

MARCELA DINIZ SILVA

Sobre Semigrupos Numéricos



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

2022

MARCELA DINIZ SILVA

Sobre Semigrupos Numéricos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Álgebra.

Orientador: Prof. Dr. Alonso Sepúlveda Castellanos.

UBERLÂNDIA - MG
2022

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S586 Silva, Marcela Diniz, 1998-
2022 Sobre semigrupos numéricos [recurso eletrônico] /
Marcela Diniz Silva. - 2022.

Orientador: Alonso Sepúlveda Castellanos.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.245>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Castellanos, Alonso Sepúlveda, 1980-,
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-
graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.posgrad.famat.ufu.br - pgmat@famat.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 100, PPMAT				
Data:	25 de maio de 2022	Hora de início:	15:30	Hora de encerramento:	17:30
Matrícula do Discente:	12012MAT008				
Nome do Discente:	Marcela Diniz Silva				
Título do Trabalho:	Sobre Semigrupos Numéricos				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Geometria Algébrica				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Semigrupo de Weierstrass em pontos e pesos generalizados de Hamming sobre curvas tipo Kummer				

Reuniu-se na Sala 1F-119 (Sala Multiuso da Faculdade de Matemática), Campus Santa Mônica, da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Wanderson Tenório - UFMT que participou pela plataforma Mconf-RNP, em conformidade com a PORTARIA Nº 36, DE 19 DE MARÇO DE 2020 da COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR - CAPES; Guilherme Chaud Tizzotti - FAMAT/UFU e Alonso Sepúlveda Castellanos - FAMAT/UFU, orientador da candidata.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Alonso Sepúlveda Castellanos, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu a Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(as) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Guilherme Chaud Tizziotti, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/05/2022, às 17:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alonso Sepulveda Castellanos, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/05/2022, às 17:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wanderson Tenório, Usuário Externo**, em 25/05/2022, às 17:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3553087** e o código CRC **C665FF7F**.

Dedicatória

Essa dissertação de Mestrado é dedicada a todos que me incentivaram e apoiaram durante a minha vida, em primeiro lugar a Deus, que sempre foi a minha base e repouso para descansar; à minha família, que zelou por mim e me influencia todos os dias a batalhar para alcançar os meus objetivos; aos meus amigos e familiares, por fazerem parte de quem eu sou; aos meus professores universitários, que supriram todo o conhecimento necessário para realização deste trabalho, e muito mais; a todos os professores dos Ensinos Fundamental e Médio com quem tive contato, em particular à professora Lucia Resende, que marcou a minha infância com a sua paixão por ensinar, e quem levo para sempre em minhas memórias e inspirações; ao Prof. Dr. Alonso Sepúlveda Castellanos, pela orientação e por todo o suporte oferecido durante o período de Graduação e Pós-Graduação; à Universidade Federal de Uberlândia (UFU) pela oportunidade de estudos; e à FAPEMIG pelo financiamento dos meus estudos.

Agradecimentos

Ao longo de todo o percurso de graduação e pós-graduação, diversas pessoas e instituições foram importantes para o meu crescimento profissional e pessoal, tornando possível a conclusão desta caminhada até este projeto de dissertação de mestrado.

Primeiramente, agradeço a Deus por tudo o que fez e faz em minha vida, e por sempre estar ao meu lado durante o caminho que colocou como o meu propósito de seguir durante os meus dias.

Agradeço aos meus pais, Paulo e Adriana, e à minha irmã Paula, por serem a minha base, por todo o incentivo e apoio em todos os meus passos, e por me darem referência da pessoa que um dia desejo me tornar.

Aos meus colegas de classe e professores por todo conhecimento adquirido por meio de aulas e conversas, e por todo suporte necessário, sem os quais eu não conseguiria chegar até aqui.

Agradeço ao João Pedro por sempre me incentivar a correr atrás dos meus sonhos e me tornar uma pessoa melhor a cada dia, por todo carinho, dedicação, cuidado e por sempre estar ao lado.

Aos meus amigos e familiares que fazem parte da minha história.

Ao Prof. Dr. Alonso Sepúlveda Castellanos pela orientação, cobrança e exigência na execução dessa dissertação, e por todo apoio recebido durante as dificuldades.

À FAPEMIG por financiar os meus estudos durante a maior parte do Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Por fim, agradeço a Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e a Faculdade de Matemática (FAMAT), pela oportunidade de estudar em ótimos cursos de Graduação e Pós-Graduação.

Resumo

Um semigrupo numérico é um submonoide dos inteiros não negativos tal que o seu complemento neste conjunto é finito. Neste trabalho estudam-se conceitos básicos sobre semigrupos numéricos em \mathbb{N} e algumas caracterizações, em particular as de irreduzibilidade e quase simetria, que são generalizadas para semigrupos numéricos em \mathbb{N}^d , onde d é um inteiro positivo maior que 1.

Palavras-chave: (Semigrupos Numéricos, Semigrupos Numéricos Generalizados, Irreduzibilidade, Quase Simetria).

Abstract

A numerical semigroup is a submonoid of non-negative integers whose complement on this set is finite. We shall study basic concepts about numerical semigroups in \mathbb{N} and some characterizations, in particular the irreducibility and almost symmetry, that are generalized for numerical semigroups in \mathbb{N}^d , with d a positive integer greater than 1.

Keywords: (Numerical Semigroups, Generalized Numerical Semigroups, Irreducibility, Almost Symmetry).

Lista de Figuras

Figura 1	37
Figura 2	71
Figura 3	80
Figura 4	81
Figura 5	88
Figura 6	90
Figura 7	93
Figura 8	96
Figura 9	96

Lista de Tabelas

Tabela 1	9
Tabela 2	10
Tabela 3	12
Tabela 4	12

Lista de Símbolos

\mathbb{N} - conjunto de inteiros não negativos	1
$\langle n_1, \dots, n_p \rangle$ - submonoide gerado por $\{n_1, \dots, n_p\}$	3
$Ap(S, m)$ - conjunto Apéry do elemento $m \neq 0$ em S	5
$m(S)$ - multiplicidade do semigrupo numérico S	7
$e(S)$ - dimensão do semigrupo numérico S	7
$F(S)$ - número de Frobenius do semigrupo numérico S	7
$g(S)$ - gênero (ou grau de singularidade) de um semigrupo numérico S	7
$PF(S)$ - conjuntos dos números pseudo-Frobenius do semigrupo numérico S	13
$t(S)$ - tipo do semigrupo numérico S	13
\mathbb{Z} - conjunto dos inteiros	14
$Maximais_{\leq}(X)$ - elementos maximais de X com respeito à ordem \leq	14
$Minimais_{\leq}(X)$ - elementos minimais de X com respeito à ordem \leq	14
$N(S)$ - conjunto de elementos em S menores que o seu número de Frobenius	15
$n(S)$ - cardinalidade de $N(S)$	15
$a \equiv b \pmod{m}$ significa que $(a - b) \pmod{m} = 0$	16
$a \pmod{b}$ - é o resto da divisão de a por b	16
$Arf(S)$ - fecho Arf do semigrupo numérico S	22
$d_A(a)$ - maior divisor comum dos elementos de A menores ou iguais a $a \in A$	25
$Sat(S)$ - fecho saturado do semigrupo numérico S	27
$SG(S)$ - conjuntos das lacunas especiais de S	36
$\mathcal{O}(S)$ - conjunto dos semigrupos numéricos contendo o semigrupo numérico S	36
\mathcal{S} - conjunto de todos os semigrupos numéricos	39
$\mathcal{S}(g_1, \dots, g_t)$ - conjunto de semigrupos numéricos que não possuem $\{g_1, \dots, g_t\}$	39
$\mathcal{I}(S)$ - conjunto de semigrupos numéricos irredutíveis contendo o semigrupo numérico S	39
$D(X)$ - conjunto de todos os divisores positivos dos elementos de X	42
$FG(S)$ - conjunto de lacunas fundamentais de S	42
$L(S)$ - elementos x de $G(S)$ tais que $F(S) - x \notin S$	44
\mathbb{Q}_0^+ - conjunto de números racionais não negativos	46
$M(f)$ - monoide associado à função subaditiva f	46
\mathcal{SF}_m conjunto de funções subaditivas m -periódicas	47
\mathcal{S}_m - conjunto de semigrupos numéricos com multiplicidade m	47
$S(a, b, c)$ - conjunto de soluções inteiras para $ax \pmod{b} \leq cx$	47
$S(A)$ - com $A \subset \mathbb{Q}_0^+$, o conjunto de inteiros do submonoide $\langle A \rangle$	48
$\mathcal{C}(S)$ - lacunas especiais de S que não pertencem a um dado semigrupo que contém S	75
\mathbf{f}_{\prec} - elemento Frobenius de S com respeito a ordem monomial casual \prec	78
(S, \mathbf{f}) - semigrupo numérico generalizado cujo elemento Frobenius não depende da ordem monomial casual	79
$\pi(\mathbf{h})$ - elementos de \mathbb{N}^d menores ou iguais a \mathbf{h} com relação a ordem parcial natural	80
$LG(\mathbf{h})$ - lacunas menores ou iguais a \mathbf{h} com relação a ordem parcial natural	80
$MG(S)$ - elementos maximais de $G(S)$ com respeito a ordem parcial natural	80
$S(\mathbf{f})$ - semigrupo numérico generalizado cujo conjunto de lacunas é $\pi(\mathbf{f}) \setminus \{\mathbf{0}\}$	84

$C(S, \mathbf{n})$ - conjunto de Apéry reduzido do elemento \mathbf{n} em S	87
$Q(S)$ - conjunto dos elementos $\mathbf{x} \in SG(S)$ diferentes do elemento Frobenius tais que $S \cup \{\mathbf{x}\}$ é quase simétrico	92
$Q_{\prec}(S)$ - conjunto dos elementos $\mathbf{x} \in D(S)$ tais que $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, para todo $\mathbf{y} \in (N(S) \setminus \{\mathbf{0}\}) \cup \{\mathbf{f}\}$, onde \mathbf{f} é o elemento Frobenius de S	92
$men_{\prec}(S)$ - menor elemento de $N(S) \setminus \{\mathbf{0}\}$ com relação a ordem monomial casual	92
$\mathcal{A}(\mathbf{f})$ - conjunto de todos os SNGs quase simétricos com elemento Frobenius \mathbf{f}	92
$\mathcal{G}(\mathbf{f})$ - gráfico de SNGs quase simétricos com elemento Frobenius \mathbf{f}	92
$\mathcal{G}_{\prec}(\mathbf{f})$ - árvore de SNGs quase simétricos com elemento Frobenius \mathbf{f}	95

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	viii
Lista de Símbolos	ix
Introdução	1
1 Semigrupos Numéricos	3
1.1 Noções preliminares	3
1.1.1 Monoides e homomorfismos de monoides	3
1.1.2 Multiplicidade e dimensão	4
1.1.3 Número de Frobenius e gênero	7
1.1.4 Números Pseudo-Frobenius	13
1.2 Semigrupos Numéricos com Dimensão Máxima	16
1.2.1 Caracterizações	16
1.2.2 Semigrupos numéricos Arf	21
1.2.3 Semigrupos Numéricos Saturados	24
1.3 Semigrupos Numéricos Irredutíveis	27
1.3.1 Semigrupos Numéricos Simétricos e Pseudo-simétricos	27
1.3.2 Semigrupos Numéricos Irredutíveis com Multiplicidade e Dimensão Arbitrárias	31
1.3.3 Extensões Unitárias de um Semigrupo Numérico	36
1.3.4 Decomposição de um Semigrupo Numérico em Irredutíveis	39
1.3.5 Lacunas Fundamentais de um Semigrupo Numérico	41
1.4 Semigrupos Numéricos Quase Simétricos	43
1.5 Semigrupos Numéricos Proporcionalmente Modulares	46
1.5.1 Funções Periódicas Sub-aditivas	46
1.5.2 O Semigrupo Numérico Associado a um Intervalo de Números Racionais	48
1.5.3 Sequências de Bézout	50
1.5.4 Geradores Minimais de um Semigrupo Numérico Proporcionalmente Modular	54
1.5.5 Semigrupos Numéricos Modulares	58
1.5.6 Semigrupos Numéricos Modulares Abertos	61
1.6 O Quociente de um Semigrupo Numérico por um Inteiro Positivo	64
1.6.1 Elementos Notáveis	64
1.6.2 Metade de um Semigrupo Numérico Irredutível	66

2	Semigrupos Numéricos Generalizados Irredutíveis e Unicidade do Elemento Frobenius	70
2.1	Preliminares	70
2.2	Semigrupos Numéricos Generalizados Irredutíveis	72
2.3	Decomposição de um SNG como interseção de uma quantidade finita de irredutíveis	74
2.4	Unicidade do elemento Frobenius	77
2.5	Fórmulas para SNGs Frobenius e irredutíveis	80
3	Sobre Quase Simetria em Semigrupos Numéricos Generalizados	83
3.1	Preliminares	83
3.2	Simetrias em SNGs quase simétricos	85
	3.2.1 Elementos pseudo-Frobenius	85
	3.2.2 Apéry e conjuntos relacionados	87
3.3	Calculando todos os SNGs quase simétricos com elemento Frobenius fixado . . .	91

Introdução

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Um semigrupo numérico S é um subconjunto não vazio de \mathbb{N} junto com uma operação binária $+$ que é fechado com a soma, contém o elemento neutro, e cujo complemento em \mathbb{N} é finito.

O estudo de semigrupos numéricos foi motivado a partir de algumas situações bem comuns, como o pagamento de compras sem desejar receber troco (que é conhecido como o Problema do Troco de Frobenius), por exemplo. Para ilustrar isso, imagine que se deseja pagar o valor de 8 reais, sem receber troco, com notas de 3 e 7. Perceba que isso não é possível. No entanto, seria fácil se desejarmos pagar 10 reais com as mesmas notas. Então, quais são os valores que não conseguimos efetuar pagamento com as notas de 3 e 7 sem receber troco? A resposta nos dá o seguinte conjunto: $\{1, 2, 4, 5, 8\}$. Observe que, nesse caso, temos uma quantidade finita de valores que não podem ser pagos sem receber troco usando as notas 3 e 7, contudo, se desejássemos usar apenas as notas 2 e 4, por exemplo, nenhum valor ímpar poderia ser pago sem receber troco.

A simplicidade deste conceito permite enunciar problemas fáceis de entender, mas cuja resolução está longe de ser trivial. Este fato atraiu vários matemáticos como Frobenius e Sylvester no final do século XIX. Foi assim que surgiu o problema de Frobenius, o qual desejava encontrar uma fórmula dependendo de n_1, \dots, n_e para o maior inteiro não pertencente a $\langle n_1, \dots, n_e \rangle$.

Os semigrupos se manifestam em diversos campos da matemática, como por exemplo, na geometria, na teoria de códigos, e mais recentemente, em 2020, Maria Brás-Amorós em [16] relacionou a teoria de semigrupos numéricos com a música, por meio de uma conexão entre escalas musicais ordenadas com ω -monoides (que são um tipo específico de submonoides de \mathbb{R}), e mostrou que qualquer ω -monoide é um múltiplo escalar de um semigrupo numérico ou um monoide temperado.

O objetivo dessa dissertação é expor alguns conceitos e resultados da Teoria de Semigrupos Numéricos, e apresentar também generalizações do estudo de Semigrupos Numéricos Irredutíveis e Semigrupos Numéricos Quase Simétricos para o conjunto Semigrupos Numéricos Generalizados em \mathbb{N}^d , onde d é um inteiro positivo.

Desse modo, os assuntos a serem apresentados serão divididos em 3 capítulos: o primeiro irá introduzir a Teoria de Semigrupos Numéricos em \mathbb{N} , mostrando o estudo que foi feito em [12] e em [8]; o segundo terá o conteúdo visto no artigo [2], que fala sobre generalizações de irredutibilidade para semigrupos numéricos generalizados em \mathbb{N}^d , definindo ordens totais que são importantes para estender conceitos conhecidos, e mostrando a unicidade do elemento Frobenius para um semigrupo numérico generalizado irredutível; o último capítulo trará o que foi estudado no artigo [3], onde encontram-se generalizações de quase simetria para semigrupos numéricos generalizados em \mathbb{N}^d , com o objetivo de construir uma árvore de semigrupos numéricos quase simétricos com elemento Frobenius fixo, e cuja base é um semigrupo numérico generalizado ordinário.

Marcela Diniz Silva
Uberlândia-MG, 25 de maio de 2022.

Capítulo 1

Semigrupos Numéricos

1.1 Noções preliminares

Neste capítulo apresentaremos noções básicas de semigrupos numéricos em $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, que serão úteis para o entendimento dos próximos capítulos, onde trataremos de generalizações dos conceitos e dos resultados apresentados aqui. Para mais detalhes, ver [12].

1.1.1 Monoides e homomorfismos de monoides

Um *semigrupo* é um par $(S, +)$, onde S é um conjunto e $+$ é uma operação binária em S que é associativa. Todos os semigrupos considerados neste trabalho são comutativos (isto é, $a + b = b + a$ para quaisquer $a, b \in S$). Por essa razão, não vamos continuar repetindo o adjetivo comutativo. Normalmente, também omitiremos a operação binária $+$ quando nos referirmos a um semigrupo comutativo, escrevendo S em vez de $(S, +)$. Um *subsemigrupo* T de um semigrupo S é um subconjunto que é fechado com a operação binária considerada em S .

Proposição 1.1 *Sejam X e Y dois subsemigrupos de S . Então, $X \cap Y$ é um subsemigrupo de S .*

Demonstração. Observe que $X \cap Y = \{u \in S \mid u \in X \text{ e } u \in Y\}$, assim $X \cap Y$ é um subconjunto de S . Tome então $u, v \in X \cap Y$, daí $u, v \in X$ e $u, v \in Y$, logo $u + v \in X$ e $u + v \in Y$, pois X e Y são fechados em relação a soma, portanto, $u + v \in X \cap Y$. \square

Assim, dado A um subconjunto não vazio de S , o menor subsemigrupo de S contendo A é a interseção de todos os subsemigrupos de S contendo A , pois se K é o menor subsemigrupo de S que contém A , e T é a interseção de todos os subsemigrupos de S que contém A , temos que $K \subset T$, já que $A \subset T$. Por outro lado, como K é um subsemigrupo que contém A , segue que $T \subset K$, e assim $K = T$. Denotaremos este semigrupo por $\langle A \rangle$, e o chamaremos de *subsemigrupo gerado* por A . Segue que

$$\langle A \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N} \text{ e } a_1, \dots, a_n \in A\}$$

(onde \mathbb{N} denota o conjunto de inteiros não negativos). Dizemos que S é gerado por $A \subseteq S$ se $S = \langle A \rangle$. Neste caso, A é um *sistema de geradores* de S . Se A tem um número finito de elementos, então dizemos que S é *finitamente gerado*.

Um semigrupo M é um *monoide* se possui um elemento neutro, ou seja, existe um elemento em M , denotado por 0 , tal que $0 + a = a + 0 = a$, para todo $a \in M$ (lembre-se que estamos assumindo que os semigrupos são comutativos, logo isso também estende-se aos monoides).

Um subconjunto N de M é um *submonoide* de M se for um subsemigrupo de M e $0 \in N$. Observe que se M é um monoide, então $\{0\}$ é um submonoide de M , o qual é chamado de

submonoide *trivial* de M . Assim como em semigrupos, a interseção de submonoides de um monoide é novamente um de seus submonoides. Dado um monoide M e um subconjunto A de M , o menor submonoide de M contendo A é

$$\langle A \rangle = \{ \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N} \text{ e } a_1, \dots, a_n \in A \},$$

que chamaremos de submonoide de M gerado por A . Como no caso de semigrupos, o conjunto A é um sistema de geradores de M se $\langle A \rangle = M$, e também diremos que M é gerado por A . Assim, um monoide M é *finitamente gerado* se existir um sistema de geradores de M com um número finito de elementos.

Dados dois semigrupos X e Y , uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é um *homomorfismo* de semigrupos se $f(a + b) = f(a) + f(b)$, para todos $a, b \in X$. Dizemos que f é um *monomorfismo*, um *epimorfismo*, ou um *isomorfismo* se f é injetora, sobrejetora ou bijetora, respectivamente. Observe que se f é um isomorfismo, então existe a inversa f^{-1} . Além disso, dizemos que dois semigrupos X e Y são isomorfos se existe um isomorfismo entre eles, e denotamos por $X \cong Y$.

Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ com monoides X e Y é um homomorfismo de monoides se for um homomorfismo de semigrupos e $f(0) = 0$. Os conceitos de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo de monoides são definidos como para semigrupos.

1.1.2 Multiplicidade e dimensão

O conjunto \mathbb{N} com a operação de adição é um monoide. Veremos mais adiante que podemos classificar submonoides de \mathbb{N} por isomorfismos ao terem complemento finito em \mathbb{N} . Um submonoide de \mathbb{N} com complemento finito em \mathbb{N} é chamado de *semigrupo numérico*. Nesta seção mostraremos que todo semigrupo numérico é finitamente gerado, admite um único sistema de geradores minimal, cuja cardinalidade é limitada superiormente pelo menor elemento positivo do monoide.

Seja A um subconjunto não vazio de \mathbb{N} , então denotamos por $mdc(A)$ como sendo o *máximo divisor comum* dos elementos de A .

Lema 1.2 *Seja A um subconjunto não vazio de \mathbb{N} . Então $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico se, e somente se, $mdc(A) = 1$.*

Demonstração. Suponha que $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico, e seja $d = mdc(A)$. Se $s \in \langle A \rangle$, então $d \mid s$. Como $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico, $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ é finito, e então existe um inteiro positivo x tal que $d \mid x$ e $d \mid (x + 1)$. Desse modo, d deve ser 1.

Por outro lado, para mostrar que $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico sabendo que $mdc(A) = 1$, basta provarmos que $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ é finito, pois sabemos pela definição de $\langle A \rangle$ que esse é um subconjunto de \mathbb{N} fechado com a soma, e que $0 = 0 \cdot a$, para algum $a \in A$, logo $0 \in \langle A \rangle$ e temos que ele é um submonoide de \mathbb{N} . Daí, como $mdc(A) = 1$, existem inteiros z_1, \dots, z_n e $a_1, \dots, a_n \in A$ tais que $z_1 a_1 + \cdots + z_n a_n = 1$. Movendo os termos onde z_i é negativo para o lado direito da igualdade, podemos encontrar $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, n\}$ tais que $z_{i_1} a_{i_1} + \cdots + z_{i_k} a_{i_k} = 1 - z_{j_1} a_{j_1} - \cdots - z_{j_l} a_{j_l}$. Chamando $-z_{j_1} a_{j_1} - \cdots - z_{j_l} a_{j_l} = s$, temos que $s \in \langle A \rangle$ e $s + 1 \in \langle A \rangle$. Mostremos que se $n \geq (s - 1)s + (s - 1)$, então $n \in \langle A \rangle$. Sejam $q, r \in \mathbb{Z}$, tais que $n = qs + r$, onde $0 \leq r < s$. Como $n \geq (s - 1)s + (s - 1)$, temos que $q \geq s - 1 \geq r$, assim

$$\begin{aligned} n &= qs + rs - rs + r \\ &= (rs + r) + (q - r)s \\ &= (s + 1)r + (q - r)s, \end{aligned}$$

o qual pertence a $\langle A \rangle$, pois $s + 1, s \in \langle A \rangle$, e $r, q - r \in \mathbb{N}$. Desse modo, $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ é finito, logo $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico. \square

Proposição 1.3 *Seja M um submonoide não trivial de \mathbb{N} . Então M é isomorfo a um semigrupo numérico.*

Demonstração. Seja $d = \text{mdc}(M)$. Pelo Lema 1.2, sabemos que $S = \left\langle \left\{ \frac{m}{d} \mid m \in M \right\} \right\rangle$ é um semigrupo numérico. Tomemos a função $f : M \rightarrow S$, definida por $f(m) = \frac{m}{d}$. Observe que:

- se $x, y \in M$, então $f(x + y) = \frac{x + y}{d} = \frac{x}{d} + \frac{y}{d} = f(x) + f(y)$, logo f é um homomorfismo de monoides;

- se $x, y \in M$, com $f(x) = f(y)$, então $\frac{x}{d} = \frac{y}{d} \Rightarrow x = y$, assim, f é injetora;

- se $a \in S$, existe $m \in M$ tal que $a = \frac{m}{d} \Rightarrow f(m) = a$, o que significa que f é sobrejetora.

Desse modo, concluímos que f é um isomorfismo de monoides, finalizando a demonstração. \square

Se A e B são subconjuntos dos números inteiros, escrevemos $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Assim, para um semigrupo numérico S , se $S^* = S \setminus \{0\}$, o conjunto $S^* + S^*$ corresponde ao conjunto de todos os elementos de S que são a soma de dois elementos não nulos de S .

Lema 1.4 *Seja S um submonoide de \mathbb{N} . Então, $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é um sistema de geradores de S . Mais ainda, todo sistema de geradores de S contém $S^* \setminus (S^* + S^*)$.*

Demonstração. Seja $s \in S^*$. Se $s \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$, então existem $x, y \in S^*$ tais que $s = x + y$. Daí, se $x, y \notin S^*$, podemos repetir o processo anterior para x e y . Agora, observe que esse procedimento será repetido apenas uma quantidade finita de vezes até encontrarmos $s_1, \dots, s_n \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ tais que $s = s_1 + \dots + s_n$, pois S é limitado inferiormente, e a cada troca de um elemento pela soma de outros dois não nulos nos aproximamos mais do limite inferior de S , já que sempre tomamos elementos menores que o original. Desse modo, segue que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é um sistema de geradores de S .

Agora, sejam A um sistema de geradores de S , e $x \in S^* \setminus (S^* + S^*)$. Como $S^* \subset S$ e $S = \langle A \rangle$, existem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}$ e $a_1, \dots, a_n \in A$ tais que $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$. Como $x \notin S^* + S^*$, temos que $x = a_i$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Desse modo, todo sistema de geradores de S contém $S^* \setminus (S^* + S^*)$. \square

Essa propriedade também é válida para submonoides S de \mathbb{N}^r , onde r é um inteiro positivo qualquer. A ideia é que sempre que $\mathbf{s} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, com \mathbf{x} e \mathbf{y} não nulos, então \mathbf{x} é estritamente menor que \mathbf{s} com a ordem parcial natural de \mathbb{N}^r , que é definida da forma $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ se $x^{(i)} < y^{(i)}$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, onde $s^{(i)}$ representa a i -ésima coordenada do vetor $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^r$. Daí, existe uma quantidade finita de elementos $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^r$ com $\mathbf{x} \leq \mathbf{s}$. Entretanto, $S^* \setminus (S^* + S^*)$ não precisa ser finito para r maior do que 1.

Exemplo 1.5 *O conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x > 5\} \cup \{(0, 0)\}$ é um submonoide de \mathbb{N}^2 que não possui um sistema de geradores finito, já que $(6, y)$ é um gerador do submonoide, para todo $y \in \mathbb{N}$.*

Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. O conjunto de Apéry de S em relação n é

$$Ap(S, n) = \{s \in S \mid s - n \notin S\}.$$

Lema 1.6 *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Então,*

$$Ap(S, n) = \{0 = w(0), w(1), \dots, w(n-1)\},$$

onde $w(i)$ é o menor elemento de S congruente a i módulo n , para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$. O nome desse conjunto foi dado em homenagem ao matemático francês Roger Apéry.

Demonstração. Basta notar que para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $i+kn \in S$. \square

Exemplo 1.7 *Seja $S = \langle 4, 6, 9 \rangle$. Então, $S = \{0, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 13, \rightarrow\}$ (o símbolo \rightarrow significa que todo inteiro maior que 13 pertence ao conjunto). Então, $Ap(S, 8) = \{0, 4, 6, 9, 10, 13, 15, 19\}$.*

Observe que o lema anterior implica que a cardinalidade de $Ap(S, n)$ é n .

Lema 1.8 *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Então, para todo $s \in S$, existe um único par $(k, w) \in \mathbb{N} \times Ap(S, n)$ tal que $s = kn + w$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.6, sabemos que $Ap(S, n) = \{w(0) = 0, w(1), \dots, w(n-1)\}$, onde $w(i)$ é o menor elemento de S congruente a $i \in \{0, \dots, n-1\}$ módulo n . Então, seja $s \in S$. Temos que $s \equiv w(i) \pmod{n}$, para algum $i \in \{0, \dots, n-1\}$, logo, como $w(i) \leq s$, segue que $s = w(i) + kn$, onde $k \in \mathbb{N}$. \square

Esse lema não é válido para submonoides de \mathbb{N}^r em geral. Entretanto, existem famílias de submonoides de \mathbb{N}^r para os quais uma propriedade similar é válida, e este resultado aparentemente simples torna possível traduzir alguns dos resultados conhecidos para resultados numéricos para um escopo mais geral.

Dizemos que um sistema de geradores de um semigrupo numérico é um *sistema de geradores minimal* se nenhum de seus subconjuntos próprios é um gerador do semigrupo numérico.

Teorema 1.9 *Todo semigrupo numérico admite um único sistema de geradores minimal. Além disso, esse sistema de geradores minimal é finito.*

Demonstração. Pelo Lema 1.4 temos que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é o sistema de geradores minimal de S . Agora, o Lema 1.8 diz que para todo $n \in S^*$, $S = \langle Ap(S, n) \cup \{n\} \rangle$. Como $Ap(S, n) \cup \{n\}$ é finito, e $S^* \setminus (S^* + S^*) \subseteq Ap(S, n) \cup \{n\}$, segue que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é finito. \square

Como todo submonoide de \mathbb{N} é isomorfo a um semigrupo numérico, temos os corolários a seguir:

Corolário 1.10 *Seja M um submonoide de \mathbb{N} . Então M possui um único sistema de geradores minimal, o qual é finito.*

Demonstração. Seja $d = \text{mdc}(M)$. Então, $T = \left\{ \frac{x}{d} \mid x \in M \right\}$ é um submonoide de \mathbb{N} tal que $\text{mdc}(T) = 1$. Pelo Lema 1.2, temos que T é um semigrupo numérico. Daí, se A é o sistema de geradores minimal de T , temos que $\{da \mid a \in A\}$ é o sistema de geradores minimal de M . \square

Corolário 1.11 *Seja M um submonoide de \mathbb{N} gerado por $\{0 \neq m_1 < m_2 < \dots < m_p\}$. Então, $\{m_1, m_2, \dots, m_p\}$ é o sistema de geradores minimal de M se, e somente se, $m_{i+1} \notin \langle m_1, \dots, m_i \rangle$, para todo $i \in \{1, \dots, p-1\}$.*

Sejam S um semigrupo numérico e $\{n_1 < n_2 < \dots < n_p\}$ o sistema de geradores minimal de S . Então, n_1 é conhecido como a *multiplicidade* de S , denotado por $m(S)$. A cardinalidade do sistema de geradores minimal, p , é chamada *dimensão* de S , e é denotada por $e(S)$.

Proposição 1.12 *Seja S um semigrupo numérico. Então,*

- 1) $m(S) = \min(S \setminus \{0\})$,
- 2) $e(S) \leq m(S)$.

Demonstração. O primeiro item desta proposição é óbvio. Já o segundo item segue do fato de que $\{m(S)\} \cup Ap(S, m(S)) \setminus \{0\}$ é um sistema de geradores de S com cardinalidade $m(S)$. \square

Observe que $e(S) = 1$ se, e somente se, $S = \mathbb{N}$. Se m é um inteiro positivo, então $S = \{0, m, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico de multiplicidade m , o qual será chamado *semirreta*. Além disso, o sistema de geradores minimal de S é $\{m, m+1, \dots, 2m-1\}$. Desse modo, $e(S) = m = m(S)$. Veremos mais adiante outros exemplos de semigrupos onde essa igualdade ocorre, os quais são chamados Semigrupos Numéricos de Dimensão Máxima.

1.1.3 Número de Frobenius e gênero

Ferdinand Georg Frobenius (Berlim, 1849 — 1917) propôs em seus estudos o problema de dar uma fórmula para o maior inteiro que não pode ser representado como uma combinação linear com coeficientes inteiros não negativos de um dado conjunto de inteiros positivos cujo maior divisor comum é um. Ele também lançou a questão de determinar quantos inteiros positivos não possuem tal representação. Usando nossa terminologia, o primeiro problema é equivalente a dar uma fórmula, em termos dos elementos em um sistema de geradores minimal de um semigrupo numérico S , para o maior inteiro que não pertence a S . Esse elemento é usualmente conhecido como *número de Frobenius* de S , embora na literatura seja algumas vezes substituído pelo *condutor* de S , que é o menor inteiro x tal que $x+n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O número de Frobenius de S é denotado aqui por $F(S)$, e é o condutor de S menos 1. Quanto ao segundo problema, o conjunto de elementos em $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$ é conhecido como conjunto de lacunas de S . Sua cardinalidade é o *gênero* de S , $g(S)$, que às vezes é referido como o grau de singularidade de S .

Exemplo 1.13 *Seja $S = \langle 4, 6, 9 \rangle$. Sabemos que $S = \{0, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \rightarrow\}$, assim, $F(S) = 11$, $G(S) = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$ e $g(S) = 6$.*

Não existe uma fórmula geral para o número de Frobenius, nem para o gênero, quando a dimensão é maior que dois. No entanto, se o conjunto de Apéry de algum elemento do semigrupo numérico não nulo é conhecido, então ambos são fáceis de computar.

Proposição 1.14 [5] *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Então,*

- 1) $F(S) = (\max Ap(S, n)) - n$,
- 2) $g(S) = \frac{1}{n} \left(\sum_{w \in Ap(S, n)} w \right) - \frac{n-1}{2}$.

Demonstração. 1) Pela definição do conjunto $Ap(S, n)$, temos que $(\max Ap(S, n)) - n \notin S$. Se $x > (\max Ap(S, n)) - n$, então $x+n > (\max Ap(S, n))$. Seja $w \in Ap(S, n)$ tal que $w \equiv x+n \pmod{n}$. Como $w < x+n$, segue que $x = w + kn$, onde $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Desse modo, $x \in S$, pelo Lema 1.8, logo $x \neq F(S)$, concluindo que $F(S) = (\max Ap(S, n)) - n$.

