g	Aceleração da gravidade	m/s^2
h_d	Espessura do disco	m
h_{b_i}	Espessura de i -ésima palheta	m
I_s	Momento de inércia da seção transversal do eixo	m^4
I_{d_x}	Momento de inércia de massa do disco em X	$kg \cdot m^2$
I_{d_y}	Momento de inércia de massa do disco em Y	$kg \cdot m^2$
I_{d_z}	Momento de inércia de massa do disco em Z	$kg \cdot m^2$
L	Lagrangeano	J
L_s	Comprimento do eixo	m
L_{b_i}	Comprimento da i -ésima palheta	m
m	Massa por comprimento	kg/m
m_d	Massa do disco	kg
m_u	Massa de desbalanceamento	kg
N	Força normal atuante na palheta	N
N	Número de funções modais utilizados para discretização de i -ésima palheta	
N_b	Número de palhetas	
N_s	Número de funções modais utilizados para discretização do eixo	
$OXYZ$	Referencial inercial	
q_i	Coordenadas generalizadas do MMA	
q_{u_i}	Coordenada generalizada da palheta em X	
q_{w_i}	Coordenada generalizada da palheta em Z	
R_d	Raio externo do disco	m
r_d	Raio interno do disco	m
R_s	Raio da seção transversal do eixo	m
r_{p_i}	Vetor posição de um ponto genérico p_i da palheta	m
R_{xyz}	Referencial rotativo com origem em y_d	
S	Área da seção transversal do eixo	m^2
t	Tempo	s

T_s	Energia cinética do eixo	J
T_b	Energia cinética total do sistema de palhetas	J
T_b^i	Energia cinética da i -ésima palheta	J
T_{dr}	Energia cinética de rotação do disco	J
T_{dt}	Energia cinética de translação do disco	J
T_D	Energia cinética do disco desbalanceado	J
T_d	Energia cinética total do disco	J
T_u	Energia cinética da massa de desbalanceamento	J
u^*	Posição do centro do eixo em x	m
u_i	Deslocamento do ponto p_i da palheta em x	m
U_s	Energia de deformação do eixo	J
u_s	Deslocamento do eixo em relação a X	m
U_b	Energia potencial total da palheta	J
U_b^i	Energia de deformação da i -ésima palheta	J
U_b^i	Energia potencial gravitacional da i -ésima palheta	J
v_s	Deslocamento do eixo em relação a Y	m
w^*	Posição do centro do eixo em z	m
w_i	Deslocamento do ponto p_i da palheta em z	m
w_s	Deslocamento do eixo em relação a Z	m
Y	Função modal da viga	
y_d	Distância da posição do disco da origem	m
z_i	Altura do ponto p_i da palheta	m

Matrizes

$[C]$	Matriz global do amortecimento proporcional
$[f]$	Vetor de forças atuantes no sistema
$[G]$	Matriz global do efeito giroscópico
$[K]$	Matriz global de rigidez
$[q]$	Vetor de coordenadas generalizadas do MMA
$[T]$	Matriz de transformação do referencial inercial para o referencial rotativo
$[U]$	Matriz de discretização da i -ésima palheta em X
$[U]$	Matriz global de massa
$[W]$	Matriz de discretização da i -ésima palheta em Z

[\mathbf{X}] Matriz de discretização do eixo em X

[\mathbf{Z}] Matriz de discretização do eixo em Z

Abreviações

BTT Blade-tip-timing

EDP Eixo-disco-palhetas

FEMEC Faculdade de Engenharia Mecânica

FRF Função de resposta em frequência

LME_{st} Laboratório de Mecânica das Estruturas

MEF Método dos Elementos Finitos

MMA Método dos Modos Assumidos

ST Seção Transversal

UFU Universidade Federal de Uberlândia

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

Máquinas rotativas constituídas por um eixo acoplado a discos palhetados são amplamente utilizadas em aplicações industriais. Motores aeronáuticos a reação, turbinas a vapor, como a mostrada na Fig. 1.1, bombas hidráulicas e compressores industriais são exemplos de máquinas que possuem palhetas rotativas. Por possuírem considerável flexibilidade e trabalharem em altas rotações, as palhetas são componentes críticos desse tipo de máquina. Por exemplo, é frequente a ocorrência de falhas por fadiga pela exposição do sistema eixo-disco-palhetas a condições de ressonância (CHUN; LEE, 1996).

A Figura 1.2 mostra um exemplo de falha total por fadiga da palheta do *fan* de um motor aeronáutico Rolls-Royce Trent 700 de uma aeronave Airbus A330-343X. A aeronave decolou de Perth, Austrália, com destino à Malásia. No entanto, com cerca de uma hora de voo, houve um ruído metálico e início de considerável vibração no avião, seguido de aviso de *stall* no motor esquerdo. A tripulação conseguiu retornar a aeronave com segurança a Perth, onde foi descoberta a falta de cerca de três-quartos de uma palheta do *fan* no motor esquerdo.

As investigações determinaram que a falha aconteceu em uma região de alta tensão na palheta, onde a membrana de reforço interno se une ao painel de revestimento. Durante a fabricação, o raio de borda foi fabricado de maneira mais aguda que o projetado, levando a uma concentração de tensões maior que a esperada na região (ATSB,



Figura 1.1: Turbina a vapor fabricada pela General Electric. Fonte: (GE, 2022)

2020).

O exemplo citado mostra a importância de conhecer e monitorar o comportamento dinâmico de palhetas rotativas. Pelo entendimento de suas frequências naturais e modos de vibrar, é possível otimizar suas condições de operação. Além disso, pode possibilitar a detecção de danos incipientes por meio da identificação de mudanças nos modos de vibração.

Uma maneira de avaliar o comportamento dinâmico de sistemas mecânicos é por meio do desenvolvimento de modelos matemáticos que buscam estimar o comportamento real dos equipamentos. As abordagens clássicas para modelagem de sistemas eixo-disco-palhetas (EDP) são baseadas na utilização de modelos desacoplados, que desconsideram efeitos inerciais de flexibilidade do eixo nas palhetas e vice-versa. Apesar de apresentarem bons resultados em muitos casos, essas abordagens podem não prever algumas características de vibração de maneira satisfatória (CHATELET; D'AMBROSIO; JACQUET-RICHARDET, 2005; CHUN; LEE, 1996).

Ao desconsiderar o efeito das palhetas, temos um sistema eixo-disco, que já foi



Figura 1.2: Falha por fadiga em palheta do fan do motor Trent 700. Fonte: (ATSB, 2020)

amplamente estudado e tem seu comportamento bem conhecido e documentado (LALLANNE; FERRARIS, 1990; DIMAROGONAS; PAIPETIS; CHONDROS, 2013; RAO, 2011). Negligenciando a presença do eixo, temos um disco palhetado, também extensivamente estudado na análise do acoplamento de vibrações e do fenômeno de *mistuning*, que é o aumento de resposta forçada que ocorre quando as palhetas não são geometricamente idênticas. Três tipos de modelagem são destacadas na literatura: modelos de *lumped-mass* de várias ordens (HSIEH; ABEL, 1995; YOO; KIM; INMAN, 2003); modelos que utilizam teorias contínuas de vigas e placas (LIM; CHUNG; YOO, 2009; HUANG; KUANG, 2006) e, para simular geometrias de palhetas mais complexas, modelos de elementos finitos (YUAN et al., 2017; D'SOUZA; SAITO; EPUREANU, 2012). Esses modelos conseguem descrever de forma representativa o comportamento do disco palhetado, bem como o acoplamento palheta-palheta, porém só são aplicáveis em casos onde o eixo é rígido ou sua vibração é desprezível.

Outra abordagem estudada utiliza palhetas flexíveis acopladas a um rotor rígido, para modelar rotores de helicópteros ou turbinas eólicas. Nessa linha de pesquisa, Saracho (2002) utilizou aproximações lineares e não-lineares para descrever a deformação das palhetas nesse tipo de sistema. Os resultados experimentais mostraram

que apenas uma aproximação não-linear consegue descrever corretamente o comportamento dinâmico das palhetas, como o efeito de enrijecimento centrífugo. Sanches (2011), desenvolveu um modelo mecânico para representar um helicóptero sob a influência de envelhecimento e falha de componentes, modelando o rotor do helicóptero como um *hub* rígido acoplado às pás por meio de molas de torção e amortecimento viscoso. Rende (2020) considerou o modelo de rotor rígido com palhetas flexíveis para desenvolver e validar experimental o modelo matemático de um sistema rotor-palhetas, realizando um estudo de estabilidade por meio da teoria de Floquet e da transformação de coordenadas multi-pás.

Os exemplos anteriores citam análises nas quais a flexibilidade do eixo é desconsiderada. Contudo, em aplicações industriais de máquinas rotativas, essa flexibilidade se torna cada vez mais importante, visto que uma maneira de aumentar a eficiência de turbomáquinas é pela redução de sua massa. Isso leva a eixos cada vez mais delgados e flexíveis, se fazendo necessário considerar esses efeitos nos estudos realizados.

Ao considerar o eixo flexível no sistema eixo-disco-palhetas, muitos autores se baseiam nas teorias de vibração contínuas de vigas. Isso ocorre porque, comparado ao modelo analítico, um modelo de elementos finitos é mais complexo e possui uma dimensão maior, além de possuir uma tendência maior a erros numéricos por fatores como refinamento de malha, tipo de elemento utilizado e simplificações adotadas (YANG et al., 2022). A preferência por um modelo analítico se dá pela possibilidade de modelar o eixo e as palhetas como vigas, as quais possuem soluções analíticas para vibrações axiais, torcionais e de flexão conhecidas para diversas condições de contorno. Caso se deseje considerar a flexibilidade do disco, também é possível utilizar a solução analítica para vibração transversal de placas. Essas soluções podem ser encontradas no livro de Rao (2019) e podem ser utilizadas para discretização das equações do movimento utilizando, por exemplo, o Método dos Modos Assumidos. A modelagem contínua, no entanto, possui algumas desvantagens, como a diminuição da precisão para os modos mais altos, devido às limitações da teoria de viga simples (Euler-Bernoulli) (MEIROVITCH, 1986).

No grupo de pesquisa do LMEst (Laboratório de Mecânica das Estruturas da Universidade Federal de Uberlândia), Rende (2020) iniciou a linha de pesquisa acerca de

sistemas com palhetas rotativas. Em sua dissertação de mestrado, foi modelado um rotor acoplado a vigas que representam pás. O rotor foi considerado rígido, com deslocamentos na horizontal e na vertical. As pás foram modeladas como vigas flexíveis com massas acopladas a suas extremidades, para aumentar os efeitos inerciais. Os deslocamentos dessas vigas foram discretizados pelo Método dos Elementos Finitos para análise do comportamento dinâmico do sistema rotor-palhetas. Prosseguindo os estudos realizados por Rende (2020), este trabalho possibilitará a análise de mais tipos de sistemas com palhetas rotativas, considerando a presença de um eixo flexível. As palhetas flexíveis, nesse caso, são acopladas a um disco rígido e o disco é acoplado ao eixo flexível, formando um sistema eixo-disco-palhetas.

Portanto, o presente trabalho almeja desenvolver um modelo matemático para um sistema EDP que represente de maneira satisfatória seu comportamento dinâmico. O modelo será baseado nos modos de vibrar analíticos para vigas para modelar eixo e palhetas, enquanto o disco será considerado rígido. Para avaliar numericamente as respostas do sistema será utilizado o Método dos Modos Assumidos para a construção das matrizes globais de massa, rigidez e amortecimento.

1.2 Objetivos e justificativas

O objetivo desta dissertação é desenvolver e validar um modelo matemático para análise numérica do comportamento dinâmico de um sistema rotativo eixo-disco-palhetas. O intuito é encontrar equações do movimento que descrevam o comportamento acoplado entre o movimento do eixo flexível e o movimento do disco palhetado, permitindo a análise do sistema completo. Para possibilitar a análise numérica, a discretização pelo Método dos Modos Assumidos será empregada.

O desenvolvimento e validação deste modelo é importante no contexto do Laboratório de Mecânica das Estruturas “José Eduardo Tannús Reis” (LMEst) da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia (FEMEC-UFU), pois dá continuidade ao trabalho iniciado por Rende (2020) na pesquisa sobre comportamento dinâmico de sistemas com palhetas rotativas flexíveis.

Entre os objetivos secundários do estudo, destacam-se:

- Validar o modelo desenvolvido por meio de comparação com uma análise modal utilizando um modelo de elementos finitos e com experimentos realizados por outros autores;
- Verificar a influência de parâmetros de construção do sistema EDP em seu comportamento dinâmico;
- Avaliar a influência da rotação no comportamento do sistema, validando a presença de fenômenos como o enrijecimento centrífugo;
- Estimar as respostas temporais do sistema modelado.

1.3 Organização da dissertação

A dissertação foi dividida da seguinte maneira:

No Capítulo 2 foi realizada uma revisão bibliográfica acerca do desenvolvimento de modelos matemáticos de sistemas rotativos com palhetas flexíveis: acoplamento com rotores rígidos, discos palhetados e sistemas eixo-disco-palhetas.

O Capítulo 3 foi dedicado ao desenvolvimento das equações de energia cinética, potencial e de deformação para cada componente do rotor: eixo, disco desbalanceado e palheta rotativa.

O Capítulo 4 aborda a implementação numérica dos deslocamentos dos elementos flexíveis modelados (eixo e palhetas) pelo Método dos Modos Assumidos e a aplicação das Equações de Lagrange para a obtenção das equações globais do movimento.

No Capítulo 5 o modelo desenvolvido é validado pela comparação de seus resultados com um modelo de elementos finitos e experimentos realizados por outros autores. Também foi avaliada a influência do número de palhetas e da posição do disco no sistema, além de serem apresentadas as respostas no tempo e funções de resposta em frequência.

Por fim, o Capítulo 6 é dedicado a apresentar as conclusões obtidas pelo estudo e os próximos passos para a continuidade da linha de pesquisa no LMEst.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Este capítulo apresentará uma breve revisão bibliográfica sobre as abordagens já realizadas para a modelagem de sistemas rotativos que possuem esses componentes, incluindo: sistemas rotor-palhetas, disco palhetas e sistemas eixo-disco-palhetas.

2.1 Modelos de rotores rígidos acoplados a palhetas flexíveis

Exemplos de máquinas rotativas que acoplam rotores rígidos e palhetas flexíveis são turbinas eólicas e rotores de helicópteros. O comportamento dinâmico de sistemas desse tipo de rotor foi modelado por alguns autores.

Por exemplo, Saracho (2002), em sua tese de doutorado, modelou as palhetas flexíveis acopladas ao rotor rígido como vigas girantes. As vigas são consideradas de Euler-Bernoulli e são adicionadas massas em suas pontas para aumentar os efeitos inerciais. A autora comparou o resultado de aproximações lineares e não-lineares para descrever a deformação dessas vigas e chegou às equações globais do conjunto utilizando metodologias de múltiplos corpos (rígidos + flexíveis). Os resultados por ela obtidos foram comparados com experimentos realizados, chegando-se a conclusão que apenas aproximações não-lineares de deformação conseguem descrever o comportamento do sistema, com efeitos como o enrijecimento centrífugo (aumento das frequências naturais da viga rotativa com a rotação do sistema).

Saracho (2002) também escreve sobre a implementação numérica do modelo, des-

tacando o método dos elementos finitos e o método dos modos assumidos. Segundo ela, a vantagem do MMA é gerar modelos com poucos graus de liberdade, diminuindo o custo computacional associado. Contudo, esse método depende de funções admissíveis que muitas vezes não são de fácil determinação. Já o MEF utiliza funções polinomiais como aproximação para os deslocamentos estruturais, sendo mais simples por natureza. Sua desvantagem é que sua representatividade está relacionado ao refinamento da malha utilizada, gerando um modelo com maior número de graus de liberdade.

Sanches (2011), desenvolveu um modelo mecânico para representar um helicóptero sob a influência de envelhecimento e falha de componentes. A fuselagem é considerada como um corpo rígido com molas representando a flexibilidade do esqui. O rotor do helicóptero é modelado como um *hub* rígido acoplado às palhetas por meio de molas de torção e amortecimento viscoso. O modelo mecânico desenvolvido foi utilizado para avaliar a ressonância de solo para rotores isotrópicos e anisotrópicos. Moraes (2019) modelou um aerogerador completo, incluindo torre, trem de potência e pás girantes, utilizando o Método de Aproximação Modal para obter as equações do movimento do sistema.

Rende (2020) desenvolveu um modelo matemático para um sistema rotor-palhetas com massas na ponta, realizando sua implementação pelo MEF e comparando os resultados obtidos com experimentos. O autor realizou a análise de estabilidade do sistema por meio da análise de autovalores e pelos expoentes característicos da teoria de Floquet. Essa análise foi feita tanto com as coordenadas da palheta definidas no referencial rotativo quanto projetadas no referencial inercial pela transformação de coordenadas multi-pás. Os resultados foram condizentes, exceto para a análise dos autovalores no referencial rotativo, que não previu uma região de instabilidade detectada pelos outros métodos e pela resposta temporal.

Rasmussen e Santos (2021) compararam as respostas de um modelo similar ao de Rende (2020) com análises modais obtidas por dois métodos: análise modal operacional e análise modal experimental tradicional. A análise modal operacional é totalmente baseada nas respostas medidas da estrutura, tendo diversas vantagens. Entretanto, essa metodologia não foi desenvolvida para ser aplicada em sistemas periódicos, levando a grandes variações nas medições de frequências naturais.

2.2 Modelos de discos palhetados

Modelos de discos com palhetas flexíveis acopladas são amplamente estudados para análise de *mistuning*. Esse fenômeno ocorre quando as palhetas não são geometricamente idênticas, seja por desvios de construção ou alterações nas características dos materiais. Quando submetidas a vibrações forçadas, como cargas aerodinâmicas, o *mistuning* causa aumento significativo na resposta de vibração das palhetas, o que pode levar a falhas por fadiga.

Hsieh e Abel (1995) compararam duas abordagens de elementos finitos para a modelagem de sistemas disco-palhetas: *distributed mass* e *lumped-mass*. A abordagem de massa distribuída (*distributed mass*) considera a estrutura como contínua com pontos de massa distribuídos uniformemente, enquanto o modelo *lumped-mass* considera a estrutura como uma coleção discreta de pontos de massa concentrada. Os métodos tiveram resultados similares para os problemas estudados, exceto para análise transiente usando integração explícita no tempo, na qual a técnica *lumped-mass* se mostrou mais eficiente.

Yoo, Kim e Inman (2003) modelaram estruturas cíclicas como um sistema de pêndulos acoplados à estrutura do disco por molas torcionais e entre si por molas lineares. O *mistuning* foi simulado por comprimentos ligeiramente diferentes desses pêndulos e as respostas dinâmicas foram calculadas para diferentes condições de *mistuning*, amortecimento e acoplamento. Huang e Kuang (2006) estudaram o efeito de uma pequena trinca na raiz de uma palheta na estabilidade do disco palhetado. As palhetas são modeladas como vigas de Euler-Bernoulli engastadas-livres e as equações do movimento do sistema são obtidas pelas funções modais da viga e o MMA. A trinca é simulada por meio da flexibilidade local da palheta. Os resultados numéricos demonstraram que as zonas de instabilidade variam com o tamanho da trinca e a velocidade de rotação do disco.

Lim, Chung e Yoo (2009) desenvolveram um método de modelagem para realizar a análise modal de um disco palhetado com vários pacotes de palhetas. Ou seja, nesse caso, em cada pacote de palhetas, elas são conectadas por um reforço flexível, que adiciona efeitos no acoplamento de rigidez entre elas. A modelagem das palhetas é feita por meio de vigas afiladas, com variações de largura e espessura na

ST, enquanto o reforço é modelado como molas lineares. O método de Rayleigh-Ritz é aplicado para encontrar as equações do movimento. D'Souza, Saito e Epureanu (2012) desenvolveram um modelo de ordem reduzida para simular trincas e *mistuning* em sistemas de que possuem múltiplos estágios de discos palhetados. A redução de ordem é feita por estágio, baseada na simetria cíclica do sistema e síntese de modos componentes e a modelagem realizada pelo MEF.

Yuan et al. (2017) realizaram uma revisão bibliográfica acerca de problemas de *mistuning* em discos palhetados, dando ênfase no desenvolvimento de técnicas computacionais para análise do fenômeno, modelagem para redução de ordem e quantificação de incertezas. Os autores ressaltam que, embora modelos de *lumped-mass* ainda sejam utilizados em projetos iniciais, sua aplicação está limitada no máximo aos três primeiros modos das palhetas. Quanto a modelos de elementos finitos, destacam que sua aplicação é limitada no contexto industrial devido à necessidade de usar um grande número elementos para uma reposta fidedigna. De acordo com os autores, o estado da arte para modelagem de *mistuning* são métodos de inversão para análise estocástica. Esses métodos reduzem os custos computacionais relacionados ao grande número de inversões das matrizes dinâmicas relacionadas ao problema.

2.3 Modelos de sistemas eixo-disco-palhetas

Os modelos de discos palhetados são boas alternativas para estudar os efeitos do *mistuning*, mas são aplicáveis apenas em casos onde a flexibilidade do eixo é negligenciável. Como a tendência de aplicações industriais atuais e futuras são estruturas cada vez mais leves e delgadas, é necessário incluir a flexibilidade do eixo nas análises, investigando os efeitos de acoplamento nas respostas de vibração. Essa seção será dedicada a realizar uma revisão da literatura sobre modelos acoplados de sistemas EDP.

Jacquet-Richardet, Ferraris e Rieutord (1996) utilizaram os modos de vibrar não-rotativos de um sistema eixo-disco flexível na análise modal para avaliar as características dinâmicas do sistema rotativo correspondente. Esses modos não-rotativos foram calculados por meio de uma abordagem cíclica simétrica de elementos finitos, dimi-

nuindo assim a ordem do problema. Já Chun e Lee (1996) desenvolveram um método analítico para determinar os modos de vibrar mais baixos de sistemas eixo-palhetas, no qual o método de síntese de subestrutura e o método dos modos assumidos foram combinados. As funções modais de vigas foram utilizadas como funções admissíveis para o MMA. O acoplamento de vibrações foi analisado variando velocidade de rotação, ângulo de torção e de fixação das palhetas.

Chatelet, D'ambrosio e Jacquet-Richardet (2005) aplicaram a técnica desenvolvida por Jacquet-Richardet, Ferraris e Rieutord (1996) a um eixo de compósito de paredes finas e a uma bomba rotativa turbomolecular, comparando-a a modelos de eixo rígido para demonstrar as limitações do último. Al-Bedoor (2007) utilizou o MMA para desenvolver um modelo reduzido para calcular as frequências naturais de acoplamento entre torção do eixo e flexão das palhetas, identificando que os parâmetros que influenciam esse acoplamento são o ângulo de fixação da palheta e a inércia do disco e das palhetas.

Yang e Huang (2007) estudaram a influência da flexibilidade do disco na vibração acoplada de sistemas eixo-disco-palhetas, utilizando a abordagem de energia em conjunto com o método dos modos assumidos para obter as equações do movimento. Assim como em outros estudos, os modos analíticos de vibração de vigas e placa foram utilizados na discretização pelo MMA. A influência da flexibilidade do disco foi analisada, bem como efeitos da velocidade de rotação e ângulo de fixação da palheta.

Ma et al. (2015) propuseram um novo modelo dinâmico para sistemas rotor-palhetas. Nesse modelo, as palhetas rotativas são representadas como vigas de Timoshenko, enquanto o eixo flexível e o disco, considerado rígido, são representados por múltiplos pontos de massa concentrada (*lumped mass*), conectados por molas lineares e torcionais. Esses pontos são representados por suas massas e momentos de inércia, possuindo cinco graus de liberdade cada. A deformação das palhetas é modelada pelo MMA. Os resultados obtidos pelo modelo são comparados tanto com um modelo de elementos finitos como com resultados experimentais para velocidade de rotação zero.

Os mesmos autores do artigo anterior, em Ma et al. (2016) aperfeiçoaram o modelo desenvolvido em Ma et al. (2015). No novo modelo, o eixo é discretizado pelo Método dos Elementos Finitos e os efeitos do ângulo de fixação das palhetas e da oscilação do

disco são considerados. As palhetas são modeladas pelo MMA sendo aplicada uma redução de modelo. Dessa maneira, o modelo aperfeiçoado se mostra mais preciso que o anterior. Os autores também modelaram o efeito de roçamento entre ponta das palhetas e invólucro do rotor, considerando o último como um sistema de dois graus de liberdade de massa concentrada.