2) Observe que para todo $w \in Ap(S, n)$, se $w \equiv i \pmod{n}$ e $i \in \{0, \dots, n-1\}$, então existe um inteiro não negativo k_i tal que $w = k_i n + i$. Assim, usando a notação do Lema 1.6,

$$Ap(S, n) = \{0, w(1) = k_1n + 1, w(2) = k_2n + 2, \dots, w(n-1) = k_{n-1}n + n - 1\}.$$

Temos que $x \equiv w(i) \pmod{n}$ pertence a S se, e somente se, $w(i) \leq x$. Então, como os elementos congruentes a i módulo n menores que $w(i)$ pertencem ao conjunto $\{i, n+i, \dots, (k_i-1)n+i\}$, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, segue que

$$\begin{aligned} g(S) &= k_1 + \dots + k_{n-1} \\ &= \frac{1}{n}(k_1n + \dots + k_{n-1}n) \\ &= \frac{1}{n}(0 + (k_1n + 1) + \dots + (k_{n-1}n + n - 1)) - \frac{1}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{w \in Ap(S, n)} w \right) - \left(\frac{n-1}{2} \right). \end{aligned}$$

□

Observe que se S é um semigrupo numérico minimamente gerado por $\langle a, b \rangle$, então

$$Ap(S, a) = \{0, b, 2b, \dots, (a-1)b\},$$

e pela Proposição 1.14, temos o seguinte resultado (cujas fórmulas são devidas a Sylvester):

Proposição 1.15 *Sejam a e b inteiros positivos com $\text{mdc}\{a, b\} = 1$. Então,*

- 1) $F(\langle a, b \rangle) = ab - a - b,$
- 2) $g(\langle a, b \rangle) = \frac{ab - a - b + 1}{2}.$

Observe que para um semigrupo numérico de dimensão dois, $g(S) = \frac{F(S) + 1}{2}$ (e assim, $F(S)$ é sempre um inteiro ímpar). Isso não é válido para casos em que a dimensão é maior que dois, mas nos dá uma caracterização interessante sobre classes de semigrupos numéricos, que veremos adiante.

Se S é um semigrupo numérico e $s \in S$, então $F(S) - s \notin S$. Caso contrário, tome $F(S) - s = x \in S$. Assim, temos que $x + s \in S \Rightarrow F(S) - s + s = F(S) \in S$, o que é um absurdo. Disso, obtemos o seguinte:

Lema 1.16 *Seja S um semigrupo numérico. Então,*

$$g(S) \geq \frac{F(S) + 1}{2}.$$

Demonstração. Seja $F(S) = t$, e suponha que $g(S) < \frac{t+1}{2}$. Observe que entre 0 e t existem $t+1$ elementos, desse modo, dizer que $g(S) < \frac{t+1}{2}$ significa que a quantidade de lacunas é menor do que a metade da quantidade de elementos entre 0 e t , ou seja, entre 0 e t existem mais elementos que estão em S do que lacunas. Agora, o conjunto das lacunas está totalmente contido no intervalo entre 0 e t . Porém, sabemos que se S é um semigrupo numérico e $s \in S$, então $t - s \notin S$, isto é, para cada elemento de S que está entre 0 e t existe um elemento em $G(S)$ correspondente a ele. Assim temos uma contradição, já que a quantidade de lacunas é menor que a quantidade de elementos de S entre 0 e t . Logo, $g(S) \geq \frac{t+1}{2}$. □

Pelo lema anterior, vemos que o semigrupo numérico em que a igualdade é válida é o semigrupo numérico com a menor quantidade de lacunas possível, o que só acontece quando $F(S)$ é ímpar.

Observação 1.17 *Se fixarmos um inteiro positivo f , não é verdade que em geral existem mais semigrupos numéricos com número de Frobenius $f+1$ do que semigrupos numéricos com número de Frobenius f . A tabela a seguir mostra isso ($ns(F)$ representa a quantidade de semigrupos numéricos com número de Frobenius F , e Backelin em [10] fala sobre sua magnitude):*

F	$ns(F)$	F	$ns(F)$
1	1	20	900
2	1	21	1828
3	2	22	1913
4	2	23	4096
5	5	24	3578
6	4	25	8273
7	11	26	8175
8	10	27	16132
9	21	28	16267
10	22	29	34903
11	51	30	31822
12	40	31	70854
13	106	32	68681
14	103	33	137391
15	200	34	140661
16	205	35	292081
17	465	36	270258
18	405	37	591443
19	961	38	582453

Na tabela a seguir mostraremos os sistemas de geradores para cada semigrupo numérico com número de Frobenius fixado, onde $F(S) \in \{1, \dots, 8\}$.

F	Sistema de geradores
1	$\{2, 3\}$
2	$\{3, 4, 5\}$
3	$\{2, 5\}$ $\{4, 5, 6, 7\}$
4	$\{3, 5, 7\}$ $\{5, 6, 7, 8, 9\}$
5	$\{2, 7\}$ $\{3, 4\}$ $\{3, 7, 8\}$ $\{4, 6, 7, 9\}$ $\{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
6	$\{4, 5, 7\}$ $\{4, 7, 9, 10\}$ $\{5, 7, 8, 9, 11\}$ $\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$
7	$\{2, 9\}$ $\{3, 5\}$ $\{3, 8, 10\}$ $\{4, 5, 6\}$ $\{4, 5, 11\}$ $\{4, 6, 9, 11\}$ $\{4, 9, 10, 11\}$ $\{5, 6, 8, 9\}$ $\{5, 8, 9, 11, 12\}$ $\{6, 8, 9, 10, 11, 13\}$ $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
8	$\{3, 7, 11\}$ $\{3, 10, 11\}$ $\{5, 6, 7, 9\}$ $\{5, 6, 9, 13\}$ $\{5, 7, 9, 11, 13\}$ $\{5, 9, 11, 12, 13\}$ $\{6, 7, 9, 10, 11\}$ $\{6, 9, 10, 11, 13, 14\}$ $\{7, 9, 10, 11, 12, 13, 15\}$ $\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$

Maria Bras-Amorós em [15] computou o número de semigrupos numéricos com gênero g para $g \in \{0, \dots, 50\}$, e suas contas mostraram um comportamento do número de semigrupos numéricos com gênero fixo menor ou igual a 50 similar a uma sequência de Fibonacci. Entretanto, ainda não foi provado para o caso geral que se fixarmos um inteiro positivo g então existem mais semigrupos numéricos de gênero $g + 1$ do que de gênero g . Na tabela a seguir, reproduzimos os resultados obtidos por Maria Bras-Amorós (n_g representa a quantidade de semigrupos numéricos de gênero g):

g	n_g	$n_{g-1} + n_{g-2}$	$(n_{g-1}n_{g-2})/n_g$	n_g/n_{g-1}
0	1			
1	1			1
2	2	2	1	2
3	4	3	0.75	2
4	7	6	0.857143	1.75
5	12	11	0.916667	1.71429
6	23	19	0.826087	1.91667
7	39	35	0.897436	1.69565
8	67	62	0.925373	1.71795
9	118	106	0.898305	1.76119
10	204	185	0.906863	1.72881
11	343	322	0.938776	1.68137
12	592	547	0.92398	1.72595
13	1001	935	0.934066	1.69088
14	1693	1593	0.940933	1.69131
15	2857	2694	0.942947	1.68754
16	4806	4550	0.946733	1.68218
17	8045	7663	0.952517	1.67395
18	13467	12851	0.954259	1.67396
19	22464	21512	0.957621	1.66808
20	37396	35931	0.960825	1.66471
21	62194	59860	0.962472	1.66312
22	103246	99590	0.964589	1.66006
23	170963	165440	0.967695	1.65588
24	282828	274209	0.969526	1.65432
25	467224	453791	0.971249	1.65197
26	770832	750052	0.973042	1.64981
27	1270267	1238056	0.974642	1.64792
28	2091030	2041099	0.976121	1.64613
29	3437839	3361297	0.977735	1.64409
30	5646773	5528869	0.979120	1.64254
31	9266788	9084612	0.980341	1.64108
32	15195070	14913561	0.981474	1.63973
33	24896206	24461858	0.982554	1.63844
34	40761087	40091276	0.983567	1.63724
35	66687201	65657293	0.984556	1.63605
36	109032500	107448288	0.985470	1.63498
37	178158289	175719701	0.986312	1.63399
38	290939807	287190789	0.987114	1.63304
39	474851445	469098096	0.987884	1.63213
40	774614284	765791252	0.988610	1.63128
41	1262992840	1249465729	0.989290	1.63048
42	2058356522	2037607124	0.989919	1.62975
43	3353191846	3321349362	0.990504	1.62906
44	5460401576	5411548368	0.991053	1.62842
45	8888486816	8813593422	0.991574	1.62781
46	14463633648	14348888392	0.992067	1.62723

47	23527845502	23352120464	0.992531	1.62669
48	38260496374	37991479150	0.992969	1.62618
49	62200036752	61788341876	0.993381	1.62570
50	101090300128	100460533126	0.993770	1.62525

Na tabela a seguir mostraremos os sistemas de geradores para cada semigrupo numérico com gênero fixado, onde $g(S) \in \{1, \dots, 5\}$.

$g(S)$	Sistema de geradores
0	$\{1\}$
1	$\{2, 3\}$
2	$\{2, 5\}$ $\{3, 4, 5\}$
3	$\{2, 7\}$ $\{3, 4\}$ $\{3, 5, 7\}$ $\{4, 5, 6, 7\}$
4	$\{2, 9\}$ $\{3, 5\}$ $\{3, 7, 8\}$ $\{4, 5, 6\}$ $\{4, 5, 7\}$ $\{4, 6, 7, 9\}$ $\{5, 6, 7, 8, 9\}$
5	$\{2, 11\}$ $\{3, 7, 11\}$ $\{3, 8, 10\}$ $\{4, 5, 11\}$ $\{4, 6, 7\}$ $\{4, 6, 9, 11\}$ $\{4, 7, 9, 10\}$ $\{5, 6, 7, 8\}$ $\{5, 6, 7, 9\}$ $\{5, 6, 8, 9\}$ $\{5, 7, 8, 9, 11\}$ $\{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

Lema 1.18 *Sejam S um semigrupo numérico gerado por $\{n_1, \dots, n_p\}$, $d = \text{mdc}\{n_1, \dots, n_{p-1}\}$ e o conjunto $T = \langle n_1/d, \dots, n_{p-1}/d, n_p \rangle$. Então,*

$$Ap(S, n_p) = d(Ap(T, n_p)).$$

Demonstração. Se $w \in Ap(S, n_p)$, então $w \in \langle n_1, \dots, n_{p-1} \rangle$. Consequentemente, $w/d \in \langle n_1/d, \dots, n_{p-1}/d \rangle \subseteq T$. Se $w/d - n_p \in T$, temos que $w - dn_p \in S \Rightarrow w - dn_p + (d-1)n_p \in S \Rightarrow w - n_p \in S$, o que é impossível, pois $w \in Ap(S, n_p)$. Logo, $w/d \in Ap(T, n_p)$, e assim, $w \in d(Ap(T, n_p))$, isto é, $Ap(S, n_p) \subseteq d(Ap(T, n_p))$.

Por outro lado, seja $w \in Ap(T, n_p)$. Então, $w \in \langle n_1/d, \dots, n_{p-1}/d \rangle$, daí $dw \in \langle n_1, \dots, n_{p-1} \rangle$. Se $dw - n_p \in S$, existem $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \in \mathbb{N}$ tais que

$$dw - n_p = \lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_p n_p \Rightarrow dw = (\lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_{p-1} n_{p-1}) + (\lambda_p + 1) n_p.$$

Agora, como S é um semigrupo numérico, $\text{mdc}\{n_1, \dots, n_p\} = 1 \Rightarrow \text{mdc}\{d, n_p\} = 1$, assim $d | (\lambda_p + 1)$, e temos que

$$w = \frac{\lambda_1 n_1}{d} + \dots + \frac{\lambda_{p-1} n_{p-1}}{d} + \frac{(\lambda_p + 1)}{d} n_p,$$

onde $\frac{(\lambda_p + 1)}{d} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, contradizendo o fato de que $w \in \text{Ap}(T, n_p)$, pois se chamarmos $\frac{(\lambda_p + 1)}{d} = k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, temos que $k - 1 \in \mathbb{N}$, desse modo,

$$w - n_p = \frac{\lambda_1 n_1}{d} + \dots + \frac{\lambda_{p-1} n_{p-1}}{d} + (k - 1) n_p \in T.$$

Assim, $dw \in \text{Ap}(S, n_p) \Rightarrow d(\text{Ap}(T, n_p)) \subseteq \text{Ap}(S, n_p) \Rightarrow \text{Ap}(S, n_p) = d(\text{Ap}(T, n_p))$. \square

Proposição 1.19 *Seja S um semigrupo numérico gerado minimamente por $\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$. Sejam $d = \text{mdc}\{n_1, \dots, n_{p-1}\}$ e o conjunto $T = \langle n_1/d, \dots, n_{p-1}/d, n_p \rangle$. Então,*

- 1) $F(S) = dF(T) + (d - 1)n_p$,
- 2) $g(S) = dg(T) + \frac{(d - 1)(n_p - 1)}{2}$.

Demonstração. 1) Sabemos que $F(T) = (\max \text{Ap}(T, n_p)) - n_p$, e $F(S) = (\max \text{Ap}(S, n_p)) - n_p$. Agora,

$$\max \text{Ap}(S, n_p) = d(\max \text{Ap}(T, n_p)),$$

logo, $F(S) = dF(T) + dn_p - n_p = dF(T) + (d - 1)n_p$.

2) Sabemos que $g(T) = \frac{1}{n_p} \left(\sum_{w \in \text{Ap}(T, n_p)} w \right) - \frac{n_p - 1}{2}$ e $g(S) = \frac{1}{n_p} \left(\sum_{w \in \text{Ap}(S, n_p)} w \right) - \frac{n_p - 1}{2}$, onde

$$\frac{1}{n_p} \left(\sum_{w \in \text{Ap}(S, n_p)} w \right) = \frac{1}{n_p} \left(\sum_{w \in \text{Ap}(T, n_p)} dw \right),$$

logo, $g(S) = dg(T) + \frac{dn_p - d}{2} - \frac{n_p - 1}{2} = dg(T) + \frac{(d - 1)(n_p - 1)}{2}$. \square

Exemplo 1.20 *Seja $S = \langle 18, 30, 19 \rangle$. Como $\text{mdc}\{18, 30\} = 6$, $T = \langle 3, 5, 19 \rangle = \langle 3, 5 \rangle$, $F(T) = 7$ e $g(T) = 4$. Assim, $F(S) = 6F(T) + 5 \cdot 19 = 42 + 95 = 137$, e $g(S) = 6g(T) + \frac{5 \cdot 18}{2} = 24 + 45 = 69$.*

1.1.4 Números Pseudo-Frobenius

Seja S um semigrupo numérico em \mathbb{N} . Dizemos que um inteiro x é um *número pseudo-Frobenius* se $x \notin S$ e $x + s \in S$, para todo $s \in S^*$. Vamos denotar por $PF(S)$ o conjunto de todos os números pseudo-Frobenius de S , e sua cardinalidade será conhecida como o *tipo* de S , e denotada por $t(S)$.

Da definição, segue que $F(S) \in PF(S)$, sendo o maior elemento desse conjunto.

Sobre o conjunto dos inteiros, podemos definir a relação: $a \leq_S b$ se $b - a \in S$. Como S é um semigrupo numérico, temos que a relação é:

- reflexiva, pois $a \leq_S a$, já que $a - a = 0 \in S$;
- transitiva, pois se $x \leq_S y$ e $y \leq_S z$, então $y - x \in S$ e $z - y \in S$, logo, $z - x = (z - y) + (y - x) \in S$, assim, $x \leq_S z$;

• antissimétrica, pois se $x \leq_S y$ e $y \leq_S x$, então $y - x \in S \subseteq \mathbb{N}$ e $x - y \in S \subseteq \mathbb{N}$, o que implica que $y - x \geq 0$ e $x - y \geq 0$, logo $x = y$.

Assim, a relação \leq_S é uma relação de ordem. Pela definição de números pseudo-Frobenius, obtemos que eles serão os elementos maximais de $\mathbb{Z} \setminus S$ com respeito à ordem \leq_S (\mathbb{Z} denota o conjunto de números inteiros).

Proposição 1.21 *Seja S um semigrupo numérico. Então,*

- 1) $PF(S) = \text{Maximais}_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$,
- 2) $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ se, e somente se, $f - x \in S$, para algum $f \in PF(S)$.

Demonstração. 1) Seja $x \in PF(S)$. Então, $x \notin S$ e $x + s \in S$, para todo $s \in S^*$. Suponha que existe $y \in \mathbb{Z} \setminus S$, $y \neq x$ tal que $x \leq_S y$. Desse modo, $y - x \in S \Rightarrow y = x + (y - x) \in S$, pois $x \in PF(S)$, contradizendo a escolha de y . Assim, $PF(S) \subseteq \text{Max}_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$.

Por outro lado, seja $x \in \text{Max}_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$. Temos que $x \notin S$ e existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $y \leq_S x$, daí $x - y \in S$. Agora, se $s \in S^*$, então $x + s \in S$, caso contrário, $x \leq_S x + s$, já que $x + s - x = s \in S$, o que é impossível, pois x é maximal em $\mathbb{Z} \setminus S$. Portanto, $PF(S) = \text{Max}_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$.

2) Se $x \in \mathbb{Z} \setminus S$, basta mostrar o caso em que $x > 0$, já que se $x < 0$, então $f = F(S)$. Além disso, se $x \in PF(S)$, como \leq_S é reflexiva, $f = x$. Agora, tomando $x \notin PF(S)$, pelo item anterior, existe $x_1 \in G(S)$ tal que $x \leq_S x_1$. Observe que se $x_1 \in PF(S)$, concluímos a ida da demonstração. Caso contrário, como $G(S)$ é finito, existe uma sequência $x \leq_S x_1 \leq_S x_2 \leq_S \dots \leq_S x_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $x_n \in PF(S)$, e como \leq_S é transitiva, $x \leq_S x_n$.

Por outro lado, seja $f - x \in S$ para algum $f \in PF(S)$. Então, se $x \in S$, temos que $f = (f - x) + x \in S$, o que é absurdo, pois $f \in PF(S)$. Assim, $x \notin S$, concluindo que $x \in \mathbb{Z} \setminus S$. \square

Este resultado estabelece um tipo de dualidade entre geradores minimais e números pseudo-Frobenius de um semigrupo numérico, já que $\text{Minimais}_{\leq_S}(S \setminus \{0\})$ é o sistema de geradores minimal de S .

Proposição 1.22 *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Então,*

$$PF(S) = \{w - n \mid w \in \text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, n)\}.$$

Demonstração. Seja $x \in PF(S)$. Como $x \notin S$ e $x + n \in S$, temos que $x + n \in \text{Ap}(S, n)$. Seja $w \in \text{Ap}(S, n)$ tal que $x + n \leq_S w \Rightarrow w - (x + n) = w - n - x \in S \Rightarrow w - n = x + s$, para algum $s \in S$. Como $w - n \notin S$ e $x \in PF(S)$, temos que $s = 0$, e logo $w = x + n$.

Tome agora $w \in \text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, n)$. Então, $w - n \notin S$. Se $w - n + s \notin S$ para algum $s \in S^*$, então $w + s \in \text{Ap}(S, n)$, contradizendo a maximalidade de w . \square

Exemplo 1.23 *Tomando $\langle 4, 5, 7 \rangle = \{0, 4, 5, 7, \rightarrow\}$, $\text{Ap}(S, 4) = \{0, 5, 7, 10\}$ e $\text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, 4) = \{7, 10\}$. Assim, $PF(S) = \{3, 6\}$.*

Exemplo 1.24 *Seja S um semigrupo numérico minimamente gerado por $\langle a, b \rangle$. Como visto anteriormente,*

$$\text{Ap}(S, a) = \{0, b, 2b, \dots, (a - 1)b\}.$$

Isso implica que $\text{Max}_{\leq_S} \text{Ap}(S, a) = \{(a - 1)b\}$, e $PF(S) = \{ab - a - b\}$. Desse modo, semigrupos numéricos de dimensão dois possuem tipo um.

Como a cardinalidade de $\text{Ap}(S, n)$ é n e o 0 nunca é um elemento maximal, obtemos a seguinte cota para o tipo de um semigrupo numérico.

Corolário 1.25 *Seja S um semigrupo numérico. Então,*

$$t(S) \leq m(S) - 1.$$

Relembre que a dimensão de um semigrupo numérico não excede a multiplicidade. Além disso, já sabemos que semigrupos numéricos de dimensão dois possuem tipo um. Veremos nos capítulos seguintes que semigrupos com dimensão três possuem tipo um, ou dois. No entanto, para dimensões maiores que três, o tipo não é limitado superiormente pela dimensão, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.26 *Sejam $n \geq 2$ e $r \geq 3n + 2$ dados, $s = r(3n + 2) + 3$ e $S = \langle s, s + 3, s + 3n + 1, s + 3n + 2 \rangle$. Seja $M = \{(r + 1)s + i \mid -2 \leq i \leq 3n - 1, \text{onde } 3 \nmid i\}$. Deseja-se mostrar que $M \subseteq PF(S)$. Façamos uma listagem dos elementos de S como combinação de $r + 1$ geradores mínimos:*

- $s, s + 3, s + 3n + 1, s + 3n + 2$;
- $2s, 2s + 3, 2s + 6, 2s + 3n + 1, 2s + 3n + 2, 2s + 3n + 4, 2s + 3n + 5, 2s + 6n + 2, 2s + 6n + 3, 2s + 6n + 4$;

⋮

- $rs, (r - 1)s + s + 3, \dots, r(s + 3n + 2) = (r + 1)s - 3$;

- $(r + 1)s, \dots, (r + 1)(s + 3n + 2) = (r + 2)s + 3n - 1$.

Desse modo, observe que se $x \in S$, com $x < (r + 2)s$, então x deve ser a soma de exatamente $\lceil x/s \rceil$ geradores, e além disso, $M \cap S = \emptyset$. Agora, vamos provar que $M + x \subseteq S$, para cada gerador x de S . Para $x = s$ devemos ter que $(r + 1)s + s + i \in S$, com $-2 \leq i \leq 3n - 1$. Daí, observe que $(r + 1)(s + 3n + 1) < (r + 2)s - 2 < (r + 2)s + 3n - 1 = (r + 1)(s + 3n + 2)$, sendo que o intervalo $[(r + 1)(s + 3n + 1), (r + 1)(s + 3n + 2)]$ está contido em S , logo $M + s \subseteq S$. Mais ainda, note que $(r + 2)s + 3n + k \in S$, para cada $k \in \mathbb{N}$, já que $(r + 2)s + 3n$ é uma combinação de s e $s + 3$, $(r + 2)s + 3n + 1 = (r + 1)s + (s + 3n + 1)$, $(r + 2)s + 3n + 2 = (r + 1)s + (s + 3n + 2)$, $(r + 2)s + 3n + 3$ é soma de s e $s + 3$, $(r + 2)s + 3n + 4 = rs + (s + 3) + (s + 3n + 1)$, e assim por diante. Consequentemente, $M + x \subseteq S$, para cada gerador x de S , concluindo que $M \subseteq PF(S)$ e $t(S) \geq 2n + 2$.

O Exemplo 2.24 do livro [12] conclui que o tipo de S é igual a $2n + 3$, no entanto, usando o Magma [7] online, para $n = 2$, $r = 8$ e $s = 67$, temos o semigrupo $S = \langle 67, 70, 74, 75 \rangle$, cujo tipo é igual a $8 > 7 = 2 \cdot 2 + 3$.

Exemplo 1.27 *Seja $m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$. Observe que para $S = \{0, m, \rightarrow\}$, $PF(S) = \{1, 2, \dots, m - 1\}$. Esses semigrupos atingem o limite dado no Corolário 1.25.*

Seja S um semigrupo numérico. Denote por

$$N(S) = \{s \in S \mid s < F(S)\}.$$

Esse conjunto determina inteiramente S , já que todos os elementos maiores que $F(S)$ pertencem a S . Sua cardinalidade será denotada por $n(S)$. Claramente, $g(S) + n(S) = F(S) + 1$.

Nós já sabemos que se x é um inteiro que não pertence S , existe $f \in PF(S)$ tal que $x \leq_S f$. Defina $f_x = \min\{f \in PF(S) \mid f - x \in S\}$. Então a função

$$G(S) \rightarrow PF(S) \times N(S), x \mapsto (f_x, f_x - x)$$

é injetora, o que prova o seguinte resultado.

Proposição 1.28 *Seja S um semigrupo numérico. Então,*

$$g(S) \leq t(S)n(S).$$

Essa desigualdade é equivalente a $F(S) + 1 \leq (t(S) + 1)n(S)$. Wilf em [9] conjecturou que $F(S) + 1 \leq e(S)n(S)$, o que é verdadeiro para algumas famílias de semigrupos numéricos, mas para o caso geral ainda não foi provado. Este problema, chamado de conjectura de Wilf, é um dos mais desafiadores da área.

1.2 Semigrupos Numéricos com Dimensão Máxima

1.2.1 Caracterizações

Seja S um semigrupo numérico. Sabemos que $e(S) \leq m(S)$, pela Proposição 1.12. Assim, dizemos que S possui dimensão máxima se $e(S) = m(S)$. Nesta seção, daremos várias caracterizações das propriedades em termos dos elementos notáveis apresentados na primeira seção deste trabalho.

Se x é um gerador minimal de S , e $n \in S \setminus \{0, x\}$, então, $x - n \notin S$, caso contrário teríamos que $x = (x - n) + n \in (S^* + S^*)$, logo $x \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$, e já vimos que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é o sistema de geradores minimal de S . Assim, temos que $x \in Ap(S, n)$.

Proposição 1.29 *Seja S um semigrupo numérico minimamente gerado por $\{n_1 < n_2 < \dots < n_e\}$. Então, S possui dimensão máxima se, e só se, $Ap(S, n_1) = \{0, n_2, \dots, n_e\}$.*

Demonstração. Como vimos anteriormente, se x é um gerador minimal de S , então temos que $x \in Ap(S, n)$, logo $\{n_2, \dots, n_e\} \subseteq Ap(S, n_1) \setminus \{0\}$. Sabemos que a cardinalidade de $Ap(S, n_1)$ é n_1 , desse modo, $e = n_1$ se, e somente se, $\{0, n_2, \dots, n_e\} = Ap(S, n_1)$. \square

Como consequência das Proposições 1.14, 1.22 e 1.29, obtemos:

Corolário 1.30 *Seja S um semigrupo numérico minimamente gerado por $\{n_1 < n_2 < \dots < n_e\}$. Então,*

- 1) *Se S possui dimensão máxima, temos que $F(S) = n_e - n_1$;*
- 2) *S possui dimensão máxima se, e somente se, $g(S) = \frac{1}{n_1}(n_2 + \dots + n_e) - \frac{n_1 - 1}{2}$;*
- 3) *S possui dimensão máxima se, e somente se, $t(S) = n_1 - 1$.*

Exemplo 1.31 *O semigrupo numérico $S = \langle 5, 6, 9, 13 \rangle$ possui $F(S) = 8 = 13 - 5 = n_e - n_1$, mas não possui dimensão máxima, o que significa que a volta do item 1 do corolário anterior nem sempre é válida.*

Observação 1.32 *Seja S um semigrupo numérico minimamente gerado por $\{n_1 < n_2 < \dots < n_e\}$.*

1) *Já sabemos que $t(S) \leq m(S) - 1$. Então os semigrupos numéricos com dimensão máxima também são os que possuem tipo máximo (em termos de sua multiplicidade).*

2) *Por $g(S) = \frac{1}{n_1}(n_2 + \dots + n_e) - \frac{n_1 - 1}{2}$, temos que semigrupos numéricos com dimensão máxima também podem ser vistos como aqueles que possuem a menor quantidade possível de lacunas (em termos dos seus geradores minimais).*

Dados um inteiro não nulo n e dois inteiros a e b , vamos escrever $a \equiv b \pmod n$ para denotar que n divide $(a - b)$. Denotamos por $b \pmod n$ o resto da divisão de b por n . O seguinte resultado caracteriza os subconjuntos de inteiros positivos que podem ser vistos como conjuntos de Apery de um semigrupo numérico.

Proposição 1.33 *Sejam $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $C = \{w(0) = 0, w(1), \dots, w(n - 1)\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $w(i) \equiv i \pmod n$, para todo $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Seja S o semigrupo numérico $\langle \{n\} \cup C \rangle$. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- 1) $Ap(S, n) = C$.
- 2) Para todos $i, j \in \{1, \dots, n - 1\}$, $w(i) + w(j) \geq w((i + j) \pmod n)$.

Demonstração. Note que $w(i) + w(j)$ e $w((i + j) \bmod n)$ são congruentes módulo n , para todos $i, j \in \{1, \dots, n - 1\}$. Assim, a condição 2 é equivalente a

2') para todos $i, j \in \{1, \dots, n - 1\}$, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $w(i) + w(j) = tn + w((i + j) \bmod n)$.

Se $Ap(S, n) = C$, pelo Lema 1.8, $w(i) + w(j) = kn + c$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e $c \in C$. Claramente, $w(i) + w(j) \equiv c \pmod{n}$, e assim, $c = w((i + j) \bmod n)$.

Agora, assumamos que a segunda condição é válida. Vamos mostrar que $Ap(S, n) \subseteq C$. Se $s \in Ap(S, n) \subseteq S$, então existem $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{N}$ e $c_1, \dots, c_t \in C$ tais que $s = \sum_{i=1}^t \lambda_i c_i$. Aplicando a condição 2' repetidas vezes, temos que $s = kn + c$, onde $c \in C$ e $k \in \mathbb{N}$. Como $s \in Ap(S, n)$, então k deve ser 0, portanto, $s = c \in C$.

Por fim, pelo Lema 1.6, a cardinalidade de $Ap(S, n)$ é n . Como a cardinalidade de C é n e $Ap(S, n) \subseteq C$, então $Ap(S, n) = C$. \square

Como visto na Proposição 1.29, o conjunto de Apéry da multiplicidade em semigrupos numéricos com dimensão máxima possui características especiais. Isto, juntamente com a última caracterização de conjuntos de Apéry, nos dá um modo alternativo de distinguir semigrupos numéricos com dimensão máxima olhando o conjunto de Apéry com sua multiplicidade.

Corolário 1.34 *Seja S um semigrupo numérico com multiplicidade m e assumamos que $Ap(S, m) = \{w(0) = 0, w(1), \dots, w(m - 1)\}$, com $w(i) \equiv i \pmod{m}$ para todo $i \in \{1, \dots, m - 1\}$. Então, S possui dimensão máxima se, e somente se, para todos $i, j \in \{1, \dots, m - 1\}$, $w(i) + w(j) > w((i + j) \bmod m)$.*

Demonstração. A ida segue direto das Proposições 1.29 e 1.33. Agora, pelo Lema 1.8, sabemos que $S = \langle m, w(1), \dots, w(m - 1) \rangle$. Pela condição de que $w(i) + w(j) > w((i + j) \bmod m)$, deduzimos que $\{m, w(1), \dots, w(m - 1)\}$ é um sistema de geradores minimal de S . Então, S possui dimensão máxima. \square

Corolário 1.35 *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Então, $\langle n, w(1) + n, \dots, w(n - 1) + n \rangle$ é um semigrupo numérico com dimensão máxima, onde para todo $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, $w(i) \in Ap(S, n)$, $w(i) \equiv i \pmod{n}$.*

Demonstração. Chamemos de H o conjunto $\langle n, w(1) + n, \dots, w(n - 1) + n \rangle$. Como $w(i) > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, temos que $w(i) + n > n$, o que significa que $m(H) = n$. Mostremos então que $Ap(H, n) = \{0, w(1) + n, \dots, w(n - 1) + n\} = \{0, r(1), \dots, r(n - 1)\}$, onde $r(i) = w(i) + n$, para todo $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Para isso, observe que $Ap(S, n) = \{0, w(1), \dots, w(n - 1)\}$, assim, pela Proposição 1.33, temos que

$$\begin{aligned} r(i) + r(j) &= (w(i) + n) + (w(j) + n) \\ &= (w(i) + w(j)) + 2n \\ &\geq w((i + j) \bmod n) + 2n \\ &= (w((i + j) \bmod n) + n) + n \\ &= r((i + j) \bmod n) + n \\ &> r((i + j) \bmod n), \end{aligned}$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n - 1\}$. Desse modo, pelo Corolário 1.34 segue que H é um semigrupo numérico de dimensão máxima. \square

Exemplo 1.36 *Seja $S = \langle 4, 5, 11 \rangle = \{0, 4, 5, 8, 10, 11, \rightarrow\}$. Então, $Ap(S, 5) = \{0, 4, 8, 11, 12\}$, e pelo Corolário 1.35 temos que $T = \langle 5, 9, 13, 16, 17 \rangle$ é um semigrupo numérico de dimensão máxima.*

Exemplo 1.37 *Seja a e b dois inteiros positivos maiores que 1 com $\text{mdc}\{a, b\} = 1$. Já sabemos que $Ap(\langle a, b \rangle, a) = \{0, b, 2b, \dots, (a - 1)b\}$. Pelo Corolário 1.35,*

$$\langle a, a + b, a + 2b, \dots, a + (a - 1)b \rangle$$

é um semigrupo numérico com dimensão máxima.

Corolário 1.38 *Seja S um semigrupo numérico com dimensão máxima e multiplicidade m . Para todo $i \in \{1, \dots, m-1\}$, escreva $w(i)$ como sendo o único elemento de $Ap(S, m)$ congruente a i módulo m . Definindo o conjunto $T = \langle m, w(1) - m, \dots, w(m-1) - m \rangle$, então temos que T é um semigrupo numérico e $Ap(T, m) = \{0, w(1) - m, \dots, w(m-1) - m\}$.*

Demonstração. Primeiramente, observe que faz sentido construir o conjunto $\langle m, w(1) - m, \dots, w(m-1) - m \rangle$, pois m é a multiplicidade de S , o que significa que $m \leq x$, para todo $x \in S^*$, logo $w(i) - m > 0$, para todo $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Assim, temos que T é um submonoide de \mathbb{N} . Além disso, $w(i) = (w(i) - m) + m \in T$, para todo $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Desse modo, $\langle m \cup Ap(S, m) \rangle \subset T$, isto é, $S \subset T$, obtendo assim que T também possui complemento finito, e então T é um semigrupo numérico. Mostremos agora que $Ap(T, m) = \{0, w(1) - m, \dots, w(m-1) - m\}$. Chame $w(i) - m = r(i)$, para todo $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Daí, como S possui dimensão máxima, pelo Corolário 1.34 segue que $w(i) + w(j) > w((i+j) \bmod m)$, para todos $i, j \in \{1, \dots, m-1\}$. Em outras palavras, $w(i) + w(j) = km + w((i+j) \bmod m)$, onde k é um inteiro positivo. Desse modo,

$$\begin{aligned} r(i) + r(j) &= (w(i) - m) + (w(j) - m) \\ &= (w(i) + w(j)) - 2m \\ &= km + w((i+j) \bmod m) - 2m \\ &\geq w((i+j) \bmod m) - m \\ &= r((i+j) \bmod m). \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 1.33, $Ap(T, m) = \{0, w(1) - m, \dots, w(m-1) - m\}$. \square

Corolário 1.39 *Existe uma correspondência um a um entre o conjunto dos semigrupos com multiplicidade m e número de Frobenius f , e o conjunto dos semigrupos numéricos de dimensão máxima que possuem número de Frobenius $f + m$, multiplicidade m , e cujos geradores minimais diferentes de m são maiores que $2m$.*

Demonstração. Seja S um semigrupo numérico com $m(S) = m$ e $F(S) = f$. Pelo Corolário 1.35, $T = \langle m, w(1) + m, \dots, w(m-1) + m \rangle$ é um semigrupo numérico de dimensão máxima, onde $m(T) = m$, e, como $w(i) > m$, para todo $i \in \{1, \dots, m-1\}$, então $w(i) + m > m + m = 2m$. Além disso, $Ap(T, m) = \{0, w(1) + m, \dots, w(m-1) + m\}$, logo

$$\begin{aligned} F(T) &= \max(Ap(T, m)) - m \\ &= (\max(Ap(S, m)) + m) - m \\ &= (\max(Ap(S, m)) - m) + m \\ &= F(S) + m = f + m. \end{aligned}$$

Por outro lado, se T é um semigrupo numérico com dimensão máxima e tal que $m(T) = m$, $F(T) = f + m$ e cujos geradores minimais diferentes de m são maiores que $2m$, então, pelo Corolário 1.38 segue que $S = \langle m, w(1) - m, \dots, w(m-1) - m \rangle$ é um semigrupo numérico com $m(S) = m$, já que $w(i) - m > 2m - m = m$, para todo $i \in \{1, \dots, m-1\}$, e

$$\begin{aligned} F(S) &= \max(Ap(S, m)) - m \\ &= (\max(Ap(T, m)) - m) - m \\ &= F(T) - m = f + m - m = f. \end{aligned}$$

□

Observação 1.40 *Se quisermos construir o conjunto de todos os semigrupos numéricos, segundo o Corolário 1.39, basta construir o conjunto dos semigrupos que possuem dimensão máxima. Em outras palavras, semigrupos de dimensão máxima podem ser usados para representar todas as classes de semigrupos numéricos.*

Também existe uma correspondência um a um entre o conjunto dos semigrupos com multiplicidade m e gênero g , e o conjunto dos semigrupos numéricos de dimensão máxima que possuem gênero $g + m - 1$, multiplicidade m , e cujos geradores minimais diferentes de m são maiores que $2m$. Essa é a Proposição 20 do artigo [17].

Proposição 1.41 *Seja S um semigrupo numérico. As seguintes condições são equivalentes:*

- 1) S possui dimensão máxima.
- 2) Para todos $x, y \in S^*$, $x + y - m(S) \in S$.
- 3) $-m(S) + S^*$ é um semigrupo numérico.

Demonstração. 1) \Rightarrow 2) Observe que se $x - m(S) \in S$ ou $y - m(S) \in S$, então como S é fechado com a soma temos $x + y - m(S) \in S$. Suponha que $x - m(S) \notin S$ e $y - m(S) \notin S$, ou seja, $x, y \in Ap(S, m(S))$. Daí, pelo Corolário 1.34 temos que $x + y > z$, onde z é o único elemento do conjunto $Ap(S, m(S))$ congruente a $x + y$ módulo $m(S)$, o que significa que $x + y \notin Ap(S, m(S))$, logo $x + y - m(S) \in S$.

2) \Rightarrow 3) Note que se $x \in S^*$, então $x - m(S) \geq 0$. Tomando $x, y \in -m(S) + S^*$, existem $a, b \in S^*$ tais que $x = a - m(S)$ e $y = b - m(S)$. Logo,

$$\begin{aligned} x + y &= (a - m(S)) + (b - m(S)) \\ &= (a + b - m(S)) - m(S), \end{aligned}$$

onde $a + b - m(S) \in S$ por hipótese, o que significa que $a + b - m(S) \in S^*$ ou $a + b - m(S) = 0$. Se $a + b - m(S) \in S^*$ teremos que $(a + b - m(S)) - m(S) \in -m(S) + S^*$, assim $-m(S) + S^*$ é fechado para a soma. Agora, observe que $a + b - m(S)$ não pode ser igual a 0, caso contrário, $a + b = m(S)$, o que não é possível, pois $a, b \in S^*$, então $a \geq m(S)$ e $b \geq m(S)$. Além disso, $0 \in -m(S) + S^*$, já que $0 = m(S) - m(S)$. Desse modo, $-m(S) + S^*$ é um submonoide de \mathbb{N} . Por fim, se $w(i) \in Ap(S, m) \setminus \{0\}$, então $w(i) + m(S) \in S^*$, e $-m(S) + (w(i) + m(S)) = w(i)$, e $m(S) = (m(S) + m(S)) - m(S)$, ou seja, $\{\{m(S)\} \cup Ap(S, m(S))\} \subset -m(S) + S^*$, daí $S \subset -m(S) + S^*$, e concluímos que $-m(S) + S^*$ é um semigrupo numérico.

3) \Rightarrow 1) Denote por $w(i)$ o único elemento de $Ap(S, m(S))$ congruente a i módulo $m(S)$, com $i \in \{1, \dots, m - 1\}$. Se $w(i) + w(j) = w((i + j) \bmod m(S))$, $i, j \in \{1, \dots, m(S) - 1\}$, então $w(i) - m(S) + w(j) - m(S) = w((i + j) \bmod m(S)) - 2m(S) \notin \{x - m(S) | x \in S^*\}$, contrariando o fato de que $-m(S) + S^*$ é um semigrupo numérico. Portanto, $w(i) + w(j) > w((i + j) \bmod m(S))$, e pelo Corolário 1.34 segue que S possui dimensão máxima. □

Observe que se denotarmos o conjunto $-m(S) + S^*$ por T , então $S = (m(S) + T) \cup \{0\}$. A partir disso, conseguimos a seguinte caracterização.

Corolário 1.42 *Seja S um semigrupo numérico. Então S possui dimensão máxima se, e somente se, existe um semigrupo numérico T e $t \in T^*$ tal que $S = (t + T) \cup \{0\}$.*

Demonstração. Supondo que S é um semigrupo numérico com dimensão máxima, então, pela Proposição 1.41, $-m(S) + S^*$ é um semigrupo numérico, com $m(S) \in -m(S) + S^*$. Desse modo, tomando $T = -m(S) + S^*$, temos que $S = (m(S) + T) \cup \{0\}$. Por outro lado, suponha que existe um semigrupo T e $t \in T^*$ tal que $S = (t + T) \cup \{0\}$. É claro que $m(S) = t$, mostremos então que $e(S) = t$. Para isso, observe que $\langle t, t + w(1), \dots, t + w(t - 1) \rangle \subset (t + T) \cup \{0\}$, onde $w(i) \in Ap(T, t)$, para todo $i \in \{1, \dots, t - 1\}$. Agora, se $x \in (t + T)$, existe $a \in T$ tal que $x = a + t$. Pelo Lema 1.8 segue que $a = kt + w(i)$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $w(i) \in Ap(T, t)$, logo

$$x = a + t = (kt + w(i)) + t = (k + 1)t + w(i) \in \langle t, t + w(1), \dots, t + w(t - 1) \rangle.$$

Desse modo, $S \subset \langle t, t + w(1), \dots, t + w(t - 1) \rangle$, o que significa que esses dois semigrupos numéricos são iguais. Agora, sabemos que $\langle t, t + w(1), \dots, t + w(t - 1) \rangle$ possui dimensão máxima, pelo Corolário 1.35, portanto, S é um semigrupo numérico de dimensão máxima. \square

Exemplo 1.43 Se $S = \langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow\}$, então $(8 + S) \cup \{0\} = \{0, 8, 11, 13, 14, 16, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico com dimensão máxima, onde $(8 + S) \cup \{0\} = \langle 8, 11, 13, 14, 17, 18, 20, 23 \rangle$.

Lema 1.44 Sejam S e T semigrupos numéricos, $s \in S^*$, e $t \in T^*$. Então, $(s + S) \cup \{0\} = (t + T) \cup \{0\}$ se, e somente se, $S = T$ e $s = t$.

Demonstração. Chamando $H_1 = (s + S) \cup \{0\}$ e $H_2 = (t + T) \cup \{0\}$, suponha que $H_1 = H_2$. Então, $s = m(H_1) = m(H_2) = t$, ou seja, $s = t$. Agora, $S = -s + (s + S) = -s + (t + T) = -t + (t + T) = T$. Assim, $S = T$ e $s = t$. Observe agora que a volta segue de forma trivial, concluindo assim a demonstração. \square

Seja S um semigrupo numérico. Um *ideal relativo* I de S é um subconjunto de \mathbb{Z} tal que $I + S \subset I$ e $s + I = \{s + i \mid i \in I\} \subset S$, para algum $s \in S$. Um *ideal* de S é um ideal relativo de S que está contido em S .

Observe que se S é um semigrupo numérico, e $s \in S^*$, então $s + S$ é um ideal de S . Esse tipo de ideal é chamado *ideal principal* de S . Semigrupos numéricos da forma $(x + S) \cup \{0\}$, onde S é um semigrupo numérico e $x \in S^*$, são chamados *pi-semigrupos*. Desse modo, podemos definir o conjunto

$$\mathcal{PI}(S) = \{(x + S) \cup \{0\} \mid x \in S^*\}.$$

Se $x \neq 1$ e $h \neq 0$ não pertence a $(x + S) \cup \{0\}$, então $h \notin (x + S)$, logo $h < x$ ou não existe $s \in S$ tal que $h = x + s$, isto é, $h - x \in G(S)$. Note que $h \leq F(S)$ em ambos os casos, e como $F(S) + x \in G((x + S) \cup \{0\})$, segue que $F((x + S) \cup \{0\}) = F(S) + x$. Por outro lado, se $y \in G(S)$, temos que $y + x \notin (x + S) \cup \{0\}$, desse modo, como $m((x + S) \cup \{0\}) = x$, concluímos que $g((x + S) \cup \{0\}) = g(S) + x - 1$. Daí, é fácil ver que se S_1 e S_2 são dois elementos de $\mathcal{PI}(S)$, então $S_1 = S_2$ se, e somente se, $F(S_1) = F(S_2)$ e $g(S_1) = g(S_2)$.

Proposição 1.45 O conjunto $\{\mathcal{PI}(S) \mid S \text{ é um semigrupo numérico}\}$ é uma partição do conjunto dos semigrupos numéricos com dimensão máxima.

Demonstração. Segue do Corolário 1.42 e do Lema 1.44. \square

A Proposição acima nos diz que, de um semigrupo numérico fixo, é possível obter uma quantidade infinita de semigrupos numéricos de dimensão máxima, e que diferentes semigrupos numéricos produzem diferentes semigrupos numéricos de dimensão máxima. Além disso, todo semigrupo numérico de dimensão máxima pode ser escrito da forma $(x + S) \cup \{0\}$.

1.2.2 Semigrupos numéricos Arf

Um semigrupo numérico S é *Arf* se para todos $x, y, z \in S$, com $x \geq y \geq z$, então $x + y - z \in S$. Nesta seção serão apresentadas algumas caracterizações para essa propriedade. Além disso, será mostrado como computar o menor semigrupo numérico Arf que contém um semigrupo numérico fixo.

Observe que, pela Proposição 1.41, um semigrupo numérico Arf possui dimensão máxima.

Exemplo 1.46 *Se m é um inteiro positivo, então $\{0, m, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico com a propriedade Arf. Observe agora que o semigrupo T do Exemplo 1.43 possui dimensão máxima, no entanto, não é Arf, já que $14 + 14 - 13 = 15 \notin T$.*

Proposição 1.47 *Seja S um semigrupo numérico e $x \in S^*$. Então, S é Arf se, e somente se, $S' = (x + S) \cup \{0\}$ é Arf. Em particular, S é Arf se, e somente se, os elementos de $\mathcal{PI}(S)$ são Arf.*

Demonstração. Suponha que S é um semigrupo numérico Arf, e sejam $a, b, c \in S'$, com $a \geq b \geq c$. Observe que se $c = 0$, temos que $a + b - c = a + b \in S'$. Tome então $c \neq 0$. Daí, existem $a_1, b_1, c_1 \in S$ tais que $a = x + a_1$, $b = x + b_1$, e $c = x + c_1$, e como $a \geq b \geq c$, temos que $a_1 \geq b_1 \geq c_1$. Assim,

$$\begin{aligned} a + b - c &= (x + a_1) + (x + b_1) - (x + c_1) \\ &= (a_1 + b_1 - c_1) + x, \end{aligned}$$

logo, como $a_1 + b_1 - c_1 \in S$ por hipótese, $a + b - c \in x + S \subset S'$, concluindo que S' é Arf.

Por outro lado, se S' é Arf, temos que para todos $a, b, c \in S'$, com $a \geq b \geq c$, $a + b - c \in S'$. Desse modo, se $c \neq 0$, $a, b, c \in (x + S)$, logo existem $a_1, b_1, c_1 \in S$ tais que $a = x + a_1$, $b = x + b_1$, e $c = x + c_1$, daí

$$\begin{aligned} a + b - c &= (x + a_1) + (x + b_1) - (x + c_1) \\ &= (a_1 + b_1 - c_1) + x, \end{aligned}$$

então $a_1 + b_1 - c_1 \in S$, ou $(a_1 + b_1 - c_1) + x = 0$. Se $(a_1 + b_1 - c_1) + x = 0$, segue que $a_1 + b_1 + x = c_1$, contradizendo que $a_1 \geq b_1 \geq c_1$. Assim, S é um semigrupo numérico Arf. \square

Seja S um semigrupo numérico Arf. Então, S possui dimensão máxima, e pelo Corolário 1.42, existe um semigrupo numérico S' e $x \in S' \setminus \{0\}$ tal que $S = (x + S') \cup \{0\}$. Se $S \neq \mathbb{N}$, então $S \subsetneq S'$. Daí, pela Proposição 1.47, S' também é Arf. Repetindo os mesmos argumentos para S' , é possível obter um semigrupo numérico S'' e $y \in S'' \setminus \{0\}$ tal que $S' = (y + S'') \cup \{0\}$. Perceba que, como $\mathbb{N} \setminus S$ possui uma quantidade finita de elementos, então esse processo é finito, obtendo assim a seguinte cadeia de semigrupos numéricos Arf: $S = S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \dots \subsetneq S_n = \mathbb{N}$, onde $S_i = (x_{i+1} + S_{i+1}) \cup \{0\}$, para algum $x_{i+1} \in S_{i+1} \setminus \{0\}$.

Corolário 1.48 *Seja S um subconjunto próprio de \mathbb{N} . Então, S é um semigrupo numérico Arf se, e somente se, existem inteiros positivos x_1, \dots, x_n tais que*

$$S = \{0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n, \rightarrow\}$$

e $x_i \in \{x_{i+1}, x_{i+1} + x_{i+2}, \dots, x_{i+1} + \dots + x_n, \rightarrow\}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstração. Suponha que S é um semigrupo numérico Arf. Então, a construção feita anteriormente da sequência $S = S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \dots \subsetneq S_n = \mathbb{N}$, onde $S_i = (x_{i+1} + S_{i+1}) \cup \{0\}$, para algum $x_{i+1} \in S_{i+1} \setminus \{0\}$ nos diz que $S = \{0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n, \rightarrow\}$. Por outro lado, se $S = \{0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n, \rightarrow\}$, então temos que

$$S = (x_1 + (x_2 + (\cdots + ((x_n + \mathbb{N}) \cup \{0\}) \cdots)) \cup \{0\},$$

onde \mathbb{N} é Arf, logo, aplicando a Proposição 1.47 repetidas vezes, segue que S é um semigrupo numérico Arf. \square

Exemplo 1.49 Tomando $x_1 = 14$, $x_2 = 9$, $x_3 = 5$ e $x_4 = 3$, temos que essa sequência de pontos obedece as condições do Corolário 1.48, logo $S = \{0, 14, 23, 28, 31, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico Arf. Além disso, pela Proposição 1.47 temos que $(14 + S) \cup \{0\}$, $(23 + S) \cup \{0\}$, $(28 + S) \cup \{0\}$ e $(31 + S) \cup \{0\}$ também são semigrupos numéricos com a propriedade Arf. Por fim, ainda pela Proposição 1.47 temos que $T = -14 + S^*$ também é um semigrupo numérico Arf, já que $S = (14 + T) \cup \{0\}$.

Proposição 1.50 A interseção finita de semigrupos numéricos Arf é um semigrupo numérico Arf.

Demonstração. Seja

$$S = \bigcap_{i=1}^n S_i,$$

onde S_i é um semigrupo numérico Arf, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Já sabemos que interseção finita de submonoides é um submonoide, além disso, $g(S) \leq g(S_1) + \cdots + g(S_n) < \infty$, logo S é um semigrupo numérico. Observe agora que dados $a, b, c \in S$, com $a \geq b \geq c$, então $a, b, c \in S_i$, e como S_i é Arf, segue que $a + b - c \in S_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, o que significa que $a + b - c \in S$. Portanto, S é um semigrupo numérico Arf. \square

Seja S um semigrupo numérico. Como o complemento de S em \mathbb{N} é finito, temos que a quantidade de semigrupos numéricos Arf contendo S também é finita. Daí, pela Proposição 1.50, a interseção desses conjuntos também é um semigrupo numérico Arf que contém S (na verdade, é um deles). Denotaremos essa interseção por $Arf(S)$, e chamaremos de *fecho Arf de S* . Observe que o fecho Arf de S é o menor semigrupo numérico Arf que contém S , com respeito a inclusão de conjuntos.

Se X é um subconjunto não vazio de inteiros não negativos, com $mdc(X) = 1$, então $\langle X \rangle$ é um semigrupo numérico. Além disso, qualquer semigrupo numérico Arf contendo X deve conter $\langle X \rangle$. Desse modo, faz sentido falar sobre o *fecho Arf de X* , definido por $Arf(\langle X \rangle)$. Faremos um abuso de notação, escrevendo $Arf(X)$ para denotar $Arf(\langle X \rangle)$.

Computar o conjunto dos semigrupos numéricos que contém um dado semigrupo numérico pode ser tedioso. Ainda mais se tivermos que decidir quais deles são Arf, e então computar a interseção de todos eles para encontrar qual é o menor. Vamos descrever agora uma forma mais eficiente de computar o fecho Arf.

Lema 1.51 Seja S um submonoide de \mathbb{N} . Então,

$$S' = \{x + y - z \mid x, y, z \in S, x \geq y \geq z\}$$

é um submonoide de \mathbb{N} e $S \subseteq S'$.

Demonstração. Seja $x \in S$. Então, $x = x + x - x \in S'$, logo $S \subseteq S'$. Como $S \subseteq \mathbb{N}$, então claramente $S' \subseteq \mathbb{N}$. Tomemos agora $a, b \in S'$. Daí, existem $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in S$ tais que $a = x_1 + y_1 - z_1$ e $b = x_2 + y_2 - z_2$, com $x_1 \geq y_1 \geq z_1$, e $x_2 \geq y_2 \geq z_2$. Assim,

$$\begin{aligned} a + b &= (x_1 + y_1 - z_1) + (x_2 + y_2 - z_2) \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) \end{aligned}$$

onde $x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 \in S$, e $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \geq z_1 + z_2$. Desse modo, temos que $a + b \in S'$, portanto, S' é um submonoide de \mathbb{N} . \square

Para um dado submonoide $S \subseteq \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, defina S^n como:

- $S^0 = S$,
- $S^{n+1} = (S^n)'$.

Veremos que essa cadeia de conjuntos se torna estacionária no fecho Arf de S .

Proposição 1.52 *Seja S um semigrupo numérico. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $S^k = \text{Arf}(S)$.*

Demonstração. Mostremos que $S^n \subseteq \text{Arf}(S)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para isso, faremos uma indução sobre n . Tomando $n = 0$, temos que $S^0 = S \subseteq \text{Arf}(S)$. Assuma que $S^n \subseteq \text{Arf}(S)$, e mostremos que $S^{n+1} \subseteq \text{Arf}(S)$. Seja $x \in S^{n+1}$, então existem $a, b, c \in S^n$, com $a \geq b \geq c$, tais que $x = a + b - c$. Por hipótese de indução, sabemos que $S^n \subseteq \text{Arf}(S)$, logo $a, b, c \in \text{Arf}(S)$, e assim $x = a + b - c \in \text{Arf}(S)$, o que significa que $S^{n+1} \subseteq \text{Arf}(S)$. Agora, pelo Lema 1.51, $S^n \subseteq S^{n+1}$ e $S \subseteq S^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como vimos anteriormente, o número de semigrupos numéricos contendo S é finito, logo $S^k = S^{k+1}$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Daí, segue que S^k é Arf, e como $\text{Arf}(S)$ é o menor semigrupo numérico Arf que contém S , temos que $\text{Arf}(S) \subseteq S^k$, obtendo assim que $S^k = \text{Arf}(S)$. \square

Mesmo que essa seja uma boa caracterização, ainda não mostramos como computar S^k . Então, será necessário mais esforço para encontrar um modo efetivo de computar o fecho Arf de um semigrupo numérico.

Lema 1.53 *Seja $m, r_1, \dots, r_p, n \in \mathbb{N}$ tais que $\text{mdc}\{m, r_1, \dots, r_p\} = 1$. Então,*

$$m + \langle m, r_1, \dots, r_p \rangle^n \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p).$$

Demonstração. Chamando $\langle m, r_1, \dots, r_p \rangle = H$, vamos fazer uma indução sobre n . Para $n = 0$, devemos mostrar que $m + H \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$. Sejam $i, j \in \{1, \dots, p\}$. Então, $m, m + r_i, m + r_j \in \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$, logo, $(m + r_i) + (m + r_j) - m = m + r_i + r_j \in \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$. Tome agora $k \in \{1, \dots, p\}$, assim $m, m + r_i + r_j, m + r_k \in \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$, desse modo, $(m + r_i + r_j) + (m + r_k) - m = m + r_i + r_j + r_k \in \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$. Repetindo esse processo, temos que para todos $a, a_1, \dots, a_p \in \mathbb{N}$, $m + (am + a_1r_1 + \dots + a_p r_p) \in \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$, portanto, $m + H \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$.

Assuma que $m + H^n \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$, e mostremos que $m + H^{n+1} \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$. Seja $a \in m + H^{n+1}$, então $a = m + b$, onde $b \in H^{n+1}$. Daí, existem $x, y, z \in H^n$ tais que $x \geq y \geq z$ e $b = x + y - z$. Desse modo, $a = m + b = m + x + y - z = (m + x) + (m + y) - (m + z)$. Logo, pela hipótese de indução, $m + x, m + y, m + z \in \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$, concluindo que $a \in \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$. Portanto, $m + \langle m, r_1, \dots, r_p \rangle^{n+1} \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$. \square

Proposição 1.54 *Sejam $m, r_1, \dots, r_p \in \mathbb{N}$ com $\text{mdc}\{m, r_1, \dots, r_p\} = 1$. Então,*

$$\text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p) = (m + \text{Arf}(m, r_1, \dots, r_p)) \cup \{0\}.$$

Demonstração. Pela Proposição 1.52, temos que se $S = \langle m, r_1, \dots, r_p \rangle$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $S^k = \text{Arf}(S)$. Agora, o Lema 1.53 nos diz que para todo $n \in \mathbb{N}$, $m + \langle m, r_1, \dots, r_p \rangle^n \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$, em particular, tomando $n = k$, segue que $(m + \text{Arf}(S)) \cup \{0\} \subseteq \text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$.

Por outro lado, observe que $m, m + r_1, \dots, m + r_p \in (m + \text{Arf}(S)) \cup \{0\}$, onde, pela Proposição 1.47 sabemos que $(m + \text{Arf}(S)) \cup \{0\}$ é um semigrupo numérico Arf. Daí, como $\text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$ é o menor semigrupo numérico que contém $\text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)$, segue que $\text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p) \subseteq (m + \text{Arf}(S)) \cup \{0\}$. Assim, a igualdade é válida. \square

Corolário 1.55 *Sejam m, r_1, \dots, r_p inteiros não negativos tais que $\text{mdc}\{m, r_1, \dots, r_p\} = 1$. Então,*

$$F(\text{Arf}(m, m + r_1, \dots, m + r_p)) = m + F(\text{Arf}(m, r_1, \dots, r_p)).$$

Seja $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\text{mdc}(X) = 1$. Defina recursivamente a seguinte sequência de subconjuntos de \mathbb{N} :

- $A_1 = X$;
- $A_{n+1} = (\{x - \min A_n \mid x \in A_n\} \setminus \{0\}) \cup \{\min A_n\}$.

Como consequência do algoritmo de Euclides para o cálculo do $\text{mdc}(X)$, temos que existe $q = \min\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \in A_k\}$, pois $\text{mdc}(X) = 1$.

Proposição 1.56 *Usando a notação acima, segue que*

$$\text{Arf}(X) = \{0, \min A_1, \min A_1 + \min A_2, \dots, \min A_1 + \dots + \min A_{q-1}, \rightarrow\}.$$

Demonstração. Como $1 \in A_q$, temos que $\text{Arf}(A_q) = \mathbb{N}$. Então, pela Proposição 1.54, $\text{Arf}(A_{q-1}) = (\min A_{q-1} + \mathbb{N}) \cup \{0\}$, logo

$$\text{Arf}(A_{q-1}) = \{0, \min A_{q-1}, \rightarrow\}.$$

Assuma, como hipótese de indução, que

$$\text{Arf}(A_{q-i}) = \{0, \min A_{q-i}, \min A_{q-i} + \min A_{q-i+1}, \dots, \min A_{q-i} + \dots + \min A_{q-1}, \rightarrow\}.$$

Devemos mostrar que

$$\text{Arf}(A_{q-i-1}) = \{0, \min A_{q-i-1}, \min A_{q-i-1} + \min A_{q-i}, \dots, \min A_{q-i-1} + \dots + \min A_{q-1}, \rightarrow\}.$$

Pela Proposição 1.54, sabemos que $\text{Arf}(A_{q-i-1}) = (\min A_{q-i-1} + \text{Arf}(A_{q-i})) \cup \{0\}$, assim, pela hipótese de indução, temos o resultado desejado. \square

Exemplo 1.57 *Vamos computar o $\text{Arf}(5, 12, 17)$:*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{5, 12, 17\}, \min A_1 = 5, \\ A_2 &= \{5, 7, 12\}, \min A_2 = 5, \\ A_3 &= \{2, 5, 7\}, \min A_3 = 2, \\ A_4 &= \{2, 3, 5\}, \min A_4 = 2, \\ A_5 &= \{1, 2, 3\}, \min A_5 = 1, \\ \text{desse modo, } \text{Arf}(5, 12, 17) &= \{0, 5, 10, 12, 14, \rightarrow\}. \end{aligned}$$

1.2.3 Semigrupos Numéricos Saturados

Seja S um semigrupo numérico. Dizemos que S é um *semigrupo numérico saturado*, se para todos $s, s_1, \dots, s_r \in S$ tais que $s_i \leq s$, $i \in \{1, \dots, r\}$, e $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{Z}$ com $z_1 s_1 + \dots + z_r s_r \geq 0$, então $s + z_1 s_1 + \dots + z_r s_r \in S$.

Lema 1.58 *Todo semigrupo numérico saturado possui a propriedade Arf.*

Demonstração. Seja S um semigrupo numérico saturado, e sejam $x, y, z \in S$, com $x \geq y \geq z$. Daí, temos que $y - z \geq 0$, e pela definição, $x + y - z \in S$, logo S também é Arf. \square

Exemplo 1.59 *O semigrupo numérico $\{0, m, \rightarrow\}$ é saturado. Além disso, o Exemplo 1.49 nos diz que $S = \{0, 14, 23, 28, 31, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico Arf, no entanto não é saturado, já que $23 + 2 \times 23 - 3 \times 14 = 27 \notin S$.*

Vamos agora descrever uma caracterização de semigrupos numéricos saturados. Sejam $A \subseteq \mathbb{N}$, e $a \in A$. Defina o número

$$d_A(a) = \text{mdc}\{x \in A \mid x \leq a\}.$$

Lema 1.60 *Sejam S um semigrupo numérico saturado e $x \in S$. Então, $x + d_S(x) \in S$.*

Demonstração. Tomemos $\{s_1, \dots, s_r\} = \{a \in S \mid a \leq x\}$. Pela identidade de Bézout, existem inteiros z_1, \dots, z_r tais que $z_1s_1 + \dots + z_rs_r = d_S(x) > 0$. Daí, como S é saturado, temos que $x + d_S(x) \in S$. \square

Veremos que essa propriedade caracteriza semigrupos numéricos saturados.

Lema 1.61 *Seja A um subconjunto não vazio de inteiros positivos tal que $\text{mdc}(A) = 1$ e $a + d_A(a) \in A$, para todo $a \in A$. Então $a + kd_A(a) \in A$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $A \cup \{0\}$ é um semigrupo numérico.*

Demonstração. Vamos fazer uma indução sobre $d_A(a)$. Observe que $d_A(a) > 0$, então vamos mostrar que se $d_A(a) = 1$ temos que $a + k \in A$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 0$ é claro. Suponha que $a + k \in A$. Daí, como $0 \neq d_A(a + k) \leq d_A(a) = 1$, segue que $d_A(a + k) = 1$. Desse modo, $a + k + 1 = a + k + d_A(a + k) \in A$.

Assuma agora que se $a' \in A$ e $d_A(a') < d_A(a)$, então $a' + kd_A(a') \in A$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Desse modo, suponha que $d_A(a) \geq 2$, e provemos que $a + kd_A(a) \in A$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Observe que se $d_A(a + kd_A(a)) = d_A(a)$ e $a + kd_A(a) \in A$, então, $a + kd_A(a) + d_A(a + kd_A(a)) = a + (k + 1)d_A(a) \in A$. Além disso, como $\text{mdc}(A) = 1$, existe $b \in A$ tal que $d_A(b) = 1$, logo, para todo $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ com $a + xd_A(a) \geq b$, temos que $d_A(a + xd_A(a)) < d_A(a)$. Seja t o menor inteiro positivo tal que $a + td_A(a) \in A$ e $d_A(a + td_A(a)) < d_A(a)$. Pela hipótese de indução, $(a + td_A(a)) + kd_A(a + td_A(a)) \in A$, para todo $k \in \mathbb{N}$. É claro que $d_A(a + td_A(a))$ divide $d_A(a)$, logo $d_A(a) = ld(a + td_A(a))$, onde $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Portanto, $a + td_A(a) + \frac{k}{l}d_A(a) \in A$, para todo $k \in \mathbb{N}$, o que significa que $a + (t + n)d_A(a) \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, como $a + kd_A(a) \in A$, para todo $k \in \{0, \dots, t\}$ pela definição de t , segue que $a + kd_A(a) \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por fim, mostremos que $A \cup \{0\}$ é um semigrupo numérico. Como $\text{mdc}(A) = 1$, basta mostrar que A é fechado com a soma. Sejam $a, b \in A$, digamos $a \leq b$. Então, $d_A(b)$ divide $d_A(a)$, logo existe $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $d_A(a) = \lambda d_A(b)$. Além disso, $d_A(a)$ divide a , logo existe $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $a = \mu d_A(a)$. Assim, $a + b = \mu d_A(a) + b = \mu \lambda d_A(b) + b \in A$, concluindo que $A \cup \{0\}$ é um semigrupo numérico. \square

Proposição 1.62 *Seja A um subconjunto não vazio de \mathbb{N} tal que $0 \in A$ e $\text{mdc}(A) = 1$. As seguintes condições são equivalentes:*

- 1) A é um semigrupo numérico saturado.
- 2) $a + d_A(a) \in A$ para todo $a \in A \setminus \{0\}$.
- 3) $a + kd_A(a) \in A$ para quaisquer $a \in A \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. 1) \Rightarrow 2) Segue do Lema 1.60.

2) \Rightarrow 3) Segue do Lema 1.61.

3) \Rightarrow 1) Pelo Lema 1.61, sabemos que A é um semigrupo numérico, então basta mostrar que A é saturado. Sejam $a, a_1, \dots, a_r \in A$ tais que $a_i \leq a$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, e $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{Z}$ tais que $z_1a_1 + \dots + z_ra_r \geq 0$. Como $a_i \leq a$, temos que $d_A(a)$ divide a_i , para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Daí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $z_1a_1 + \dots + z_ra_r = kd_A(a)$, logo $a + z_1a_1 + \dots + z_ra_r = a + kd_A(a) \in A$, concluindo que A é saturado. \square

Vamos agora focar em obter caracterizações da propriedade de saturação de semigrupos numéricos similares às dadas na Proposição 1.47 e no Corolário 1.48 para semigrupos numéricos Arf. No entanto, elas não serão tão generosas quanto as fornecidas naqueles resultados.

Proposição 1.63 *Seja S um semigrupo numérico. As seguintes condições são equivalentes:*

- 1) S é saturado.
- 2) Existe $x \in S^*$ tal que $(x + S) \cup \{0\}$ é um semigrupo numérico saturado.

Demonstração. 1) \Rightarrow 2) Assuma que $S = \{0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < \dots\}$. Vamos provar que $H = (s_1 + S) \cup \{0\} = \{0 < s_1 < s_1 + s_2 < \dots < s_1 + s_n < \dots\}$ é saturado. Pelo visto na Proposição 1.62, é suficiente mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $s_1 + s_n + d_H(s_1 + s_n) \in H$. Observe que, como S é saturado, então $s_n + d_S(s_n) \in S$, além disso, $d_S(s_n) = d_H(s_1 + s_n)$ já que se x divide os elementos $\{0, s_1, \dots, s_n\}$, então x divide $\{0, s_1, \dots, s_1 + s_n\}$, e vice-versa. Desse modo, $s_1 + s_n + d_H(s_1 + s_n) = s_1 + (s_n + d_S(s_n)) \in (s_1 + S) \cup \{0\}$.

2) \Rightarrow 1) Se $S = \{0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < \dots\}$, então $K = (x + S) \cup \{0\} = \{0 < x < x + s_1 < \dots < x + s_n < \dots\}$. Como $\text{mdc}\{0, x, s_1, \dots, s_n\} = \text{mdc}\{0, x, x + s_1, \dots, x + s_n\}$, temos que $d_K(x + s_n)$ divide $d_S(s_n)$, isto é, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $ld_K(x + s_n) = d_S(s_n)$. Assim, como K é um semigrupo numérico saturado por hipótese, segue que $x + s_n + d_S(s_n) = x + s_n + ld_K(x + s_n) \in K = (x + S) \cup \{0\}$, logo $s_n + d_S(s_n) \in S$, e pela Proposição 1.62 concluímos que S é um semigrupo numérico saturado. \square

Corolário 1.64 *Seja S um semigrupo numérico. Então S é saturado se, e somente se, $(m(S) + S) \cup \{0\}$ é saturado.*

Corolário 1.65 *Seja S um subconjunto próprio de \mathbb{N} . Então, S é um semigrupo numérico saturado se, e somente se, existem inteiros positivos x_1, \dots, x_n tais que*

$$S = \{0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n, \rightarrow\}$$

e

$$\text{mdc}\{x_1, \dots, x_k\} \in \{x_{k+1}, x_{k+1} + x_{k+2}, \dots, x_{k+1} + \dots + x_n, \rightarrow\}$$

para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstração. Suponha que S é um semigrupo numérico saturado. Sabemos que S é Arf, logo, pelo Corolário 1.48, existem inteiros positivos x_1, \dots, x_n tais que

$$S = \{0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n, \rightarrow\}.$$

Daí, como S é saturado, segue que $(x_1 + \dots + x_k) + d_S(x_1 + \dots + x_k) \in S$, onde $d_S(x_1 + \dots + x_k) = \text{mdc}\{x_1, \dots, x_k\}$, logo $(x_1 + \dots + x_k) + \text{mdc}\{x_1, \dots, x_k\} \in \{0, x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n, \rightarrow\}$. Observe agora que todos os elementos de S maiores que $x_1 + \dots + x_k$ são da forma $x_1 + \dots + x_k + l$, com $l \in \{x_{k+1}, x_{k+1} + x_{k+2}, \dots, x_n, \rightarrow\}$, assim, $\text{mdc}\{x_1, \dots, x_k\} \in \{x_{k+1}, x_{k+1} + x_{k+2}, \dots, x_n, \rightarrow\}$.