Li et al. (2017) desenvolveram um modelo dinâmico para o sistema EDP, considerando o disco rígido e eixo e palhetas flexíveis. O eixo é modelado como uma viga elasticamente suportada, ou seja, com molas em suas extremidades. A função modal analítica para esse tipo de viga foi desenvolvida e utilizada como função admissível para discretização pelo MMA. As palhetas foram modeladas como vigas engastadas-livres. A influência da posição do disco e do número de palhetas na resposta dinâmica foi analisada para o sistema em repouso e com rotação. Variações da rigidez do suporte elástico também foram estudados.

She et al. (2018) utilizaram um modelo similar ao desenvolvido por Li et al. (2017), porém considerando a flexibilidade do disco e torção do eixo. Os modelos de eixo elasticamente suportado e de disco flexível foram validados pela comparação com modelo de elementos finitos para eixo e resultados teóricos e experimentais para disco. Então, os modos de vibrar acoplados foram analisados, mostrando que existem quatro tipos de acoplamentos: flexão do eixo/deformação transversal do disco/flexão das palhetas, torção do eixo/deformação transversal do disco/flexão das palhetas, deformação do disco/flexão das palhetas e flexão das palhetas/flexão das palhetas.

She et al. (2020) avaliaram a influência da posição do disco e de sua flexibilidade nas velocidades críticas de frequências naturais do sistema EDP. Nesse estudo, as palhetas foram modeladas como vigas de Timoshenko suportadas elasticamente por uma mola linear. Dessa maneira, o acoplamento com o disco não é considerado rígido como nos modelos citados anteriormente. O modelo foi discretizado pelo MMA e validado pela comparação com uma análise de elementos finitos. Quando comparado com o modelo anterior (SHE et al., 2018), a adição da mola no acoplamento palheta-disco levou a uma maior precisão para os modos de vibrar mais altos. Os autores também chegaram a conclusão que a flexibilidade do disco pode ser negligenciada para os modos de vibrar mais baixos, desde que sua espessura seja até 10 vezes menor que seu raio.

Yang et al. (2022) também utilizou o Método dos Modos Assumidos para modelar o sistema eixo-disco-palhetas. O disco é considerado rígido e desbalanceado, o eixo é modelado como uma viga de Timoshenko simplesmente apoiada e as palhetas são consideradas vigas de Euler-Bernoulli engastadas-livres. A conexão entre palhetas que ocorre quando são utilizados amortecedores de vibração é simulado por uma mola linear. O modelo desenvolvido é validado pela comparação com o simulado em código comercial de elementos finitos e com uma análise experimental, nas quais a frequências naturais são medidas pelo sistema de *blade-tip-timing*. O mecanismo de acoplamento é avaliado pela análise das matrizes dinâmicas e pela resposta temporal do sistema ao desbalanceamento e a uma carga aerodinâmica. O efeito do ângulo de fixação das palhetas e da rigidez de interconexão também são avaliados.

Página intencionalmente deixada em branco.

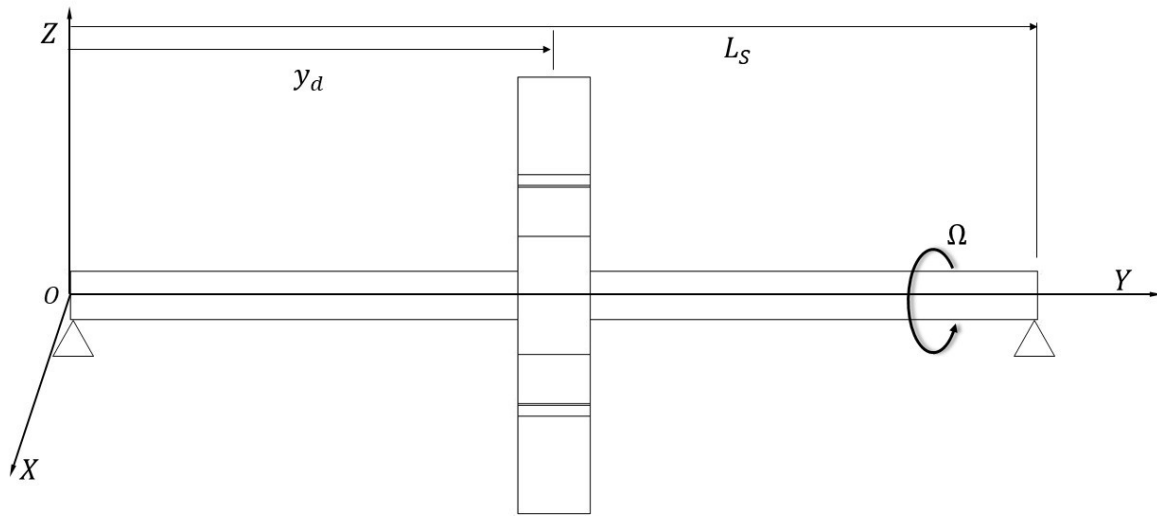
Capítulo 3

Modelo matemático do sistema eixo-disco-palhetas

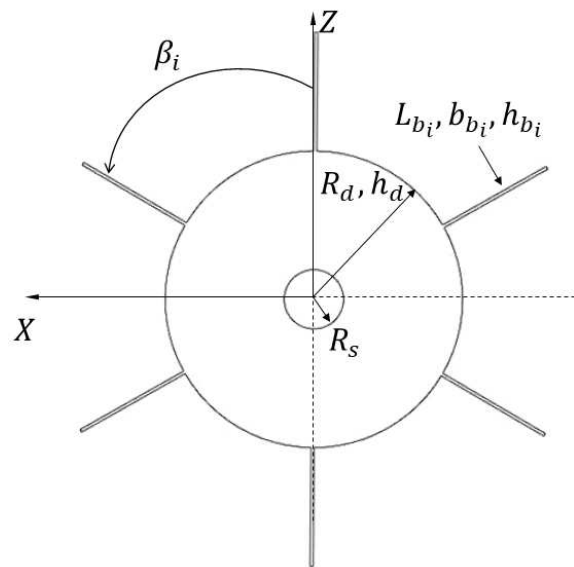
Neste capítulo será apresentado o desenvolvimento do modelo matemático do sistema estudado, mostrado na Fig. 3.1. Um eixo de comprimento L_s e raio de seção transversal R_s , é simplesmente apoiado em suas extremidades. O rotor possui um disco posicionado a uma distância y_d da origem, com raio R_d e espessura h_d . O disco é considerado rígido e possui palhetas flexíveis acopladas tangencialmente. Cada uma das $i = 1, \dots, N_b$ palhetas possuem seção transversal retangular, com comprimento L_{bi} , largura b_{bi} e altura h_{bi} . Essas são fixas ao disco sem ângulo de pré-torção, ou seja, paralelas à direção OY . O sistema gira com velocidade angular Ω . A flexibilidade é considerada tanto para o eixo quanto as palhetas.

Como as equações do movimento resultantes apresentarão o acoplamento entre corpos rígidos e flexíveis, é essencial a escolha de referenciais adequados para a correta descrição do movimento e também para a simplificação do modelo. No presente caso, são adotados dois referenciais. O referencial inercial $OXYZ$ possui sua origem no centro da face esquerda do eixo. O segundo referencial, $Rxyz$ é mostrado na Fig. 3.2, tendo sua origem no centro do eixo na posição y_d e girando de maneira solidária a ele com velocidade angular Ω .

As equações de movimento do sistema serão determinadas por meio das equações de Lagrange. Para isso, as expressões das energias potencial e cinética de todos os corpos devem ser escritas no referencial inercial. A matriz de transformação



(a)



(b)

Figura 3.1: Esquema do sistema rotor-palhetas modelado.

que transforma um vetor escrito no referencial inercial para um vetor no referencial R é dada pela Eq. (3.1).

$$T = T_3 \times T_2 \times T_1 \quad (3.1)$$

As matrizes T_1 , T_2 e T_3 são dadas pelas Eqs. (3.2) a (3.4), sendo θ e ψ as rotações

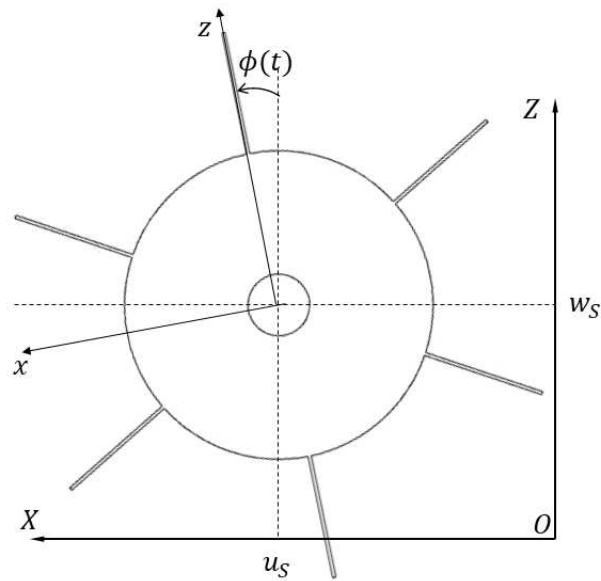


Figura 3.2: Vista frontal sistema modelado com eixo deslocado.

em torno de X e Z , respectivamente, e ϕ a rotação em torno de Y . A velocidade angular do rotor é $\dot{\phi} = \Omega$, que pode variar ao longo do tempo. O ângulo $\beta_i = \frac{2\pi(i-1)}{N_b}$ a posição angular da i -ésima palheta na direção circunferencial do disco, sendo utilizado para localizar a palheta em questão no modelo.

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} \cos(\phi + \beta_i) & 0 & -\sin(\phi + \beta_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi + \beta_i) & 0 & \cos(\phi + \beta_i) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Adotando a hipótese de pequenas rotações, é possível considerar as aproximações $\cos \psi = \cos \theta = 1$, $\sin \psi = \psi$, $\sin \theta = \theta$ e $\sin \psi \sin \theta = 0$. Com isso, obtém a matriz de transformação de coordenadas dada pela Eq. (3.5).

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\phi + \beta_i) & \psi \cos(\phi + \beta_i) + \theta \sin(\phi + \beta_i) & -\sin(\phi + \beta_i) \\ -\psi & 1 & \theta \\ \sin(\phi + \beta_i) & \psi \sin(\phi + \beta_i) - \theta \cos(\phi + \beta_i) & \cos(\phi + \beta_i) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

A seções seguintes apresentarão a modelagem matemática do eixo e das palhetas, bem como a união de ambos para a obtenção das equações globais do movimento do sistema.

3.1 Modelo matemático do eixo

3.1.1 Energia cinética do eixo

O eixo será modelado de acordo com Lalanne e Ferraris (1990), representado por uma viga de Timoshenko com seção transversal circular. Como será considerada a flexibilidade, ele é caracterizado pela energia cinética e potencial. A Figura 3.3 mostra um segmento do eixo de comprimento infinitesimal dy . Considerando o referencial xyz preso ao centro do eixo na posição desse segmento, temos que u_s , v_s e w_s são os deslocamentos em relação a $OXYZ$. As rotações em torno dos eixos são θ , ϕ e ψ .

A energia cinética do segmento considerado é dada pela Eq. 3.6 (LALANNE; FERRARIS, 1990). O primeiro e segundo termos são as energias de translação e rotação clássicas para um viga. O terceiro termo aparece quando se passa o vetor velocidade angular do referencial rotativo para o referencial inercial, gerando um acoplamento de rotações.

$$\frac{dT_s}{dy} = \frac{1}{2}\rho_s S(\dot{u}_s^2 + \dot{w}_s^2) + \frac{1}{2}\rho_s I_s(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\rho_s I_p(\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (3.6)$$

Sendo ρ_s a densidade do eixo, S a área de sua seção transversal, I_s o momento de inércia e I_p o momento polar de inércia. Como a seção transversal é circular, tem-se $I_p = 2I_s$. A energia cinética total do eixo é dada pela integração da Eq. (3.6) ao longo do comprimento do eixo:

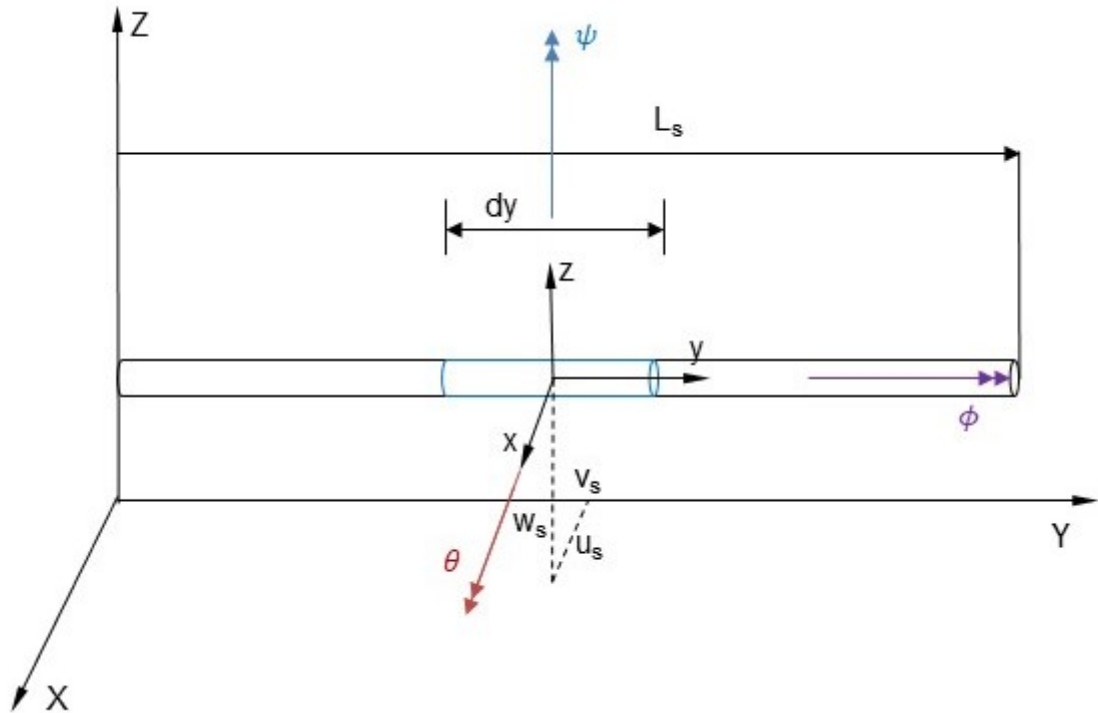


Figura 3.3: Modelo do eixo.

$$T_s = \frac{1}{2}\rho_s S \int_0^{L_s} (\dot{u}_s^2 + \dot{w}_s^2) dy + \frac{1}{2}\rho_s I_s \int_0^{L_s} (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + 2\rho_s I_s \int_0^{L_s} \Omega \dot{\psi} \theta dy + \rho_s I_s L_s \Omega^2 \quad (3.7)$$

O primeiro termo da Eq. (3.7) é a energia cinética clássica para uma viga em flexão, seguido da inércia rotacional e do efeito giroscópico. O último termo é a energia de rotação que, por ser constante, não tem influência nas equações do movimento do sistema.

3.1.2 Energia de deformação do eixo

Considerando que o material, de módulo de elasticidade E_s constante se comporta de acordo com a lei de Hooke e sendo τ o volume do eixo e ϵ o vetor de deformações, a energia de deformação da seção transversal do eixo é dada por:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{\tau} E_s \epsilon^T \epsilon d\tau \quad (3.8)$$

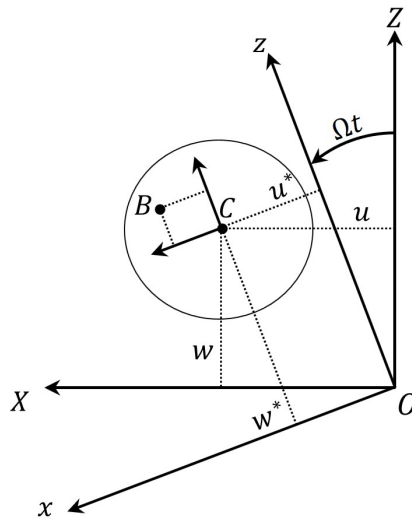


Figura 3.4: Coordenadas do centro geométrico C e de um ponto arbitrário B no eixo. Adaptado de: (LALANNE; FERRARIS, 1990).

Na Figura 3.4, temos que C é o centro geométrico do eixo e B um ponto arbitrário em sua seção transversal. u^* , v^* e w^* são as posições do centro do eixo em x , y e z , respectivamente. É importante ressaltar que aqui o referencial rotativo $Oxyz$ mostrado na Fig. 3.4 é diferente do referencial rotativo adotado no resto do texto, uma vez que $Oxyz$ tem sua origem coincidente com a origem O do referencial inercial e não no centro geométrico C do eixo. Essa alteração não influencia os resultados de energia de deformação do eixo, visto que esta será função apenas de u_s e w_s , definidos no referencial inercial. Para maiores detalhes sugere-se consultar o texto de Lalanne e Ferraris (1990).

Desprezando os termos de ordem superior, a deformação longitudinal de um ponto B qualquer do eixo é dada pela Eq. (3.9) (LALANNE; FERRARIS, 1990).

$$\epsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (3.9)$$

Substituindo a Eq. (3.9) na Eq. (3.8), obtém-se:

$$U_s = \frac{E_s}{2} \int_0^{L_s} \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (3.10)$$

Expandindo a Eq. (3.10), tem-se que a energia de deformação é:

$$U_s = \frac{E_s}{2} \int_0^{L_s} \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \quad (3.11)$$

Como a seção transversal é simétrica, o terceiro termo da Eq. (3.11) é nulo (Eq. (3.12)). Os conceitos de momento de inércia mostrados na Eq. (3.13) são aplicados para se obter a Eq. (3.14).

$$\int_S xz dS = 0 \quad (3.12)$$

$$I_s = \int_S x^2 dS = \int_S z^2 dS \quad (3.13)$$

$$U_s = \frac{E_s I_s}{2} \int_0^{L_s} \left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.14)$$

É necessário expressar a energia de deformação em termos do movimento do centro do eixo no referencial inercial, ou seja, em função de u_s e w_s . Pela Fig. 3.4, escrevem-se u^* e w^* no referencial inercial de acordo com a Eqs. (3.15).

$$u^* = u_s \cos \Omega t - w_s \sin \Omega t \quad (3.15)$$

$$w^* = u_s \sin \Omega t + w_s \cos \Omega t \quad (3.16)$$

Substituindo as Eqs. (3.15) na Eq. (3.14) obtém-se a expressão final da energia de deformação do eixo, dada pela Eq. (3.17).

$$U_s = \frac{E_s I_s}{2} \int_0^{L_s} \left[\left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.17)$$

3.2 Modelo matemático do disco

No sistema estudado, o disco é considerado rígido, caracterizado apenas por sua energia cinética. Considerando um disco de raio externo R_d , raio interno $r_d = R_s$ e espessura h_d , com massa m_d e momentos de inércia I_{dx} , I_{dy} e I_{dz} , sua energia cinética

é dada pela soma de sua energia cinética de translação e sua energia cinética de rotação:

$$T_d = T_{dt} + T_{dr} \quad (3.18)$$

Sendo u_{sd} e w_{sd} são as deformações lineares do eixo em X e Z na posição $Y = y_d$ em que o disco está fixado, a energia cinética de translação é:

$$T_t = \frac{1}{2}m_d (\dot{u}_{sd}^2 + \dot{w}_{sd}^2) \quad (3.19)$$

Sendo ω_{dx} , ω_{dy} e ω_{dz} as velocidades de rotação do disco no referencial inercial, a energia cinética de rotação é:

$$T_r = \frac{1}{2}I_{dx}\omega_{dx}^2 + \frac{1}{2}I_{dy}\omega_{dy}^2 + \frac{1}{2}I_{dz}\omega_{dz}^2 \quad (3.20)$$

No referencial inercial, o vetor de velocidade de rotação do disco é escrito como:

$$\omega_d = \begin{Bmatrix} \omega_{dx} \\ \omega_{dy} \\ \omega_{dz} \end{Bmatrix} = T_3 T_2 T_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + T_3 T_2 \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Expandindo:

$$\omega_d = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi}\theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \Omega + \dot{\psi}\theta \\ \dot{\psi} \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Substituindo a Eq. (3.22) na Eq. (3.20) e considerando $\psi^2 = \theta^2 = 0$ e $I_{dx} = I_{dz}$, obtém-se:

$$T_r = \frac{1}{2}I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (3.23)$$

Assim, a energia cinética total do disco, considerando $\theta = \theta_d$ e $\psi = \psi_d$ são as rotações do eixo nessa posição do disco, é dada por:

$$T_d = \frac{1}{2}m_d (\dot{u}_{sd}^2 + \dot{w}_{sd}^2) + \frac{1}{2}I_{d_x} (\dot{\theta}_d^2 + \dot{\psi}_d^2) + \frac{1}{2}I_{d_y} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}_d\theta_d) \quad (3.24)$$

Sendo:

$$I_{d_x} = I_{d_z} = \frac{1}{12}m_d (3R_d^2 + 3r_d^2 + h_d^2) \quad (3.25)$$

$$I_{d_y} = \frac{1}{2}m_d (R_d^2 + r_d^2) \quad (3.26)$$

3.2.1 Desbalanceamento

Em máquinas rotativas, é muito comum a presença de desbalanceamento, que ocorre quando o centro geométrico de massa do rotor não coincide com seu centro geométrico. Esse fenômeno é descrito como uma pequena massa m_u , situada a uma distância d do centro geométrico C do eixo, como mostra a Fig. 3.5.

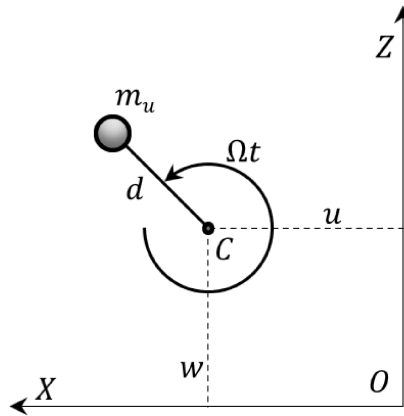


Figura 3.5: Desbalanceamento no rotor. Adaptado de: (LALANNE; FERRARIS, 1990).

Neste modelo, será considerado que a massa de desbalanceamento é posicionada no disco. Sendo assim, o referencial inercial, a posição da massa m_u é dada por:

$$r_u = \begin{Bmatrix} u_{sd} + d \sin \phi \\ v_{sd} \\ w_{sd} + d \cos \phi \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Logo, sua velocidade é:

$$\dot{r}_u = \begin{Bmatrix} \dot{u}_{sd} + d\Omega \cos \phi \\ 0 \\ \dot{w}_{sd} - d\Omega \sin \phi \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

A partir da velocidade, é possível calcular a energia cinética da massa de desbalanceamento, sendo ela:

$$T_u = \frac{1}{2} m_u \dot{r}_u^T \dot{r}_u = \frac{1}{2} m_u (\dot{u}_{sd}^2 + \dot{w}_{sd}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u}_{sd} \cos \phi - 2\Omega d \dot{w}_{sd} \sin \phi) \quad (3.29)$$

Considerando que a massa m_u é muito menor que a massa total do conjunto do rotor e que o termo $\Omega^2 d^2$ não tem efeito na construção das equações do movimento, a energia cinética torna-se:

$$T_u = m_u d \Omega (\dot{u}_{sd} \cos \phi - \dot{w}_{sd} \sin \phi) \quad (3.30)$$

Adicionando a energia cinética do desbalanceamento à Eq. (3.24), a energia cinética total do disco fica:

$$T_D = T_d + T_u \quad (3.31)$$

3.3 Modelo matemático da i-ésima palheta rotativa

Considera-se que as palhetas são vigas de Euler-Bernoulli fixadas ao disco em sua direção circunferencial, como mostrado na Fig. 3.1b. A posição de um ponto p_i genérico na i-ésima palheta, localizado a uma altura z_i em seu comprimento, no referencial $Rxyz$, é dada pela Eq. (3.32), sendo R_d o raio do disco.

$$r_{p_i}^R(z_i) = \left\{ u_i(z_i, t) \quad v_i(z_i, t) \quad R_d + z_i + w_i(z_i, t) \right\}^T \quad (3.32)$$

Considera-se que a palheta tem movimento transversal e axial apenas, não se deformando ao longo de y , logo $v_i(z_i, t) = 0$. A posição do centro do eixo no ponto $y = y_d$ em que estão fixas as palhetas, no referencial inercial, é:

$$r_C^O(y_d) = \left\{ \begin{array}{l} u_s(y_d, t) \quad y_d \quad w_s(y_d, t) \end{array} \right\}^T \quad (3.33)$$

Dessa maneira, a posição do ponto p_i da palheta no referencial inercial é dada pela Eq. (3.34).

$$r_{p_i}^O(y_d, z_i) = r_C^O(y_d) + T^T r_{p_i}^R(z_i) \quad (3.34)$$

Expandindo a Eq. (3.34):

$$r_{p_i}^O = \left\{ \begin{array}{l} u_s + u_i \cos(\phi + \beta_i) + (R_d + z_i + w_i) \sin(\phi + \beta_i) \\ y_d + (R_d + z_i)(\psi \sin(\phi + \beta_i) - \theta \cos(\phi + \beta_i)) \\ w_s - u_i \sin(\phi + \beta_i) + (R_d + z_i + w_i) \cos(\phi + \beta_i) \end{array} \right\} \quad (3.35)$$

Com o vetor posição escrito no referencial inercial, a velocidade do ponto p_i é obtida pela derivada temporal da Eq. (3.35). A velocidade linear é então dada por:

$$\dot{r}_{p_i}^O = \left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_s - u_i \Omega \sin(\phi + \beta_i) + \dot{u}_i \cos(\phi + \beta_i) + (R_d + z_i + w_i) \Omega \cos(\phi + \beta_i) + \dot{w}_i \sin(\phi + \beta_i) \\ (R_d + z_i) \left[\psi \Omega \cos(\phi + \beta_i) + \dot{\psi} \sin(\phi + \beta_i) + \theta \Omega \sin(\phi + \beta_i) - \dot{\theta} \cos(\phi + \beta_i) \right] \\ \dot{w}_s - u_i \Omega \cos(\phi + \beta_i) - \dot{u}_i \sin(\phi + \beta_i) + (R_d + z_i + w_i) \Omega \sin(\phi + \beta_i) + \dot{w}_i \cos(\phi + \beta_i) \end{array} \right\} \quad (3.36)$$

A partir da expressão de velocidade de um ponto qualquer na palheta, dada pela Eq. (3.36), é possível desenvolver a expressão de sua energia cinética, apresentada na seção a seguir.