Por outro lado, usando a Proposição 1.62, é suficiente mostrar que $(x_1 + \dots + x_k) + d_S(x_1 + \dots + x_k) \in S$, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Assim como visto anteriormente, isso equivale a mostrar que $(x_1 + \dots + x_k) + \text{mdc}\{x_1, \dots, x_k\} \in S$, o que segue direto da hipótese. \square

Exemplo 1.66 *Pelo Corolário 1.65, o semigrupo numérico $S = \{0, 14, 23, 24, \rightarrow\}$ é saturado, e pelo Corolário 1.64 segue que $(14 + S) \cup \{0\}$ e $-14 + S^*$ são saturados.*

Como para semigrupos numéricos Arf, a interseção de uma quantidade finita de semigrupos numéricos saturados é também saturada, e isso segue da definição.

Proposição 1.67 *A interseção finita de semigrupos numéricos saturados é um semigrupo numérico saturado.*

Desse modo, faz sentido definir o fecho saturado de um semigrupo numérico (ou de um subconjunto de números naturais com máximo divisor comum igual a 1), da mesma forma que fizemos para semigrupos numéricos Arf. Dado um semigrupo numérico S , denotamos por $Sat(S)$ a interseção de todos os semigrupos numéricos saturados que contêm S , ou em outras palavras, o menor (com respeito à inclusão de conjuntos) semigrupo numérico saturado contendo S . Chamamos esse semigrupo de *fecho saturado* de S .

O fecho saturado de um semigrupo (ou de um subconjunto de números naturais com máximo divisor comum igual a 1) pode ser computado da seguinte maneira:

Proposição 1.68 *Sejam $n_1 < n_2 < \dots < n_e$ inteiros positivos tais que $\text{mdc}\{n_1, \dots, n_e\} = 1$. Para cada $i \in \{1, \dots, e\}$, tome $d_i = \text{mdc}\{n_1, \dots, n_i\}$ e para todo $j \in \{1, \dots, e-1\}$, defina $k_j = \max\{k \in \mathbb{N} \mid n_j + kd_j < n_{j+1}\}$. Então,*

$$Sat(n_1, \dots, n_e) = \{0, n_1, n_1 + d_1, \dots, n_1 + k_1 d_1, n_2, n_2 + d_2, \dots, n_2 + k_2 d_2, \dots, n_{e-1}, n_{e-1} + d_{e-1}, \dots, n_{e-1} + k_{e-1} d_{e-1}, n_e, n_e + 1, \rightarrow\}.$$

Demonstração. Seja

$$A = \{0, n_1, n_1 + d_1, \dots, n_1 + k_1 d_1, n_2, n_2 + d_2, \dots, n_2 + k_2 d_2, \dots, n_{e-1}, n_{e-1} + d_{e-1}, \dots, n_{e-1} + k_{e-1} d_{e-1}, n_e, n_e + 1, \rightarrow\}.$$

Observe que $A \neq \emptyset$, $0 \in A$ e $\text{mdc}(A) = 1$. Além disso, $d_A(n_i + k_i d_i) = d_i$, para todo $i \in \{1, \dots, e-1\}$, desse modo, é fácil ver que $(n_i + l d_i) + d_A(n_i + l d_i) \in A$ quando $l < k_i$. Mostremos que $(n_i + k_i d_i) + d_A(n_i + k_i d_i) \in A$. Temos que $(n_i + k_i d_i) + d_A(n_i + k_i d_i) = n_i + (k_i + 1)d_i \geq n_{i+1}$, logo, se $n_i + (k_i + 1)d_i \geq n_e$, sabemos que $n_i + (k_i + 1)d_i \in A$. Se $n_i + (k_i + 1)d_i < n_e$, existe $j \in \{i+1, \dots, e-1\}$ tal que $n_j \leq n_i + (k_i + 1)d_i < n_{j+1}$. Como d_j divide n_i , d_i e n_j , existe $s \in \{0, 1, \dots, k_j\}$ tal que $n_i + (k_i + 1)d_i = n_j + s d_j$, concluindo que $a + d_A(a) \in A$, para todo $a \in A$. Daí, pela Proposição 1.62, A é um semigrupo numérico saturado, com $n_1, \dots, n_e \subset A$, portanto, $Sat(n_1, \dots, n_e) \subseteq A$.

Para a outra inclusão, seja $a \in A$. Então, existe $i \in \{1, \dots, e\}$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $a = n_i + k d_i$, onde $d_e = 1$. Como $\{n_1, \dots, n_e\} \subset Sat(n_1, \dots, n_e)$, segue que $d_{Sat(n_1, \dots, n_e)}(n_i)$ divide d_i , logo existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $d_i = l d_{Sat(n_1, \dots, n_e)}(n_i)$. Assim, pela Proposição 1.62, sabemos que $n_i + t d_{Sat(n_1, \dots, n_e)} \in Sat(n_1, \dots, n_e)$, para todo $t \in \mathbb{N}$, o que significa que $a = n_i + k d_i = k l d_{Sat(n_1, \dots, n_e)} \in Sat(n_1, \dots, n_e)$. \square

Exemplo 1.69 *Tomando $n_1 = 6$, $n_2 = 10$ e $n_3 = 15$, temos que $d_1 = 6$, $d_2 = 2$ e $d_3 = 3$, desse modo, pela Proposição 1.68, $Sat(6, 10, 15) = \{0, 6, 10, 10 + 2, 10 + 4, 15, 15 + 1, \rightarrow\} = \{0, 6, 10, 12, 14, 15, \rightarrow\}$.*

1.3 Semigrupos Numéricos Irredutíveis

1.3.1 Semigrupos Numéricos Simétricos e Pseudo-simétricos

Um semigrupo numérico é dito *irredutível* se não pode ser escrito como interseção de dois outros semigrupos numéricos que o contêm propriamente. Se tomarmos $S = \langle 5, 7, 8, 9, 11 \rangle$, por exemplo, temos que $S = \langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle \cap \langle 4, 5, 7 \rangle$, concluindo que S não é irredutível. Por outro lado, $T = \langle 4, 5, 7 \rangle$ é irredutível, e veremos como verificar essa propriedade no decorrer desta seção.

Lema 1.70 *Seja S um semigrupo numérico diferente de \mathbb{N} . Então, $S \cup \{F(S)\}$ é um semigrupo numérico também.*

Demonstração. Como S é um semigrupo numérico e $S \cup \{F(S)\}$, basta mostrar que $F(S) + s \in S \cup \{F(S)\}$, para todo $s \in S \cup \{F(S)\}$. Observe que $F(S) + s \geq F(S)$, logo $F(S) + s = F(S)$, ou $F(S) + s \in S$, e em ambos os casos segue que $F(S) + s \in S \cup \{F(S)\}$. \square

Teorema 1.71 *Seja S um semigrupo numérico. As seguintes condições são equivalentes:*

- 1) S é irredutível.
- 2) S é maximal no conjunto de todos os semigrupos numéricos com número de Frobenius $F(S)$.
- 3) S é maximal no conjunto de todos os semigrupos numéricos que não contêm $F(S)$.

Demonstração. 1) \Rightarrow 2) Seja T um semigrupo numérico tal que $S \subseteq T$ e $F(T) = F(S)$. Então, $S = (S \cup \{F(S)\}) \cap T$. Daí, como S é irredutível, segue que $T = S$.

2) \Rightarrow 3) Seja T um semigrupo numérico tal que $S \subseteq T$ e $F(S) \notin T$. Então, temos que $F(T) = F(S)$, logo, por hipótese, $T = S$.

3) \Rightarrow 1) Sejam S_1 e S_2 dois semigrupos numéricos que contêm S propriamente. Então, por hipótese, $F(S) \in S_1$ e $F(S) \in S_2$, ou seja, $S_1 \cap S_2 \neq S$. \square

Seja S um semigrupo numérico irredutível. Dizemos que S é *simétrico* se $F(S)$ é ímpar. Se $F(S)$ é par, dizemos que S é *pseudo-simétrico*.

Se S é um semigrupo numérico não irredutível, pelo Teorema 1.71, existe um semigrupo numérico T irredutível que contém S e $F(S) = F(T)$. No próximo resultado daremos um processo de construção de um semigrupo numérico irredutível.

Lema 1.72 *Seja S um semigrupo numérico e assumamos que existe*

$$h = \max\{x \in \mathbb{Z} \setminus S \mid F(S) - x \notin S \text{ e } x \neq F(S)/2\}.$$

Então, $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico com número de Frobenius $F(S)$.

Demonstração. Claramente, $S \cup \{h\}$ possui complemento finito em \mathbb{N} e $0 \in S \cup \{h\}$. Seja $H = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S \mid F(S) - x \notin S \text{ e } x \neq F(S)/2\}$. Se $x \in H$, temos que $F(S) - x \in H$, caso contrário $F(S) - x = F(S)/2 \Rightarrow x = F(S)/2 \Rightarrow x \notin H$, ou $F(S) - (F(S) - x) \in S \Rightarrow x \in S \Rightarrow x \notin H$. Desse modo, segue que $h > F(S)/2$, já que se $h < F(S)/2$, então $F(S) - h > F(S) - F(S)/2 = F(S)/2 > h$, contrariando a maximalidade de h .

Seja $s \in S \setminus \{0\}$. Se $h + s \notin S$, pela maximalidade de h , então $F(S) - (h + s) = t \in S$, pois $h > F(S)/2$ e $s > 0$. Assim, $F(S) - h = t + s \in S$, contrariando a definição de h .

Se $2h \notin S$, novamente pela maximalidade de h , temos que $F(S) - 2h = t \in S$. Daí, pelo visto anteriormente, $h + t \in S$, logo $h + t = F(S) - h \in S$, contrariando a definição de h . Portanto, $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico. \square

Proposição 1.73 *Seja S um semigrupo numérico.*

- 1) S é simétrico se, e somente se, $F(S)$ é ímpar e $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ implica que $F(S) - x \in S$.
- 2) S é pseudo-simétrico se, e somente se, $F(S)$ é par e $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ implica que $F(S) - x \in S$, ou $x = F(S)/2$.

Demonstração. Vamos mostrar apenas a primeira afirmação, pois a segunda segue de forma análoga.

Seja S um semigrupo numérico simétrico. Então, se existe $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ tal que $F(S) - x \notin S$, então pelo Lema 1.72 existe h o máximo dos elementos que respeitam essas condições. Assim,

$S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico com número de Frobenius $F(S)$, contrariando a maximalidade de S dada no Teorema 1.71.

Por outro lado, pelo Teorema 1.71, é suficiente mostrar que S é maximal no conjunto de todos os semigrupos numéricos que não contêm $F(S)$. Tome T um semigrupo numérico com $S \subsetneq T$. Seja $x \in T \setminus S \subset \mathbb{Z} \setminus S$. Daí, por hipótese, $F(S) - x \in S$, logo $F(S) - x \in T$, o que implica que $F(S) = (F(S) - x) + x \in T$. \square

Corolário 1.74 *Seja S um semigrupo numérico.*

- 1) S é simétrico se, e somente se, $g(S) = \frac{F(S) + 1}{2}$.
- 2) S é pseudo-simétrico se, e somente se, $g(S) = \frac{F(S) + 2}{2}$.

Observação 1.75 *Sabemos, pelo Lema 1.16, que se S é um semigrupo numérico, então $g(S) \geq \frac{F(S) + 1}{2}$. Como consequência desse corolário temos que semigrupos numéricos irredutíveis são aqueles com o menor gênero possível em termos de seu número de Frobenius.*

Corolário 1.76 *Todo semigrupo numérico de dimensão igual a 2 é simétrico.*

Exemplo 1.77 *Observe que $\langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico simétrico, $\langle 4, 5, 7 \rangle = \{0, 4, 5, 7, \rightarrow\}$ é pseudo-simétrico, e $\langle 5, 6, 7 \rangle = \langle 5, 6, 7, 8 \rangle \cap \langle 5, 6, 7, 9 \rangle$, logo $\langle 5, 6, 7 \rangle$ não é irredutível.*

Lema 1.78 *Seja S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Se $x, y \in S$ são tais que $x + y \in Ap(S, n)$, então, $\{x, y\} \subseteq Ap(S, n)$.*

Demonstração. Isso é uma consequência direta da definição do conjunto de Apéry, já que se $x - n \in S$, então $(x + y) - n = (x - n) + y \in S$, contrariando o fato de que $x + y \in Ap(S, n)$. \square

Proposição 1.79 *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Se $Ap(S, n) = \{a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1}\}$, então S é simétrico se, e somente se, $a_i + a_{n-1-i} = a_{n-1}$, para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$.*

Demonstração. Suponha que S é simétrico, então pela Proposição 1.14 sabemos que $F(S) = a_{n-1} - n$. Como $a_i - n \notin S$ e S é simétrico, temos que $F(S) - (a_i - n) = a_{n-1} - a_i \in S$. Daí, $[F(S) - (a_i - n)] + a_i = a_{n-1}$, e pelo Lema 1.78 segue que existe $j \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $a_{n-1} = a_i + a_j$. Como $a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1}$, j deve ser igual a $n-1-i$.

Por outro lado, pela hipótese temos que $\{a_{n-1}\} = \text{Maximais}_{\leq S} Ap(S, n)$, logo, pela Proposição 1.22, $PF(S) = \{F(S)\}$, o que significa que $\{a_{n-1} - n\} = \text{Maximais}_{\leq S} \mathbb{Z} \setminus S$. Em particular, se $x \in \mathbb{Z} \setminus S$, então $F(S) - x \in S$. Observe que se $F(S)/2 \in \mathbb{Z}$, então $F(S)/2 \in \mathbb{Z} \setminus S$, caso contrário, $F(S) = \frac{F(S)}{2} + \frac{F(S)}{2} \in S$, contrariando a definição de $F(S)$. No entanto, acabamos de mostrar que isso significaria que $F(S)/2 = F(S) - F(S)/2 \in S$, contradição. Portanto, $F(S)$ é ímpar, e pela Proposição 1.73 concluímos que S é simétrico. \square

Corolário 1.80 *Seja S um semigrupo numérico. As seguintes condições são equivalentes:*

- 1) S é simétrico.
- 2) $PF(S) = \{F(S)\}$.
- 3) $t(S) = 1$.

Corolário 1.81 *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Então S é simétrico se, e somente se,*

$$\text{Maximais}_{\leq_S} \text{Ap}(S, n) = \{F(S) + n\}.$$

Exemplo 1.82 Seja $S = \langle 3, 5 \rangle$. Então, $\text{Ap}(S, 3) = \{0, 5, 10\} \Rightarrow \text{Maximais}_{\leq_S} \text{Ap}(S, 3) = \{10\} \Rightarrow PF(S) = \{7\} = \{F(S)\}$.

Caracterizações similares podem ser obtidas para semigrupos numéricos pseudo-simétricos, mas tomando um cuidado especial com $\frac{F(S)}{2}$.

Lema 1.83 Seja S um semigrupo numérico pseudo-simétrico e $n \in S^*$. Então $F(S)/2 + n \in \text{Ap}(S, n)$.

Demonstração. Como $F(S)/2 \notin S$, basta mostrar que $F(S)/2 + n \in S$. Suponha que $F(S)/2 + n \notin S$. Então, pela Proposição 1.73 $F(S)/2 - n = F(S) - (F(S)/2 + n) \in S$, o que implica que $F(S)/2 = (F(S)/2 - n) + n \in S$. Absurdo. Logo, $F(S)/2 + n \in \text{Ap}(S, n)$. \square

Observe que esse resultado também mostra que se S é pseudo-simétrico, então $F(S)/2 \in PF(S)$.

Proposição 1.84 Sejam S um semigrupo numérico com número de Frobenius par, e $n \in S^*$. Então S é pseudo-simétrico se, e somente se,

$$\text{Ap}(S, n) = \{a_0 < a_1 < \dots < a_{n-2} = F(S) + n\} \cup \left\{ \frac{F(S)}{2} + n \right\},$$

onde $a_i + a_{n-2-i} = a_{n-2}$, para todo $i \in \{0, \dots, n-2\}$.

Demonstração. Suponha que S é pseudo-simétrico. Então, pelo Lema 1.83, $F(S)/2 + n \in \text{Ap}(S, n)$. É claro que $F(S)/2 + n < \max \text{Ap}(S, n) = F(S) + n$. Se $w \in \text{Ap}(S, n) \setminus \{F(S)/2 + n\}$, então $w - n \notin S$ e $w - n \neq F(S)/2$. Pela Proposição 1.73, temos que $F(S) - (w - n) \in S$, logo $\max \text{Ap}(S, n) - w = F(S) + n - w \in S$. Daí, pelo Lema 1.78 segue que $\max \text{Ap}(S, n) - w \in \text{Ap}(S, n)$. Além disso, $\max \text{Ap}(S, n) - w \neq F(S)/2 + n$, caso contrário teríamos que $w = F(S)/2$. A partir daqui a demonstração segue de forma análoga à feita para a Proposição 1.79.

Por outro lado, seja $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ tal que $x \neq F(S)/2$. Vamos mostrar que $F(S) - x \in S$. Seja $w \in \text{Ap}(S, n)$ tal que $w \equiv x \pmod{n}$. Então, $x = w - kn$, para algum $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Separando em dois casos:

1) Se $w = (F(S)/2) + n$, então $F(S) - x = F(S) - (F(S)/2 + n - kn) = F(S)/2 + (k-1)n$. Daí, como $x \neq F(S)/2$, temos que $k > 1$, ou seja, $F(S) - x \in S$.

2) Se $w \neq (F(S)/2) + n$, segue que $F(S) - x = F(S) - w + kn = F(S) + n - w + (k-1)n = a_{n-2} - w + (k-1)n \in S$, já que $a_{n-2} - w \in S$ por hipótese. \square

Corolário 1.85 Seja S um semigrupo numérico. As seguintes condições são equivalentes:

- 1) S é pseudo-simétrico.
- 2) $PF(S) = \{F(S), F(S)/2\}$.

Exemplo 1.86 Seja $S = \langle 5, 7, 8 \rangle$. Então, $\text{Ap}(S, 5) = \{0, 7, 8, 14, 16\} \Rightarrow \text{Maximais}_{\leq_S} \text{Ap}(S, 5) = \{14, 16\} \Rightarrow PF(S) = \{9, 11\}$, logo $t(S) = 2$, mas S não é pseudo-simétrico.

Exemplo 1.87 Seja $S = \langle 4, 5, 7 \rangle$. Então, $\text{Ap}(S, 4) = \{0, 5, 7, 10\} \Rightarrow \text{Maximais}_{\leq_S} \text{Ap}(S, 4) = \{7, 10\} \Rightarrow PF(S) = \{3, 6\} = \{F(S)/2, F(S)\}$.

Corolário 1.88 Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Então, S é pseudo-simétrico se, e somente se,

$$\text{Maximais}_{\leq_S}(\text{Ap}(S, n)) = \left\{ \frac{F(S)}{2}, F(S) + n \right\}.$$

1.3.2 Semigrupos Numéricos Irredutíveis com Multiplicidade e Dimensão Arbitrárias

Vamos ver que se S é um semigrupo numérico com $m(S) \geq 4$, então $e(S) \leq m(S) - 1$. O alvo dessa seção é mostrar como construir, para dados m e e tais que $2 \leq e \leq m - 1$, um semigrupo numérico simétrico com multiplicidade m e dimensão e . Já sabemos que semigrupos numéricos de dimensão dois são simétricos, então não é possível encontrar semigrupos numéricos pseudo-simétricos com dimensão dois. Se mudarmos a restrição acima para $3 \leq e \leq m - 1$, então podemos construir um semigrupo numérico pseudo-simétrico S com $m(S) = m$ e $e(S) = e$.

Caso Simétrico

Lema 1.89 *Seja S um semigrupo numérico simétrico com $m(S) \geq 3$. Então,*

$$e(S) \leq m(S) - 1$$

Demonstração. Escreva $Ap(S, m(S)) = \{0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{m(S)-1}\}$. Então, pela Proposição 1.79, $a_{m(S)-1} = a_i + a_{m(S)-1-i}$, para todo $i \in \{0, \dots, m(S) - 1\}$. Se $m(S) \geq 3$, podemos escolher $i = 1$, o que implica que $a_{m(S)-1}$ não é um gerador minimal. Desse modo, pela Proposição 1.12, $e(S) \leq m(S) - 1$. \square

Observação 1.90 *Como consequência desse resultado e do Corolário 1.76, temos que um semigrupo numérico simétrico possui dimensão máxima se, e somente se, sua multiplicidade é igual a 2.*

A seguir vamos descrever um método de obter, para inteiros fixos e e m , com $2 \leq e \leq m - 1$, um semigrupo numérico simétrico S com $e(S) = e$ e $m(S) = m$.

Vamos introduzir duas famílias de semigrupos numéricos simétricos. Cada uma delas será usada para produzir o semigrupo numérico simétrico desejado, dependendo da paridade de $m - e$.

Lema 1.91 *Sejam m e q inteiros positivos tais que $m \geq 2q + 3$ e seja S o submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ gerado por*

$$\{m, m + 1, qm + 2q + 2, \dots, qm + (m - 1)\}.$$

Então S é um semigrupo numérico simétrico com multiplicidade m , dimensão $m - 2q$ e número de Frobenius $2qm + 2q + 1$.

Demonstração. Como $\text{mdc}\{m, m+1\} = 1$, temos que S é um semigrupo numérico, pelo Lema 1.2. Observe que a maior combinação linear escrita por m e $m + 1$ tendo q como coeficiente de m é $qm + q$, e que $(q+1)m$ é maior que os elementos de $\{m, m+1, qm+2q+2, \dots, qm+(m-1)\}$, desse modo, nenhum dos elementos de $\{m, m+1, qm+2q+2, \dots, qm+(m-1)\}$ pode ser escrito como combinação linear dos anteriores, e pelo Corolário 1.11, segue que $\{m, m+1, qm+2q+2, \dots, qm+(m-1)\}$ é um sistema de geradores minimal de S . Além disso, $m(S) = m$ e $e(S) = m - 2q$. Perceba que

$$\begin{aligned} Ap(S, m) = \{w(0) = 0 < w(1) = m + 1 < w(2) = 2m + 2 < \dots < w(q) = qm + q < \\ w(2q + 2) = qm + 2q + 2 < \dots < w(m - 1) = qm + (m - 1) < w(q + 1) = (q + 1)m + q + 1 < \\ \dots < w(2q + 1) = (2q + 1)m + 2q + 1\}, \end{aligned}$$

onde $2(qm+2q+2) = 2qm+4q+4 > 2qm+2q$, logo precisamos mostrar apenas que $(2q+1)m+2q+1$ é o menor elemento de S que é congruente a $2q+1$ módulo m , ou seja, $2qm+2q+1$ não deve pertencer a S . Suponha que $2qm+2q+1 \in S$. Então $2qm+2q+1 \in \langle m, m+1 \rangle$, já que o menor dos outros geradores minimais de S é $qm+2q+2$, e $2(qm+2q+2) = 2qm+4q+4 > 2qm+2q+1$. Assim, existem $x, y \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} 2qm + 2q + 1 &= xm + y(m + 1) \\ &= (x + y)m + y, \end{aligned}$$

desse modo, $y = 2q + 1$ e $x + y \leq 2q \Rightarrow y \leq 2q$, absurdo.

Vamos usar agora a Proposição 1.79 para provar que S é simétrico. Devemos então encontrar para todo $w \in Ap(S, m)$ um elemento $w' \in Ap(S, m)$ tal que $w + w' = (2q + 1)m + 2q + 1$.

- Para $i \in \{0, 1, \dots, m - 1 - 2q - 2\}$,

$$(qm + 2q + 2 + i) + (qm + m - 1 - i) = (2q + 1)m + 2q + 1.$$

- Para $k \in \{0, 1, 2, \dots, q\}$,

$$(km + k) + ((2q + 1 - k)m + 2q + 1 - k) = (2q + 1)m + 2q + 1.$$

Por fim, pela Proposição 1.14, $F(S) = \max Ap(S, m) - m = (2q + 1)m + 2q + 1 - m = 2qm + 2q + 1$. \square

Exemplo 1.92 Tomando $m = 9$ e $q = 2$, temos que $9 \geq 4 + 3 = 7$, logo $S = \langle 9, 10, 24, 25, 26 \rangle$ é simétrico, $e(S) = 5$ e $F(S) = 41$.

Lema 1.93 Sejam m e q inteiros não negativos tais que $m \geq 2q + 4$ e S o submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ gerado por

$$\{m, m + 1, (q + 1)m + q + 2, \dots, (q + 1)m + m - q - 2\}.$$

Então, S é um semigrupo numérico simétrico com multiplicidade m , dimensão $m - 2q - 1$ e Número de Frobenius $2(q + 1)m - 1$.

Demonstração. Seguindo o mesmo raciocínio do Lema 1.91, temos que S é um semigrupo numérico com $m(S) = m$ e $e(S) = m - 2q - 1$. Além disso,

$$Ap(S, m) = \{0 < m + 1 < 2m + 2 < \dots < (q + 1)m + q + 1 < (q + 1)m + q + 2 < \dots < (q + 1)m + m - q - 2 < (q + 2)m + m - q - 1 < (q + 3)m + (m - q) < \dots < 2(q + 1)m + m - 1\}.$$

Daí, pela Proposição 1.79, S é simétrico, pois

- Para $i \in \{0, 1, \dots, m - 2q - 3\}$,

$$((q + 1)m + q + 1 + i) + ((q + 1)m + m - q - 2 - i) = 2(q + 1)m + m - 1.$$

- Para $k \in \{0, 1, \dots, q\}$,

$$((q + 2 + k)m + m - q - 1 - k) + ((q - k)m + q - k) = 2(q + 1)m + m - 1.$$

Por fim, $F(S) = \max Ap(S, m) - m = 2(q + 1)m + m - 1 - m = 2(q + 1)m - 1$. \square

Teorema 1.94 Sejam m e e inteiros tais que $2 \leq e \leq m - 1$. Existe um semigrupo numérico simétrico com multiplicidade m e dimensão e .

Demonstração. Se $e = 2$, então $S = \langle m, m + 1 \rangle$ é um semigrupo numérico simétrico com multiplicidade m e dimensão 2, pelo Corolário 1.76. Suponha agora que $e \geq 3$. Vamos separar em dois casos:

- Se $m - e$ é par, existe $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $m - e = 2q$. Como $e \geq 3$, temos que $m \geq m - e + 3$, então $m \geq 2q + 3$. O Lema 1.91 assegura a existência de um semigrupo numérico simétrico com multiplicidade m e dimensão $e = m - 2q$.

- Se $m - e$ é ímpar, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m - e = 2q + 1$. Como $e \geq 3$, segue que $m \geq m - e + 3$, logo $m \geq 2q + 4$. O Lema 1.93 garante a existência de um semigrupo numérico simétrico com multiplicidade m e dimensão $e = m - 2q - 1$. \square

Exemplo 1.95 Tomando $m = 10$ e $e = 8$, temos $m - e = 2$, assim $q = 1$ e obtemos $S = \langle 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19 \rangle$. Se $m = 10$ e $e = 5$, temos $m - e = 5 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow S = \langle 10, 11, 34, 35, 36 \rangle$.

Caso Pseudo-Simétrico

Vamos agora prosseguir com o caso pseudo-simétrico. Pelo Lema 1.83, vamos encontrar pequenas diferenças do caso simétrico.

Lema 1.96 *Seja S um semigrupo numérico pseudo-simétrico com $m(S) \geq 4$. Então,*

$$e(S) \leq m(S) - 1.$$

Demonstração. Pela Proposição 1.12, $e(S) \leq m(S)$. Se $e(S) = m(S)$, então S é minimalmente gerado por $\{m(S), n_1, \dots, n_{m(S)-1}\}$ e, pela Proposição 1.84, o $Ap(S, m(S))$ é da forma

$$Ap(S, m(S)) = \{0 < n_2 < \dots < n_{m(S)-1}\} \cup \left\{ n_1 = \frac{F(S)}{2} + m(S) \right\}.$$

Como $m(S) - 1 \geq 3$, pela Proposição 1.84, deduzimos que $n_{m(S)-1} - n_2 \in S$, contradizendo o fato de que $\{m(S), n_1, \dots, n_{m(S)-1}\}$ é um sistema de geradores minimal de S . \square

O resultado anterior nos diz que devemos prestar uma atenção especial para os casos de multiplicidade menor do que quatro. Sabemos que semigrupos numéricos de multiplicidade dois são sempre simétricos, como consequência do Corolário 1.76. Então, vamos estudar os semigrupos numéricos com multiplicidade três.

Lema 1.97 *As seguintes condições são equivalentes:*

- 1) S é um semigrupo numérico pseudo-simétrico com $m(S) = e(S) = 3$.
- 2) $S = \langle 3, x + 3, 2x + 3 \rangle$ com x um natural não divisível por 3.

Demonstração. 1) \Rightarrow 2) Se $m(S) = e(S) = 3$, então $\{3, n_1, n_2\}$ é um sistema de geradores minimal para S . Pela Proposição 1.73, deduzimos que $F(S)$ é par, e pela Proposição 1.84 temos que

$$Ap(S, 3) = \left\{ 0, n_1 = \frac{F(S)}{2} + 3, n_2 = F(S) + 3 \right\}.$$

Tomando $x = F(S)/2$ segue que $n_1 = x + 3$ e $n_2 = 2x + 3$. Além disso, como $F(S)/2 \notin S$, concluímos que 3 não divide x .

2) \Rightarrow 1) Observe que $\{3, x + 3, 2x + 3\}$ é um sistema de geradores minimal para S , logo $m(S) = e(S) = 3$. Desse modo, $Ap(S, 3) = \{0, x + 3, 2x + 3\}$, e pela Proposição 1.14, $F(S) = 2x + 3 - 3 = 2x$, então, $F(S)/2 = x$, concluindo que S é pseudo-simétrico, pela Proposição 1.84. \square

Pelo Corolário 1.76, todo semigrupo numérico de dimensão dois é simétrico. Vamos ver que para dimensão três, sempre existem semigrupos numéricos pseudo-simétricos com multiplicidade arbitrária.

Lema 1.98 *Seja m um inteiro positivo maior ou igual a quatro. Existe um semigrupo numérico pseudo-simétrico S com $m(S) = m$ e $e(S) = 3$.*

Demonstração. Vamos distinguir em dois casos dependendo da paridade de m .

1) Se m é par, então $m = 2q + 4$, para algum $q \in \mathbb{N}$. Seja

$$S = \langle m, m + 1, (q + 1)m + (m - 1) \rangle.$$

Temos que $m(S) = m$ e $e(S) = 3$, já que $m - 1 > q + 1$, logo $(q + 1)m + m - 1 \notin \langle m, m + 1 \rangle$. Além disso,

$$Ap(S, m) = \{0, m + 1, 2(m + 1), \dots, (m - 2)(m + 1)\} \cup \{(q + 1)m + (m - 1)\},$$

pois

$$\begin{aligned} 2((q + 1)m + m - 1) &= 2((q + 2)m - 1) \\ &= m(2q + 4) - 2 \\ &= m \cdot m - 2 \\ &= (m - 1)(m + 1) - 1 \\ &> (m - 2)(m + 1). \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.14, $F(S) = (m - 2)(m + 1) - m = (m - 2)m + m - 2 - m = (m - 2)m - 2$, o qual é par, e $\frac{F(S)}{2} + m = \frac{(2q + 2)m - 2}{2} + m = (q + 1)m + (m - 1)$. Daí, pela Proposição 1.84, concluímos que S é um semigrupo numérico pseudo-simétrico.

2) Se m é ímpar, então $m = 2q + 3$, para algum $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Seja

$$S = \langle m, m + 1, (q + 1)m + q + 2 \rangle.$$

Seguindo o mesmo raciocínio do caso anterior, temos que $m(S) = m$ e $e(S) = 3$. Além disso,

$$Ap(S, m) = \{0, m + 1, 2(m + 1), \dots, q(m + 1), (q + 1)m + q + 2, (m + 1) + (q + 1)m + q + 2, \dots, q(m + 1) + (q + 1)m + q + 2\} \cup \{(q + 1)(m + 1)\}.$$

Consequentemente, $F(S) = q(m + 1) + (q + 1)m + q + 2 - m = q(m + 1) + qm + q + 2 = 2q(m + 1) + 2$, que é par, e $\frac{F(S)}{2} + m = q(m + 1) + 1 + m = (q + 1)(m + 1)$. Assim, pela Proposição 1.84, S é pseudo-simétrico. \square

Vamos agora prosseguir como no caso simétrico, apresentando duas famílias de semigrupos numéricos pseudo-simétricos que serão usados dependendo da paridade de $m - e$.

Lema 1.99 *Sejam $m, q \in \mathbb{N}$ tais que $m \geq 2q + 5$ e S o submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ gerado por*

$$\{m, m + 1, (q + 1)m + q + 2, \dots, (q + 1)m + m - q - 3, (q + 1)m + m - 1\}.$$

Então S é um semigrupo numérico pseudo-simétrico com $m(S) = m$, $e(S) = m - 2q - 1$ e $F(S) = 2(q + 1)m - 2$.

Demonstração. Como $\text{mdc}\{m, m+1\} = 1$, segue que S é um semigrupo numérico com $m(S) = m$. Observe que

$\{n_0 = m, n_1 = m+1, n_2 = (q+1)m+q+2, \dots, n_{p-1} = (q+1)m+m-q-3, n_p = (q+1)m+m-1\}$ é um sistema de geradores minimal de S , já que $n_2, \dots, n_p \notin \langle m, m+1 \rangle$ (em particular, como $m \geq 2q+5$, então $m-q-3 \geq q+2 > q+1$). Assim, temos que $e(S) = m-2q-1$. Além disso,

$$Ap(S, m) = \{0, n_1, 2n_1, \dots, (q+1)n_1, n_2, \dots, n_{p-1}, 2n_1 + n_{p-1}, \dots, qn_1 + n_{p-1}, (q+1)n_1 + n_{p-1}\} \cup \{n_p\},$$

logo $F(S) = (q+1)n_1 + n_{p-1} - m = (q+1)(m+1) + (q+1)m - q - 3 = 2(q+1)m + q + 1 - q - 3 = 2(q+1)m - 2$, $\frac{F(S)}{2} + m = (q+1)m - 1 + m = n_p$, e se $p \geq 4$, $F(S) + m = n_i + n_{p-i}$, para todo $i \in \{2, \dots, \lceil p/2 \rceil\}$. Desse modo, pela Proposição 1.84, temos que S é pseudo-simétrico. \square

Lema 1.100 *Sejam $m, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $m \geq 2q+4$ e S o submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ gerado por*

$$\{m, m+1, qm+2q+3, \dots, qm+m-1, (q+1)m+q+2\}.$$

Então, S é um semigrupo numérico pseudo-simétrico com $m(S) = m$, $e(S) = m-2q$ e $F(S) = 2qm+2q+2$.

Demonstração. Observando o sistema de geradores de S é possível concluir que S é um semigrupo numérico, e $m(S) = m$. Além disso,

$\{n_0 = m, n_1 = m+1, n_2 = qm+2q+3, \dots, n_{p-1} = qm+(m-1), n_p = (q+1)m+q+2\}$ é o sistema de geradores minimal de S , já que $n_2, \dots, n_{p-1} \notin \langle m, m+1 \rangle$ e $n_p \notin \langle n_0, n_1, \dots, n_{p-1} \rangle$. Agora,

$$Ap(S, m) = \{0, n_1, 2n_1, \dots, qn_1, n_2, \dots, n_{p-1}, n_p, n_1 + n_p, 2n_1 + n_p, \dots, qn_1 + n_p\} \cup \{(q+1)n_1\},$$

onde $F(S) = qn_1 + n_p - m = q(m+1) + (q+1)m + q + 2 - m = q(m+1) + qm + q + 2 = 2q(m+1) + 2$, $\frac{F(S)}{2} + m = q(m+1) + 1 + m = (q+1)(m+1) = (q+1)n_1$, e $F(S) + m = n_i + n_{p-i+1}$, para todo $i \in \{2, \dots, \lceil (p+1)/2 \rceil\}$. Assim, pela Proposição 1.84, temos que S é pseudo-simétrico. \square

Teorema 1.101 *Sejam m e e inteiros positivos tais que $3 \leq e \leq m-1$. Então existe um semigrupo numérico pseudo-simétrico com multiplicidade m e dimensão e .*

Demonstração. Se $e = 3$, então o Lema 1.98 garante a existência desse semigrupo numérico. Vamos assumir então que $4 \leq e \leq m-1$, e distinguir em dois casos, dependendo da paridade de $m-e$.

1) Se $m-e$ é ímpar, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m-e = 2q+1$. Além disso, como $e \geq 4$, segue que $m \geq m-e+4 = 2q+5$. Assim, pelo Lema 1.99, existe um semigrupo numérico pseudo-simétrico S com multiplicidade m e dimensão $e(S) = m-2q-1 = e$.

2) Se $m-e$ é par, existe $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $m-e = 2q$. Como $e \geq 4$, temos que $m \geq m-e+4 = 2q+4$. Portanto, pelo Lema 1.100, existe um semigrupo numérico pseudo-simétrico S com multiplicidade m e dimensão $e(S) = m-2q = e$. \square

Exemplo 1.102 • *Tomando $m = 7$ e $e = 5$, segue que $m-e = 2 \Rightarrow q = 1 \Rightarrow S = \langle 7, 8, 12, 13, 17 \rangle$ é um semigrupo numérico pseudo-simétrico com $F(S) = 18$.*

• *Tomando $m = 9$ e $e = 4$, então $m-e = 5 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow S = \langle 9, 10, 31, 35 \rangle$ é um semigrupo numérico pseudo-simétrico com $F(S) = 52$.*

• *Tomando $m = 6$ e $e = 3$, logo $q = 1 \Rightarrow S = \langle 6, 7, 17 \rangle$ é um semigrupo numérico pseudo-simétrico com $F(S) = 22$.*

1.3.3 Extensões Unitárias de um Semigrupo Numérico

Vamos introduzir o conceito de lacuna especial de um semigrupo numérico. Essa definição foi motivada pelo problema de encontrar o conjunto de todos os semigrupos numéricos que contêm um dado semigrupo numérico.

Dado um semigrupo numérico S , denote por

$$SG(S) = \{x \in PF(S) \mid 2x \in S\}.$$

Seus elementos são chamados *lacunas especiais* de S .

Tomando $S = \langle 5, 7, 8, 9, 11 \rangle$, temos que $G(S) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, logo $PF(S) = \{2, 3, 4, 6\}$ e assim, $SG(S) = \{4, 6\}$.

Proposição 1.103 *Sejam S um semigrupo numérico e $x \in G(S)$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- 1) $x \in SG(S)$;
- 2) $S \cup \{x\}$ é um semigrupo numérico.

Demonstração. 1) \Rightarrow 2) Observe que $S \cup \{x\}$ é um semigrupo numérico, já que:

- é fechado para a soma, pois, como $x \in PF(S)$, $x + s \in S$, para todo $s \in S$, e $nx \in S$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pela definição de $SG(S)$. Consequentemente, $S \cup \{x\}$ é um submonoide de $(\mathbb{N}, +)$;

- possui complemento finito, já que S possui complemento finito e $S \subset S \cup \{x\}$.

2) \Rightarrow 1) Por outro lado, se $S \cup \{x\}$ é um semigrupo numérico, segue que $S \cup \{x\}$ é fechado para a soma, logo $x + s \in S$, para todo $s \in S^*$, ou seja, $x \in PF(S)$, e $2x \in S$, concluindo que $x \in SG(S)$. \square

Exemplo 1.104 *Seja $S = \langle 7, 8, 9, 11, 13 \rangle = \{0, 7, 8, 9, 11, 13, \rightarrow\}$, então $SG(S) = \{10, 12\}$, e temos que $\langle 7, 8, 9, 10, 11, 13 \rangle$ e $\langle 7, 8, 9, 11, 12, 13 \rangle$ são semigrupos numéricos.*

Lema 1.105 *Sejam S e T dois semigrupos numéricos tais que $S \subsetneq T$. Então, $S \cup \{\max(T \setminus S)\}$ é um semigrupo numérico, ou equivalentemente, $\max(T \setminus S) \in SG(S)$.*

Demonstração. Como S e T são semigrupos numéricos, e $S \subsetneq T$, existe $x = \max(T \setminus S)$. Além disso, $x + s \in T$ e $x + s > x$, para todo $s \in S^*$, logo $x + s \in S$, ou seja, $x \in PF(S)$. Analogamente, $2x \in T$ e $2x > x$, portanto, $2x \in S$. Desse modo, segue que $x \in SG(S)$. \square

Dado um semigrupo numérico S , denotamos por $\mathcal{O}(S)$ o conjunto de todos os semigrupos numéricos que contêm S . Como o complemento de S em \mathbb{N} é finito, temos que $\mathcal{O}(S)$ é finito.

Dados dois semigrupos numéricos S e T com $S \subseteq T$, vamos definir recursivamente

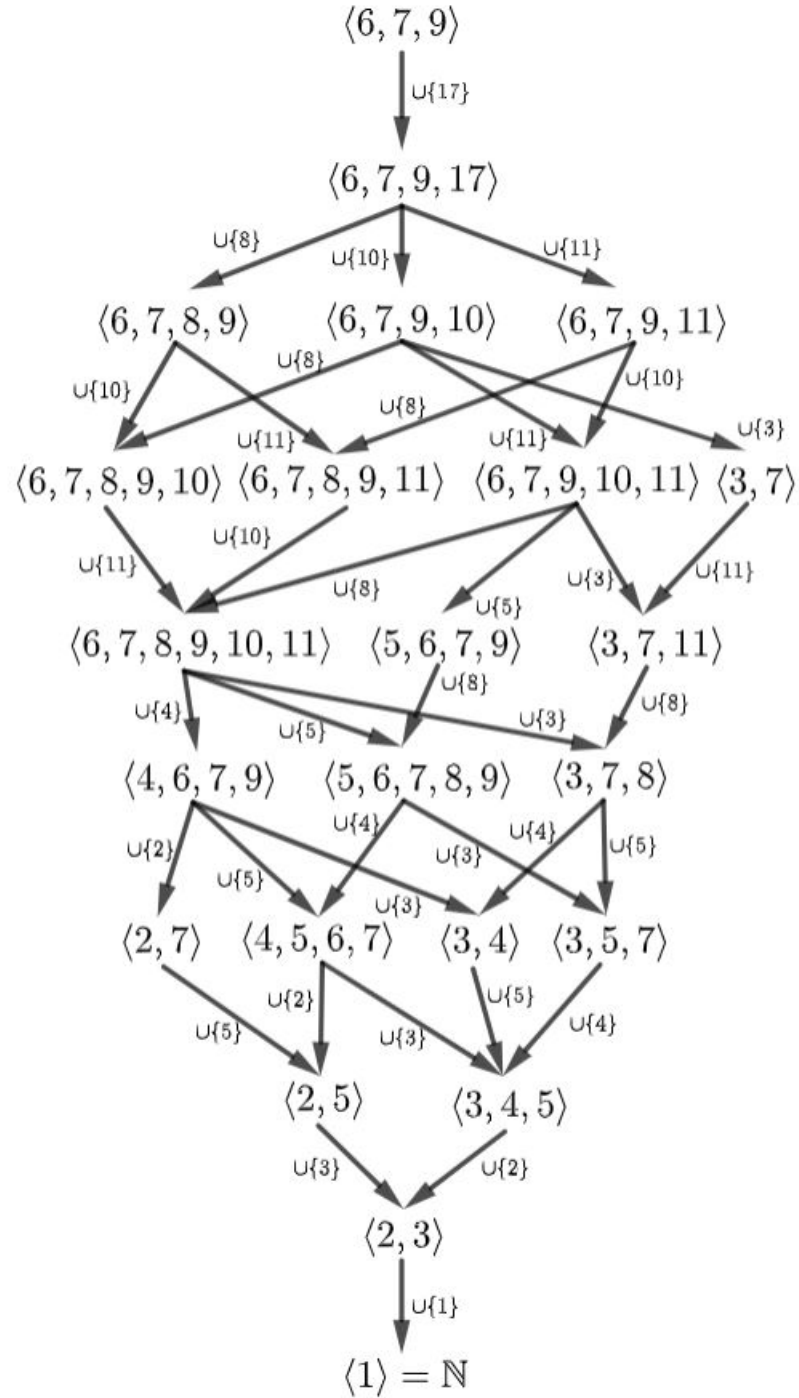
- $S_0 = S$;
- $S_{n+1} = S_n \cup \{\max(T \setminus S_n)\}$ se $S_n \neq T$, e $S_n = S_{n+1}$ caso contrário.

Se a cardinalidade de $T \setminus S$ é k , então

$$S = S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \cdots \subsetneq S_k = T.$$

Usando essa ideia, podemos construir o conjunto $\mathcal{O}(S)$. Começamos definindo $\mathcal{O}(S) = \{S\}$, e então para cada elemento em $\mathcal{O}(S)$ diferente de \mathbb{N} (observe que $SG(\mathbb{N})$ é o conjunto vazio), nós anexamos a $\mathcal{O}(S)$ o semigrupo numérico $S \cup \{x\}$, onde $x \in SG(S)$.

Exemplo 1.106 *Seja $S = \langle 6, 7, 9 \rangle$. Para esse semigrupo numérico, $SG(S) = 17$, logo $S \cup \{17\} = \langle 6, 7, 9, 17 \rangle$ é um semigrupo numérico contendo S (o único que difere em apenas um elemento). Como $SG(S \cup \{17\}) = \{8, 10, 11\}$, obtemos os semigrupos $S \cup \{17, 8\}$, $S \cup \{17, 10\}$ e $S \cup \{17, 11\}$. Repetindo esse processo conseguimos encontrar $\mathcal{O}(S)$, como vemos no gráfico a seguir.*



Proposição 1.107 *Sejam S um semigrupo numérico e $\{g_1, \dots, g_t\} \subseteq G(S)$. As seguintes condições são equivalentes:*

- 1) S é maximal (com respeito a inclusão de conjuntos) no conjunto de todos os semigrupos numéricos T tais que $T \cap \{g_1, \dots, g_t\}$ é vazio.
- 2) $SG(S) \subseteq \{g_1, \dots, g_t\}$.

Demonstração. 1) \Rightarrow 2) Seja $x \in SG(S)$. Pela Proposição 1.103 sabemos que $S \cup \{x\}$ é um semigrupo numérico que contém S propriamente, logo devemos ter que $(S \cup \{x\}) \cap \{g_1, \dots, g_t\} \neq \emptyset$, ou seja, $SG(S) \subseteq \{g_1, \dots, g_t\}$.

2) \Rightarrow 1) Pelo Lema 1.105 temos que se T é um semigrupo numérico que contém S propriamente, então $\max(T/S) \in SG(S)$, logo, como $SG(S) \subseteq \{g_1, \dots, g_t\}$, segue que $T \cap \{g_1, \dots, g_t\} \neq \emptyset$, concluindo assim a demonstração. \square

Como corolário desse resultado podemos encontrar outra caracterização de semigrupos numéricos irredutíveis. Pelo Teorema 1.71 sabemos que um semigrupo numérico S é irredutível se, e somente se, é maximal no conjunto dos semigrupos numéricos que não contêm $\{F(S)\}$. Observe que $F(S) \in SG(S)$, quando $S \neq \mathbb{N}$.

Corolário 1.108 *Seja S um semigrupo numérico. Então S é irredutível se, e somente se, $SG(S)$ possui no máximo um elemento.*

Os dois próximos resultados nos permitem formar uma generalização da construção proposta no Lema 1.72 para encontrar um semigrupo irredutível que contém um dado semigrupo numérico com o mesmo número de Frobenius.

Lema 1.109 *Sejam S um semigrupo numérico e $\{g_1, \dots, g_t\} \subseteq G(S)$. As seguintes condições são equivalentes:*

- 1) S é maximal no conjunto dos semigrupos numéricos T tais que $T \cap \{g_1, \dots, g_t\} = \emptyset$;
- 2) Se $x \in G(S)$, então existe $i \in \{1, \dots, t\}$ e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $g_i - kx \in S$.

Demonstração. 1) \Rightarrow 2) Seja $x \in G(S)$. Como $S \subsetneq \langle S, x \rangle$, temos que $\langle S, x \rangle \cap \{g_1, \dots, g_t\} \neq \emptyset$. Assim, existe $i \in \{1, \dots, t\}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $s \in S$ tais que $g_i = s + kx$. Portanto, $g_i - kx \in S$.

2) \Rightarrow 1) Seja T um semigrupo numérico tal que $S \subsetneq T$. Tome $x \in T \setminus S$. Então $S \subsetneq \langle S, x \rangle \subseteq T$, e por hipótese existem i e k tais que $g_i - kx \in S$. Consequentemente, $g_i \in \langle S, x \rangle \Rightarrow g_i \in T$. \square

Proposição 1.110 *Sejam S um semigrupo numérico e $\{g_1, \dots, g_t\} \subseteq G(S)$. Se existe*

$$h = \max \{x \in \mathbb{Z} \setminus S \mid 2x \in S, g_i - x \notin S, \forall i \in \{1, \dots, t\}\},$$

então $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico que não intersecta $\{g_1, \dots, g_t\}$.

Demonstração. Pela Proposição 1.103, devemos mostrar que $h \in SG(S)$. Pela definição de h , note que $2h \in S$, então assumamos que existe $s \in S^*$ tal que $h + s \notin S$. Como $2(h + s) \in S$, e $h < h + s$, temos que $g_i - (h + s) \in S$, para algum $i \in \{1, \dots, t\}$. Logo, $g_i - h = g_i - (h + s) + s \in S$, contradizendo a definição de h . \square

Corolário 1.111 *Sejam S um semigrupo numérico e $\{g_1, \dots, g_t\} \subseteq G(S)$. As seguintes condições são equivalentes:*

- 1) S é maximal no conjunto de todos semigrupos numéricos cuja interseção com $\{g_1, \dots, g_t\}$ é vazia;
- 2) Para cada $x \in \mathbb{N}$, se $x \in G(S)$ e $2x \in S$, então $g_i - x \in S$, para algum $i \in \{1, \dots, t\}$.

Demonstração. 1) \Rightarrow 2) Se existe $x \in G(S)$ tal que $2x \in S$ e $g_i - x \notin S$, para todo $i \in \{1, \dots, t\}$, então é possível encontrar h como está definido na Proposição 1.110, e temos que $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico que contém S propriamente e não intersecta $\{g_1, \dots, g_t\}$, contrariando a hipótese.

2) \Rightarrow 1) Pelo visto no Lema 1.109, basta mostrar que para todo $x \in G(S)$, existem apropriados i e k tais que $g_i - kx \in S$. Sejam $x \in G(S)$ e $k = \max \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid nx \notin S\}$. Desse modo, $kx \in G(S)$ e $2kx \in S$. Por hipótese, $g_i - kx \in S$, para algum $i \in \{1, \dots, t\}$. \square

Corolário 1.112 *Seja S um semigrupo numérico. Então S é irredutível se, e somente se, para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \in G(S)$ e $2x \in S$ implica que $F(S) - x \in S$.*

Demonstração. Segue do Teorema 1.71 e do Corolário 1.111. \square

Seja \mathcal{S} o conjunto de todos os semigrupos numéricos. Para $\{g_1, \dots, g_t\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$, defina

$$\mathcal{S}(g_1, \dots, g_t) = \{S' \in \mathcal{S} \mid S' \cap \{g_1, \dots, g_t\} = \emptyset\}.$$

A Proposição 1.110 pode ser usada para encontrar um elemento maximal em $\mathcal{S}(g_1, \dots, g_t)$. Basta tomar como ponto inicial $S = \{0, \max\{g_1, \dots, g_t\} + 1, \rightarrow\}$ e definir recursivamente

- $S_0 = S$,
- $S_{n+1} = S_n \cup \{h(S_n)\}$, onde $h(S_n)$ é

$$\max \{x \in G(S_n) \mid 2x \in S_n, g_i - x \notin S_n, \forall i \in \{1, \dots, t\}\}.$$

Se $h(S_n)$ não existe, então S_n é o semigrupo numérico desejado (o Corolário 1.111 nos dá a condição de parada).

Exemplo 1.113 *Vamos calcular um elemento em $\text{Maximais}_{\subseteq}(\mathcal{S}(4, 7, 9))$.*

- $S_0 = \{0, 10, \rightarrow\}$, $h(S_0) = 8$;
- $S_1 = \{0, 8, 10, \rightarrow\}$, $h(S_1) = 6$;
- $S_2 = \{0, 6, 8, 10, \rightarrow\}$, $h(S_2) = 5$;
- $S_3 = \{0, 5, 6, 8, 10, \rightarrow\}$, e $h(S_3)$ não existe, logo $S_3 \in \text{Maximais}_{\subseteq}(\mathcal{S}(4, 7, 9))$.

1.3.4 Decomposição de um Semigrupo Numérico em Irredutíveis

Vamos apresentar um procedimento para calcular uma decomposição de um dado semigrupo numérico em semigrupos numéricos irredutíveis. Também vamos mostrar como obter decomposições "minimais".

Seja S um semigrupo numérico. Se S não é irredutível, então existem S_1 e S_2 que contêm propriamente S e tais que $S = S_1 \cap S_2$. Podemos perguntar agora se S_1 e S_2 são irredutíveis, e no caso negativo, escrevê-los como a interseção de dois outros semigrupos numéricos. Podemos repetir esse processo várias vezes, porém apenas uma quantidade finita, já que cada semigrupo numérico dessa construção contém S propriamente e $\mathcal{O}(S)$ é finito.

Proposição 1.114 *Todo semigrupo numérico pode ser escrito como a interseção de uma quantidade finita de semigrupos numéricos irredutíveis.*

Relembre que temos um procedimento para construir $\mathcal{O}(S)$ para qualquer semigrupo numérico S , baseado na computação do conjunto $SG(S)$. Na execução desse processo, podemos escolher os semigrupos com no máximo uma lacuna especial, os quais são semigrupos numéricos irredutíveis que contêm S , pelo visto no Corolário 1.108. Denote por

$$\mathcal{I}(S) = \{T \in \mathcal{O}(S) \mid T \text{ é irredutível}\}.$$

Segue que $S = \bigcap_{T \in \mathcal{I}(S)} T$. Podemos remover dessa interseção os elementos que não são minimais com respeito à inclusão de conjuntos, e o semigrupo resultante permanece inalterado.

Proposição 1.115 *Sejam S um semigrupo numérico e*

$$\{S_1, \dots, S_n\} = \text{Minimais}_{\subseteq} \mathcal{I}(S).$$

Então,

$$S = S_1 \cap \dots \cap S_n.$$

Essa decomposição não é necessariamente minimal (no sentido de possuir a quantidade mínima de irreduzíveis envolvidos) como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.116 Seja $S = \langle 5, 6, 8 \rangle$. Vamos computar o conjunto $\text{Minimais}_{\subseteq} \mathcal{I}(S)$. Como $SG(S) = \{7, 9\}$, pela Proposição 1.103, $S \cup \{7\}$ e $S \cup \{9\}$ são semigrupos numéricos. Agora, $SG(S \cup \{7\}) = \{9\}$, logo, $S \cup \{7\}$ é irreduzível (Corolário 1.108), daí $S \cup \{7\} \in \text{Minimais}_{\subseteq} \mathcal{I}(S)$. Por outro lado, $SG(S \cup \{9\}) = \{3, 4, 7\}$, por isso $S \cup \{9\}$ não é irreduzível. No entanto, $S \cup \{9, 3\}$ e $S \cup \{9, 4\}$ são irreduzíveis, e $S \cup \{7\} \subseteq S \cup \{9, 7\}$, assim

$$\text{Minimais}_{\subseteq} \mathcal{I}(S) = \{S \cup \{7\}, S \cup \{9, 3\}, S \cup \{9, 4\}\}.$$

Por fim,

$$S = (S \cup \{7\}) \cap (S \cup \{9, 3\}) \cap (S \cup \{9, 4\}) = (S \cup \{7\}) \cap (S \cup \{9, 4\}).$$

Quando olhamos para o menor n tal que $S = S_1 \cap \dots \cap S_n$, onde $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{I}(S)$, então basta procurar pelas decomposições com elementos em $\text{Minimais}_{\subseteq} \mathcal{I}(S)$.

Proposição 1.117 Seja S um semigrupo numérico. Se $S = S_1 \cap \dots \cap S_n$, com $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{I}(S)$, então existem $S'_1, \dots, S'_n \in \text{Minimais}_{\subseteq} \mathcal{I}(S)$ tais que

$$S = S'_1 \cap \dots \cap S'_n.$$

Demonstração. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se S_i não pertence ao conjunto $\text{Minimais}_{\subseteq} \mathcal{I}(S)$, então basta tomar $S'_i \in \text{Minimais}_{\subseteq} \mathcal{I}(S)$ tal que $S'_i \subseteq S_i$. \square

A próxima proposição nos dá uma dica sobre quais semigrupos devem aparecer em uma decomposição minimal.

Proposição 1.118 Sejam S um semigrupo numérico e $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{O}(S)$. As seguintes condições são equivalentes:

- 1) $S = S_1 \cap \dots \cap S_n$;
- 2) Para todo $h \in SG(S)$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $h \notin S_i$.

Demonstração. 1) \Rightarrow 2) Se $h \in SG(S)$, então $h \notin S$, conseqüentemente $h \notin S_i$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$.

2) \Rightarrow 1) Se $S \subsetneq S_1, \dots, S_n$, pelo Lema 1.105, $h = \max((S_1 \cap \dots \cap S_n) \setminus S)$ pertence a $SG(S)$, e está em S_i , para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, contradizendo a hipótese. \square

Podemos computar $\text{Minimais}_{\subseteq} \mathcal{I}(S) = \{S_1, \dots, S_n\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, seja

$$C(S_i) = \{h \in SG(S) \mid h \notin S_i\}.$$

Pela Proposição 1.118, sabemos que

$$S = S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_r} \text{ se, e somente se, } C(S_{i_1}) \cup \dots \cup C(S_{i_r}) = SG(S).$$

Pelos resultados anteriores podemos obter um método para calcular uma decomposição de S como interseção de semigrupos numéricos irreduzíveis com a menor quantidade possível de elementos.

Para um conjunto Y , usamos $\#Y$ para denotar a sua cardinalidade.

Algoritmo 1.119 Seja S um semigrupo numérico não irredutível.

- (1) Encontre o conjunto $SG(S)$.
- (2) Tome $I = \emptyset$ e $C = \{S\}$.
- (3) Para todo $S' \in C$, compute (usando a Proposição 1.103) todos os semigrupos \bar{S} tais que $\#(\bar{S} \setminus S') = 1$. Remova S' de C . Seja B o conjunto formado pelos semigrupos formados dessa maneira.
- (4) Remova de B os semigrupos S' que cumprem $SG(S) \subseteq S'$.
- (5) Remova de B os semigrupos S' tais que existem $\tilde{S} \in I$ com $\tilde{S} \subseteq S'$.
- (6) O conjunto $C = \{S' \in B \mid S' \text{ não é irredutível}\}$.
- (7) O conjunto $I = I \cup \{S' \in B \mid S' \text{ é irredutível}\}$.
- (8) Se $C \neq \emptyset$, vá para o passo 3.
- (9) Para cada $S \in I$, compute $C(S)$.
- (10) Escolha $\{S_1, \dots, S_r\}$ de modo que r é o menor obedecendo

$$C(S_1) \cup \dots \cup C(S_r) = SG(S).$$

- (11) Retorne S_1, \dots, S_r .

A seguir vamos ilustrar esse método com um exemplo.

Exemplo 1.120 Seja $S = \langle 5, 6, 7 \rangle$, então $SG(S) = \{8, 9\}$. Tomando $S_1 = \langle 5, 6, 7, 8 \rangle$ e $S_2 = \langle 5, 6, 7, 9 \rangle$, temos que $B = \{S_1, S_2\}$, e S_1 e S_2 são irredutíveis, logo $I = B$ e $C = \emptyset$. Além disso, $C(S_1) = \{9\}$ e $C(S_2) = \{8\}$, assim, $C(S_1) \cup C(S_2) = SG(S)$, concluindo que a decomposição minimal de S é $S = \langle 5, 6, 7, 8 \rangle \cap \langle 5, 6, 7, 9 \rangle$.

Dado um semigrupo numérico, podemos considerar dois tipos de minimalidade para a decomposição desse semigrupo em irredutíveis. O primeiro é em termos da sua cardinalidade, que é *minimal* no sentido da menor quantidade possível de irredutíveis aparecendo na decomposição. O segundo é em termos da redundância, ou seja, uma decomposição é *minimal* se nenhum semigrupo envolvido é redundante (não pode ser eliminado e a interseção permanecer a mesma), em outras palavras, não pode ser refinado em uma decomposição menor. Ambos conceitos não coincidem. Observe que a decomposição com menor número de irredutíveis envolvidos não pode ser refinada, no entanto, existem decomposições que não podem ser refinadas com mais irredutíveis que outras decomposições.

Exemplo 1.121 O semigrupo numérico $S = \langle 5, 21, 24, 28, 32 \rangle$ pode ser escrito como

$$S = \langle 5, 9, 12, 13 \rangle \cap \langle 5, 11, 12, 13 \rangle \cap \langle 5, 12, 14, 16 \rangle \cap \langle 5, 14, 16, 18 \rangle$$

e como

$$S = \langle 5, 7 \rangle \cap \langle 5, 8 \rangle.$$

1.3.5 Lacunas Fundamentais de um Semigrupo Numérico

Pelo visto na Proposição 1.107, se S é um semigrupo numérico, o conjunto $SG(S)$ determina S até a maximalidade (com respeito a inclusão de conjuntos). Isso não significa que o determina unicamente. Podemos encontrar semigrupos numéricos S e T com $T \neq S$ e $SG(T) = SG(S)$ (isso implica que $S \subseteq T$, ou $T \subseteq S$).

Exemplo 1.122 Sejam $S_1 = \langle 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15 \rangle$ e $S_2 = \langle 5, 8, 11, 12 \rangle$. Então, $SG(S_1) = SG(S_2) = 14$.

Vamos apresentar nessa seção um subconjunto do conjunto de lacunas de um semigrupo numérico que o determina totalmente.

Seja S um semigrupo numérico. Dizemos que o conjunto X de inteiros positivos determina as lacunas de S se S é o maior (com respeito a inclusão de conjuntos) semigrupo numérico tal que $X \subseteq G(S)$.

Dado $X \subseteq \mathbb{N}$, denotamos por $D(X)$ o conjunto de todos os divisores positivos dos elementos de X , isto é,

$$D(X) = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ divide algum } x \in X\}.$$

Proposição 1.123 *Seja X um conjunto finito de inteiros positivos. As seguintes condições são equivalentes:*

- 1) *O conjunto X determina as lacunas de um semigrupo numérico;*
- 2) *$\mathbb{N} \setminus D(X)$ é um semigrupo numérico.*

Se essas condições são válidas, então X determina as lacunas do semigrupo numérico $\mathbb{N} \setminus D(X)$.

Demonstração. 1) \Rightarrow 2) Seja S um semigrupo numérico cujas lacunas são determinadas por X . Como $X \subseteq G(S)$, temos que $D(X) \subseteq G(S)$, logo $S \subseteq \mathbb{N} \setminus D(X)$. Tome $a \in \mathbb{N} \setminus D(X)$. Então $S' = \langle a, \max(X) + 1, \rightarrow \rangle$ é um semigrupo numérico tal que $X \subseteq G(S')$, e pela definição de S , $S' \subseteq S$. Consequentemente, $a \in S$, concluindo que $\mathbb{N} \setminus D(X) = S$. Em particular, obtemos que $\mathbb{N} \setminus D(X)$ é um semigrupo numérico.

2) \Rightarrow 1) Segue do fato de que X determina as lacunas de $\mathbb{N} \setminus D(X)$. □

Proposição 1.124 *Sejam S um semigrupo numérico e X um subconjunto de $G(S)$. As seguintes condições são equivalentes:*

- 1) *X determina as lacunas de S ;*
- 2) *Para cada $a \in \mathbb{N}$, se $a \in G(S)$ e $\{2a, 3a\} \subset S$, então $a \in X$.*

Demonstração. 1) \Rightarrow 2) Aplicando a Proposição 1.123, temos que $S = \mathbb{N} \setminus D(X)$, consequentemente, $G(S) = D(X)$. Se $a \in G(S)$, então existe $x \in X$ tal que $a|x$ e assim $ka = x$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Se assumirmos que $\{2a, 3a\} \subset S$, temos que $la \in S$, para todo $l \geq 2$. Desse modo, $k = 1$ e $a = x \in X$.

2) \Rightarrow 1) Pelo visto na Proposição 1.123, é suficiente mostrar que $S = \mathbb{N} \setminus D(X)$. Por hipótese, $X \subseteq G(S)$, logo $D(X) \subseteq G(S)$, e $S \subseteq \mathbb{N} \setminus D(X)$. Se a é um inteiro não negativo que não pertence a S , então $a \in G(S)$. Seja $k = \max\{n \in \mathbb{N} \mid na \in G(S)\}$ ($G(S)$ é finito, $0 \notin G(S)$ e então $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Segue que $ka \in G(S)$ e $\{2ka, 3ka\} \subset S$. Daí, por hipótese, $ka \in X$, portanto, $a \in D(X)$, concluindo que $S = \mathbb{N} \setminus D(X)$. □

Esse resultado motivou a seguinte definição. Uma lacuna x de um semigrupo numérico S é *fundamental* se $\{2x, 3x\} \subset S$ (ou equivalentemente, $kx \in S$, para todo $k > 1$). Vamos denotar por $FG(S)$ o conjunto das lacunas fundamentais de S .

Exemplo 1.125 *Seja $S = \langle 6, 9, 11 \rangle$. Então, $FG(S) = \{3, 10, 13, 14, 16, 19, 25\}$.*

Com essa nova notação, podemos reformular a Proposição 1.124.

Corolário 1.126 *Sejam S um semigrupo numérico e X um subconjunto de $G(S)$. Então X determina as lacunas de S se, e somente se, $FG(S) \subseteq X$.*

Assim, para um semigrupo numérico S , $FG(S)$ é o menor (com respeito a inclusão de conjuntos) subconjunto de $G(S)$ que determina as lacunas de S . Dois elementos diferentes de $FG(S)$ não são comparáveis com respeito à relação de divisibilidade.

Proposição 1.127 *Seja X um subconjunto finito de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. As seguintes condições são equivalentes:*

- 1) *Existe um semigrupo numérico S tal que $FG(S) = X$;*
- 2) *$\mathbb{N} \setminus D(X)$ é um semigrupo numérico e $x \nmid y$ para todos $x, y \in X$ com $x \neq y$.*

Demonstração. 1) \Rightarrow 2) Essa implicação já foi provada.

2) \Rightarrow 1) Se $S = \mathbb{N} \setminus D(X)$ é um semigrupo numérico, então X determina suas lacunas. Além disso, aplicando o Corolário 1.126, temos que $FG(S) \subseteq X$. Sabemos pela hipótese que $x \nmid y$ para todos $x, y \in X$, $x \neq y$, logo para cada $x \in X$, $\{2x, 3x\} \cap D(X) = \emptyset$. Consequentemente, $x \in FG(S)$. \square

Sejam S um semigrupo numérico e $x \in SG(S)$. Então $3x = x + 2x \in S$, já que $2x \in S$ por definição e $x \in PF(S)$. Desse modo, $SG(S) \subseteq FG(S)$. Além disso, a condição $x + s \in S$, para todo $s \in S^*$ implica que os elementos de $SG(S)$ são maximais em $FG(S)$ com respeito a relação de ordem \leq_S .

Proposição 1.128 *Seja S um semigrupo numérico. Então*

$$SG(S) = \text{Maximais}_{\leq_S} FG(S).$$

O Corolário 1.108 pode ser reformulado de acordo com essa informação.

Corolário 1.129 *Seja S um semigrupo numérico. Então S é irredutível se, e somente se, o conjunto $\text{Maximais}_{\leq_S} FG(S)$ possui no máximo um elemento.*

1.4 Semigrupos Numéricos Quase Simétricos

Nessa seção vamos apresentar alguns resultados que foram trabalhados nas referências [8] e [11] para semigrupos numéricos quase simétricos.

Lembremos que se S é um semigrupo numérico, então denotamos por $N(S) = \{s \in S \mid s < F(S)\}$. Observe que se $s \in N(S)$, temos que $F(S) - s \notin S$, e se $x \in PF(S)$, com $g \neq F(S)$, então $F(S) - g \notin S$. Daí, a função

$$\begin{aligned} N(S) \cup [PF(S) \setminus \{F(S)\}] &\rightarrow G(S) \\ h &\mapsto F(S) - h \end{aligned}$$

é injetora, o que prova o seguinte resultado.