3.3.1 Energia cinética da i-ésima palheta

A energia cinética da i-ésima palheta é dada pela Eq. (3.37), sendo ρ_b a densidade de seu material, L_b seu comprimento e A_{b_i} a área de sua seção transversal. Assume-se que as propriedades físicas e geométricas se mantêm constantes ao longo de toda a palheta.

$$T_b^i = \frac{1}{2} \rho_b A \int_0^{L_b} \dot{r}_{p_i}^T \dot{r}_{p_i} dz_i \quad (3.37)$$

Expandindo a Eq. (3.37) e desprezando os termos de ordem maior que, chega-se a:

$$\begin{aligned} T_b^i = & \frac{1}{2} \rho_b A_{b_i} \int_0^{L_b} \left[\dot{u}_s^2 + \dot{w}_s^2 + \dot{u}_i^2 + \dot{w}_i^2 + \Omega^2 u_i^2 + 2\Omega(R_d + z_i + w_i)\dot{u}_i \right. \\ & \left. + \Omega^2(R_d + z_i + w_i)^2 - 2\Omega u_i \dot{w}_i + (R_d + z_i)^2 \Omega(-\dot{\psi}\dot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\theta}) \right] dz_i \\ & + \frac{1}{2} \rho_b A_{b_i} \cos(\phi + \beta_i) \int_0^{L_b} \left[2\dot{w}_i \dot{w}_s + 2\dot{u}_i \dot{w}_s + 2\Omega(R_d + z_i + w_i)\dot{u}_s - 2\Omega u_i \dot{w}_s \right] dz_i \\ & + \frac{1}{2} \rho_b A_{b_i} \sin(\phi + \beta_i) \int_0^{L_b} \left[2\dot{w}_i \dot{u}_s - 2\dot{u}_i \dot{w}_s - 2\Omega(R_d + z_i + w_i)\dot{w}_s - 2\Omega u_i \dot{u}_s \right] dz_i \\ & + \frac{1}{2} \rho_b A_{b_i} \cos^2(\phi + \beta_i) \int_0^{L_b} \left[(R_d + z_i)^2 \Omega^2 \dot{\psi}^2 + (R_d + z_i)^2 \dot{\theta}^2 \right] dz_i \\ & + \frac{1}{2} \rho_b A_{b_i} \sin^2(\phi + \beta_i) \int_0^{L_b} \left[(R_d + z_i)^2 \Omega^2 \dot{\theta}^2 + (R_d + z_i)^2 \dot{\psi}^2 \right] dz_i \end{aligned} \quad (3.38)$$

Por expansão, tem-se que a energia cinética total do sistema de palhetas é dada por:

$$T_b = \sum_{i=1}^{N_b} T_b^i \quad (3.39)$$

Como as palhetas se distribuem uniformemente na direção circunferencial do disco, tem-se que: (YANG et al., 2022)

$$\sum_{i=1}^{N_b} \cos^2(\phi + \beta_i) = \sum_{i=1}^{N_b} \sin^2(\phi + \beta_i) = \frac{N_b}{2} \quad (3.40)$$

Combinando as Eqs. (3.38), (3.39) e (3.40), chega-se à Energia Cinética total do sistema, dada pela Eq. (3.41).

$$\begin{aligned}
T_b = & \sum_{i=1}^{N_b} \frac{1}{2} \rho_b A_{b_i} \int_0^{L_b} \left[\begin{aligned} & \dot{u}_s^2 + \dot{w}_s^2 + \dot{u}_i^2 + \dot{w}_i^2 + \Omega^2 u_i^2 + 2\Omega(R_d + z_i + w_i)\dot{u}_i \\ & + \Omega^2(R_d + z_i + w_i)^2 - 2\Omega u_i \dot{w}_i + (R_d + z_i)^2 \Omega(-\dot{\psi}\dot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\theta}) \end{aligned} \right] dz_i \\
& + \sum_{i=1}^{N_b} \frac{1}{2} \rho_b A_{b_i} \cos(\phi + \beta_i) \int_0^{L_b} \left[2\dot{w}_i \dot{w}_s + 2\dot{u}_i \dot{w}_s + 2\Omega(R_d + z_i + w_i)\dot{u}_s - 2\Omega u_i \dot{w}_s \right] dz_i \\
& + \sum_{i=1}^{N_b} \frac{1}{2} \rho_b A_{b_i} \sin(\phi + \beta_i) \int_0^{L_b} \left[2\dot{w}_i \dot{u}_s - 2\dot{u}_i \dot{w}_s - 2\Omega(R_d + z_i + w_i)\dot{w}_s - 2\Omega u_i \dot{u}_s \right] dz_i \\
& + \sum_{i=1}^{N_b} \frac{N_b}{4} \rho_b A_{b_i} \int_0^{L_b} \left[(R_d + z_i)^2 \Omega^2 \dot{\psi}^2 + (R_d + z_i)^2 \dot{\theta}^2 \right] dz_i \\
& + \sum_{i=1}^{N_b} \frac{N_b}{4} \rho_b A_{b_i} \int_0^{L_b} \left[(R_d + z_i)^2 \Omega^2 \dot{\theta}^2 + (R_d + z_i)^2 \dot{\psi}^2 \right] dz_i \tag{3.41}
\end{aligned}$$

3.3.2 Energia potencial da i-ésima palheta

A energia potencial da i-ésima palheta é dada pela soma da energia de deformação devido a sua flexibilidade e da energia potencial gravitacional.

A energia de deformação da i-ésima palheta é calculada pela Eq. (3.42), sendo τ seu volume, E_{b_i} seu módulo de elasticidade e ϵ_{zz} a deformação na direção de sua seção transversal.

$$U_{b_i} = \frac{1}{2} \int_{\tau} E_b \epsilon_{zz}^T \epsilon_{zz} d\tau \tag{3.42}$$

Segundo Przemieniecki (1985), sendo x a distância entre um ponto genérico da seção transversal e sua linha neutra, a deformação ϵ_{zz} é dada pela Eq. (3.43). Por se tratar de uma viga delgada, desprezam-se as deformações causadas por esforços de cisalhamento.

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w_i}{\partial z_i} - x \frac{\partial^2 u_i}{\partial z_i^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_i} \right)^2 \tag{3.43}$$

Substituindo Eq. (3.43) na Eq. (3.42), tem-se:

$$\begin{aligned}
U_{b_i} = & \frac{E_b}{2} \int_0^{L_b} \int_{A_{b_i}} \left(\frac{\partial w_i}{\partial z_i} \right)^2 dA_{b_i} dz_i - \frac{E_b}{2} \int_0^{L_b} \int_{A_{b_i}} 2x \frac{\partial w_i}{\partial z_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial z_i^2} dA_{b_i} dz_i \\
& + \frac{E_b}{2} \int_0^{L_b} \int_{A_{b_i}} \frac{\partial w_i}{\partial z_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_i} \right)^2 dA_{b_i} dz_i - \frac{E_b}{2} \int_0^{L_b} \int_{A_{b_i}} x \frac{\partial^2 u_i}{\partial z_i^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_i} \right)^2 dA_{b_i} dz_i \\
& + \frac{E_b}{2} \int_0^{L_b} \int_{A_{b_i}} x^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial z_i^2} \right)^2 dA_{b_i} dz_i + \frac{E_b}{2} \int_0^{L_b} \int_{A_{b_i}} \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_i} \right)^4 dA_{b_i} dz_i \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Desprezando o termo não linear de quarta ordem na Eq.(3.44) e considerando as seguintes relações:

$$\int_{A_{b_i}} y dA_{b_i} = y A_{b_i} \forall y, \quad \int_{A_{b_i}} x dA_{b_i} = 0, \quad \int_{A_{b_i}} x^2 dA_{b_i} = I_{b_i} \quad (3.45)$$

Obtém-se:

$$U_{b_i} = \frac{E_b A_{b_i}}{2} \int_0^{L_b} \left(\frac{\partial w_i}{\partial z_i} \right)^2 dz_i + \frac{E_b I_{b_i}}{2} \int_0^{L_b} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial z_i^2} \right)^2 dz_i + \frac{E_b A_{b_i}}{2} \int_0^{L_b} \frac{\partial w_i}{\partial z_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_i} \right)^2 dz_i \quad (3.46)$$

Na Eq. (3.46), o primeiro termo é energia pela deformação axial da palheta, o segundo termo pela deformação de flexão e o terceiro dado pelo acoplamento de deformações. É possível simplificar esse último termo a partir do problema de tensão inicial. Sendo N a força normal atuante na palheta:

$$\sigma = \frac{N(z_i)}{A_{b_i}} \quad (3.47)$$

Considerando que o material da palheta se comporta de acordo com a Lei de Hooke, tem-se:

$$\sigma = E_b \frac{\partial w_i}{\partial z_i} \quad (3.48)$$

Combinando as Eqs.(3.47) e (3.48), chega-se a expressão para a deformação longitudinal da palheta, dada pela Eq. (3.49).

$$\frac{\partial w_i}{\partial z_i} = \frac{N(z_i)}{E_b A_{b_i}} \quad (3.49)$$

Segundo Saracho (2002), é possível aproximar $N(z_i)$ pela força normal atuante em uma viga girante no instante inicial, quando os termos associados à deformação são nulos, também conhecida como força de membrana de viga. Essa força é dada por:

$$N(z_i) = \frac{\rho_b A_{b_i} \Omega^2}{2} (L_b^2 - z_i^2) \quad (3.50)$$

Dessa maneira, combinando as Eqs. (3.49) e (3.50) e substituindo na Eq. (3.46), obtém-se a expressão final para a energia de deformação da i -ésima palheta, dada por:

$$U_{b_i} = \frac{E_b A_{b_i}}{2} \int_0^{L_b} \left(\frac{\partial w_i}{\partial z_i} \right)^2 dz_i + \frac{E_b I_{b_i}}{2} \int_0^{L_b} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial z_i^2} \right)^2 dz_i + \frac{\rho_b A_{b_i} \Omega^2}{4} \int_0^{L_b} (L_b^2 - z_i^2) \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_i} \right)^2 dz_i \quad (3.51)$$

A energia potencial gravitacional devido ao movimento da i -ésima palheta é:

$$U_{g_i} = \rho_b A_{b_i} \int_0^{L_b} G^T r_{p_i}^O(z_i) dz_i \quad (3.52)$$

sendo G o vetor aceleração da gravidade, com $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

$$G = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & -g \end{matrix} \right\}^T \quad (3.53)$$

A energia potencial total para o sistema de N_b palhetas é dada por:

$$U_b = \sum_{i=1}^{N_b} (U_{b_i} + U_{g_i}) \quad (3.54)$$

Página intencionalmente deixada em branco.

Capítulo 4

Discretização das Equações do Movimento

Em posse das expressões das energias cinética e potencial para eixo e palhetas é possível utilizar as equações de Lagrange para encontrar as equações do movimento do sistema estudado. Contudo, para se realizar a implementação numérica dessas equações de maneira computacionalmente eficaz, é preciso utilizar aproximações para o campo de deslocamento. Neste trabalho, essa aproximação será feita pelo Método dos Modos Assumidos (MMA).

De acordo com Meirovitch (1986), o Método dos Modos Assumidos assume uma solução para o problema de condição de contorno associado a um sistema contínuo conservativo da forma:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) q_i(t) \quad (4.1)$$

onde $\Phi_i(x)$ são funções de interpolação que satisfazem as condições de contorno do problema e $q_i(t)$ são as coordenadas generalizadas. Em conjunto com as equações de Lagrange, o sistema contínuo é escrito como um sistema de n graus de liberdade.

4.1 Discretização do eixo

O eixo será modelado como uma viga simplesmente apoiada nas direções x e z . A Figura 4.1 mostra a viga modelada, que possui comprimento l e massa por unidade de comprimento m .

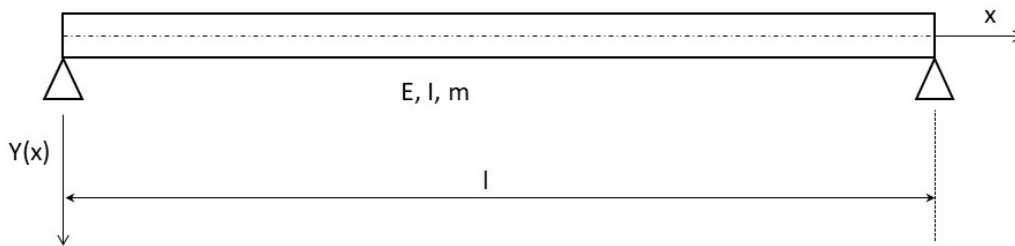


Figura 4.1: Modelo esquemático da viga simplesmente apoiada.

Ignorando a inércia rotacional e efeitos de deformação por cisalhamento, o que é válido para vigas delgadas, a equação diferencial da vibração da viga é dada pela seguinte expressão:

$$m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (4.2)$$

sendo $y(x, t)$ o deslocamento transversal da viga, E o módulo de elasticidade de seu material e I o momento de inércia de área de sua seção transversal.

A solução da Eq. (4.2) pode ser separada entre espaço de acordo com a Eq. (4.3), onde $Y(x)$ é a função modal e $F(t)$ é harmônica de frequência ω .

$$y(x, t) = Y(x)F(t) \quad (4.3)$$

Substituindo a Eq. (4.3) na Eq. (4.2), tem-se:

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \zeta^4 Y(x) = 0, \quad (4.4)$$

sendo

$$\zeta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI}. \quad (4.5)$$

A Equação 4.4 é uma equação diferencial ordinária linear de quarta ordem que tem como solução a Eq. (4.6), com C_1 , C_2 , C_3 e C_4 constantes.

$$Y(x) = C_1 \sin \zeta x + C_2 \cos \zeta x + C_3 \sinh \zeta x + C_4 \cosh \zeta x \quad (4.6)$$

Como as extremidades da viga estão apoiadas, o deslocamento nesses pontos é nulo. Além disso, as extremidades rotacionam livremente, gerando um momento fletor nulo. Essas condições de contorno são escritas como:

$$Y(0) = 0$$

$$Y''(0) = 0 \quad (4.7)$$

$$Y(l) = 0$$

$$Y''(l) = 0 \quad (4.8)$$

Assumindo $\lambda = \zeta l$ e substituindo a Eqs. (4.8) e Eq. (4.7) na Eq. (4.6), obtém-se:

$$C_1 + C_3 = 0$$

$$-C_1 + C_3 = 0 \quad (4.9)$$

Logo:

$$C_1 = C_3 = 0 \quad (4.10)$$

Substituindo as Eq. (4.8) na Eq. (4.6), chega-se a:

$$C_2 \sin \zeta l + C_4 \sinh \zeta l = 0$$

$$\zeta^2 [-C_2 \sin \zeta l + C_4 \sinh \zeta l] = 0 \quad (4.11)$$

Os sistema de equações dado pela Eq. (4.11) só tem solução não trivial se o determinante da matriz de seus coeficientes for zero. Essa restrição leva a:

$$\sin \zeta l \sinh \zeta l = 0 \quad (4.12)$$

No entanto, como $\sinh \zeta l \neq 0$, deve-se atender:

$$\sin \zeta l = 0 \quad (4.13)$$

que tem como solução

$$\zeta_n = \frac{j\pi}{l} \quad (4.14)$$

Sendo assim, a função modal da viga é escrita como, sendo $j = 1..N_s$ o número de modos utilizados na discretização:

$$Y_j(x) = \sin \left(\frac{j\pi}{l} x \right) \quad (4.15)$$

No problema em estudo, o eixo sofre flexão nas direções X e Z . Dessa maneira, seus deslocamentos são discretizados de acordo com:

$$u_s(y, t) = \sum_{j=1}^{N_s} X_j(y) \eta_j(t) = \mathbf{X}(y) \boldsymbol{\eta}(t) \quad (4.16)$$

$$w_s(y, t) = \sum_{j=1}^{N_s} Z_j(y) \xi_j(t) = \mathbf{Z}(y) \boldsymbol{\xi}(t) \quad (4.17)$$

sendo,

$$X_j(y) = Z_j(y) = \sin \left(\frac{j\pi}{L_s} y \right) \quad (4.18)$$

Como as rotações ψ e θ são pequenas, podemos aproximá-las pela Eq. (4.19).

$$\psi = - \frac{\partial u_s}{\partial y} \quad (4.19)$$

$$\theta = \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (4.20)$$

Utilizando as definições das Eqs. (4.16) e (4.17):

$$\psi(y, t) = - \sum_{j=1}^{N_s} X'_j(y) \eta_j(t) = -\mathbf{X}'(y) \boldsymbol{\eta}(t) \quad (4.21)$$

$$\theta(y, t) = \sum_{j=1}^{N_s} Z'_j(y) \xi_j(t) = \mathbf{Z}'(y) \boldsymbol{\xi}(t) \quad (4.22)$$

4.2 Discretização da i-ésima palheta

As palhetas serão modeladas como vigas engastadas-livres, como a mostrada na Fig. 4.2, já que suas extremidades são fixas ao eixo e se movimentam apenas de maneira solidária a ele. Essa viga vibra na direção transversal de acordo com a função modal $Y(x)$ e na direção longitudinal de acordo com $U(x)$.

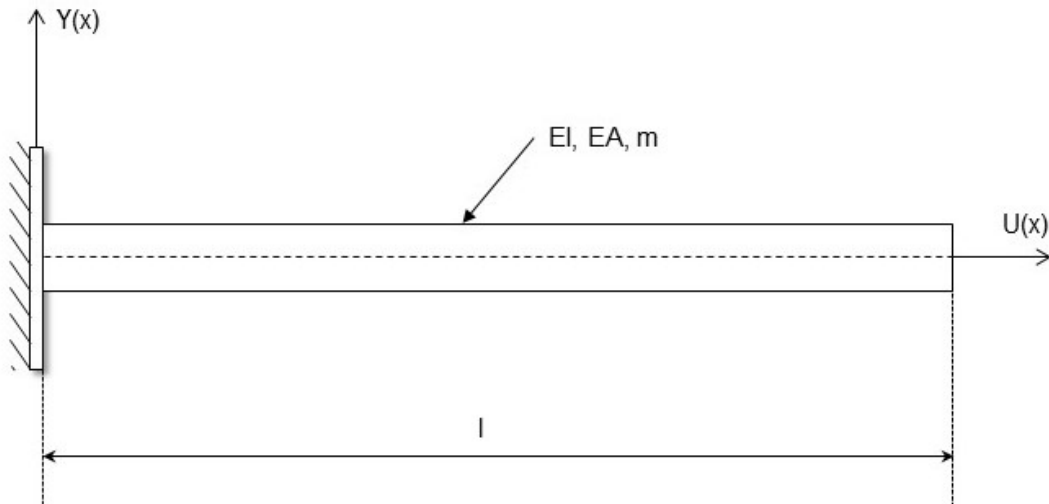


Figura 4.2: Esquema de uma viga engastada-livre.

A equação diferencial da vibração de flexão da viga é a mesma desenvolvida para o eixo, apresentada na Eq. (4.4). Sendo assim, a solução geral também não muda (Eq. (4.6)). As condições de contorno utilizadas, porém, são diferentes. Na extremidade engastada, tem-se que o deslocamento e rotação da viga são nulos (Eq. 4.23). Na extremidade livre, conclui-se que o momento fletor e a força cortante são nulos (Eq. (4.24)).

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0 \quad (4.23)$$

$$Y''(l) = 0, \quad Y'''(l) = 0 \quad (4.24)$$

Aplicando as condições de contorno à Eq. (4.6) e manipulando as equações resultantes, chega-se à forma modal de flexão da viga engastada-livre: (MEIROVITCH, 1986)

$$Y_k(x) = \cosh \frac{\lambda_k x}{l} - \cos \frac{\lambda_k x}{l} - \frac{\cos \lambda_k + \cosh \lambda_k}{\sinh \lambda_k + \sin \lambda_k} \left(\sinh \frac{\lambda_k x}{l} - \sin \frac{\lambda_k x}{l} \right) \quad (4.25)$$

Sendo λ_k as $k = 1, \dots, N$ raízes da equação característica (4.26). Diferentemente do modelo do eixo, os valores das raízes são constantes e independem das características geométricas do problema.

$$\cos \lambda_k \cosh \lambda_k = -1 \quad (4.26)$$

A vibração transversal da i -ésima palheta é elaborada de maneira análoga à realizada anteriormente. No sistema estudado, a vibração transversal das palhetas é dado na direção x , pelo referencial adotado. Sendo assim, obtemos a vibração em z para a i -ésima palheta:

$$u_i(z_i, t) = \sum_{j=1}^N U_k(z_i) q_{u_k}(t) = \mathbf{U}(z_i) \mathbf{q}_u(t) \quad (4.27)$$

sendo,

$$U_k(z_i) = \cosh \frac{\lambda_k z_i}{L_{b_i}} - \cos \frac{\lambda_k z_i}{L_{b_i}} - \frac{\cos \lambda_k + \cosh \lambda_k}{\sinh \lambda_k + \sin \lambda_k} \left(\sinh \frac{\lambda_k z_i}{L_{b_i}} - \sin \frac{\lambda_k z_i}{L_{b_i}} \right) \quad (4.28)$$

A vibração longitudinal w_i da palheta também deve ser discretizada. Sua equação para viga uniforme, sendo A a área de sua seção transversal e ω a frequência da vibração harmônica, é dada por: (MEIROVITCH, 1986)

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \zeta^2 U(x) = 0 \quad \zeta^2 = \omega^2 \frac{m}{EA} \quad (4.29)$$

A solução para a equação diferencial Eq. (4.29) é:

$$U(x) = C_1 \sin \zeta x + C_2 \cos \zeta x \quad (4.30)$$

Na extremidade engastada, o deslocamento da viga é nulo, enquanto na extremidade livre, a deformação é nula. Logo, as condições de contorno do problema são:

$$U(0) = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{dU}{dx}(l) = 0 \quad (4.32)$$

Combinando as Eqs. 4.30 e 4.31, tem-se $C_2 = 0$. Utilizando esse resultado e a Eq. (4.32), encontra-se:

$$C_1 \zeta \cos \zeta l = 0 \quad (4.33)$$

Para se obter um resultado não trivial, é necessário que $C_1 \neq 0$. Logo, $\cos \zeta l = 0$, que possui infinitas soluções da forma:

$$\zeta_k l = \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4.34)$$

Desta forma, encontra-se a função de vibração longitudinal para uma viga:

$$U_k(x) = C_1 \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4.35)$$

Discretizando o movimento longitudinal da i -ésima palheta, considerando que ele ocorre na direção z :

$$w_i(z_i, t) = \sum_{j=1}^N W_k(z_i) q_{w_k}(t) = \mathbf{W}(z_i) \mathbf{q}_w(t) \quad (4.36)$$

sendo,

$$W_k(z_i) = \sin \frac{(2k+1)\pi}{2L_{b_i}} z_i \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4.37)$$

4.3 Montagem das equações globais do movimento

As energias cinética e potencial do eixo foram definidas na Seção 3.1, enquanto as energias para o sistema de palhetas estão apresentadas na Seção 3.3. A energia cinética T e potencial U do sistema global são:

$$T = T_s + T_D + T_b \quad (4.38)$$

$$U = U_s + U_b \quad (4.39)$$

As discretizações definidas nas seções anteriores são aplicadas às Eqs. (4.38) e (4.39). Sendo assim, é possível obter as equações do movimento do sistema já discretizadas a partir das Equações de Lagrange, sendo $L = T - U$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (4.40)$$

O vetor \mathbf{q} são as coordenadas generalizadas do sistema, obtido a partir do concatenamento das coordenadas generalizadas do eixo, $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\xi}$, com as do sistema de palhetas, \mathbf{q}_{u_i} e \mathbf{q}_{w_i} :

$$\mathbf{q} = \left\{ \boldsymbol{\eta} \quad \boldsymbol{\xi} \quad \mathbf{q}_{u_1} \quad \mathbf{q}_{w_1} \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{u_{N_b}} \quad \mathbf{q}_{w_{N_b}} \right\}^T \quad (4.41)$$

É importante lembrar que $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\xi}$ são vetores de dimensão N_s e \mathbf{q}_{u_i} e \mathbf{q}_{w_i} são vetores de dimensão N . Logo, a dimensão final do problema depende dos números de modos N_s e N da discretização pelo MMA.

As equações do movimento obtidas são representadas na forma matricial pela Eq. (4.42).

$$M\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{G} + \mathbf{C})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (4.42)$$

M é a matriz de massa, \mathbf{G} é a relacionada ao efeito giroscópico, \mathbf{K} é a matriz de rigidez do sistema e \mathbf{f} é o vetor de forças atuantes no sistema. \mathbf{C} é uma matriz de amortecimento proporcional, adicionada ao modelo. Tais matrizes são detalhadas a seguir.

A matriz de massa do problema é dada por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_s & M_{sb_1} & M_{sb_2} & \dots & M_{sb_{N_b}} \\ M_{sb_1}^T & M_{b_1} & 0 & \dots & 0 \\ M_{sb_2}^T & 0 & M_{b_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{sb_{N_b}}^T & 0 & 0 & \dots & M_{b_{N_b}} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

O termo M_s é relacionado ao movimento rotor, detalhado da seguinte maneira:

$$M_s = \begin{bmatrix} M_{s_1} & 0 \\ 0 & M_{s_2} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} M_{s_1} = & \rho_s S \int_0^{L_s} (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}) dy + \rho_s I_s \int_0^{L_s} (\mathbf{X}'^T \cdot \mathbf{X}') dy \\ & + m_d (\mathbf{X}(y_d)^T \cdot \mathbf{X}(y_d)) + I_{d_x} (\mathbf{X}'(y_d)^T \cdot \mathbf{X}'(y_d)) \\ & + \frac{1}{2} N_b \rho_b A_b \int_0^{L_b} [2\mathbf{X}(y_d)^T \cdot \mathbf{X}(y_d) + (R_d + z)^2 \mathbf{X}'(y_d)^T \cdot \mathbf{X}'(y_d)] dz \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} M_{s_2} = & \rho_s S \int_0^{L_s} (\mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{Z}) dy + \rho_s I_s \int_0^{L_s} (\mathbf{Z}'^T \cdot \mathbf{Z}') dy \\ & + m_d (\mathbf{Z}(y_d)^T \cdot \mathbf{Z}(y_d)) + I_{d_x} (\mathbf{Z}'(y_d)^T \cdot \mathbf{Z}'(y_d)) \\ & + \frac{1}{2} N_b \rho_b A_b \int_0^{L_b} [2\mathbf{Z}(y_d)^T \cdot \mathbf{Z}(y_d) + (R_d + z)^2 \mathbf{Z}'(y_d)^T \cdot \mathbf{Z}'(y_d)] dz \end{aligned} \quad (4.46)$$

Já os termos M_{b_i} são relacionados ao movimento da i -ésima palheta:

$$M_{b_i} = \begin{bmatrix} M_{b_x} & 0 \\ 0 & M_{b_z} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$M_{b_x} = \rho_b A_b \int_0^{L_b} (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U}) dz \quad (4.48)$$

$$M_{b_z} = \rho_b A_b \int_0^{L_b} (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W}) dz \quad (4.49)$$

Finalmente, os termos M_{sb_i} são relativos ao acoplamento de movimentos do rotor e palhetas:

$$M_{sb_i} = \begin{bmatrix} m_{sb_1} & m_{sb_2} \\ m_{sb_3} & m_{sb_4} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$m_{sb_1} = \rho_b A_b \cos(\phi + \beta_i) \int_0^{L_b} (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{X}(y_d)) dz \quad (4.51)$$

$$m_{sb_2} = \rho_b A_b \sin(\phi + \beta_i) \int_0^{L_b} (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{X}(y_d)) dz \quad (4.52)$$

$$m_{sb_3} = -\rho_b A_b \sin(\phi + \beta_i) \int_0^{L_b} (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{Z}(y_d)) dz \quad (4.53)$$

$$m_{sb_4} = \rho_b A_b \cos(\phi + \beta_i) \int_0^{L_b} (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{Z}(y_d)) dz \quad (4.54)$$

A matriz do efeito giroscópico é:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_s & G_{sb_1} & G_{sb_2} & \dots & G_{sb_{N_b}} \\ 0 & G_{b_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & G_{b_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & G_{b_{N_b}} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

A submatriz relacionada ao movimento do rotor é:

$$G_s = \begin{bmatrix} 0 & G_{s_1} \\ G_{s_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$G_{s_1} = -2\rho_s I_s \Omega \int_0^{L_s} (\mathbf{Z}'^T \cdot \mathbf{X}') - I_{dy} \Omega (\mathbf{Z}'^T \cdot \mathbf{X}') dy - N_b \rho_b A_b \Omega \int_0^{L_b} [(R_d + z)^2 \mathbf{Z}'(y_d)^T \cdot \mathbf{X}'(y_d)] dz \quad (4.57)$$

$$G_{s_2} = 2\rho_s I_s \Omega \int_0^{L_s} (\mathbf{X}'^T \cdot \mathbf{Z}') + I_{dy} \Omega (\mathbf{X}'^T \cdot \mathbf{Z}') dy + N_b \rho_b A_b \Omega \int_0^{L_b} [(R_d + z)^2 \mathbf{X}'(y_d)^T \cdot \mathbf{Z}'(y_d)] dz \quad (4.58)$$

O efeito giroscópico de uma palheta é escrito como:

$$G_{b_i} = \begin{bmatrix} 0 & G_{b_x} \\ G_{b_z} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$G_{b_x} = \rho_b A_b \Omega \int_0^{L_b} (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{W}) dz \quad (4.60)$$

$$G_{b_z} = -\rho_b A_b \Omega \int_0^{L_b} (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{U}) dz \quad (4.61)$$

Nesse caso o acoplamento entre os termos também está presente, sendo dado por:

$$G_{sb_i} = \begin{bmatrix} g_{sb_1} & g_{sb_2} \\ g_{sb_3} & g_{sb_4} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

$$g_{sb_1} = -2\rho_b A_b \Omega \sin(\phi + \beta_i) \int_0^{L_b} (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{X}(y_d)) dz \quad (4.63)$$

$$g_{sb_2} = 2\rho_b A_b \Omega \cos(\phi + \beta_i) \int_0^{L_b} (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{X}(y_d)) dz \quad (4.64)$$

$$g_{sb_3} = -2\rho_b A_b \Omega \cos(\phi + \beta_i) \int_0^{L_b} (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{Z}(y_d)) dz \quad (4.65)$$

$$g_{sb_4} = -2\rho_b A_b \Omega \sin(\phi + \beta_i) \int_0^{L_b} (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{Z}(y_d)) dz \quad (4.66)$$

A matriz de rigidez do sistema K é dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_s & K_{sb_1} & K_{sb_2} & \dots & K_{sb_{N_b}} \\ 0 & K_{b_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K_{b_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_{b_{N_b}} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

A matriz relacionada à rigidez do eixo é escrita da seguinte maneira:

$$K_s = \begin{bmatrix} K_{s_1} & K_{s_2} \\ K_{s_3} & K_{s_4} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$K_{s_1} = E_s I_s \int_0^{L_s} (\mathbf{X}''^T \cdot \mathbf{X}'') dy - \frac{1}{2} N_b \rho_b A_b \Omega^2 \int_0^{L_b} [(R_d + z)^2 \mathbf{X}'(y_d)^T \cdot \mathbf{X}'(y_d)] dz \quad (4.69)$$

$$K_{s_2} = -\frac{1}{2} N_b \rho_b A_b \dot{\Omega} \int_0^{L_b} [(R_d + z)^2 \mathbf{X}'(y_d)^T \cdot \mathbf{Z}'(y_d)] dz - I_{d_y} \dot{\Omega} \mathbf{X}'(y_d)^T \cdot \mathbf{Z}'(y_d) \quad (4.70)$$

$$K_{s_3} = \frac{1}{2} N_b \rho_b A_b \dot{\Omega} \int_0^{L_b} [(R_d + z)^2 \mathbf{Z}'(y_d)^T \cdot \mathbf{X}'(y_d)] dz \quad (4.71)$$

$$K_{s_4} = E_s I_s \int_0^{L_s} (\mathbf{Z}''^T \cdot \mathbf{Z}'') dy - \frac{1}{2} N_b \rho_b A_b \Omega^2 \int_0^{L_b} [(R_d + z)^2 \mathbf{Z}'(y_d)^T \cdot \mathbf{Z}'(y_d)] dz \quad (4.72)$$

Já a matriz de rigidez de uma palheta é:

$$K_{b_i} = \begin{bmatrix} K_{b_{xx}} & K_{b_{xz}} \\ K_{b_{zx}} & K_{b_{zz}} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$$K_{b_{xx}} = E_b I_b \int_0^{L_b} (\mathbf{U}''^T \cdot \mathbf{U}'') dz + \rho_b A_b \Omega^2 \int_0^{L_b} \left[\frac{1}{2} (L_b^2 - z^2) \mathbf{U}'^T \cdot \mathbf{U}' + \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} \right] dz \quad (4.74)$$

$$K_{b_{xz}} = \rho_b A_b (\dot{\Omega} + \Omega) \int_0^{L_b} (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{W}) dz \quad (4.75)$$

$$K_{b_{zx}} = \rho_b A_b \Omega \int_0^{L_b} (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{U}) dz \quad (4.76)$$

$$K_{b_{zz}} = E_b A_b \int_0^{L_b} (\mathbf{W}'^T \cdot \mathbf{W}') + \rho_b A_b \Omega^2 \int_0^{L_b} (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W}) dz \quad (4.77)$$

Finalmente, os termos K_{sb_i} são relativos ao acoplamento de rigidezes do rotor e palhetas:

$$K_{sb_i} = \begin{bmatrix} k_{sb_1} & k_{sb_2} \\ k_{sb_3} & k_{sb_4} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

$$k_{sb_1} = -\rho_b A_b \left[\Omega^2 \cos(\phi + \beta_i) + \dot{\Omega} \sin(\phi + \beta_i) \right] \int_0^{L_b} (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{X}(y_d)) dz \quad (4.79)$$

$$k_{sb_2} = \rho_b A_b \left[-\Omega^2 \sin(\phi + \beta_i) + \dot{\Omega} \cos(\phi + \beta_i) \right] \int_0^{L_b} (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{X}(y_d)) dz \quad (4.80)$$

$$k_{sb_3} = \rho_b A_b \left[\Omega^2 \sin(\phi + \beta_i) - \dot{\Omega} \cos(\phi + \beta_i) \right] \int_0^{L_b} (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{Z}(y_d)) dz \quad (4.81)$$

$$k_{sb_4} = -\rho_b A_b \left[\Omega^2 \cos(\phi + \beta_i) + \dot{\Omega} \sin(\phi + \beta_i) \right] \int_0^{L_b} (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{Z}(y_d)) dz \quad (4.82)$$

O vetor de forças atuantes \mathbf{f} é escrito da forma:

$$\mathbf{f} = \left\{ f_s \quad f_{b_1} \quad f_{b_2} \quad \dots \quad f_{b_{N_b}} \right\}^T \quad (4.83)$$

Detalhando seus termos, tem-se:

$$f_s = \left\{ f_{s_1} \quad f_{s_2} \right\}^T \quad (4.84)$$

$$f_{b_i} = \left\{ f_{b_x} \quad f_{b_z} \right\}^T \quad (4.85)$$

$$f_{s_1} = N_b \rho_b A_b \left[-\Omega^2 \sin(\phi + \beta_i) + \dot{\Omega} \cos(\phi + \beta_i) \right] \int_0^{L_b} [(R_d + z) \mathbf{X}(y_d)] dz - m_u d \Omega^2 \sin \phi \mathbf{X}(y_d) \quad (4.86)$$

$$f_{s_2} = -N_b \rho_b A_b \left[\Omega^2 \cos(\phi + \beta_i) + \dot{\Omega} \sin(\phi + \beta_i) \right] \int_0^{L_b} [(R_d + z) \mathbf{Z}(y_d)] dz - N_b \rho_b A_b L_b g \mathbf{Z}(y_d) - m_u d \Omega^2 \cos \phi \mathbf{Z}(y_d) \quad (4.87)$$

$$f_{b_x} = \rho_b A_b \int_0^{L_b} \left[\dot{\Omega} (R_d + z) \mathbf{U} + g \sin(\phi + \beta_i) \mathbf{U} \right] dz \quad (4.88)$$

$$f_{b_z} = -\rho_b A_b \int_0^{L_b} \left[\Omega^2 (R_d + z) \mathbf{W} + g \cos(\phi + \beta_i) \mathbf{W} \right] dz \quad (4.89)$$

A matriz \mathbf{C} é definida pelo amortecimento proporcional de Rayleigh, da forma (BATHE; WILSON, 1976):

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (4.90)$$

De acordo com Ma et al. (2015), os coeficientes α e β podem ser calculados da

seguinte maneira:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{4\pi f_{n1} f_{n2} (f_{n1} \xi_2 - f_{n2} \xi_1)}{f_{n1}^2 - f_{n2}^2} \\ \beta = \frac{f_{n2} \xi_2 - f_{n1} \xi_1}{\pi (f_{n2}^2 - f_{n1}^2)} \end{cases} \quad (4.91)$$

onde f_{n1} e f_{n2} são as frequências naturais relativas ao primeiro e segundo modo do sistema, respectivamente, e ξ_1 , ξ_2 os coeficientes de amortecimento relativos a esses modos. Nesta dissertação, adotaram-se os valores $\xi_1 = \xi_2 = 0.001$, gerando assim um amortecimento de 0,1% nos dois primeiros modos de vibrar do sistema.

4.4 A transformação de coordenadas multi-pás

As submatrizes M_{sb_i} , G_{sb_i} e K_{sb_i} descrevem o acoplamento entre o movimento do rotor e o movimento das palhetas. Essas matrizes e o vetor de forças atuantes f são dependentes do tempo e periódico, o que torna o sistema descrito pela Eq. (4.42) variante no tempo. Sistemas variantes no tempo possuem comportamento dos sistemas invariantes, os quais não possuem matrizes ou coeficientes que são funções do tempo.

De acordo com Saracho (2002) e Rende (2020) a principal característica da resposta desses sistemas a uma excitação harmônica de frequência Ω , é que ela apresenta componentes de frequência variados, enquanto um sistema invariante apresenta respostas apenas nas frequências de excitação. Santos et al. (2004) afirma que essas vibrações paramétricas ficam evidentes quando o sistema possui velocidade angular, sendo possível identificar, no domínio da frequência, picos em frequências que são combinações da velocidade de rotação e das frequências naturais do sistema.

Para o caso de sistemas variantes no tempo e periódicos, como o estudado neste trabalho, é necessário usar métodos de análise diferentes do caso de sistemas invariantes. Dentre esses métodos, é possível citar a teoria de Floquet (MEIROVITCH, 1988) e a transformação de coordenadas multi-pás, ou transformação de Coleman (COLEMAN, 1943; BIR, 2008). Devido a maior simplicidade da transformação de coordenadas multi-pás, ela será utilizada neste trabalho para a análise modal do sistema quando ele possui velocidade de rotação, para obtenção do diagrama de Campbell.

Para o rotor em repouso, no qual o ângulo não varia com o tempo, as matrizes das equações do movimento são constantes, sendo possível utilizar a teoria clássica de espaço de estados.

De acordo com Coleman (1943), a transformação de coordenadas multi-pás é feita pela definição de quatro novos graus de liberdade, calculados a partir dos graus de liberdade das pás q_i . Esses graus de liberdade novos representam o movimento das pás na totalidade, da seguinte maneira:

$$q_0(t) = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} q_i(t) \quad (4.92)$$

$$q_{nc}(t) = \frac{2}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} q_i(t) \cos(n(\phi + \beta_i)) \quad (4.93)$$

$$q_{ns}(t) = \frac{2}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} q_i(t) \sin(n(\phi + \beta_i)) \quad (4.94)$$

$$q_{\frac{N_b}{2}}(t) = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} q_i(t) (-1)^i \quad (4.95)$$

As Equações (4.92) a (4.95) mostram os graus de liberdade definidos pela transformação de coordenadas multi-pás, definidos no referencial não rotativo. O grau de liberdade q_0 é o modo coletivo, q_{cs} e q_{ns} os modos cíclicos e $q_{\frac{N_b}{2}}$ é um modo diferencial que existe apenas quando o número de pás N_b é par. O valor de n varia de 1 a $(N_b - 1)/2$ se N_b é ímpar e de 1 a $(N_b - 2)/2$ se N_b é par.

Segundo Johnson (1980), os modos com maior importância, por representarem o acoplamento entre fundação e pás, são os modos q_0 , q_{1s} e q_{1c} . O autor também explica as relações entre as frequências dos modos obtidos pela transformação de coordenadas multi-pás e os modos das pás isoladas, sendo as frequências de q_0 e q_d próximas às frequências das pás isoladas e q_{1c} e q_{1s} próximos às frequências das pás isoladas mais a velocidade de rotação e menos a velocidade de rotação, respectivamente.

Nas análises desse trabalho, será utilizado $N_b = 6$ em todas as análises com o sistema girante. Sendo assim, a transformação de coordenadas multi-pás fica:

$$q_0(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 q_i(t) \quad (4.96)$$

$$q_{1c}(t) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 q_i(t) \cos(\phi + \beta_i) \quad (4.97)$$

$$q_{1s}(t) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 q_i(t) \sin(\phi + \beta_i) \quad (4.98)$$

$$q_{2c}(t) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 q_i(t) \cos(2(\phi + \beta_i)) \quad (4.99)$$

$$q_{2s}(t) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 q_i(t) \sin(2(\phi + \beta_i)) \quad (4.100)$$

$$q_3(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 q_i(t) (-1)^i \quad (4.101)$$

A transformação de coordenadas multi-pás inversa é dada por:

$$\begin{aligned} q_i(t) = & q_0(t) + q_{1c}(t) \cos(\phi + \beta_i) + q_{1s}(t) \sin(\phi + \beta_i) + q_{2c}(t) \cos(2(\phi + \beta_i)) \\ & + q_{2s}(t) \sin(2(\phi + \beta_i)) + q_d(t) (-1)^i \end{aligned} \quad (4.102)$$

Utilizando a Eq. (4.102), podemos escrever os graus de liberdade rotativos correspondentes ao j -ésimo grau de liberdade das $N_b = 6$ palhetas da forma:

$$\begin{pmatrix} q_1^j \\ q_2^j \\ q_3^j \\ q_4^j \\ q_5^j \\ q_6^j \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} q_0^j \\ q_{1c}^j \\ q_{1s}^j \\ q_{2c}^j \\ q_{2s}^j \\ q_d^j \end{pmatrix} \quad (4.103)$$

sendo:

$$t_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\phi(t) + \beta_1) & \sin(\phi(t) + \beta_1) & \cos(2\phi(t) + 2\beta_1) & \sin(2\phi(t) + 2\beta_1) & -1 \\ 1 & \cos(\phi(t) + \beta_2) & \sin(\phi(t) + \beta_2) & \cos(2\phi(t) + 2\beta_2) & \sin(2\phi(t) + 2\beta_2) & 1 \\ 1 & \cos(\phi(t) + \beta_3) & \sin(\phi(t) + \beta_3) & \cos(2\phi(t) + 2\beta_3) & \sin(2\phi(t) + 2\beta_3) & -1 \\ 1 & \cos(\phi(t) + \beta_4) & \sin(\phi(t) + \beta_4) & \cos(2\phi(t) + 2\beta_4) & \sin(2\phi(t) + 2\beta_4) & 1 \\ 1 & \cos(\phi(t) + \beta_5) & \sin(\phi(t) + \beta_5) & \cos(2\phi(t) + 2\beta_5) & \sin(2\phi(t) + 2\beta_5) & -1 \\ 1 & \cos(\phi(t) + \beta_6) & \sin(\phi(t) + \beta_6) & \cos(2\phi(t) + 2\beta_6) & \sin(2\phi(t) + 2\beta_6) & 1 \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

É possível expandir a matriz dada pela Eq.(4.104) para que ela contemple todos os graus de liberdade rotativos do sistema. Contudo, para isso, é preciso reordenar o vetor de graus de liberdade definidos na Eq. (4.41) por nó. Sendo assim, primeiro aparecem o deslocamento transversal dos primeiro nó das seis palhetas, seguidos do deslocamento axial do primeiro nó das seis palhetas, e assim sucessivamente, como mostra a Eq. (4.105).

$$\mathbf{q} = \left\{ \boldsymbol{\eta} \quad \boldsymbol{\xi} \quad q_{u_1}^1 \quad \dots \quad q_{u_6}^1 \quad q_{w_1}^1 \quad \dots \quad q_{w_6}^1 \quad \dots \quad q_{u_1}^N \quad \dots \quad q_{u_6}^N \quad q_{w_1}^N \quad \dots \quad q_{w_6}^N \right\}^T \quad (4.105)$$

O vetor de graus de liberdade no referencial inercial fica:

$$\mathbf{q} = \left\{ \boldsymbol{\eta} \quad \boldsymbol{\xi} \quad q_0^1 \quad q_{1c}^1 \quad q_{1s}^1 \quad q_{2c}^1 \quad q_{2s}^1 \quad q_d^1 \quad \dots \quad q_0^N \quad q_{1c}^N \quad q_{1s}^N \quad q_{2c}^N \quad q_{2s}^N \quad q_d^N \right\}^T \quad (4.106)$$

Feito isso, é possível escrever uma matriz de transformação global para as coordenadas da seguinte maneira:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_{nr_1} \mathbf{q}_{nr} \rightarrow \begin{Bmatrix} q_s \\ q_{u_1}^1 \\ \vdots \\ q_{w_6}^N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2N_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{t}_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{t}_1^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_s \\ q_0^1 \\ \vdots \\ q_d^N \end{Bmatrix} \quad (4.107)$$

onde \mathbf{I}_{2N_s} é matriz identidade de dimensão $2N_s$ e q_s são os graus de liberdade relacionados a discretização do eixo.