Proposição 1.130 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}$ um semigrupo numérico. Então*

$$2g(S) \leq F(S) + t(S).$$

É claro que se um semigrupo numérico é simétrico ou pseudo-simétrico, então a igualdade da Proposição 1.130 é válida. Em geral, um semigrupo numérico é dito *quase simétrico* se a igualdade é válida.

Lembrando que se S é um semigrupo numérico, um ideal relativo I de S é um subconjunto de \mathbb{Z} tal que $I + S \subset I$ e $s + I = \{s + i \mid i \in I\} \subset S$, para algum $s \in S$, e um ideal de S é um ideal relativo de S que está contido em S . Daí, vamos definir dois ideais importantes para a teoria de semigrupos numéricos quase simétricos. Seja S um semigrupo numérico. O ideal $M := S \setminus \{0\}$ é chamado *ideal maximal* de S , onde $M - M = S \cup PF(S)$. Além disso, definimos $K_S := \{F(S) - h \mid h \in \mathbb{Z} \setminus S\}$. Observe que $S \subseteq K_S$ e que K_S é um ideal relativo de S . Esse ideal é chamado *ideal canônico* de S .

Proposição 1.131 *Seja S um semigrupo numérico. Então as seguintes condições são equivalentes.*

- 1) $K_S \subset M - M$;
- 2) $h \notin S$ implica que $F(S) - h \in S$, ou $h \in PF(S)$;
- 3) $2g(S) = F(S) + t(S)$;
- 4) $K_{M-M} = M - m(S)$.

Um semigrupo numérico S satisfazendo qualquer uma dessas condições equivalentes é dito quase simétrico.

Note que se S é simétrico ou pseudo-simétrico (ou seja, irredutível), então S é quase simétrico. Por outro lado, um semigrupo numérico quase simétrico com tipo dois é pseudo-simétrico (veja no Corolário 1.134).

Teorema 1.132 *Sejam S um semigrupo numérico de tipo t e $n \in S^*$. Tome $Ap(S, n) = \{0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m\} \cup \{\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{t-1}\}$, com $m = n - t$ e $PF(S) = \{\beta_i - n, \alpha_m - n = F(S) | 1 \leq i \leq t - 1\}$. Escreva $f_i = \beta_i - n$ e $f_t = \alpha_m - n = F(S)$. Então as seguintes condições são equivalentes.*

- 1) S é quase simétrico;
- 2) $\alpha_i + \alpha_{m-i} = \alpha_m$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$ e $\beta_j + \beta_{t-j} = \alpha_m + n$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, t - 1\}$;
- 3) $f_i + f_{t-i} = F(S)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, t - 1\}$.

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$) Como $\alpha_i - n \notin S$, então $F(S) - (\alpha_i - n) = \alpha_m - \alpha_i \in S$ e $(\alpha_m - \alpha_i) - n = F(S) - \alpha_i \notin S$, pelo item 2) da Proposição 1.131. Assim, $\alpha_m - \alpha_i \in Ap(S, n)$. Se $\alpha_m - \alpha_i = \beta_j$, para algum j , então $F(S) = \alpha_i + f_i \in S$. Consequentemente, temos que $\alpha_i + \alpha_{m-i} = \alpha_m$, para todo $i \in \{1, \dots, m - 1\}$. Agora, vamos ver que $\beta_j + \beta_{t-j} = \alpha_m + n$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, t - 1\}$. Como $\alpha_m - \beta_j = F(S) - f_j \notin S$, pela Proposição 1.131 segue que $\alpha_m - \beta_j \in PF(S)$, isto é, $\alpha_m - \beta_j = \beta_{t-j} - n$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, t - 1\}$.

$2 \Rightarrow 3$) Por hipótese, $(\beta_j - n) + (\beta_{t-j} - n) = \alpha_m - n \Rightarrow f_j + f_{t-j} = F(S)$.

$3 \Rightarrow 1$) Pela visto na Proposição 1.131, basta mostrar que $K_S \subset M - M$. Seja $x \in K_S \Rightarrow x = F(S) - h$, para algum $h \notin S$. Se $h \in PF(S)$, então $x \in PF(S)$ pela condição 3). Se $h \notin PF(S)$, então $h + g \in PF(S)$, para algum $g \in M$. Daí, $x = F(S) - (h + g) + g \in S$, já que $F(S) - (h + g) \in PF(S)$. Desse modo, temos que S é quase simétrico. \square

Exemplo 1.133 *Seja $S = \langle 5, 7, 9 \rangle$. Então $Ap(S, 5) = \{0, 7, 9, 16, 18\}$ e $PF(S) = \{11, 13\}$. Pelo item 3) do Teorema 1.132 temos que S não é quase simétrico, pois $11 + 11 = 22 \neq 13$. Seja a um inteiro ímpar maior ou igual a 3 e tome $H = \langle a, a + 2, a + 4, \dots, 3a - 2 \rangle$. O semigrupo numérico H possui dimensão máxima (observe que a quantidade de ímpares entre 1 e a é de $\lceil a/2 \rceil + 1$, desse modo, entre a e $3a - 2$ temos $2(\lceil a/2 \rceil + 1) - 2 = a$ elementos), logo $PF(H) = \{2, 4, \dots, 2(a - 1)\}$, e temos que H é quase simétrico.*

Corolário 1.134 *Seja S um semigrupo numérico. Então S é quase simétrico com tipo 2 se, e somente se S é pseudo-simétrico.*

Seja $S \subseteq \mathbb{N}$ um semigrupo numérico. Vamos definir agora o conjunto $L(S) = \{x \in G(S) | F(S) - x \notin S\}$. Observe que o item 2) da Proposição 1.130 nos diz que se $L(S) \subseteq PF(S)$, então S é quase simétrico. Além disso, temos que $PF(S) = L(S) \cup \{F(S)\}$.

Proposição 1.135 *Sejam S um semigrupo numérico irredutível, e n_1, \dots, n_r geradores mínimos de S menores que $F(S)$. Então $T = S \setminus \{n_1, \dots, n_r\}$ é um semigrupo numérico com as seguintes propriedades:*

- 1) $F(T) = F(S)$;
 2) $\{n_1, \dots, n_r\} \subseteq PF(T) \subseteq \{n_1, \dots, n_r, F(S) - n_1, \dots, F(S) - n_r\} \cup PF(S)$.
 Além disso, as próximas condições são equivalentes:
 i) $PF(T) = \{n_1, \dots, n_r, F(S) - n_1, \dots, F(S) - n_r\} \cup PF(S)$;
 ii) $n_i + n_j - F(S) \notin T$ para cada $i, j \in \{1, \dots, r\}$;
 iii) T é quase simétrico.

Demonstração. Como n_1, \dots, n_r são geradores minimais, T é um semigrupo numérico com $\{n_1, \dots, n_r\} \subseteq PF(T)$, e como eles são menores que $F(S)$, $F(T) = F(S)$.

Agora, tome $x \in PF(T)$, $x \notin \{n_1, \dots, n_r\} \cup PF(S)$. Então, como S é irredutível, temos que $F(S) - x \in S$, pela Proposição 1.73 e pelo fato de que $x \neq \frac{F(S)}{2}$. Daí, como $x \in PF(T)$, $F(S) - x = F(T) - x \notin T$. Assim, $F(S) - x \in S \setminus T = \{n_1, \dots, n_r\}$. Isso prova que $PF(T) \subseteq \{n_1, \dots, n_r, F(S) - n_1, \dots, F(S) - n_r\} \cup PF(S)$.

$i \Rightarrow ii$) Observe que $n_i + n_j - F(S) = n_i - (F(S) - n_j)$. Como n_i e $F(S) - n_j$ pertencem a $PF(T)$, por hipótese, deduzimos que sua diferença não pode estar em T .

$ii \Rightarrow iii$) Seja $x \in G(T)$ tal que $F(T) - x \notin T$, isto é, $x \in L(T)$. Vamos provar que $x \in PF(T)$.

1- Se $x = F(S)/2$, como S é irredutível, temos que $x \in PF(S)$. Assuma que existe $t \in T^*$ tal que $x + t \notin T$. Como $t \in S$, temos que $x + t \in S$, e assim, $x + t \in S \setminus T = \{n_1, \dots, n_r\}$. Daí, $x + t = n_i$, para algum $i \in \{1, \dots, r\}$, o que significa que $n_i - F(S)/2 \in T$, logo $2n_i - F(S) \in T$, contradizendo a hipótese.

2- Se $x \neq F(S)/2$, como S é irredutível, $F(S) - x \in S$. Além disso, $F(S) - x \notin T$, já que $x \in L(T)$ e $F(S) = F(T)$. Então obtemos que $x \in \{n_1, \dots, n_r\}$, ou $F(S) - x \in \{n_1, \dots, n_r\}$. Já sabemos que $\{n_1, \dots, n_r\} \subseteq PF(S)$. Assim, é suficiente mostrar que para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, $F(S) - n_i \in PF(T)$. Note que $F(S) - n_i \notin S$, logo $F(S) - n_i \notin T$. Tome $t \in T^*$. Suponha que $F(S) - n_i + t \notin T$ para algum $t \in T^*$. Se $F(S) - n_i + t \in S$, deduzimos que $F(S) - n_i + t = n_j$, para algum $j \in \{1, \dots, r\}$. Daí, teríamos que $n_i + n_j - F(S) \in T$, o que é impossível. Consequentemente, $F(S) - n_i + t \notin S$. Lembrando que S é irredutível, pela Proposição 1.73 novamente, $F(S) - n_i + t = F(S)/2$ ou $F(S) - (F(S) - n_i + t) = n_i - t \in S$. A primeira opção leva novamente a uma contradição. A segunda conclui que $t = n_i$, o que também é impossível. Desse modo, $F(S) - n_i \in PF(T)$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

$iii \Rightarrow i$) Sabemos que $\{n_1, \dots, n_r\} \subseteq PF(T) \setminus \{F(T)\}$. Portanto, $F(T) - n_i \notin T$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Assim, $\{n_1, \dots, n_r, F(S) - n_1, \dots, F(S) - n_r\} \subseteq L(T)$. Como T é quase simétrico, $\{n_1, \dots, n_r, F(S) - n_1, \dots, F(S) - n_r\} \subseteq PF(T)$. Também é conhecido que $F(S) = F(T) \in PF(T)$. Desse modo, resta checar que se $F(S)$ é par, então $F(S)/2 \in PF(T)$. Mas isso também segue da definição de quase simetria, já que $F(S)/2 \in L(T)$. \square

Exemplo 1.136 Seja $S = \langle 3, 5 \rangle$. Temos que S é um semigrupo numérico simétrico, com número de Frobenius 7. Daí, seja $T = S \setminus \{5\}$. Usando a Proposição 1.135, temos que T é um semigrupo numérico quase simétrico com tipo 3.

Usando agora $H = \langle 4, 5, 7 \rangle$, o qual é um semigrupo numérico pseudo-simétrico com número de Frobenius 6, segue que $T = S \setminus \{4, 5\}$ é um semigrupo numérico quase simétrico com tipo 6.

Teorema 1.137 Seja T um semigrupo numérico. Então T é quase simétrico se, e somente se, existe um semigrupo numérico irredutível S com $F(S) = F(T)$ tal que $T = S \setminus A$, onde $A \subseteq [F(S)/2, F(S)]$ é o conjunto de geradores minimais de S tais que $x + y - F(S) \notin T$, para cada $x, y \in A$. Nesse caso, $t(T) = 2\#A + t(S)$.

Demonstração. A volta desse teorema segue da Proposição 1.135. Assuma então que T é quase simétrico. Sejam $A = \{x \in PF(T) | F(S)/2 < x < F(S)\}$ e $S = T \cup A$. Pela escolha de

A , segue que S é um semigrupo numérico com $F(T) = F(S)$. Vamos provar que os elementos de A são geradores minimais de S . Para isso, suponha que existe $x \in A$ tal que $x = y + z$, com $y, z \in S^*$.

i) Se $y, z \in T$, então $x \in T$, o que é impossível.

ii) Se $y, z \in A$, então $y + z > F(T)$, e assim $x \in T$, obtendo novamente uma contradição.

iii) Assuma, sem perda de generalidade, que $y \in A$ e $z \in T$. Desse modo, $y \notin PF(T)$, contradizendo que $y \in A$.

A seguir vamos provar que S é irredutível. Para cada $x \in PF(T) \setminus \{F(T)\}$, pelo Teorema 1.132, $F(T) - x \in PF(T)$. Segue que $\#A = (t(T) - e)/2$, onde $e = 1$ se $F(S)$ é ímpar, e $e = 2$ caso contrário (se $F(S)$ é par, então $F(S)/2 \in L(T)$, que está incluso em $PF(T)$). Como T é quase simétrico, $g(T) = \frac{F(T) + t(T)}{2}$. Observe que $g(S) = g(T) - \#A$, e assim obtemos que

$g(S) = \frac{F(S) + e}{e}$, o que significa que S é irredutível.

A condição que $x + y - F(S) \notin T$, para cada $x, y \in A$ segue da Proposição 1.135, já que T é quase simétrico e $T = S \setminus A$. \square

O teorema anterior fornece uma caracterização dos semigrupos numéricos quase simétricos em termos dos irredutíveis. Note que todo semigrupo numérico T pode ser obtido a partir de um irredutível S adicionando um certo conjunto A . No entanto, neste caso, os elementos do conjunto A satisfazem a propriedade especial descrita acima.

Exemplo 1.138 *Vamos listar o número de semigrupos numéricos quase simétricos que podem ser obtidos de $S = \langle 4, 5, 7 \rangle$ usando o Teorema 1.137. Observe que se A é o subconjunto de geradores minimais de S entre $F(S)/2$ e $F(S)$, então $A \subseteq \{4, 5\}$, pois $F(S) = 6$. Agora, como $4 + 4 - 6 = 2$, $5 + 5 - 6 = 4$ e $4 + 5 - 6 = 3$, os únicos semigrupos numéricos quase simétricos possíveis são $T_1 = S \setminus \{4\}$ e $T_2 = S \setminus \{4, 5\}$.*

1.5 Semigrupos Numéricos Proporcionalmente Modulares

1.5.1 Funções Periódicas Sub-aditivas

Vamos introduzir o conceito de função periódica sub-aditiva. Mostraremos que, para cada uma dessas funções, existe um semigrupo numérico. Essa correspondência também vai para a outra direção, ou seja, para cada semigrupo numérico e cada elemento não nulo nele, podemos encontrar uma função periódica sub-aditiva associada.

Denote por \mathbb{Q}_0^+ o conjunto dos números racionais não negativos. Uma função sub-aditiva é uma aplicação $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_0^+$ tal que

- (1) $f(0) = 0$,
- (2) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{N}$.

Lema 1.139 *Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_0^+$ uma função sub-aditiva. Então,*

$$M(f) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \leq x\}$$

é um submonoide de \mathbb{N} .

Demonstração. Observe que $0 \in M(f)$ e $M(f)$ respeita a propriedade associativa, pois $M(f) \subseteq \mathbb{N}$. Mostremos então que esse conjunto é fechado com a soma. Para isso, tome $x, y \in M(f)$, daí, $f(x + y) \leq f(x) + f(y) \leq x + y$, logo $x + y \in M(f)$, concluindo que $M(f)$ é um submonoide de \mathbb{N} . \square

Seja m um inteiro positivo. A função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_0^+$ possui *período* m se $f(x + m) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{N}$. Denote por \mathcal{SF}_m o conjunto das funções sub-aditiva m -periódicas.

Lema 1.140 *Sejam m um inteiro positivo e $f \in \mathcal{SF}_m$. Então, $M(f)$ é um semigrupo numérico.*

Demonstração. Se $f \in \mathcal{SF}_m$, então sabemos que $M(f)$ é um submonoide de \mathbb{N} . Além disso, $x \in M(f)$, para cada $x \in \mathbb{N}$ tal que $x \geq \max\{f(0), \dots, f(m-1)\}$, isto é, $\mathbb{N} \setminus M(f)$ é finito. \square

O uso de funções sub-aditivas é inspirado no seguinte resultado:

Lema 1.141 *Sejam S um semigrupo numérico e $m \in S^*$. Assuma que $Ap(S, m) = \{w(0) = 0, w(1), \dots, w(m-1)\}$, com $w(i) \equiv i \pmod{m}$ para todo $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Defina $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por $f(x) = w(x \bmod m)$. Então, $f \in \mathcal{SF}_m$ e $M(f) = S$.*

Demonstração. Observe que f está bem definida, já que se $x \in \mathbb{N}$, então $x \bmod m \in \{0, \dots, m-1\} \subset \mathbb{N}$. Além disso, $f(0) = 0$ e $f(x + y) = w(x + y \bmod m)$, e pela Proposição 1.33, $w(x + y \bmod m) \leq w(x \bmod m) + w(y \bmod m) = f(x) + f(y)$, logo f é uma função sub-aditiva. Seja $x \in \mathbb{N}$. Daí, $f(x + m) = w(x + m \bmod m) = w(x \bmod m) = f(x)$, ou seja, $f \in \mathcal{SF}_m$. Por fim, pelo Lema 1.8 sabemos que se $s \in S$, existem $k \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0, \dots, m-1\}$ tais que $s = km + w(i)$, assim $f(s) = w(i) \leq km + w(i)$, isto é, $S \subseteq M(f)$. Tome agora $x \in G(S)$. Se $x \in M(f)$, então $f(x) = w(x \bmod m) \leq x$, contradizendo a minimalidade dos elementos de $Ap(S, m)$. Portanto, $M(f) = S$. \square

Lema 1.142 *Sejam m um inteiro positivo e $f \in \mathcal{SF}_m$. Então $m \in M(f)$.*

Demonstração. Observe que $0 = f(0) = f(0 + m) = f(m)$, assim $f(m) \leq m$, ou seja, $m \in M(f)$. \square

Seja \mathcal{S}_m o conjunto dos semigrupos numéricos que contêm m . Como consequência dos Lemas 1.141 e 1.142, é possível obter o seguinte teorema, que mostra uma estreita conexão entre semigrupos numéricos e funções periódicas sub-aditivas.

Teorema 1.143 *Seja m um inteiro positivo. Então,*

$$\mathcal{S}_m = \{M(f) \mid f \in \mathcal{SF}_m\}.$$

Vamos introduzir uma família de funções sub-aditivas periódicas cuja associação com semigrupos será o objeto de estudo para o restante da seção.

Sejam a, b e c inteiros positivos. A função

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_0^+, f(x) = \frac{ax \pmod{b}}{c}$$

é sub-aditiva de período b . Assim,

$$S(a, b, c) = M(f) = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{ax \pmod{b}}{c} \leq x \right\} = \{x \in \mathbb{N} \mid ax \pmod{b} \leq cx\}$$

é um semigrupo numérico.

Uma *inequação Diofantina proporcionalmente modular* é uma expressão da forma $ax \bmod b \leq cx$, onde a, b e c são inteiros positivos. Os inteiros a, b e c são chamados *fator, módulo* e *proporção*, respectivamente. O semigrupo $S(a, b, c)$ é o conjunto de soluções inteiras de uma inequação Diofantina proporcionalmente modular. Um semigrupo numérico dessa forma será conhecido como *proporcionalmente modular*.

Exemplo 1.144 $S(7, 13, 4) = \{x \in \mathbb{N} \mid 7x \bmod 13 \leq 4x\} = \{0, 2, 3, \rightarrow\} = \langle 2, 3 \rangle$.

1.5.2 O Semigrupo Numérico Associado a um Intervalo de Números Racionais

Vamos observar nessa seção que semigrupos numéricos proporcionalmente modulares são, precisamente, o conjunto de numeradores de frações que pertencem a um intervalo limitado.

Dado um subconjunto A de \mathbb{Q}_0^+ , denotamos por $\langle A \rangle$ o submonoide de \mathbb{Q}_0^+ gerado por A , isto é,

$$\langle A \rangle = \{ \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid a_1, \dots, a_n \in A \text{ e } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N} \}.$$

Observe que $S(A) = \langle A \rangle \cap \mathbb{N}$ é um submonoide de \mathbb{N} (usamos a mesma letra utilizada para semigrupos numéricos proporcionalmente modulares por razões que se tornarão claras mais a frente), já que $0 \in S(A)$, possui a propriedade associativa (já que $S(A) \subseteq \mathbb{N}$), e é fechado com a soma, pela definição do conjunto. Dizemos que $S(A)$ é o semigrupo numérico *associado* a A .

Dados dois números racionais $\lambda < \mu$, usamos $[\lambda, \mu]$, $[\lambda, \mu[$, $] \lambda, \mu]$ e $] \lambda, \mu[$ para denotar, respectivamente, os intervalos fechado, fechado pela esquerda, fechado pela direita, e aberto, de números racionais entre λ e μ .

Nesta seção, I denotará qualquer um desses intervalos, com $0 \leq \lambda < \mu$.

Lema 1.145 *Sejam $x_1, \dots, x_k \in I$, então $\frac{1}{k}(x_1 + \cdots + x_k) \in I$.*

Demonstração. Como $k(\min\{x_1, \dots, x_k\}) \leq x_1 + \cdots + x_k \leq k(\max\{x_1, \dots, x_k\})$, temos que $\min\{x_1, \dots, x_k\} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_k}{k} \leq \max\{x_1, \dots, x_k\}$, concluindo que $\frac{1}{k}(x_1 + \cdots + x_k) \in I$. \square

O conjunto $S(I)$ coincide com o conjunto dos numeradores das frações que pertencem a I . Esse fato se deve ao resultado a seguir:

Lema 1.146 *Seja x um número racional positivo. Então $x \in \langle I \rangle$ se, e somente se, existe um inteiro positivo k tal que $\frac{x}{k} \in I$.*

Demonstração. Se $x \in \langle I \rangle$, então pela definição, $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_k \in I$. Daí, $(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k) \min\{x_1, \dots, x_k\} \leq \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k \leq (\lambda_1 + \cdots + \lambda_k) \max\{x_1, \dots, x_k\}$, logo $\frac{x}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} \in I$.

Por outro lado, se $\frac{x}{k} \in I$, então $x = k \frac{x}{k} \in \langle I \rangle$. \square

Vamos ver agora que todo semigrupo numérico proporcionalmente modular pode ser escrito como o semigrupo numérico associado a um intervalo fechado cujos extremos são determinados pelo fator, módulo e proporção do semigrupo.

Lema 1.147 *Sejam a, b e c inteiros positivos com $c < a$. Então,*

$$S(a, b, c) = S\left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-c}\right]\right).$$

Demonstração. Seja $x \in S(a, b, c) \setminus \{0\}$. Então $ax \bmod b \leq cx$. Desse modo, existe um inteiro não negativo k tal que $0 \leq ax - kb \leq cx$. Se $k = 0$, então $ax \leq cx$, contradizendo que $c < a$. Assim, $k > 0$ e

$$\begin{aligned} 0 \leq ax - kb \Rightarrow kb \leq ax \Rightarrow \frac{b}{a} &\leq \frac{x}{k} \\ \text{e} \\ ax - kb \leq cx \Rightarrow ax - cx \leq kb \Rightarrow \frac{x}{k} &\leq \frac{b}{a-c}, \end{aligned}$$

logo $\frac{b}{a} \leq \frac{x}{k} \leq \frac{b}{a-c}$. Pelo Lema 1.146, segue que $x \in S\left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-c}\right]\right)$.

Por outro lado, se $x \in S\left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-c}\right]\right) \setminus \{0\}$, pelo Lema 1.146 novamente, existe um inteiro positivo k tal que $\frac{b}{a} \leq \frac{x}{k} \leq \frac{b}{a-c}$. Isso implica que $0 \leq ax - kb \leq cx$, e consequentemente, $ax \bmod b \leq cx$. \square

Observação 1.148 A condição $c < a$ parece ser restritiva, entretanto não é o caso, já que se $c \geq a$, então o semigrupo $S(a, b, c) = \mathbb{N}$.

Note também que a inequação $ax \bmod b \leq cx$ possui o mesmo conjunto de soluções inteiras que $(a \bmod b)x \bmod b \leq cx$. Consequentemente, podemos, no nosso estudo de inequações Diofantinas proporcionalmente modulares, assumir que $0 < c < a < b$.

Exemplo 1.149 $S(14, 24, 5) = S\left(\left[\frac{24}{14}, \frac{24}{9}\right]\right) = \mathbb{N} \cap \left\{ \{0\} \cup \left[\frac{12}{7}, \frac{8}{3}\right] \cup \left[\frac{24}{7}, \frac{16}{3}\right] \cup \dots \right\} = \{0, 2, 4, 5, \rightarrow\} = \langle 2, 5 \rangle$.

Semigrupos numéricos associados a intervalos fechados são sempre proporcionalmente modulares. Seu fator, módulo e proporção são determinados pelas extremidades do intervalo. Esse resultado é uma espécie de conversão do Lema 1.147.

Lema 1.150 Sejam a_1, a_2, b_1 e b_2 inteiros positivos com $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$. Então,

$$S\left(\left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right]\right) = S(a_2b_1, a_1a_2, a_2b_1 - a_1b_2).$$

Demonstração. Observe que $S\left(\left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right]\right) = S\left(\left[\frac{a_1a_2}{b_1a_2}, \frac{a_1a_2}{a_1b_2}\right]\right)$. Desse modo, pelo Lema 1.147 temos que $S\left(\left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right]\right) = S(a_2b_1, a_1a_2, a_2b_1 - a_1b_2)$. \square

Com isso podemos mostrar que o semigrupo numérico associado a um intervalo limitado é proporcionalmente modular.

Lema 1.151 $S(I)$ é um semigrupo numérico proporcionalmente modular.

Demonstração. Como $S(I) = \langle I \rangle \cap \mathbb{N}$, temos que $S(I)$ é um submonoide de \mathbb{N} . Sejam $\alpha, \beta \in I$, com $\alpha < \beta$. Então $S([\alpha, \beta]) \subseteq S(I)$, já que $[\alpha, \beta] \subseteq I$. Pelo Lema 1.150 e pelo Teorema 1.143, sabemos que $S([\alpha, \beta])$ é um semigrupo numérico, logo possui complemento finito em \mathbb{N} . Isso força $S(I)$ a possuir complemento finito em \mathbb{N} também, concluindo que ele é um semigrupo numérico.

Seja $\{n_1, \dots, n_p\}$ o sistema de geradores minimal de $S(I)$. Pelo Lema 1.146, existem inteiros positivos d_1, \dots, d_p tais que $\frac{n_i}{d_i} \in I$, para todos $i \in \{1, \dots, p\}$. Após uma reordenação do conjunto $\{n_1, \dots, n_p\}$, assumamos que

$$\frac{n_1}{d_1} < \dots < \frac{n_p}{d_p}.$$

Então $S\left(\left[\frac{n_1}{d_1}, \frac{n_p}{d_p}\right]\right) \subseteq S(I)$, e pelo Lema 1.146 novamente, $\{n_1, \dots, n_p\} \subseteq S\left(\left[\frac{n_1}{d_1}, \frac{n_p}{d_p}\right]\right)$. Daí, $S\left(\left[\frac{n_1}{d_1}, \frac{n_p}{d_p}\right]\right) = S(I)$. Pelo visto no Lema 1.150, $S(I)$ é proporcionalmente modular. \square

Com todos esses resultados, obtemos a seguinte caracterização para semigrupos numéricos proporcionalmente modulares, afirmando que o conjunto de soluções de uma inequação diofantina proporcionalmente modular coincide com o conjunto de numeradores de todas as frações em um intervalo limitado.

Teorema 1.152 *Seja S um semigrupo numérico. As seguintes condições são equivalentes:*

- 1) S é proporcionalmente modular;
- 2) Existem números racionais α e β , com $0 < \alpha < \beta$, tais que $S = S([\alpha, \beta])$;
- 3) Existe um intervalo limitado de números racionais positivos tais que $S = S(I)$.

1.5.3 Sequências de Bézout

Vamos introduzir o conceito de sequência de Bézout, a qual é uma das principais ferramentas usadas para o estudo do conjunto de soluções inteiras de uma inequação diofantina proporcionalmente modular.

Uma sequência de frações $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_p}{b_p}$ é uma *sequência de Bézout* se $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p$ são inteiros positivos tais que $a_{i+1}b_i - a_ib_{i+1} = 1$, para todo $i \in \{1, \dots, p-1\}$. Dizemos que p é o *tamanho* da sequência, e que $\frac{a_1}{b_1}$ e $\frac{a_p}{b_p}$ são seus *extremos*.

Sequências de Bézout estão diretamente relacionadas com semigrupos numéricos proporcionalmente modulares. A primeira motivação para introduzir esse conceito é a seguinte propriedade:

Proposição 1.153 *Sejam a_1, b_1, a_2 e b_2 inteiros positivos tais que $a_2b_1 - a_1b_2 = 1$. Então $S\left(\left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right]\right) = \langle a_1, a_2 \rangle$.*

Demonstração. Seja $x \in \langle a_1, a_2 \rangle \setminus \{0\}$. Então, $x = \lambda a_1 + \mu a_2$, onde $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ com pelo menos um deles diferente de zero. Por hipótese, temos que $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$, logo

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{(\lambda + \mu)a_1}{(\lambda + \mu)b_1} \leq \frac{\lambda a_1 + \mu a_2}{\lambda b_1 + \mu b_2} = \frac{x}{\lambda b_1 + \mu b_2} \leq \frac{(\lambda + \mu)a_2}{(\lambda + \mu)b_2} = \frac{a_2}{b_2},$$

e pelo Lema 1.146, $x \in S\left(\left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right]\right)$.

Pelo Lema 1.150, usando que $a_2b_1 - a_1b_2 = 1$, segue que

$$S\left(\left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right]\right) = S(a_2b_1, a_1a_2, 1).$$

Se $x \in S\left(\left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right]\right)$, então $a_2b_1x \bmod a_1a_2 \leq x$, logo $a_2(b_1x \bmod a_1) \leq x$. Assim,

$$x = \frac{x - (b_1x \bmod a_1)a_2}{a_1}a_1 + a_2(b_1x \bmod a_1),$$

ou seja, se $\frac{x - (b_1x \bmod a_1)a_2}{a_1} \in \mathbb{Z}$, então $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$, já que $\frac{x - (b_1x \bmod a_1)a_2}{a_1} > 0$.

Ou equivalentemente, $(b_1x \bmod a_1)a_2$ e x são congruentes módulo a_1 . Observe que $(b_1x \bmod a_1)a_2 = b_1a_2x \bmod a_1a_2 = (1 + a_1b_2)x \bmod a_1a_2 = x + a_1b_2x + ka_1a_2 = x + a_1(b_2x + ka_2)$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. \square

Observação 1.154 Assuma agora que $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_p}{b_p}$ é uma seqüência de Bézout. Pelo Lema 1.146, um inteiro positivo pertence a $S\left(\left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_p}{b_p}\right]\right)$ se, e somente se, existe um inteiro positivo k tal que $\frac{x}{k} \in \left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_p}{b_p}\right]$. Note que $\frac{x}{k} \in \left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_p}{b_p}\right]$ se, e somente se, $\frac{x}{k} \in \left[\frac{a_i}{b_i}, \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}\right]$, para algum $i \in \{1, \dots, p-1\}$. Isso equivale a $x \in S\left(\left[\frac{a_i}{b_i}, \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}\right]\right)$, novamente pelo Lema 1.146. Agora, a Proposição 1.153 nos diz que $x \in S\left(\left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_p}{b_p}\right]\right)$ se, e somente se, $x \in \langle a_i, a_{i+1} \rangle$, para algum $i \in \{1, \dots, p-1\}$. Isto é,

$$S\left(\left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_p}{b_p}\right]\right) = \langle a_1, a_2 \rangle \cup \langle a_2, a_3 \rangle \cup \dots \cup \langle a_{p-1}, a_p \rangle.$$

Isso prova o próximo resultado.

Corolário 1.155 Seja $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_p}{b_p}$ uma seqüência de Bézout. Então,

$$S\left(\left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_p}{b_p}\right]\right) = \langle a_1, \dots, a_p \rangle.$$

Exemplo 1.156 Vamos encontrar as soluções inteiras de $50x \bmod 131 \leq 3x$. Sabemos que o conjunto de soluções dessa inequação é $S\left(\left[\frac{131}{50}, \frac{131}{47}\right]\right)$. Como

$$\frac{131}{50} < \frac{76}{29} < \frac{21}{8} < \frac{8}{3} < \frac{11}{4} < \frac{25}{9} < \frac{39}{14} < \frac{131}{47}$$

é uma seqüência de Bézout, logo $S\left(\left[\frac{131}{50}, \frac{131}{47}\right]\right) = \langle 131, 76, 21, 8, 11, 25, 39 \rangle = \langle 8, 11, 21, 25, 39 \rangle$.

Nesse exemplo damos a seqüência de Bézout que conecta os extremos do intervalo, definindo o semigrupo de soluções da inequação Diofantina. Vamos aprender em breve como construir essa seqüência, uma vez que conhecemos os extremos do intervalo.

Como outra consequência da Proposição 1.153, obtemos que todo semigrupo numérico com dimensão dois é proporcionalmente modular.

Corolário 1.157 Todo semigrupo numérico de dimensão dois é proporcionalmente modular.

Demonstração. Seja S um semigrupo numérico de dimensão dois. Daí, existem dois inteiros primos entre si a e b , $a < b$, maiores que um tais que $S = \langle a, b \rangle$. Pela identidade de Bézout, existem inteiros positivos u e v tais que $bu - av = 1$. Pela Proposição 1.153 temos que $S = \langle a, b \rangle = S\left(\left[\frac{a}{u}, \frac{b}{v}\right]\right)$, e pelo Teorema 1.152 concluímos que S é proporcionalmente modular. \square

A seguir vamos mostrar que dados dois números racionais positivos, existe uma seqüência de Bézout cujos extremos são esses números. Primeiro, vamos ver que os numeradores e denominadores das frações pertencentes a um intervalo cujos extremos são números racionais admitem expressões especiais em termos dos numeradores e denominadores dos extremos.