Substituindo a Eq. (4.107) na Eq. (4.42), e lembrando que a matriz \mathbf{T}_{nr_1} é variante no tempo, chega-se a:

$$M\ddot{\mathbf{T}}_{nr1}\ddot{\mathbf{q}}_{nr} + (\mathbf{G} + \mathbf{C})\dot{\mathbf{T}}_{nr1}\dot{\mathbf{q}}_{nr} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{nr} = \mathbf{f}_{nr} \quad (4.108)$$

Expandindo a Eq. (4.108), chega-se as equações do movimento do sistema após a transformação de coordenadas multi-pás:

$$\mathbf{M}_{nr}\ddot{\mathbf{q}}_{nr} + (\mathbf{G}_{nr} + \mathbf{C}_{nr})\dot{\mathbf{q}}_{nr} + \mathbf{K}_{nr}\mathbf{q}_{nr} = \mathbf{f}_{nr} \quad (4.109)$$

As matrizes da Eq. (4.109) são calculadas por:

$$\mathbf{M}_{nr} = \mathbf{M}\mathbf{T}_{nr1} \quad (4.110)$$

$$\mathbf{G}_{nr} = 2\Omega\mathbf{M}\mathbf{T}_{nr2} + \mathbf{G}\mathbf{T}_{nr1} \quad (4.111)$$

$$\mathbf{C}_{nr} = \mathbf{C}\mathbf{T}_{nr1} \quad (4.112)$$

$$\mathbf{K}_{nr} = \Omega^2\mathbf{M}\mathbf{T}_{nr3} + \dot{\Omega}\mathbf{M}\mathbf{T}_{nr2} + (\mathbf{G} + \mathbf{C})\dot{\mathbf{T}}_{nr2} + \mathbf{K}\mathbf{T}_{nr1} \quad (4.113)$$

$$\mathbf{f}_{nr} = \mathbf{f} \quad (4.114)$$

A matriz \mathbf{T}_{nr2} é dada por:

$$\mathbf{T}_{nr2} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{2N_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{t}_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{t}_2^N \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

onde \mathbf{O}_{2N_s} é uma matriz nula de dimensão $2N_s$ e as submatrizes são:

$$t_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\phi(t) + \beta_1) & \cos(\phi(t) + \beta_1) & -2\sin(2\phi(t) + 2\beta_1) & 2\cos(2\phi(t) + 2\beta_1) & 0 \\ 0 & -\sin(\phi(t) + \beta_2) & \cos(\phi(t) + \beta_2) & -2\sin(2\phi(t) + 2\beta_2) & 2\cos(2\phi(t) + 2\beta_2) & 0 \\ 0 & -\sin(\phi(t) + \beta_3) & \cos(\phi(t) + \beta_3) & -2\sin(2\phi(t) + 2\beta_3) & 2\cos(2\phi(t) + 2\beta_3) & 0 \\ 0 & -\sin(\phi(t) + \beta_4) & \cos(\phi(t) + \beta_4) & -2\sin(2\phi(t) + 2\beta_4) & 2\cos(2\phi(t) + 2\beta_4) & 0 \\ 0 & -\sin(\phi(t) + \beta_5) & \cos(\phi(t) + \beta_5) & -2\sin(2\phi(t) + 2\beta_5) & 2\cos(2\phi(t) + 2\beta_5) & 0 \\ 0 & -\sin(\phi(t) + \beta_6) & \cos(\phi(t) + \beta_6) & -2\sin(2\phi(t) + 2\beta_6) & 2\cos(2\phi(t) + 2\beta_6) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

A matriz \mathbf{T}_{nr3} é dada por:

$$\mathbf{T}_{nr_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{2N_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{t}_3^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{t}_3^N \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

onde as submatrizes são:

$$t_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\phi(t) + \beta_1) & -\sin(\phi(t) + \beta_1) & -4\cos(2\phi(t) + 2\beta_1) & -4\sin(2\phi(t) + 2\beta_1) & 0 \\ 0 & -\cos(\phi(t) + \beta_2) & -\sin(\phi(t) + \beta_2) & -4\cos(2\phi(t) + 2\beta_2) & -4\sin(2\phi(t) + 2\beta_2) & 0 \\ 0 & -\cos(\phi(t) + \beta_3) & -\sin(\phi(t) + \beta_3) & -4\cos(2\phi(t) + 2\beta_3) & -4\sin(2\phi(t) + 2\beta_3) & 0 \\ 0 & -\cos(\phi(t) + \beta_4) & -\sin(\phi(t) + \beta_4) & -4\cos(2\phi(t) + 2\beta_4) & -4\sin(2\phi(t) + 2\beta_4) & 0 \\ 0 & -\cos(\phi(t) + \beta_5) & -\sin(\phi(t) + \beta_5) & -4\cos(2\phi(t) + 2\beta_5) & -4\sin(2\phi(t) + 2\beta_5) & 0 \\ 0 & -\cos(\phi(t) + \beta_6) & -\sin(\phi(t) + \beta_6) & -4\cos(2\phi(t) + 2\beta_6) & -4\sin(2\phi(t) + 2\beta_6) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

O procedimento de transformação descrito é aplicável em todo tipo de sistema, desde que as palhetas estejam uniformemente distribuídas ao longo do rotor. Ela é válida para velocidades angulares não constantes e transforma sistemas variantes no tempo em invariantes (BIR, 2008).

Página intencionalmente deixada em branco.

Capítulo 5

Resultados e Discussões

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos pela implementação do modelo obtido no Capítulo 3. O modelo desenvolvido será validado de duas maneiras: os resultados obtidos serão comparados ao modelo de Elementos Finitos obtido via ANSYS® e em seguida comparados com resultados experimentais obtidos por outros autores. A influência da posição do disco e o número de palhetas nas frequências naturais do modelo serão avaliadas. O diagrama de Campbell será traçado para avaliar a influência da rotação nas frequências naturais. Também será analisada a resposta no tempo do sistema.

5.1 Convergência do MMA

Um dos parâmetros mais importantes ao se implementar um modelo por métodos numéricos como o dos modos assumidos é o número de funções admissíveis utilizadas. Para a análise modal, esse parâmetro determina o número de frequências naturais determinadas e também a precisão de sua determinação. Dessa maneira, foi realizada uma análise de convergência do método, variando o número N_s de funções utilizadas para o eixo e o número N de funções utilizadas para as palhetas. O objetivo foi obter a convergência das frequências naturais que estivessem abaixo de 2000 Hz. Os dados utilizados para o sistema são mostrados na Tab. 5.1.

A Figura 5.1a mostra a convergência das frequências naturais das palhetas com o número de N funções utilizadas. É evidente que essa convergência acontece para

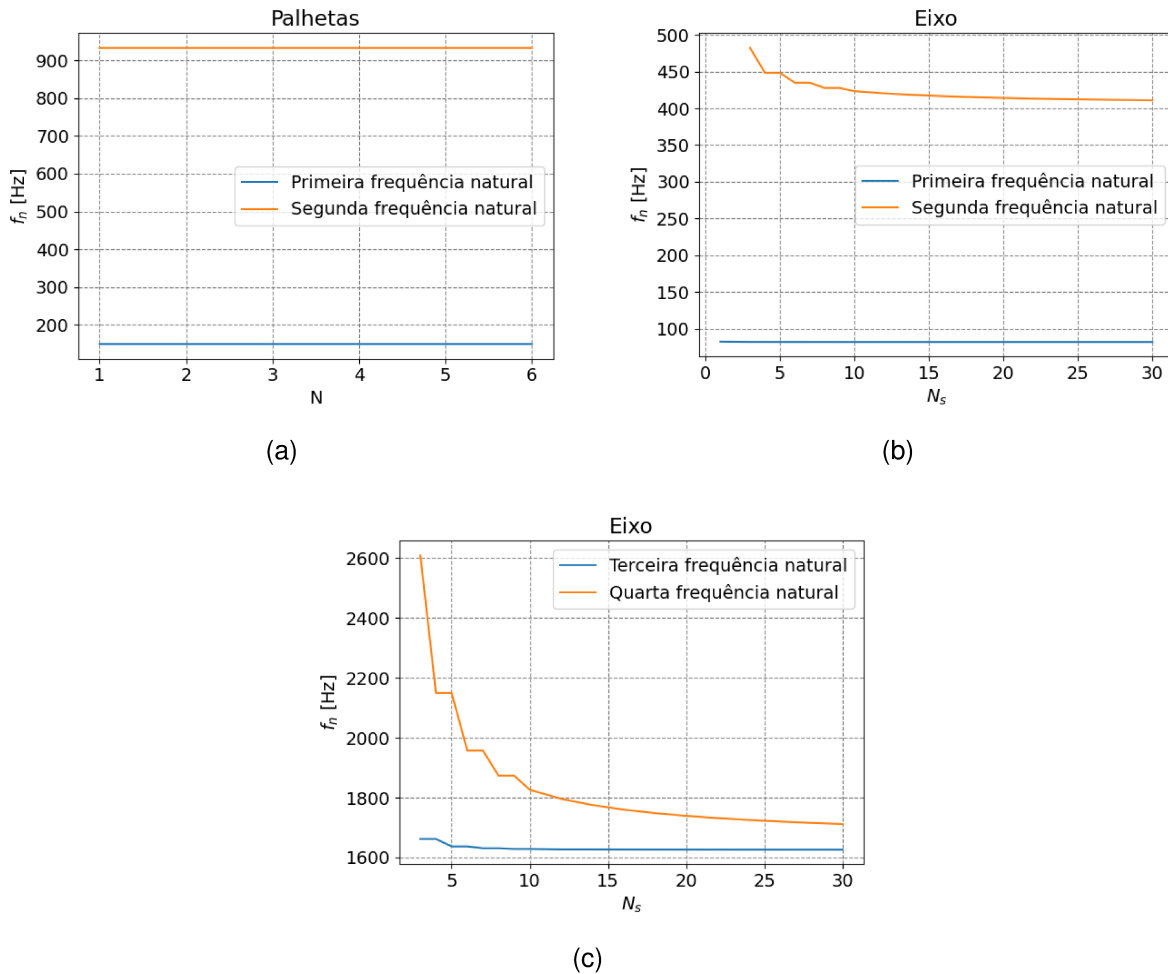


Figura 5.1: Convergência das frequências naturais abaixo de 2 kHz.

um número pequeno de funções, com variação praticamente nula com o aumento de modos utilizados. Como a discretização das palhetas é o mais crítico no custo computacional do modelo, tanto pelo aumento das matrizes globais, proporcional ao número de palhetas, quanto pela função modal mais complexa, foi escolhido utilizar um $N = 5$ funções admissíveis para a discretização de cada palheta.

A convergência para as quatro primeiras frequências naturais do eixo é mostrada nas Figs. 5.1b e 5.1c. É possível perceber a necessidade de um número significativamente maior de funções admissíveis para se obter precisamente as frequências mais altas do eixo. Dessa maneira, foram utilizadas $N_s = 25$ funções admissíveis para a discretização do eixo. Dessa maneira, temos que a dimensão final do problema é dependente do número de palhetas, sendo $50 + 10N_b$.

5.2 Validação do modelo

5.2.1 Comparação com modelo de elementos finitos

Os dados geométricos e físicos utilizados para o sistema nesta Seção são mostrados na Tabela 5.1. As frequências naturais do modelo são obtidas diretamente pela Eq. 4.42 para o sistema livre, ou seja, sem forças externas atuantes. Como o sistema possui amortecimento proporcional adicionado e efeito giroscópico, o problema de autovalores é resolvido pelo espaço de estados.

O modelo de elementos finitos foi obtido pelo ANSYS® Mechanical Workbench, utilizando uma malha com 9800 elementos e 47483 nós. A condição de contorno de apoio simples nas extremidades do eixo foi aplicada por meio de um deslocamento remoto no centro de ambas as faces, sendo esse deslocamento nulo nas direções de X e Z . Os outros graus de liberdade foram deixados livres.

Tabela 5.1: Dados físicos e geométricos do sistema simulado.

Eixo		
Comprimento	L_s	0,4 m
Raio	R_s	0,01 m
Módulo de elasticidade	E_s	210 GPa
Densidade	ρ_s	7850 kg/m ³
Disco		
Raio externo	R_d	0,075 m
Raio interno	r_d	0,01 m
Espessura	h_d	0,03 m
Densidade	ρ_d	7850 kg/m ³
Posição do disco	y_d	0,5 L_s
Palhetas		
Comprimento	L_b	0,075 m
Largura	b_b	0,03 m
Espessura	b_b	0,001 m
Módulo de elasticidade	E_b	210 GPa
Densidade	ρ_b	7850 kg/m ³
Número de palhetas	N_b	6

As frequências naturais para o rotor em repouso ($\Omega = 0$) e não-amortecido foram obtidas utilizando o modelo desenvolvido, denominadas f_{n_i} e o método de elementos finitos, chamadas de f_{MEF_i} . O erro entre elas é definido por:

$$\Delta f_i = \left| \frac{f_{n_i} - f_{MEF_i}}{f_{MEF_i}} \right| \times 100\% \quad (5.1)$$

A Tabela 5.2 mostra as primeiras vinte frequências naturais obtidas para os dois modelos e o erro entre elas. Como o modelo desenvolvido considera apenas flexão para eixo e flexão e deformação axial para palhetas, os modos de torção para esses componentes não foram considerados na análise pelo MEF.

Os modos de vibrar 1, 2, 9, 10, 17, 18, 19 e 20 são associadas à vibração acoplada eixo-palhetas, enquanto os modos restantes são relativas ao movimento somente das palhetas. O maior erro obtido, de 5,28%, ocorre na oitava frequência natural, na qual todas as palhetas sofrem flexão simultaneamente. O modelo desenvolvido considera não haver interação palheta-palheta, o que ocorre na vida real, o que pode explicar a discrepância entre resultados. O modelo também considera o disco rígido, o que não foi assumido na análise por MEF.

De maneira geral, o erro médio entre o modelo proposto e análise de elementos finitos foi 2,02%, demonstrando a efetividade do modelo proposto em prever o comportamento dinâmico de um sistema eixo-disco-palhetas.

Os vinte primeiros modos de vibrar de flexão obtidos pelo modelo e pelo MEF são mostrados nas Figs. 5.2 e 5.3, lado a lado. Para simplificação, é apresentada apenas a vista frontal do sistema, mostrando a flexão das palhetas e o deslocamento do centro do disco. Percebe-se, em ambos os casos, que nos modos de vibrar do eixo ocorre uma pequena deflexão das palhetas, enquanto nos modos das palhetas o eixo não deforma. Logo, existem modos de flexão eixo-palhetas e modos de flexão palhetas-palhetas.

Apesar de os modos obtidos pelos dois métodos não serem idênticos, é possível notar a semelhança no comportamento de vibração do sistema. Para os modos das palhetas em 148,54 Hz, 149,28 Hz, 931,57 Hz e 932,55 Hz, nota-se a consistência dos modos vibrar com os modos de vibrar de uma viga engastada livre. Nesses casos, há alternância em quais palhetas vibram e nas direções de vibração, bem como em amplitude. As diferenças visualizadas tem algumas possíveis explicações: os modos obtidos pelo modelo são idênticos em frequência, logo, na ordenação em ordem crescente de frequências pode haver trocas de modos; além disso, o MMA obtém dois

Tabela 5.2: Frequências naturais do sistema.

i	f_{n_i} [Hz]	f_{MEF_i} [Hz]	Δf_i [%]
1	81,77	83,81	2,43
2	81,77	83,81	2,43
3	148,54	150,80	1,50
4	148,54	150,92	1,58
5	148,54	151,01	1,63
6	148,54	151,63	2,04
7	149,28	151,75	1,63
8	149,28	157,61	5,28
9	411,01	408,72	0,56
10	411,01	408,73	0,56
11	931,57	940,60	0,96
12	931,57	941,40	1,04
13	931,57	941,82	1,09
14	931,57	942,65	1,17
15	932,55	943,12	1,12
16	932,55	948,25	1,66
17	1 626,57	1 663,90	2,05
18	1 626,57	1 663,90	2,05
19	1 712,22	1 675,10	2,21
20	1 712,22	1 675,20	2,21

modos, simétricos ou antissimétricos, para cada frequência natural.

Sendo assim, o modelo dinâmico desenvolvido consegue descrever de maneira satisfatória o comportamento do sistema EDP quando comparado a uma modelo de elementos finitos, tanto em frequências naturais quanto em modos de vibrar.

5.2.2 Comparação com resultados experimentais

A segunda etapa da verificação da validade do modelo matemático desenvolvido será feita pela comparação dos resultados com um experimento de vibração de palhetas realizado pelos autores Yang et al. (2022). A bancada experimental mostrada na Fig. 5.4 foi utilizada no para simular a vibração das palhetas.

A bancada consiste em um sistema eixo-disco-palhetas, suportado simetricamente por mancais de rolamento e rotacionado por um motor elétrico. Uma bomba de ar é utilizada para simular a força aerodinâmica que atua nas palhetas através do mancal

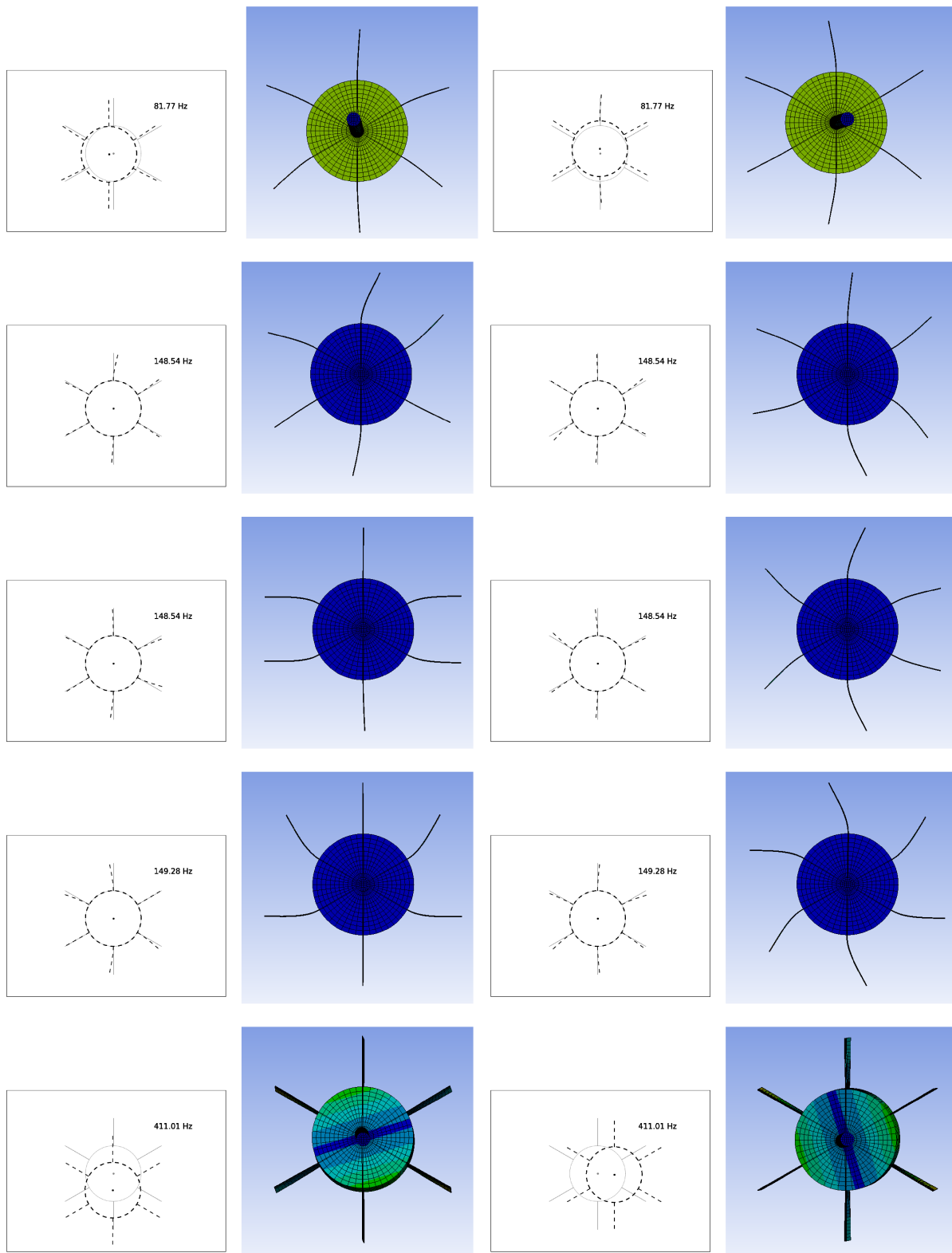


Figura 5.2: Modos de vibrar obtidos pelo modelo matemático e pelo MEF para os modos 1 a 10.

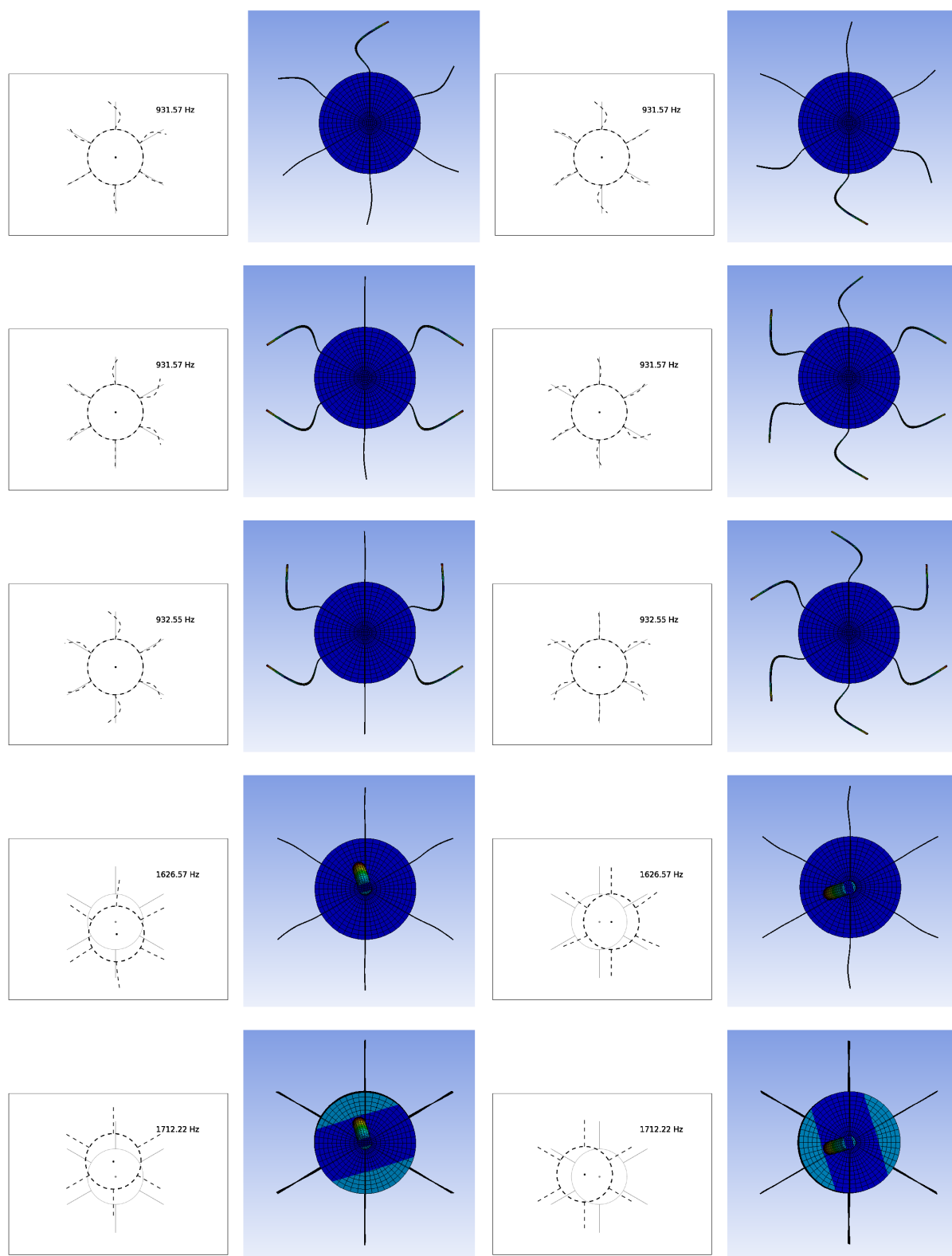


Figura 5.3: Modos de vibrar obtidos pelo modelo matemático e pelo MEF para os modos 11 a 20.

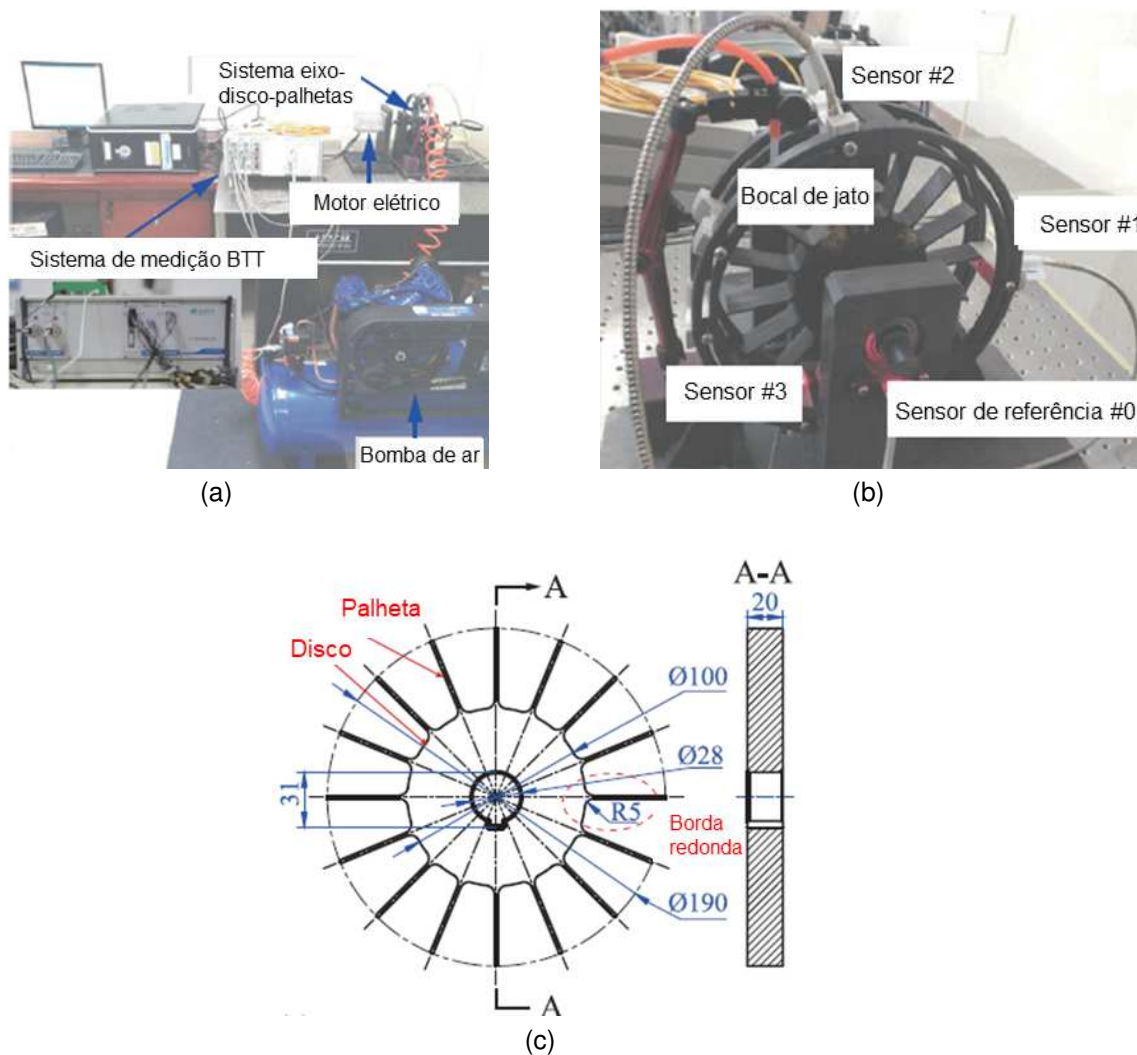


Figura 5.4: Aparato experimental utilizado. Adaptado de: (YANG et al., 2022).

de jato. A vibração das palhetas é medida por três sensores BTT (*blade-tip-timing*). Os parâmetros do sistema rotativo são apresentados na Tabela 5.3.

Os autores descrevem brevemente a metodologia utilizada para medir a vibração das palhetas. De acordo com Yang et al. (2022), o sistema de *blade-tip-timing* (BTT) possui uma tecnologia não intrusiva de medição. Ele utiliza sensores externos instalados na carcaça em posições radiais e axiais pré-determinadas, medindo o tempo de passagem das pontas das palhetas. O tempo de referência é medido por um instalado no eixo, determinando o tempo de passagem de cada palheta caso a vibração fosse nula. Na presença de vibração, o tempo de passagem de cada palheta será medido pelos sensores 1 a 3 mais cedo ou mais tarde que o tempo de referência. Pela comparação entre os tempos de passagem e a referência é possível determinar a vibração

Tabela 5.3: Dados da bancada experimental. (YANG et al., 2022)

Eixo		
Comprimento	L_s	0,106 m
Raio	R_s	0,026 m
Módulo de elasticidade	E_s	200 GPa
Densidade	ρ_s	7850 kg/m ³
Disco		
Raio externo	R_d	0,05 m
Espessura	h_d	0,02 m
Densidade	ρ_d	7850 kg/m ³
Posição do disco	y_d	0,5 L_s
Palhetas		
Comprimento	L_b	0,045 m
Largura	b_b	0,02 m
Espessura	h_b	0,002 m
Módulo de elasticidade	E_b	210 GPa
Densidade	ρ_b	7850 kg/m ³
Número de palhetas	N_b	16

das palhetas. Os autores sugerem consultar a referência Jousselin (2013) para mais informações sobre a técnica.

No trabalho utilizado como base para a presente comparação, os autores também desenvolveram um modelo matemático para o sistema e compararam com o resultado do MEF. Para as palhetas em repouso, foram encontradas pelos autores as frequências naturais 825,11 Hz e 825,20 Hz para modelo matemático e MEF, respectivamente. O modelo desenvolvido nesta dissertação encontrou as frequências naturais 824,90 para as duas primeiras palhetas em repouso e 825,20 Hz para as restantes. Logo, os resultados obtidos são condizentes com os apresentados no artigo.

Para validar o modelo sob influência da rotação, seus resultados serão comparados com os obtidos no experimento descrito, com velocidade de rotação de 5000 RPM. Os resultados da comparação são apresentados na Tabela 5.4. O erro entre as frequências naturais calculadas e experimentais ficou abaixo de 1%, mostrando a validade do modelo matemático desenvolvido. Também é possível notar um aumento da frequência natural com a velocidade de rotação, causada pelo enrijecimento centrífugo.

Yang et al. (2022) citam que as leves diferenças entre as frequências naturais ob-

Tabela 5.4: Comparação entre frequências naturais obtidas pelo modelo e experimentais.

Palheta	f_{n_i} [Hz]	f_{exp_i} [Hz]	Δf_i [%]
1	833,61	840,00	0,76
2	833,72	839,00	0,62
3	833,95	838,90	0,59
4	833,95	838,10	0,49
5	833,95	839,30	0,64
6	833,95	837,60	0,43
7	833,95	839,70	0,68
8	833,95	840,60	0,79
9	833,95	838,30	0,52
10	833,95	839,80	0,70
11	833,95	840,20	0,74
12	833,95	837,40	0,41
13	833,95	837,54	0,43
14	833,95	839,55	0,66
15	833,95	838,58	0,55
16	833,95	839,67	0,68

tidas experimentalmente pelo BTT se devem a pequenas diferenças geométricas no momento de fabricação das palhetas. Além disso, os autores analisam que a borda arredondada das palhetas, com 5 mm de raio, atua aumentando suas rigidezes, o que explica medições maiores que os resultados calculados pelo modelo matemático.

Como os autores não apresentaram os resultados experimentais temporais de vibração das palhetas em seu trabalho, foi possível realizar a comparação entre resultados experimentais e do modelo apenas em termos de frequências naturais.

Avaliando os resultados obtidos nesta seção, é possível afirmar que o modelo matemático desenvolvido consegue prever o comportamento dinâmico de um sistema eixo-disco-palhetas com boa precisão. Dessa maneira, as seções seguintes serão dedicadas a avaliar as respostas dinâmicas do sistema em diferentes condições.

5.3 Resultados numéricos

5.3.1 Diagrama de Campbell

O diagrama de Campbell do sistema descrito na Tabela 5.1 é mostrado na Fig. 5.5. Esse diagrama foi obtido a partir da transformação de coordenadas multi-pás das matrizes do sistema, como descrito na Seção 4.4. O procedimento para a resolução do problema de autovalor foi o mesmo adotado por Rende (2020). As matrizes do sistema no referencial não-rotativo foram obtidas para 100 valores de ângulo ϕ entre 0 e 2π . Então, foi computada as médias dessas 100 matrizes e o problema de espaço de estados foi resolvido para as matrizes da média. Esse procedimento foi realizado devido às matrizes de massa, rigidez e amortecimento originais serem variantes no tempo, logo não é possível garantir que o problema de autovalor clássico, supondo um ângulo ϕ constante, resultará em um resultado correto.

Na Figura 5.5, temos que as curvas em azul são relativas à vibração do eixo, enquanto as curvas em vermelho, são relativas à vibração das palhetas. As frequências quando a velocidade de rotação é nula são idênticas às obtidas pelo problema de autovalor obtido pelo modo clássico na Seção 5.2.1. Ao adicionar rotação, vemos que as frequências relativas às palhetas se dividem em cinco curvas. Essas curvas podem ser relacionadas às coordenadas obtidas na transformação multi-pás. As coordenadas do modo direto e diferencial, q_0 e q_d , possuem frequências próximas às das palhetas isoladas f_b , enquanto as coordenadas diferenciais de primeira ordem q_{1c} e q_{1s} tem frequências próximas à $f_b + \Omega$ e $f_b - \Omega$, respectivamente. Os modos diferenciais de segunda ordem q_{2c} e q_{2s} tem frequências próximas à $f_b + 2\Omega$ e $f_b - 2\Omega$, respectivamente.

Nota-se que, para o primeiro modo das palhetas, a coordenada diferencial q_{2s} , equivalente a $f_b - 2\Omega$, chega a um valor nulo em frequência pouco acima de 6000 RPM, ponto no qual ocorre uma inversão e a frequência volta a crescer. Esse fenômeno é observado em estudos de vibrações paramétricas de pás, como no realizado por Santos et al. (2004).

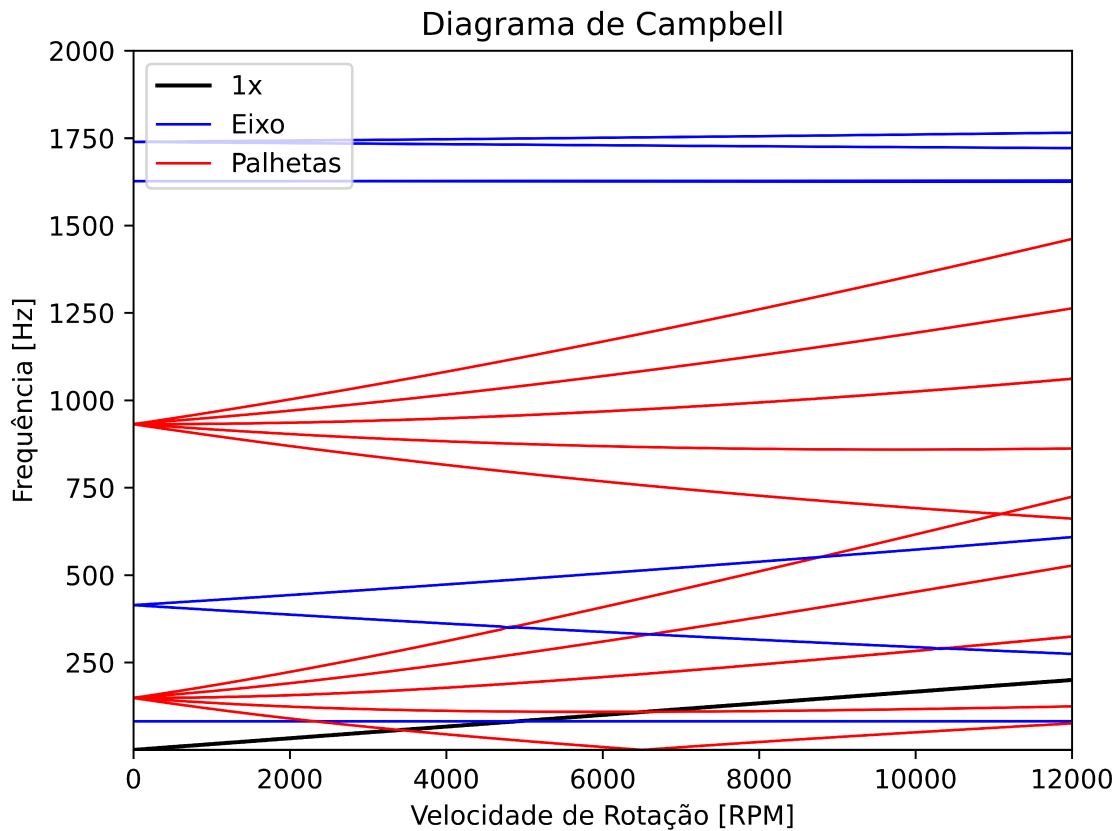


Figura 5.5: Diagrama de Campbell do sistema no referencial não-rotativo.

Sabendo da relação entre frequências dos modos diferenciais e velocidades de rotação, é possível fazer uma transformação para estimar as frequências naturais medidas em um referencial rotativo. Fazendo $q_{1c} - \Omega$, $q_{1s} + \Omega$, $q_{2c} - 2\Omega$ e $q_{2s} + 2\Omega$, chegamos ao diagrama de Campbell mostrado na Fig. 5.6.

Observando as curvas para o primeiro e segundo modos de vibrar da palheta após a intervenção descrita, vemos que esses modos são muito próximos no referencial rotativo, exceto para o modo diferencial q_{2s} . Nesse modo, a frequência diminui até chegar a zero e volta a crescer. A partir do início do crescimento a soma do dobro da frequência de rotação causa a diferença observada no gráfico. É necessária a realização de experimentos para avaliar se o mesmo ocorre na realidade.

É possível ver que as frequências naturais das palhetas aumentam com a velocidade de rotação. Esse fenômeno é conhecido como enrijecimento centrífugo, pois ocorre um aumento de rigidez das palhetas. Avaliando as Eqs. 4.74 e 4.77 vemos que, de fato, um dos termos de rigidez das palhetas é proporcional ao quadrado da

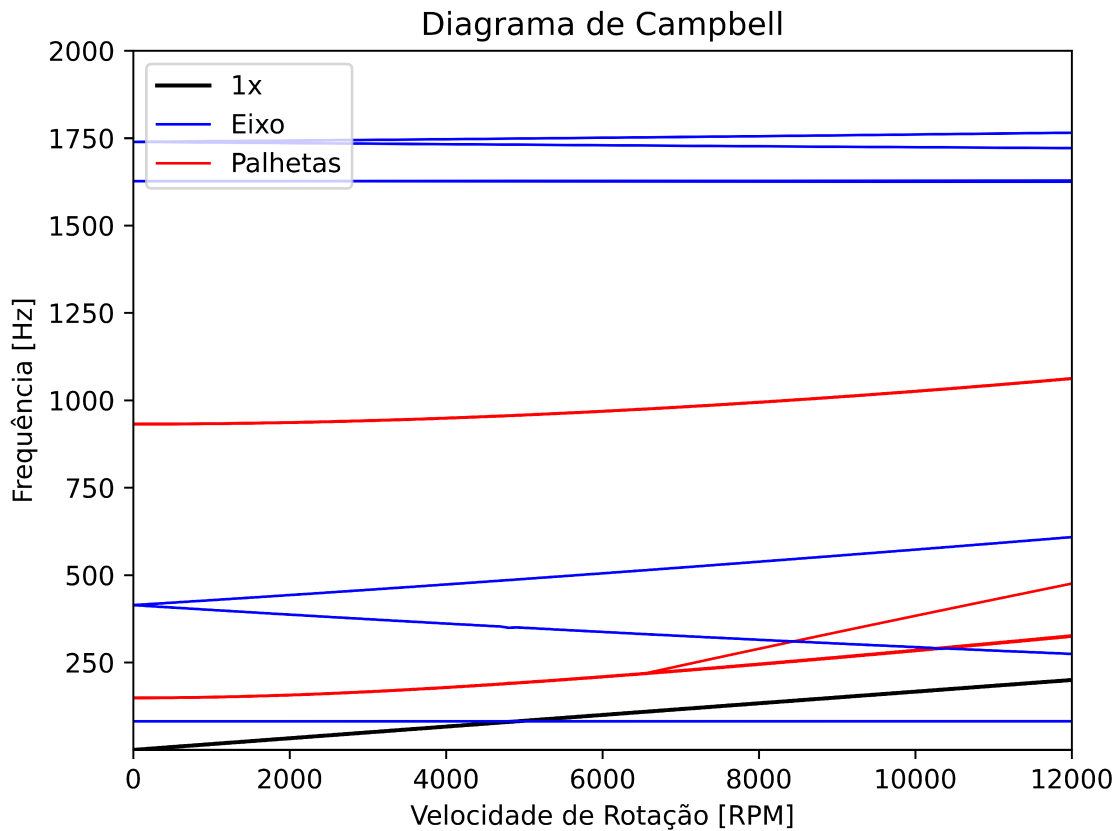


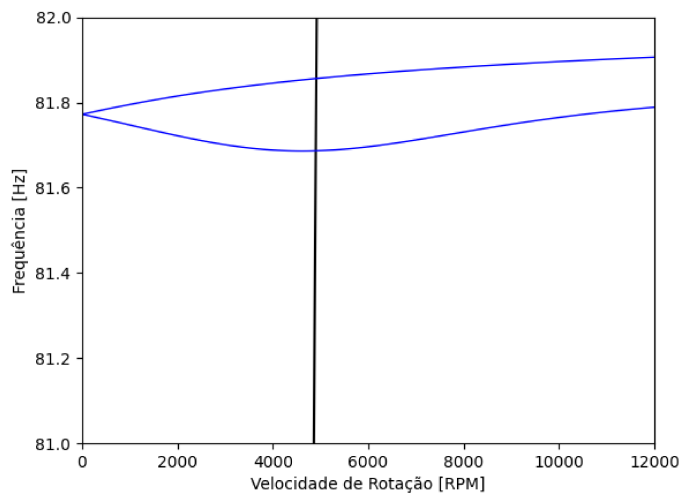
Figura 5.6: Diagrama de Campbell do sistema com palhetas no referencial rotativo.

velocidade de rotação.

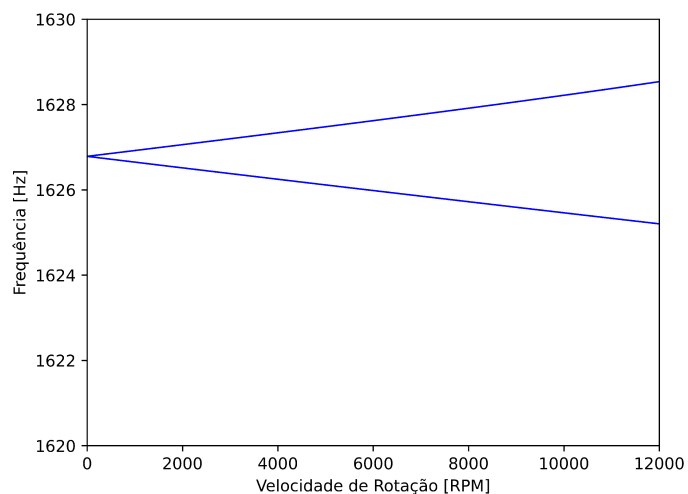
Analisando as curvas relacionadas ao eixo, percebe-se que para os modos que partem de 81,77 Hz e 1 626,57 Hz, a divisão que ocorre a partir da frequência em repouso, caracterizando os movimentos de precessão direta e inversa, não é aparente como para os modos seguintes. A Figura 5.7 mostra que essa divisão de fato acontece, porém, a mudança nas frequências com o aumento da rotação é pequena, sendo necessário a análise em escala maior.

Para a Fig. 5.7a, a curva em que ocorre uma diminuição da frequência natural em relação ao repouso tem comportamento diferente do esperado. A frequência diminui até perto da velocidade crítica e volta a crescer após essa velocidade, sempre com valores menores que a frequência do próximo modo.

As velocidades críticas do sistema, quando a velocidade de rotação coincide com uma frequência natural do sistema, ocorre para os primeiros modos do eixo. Para esse sistema, as velocidades críticas ocorrem em torno de 4900 RPM. A operação em



(a)



(b)

Figura 5.7: Diagrama de Campbell para modos de vibrar do eixo.

velocidades próximas às críticas devem ser evitadas, para evitar que o sistema entre em condição de ressonância.

5.3.2 Influência dos parâmetros do sistema em seu comportamento dinâmico

Uma análise interessante a se fazer é avaliar a influência da presença das paletas no sistema. Para isso, foram calculadas as frequências naturais apenas para o conjunto eixo-disco em repouso. A Tabela 5.5 mostra a comparação entre essas

frequências com as já apresentadas para o eixo no sistema eixo-disco-palhetas. A presença das palhetas causa uma diminuição nas frequências naturais do sistema, aumentando sua flexibilidade.

Tabela 5.5: Comparação entre frequências naturais eixo-disco e eixo-disco-palhetas em repouso.

Modos	Eixo-disco [Hz]	Eixo-disco-palhetas [Hz]
1 e 2	82,82	81,77
3 e 4	443,27	414,16
5 e 6	1 629,32	1 626,57
7 e 8	1 836,47	1 712,22

Um procedimento análogo foi efetuado para o conjunto disco-palhetas. A Tabela 5.5 mostra a comparação entre os resultados obtidos. Apesar de haver uma pequena mudança nos modos 5 e 6 e nos modos 11 e 12, essa diferença é muito pequena para ser considerada significativa. Sendo assim, a presença do eixo tem pouca ou nenhuma influência nas frequências naturais do conjunto disco-palhetas.

Tabela 5.6: Comparação entre frequências naturais disco-palhetas e eixo-disco-palhetas em repouso.

Modos	Disco-palhetas [Hz]	Eixo-disco-palhetas [Hz]
1 a 4	148,54	148,54
5 e 6	149,12	149,28
7 a 10	931,57	931,57
11 e 12	932,69	932,55

Por fim, a influência do número de palhetas e da posição do disco no sistema foi avaliada. O número de palhetas variou de 3 a 12, sendo consideradas três posições diferentes para o disco: a $1/4L_s$, $1/3L_s$ e $1/2L_s$. Os resultados para o sistema são apresentados na Fig. 5.8.

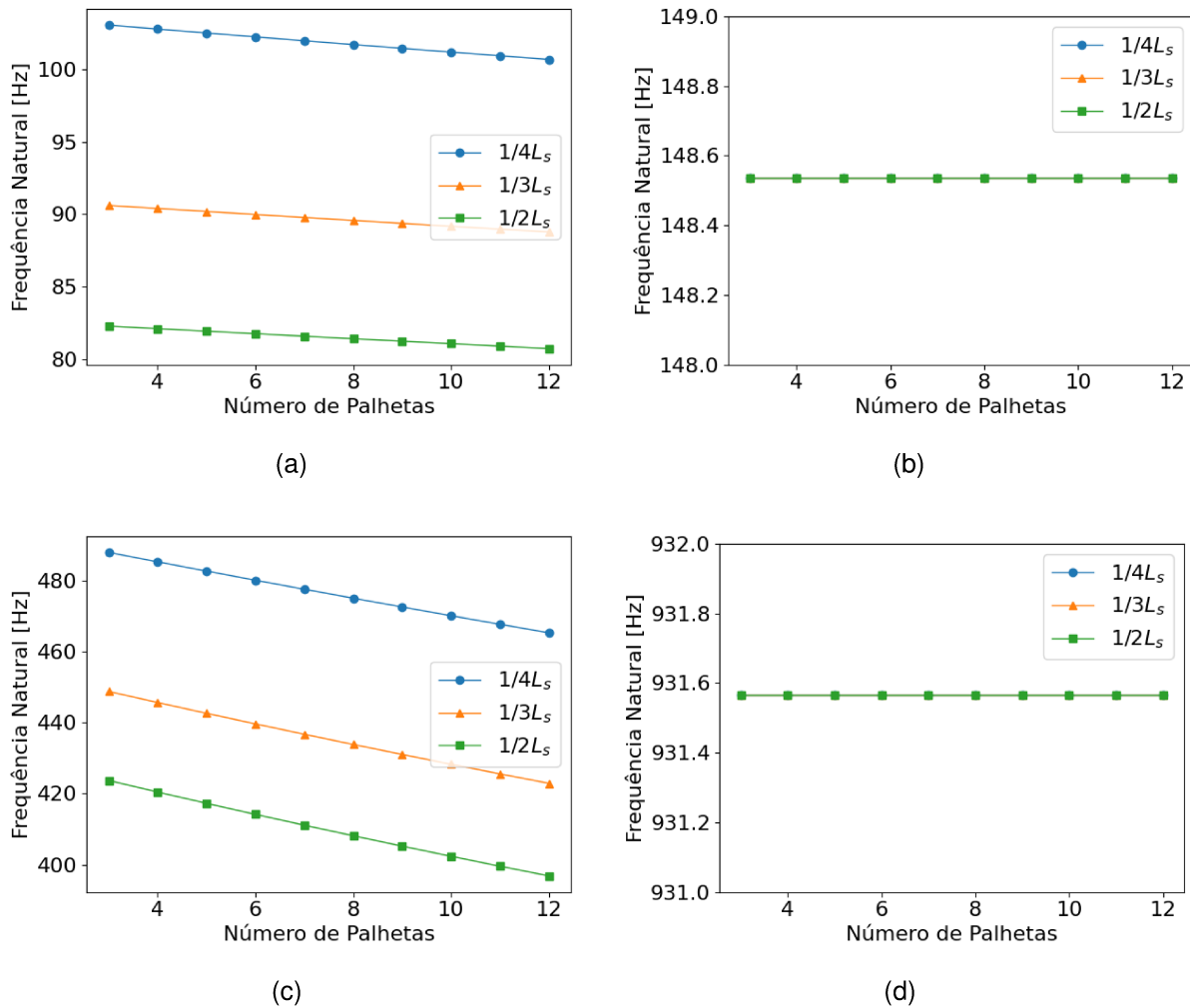


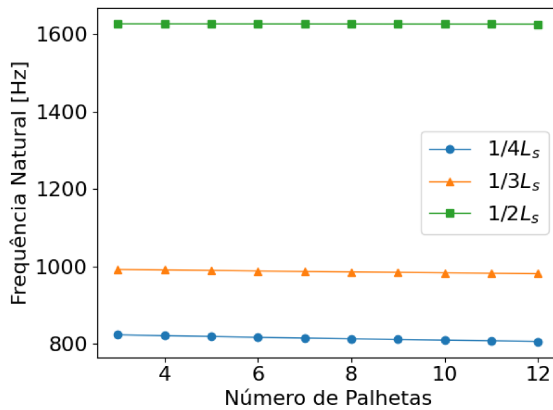
Figura 5.8: Variação das primeiras frequências naturais do sistema com o número de palhetas e posição do disco.