Lema 1.158 *Sejam a_1, a_2, b_1, b_2, x e y inteiros positivos tais que $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$. Então $\frac{a_1}{b_1} < \frac{x}{y} < \frac{a_2}{b_2}$ se, e somente se, $\frac{x}{y} = \frac{\lambda a_1 + \mu a_2}{\lambda b_1 + \mu b_2}$, onde λ e μ são inteiros positivos.*

Demonstração. Observe que se $\frac{a_1}{b_1} < \frac{x}{y} < \frac{a_2}{b_2}$, então

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} < \frac{x}{y} &\Rightarrow b_1 x - a_1 y = t \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow b_1 x &= t + a_1 y \Rightarrow b_1 b_2 x = b_2 t + a_1 b_2 y \end{aligned}$$

e

$$\frac{x}{y} < \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow a_2 y - b_2 x = l \in \mathbb{N}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} a_2 y &= l + b_2 x \Rightarrow b_1 a_2 y = b_1 l + b_1 b_2 x \\ &\Rightarrow b_1 a_2 y - a_1 b_2 y = b_1 l + b_2 t \\ \Rightarrow y &= \frac{b_1 l + b_2 t}{b_1 a_2 - a_1 b_2} = \frac{l}{b_1 a_2 - a_1 b_2} b_1 + \frac{t}{b_1 a_2 - a_1 b_2} b_2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} b_1 x - t &= a_1 y \text{ e } a_2 y = l + b_2 x \Rightarrow a_2 b_1 x - a_2 t = a_1 a_2 y \text{ e } a_1 a_2 y = a_1 l + a_1 b_2 x \\ \Rightarrow a_2 b_1 x - a_2 t &= a_1 l + a_1 b_2 x \Rightarrow (a_2 b_1 - a_1 b_2) x = a_1 l + a_2 t \\ \Rightarrow x &= \frac{a_1 l + a_2 t}{a_2 b_1 - a_1 b_2} = \frac{l}{a_2 b_1 - a_1 b_2} a_1 + \frac{t}{a_2 b_1 - a_1 b_2} a_2. \end{aligned}$$

Isso significa que (x, y) pertence ao conjunto de pares da forma $r(a_1, b_1) + s(a_2, b_2)$, onde r e s são números racionais positivos. Consequentemente, existem racionais positivos $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_2}{q_2}$ tais que

$$(x, y) = \frac{p_1}{q_1}(a_1, b_1) + \frac{p_2}{q_2}(a_2, b_2). \text{ Desse modo, } q_1 q_2 x = p_1 q_2 a_1 + p_2 q_1 a_2, \text{ e } q_1 q_2 y = p_1 q_2 b_1 + p_2 q_1 b_2,$$

logo, $\frac{x}{y} = \frac{q_1 q_2 x}{q_1 q_2 y} = \frac{p_1 q_2 a_1 + p_2 q_1 a_2}{p_1 q_2 b_1 + p_2 q_1 b_2}$.

Agora, a volta dessa demonstração segue do fato de que para quaisquer inteiros positivos a, b, c e d , com $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, então $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ (isso também foi usado na demonstração da Proposição 1.153). \square

O seguinte resultado nos dá um passo básico para a construção de uma sequência de Bézout cujos extremos são dois racionais fixos.

Lema 1.159 *Sejam a_1, a_2, b_1 e b_2 inteiros positivos tais que $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$, e $\text{mdc}\{a_1, b_1\} = 1$. Então, existem $x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $\frac{a_1}{b_1} < \frac{x}{y} < \frac{a_2}{b_2}$, e $b_1 x - a_1 y = 1$.*

Demonstração. Observe que $b_1 x - a_1 y = 1$ implica que $x = \frac{1 + a_1 y}{b_1}$. Como $\text{mdc}\{a_1, b_1\} = 1$, então a equação $a_1 y \equiv -1 \pmod{b_1}$ possui infinitas soluções positivas. Desse modo, $\frac{x}{y} = \frac{1 + a_1 y}{b_1 y} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{b_1 y}$ resolve as inequações desejadas, para y uma solução grande o suficiente da inequação $a_1 y \equiv -1 \pmod{b_1}$. \square

Entre todos os possíveis valores decorrentes do lema anterior, vamos fixar um que nos permitirá aplicar uma indução para provar o Teorema 1.161. Como veremos a seguir, essa escolha possibilita a construção efetiva de uma sequência de Bézout com extremos conhecidos.

Lema 1.160 *Sejam a_1, a_2, b_1 e b_2 inteiros positivos tais que $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$, $\text{mdc}\{a_1, b_1\} = 1 = \text{mdc}\{a_2, b_2\}$ e $a_2b_1 - a_1b_2 = d > 1$. Então existe $t \in \mathbb{N}$, $1 \leq t < d$ tal que $\text{mdc}\{ta_1 + a_2, tb_1 + b_2\} = d$.*

Demonstração. Pelo visto no Lema 1.159, existem $x, y \in \mathbb{N}$ tais que $\frac{a_1}{b_1} < \frac{x}{y} < \frac{a_2}{b_2}$, com $b_1x - a_1y = 1$. Agora, pelo Lema 1.158, temos que $\frac{x}{y} = \frac{\lambda a_1 + \mu a_2}{\lambda b_1 + \mu b_2}$, onde $\lambda, \mu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Como $b_1x - a_1y = 1$, sabemos que $\text{mdc}\{x, y\} = 1$, logo $x = \frac{\lambda a_1 + \mu a_2}{\text{mdc}\{\lambda a_1 + \mu a_2, \lambda b_1 + \mu b_2\}}$ e $y = \frac{\lambda b_1 + \mu b_2}{\text{mdc}\{\lambda a_1 + \mu a_2, \lambda b_1 + \mu b_2\}}$. Substituindo esses valores em $b_1x - a_1y = 1$ deduzimos que $\text{mdc}\{\lambda a_1 + \mu a_2, \lambda b_1 + \mu b_2\} = \mu(a_2b_1 - a_1b_2) = \mu d$. Assim, $\mu \mid \lambda a_1 + \mu a_2$ e $\mu \mid \lambda b_1 + \mu b_2$, conseqüentemente, $\mu \mid \lambda a_1$ e $\mu \mid \lambda b_1$. Usando agora que $\text{mdc}\{a_1, b_1\} = 1$, segue que $\mu \mid \lambda$. Seja $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Então, $d = \text{mdc}\{\alpha a_1 + a_2, \alpha b_1 + b_2\}$.

Observe que se $d = \text{mdc}\{a, b\}$, então $d \mid (a - kd, b - \bar{k}d)$, para todos $k, \bar{k} \in \mathbb{N}$. Aplicando esse fato, temos que se $t = \alpha \text{ mod } d$, então $d \mid \text{mdc}\{ta_1 + a_2, tb_1 + b_2\}$. Além disso, $b_1 \frac{ta_1 + a_2}{d} - a_1 \frac{tb_1 + b_2}{d} = \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{d} = \frac{d}{d} = 1$. Desse modo, $\text{mdc}\left\{\frac{ta_1 + a_2}{d}, \frac{tb_1 + b_2}{d}\right\} = 1$, o que significa que $\text{mdc}\{ta_1 + a_2, tb_1 + b_2\} = d$.

Note que, como $t = \alpha \text{ mod } d$, então $t < d$. Por outro lado, como $\text{mdc}\{ta_1 + a_2, tb_1 + b_2\} = d$ e $\text{mdc}\{a_2, b_2\} = 1 \neq d$, segue que $t \neq 0$. \square

Agora estamos prontos para mostrar que para quaisquer dois números racionais positivos podemos construir uma sequência de Bézout conectando-os.

Teorema 1.161 *Sejam a_1, a_2, b_1 e b_2 inteiros positivos tais que $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$, $\text{mdc}\{a_1, b_1\} = 1 = \text{mdc}\{a_2, b_2\}$ e $a_2b_1 - a_1b_2 = d$. Então existe uma sequência de Bézout de tamanho menor ou igual a $d + 1$ com extremos $\frac{a_1}{b_1}$ e $\frac{a_2}{b_2}$.*

Demonstração. Vamos proceder com uma indução sobre d . Para $d = 1$ temos que $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$ já é uma sequência de Bézout, por definição. Assuma então que essas afirmações são válidas para todo inteiro k com $1 \leq k < d$. Daí, pelo Lema 1.160, sabemos que existe um inteiro positivo t , $1 \leq t < d$ tal que $\text{mdc}\{ta_1 + a_2, tb_1 + b_2\} = d$. Sejam $x_1 = \frac{ta_1 + a_2}{d}$ e $y_1 = \frac{tb_1 + b_2}{d}$. Como $\frac{x_1}{y_1} = \frac{ta_1 + a_2}{tb_1 + b_2}$, o Lema 1.158 assegura que $\frac{a_1}{b_1} < \frac{x_1}{y_1} < \frac{a_2}{b_2}$. Além disso, $b_1x_1 - a_1y_1 = b_1 \frac{ta_1 + a_2}{d} - a_1 \frac{tb_1 + b_2}{d} = \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{d} = \frac{d}{d} = 1$ e $a_2y_1 - b_2x_1 = a_2 \frac{tb_1 + b_2}{d} - b_2 \frac{ta_1 + a_2}{d} = \frac{t(b_1a_2 - a_1b_2)}{d} = \frac{td}{d} = t < d$. Aplicando a hipótese de indução em $\frac{x_1}{y_1} < \frac{a_2}{b_2}$, deduzimos que existe uma sequência de Bézout $\frac{x_1}{y_1} < \frac{x_2}{y_2} < \dots < \frac{x_s}{y_s} < \frac{a_2}{b_2}$, onde $s \leq t$. Assim, $\frac{a_2}{b_2} < \frac{x_1}{y_1} < \frac{x_2}{y_2} < \dots < \frac{x_s}{y_s} < \frac{a_2}{b_2}$ é uma sequência de Bézout de tamanho menor ou igual a $t + 2 \leq d + 1$. \square

Observação 1.162 A demonstração do Teorema 1.161 nos dá um processo algorítmico para construir uma sequência de Bézout com extremos conhecidos $\frac{a_1}{b_1}$ e $\frac{a_2}{b_2}$. Desse modo, temos um processo para construir um sistema de geradores de $S\left(\left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right]\right)$. Devemos primeiro encontrar o menor inteiro positivo t tal que $\text{mdc}\{ta_1 + a_2, tb_1 + b_2\} = d$, e então repetir o passo a passo com $\left(\frac{ta_1 + a_2}{d}\right) / \left(\frac{tb_1 + b_2}{d}\right) < \frac{a_2}{b_2}$.

Exemplo 1.163 Vamos começar com as frações $\frac{13}{3} < \frac{6}{1}$. Aqui, $d = 5$ e então existe $t \in \{1, \dots, 4\}$ tal que $\text{mdc}\{13t + 6, 3t + 1\} = 5$. A escolha $t = 3$ satisfaz a condição desejada, daí podemos colocar $\frac{3 \cdot 13 + 6}{3 \cdot 3 + 1} = \frac{9}{2}$ entre $\frac{13}{3}$ e $\frac{6}{1}$. Agora vamos prosseguir com $\frac{9}{2} < \frac{6}{1}$, e obtemos $d = 3$. Nessa configuração, $\text{mdc}\{1 \cdot 9 + 6, 1 \cdot 2 + 1\} = 3$. Assim, colocamos $\frac{9 + 6}{2 + 1} = \frac{5}{1}$ entre $\frac{9}{2}$ e $\frac{6}{1}$. Finalmente, para $\frac{5}{1} < \frac{6}{1}$ temos que $d = 1$, parando o processo. Desse modo, uma sequência de Bézout com os extremos dados é

$$\frac{13}{3} < \frac{9}{2} < \frac{5}{1} < \frac{6}{1}.$$

Observe que sequências de Bézout conectando dois extremos não são únicas, já que se $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ é uma sequência de Bézout, então $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ também é uma sequência de Bézout.

1.5.4 Geradores Minimais de um Semigrupo Numérico Proporcionalmente Modular

Temos observado a conexão entre sistemas de geradores minimais de um semigrupo numérico proporcionalmente modular e sequências de Bézout. Vamos tentar melhorar essa conexão a fim de obter o sistema de geradores minimal de um semigrupo numérico proporcionalmente modular.

Uma sequência de Bézout $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_p}{b_p}$ é própria se $a_{i+h}b_i - a_i b_{i+h} \geq 2$, para todo $h \geq 2$ tal que $i, i+h \in \{1, \dots, p\}$. Toda sequência de Bézout pode ser refinada em uma sequência de Bézout própria, basta remover os termos estritamente entre $\frac{a_i}{b_i}$ e $\frac{a_{i+h}}{b_{i+h}}$ quando $a_{i+h}b_i - a_i b_{i+h} = 1$.

Exemplo 1.164 Temos que $\frac{13}{3} < \frac{9}{2} < \frac{5}{1}$ é uma sequência de Bézout própria, mas $\frac{13}{3} < \frac{9}{2} < \frac{14}{3} < \frac{5}{1}$ é uma sequência de Bézout que não é própria.

Lema 1.165 Seja $\frac{a}{u} < \frac{b}{v} < \frac{c}{w}$ uma sequência de Bézout. Então $b = \frac{a+c}{d}$, com $d = cu - aw$.

Demonstração. Observe que $bu - av = cv - bw = 1$, já que essa é uma sequência de Bézout. Desse modo,

$$bu - av = cv - bw \Rightarrow bu + bw = cv + av \Rightarrow b = \frac{(a+c)v}{u+w},$$

ou seja, $\frac{1}{d} = \frac{v}{u+w}$. Mostremos que $d = cu - aw$. Daí,

$$\begin{aligned}
cv - bw = 1 &\Rightarrow cv = 1 + bw \Rightarrow v = \frac{1 + bw}{c}, \text{ e} \\
bu - av = 1 &\Rightarrow av = bu - 1 \Rightarrow v = \frac{bu - 1}{a} \\
\Rightarrow \frac{1 + bw}{c} = \frac{bu - 1}{a} &\Rightarrow a + bwa = cbu - c \Rightarrow a + c = b(cu - aw) \Rightarrow \frac{a + c}{b} = cu - aw. (*)
\end{aligned}$$

Por fim,

$$bu + bw = cv + av \Rightarrow d = \frac{u + w}{v} = \frac{a + c}{b} \Rightarrow^{(*)} d = cu - aw.$$

□

O próximo resultado mostra que o maior elemento do conjunto de numeradores de uma sequência de Bézout própria é sempre um de seus extremos.

Lema 1.166 *Seja $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_p}{b_p}$ uma sequência de Bézout própria. Então*

$$\max\{a_1, a_2, \dots, a_p\} = \max\{a_1, a_p\}.$$

Demonstração. Vamos fazer uma indução sobre p . Para $p = 2$ essa afirmação é verdadeira. Assuma como hipótese de indução que $\max\{a_2, \dots, a_p\} = \max\{a_2, a_p\}$, e mostremos que $\max\{a_1, \dots, a_p\} = \max\{a_1, a_p\}$. Se $\max\{a_2, a_p\} = a_p$, então o resultado segue de forma trivial. Suponha que $\max\{a_2, a_p\} = a_2$. Se aplicarmos o Lema 1.165 na sequência de Bézout $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_3}{b_3}$, temos que $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{a_3 b_1 - a_1 b_3}$, e como essa é uma sequência de Bézout própria, $a_3 b_1 - a_1 b_3 \geq 2$. Consequentemente, $a_2 \leq \frac{a_1 + a_3}{2} \leq \frac{2 \max\{a_1, a_3\}}{2}$. Vamos distinguir em dois casos dependendo do valor de $\max\{a_1, a_3\}$.

- Se $\max\{a_1, a_3\} = a_3$, então deduzimos que $a_2 \leq a_3$. Como $\max\{a_2, \dots, a_p\} = a_2$, segue que $a_2 = a_3$. Daí, usando que $\frac{a_2}{b_2} < \frac{a_3}{b_3}$ é uma sequência de Bézout e $a_2 = a_3$, temos que $a_2(b_2 - b_3) = 1$, assim, $a_2 = 1$. Além disso, $\max\{a_1, a_3\} = a_3 = a_2 = 1$, e $a_1 \geq 1$, logo $a_1 = 1$, concluindo que $\max\{a_1, \dots, a_p\} = 1 = a_1$.

- Se $\max\{a_1, a_3\} = a_1$, então $a_2 \leq a_1$, desse modo, $\max\{a_1, \dots, a_p\} = a_1$. □

Como consequência desse resultado, temos que os numeradores das frações de uma sequência de Bézout própria são arranjados de uma forma especial.

Proposição 1.167 *Seja $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_p}{b_p}$ uma sequência de Bézout própria. Então a_1, \dots, a_p é uma sequência convexa, ou seja, existe $h \in \{1, \dots, p\}$ tal que*

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_h \leq a_{h+1} \leq \dots \leq a_p.$$

Duas frações $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$ são ditas *adjacentes* se

$$\frac{a_2}{b_2 + 1} < \frac{a_1}{b_1}, \text{ e } b_1 = 1 \text{ ou } \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_1}{b_1 - 1}.$$

Como veremos a seguir, essa é a segunda condição necessária para obter sequências de Bézout cujos numeradores representam sistemas de geradores minimais.

Primeiro, vamos mostrar que 1 não pode ser o numerador de uma fração em uma sequência de Bézout de tamanho dois com extremos adjacentes.

Lema 1.168 Se $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$ é uma sequência de Bézout com extremos adjacentes, então $1 \notin \{a_1, a_2\}$.

Demonstração. Assuma que $a_1 = 1$. Então, $1 = a_2b_1 - a_1b_2 = a_2b_1 - b_2$. Como $\frac{a_2}{b_2+1} < \frac{1}{b_1}$, temos que $a_2b_1 < b_2 + 1$, contrariando $a_2b_1 = b_2 + 1$.

Suponha agora que $a_2 = 1$. Isso implica que $b_1 \neq 1$, caso contrário, $\frac{a_1}{1} < \frac{1}{b_2}$, logo $a_1b_2 < 1$. Assim, $\frac{1}{b_2} < \frac{a_1}{b_1-1}$, então $b_1 - a_1b_2 < 1$, mas isso é impossível, já que $1 = a_2b_1 - a_1b_2 = b_1 - a_1b_2$.
□

Proposição 1.169 Se $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_p}{b_p}$ é uma sequência de Bézout própria cujos extremos são adjacentes, então $\{a_1, \dots, a_p\}$ é o sistema de geradores minimal do semigrupo numérico $S = \langle a_1, \dots, a_p \rangle$.

Demonstração. Faremos uma indução sobre p . Para $p = 2$, sabemos pelo Lema 1.168 que a_1 e a_2 são inteiros maiores ou iguais a 2 com $\text{mdc}\{a_1, a_2\} = 1$, já que $a_2b_1 - a_1b_2 = 1$. Desse modo, temos que a afirmação é verdadeira para $p = 2$.

Pelo Lema 1.166, sabemos que $\max\{a_1, \dots, a_p\} = \max\{a_1, a_p\}$. Vamos distinguir em dois casos, dependendo do valor de $\max\{a_1, a_p\}$.

- Assuma que $\max\{a_1, \dots, a_p\} = a_1$. Pela definição, segue que $\frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_p}{b_p}$ também é uma sequência de Bézout própria. Provemos que seus extremos são adjacentes. Observe que $\frac{a_p}{b_p+1} < \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$, logo $\frac{a_p}{b_p+1} < \frac{a_2}{b_2}$. Além disso, note que $b_1 \neq 1$, caso contrário $\frac{a_1}{1} < \frac{a_2}{b_2}$ implicaria que $a_2 > a_1$, contradizendo que $a_1 = \max\{a_1, \dots, a_2\}$. Como $a_1b_2 < a_2b_1$ e $a_2 \leq a_1$, temos que $a_1b_2 - a_1 < a_2b_1 - a_2$. Assim, se $b_2 \neq 1$, então $\frac{a_p}{b_p} < \frac{a_1}{b_1-1} < \frac{a_2}{b_2-1}$. Isso prova que $\frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_p}{b_p}$ é uma sequência de Bézout própria com extremos adjacentes. Usando a hipótese de indução, $\{a_2, \dots, a_p\}$ é o sistema de geradores minimal de $\langle a_2, \dots, a_p \rangle$. Como $a_1 = \max\{a_1, \dots, a_p\}$, afim de provar que $\{a_1, \dots, a_p\}$ é o sistema de geradores minimal de $\langle a_1, \dots, a_p \rangle$, basta mostrar que $a_1 \notin \langle a_2, \dots, a_p \rangle$. Pelo visto no Corolário 1.155 sabemos que $\langle a_2, \dots, a_p \rangle = S \left(\left[\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_p}{b_p} \right] \right)$. Desse modo, se $a_1 \in \langle a_2, \dots, a_p \rangle$, então pelo Lema 1.146 existe um inteiro positivo y tal que $\frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_1}{y} \leq \frac{a_p}{b_p}$. Daí, $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1}{y} \leq \frac{a_p}{b_p}$, e consequentemente $\frac{a_1}{b_1-1} \leq \frac{a_1}{y} \leq \frac{a_p}{b_p}$, contrariando o fato de que $\frac{a_1}{b_1}$ e $\frac{a_p}{b_p}$ são adjacentes.

- Assuma agora que $\max\{a_1, \dots, a_p\} = a_p$. A demonstração segue o modelo do caso anterior, mas agora usando que $\frac{a_1}{b_1} < \dots < \frac{a_{p-1}}{b_{p-1}}$ é uma sequência de Bézout própria com extremos adjacentes. □

Vamos ver a seguir que a volta desse resultado também é válida: todo semigrupo numérico proporcionalmente modular é minimalmente gerado pelos numeradores de uma sequência de Bézout própria com extremos adjacentes. A chave para esse resultado é o lema a seguir.

Lema 1.170 Seja S um semigrupo numérico proporcionalmente modular diferente de \mathbb{N} . Então existem dois geradores minimais n_1 e n_p de S e inteiros positivos b_1 e b_p tais que $S = S \left(\left[\frac{n_1}{b_1}, \frac{n_p}{b_p} \right] \right)$. Além disso, $\frac{n_1}{b_1}$ e $\frac{n_p}{b_p}$ são adjacentes.

Demonstração. Sejam α e β dois números racionais positivos tais que $\alpha < \beta$ e $S = S([\alpha, \beta])$ (Teorema 1.152). Pelo Lema 1.146, sabemos que se n é um gerador minimal de S , então existe um inteiro positivo x tal que $\alpha \leq \frac{n}{x} \leq \beta$. Note que $\text{mdc}\{n, x\} = 1$, já que se $\text{mdc}\{n, x\} = d \neq 1$, então $\alpha \leq \frac{n/d}{x/d} \leq \beta$, ou seja, $\frac{n}{d} \in S$, contradizendo que n é um gerador minimal de S . Seja $a(n) = \max \left\{ x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \alpha \leq \frac{n}{x} \right\}$. Estamos assumindo que $S \neq \mathbb{N}$, então se n_i e n_j são dois geradores minimais distintos de S , então $\frac{n_i}{a(n_i)} \neq \frac{n_j}{a(n_j)}$, caso contrário, $n_i = n_j \frac{a(n_i)}{a(n_j)}$. Daí, como n_i e n_j são geradores minimais e $\text{mdc}\{n_j, a(n_j)\} = 1$, segue que $n_i = n_j$. Consequentemente, existe uma ordenação dos geradores minimais n_1, \dots, n_p de S tal que $\alpha \leq \frac{n_1}{a(n_1)} < \frac{n_2}{a(n_2)} < \dots < \frac{n_p}{a(n_p)} \leq \beta$. Para todo $i \in \{1, \dots, p\}$, seja $b(n_i) = \min \left\{ x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \frac{n_i}{x} \leq \frac{n_p}{a(n_p)} \right\}$. Então existe uma permutação σ no conjunto $\{1, \dots, p-1\}$ tal que

$$\alpha \leq \frac{n_{\sigma(1)}}{b(n_{\sigma(1)})} < \frac{n_{\sigma(2)}}{b(n_{\sigma(2)})} < \dots < \frac{n_{\sigma(p-1)}}{b(n_{\sigma(p-1)})} < \frac{n_p}{a(n_p)} \leq \beta.$$

Observe que $\alpha \leq \frac{n_{\sigma(1)}}{a(n_{\sigma(1)})} \leq \frac{n_{\sigma(1)}}{b(n_{\sigma(1)})}$, já que $b(n_{\sigma(1)}) \leq a(n_{\sigma(1)})$, e que $\frac{n_p}{a(n_p) + 1} < \alpha$ devido à maximalidade de $a(n_p)$. Consequentemente, $\frac{n_p}{a(n_p) + 1} < \frac{n_{\sigma(1)}}{b(n_{\sigma(1)})}$. Além disso, pela definição de $b(n_{\sigma(1)})$, se $b(n_{\sigma(1)}) \neq 1$, então $\frac{n_p}{a(n_p)} < \frac{n_{\sigma(1)}}{b(n_{\sigma(1)}) - 1}$.

Por fim, basta mostrar que S é o semigrupo numérico $T = \left(\left[\frac{n_{\sigma(1)}}{b(n_{\sigma(1)})}, \frac{n_p}{a(n_p)} \right] \right)$. Como $\left[\frac{n_{\sigma(1)}}{b(n_{\sigma(1)})}, \frac{n_p}{a(n_p)} \right] \subseteq [\alpha, \beta]$, temos que $T \subseteq S$. Agora, como $\frac{n_{\sigma(1)}}{b(n_{\sigma(1)})} < \frac{n_{\sigma(2)}}{b(n_{\sigma(2)})} < \dots < \frac{n_{\sigma(p-1)}}{b(n_{\sigma(p-1)})} < \frac{n_p}{a(n_p)}$, pelo Lema 1.146 segue que $\{n_1, \dots, n_p\} \subseteq T$, logo $S \subseteq T$, ou seja, $S = T$. \square

Proposição 1.171 *Seja S um semigrupo numérico proporcionalmente modular com $e(S) = p \geq 2$. Então, existe uma ordenação n_1, \dots, n_p do sistema de geradores minimais de S e inteiros positivos b_1, \dots, b_p tais que $\frac{n_1}{b_1} < \frac{n_2}{b_2} < \dots < \frac{n_p}{b_p}$ é uma sequência de Bézout própria com extremos adjacentes.*

Demonstração. Pelo Lema 1.170 sabemos que existem geradores minimais de S , digamos n_1 e n_p , e inteiros positivos b_1 e b_p tais que $S = \left(\left[\frac{n_1}{b_1}, \frac{n_p}{b_p} \right] \right)$, e os limites desse intervalo são adjacentes.

Como apontamos na demonstração do Lema 1.170, já que n_1 e n_p são geradores minimais de S e pelo visto no Lema 1.146, é necessário que $\text{mdc}\{n_1, b_1\} = \text{mdc}\{n_p, b_p\} = 1$.

Daí, se aplicarmos o Teorema 1.161 a $\frac{n_1}{b_1} < \frac{n_p}{b_p}$ e refinarmos a sequência de Bézout resultante, obteremos uma sequência de Bézout própria $\frac{n_1}{b_1} < \frac{x_1}{y_1} < \dots < \frac{x_l}{y_l} < \frac{n_p}{b_p}$, cujos extremos são adjacentes. Pela Proposição 1.169, concluímos que $\{n_1, x_1, \dots, x_l, n_p\}$ é o sistema de geradores minimal de S . \square

Finalizaremos essa seção dando uma caracterização aritmética do sistema de geradores minimal de um semigrupo numérico proporcionalmente modular (logo, uma caracterização desses semigrupos). O seguinte cálculo modular será útil para estabelecer essa descrição. Dados inteiros positivos a e b , com $\text{mdc}\{a, b\} = 1$, pela identidade de Bézout, existem inteiros u e v tais que $au + bv = 1$. Vamos denotar por $a^{-1} \bmod b$ o inteiro $u \bmod b$.

Lema 1.172 *Sejam n_1 e n_2 dois inteiros positivos maiores ou iguais a dois, tais que $\text{mdc}\{n_1, n_2\} = 1$. Então $n_2(n_2^{-1} \bmod n_1) - n_1((-n_1)^{-1} \bmod n_2) = 1$.*

Demonstração. Como $n_2(n_2^{-1} \bmod n_1) \equiv 1 \bmod n_1$, e $n_2^{-1} \bmod n_1 < n_1$, temos que $\frac{n_2(n_2^{-1} \bmod n_1) - 1}{n_1}$ é um inteiro menor que n_2 . Além disso,

$$n_2(n_2^{-1} \bmod n_1) - n_1 \frac{n_2(n_2^{-1} \bmod n_1) - 1}{n_1} = 1,$$

daí, $n_1 \frac{n_2(n_2^{-1} \bmod n_1) - 1}{n_1} \equiv -1 \bmod n_2$. Consequentemente, $\frac{n_2(n_2^{-1} \bmod n_1) - 1}{n_1}$ é igual a $(-n_1)^{-1} \bmod n_2$. Desse modo, $n_2(n_2^{-1} \bmod n_1) - n_1((-n_1)^{-1} \bmod n_2) = 1$. \square

A caracterização acima mencionada é declarada da seguinte maneira.

Teorema 1.173 *Um semigrupo numérico S é proporcionalmente modular se, e somente se, existe um arranjo n_1, \dots, n_p do seu sistema de geradores minimal tal que as seguintes condições são válidas:*

- 1) $\text{mdc}\{n_i, n_{i+1}\} = 1$, para todo $i \in \{1, \dots, p-1\}$,
- 2) $n_{i-1} + n_{i+1} \equiv 0 \bmod n_i$, para todo $i \in \{2, \dots, p-1\}$.

Demonstração. \Rightarrow) Pela Proposição 1.171, sabemos que (possivelmente após uma reordenação de n_1, \dots, n_p) existem inteiros positivos b_1, \dots, b_p tais que $\frac{n_1}{b_1} < \frac{n_2}{b_2} < \dots < \frac{n_p}{b_p}$ é uma sequência de Bézout. Consequentemente, $\text{mdc}\{n_i, n_{i+1}\} = 1$, para todo $i \in \{1, \dots, p-1\}$. Pelo visto no Lema 1.165, obtemos que $n_i = \frac{n_{i-1} + n_{i+1}}{n_{i+1}b_{i-1} - n_{i-1}b_{i+1}}$, para todo $i \in \{2, \dots, p-1\}$, ou seja, $n_{i-1} + n_{i+1} \equiv 0 \bmod n_i$, para todo $i \in \{2, \dots, p-1\}$.

\Leftarrow) Pelo Lema 1.172 e Condição 2), temos que

$$\frac{n_1}{n_2^{-1} \bmod n_1} < \frac{n_2}{n_3^{-1} \bmod n_2} < \dots < \frac{n_{p-1}}{n_p^{-1} \bmod n_{p-1}} < \frac{n_p}{(-n_{p-1})^{-1} \bmod n_p}$$

é uma sequência de Bézout. Daí, pelo Corolário 1.155 e pelo Teorema 1.152, concluímos que S é um semigrupo numérico proporcionalmente modular. \square

1.5.5 Semigrupos Numéricos Modulares

Dados a, b e c inteiros positivos, vamos deixar em aberto o problema de encontrar fórmulas para calcular, em termos de a, b e c , o número de Frobenius, gênero e a multiplicidade de $S(a, b, c)$. Nessa seção vamos apresentar resultados que mostram que uma fórmula para o gênero de $S(a, b, 1)$ pode ser dada em termos de a e b .

Uma *inequação modular Diofantina* é uma expressão da forma $ax \bmod b \leq x$, onde a e b são inteiros positivos. Um semigrupo numérico é dito *modular* se é o conjunto de soluções de uma inequação modular Diofantina.

Observação 1.174 1) *Todo semigrupo numérico de dimensão dois é modular. Para mostrar isso, observe que pelo Corolário 1.157 se S é um semigrupo numérico de dimensão dois, então S é proporcionalmente modular, daí existem a_1, a_2, b_1 e b_2 inteiros positivos tais que $S = S\left(\left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right]\right)$. Por fim, pela demonstração da Proposição 1.153 temos que $S\left(\left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right]\right) = S(a_2b_1, a_1a_2, 1)$.*

2) *Existem semigrupos numéricos proporcionalmente modulares que não são modulares (por exemplo, $\langle 3, 8, 10 \rangle$ é proporcionalmente modular mas não é modular, como mostrado no Exemplo 26 da referência [13]).*

Lema 1.175 *Sejam a e b dois inteiros positivos tais que $0 \leq a < b$ e $x \in \mathbb{N}$. Então,*

$$a(b-x) \bmod b = \begin{cases} 0, & \text{se } ax \bmod b = 0 \\ b - (ax \bmod b), & \text{se } ax \bmod b \neq 0 \end{cases}.$$

Demonstração. Observe que se $ax \bmod b = 0$, então $a(b-x) = ab - ax \equiv 0 \bmod b$. Por outro lado, se $ax \bmod b \neq 0$, temos que $ab - ax \equiv -ax \bmod b$, onde $0 < -ax \bmod b < b$, e $(ax + (-ax)) \bmod b = 0$. Daí, $(-ax) \bmod b \equiv -(ax \bmod b) \bmod b$, e como $0 < ax \bmod b < b$, segue que $(-ax) \bmod b = b - (ax \bmod b)$. \square

Lema 1.176 *Sejam a e b inteiros positivos tais que $0 \leq a < b$. Se $ax \bmod b > x$, então $a(b-x) \bmod b < b-x$.*

Demonstração. Observe que se x for um inteiro negativo, então $a(b-x) \bmod b < b < b-x$. Suponha então que $x \in \mathbb{N}$ e $ax \bmod b > x$, logo, pelo Lema 1.175, $a(b-x) \bmod b = b - (ax \bmod b) < b-x$. \square

Como consequência desses resultados obtemos a seguinte proposição, a qual mostra que o módulo de um semigrupo numérico modular se comporta como o número de Frobenius em um semigrupo numérico simétrico.

Proposição 1.177 *Seja S um semigrupo numérico modular com módulo b . Se $x \in \mathbb{N} \setminus S$, então $b-x \in S$.*

Seja $S = S(a, b, 1)$ e x um inteiro maior do que b , então $ax \bmod b < b < x$, logo $x \in S$. Assim, como todo inteiro maior do que b pertence a $S(a, b, 1)$, afim de calcular o gênero de $S(a, b, 1)$, podemos focar no intervalo $[0, b-1]$. A seguir veremos quando x e $b-x$ pertencem a $S(a, b, 1)$, para $x \in [0, b-1]$.

Lema 1.178 *Seja $S = S(a, b, 1)$ para inteiros $0 \leq a < b$, e seja x um inteiro tal que $0 \leq x \leq b-1$. Então $x \in S$ e $b-x \in S$ se, e só se, $ax \bmod b \in \{0, x\}$.*

Demonstração. \Rightarrow) Observe que se $ax \bmod b = 0$, então $a(b-x) \bmod b = 0 < b-x$, ou seja, x e $b-x$ pertencem a S . Assuma agora que $ax \bmod b \neq 0$. Como $x \in S$, temos que $ax \bmod b \leq x$. Se $ax \bmod b < x$, então pelo Lema 1.175, segue que $a(b-x) \bmod b = b - (ax \bmod b) > b-x$, e conseqüentemente, $b-x \notin S$, contradizendo a hipótese. Desse modo, $ax \bmod b = x$.