As Figuras 5.8a e 5.8c são relativas à primeira frequência natural do primeiro e segundo modo de flexão, respectivamente. É possível perceber que o aumento do número de palhetas causa a diminuição das frequências naturais. Além disso, quanto mais próximo o disco está da extremidade do eixo, maior é a frequência natural associada.

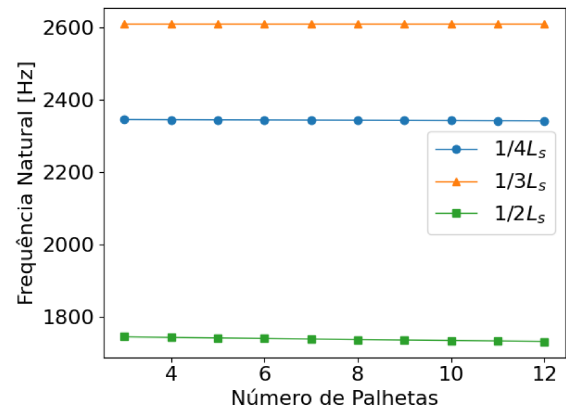
Já a variação na resposta dinâmica das palhetas é apresentada na Figs. 5.8b e 5.8d. Observa-se que a posição do disco e o número de palhetas não afeta a primeira frequência do primeiro modo nem do segundo modo das palhetas.

Durante essas análises, notou-se que para a posição $1/4L_s$, surge um modo de vibrar para o eixo em torno de 820 Hz para o sistema com três palhetas, frequência que diminui até cerca de 806 Hz para doze palhetas. Ao mesmo tempo, as frequências

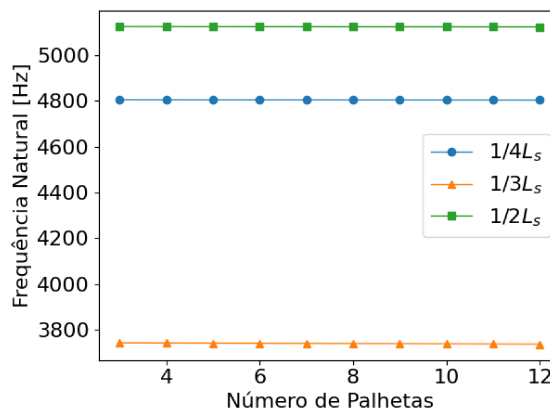
em torno de 1600 Hz desapareceram.



(a) Terceiro modo do eixo.



(b) Quarto modo do eixo.



(c) Quinto modo do eixo.

Figura 5.9: Efeito da posição do disco e do número de palhetas nos modos mais altos do eixo.

Analisando a Fig. 5.9, a tendência de diminuição das frequências naturais com o aumento do número de palhetas parece não ocorrer nos modos mais altos. Porém, a Fig. 5.10, que mostra a aproximação no gráfico das curvas para o terceiro modo do eixo, deixa evidente que isso só ocorre pela escala utilizada nos gráficos. Dessa forma, é possível dizer que o aumento do número de palhetas torna o sistema mais flexível em todos os modos de vibrar do rotor.

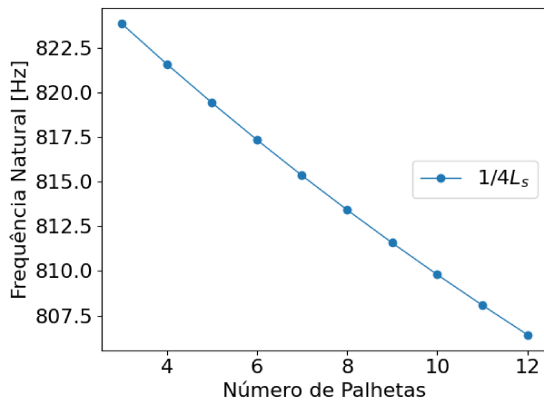
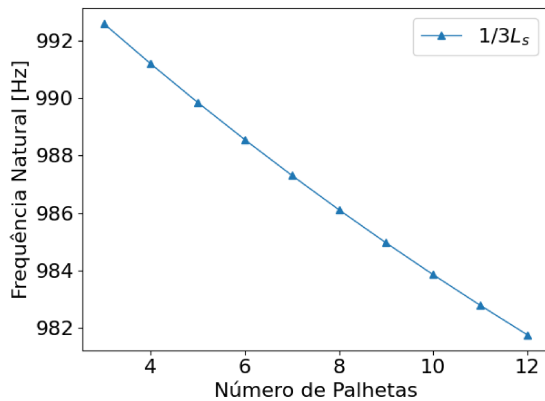
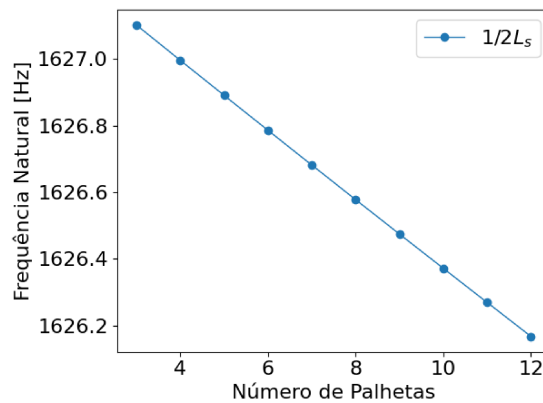
(a) Disco a $1/4L_s$ (b) Disco a $1/3L_s$ (c) Disco a $1/2L_s$

Figura 5.10: Frequências naturais para o terceiro modo do eixo em cada posição do disco.

De acordo com os dados analisados, quanto mais próximo o disco está do início do eixo, maiores são as frequências naturais para os dois primeiros modos de vibrar. Para estabelecer se existe um padrão no comportamento das frequências naturais do rotor com a posição do disco, foram avaliados o terceiro, quarto e quinto modo de vibrar do eixo.

A Figura 5.9 mostra os resultados obtidos para os três próximos modos de vibrar do eixo. É possível perceber que para esses modos as frequências têm grandes variações com a posição do disco, chegando a ultrapassar 1000 Hz de diferença. Também nota-se que não há um padrão para a variação das frequências de acordo com a posição, sendo que apenas os primeiros dois modos apresentam comportamento similar.

Com base nas análises realizadas, é possível concluir que a presença das palhe-

tas afeta o comportamento dinâmico do rotor, diminuindo suas frequências naturais pelo aumento da flexibilidade do sistema. Entretanto, a maior influência nesse comportamento é exercida pela posição do disco-palhetas, que afeta significativamente as frequências naturais.

As frequências naturais das palhetas não são afetadas por nenhuma das variáveis consideradas. Isso indica que há a influência das palhetas no comportamento dinâmico do rotor, com modos de vibrar acoplados, mas o contrário não ocorre.

5.3.3 Respostas temporais do sistema

Para avaliar a resposta temporal do sistema, as equações do movimento, dadas pela Eq. 4.42, foram integradas numericamente por meio do método de Newmark-Newton-Raphson, utilizando um passo de tempo constante $dt = 0,005$ s. O tempo total de análise utilizado foi 150 segundos, para possibilitar a análise de vibração em regime permanente.

As respostas foram avaliadas para o sistema desbalanceado, com e sem a presença da matriz de amortecimento proporcional C . Foi adotada uma massa $m_u = 0,0001$ kg e uma excentricidade $d = R_d$. Foram utilizadas velocidades de rotação constantes de 500, 1000 e 1500 RPM. As amplitudes de vibração são dadas em metros.

Sistemas reais possuem amortecimento interno inerente a eles, sendo assim, é necessário adicionar uma matriz de amortecimento para obter-se um modelo mais fidedigno. Dessa maneira, a adição da matriz de amortecimento proporcional leva a um modelo mais representativo. Para o sistema analisado, descrito na Tab. 5.1, os coeficientes de amortecimento de Rayleigh calculados foram: $\alpha = 0,663$ e $\beta = 1,38 \times 10^{-6}$, considerando um amortecimento de 0,1% nos dois primeiros modos de vibrar do sistema, de acordo com a Eq. (4.91).

As Figuras 5.11 e 5.12 mostram as respostas temporais ao desbalanceamento para o eixo na direção X , simétrica à vibração na direção Z . A Figura 5.11 mostra a vibração para o caso sem amortecimento proporcional adicionado, enquanto a Fig. 5.12 mostra a resposta do sistema amortecido para as três velocidades de rotação analisadas. Para o caso amortecido, o sistema chega ao regime permanente em cerca

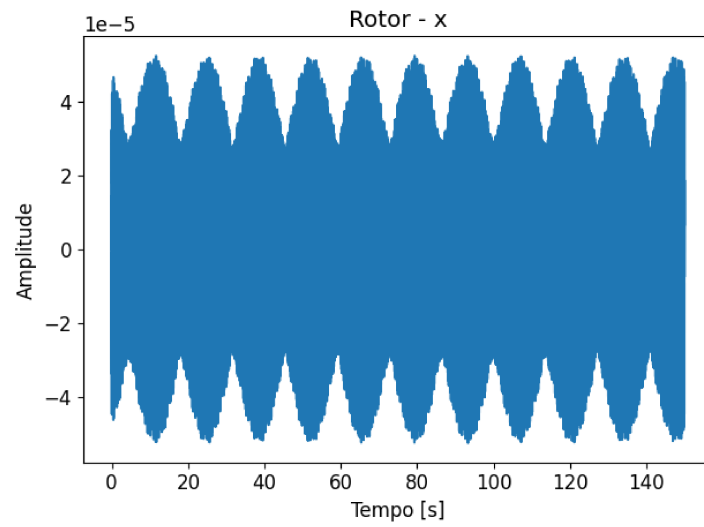
de 20 segundos, mantendo uma vibração constante. Já no caso não-amortecido o sistema permanece em regime transiente pelo tempo simulado. Em ambos os casos, ocorre aumento da amplitude com o aumento da velocidade de rotação.

As respostas de vibração são idênticas para as seis palhetas. Sendo assim, as Figs. 5.13 e 5.14, mostram as amplitudes de vibração para a primeira palheta do sistema para os casos não amortecido e amortecido, respectivamente. Como ocorre para o eixo, a vibração das palhetas não atingiu o regime permanente no tempo simulado, enquanto para o caso amortecido há uma estabilização da vibração a partir de 40 segundos. Maiores velocidades de rotação, assim como para o eixo, causam um aumento na amplitude de vibração das palhetas. Também é possível perceber que a amplitude de vibração das palhetas é aparentemente menor que a vibração do eixo, tanto para o caso não amortecido quanto para o amortecido.

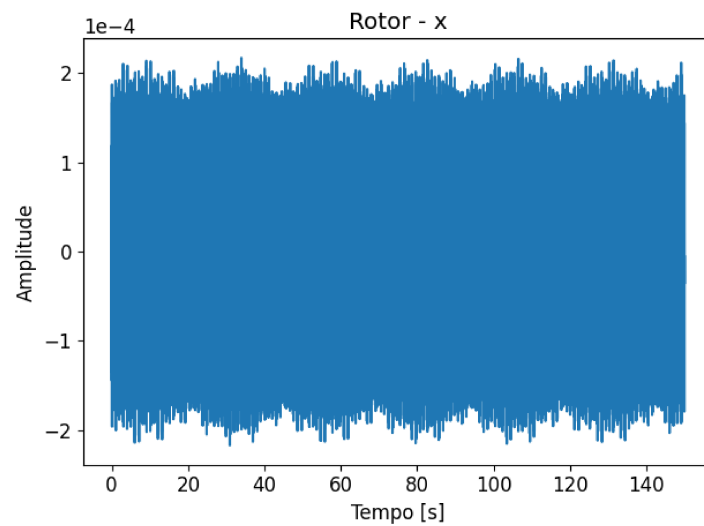
A adição do amortecimento de Rayleigh no sistema resulta em uma chegada mais rápida ao regime permanente e a uma amplitude de vibração menor na resposta do sistema ao desbalanceamento. Uma tentativa de avaliar o regime permanente para o caso não amortecido exigiria um tempo de simulação maior, o que levaria a um custo computacional muito alto. Além disso, essas respostas não condizem com o comportamento sistemas reais, que possuem amortecimento interno. Sendo assim, análises acerca da vibração do sistema em regime permanente serão realizadas apenas para o caso com amortecimento adicionado.

As Figuras 5.15, 5.16 e 5.17 mostram as respostas temporais de vibração e espectros de frequências do sistema amortecido, para o eixo e para a primeira palheta, nas velocidades 500, 1000 e 1500 RPM, respectivamente. As respostas de vibração no tempo são mostradas para os últimos 2,5 segundos de simulação para melhor visualização do sinal.

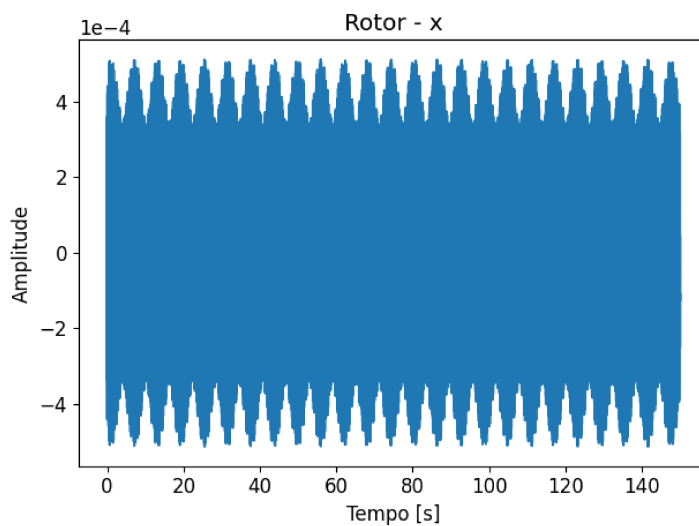
Os espectros de frequência foram calculados por meio de FFT (*Fast Fourier Transform* - Transformada Rápida de Fourier), utilizando 10 000 pontos para se obter a resolução em frequência $\Delta f = 0,02$ Hz. Pela simetria da FFT, com o passo de tempo utilizado, é possível obter as respostas em frequência dos sistemas até 100 Hz. Como os valores em frequência obtidos devem ser múltiplos da resolução em frequência, serão obtidos apenas números pares para a segunda casa decimal dos picos em frequência da FFT.



(a) 500 RPM

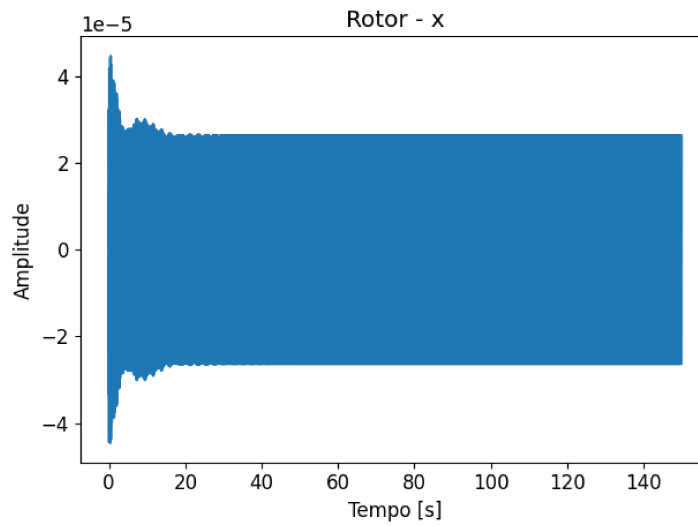


(b) 1000 RPM

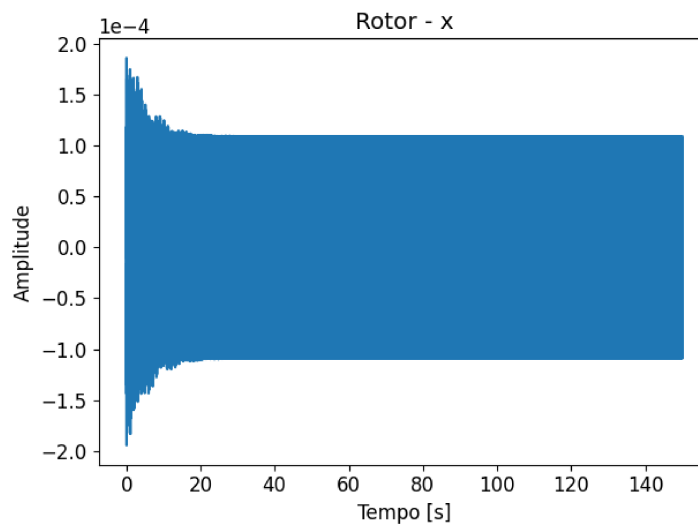


(c) 1500 RPM

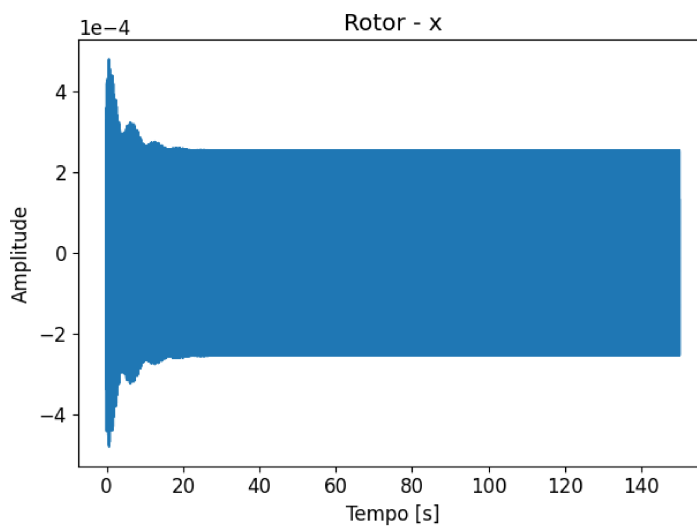
Figura 5.11: Resposta ao desbalanceamento: eixo não amortecido.



(a) 500 RPM

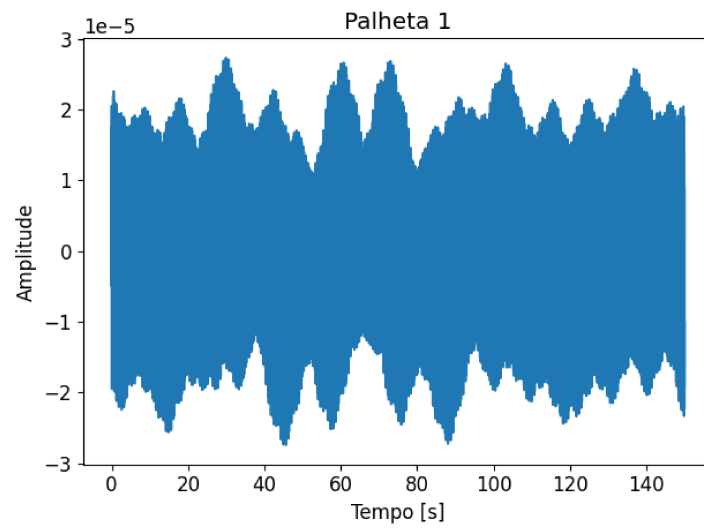


(b) 1000 RPM

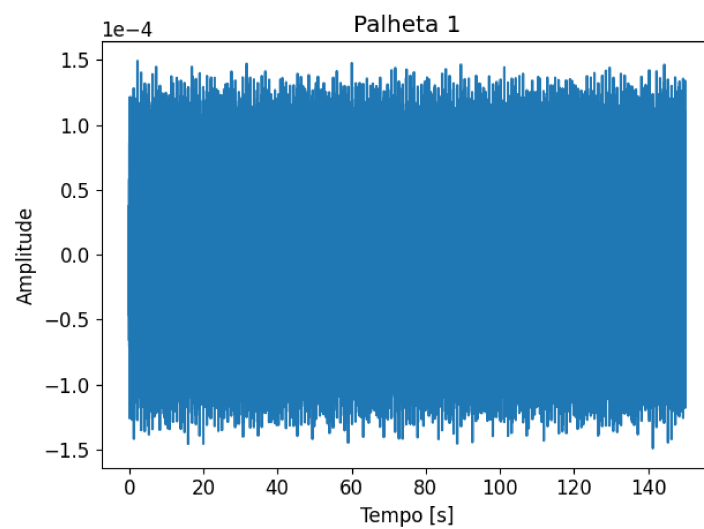


(c) 1500 RPM

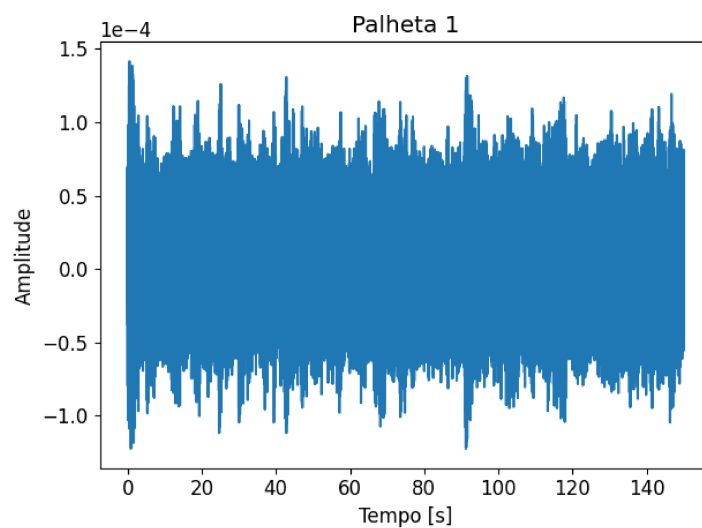
Figura 5.12: Resposta ao desbalanceamento: eixo amortecido.



(a) 500 RPM

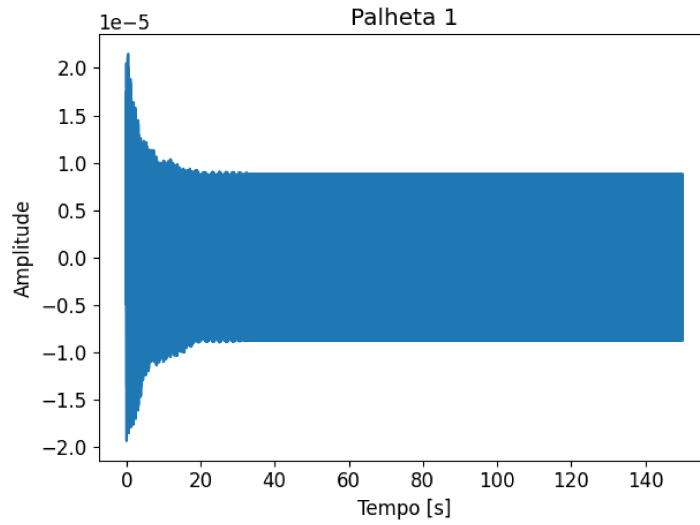


(b) 1000 RPM

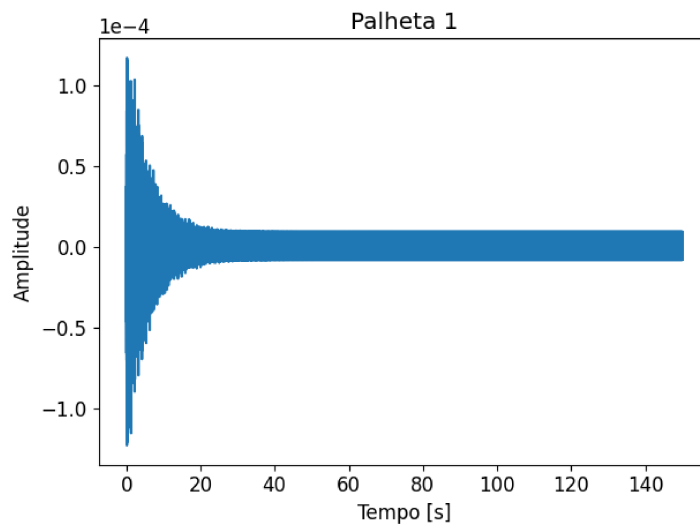


(c) 1500 RPM

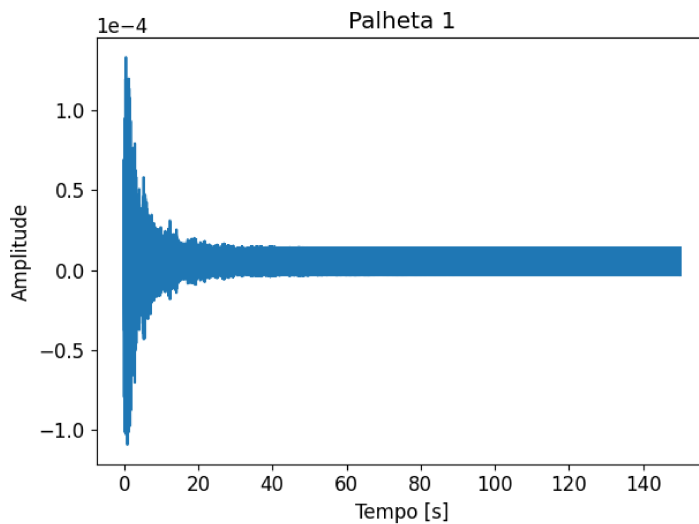
Figura 5.13: Resposta ao desbalanceamento: palheta 1 não amortecida.



(a) 500 RPM



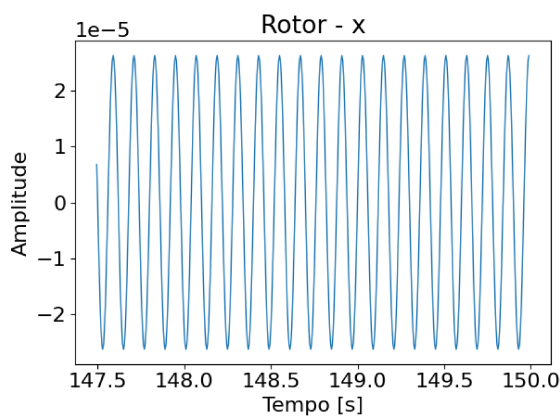
(b) 1000 RPM



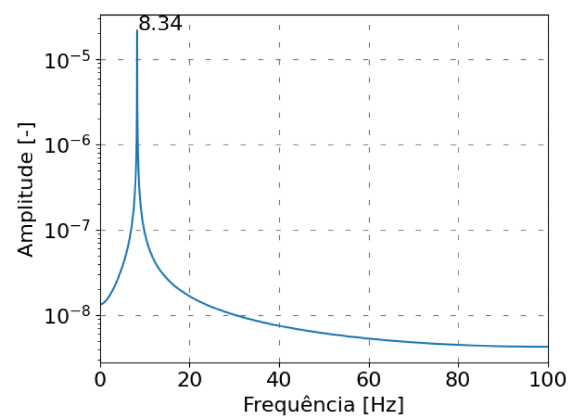
(c) 1500 RPM

Figura 5.14: Resposta ao desbalanceamento: palheta 1 amortecida.

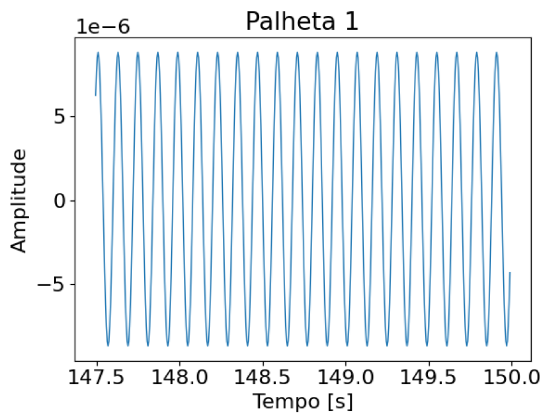
As Figuras 5.15a e 5.15c mostram as respostas temporais em regime permanente para eixo na direção X e para a primeira palheta, respectivamente, quando a velocidade de rotação é 500 RPM. As Figuras 5.15b e 5.15d mostram os espectros de frequências relativos aos respectivos sinais no tempo. A amplitude de vibração do eixo é cerca de três vezes maior que a amplitude de vibração das palhetas. Analisando as FFTs, vemos que a vibração ocorre na frequência de rotação do sistema, que é 8,33 Hz.



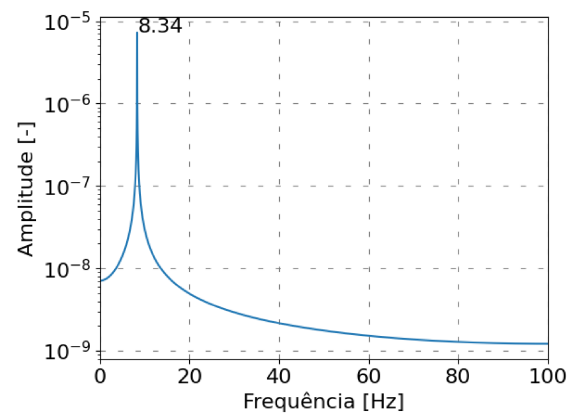
(a) Eixo



(b) Eixo - FFT



(c) Palheta 1



(d) Palheta 1 - FFT

Figura 5.15: Vibração para eixo e primeira palheta a 500 RPM.

Para as velocidades de 1000 e 1500 RPM, o comportamento de vibração é semelhante à velocidade de 500 RPM, como mostram as Figs. 5.16 e 5.17. Com o aumento da velocidade de rotação, ocorre um aumento de amplitude geral de vibração. Aumenta também a diferença entre a relação de amplitude do eixo e da palheta, sendo que a vibração do eixo é cerca de dez vezes maior que a da palheta para 1000

RPM e aproximadamente dezoito vezes maior para 1500 RPM. A frequência de vibração continua a ser a frequência de rotação do sistema: 16,67 Hz para 1000 RPM e 25 Hz para 1500 RPM.

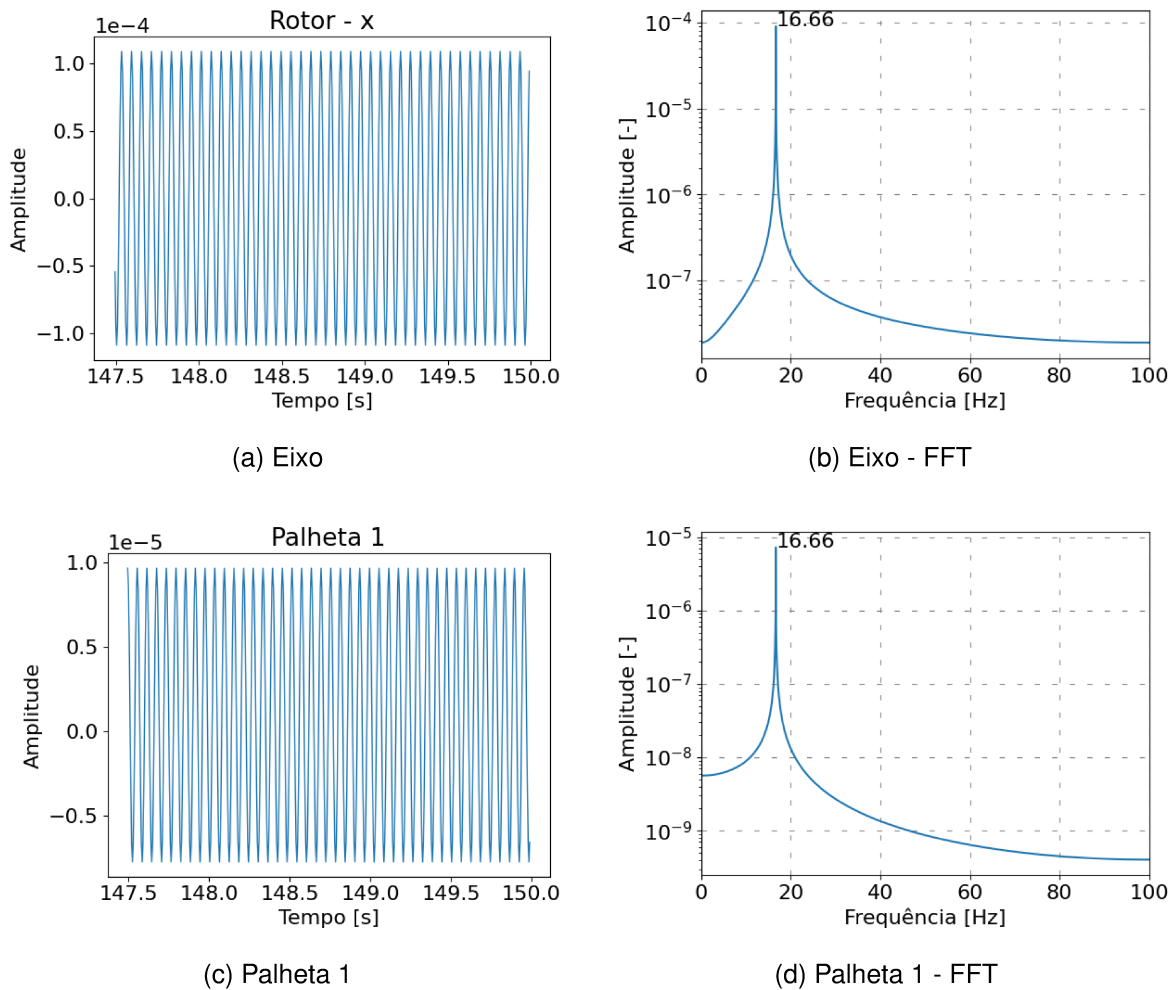
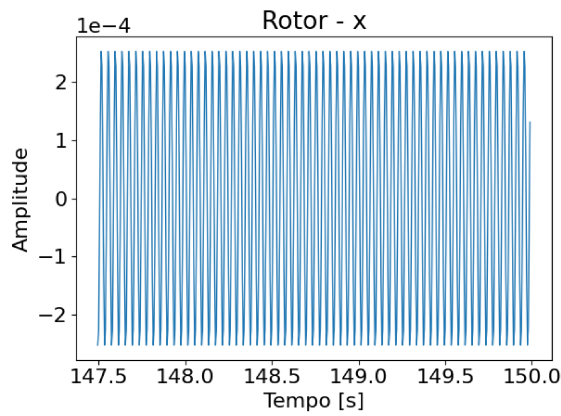
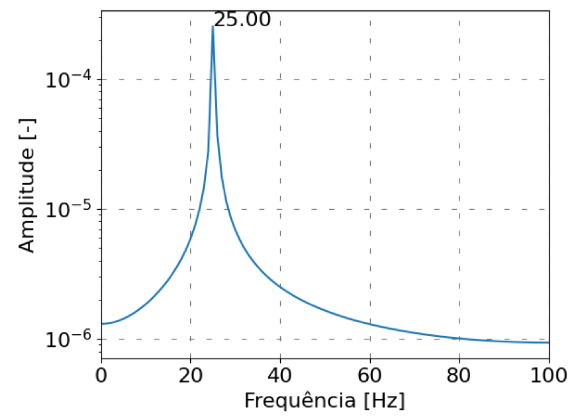


Figura 5.16: Vibração para eixo e primeira palheta a 1000 RPM.

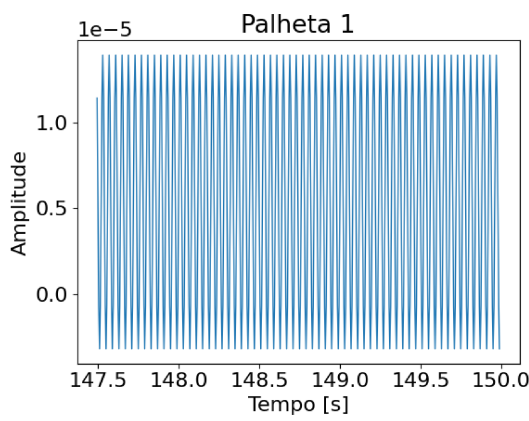
É interessante notar que para a velocidade de 500 RPM, o deslocamento da palheta se dá simetricamente em torno de zero, enquanto para as outras velocidade ocorre um deslocamento vertical do sinal. De acordo com Yang et al. (2022), isso ocorre pelo acoplamento entre eixo e palhetas, potencializado pela presença uma força de desbalanceamento. Como a força de desbalanceamento é proporcional ao quadrado da rotação, a influência do acoplamento na vibração das palhetas cresce com a velocidade.



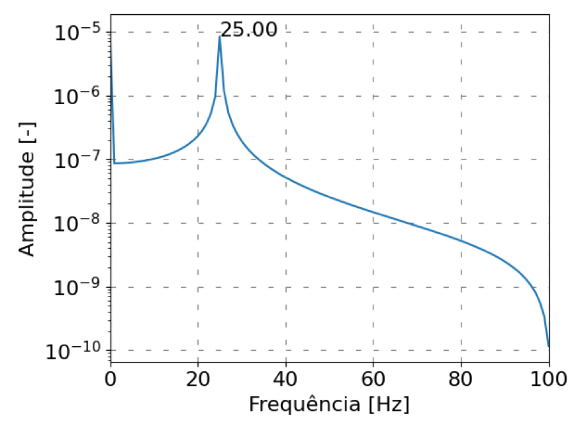
(a) Eixo



(b) Eixo - FFT



(c) Palheta 1



(d) Palheta 1 - FFT

Figura 5.17: Vibração para eixo e primeira palheta a 1500 RPM.

Página intencionalmente deixada em branco.

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho apresentou o desenvolvimento de um modelo matemático para investigar o comportamento dinâmico de um sistema rotativo composto por um eixo acoplado a um disco palhetado, como objetivo de obter um modelo simplificado de turbomáquinas.

Para modelar o sistema, eixo e palhetas foram considerados como vigas flexíveis de Euler-Bernoulli, enquanto o disco foi considerado rígido. O modelo foi discretizado utilizando o Método dos Modos Assumidos e as funções modais de vigas. A partir do modelo discretizado, as Equações de Lagrange foram aplicadas para se obter as equações do movimento do sistema e as matrizes dinâmicas globais.

A partir das matrizes dinâmicas globais obtidas, o modelo foi validado a partir da comparação de suas frequências naturais com as obtidas por um *software* de elementos e com as frequências naturais experimentais encontradas por Yang et al. (2022). Em seguida, a resposta de vibração do sistema eixo-disco-palhetas foi analisada por meio de suas frequências naturais para o sistema girante, utilizando o Diagrama de Campbell, e por respostas temporais ao desbalanceamento e respostas em frequência. A influência do número de palhetas e da posição do disco ao longo do eixo nas frequências naturais também foi avaliada.

Entre os resultados obtidos, é possível destacar:

- O modelo desenvolvido foi capaz de prever corretamente as frequências naturais obtidas por simulação, com erro médio de 2% e por experimentos, com erro médio de 1%.
- A presença das palhetas leva a uma diminuição das frequências naturais do

sistema eixo-disco, enquanto a presença do eixo não influencia as frequências naturais do sistema disco-palhetas.

- O aumento no número de palhetas gera uma leve diminuição nas frequências naturais do eixo, pelo aumento da flexibilidade do sistema como um todo. Esse aumento, no entanto, não afeta as frequências naturais dos modos de vibrar das palhetas.
- A posição do disco tem grande influência nas frequências naturais do eixo. Para os dois primeiros modos, o afastamento do disco do início do eixo causa uma diminuição nas frequências. Contudo, para os próximos modos, não é possível ver uma repetição desse comportamento. Sendo assim, não há um padrão bem definido de influência.
- Para as respostas temporais do sistema desbalanceado, a amplitude de vibração do eixo é maior que a vibração das palhetas, e percebe-se um aumento da amplitude de vibração com o aumento da velocidade. A adição do amortecimento proporcional causa uma transição mais rápida ao regime permanente, com amplitudes de vibração menores.
- Finalmente, é possível dizer que foram identificados dois modos de vibração: o acoplamento entre flexão do eixo e flexão das palhetas, nas frequências naturais que seriam apenas do rotor na ausência das últimas; e acoplamento entre a flexão das palhetas, nas frequências relacionadas ao disco-palhetado.

6.1 Perspectivas de trabalhos futuros

Baseado no desenvolvido nessa dissertação, é possível mencionar os seguintes temas a serem estudados no futuro:

- Adição de elementos como a torção do eixo, interação entre palhetas e modelo de viga de Timoshenko ao modelo matemático, possibilitando maior precisão e robustez, além do entendimento de mais fenômenos relacionados ao acoplamento de vibrações.

- Implementação numérica das equações o movimento pelo Método dos Elementos Finitos, para que seja possível acoplar este modelo a outros desenvolvidos pelos pesquisadores do LMEst.
- Desenvolvimento e construção de uma bancada experimental para validação do modelo LMEst.

Referências

AL-BEDOOR, B. Natural frequencies of coupled blade-bending and shaft-torsional vibrations. **Shock and Vibration**, IOS Press, v. 14, n. 1, p. 65–80, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2007/506165>>.

ATSB, A. T. S. B. **Engine failure involving Airbus A330, 9M-XXE**. 2020. Disponível em: <https://www.atsb.gov.au/media/5778262/ao-2017-066_final.pdf>.

BATHE, K.-J.; WILSON, E. L. **Numerical methods in finite element analysis**. [S.l.]: Prentice Hall, 1976.

BIR, G. Multi-blade coordinate transformation and its application to wind turbine analysis. In: **46th AIAA aerospace sciences meeting and exhibit**. [s.n.], 2008. p. 1300. Disponível em: <<https://www.nrel.gov/docs/fy08osti/42553.pdf>>.

CHATELET, E.; D'AMBROSIO, F.; JACQUET-RICHARDET, G. Toward global modelling approaches for dynamic analyses of rotating assemblies of turbomachines. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 282, n. 1-2, p. 163–178, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.02.035>>.

CHUN, S.-B.; LEE, C.-W. Vibration analysis of shaft-bladed disk system by using substructure synthesis and assumed modes method. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 189, n. 5, p. 587–608, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0038>>.

COLEMAN, R. P. **Theory of self-excited mechanical oscillations of hinged rotor blades**. [S.l.], 1943. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/citations/19930092339>>.

DIMAROGONAS, A. D.; PAIPETIS, S. A.; CHONDROS, T. G. **Analytical methods in rotor dynamics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.

D'SOUZA, K.; SAITO, A.; EPUREANU, B. I. Reduced-order modeling for nonlinear analysis of cracked mistuned multistage bladed-disk systems. **AIAA journal**, v. 50, n. 2, p. 304–312, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/1.J051021>>.

GE, G. E. **Steam turbine upgrades**. 2022. <<https://www.ge.com/gas-power/services/steam-turbines/upgrades/advanced-steam-path>>.

HSIEH, S.-H.; ABEL, J. Comparison of two finite element approaches for analysis of rotating bladed-disk assemblies. **Journal of sound and vibration**, Elsevier, v. 182, n. 1, p. 91–107, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0184>>.

- HUANG, B.-W.; KUANG, J.-H. Variation in the stability of a rotating blade disk with a local crack defect. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 294, n. 3, p. 486–502, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.11.028>>.
- JACQUET-RICHARDET, G.; FERRARIS, G.; RIEUTORD, P. Frequencies and modes of rotating flexible bladed disc-shaft assemblies: a global cyclic symmetry approach. **Journal of sound and vibration**, Elsevier, v. 191, n. 5, p. 901–915, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0162>>.
- JOHNSON, W. **Helicopter Theory**. [S.l.]: Princeton University Press, 1980. 1084 p.
- JOUSSELIN, O. **Development of blade tip timing techniques in turbo machinery**. [S.l.]: The University of Manchester (United Kingdom), 2013.
- LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics Prediction in Engineering**. [S.l.]: John Wiley and Sons Ltd., 1990.
- LI, C.-f.; SHE, H.-x.; LIU, W.; WEN, B.-c. The influence of shaft's bending on the coupling vibration of a flexible blade-rotor system. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, v. 2017, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2017/7313956>>.
- LIM, H. S.; CHUNG, J.; YOO, H. H. Modal analysis of a rotating multi-packet blade system. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 325, n. 3, p. 513–531, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.03.042>>.
- MA, H.; LU, Y.; WU, Z.; TAI, X.; LI, H.; WEN, B. A new dynamic model of rotor–blade systems. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 357, p. 168–194, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.07.036>>.
- MA, H.; YIN, F.; WU, Z.; TAI, X.; WEN, B. Nonlinear vibration response analysis of a rotor-blade system with blade-tip rubbing. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 84, n. 3, p. 1225–1258, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11071-015-2564-5>>.
- MEIROVITCH, L. **Elements of Vibration Analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1986. ISBN 9780071002714.
- MEIROVITCH, L. **Methods of analytical Dynamics**. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, Inc, 1988.
- MORAES, L. F. B. **Modelagem e análise de um aerogerador de eixo horizontal sujeito à ação de ventos turbulentos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânicas, 2019.
- PRZEMIENIECKI, J. S. **Theory of matrix structural analysis**. [S.l.]: Courier Corporation, 1985.
- RAO, J. **History of rotating machinery dynamics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. v. 20.
- RAO, S. S. **Vibration of continuous systems**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2019.

RASMUSSEN, T. Ø.; SANTOS, I. F. Experimental & operational modal analysis applied to rotor-blade systems in a fully controlled testing environment. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer, v. 43, n. 10, p. 1–10, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40430-021-03170-7>>.

RENDE, B. R. F. **Análise numérica e experimental do comportamento dinâmico de um sistema rotor-palhetas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia. Faculdade de Engenharia Mecânica, 2020.

SANCHES, L. **Helicopter Ground Resonance: Dynamical Modeling, Parametric Robustness Analysis and Experimental Validation**. Tese (Doutorado) — ISAE-SUPAERO, 2011.

SANTOS, I.; SARACHO, C.; SMITH, J.; EILAND, J. Contribution to experimental validation of linear and non-linear dynamic models for representing rotor–blade parametric coupled vibrations. **Journal of sound and vibration**, Elsevier, v. 271, n. 3-5, p. 883–904, 2004. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00758-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00758-2)>.

SARACHO, C. M. **Modelos matemáticos lineares e não-lineares para representar o acoplamento entre rotor e palhetas flexíveis: exemplos numéricos e verificação experimental**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica, 2002.

SHE, H.; LI, C.; TANG, Q.; WEN, B. The investigation of the coupled vibration in a flexible-disk blades system considering the influence of shaft bending vibration. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 111, p. 545–569, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.03.044>>.

SHE, H.; LI, C.; TANG, Q.; WEN, B. Influence mechanism of disk position and flexibility on natural frequencies and critical speeds of a shaft-disk-blade unit. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 469, p. 115156, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.115156>>.

YANG, C.-H.; HUANG, S.-C. The influence of disk's flexibility on coupling vibration of shaft–disk–blades systems. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 301, n. 1-2, p. 1–17, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.053>>.

YANG, L.; MAO, Z.; CHEN, X.; YAN, R.; XIE, J.; HU, H. Dynamic coupling vibration of rotating shaft–disc–blade system—modeling, mechanism analysis and numerical study. **Mechanism and Machine Theory**, Elsevier, v. 167, p. 104542, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104542>>.

YOO, H. H.; KIM, J. Y.; INMAN, D. J. Vibration localization of simplified mistuned cyclic structures undertaking external harmonic force. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 261, n. 5, p. 859–870, 2003. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)00997-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)00997-5)>.

YUAN, J.; SCARPA, F.; ALLEGRI, G.; TITURUS, B.; PATSIAS, S.; RAJASEKARAN, R. Efficient computational techniques for mistuning analysis of bladed discs: a review. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 87, p. 71–90, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.09.041>>.