\Leftarrow) Se $ax \bmod b = 0$ temos que $x \in S$, já que $x \geq 0$. Além disso, pelo Lema 1.175, $a(b-x) \bmod b = 0$, logo $b-x \in S$. Por outro lado, se $ax \bmod b = x \neq 0$ segue que $x \in S$, e pelo Lema 1.175, $a(b-x) \bmod b = b - (ax \bmod b) = b-x$, concluindo que $b-x$ também pertence a S . \square

Lema 1.179 *Sejam a e b inteiros positivos, e seja x um inteiro tal que $0 \leq x \leq b - 1$. Então, $ax \bmod b = 0$ se, e somente se, x é um múltiplo de $\frac{b}{\text{mdc}\{a, b\}}$.*

Demonstração. \Rightarrow) Observe que $ax \bmod b = 0$ implica que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $ax = kb$, daí $x = \frac{kb}{a}$, e como $x \in \mathbb{N}$, temos que $a|kb$. Seja $\text{mdc}\{a, b\} = d$. Então, $a = ld$, para algum $l \in \mathbb{N}$, logo $\frac{kb}{a} = \frac{kb}{ld} = \frac{k}{l} \frac{b}{d}$, onde $\frac{k}{l} \in \mathbb{N}$ (l não divide b no caso em que $l \neq 1$, já que teríamos $ld > d$, contrariando a maximalidade de d), concluindo que x é um múltiplo de $\frac{b}{\text{mdc}\{a, b\}}$.

Por outro lado, se x é múltiplo de $\frac{b}{\text{mdc}\{a, b\}}$, tome $\text{mdc}\{a, b\} = d$ e $a = ld$, então $ax \bmod b = ak \frac{b}{d} \bmod b = lkb \bmod b = 0$. □

Lema 1.180 *Sejam a e b inteiros positivos, e x um inteiro tal que $0 \leq x \leq b - 1$. Então $ax \bmod b = x$ se, e somente se, x é múltiplo de $\frac{b}{\text{mdc}\{a - 1, b\}}$.*

Demonstração. Observe que $ax \bmod b = x \Leftrightarrow (a - 1)x \bmod b = 0$, logo, pelo Lema 1.179, x é múltiplo de $\frac{b}{\text{mdc}\{a - 1, b\}}$. □

Com isso podemos controlar o conjunto dos inteiros $x \in [0, b - 1]$ tais que $x \in S(a, b, 1)$ e $b - x \in S(a, b, 1)$.

Lema 1.181 *Seja $S = S(a, b, 1)$ para inteiros a e b tais que $0 < a < b$. Sejam $d = \text{mdc}\{a, b\}$, $d' = \text{mdc}\{a - 1, b\}$, e x um inteiro tal que $0 \leq x \leq b - 1$. Então $x \in S$ e $b - x \in S$ se, e somente se,*

$$x \in X = \left\{ 0, \frac{b}{d'}, 2\frac{b}{d'}, \dots, (d' - 1)\frac{b}{d'}, \frac{b}{d}, 2\frac{b}{d}, \dots, (d - 1)\frac{b}{d} \right\}.$$

Além disso, a cardinalidade de X é $d + d' - 1$.

Demonstração. Pelo Lema 1.178 sabemos que $x \in S$ e $b - x \in S$ se, e somente se, $ax \bmod b \in \{0, x\}$. Usando agora os Lemas 1.179 e 1.180, segue que isso equivale a $x \in X$.

Note que $\text{mdc}\{a - 1, a\} = 1$, logo $\text{mdc}\{d', d\} = 1$. Se $sb/d' = tb/d$, onde $s, t \in \mathbb{N}$, então $sd = td'$, e como $\text{mdc}\{d', d\} = 1$, deduzimos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $sd = td' = kd'd$. Consequentemente, $s = kd'$ e $t = kd$, o que significa que todos os elementos de X são distintos. Assim, a cardinalidade de X é $d' + d - 1$. □

O número de lacunas de $S(a, b, 1)$ agora pode ser calculado facilmente, como mostraremos no próximo teorema.

Teorema 1.182 *Seja $S = S(a, b, 1)$ para a e b inteiros, com $0 \leq a < b$. Então,*

$$g(S) = \frac{b + 1 - \text{mdc}\{a, b\} - \text{mdc}\{a - 1, b\}}{2}.$$

Demonstração. Sejam d, d' e X como no Lema 1.181. Usando a Proposição 1.177 e o Lema 1.181, temos que para o conjunto $Y = \{0, \dots, b - 1\} \setminus X$, a cardinalidade de $(Y \cap S)$ é igual à de $(Y \setminus S)$. Consequentemente, a cardinalidade de Y é $2g(S)$. Daí, pelo Lema 1.181, deduzimos que $2g(S) = b - (d + d' - 1)$. □

1.5.6 Semigrupos Numéricos Modulares Abertos

Nessa seção vamos caracterizar os semigrupos numéricos proporcionalmente modulares que são irredutíveis.

Relembre que um semigrupo numérico da forma $\{0, m, \rightarrow\}$, com m um inteiro positivo, é chamado semirreta. Dizemos que um semigrupo numérico S é um *semigrupo numérico modular aberto* se é uma semirreta, ou $S = S\left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1}\right)$, onde a e b são inteiros com $2 \leq a < b$.

Note que a semirreta $\{0, m, \rightarrow\} = S([m, 2m])$, então é um semigrupo numérico proporcionalmente modular, pelo visto no Teorema 1.152. Os semigrupos numéricos da forma $S\left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1}\right)$ também são proporcionalmente modulares pelo Teorema 1.152.

Veremos que semigrupos numéricos proporcionalmente modulares irredutíveis são modulares abertos. A ideia é calcular o gênero desses semigrupos usando o que já conhecemos para semigrupos numéricos modulares. Como o número de Frobenius para semigrupos numéricos modulares abertos é simples de ser calculado, podemos procurar quais desses semigrupos possuem a menor quantidade de lacunas possível para encontrar os irredutíveis.

O próximo resultado mostra que semigrupos numéricos modulares abertos desempenham o mesmo papel no conjunto de semigrupos numéricos proporcionalmente modulares que os semigrupos numéricos irredutíveis fazem para semigrupos numéricos em geral.

Proposição 1.183 *Todo semigrupo numérico proporcionalmente modular é a interseção de uma quantidade finita de semigrupos numéricos modulares abertos.*

Demonstração. Seja S um semigrupo numérico proporcionalmente modular. Se $S = \mathbb{N}$, então S é uma semirreta, logo é um modular aberto. Assuma que $S \neq \mathbb{N}$. Pelo Teorema 1.152, existem números racionais α e β com $1 < \alpha < \beta$ tais que $S = S([\alpha, \beta])$. Seja $h \in G(S)$. Se $h \geq \alpha$, pelo visto no Lema 1.146, existe $n_h \in \mathbb{N}$ tal que $n_h \geq 2$ e $\frac{h}{n_h} < \alpha < \beta < \frac{h}{n_h - 1}$. Defina $S_h = S\left(\frac{h}{n_h}, \frac{h}{n_h - 1}\right)$, o qual contém S . Se $h < \alpha$, o conjunto $S_h = \{0, h + 1, \rightarrow\}$. Observe que nesse caso $m(S) > h$, já que $m(S) \in S$, logo pelo Lema 1.146 existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{m(S)}{k} \in [\alpha, \beta] \Rightarrow h < \alpha \leq \frac{m(S)}{k} \Rightarrow kh < m(S) \Rightarrow h < m(S)$. Assim, S_h contém S , e temos que $S \subseteq \bigcap_{h \in G(S)} S_h$. Se $x \notin S$, então $x \in G(S)$ e pelo Lema 1.146 (ou simplesmente pela definição no caso da semirreta) $x \notin S_x$. Isso mostra que $S = \bigcap_{h \in G(S)} S_h$. \square

Nessa seção, a e b representam dois inteiros tais que $2 \leq a < b$, e d e d' denotarão $\text{mdc}\{a, b\}$ e $\text{mdc}\{a - 1, d\}$, respectivamente.

Lema 1.184 *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $2 \leq a < b$. Então,*

$$\{b + 1, \rightarrow\} \subseteq S\left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1}\right).$$

Demonstração. Seja n um inteiro positivo. Como $a(b + n) - (a - 1)(b + n) = b + n > b$, existe um inteiro positivo k tal que $(a - 1)(b + n) < kb < a(b + n)$. Daí, $\frac{b}{a} < \frac{b + n}{k} < \frac{b}{a - 1}$, e pelo Lema 1.146 temos que $b + n \in S\left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1}\right)$. \square

Lema 1.185 *Seja $x \in \mathbb{N}$. Então,*

$$x \in S \left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1} \right] \right) \text{ e } x \notin S \left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1} \right] \right)$$

se, e somente se,

$$x \in \left\{ \lambda \frac{b}{d} \mid \lambda \in \{1, \dots, d\} \right\} \cup \left\{ \lambda \frac{b}{d'} \mid \lambda \in \{1, \dots, d'\} \right\}.$$

Demonstração. \Rightarrow) Sejam $T = S \left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1} \right] \right)$ e $S = S \left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1} \right] \right)$. Pelo Lema 1.146, se $x \in T \setminus S$, então existe um inteiro positivo k tal que $\frac{x}{k} = \frac{b}{a}$, ou $\frac{x}{k} = \frac{b}{a-1}$. Assim, x é múltiplo de $\frac{b}{d}$ ou de $\frac{b}{d'}$. Pelo Lema 1.184, $\{b+1, \rightarrow\} \subseteq S \left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1} \right] \right)$, logo, $x \in \left\{ \lambda \frac{b}{d} \mid \lambda \in \{1, \dots, d\} \right\} \cup \left\{ \lambda \frac{b}{d'} \mid \lambda \in \{1, \dots, d'\} \right\}$.

\Leftarrow) Seja $x \in \left\{ \lambda \frac{b}{d} \mid \lambda \in \{1, \dots, d\} \right\} \cup \left\{ \lambda \frac{b}{d'} \mid \lambda \in \{1, \dots, d'\} \right\}$. Então $x = \lambda \frac{b}{d}$, ou $x = \lambda \frac{b}{d'}$.

Em ambos os casos $x \in T$ pelo Lema 1.146. Assuma que $\lambda \frac{b}{d} \in S$. Pelo Lema 1.146, existe um inteiro positivo k tal que

$$\frac{b}{a} < \frac{\lambda \frac{b}{d}}{k} < \frac{b}{a-1},$$

ou seja, $(a-1)\lambda < dk < a\lambda$. Como a é um múltiplo de d , ambos dk e $a\lambda$ são múltiplos de d . Agora, como $dk < a\lambda$, temos que $dk \leq a\lambda - d$. Consequentemente, $(a-1)\lambda < a\lambda - d$, o que leva a $d < \lambda$, em contradição com a escolha de λ . Isso mostra que $\lambda \frac{b}{d} \notin S$. Por argumentos similares é possível mostrar que $\lambda \frac{b}{d'} \notin S$. \square

Alcançamos informações suficientes para calcular o número de Frobenius e o gênero de semigrupos numéricos modulares abertos diferentes das semirretas, com o auxílio do Teorema 1.182.

Teorema 1.186 *Sejam a e b inteiros com $2 \leq a < b$. Tome $d = \text{mdc}\{a, b\}$ e $d' = \text{mdc}\{a-1, b\}$. Então,*

$$F \left(S \left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1} \right] \right) \right) = b \text{ e } g \left(S \left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1} \right] \right) \right) = \frac{1}{2}(b-1+d+d').$$

Demonstração. Pelos Lemas 1.184 e 1.185, $F \left(S \left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1} \right] \right) \right) = b$. Como $\text{mdc}\{d, d'\} = 1$, temos que $\lambda \frac{b}{d} \neq \lambda' \frac{b}{d'}$ para quaisquer $\lambda \in \{1, \dots, d-1\}$ e $\lambda' \in \{1, \dots, d'-1\}$. Pelo Lema 1.185,

$$g \left(S \left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1} \right] \right) \right) = g \left(S \left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1} \right] \right) \right) + d + d' - 1.$$

Desse modo, obtemos a fórmula desejada usando o Teorema 1.182. \square

Pela fórmula dada no Teorema 1.186 e pela caracterização de semigrupos numéricos irreduzíveis estabelecida no Corolário 1.74, temos a seguinte consequência.

Corolário 1.187 *Sejam a e b inteiros com $2 \leq a < b$.*

- 1) $S \left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1} \right] \right)$ é simétrico se, e só se, $\text{mdc}\{a, b\} = \text{mdc}\{a-1, b\} = 1$.
- 2) $S \left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1} \right] \right)$ é pseudo-simétrico se, e somente se, $\{\text{mdc}\{a, b\}, \text{mdc}\{a-1, b\}\} = \{1, 2\}$.

Exemplo 1.188 • $S \left(\left[\frac{11}{8}, \frac{11}{8-1} \right] \right) = \{0, 3, 6, 7, 9, 10, 12, \rightarrow\} = \langle 3, 7 \rangle$ é um semigrupo numérico simétrico.

• $S \left(\left[\frac{14}{10}, \frac{14}{10-1} \right] \right) = \{0, 3, 6, 9, 10, 12, 13, 15, \rightarrow\} = \langle 3, 10, 17 \rangle$ é um semigrupo numérico pseudo-simétrico.

O próximo resultado caracteriza semirretas irredutíveis.

Lema 1.189 *Seja S um semigrupo numérico irredutível. Então S é uma semirreta se, e somente se, $S \in \{\mathbb{N}, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4, 5 \rangle\}$.*

Demonstração. Se S é uma semirreta, existe um inteiro positivo m tal que $S = \{0, m, \rightarrow\}$. Consequentemente, $S = \langle m, m+1, \dots, 2m-1 \rangle$ e $e(S) = m(S)$. Como S é irredutível, pela Observação 1.90 e pelo Lema 1.96, S possui dimensão dois, ou é da forma $\langle 3, x+3, 2x+3 \rangle$. Como S é uma semirreta, S deve ser $\langle 2, 3 \rangle$ ou $\langle 3, 4, 5 \rangle$. \square

Lema 1.190 *Sejam α e β números racionais tais que $1 < \alpha < \beta$ e $S = S([\alpha, \beta])$. Se S não é uma semirreta, então*

$$\frac{F(S)}{F(S)-1} < \alpha < \beta < F(S).$$

Demonstração. Como S não é uma semirreta, $m(S) < F(S)$. Pelo Lema 1.146, existe um inteiro positivo k tal que $\alpha \leq \frac{m(S)}{k} \leq \beta$ ($k < m(S)$, já que $\alpha > 1$). Daí, $\alpha \leq \frac{m(S)}{k} < \frac{F(S)}{k} \leq \frac{F(S)}{1}$. Como $F(S) \notin S$, o Lema 1.146 força $F(S)$ a ser maior do que β . Além disso, $\beta \geq \frac{m(S)}{k} \geq \frac{m(S)}{m(S)-1} > \frac{F(S)}{F(S)-1}$. Assim, usando que $F(S) \notin S$ novamente e o Lema 1.146, $\frac{F(S)}{F(S)-1} < \alpha$. \square

Podemos provar agora que todo semigrupo numérico proporcionalmente modular irredutível é modular aberto.

Lema 1.191 *Seja S um semigrupo numérico proporcionalmente modular irredutível diferente de uma semirreta. Então existe um inteiro k com $2 \leq k < F(S)$ e $S = S \left(\left[\frac{F(S)}{k}, \frac{F(S)}{k-1} \right] \right)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.152, existem números racionais α e β tais que $1 < \alpha < \beta$ e $S = S([\alpha, \beta])$. Agora, pelos Lemas 1.146 e 1.190, deduzimos que existe um inteiro k , com $2 \leq k < F(S)$, tal que $\frac{F(S)}{k} < \alpha < \beta < \frac{F(S)}{k-1}$. Seja $T = S \left(\left[\frac{F(S)}{k}, \frac{F(S)}{k-1} \right] \right)$. O Teorema 1.186 assegura que $F(T) = F(S)$. Além disso, a inequação $\frac{F(S)}{k} < \alpha < \beta < \frac{F(S)}{k-1}$ implica que $S \subseteq T$. Daí, a irredutibilidade de S força, pelo Teorema 1.71, que S deve ser igual a T , já que ambos possuem o mesmo número de Frobenius. \square

Usando o Corolário 1.187 e os Lemas 1.189 e 1.191 podemos mostrar a seguinte caracterização de semigrupos numéricos proporcionalmente modulares irreduzíveis.

Corolário 1.192 *Seja S um semigrupo numérico proporcionalmente modular.*

1) S é simétrico se, e somente se, $S = \mathbb{N}$, $S = \langle 2, 3 \rangle$, ou $S = S \left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1} \right] \right)$ para a e b inteiros com $2 \leq a < b$ e $\text{mdc}\{a, b\} = \text{mdc}\{a-1, b\} = 1$.

2) S é pseudo-simétrico se, e somente se, $S = \langle 3, 4, 5 \rangle$, ou $S = S \left(\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a-1} \right] \right)$ para a e b inteiros com $2 \leq a < b$ e $\{\text{mdc}\{a, b\}, \text{mdc}\{a-1, b\}\} = \{1, 2\}$.

1.6 O Quociente de um Semigrupo Numérico por um Inteiro Positivo

1.6.1 Elementos Notáveis

Sejam S um semigrupo numérico e p um inteiro positivo. Defina o conjunto

$$\frac{S}{p} = \{x \in \mathbb{N} \mid px \in S\}.$$

Proposição 1.193 *Sejam S um semigrupo numérico e p um inteiro positivo.*

- 1) $S \subseteq \frac{S}{p}$.
- 2) $\frac{S}{p}$ é um semigrupo numérico.
- 3) $\frac{S}{p} = \mathbb{N}$ se, e somente se, $p \in S$.

Demonstração. 1) Observe que se $x \in S \Rightarrow px \in S \Rightarrow x \in \frac{S}{p}$. Portanto, $S \subseteq \frac{S}{p}$.

2) Sabemos que $S \subseteq \frac{S}{p}$, desse modo basta mostrar que $\frac{S}{p}$ é fechado com a soma. Para isso, sejam $x, y \in \frac{S}{p} \Rightarrow px, py \in S \Rightarrow p(x+y) = px + py \in S \Rightarrow x+y \in \frac{S}{p}$, concluindo que $\frac{S}{p}$ é um semigrupo numérico.

- 3) $\frac{S}{p} = \mathbb{N} \Leftrightarrow 1 \in \frac{S}{p} \Leftrightarrow 1 \cdot p = p \in S$. □

O semigrupo $\frac{S}{p}$ é chamado *quociente* de S por p . Além disso, dizemos que $\frac{S}{2}$ é a metade de S e que $\frac{S}{4}$ é um quarto de S . Mencionamos esses dois casos particulares pois eles terão bastante relevância mais a frente nessa seção.

Vimos nas seções anteriores que as lacunas fundamentais de um semigrupo numérico o determinam unicamente. Felizmente, as lacunas fundamentais do quociente de um semigrupo numérico podem ser calculadas facilmente pelas lacunas fundamentais do semigrupo original. Isso não vale para os geradores minimais, e é por isso que focaremos nas lacunas fundamentais de um semigrupo numérico.

Proposição 1.194 *Sejam S um semigrupo numérico e d um inteiro positivo. Então*

$$FG\left(\frac{S}{d}\right) = \left\{ \frac{h}{d} \mid h \in FG(S) \text{ e } h \equiv 0 \pmod{d} \right\}.$$

Demonstração. Seja h um inteiro. Observe que $h \in FG\left(\frac{S}{d}\right) \Leftrightarrow h \notin \frac{S}{d}$ e $kh \in \frac{S}{d}$, para todo inteiro k maior do que um. Isso equivale a dizer que $dh \notin S$ e $kdh \in S$ para qualquer inteiro k maior do que um. \square

Corolário 1.195 *Sejam S um semigrupo numérico e d um inteiro positivo. Então $d \in FG(S)$ se, e só se, $\frac{S}{d} = \langle 2, 3 \rangle$.*

Demonstração. \Rightarrow) Observe que se $d \in FG(S)$, pela Proposição 1.194, $1 \in FG\left(\frac{S}{d}\right)$, forçando que $\frac{S}{d}$ seja igual a $\langle 2, 3 \rangle$.

\Leftarrow) Basta usar a Proposição 1.194, já que $FG(\langle 2, 3 \rangle) = 1$. \square

Como sabemos, uma das melhores formas de descrever um semigrupo numérico é por meio do conjunto de Apéry de qualquer dos seus elementos não nulos. Note que se S é um semigrupo numérico, $m \in S^*$ e $d \mid m$, então $\frac{m}{d} \in \frac{S}{d}$. Vamos descrever $Ap\left(\frac{S}{d}, \frac{m}{d}\right)$.

Proposição 1.196 *Sejam S um semigrupo numérico, $m \in S^*$ e d um divisor positivo de m . Então,*

$$Ap\left(\frac{S}{d}, \frac{m}{d}\right) = \left\{ \frac{w}{d} \mid w \in Ap(S, m) \text{ e } w \equiv 0 \pmod{d} \right\}.$$

Demonstração. A ideia dessa demonstração é análoga à da Proposição 1.194. \square

Usando agora a Proposição 1.14, obtemos uma consequência interessante.

Corolário 1.197 *Sejam S um semigrupo numérico, $m \in S^*$ e d um divisor positivo de m . Assuma que $Ap(S, m) = \{0, k_1m + 1, \dots, k_{m-1}m + m - 1\}$. Então,*

- 1) $Ap\left(\frac{S}{d}, \frac{m}{d}\right) = \left\{ 0, k_d \frac{m}{d} + 1, \dots, k_{\left(\frac{m}{d}-1\right)d} \frac{m}{d} + \frac{m}{d} - 1 \right\}$.
- 2) $g\left(\frac{S}{d}\right) = k_d + k_{2d} + \dots + k_{\left(\frac{m}{d}-1\right)d}$.
- 3) $F\left(\frac{S}{d}\right) = \max \left\{ k_d \frac{m}{d} + 1, \dots, k_{\left(\frac{m}{d}-1\right)d} \frac{m}{d} + \frac{m}{d} - 1 \right\} - \frac{m}{d}$.

Observação 1.198 *Note que os elementos de $Ap\left(\frac{S}{d}, \frac{m}{d}\right)$ diferentes de 0 são os elementos de $Ap(S, m)$ da forma $k_{id}m + id$, $i \in \left\{ 1, \dots, \left(\frac{m}{d} - 1\right) \right\}$, divididos por d .*

1.6.2 Metade de um Semigrupo Numérico Irredutível

Nessa seção vamos mostrar que todo semigrupo numérico é a metade de uma quantidade infinita de semigrupos numéricos irredutíveis. Vamos também provar que todo semigrupo numérico é um quarto de um semigrupo numérico pseudo-simétrico.

Para um semigrupo numérico S , tome o conjunto

$$2S = \{2s \mid s \in S\}.$$

Esse conjunto é um submonoide de \mathbb{N} . Além disso, $2\langle n_1, \dots, n_p \rangle = \langle 2n_1, \dots, 2n_p \rangle$. Relembre que se A e B são subconjuntos de \mathbb{Z} , escrevemos $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ (note que, em geral, com essa notação $A + A \neq 2A$).

Teorema 1.199 *Seja $S = \langle n_1, \dots, n_p \rangle$, com $PF(S) = \{f_1, \dots, f_t\}$. Seja f um inteiro ímpar tal que $f - f_i - f_j \in S$, para todos $i, j \in \{1, \dots, t\}$. Então,*

$$T = \langle 2n_1, 2n_2, \dots, 2n_p, f - 2f_1, \dots, f - 2f_t \rangle$$

é um semigrupo numérico simétrico com número de Frobenius f e $S = \frac{T}{2}$. Além disso, $T = 2S \cup (\{f - 2f_1, \dots, f - 2f_t\} + 2S)$.

Demonstração. Sejam $i, j \in \{1, \dots, t\}$. Observe que $f - 2f_i + f - 2f_j = 2(f - f_i - f_j) \in 2S$, por hipótese. Daí, mostremos que $T = 2S \cup (\{f - 2f_1, \dots, f - 2f_t\} + 2S)$ (*). Seja $V = 2S \cup (\{f - 2f_1, \dots, f - 2f_t\} + 2S)$. Se $x \in T$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_t \in \mathbb{N}$ tais que $x = \alpha_1 2n_1 + \dots + \alpha_p 2n_p + \beta_1(f - 2f_1) + \dots + \beta_t(f - 2f_t)$. Assim, $\beta_1 + \dots + \beta_t$ é par, temos que $x \in 2S$, caso contrário, $\beta_1(f - 2f_1) + \dots + \beta_t(f - 2f_t) = (\beta_1(f - 2f_1) + \dots + (\beta_t - 1)(f - 2f_t)) + f - 2f_t$, ou seja, $x \in V$, logo $T \subseteq V$. Por outro lado, se $y \in V$, então $y \in 2S$, ou $y = f - 2f_i + k$, onde $i \in \{1, \dots, t\}$ e $k \in 2S$. Em ambos os casos temos que $y \in T$, logo $V \subseteq T$, concluindo que $T = V$.

Note também que $T \cap 2\mathbb{N} = 2S$, já que os elementos de $(\{f - 2f_1, \dots, f - 2f_t\} + 2S)$ são todos ímpares. Vejamos agora que $f \notin T$. Caso isso não aconteça, com f é ímpar, deveriam existir $i \in \{1, \dots, t\}$ e $s \in S$ tais que $f = f - 2f_i + 2s$, ou seja, $f_i = s \in S$, o que é impossível.

Provemos que todos os pares maiores que f pertencem a T . Como $F(S) = \max\{f_1, \dots, f_t\}$, então $f - 2F(S) \in S$, por hipótese, logo $f \leq 2F(S)$. Observe que todo inteiro positivo para maior que $2F(S)$ pertence a $2S$, conseqüentemente, todo inteiro par maior que f pertence a $2S \subseteq T$.

Mostraremos agora que $F(T) = f$. Pelos parágrafos anteriores, basta provarmos que todo inteiro ímpar maior que f pertence a T . Seja $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Então, $f + 2k = (f - 2F(S)) + 2(F(S) + k)$. Como $f - 2F(S) \in \{f - 2f_1, \dots, f - 2f_t\}$ e $2(F(S) + k) \in S$, deduzimos de (*) que $f + 2k \in T$.

Afim de provar que T é simétrico, seja $x \in \mathbb{Z} \setminus T$. Utilizando a Proposição 1.73, devemos mostrar que $f - x \in T$. Para isso, distinguiremos em dois caso dependendo da paridade de x .

- Se x é par, então como $x \notin T$, temos que $\frac{x}{2} \notin S$. Pelo visto na Proposição 1.21, existe $i \in \{1, \dots, t\}$ tal que $f_i - \frac{x}{2} \in S$. Então, $2f_i - x \in T$. Conseqüentemente, de (*) segue que $f - x = (f - 2f_i) + (2f_i - x) \in T$.

- Se x é ímpar, então $f - x$ é par. Daí, se $f - x \notin T$, usando o caso anterior, obteríamos que $f - (f - x) = x \in T$, contradizendo a escolha de x .

Finalmente, vamos provar que $S = \frac{T}{2}$. Se $x \in \frac{T}{2}$, então $2x \in T$. Pelo visto em (*), isso significa que $2x \in 2S$, ou seja, $x \in S$. Por outro lado, se $x \in S$, então $2x \in 2S \subseteq T$, logo $x \in \frac{T}{2}$, concluindo que $S = \frac{T}{2}$. □

A seguir veremos como consequência desse teorema que podemos escolher uma quantidade infinita de semigrupos T para cada semigrupo numérico S .

Corolário 1.200 *Seja S um semigrupo numérico. Então existe uma quantidade infinita de semigrupos numéricos simétricos T tais que $S = \frac{T}{2}$.*

Demonstração. Assuma que $PF(S) = \{f_1, \dots, f_t\}$. Escolha um inteiro ímpar f maior ou igual a $3F(S) + 1$. Para $i, j \in \{1, \dots, t\}$, $f - f_i - f_j \geq 3F(S) + 1 - F(S) - F(S) = F(S) + 1$. Então, $f - f_i - f_j \in S$. Pelo Teorema 1.199, sabemos que $T_f = 2S \cup (\{f - 2f_1, \dots, f - 2f_t\} + 2S)$ é um semigrupo numérico simétrico com número de Frobenius f e tal que $S = \frac{T_f}{2}$. Observe que podemos escolher uma quantidade infinita de números ímpares maiores ou iguais a $3F(S) + 1$, e para cada um deles obtemos um T_f diferente, o que conclui a demonstração. \square

Prosseguiremos agora com o caso pseudo-simétrico. Como uma consequência do seguinte resultado, veremos que não existe um paralelismo entre os casos simétrico e pseudo-simétrico.

Lema 1.201 *Seja S um semigrupo numérico com número de Frobenius par. Então,*

$$F\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{F(S)}{2}.$$

Demonstração. Sabendo que o número de Frobenius de S é o maior elemento de $F(S)$, então a Proposição 1.194 garante a igualdade desejada. \square

Observação 1.202 *Note que se S é um semigrupo numérico e T é um semigrupo numérico pseudo-simétrico com $S = \frac{T}{2}$, então pelo Lema 1.201 deduzimos que $F(T) = 2F(S)$. Daí, como existe uma quantidade finita de semigrupos numéricos com número de Frobenius $2F(S)$, concluimos que não é possível obter um resultado similar ao Corolário 1.200 para o caso pseudo-simétrico.*

Temos ainda outro problema que faz o caso pseudo-simétrico diferente do caso simétrico, como veremos na próxima proposição.

Proposição 1.203 *Seja T um semigrupo numérico pseudo-simétrico. Então, $\frac{T}{2}$ é um semigrupo numérico irredutível.*

Demonstração. Seja $S = \frac{T}{2}$ e suponha que $PF(S) = \{f_1 < \dots < f_t\}$. Relembre que $F(S)$ é o maior número pseudo-Frobenius. Daí, $F(S) = f_t$, e pelo Lema 1.201 temos que $F(T) = 2f_t$.

Seja $i \in \{1, \dots, t\}$. Então, $f_i \notin S$, logo $2f_i \notin T$. Pela Proposição 1.73, segue que $2f_t - 2f_i \in T$, ou $2f_i = f_t$. Se $2f_t - 2f_i \in T$, então $2(f_t - f_i) \in T$, o que significa que $f_t - f_i \in S$ e, pela Proposição 1.21, obtemos que $f_t = f_i$. Isso prova que $PF(S) \subseteq \left\{f, \frac{f}{2}\right\} = \left\{F(S), \frac{F(S)}{2}\right\}$. Assim, pelo visto nos Corolários 1.80 e 1.85, temos que S é um semigrupo numérico simétrico ou pseudo-simétrico, ou seja, S é um semigrupo numérico irredutível. \square

Isso, em particular, significa que não é possível obter que todo semigrupo numérico é a metade de um semigrupo numérico pseudo-simétrico.

Podemos acentuar um pouco mais o resultado anterior para distinguir em quais casos a metade de um semigrupo numérico pseudo-simétrico é simétrico ou pseudo-simétrico.

Corolário 1.204 *Seja S um semigrupo numérico pseudo-simétrico. Então,*

- 1) $\frac{S}{2}$ é simétrico se, e somente se $F(S) \equiv 2 \pmod{4}$.
- 2) $\frac{S}{2}$ é pseudo-simétrico se, e somente se $F(S) \equiv 0 \pmod{4}$.

Demonstração. Isso é uma consequência do Lema 1.201, Proposição 1.203 e Proposição 1.73. \square

Agora vamos ver que todo semigrupo numérico simétrico é a metade de um semigrupo numérico pseudo-simétrico. Isso, juntamente com o fato de que todo semigrupo numérico é a metade de um semigrupo numérico simétrico irá provar que qualquer semigrupo numérico pode ser escrito como um quarto de uma quantidade infinita de semigrupos numéricos pseudo-simétricos.

Lema 1.205 *Seja S um semigrupo numérico simétrico. Tome*

$$A = \left\{ F(S) + 2k \mid k \in \left\{ 1, \dots, \frac{F(S) - 1}{2} \right\} \right\}.$$

Então,

$$T = 2S \cup A \cup \{2F(S) + 1, \rightarrow\}$$

é um semigrupo numérico pseudo-simétrico com número de Frobenius $2F(S)$ e tal que $S = \frac{T}{2}$.

Demonstração. Como S é simétrico, temos que $F(S)$ é ímpar. Observe que A é o conjunto de inteiros ímpares pertencendo a $\{F(S) + 2, \dots, 2F(S) - 1\}$, e que $\#A = \frac{F(S) - 1}{2}$.

Vamos começar provando que T é um semigrupo numérico. Note que a soma de dois elementos de $2S$ é um elemento de $2S$, e que o resultado de adicionar qualquer inteiro não negativo a um elemento em $\{2F(S) + 1, \rightarrow\}$ pertence a $\{2F(S) + 1, \rightarrow\}$. Por outro lado, a soma de dois elementos de A é um elemento de $\{2F(S) + 1, \rightarrow\}$. Por fim, a soma de um elemento de $2S$ com um elemento de A é um elemento de $A \cup \{2F(S) + 1, \rightarrow\}$. Além disso, como $\{F(S) + 1, \rightarrow\} \subseteq T$, segue que $\mathbb{N} \setminus T$ é finito, concluindo que T é um semigrupo numérico.

Vamos mostrar agora que $2F(S)$ é o número de Frobenius de T . Para isso, basta mostrar que $2F(S) \notin T$, já que $\{F(S) + 1, \rightarrow\} \subseteq T$. Observe que $2F(S)$ é par e $F(S) \notin S$, logo $2F(S) \notin 2S$, e assim $2F(S) \notin T$.

Vejamus que T é um semigrupo numérico pseudo-simétrico. Como $2F(S)$ é o número de Frobenius de T , basta provar que $n(T) = F(S)$, já que se isso é verdade teríamos que $n(T) + g(T) = F(T) + 1 \Rightarrow F(S) + g(T) = 2F(S) + 1 \Rightarrow g(T) = F(S) + 1 = \frac{2F(S) + 2}{2} = \frac{F(T) + 2}{2}$, e logo pelo Corolário 1.74 concluiríamos que T é pseudo-simétrico. Agora, como

S é simétrico, pelo Corolário 1.74, segue que $n(S) = g(S) = \frac{F(S) + 1}{2}$. Consequentemente, $\#\{x \in 2S \mid x \leq 2F(S)\} = \#\{x \in S \mid x \leq F(S)\} = n(S) = \frac{F(S) + 1}{2}$. Portanto, $n(T) = \frac{F(S) + 1}{2} + \#A = \frac{F(S) + 1}{2} + \frac{F(S) - 1}{2} = F(S)$, obtendo o desejado.

Finalmente, mostremos que $S = \frac{T}{2}$. Temos que $x \in \frac{T}{2}$ se, e somente se, $2x \in T$, e como os elementos de A são ímpares, obtemos que $2x \in T \Leftrightarrow 2x \in 2S \cup \{2F(S) + 1, \rightarrow\}$. Se $2x \in 2S$, segue que $x \in S$. Por outro lado, se $2x \geq 2F(S) + 1$, então $x \geq F(S) + 1$, logo $x \in S$. Assim, $x \in \frac{T}{2}$ se, e somente se, $x \in S$. \square

Como uma consequência do Lema 1.205 e do Corolário 1.200, obtemos o seguinte.

Teorema 1.206 *Todo semigrupo numérico é um quarto de uma quantidade infinita de semigrupos numéricos pseudo-simétricos.*

Podemos alcançar um resultado similar ao Lema 1.205 para semigrupos numéricos pseudo-simétricos. Isso irá nos ajudar a estabelecer uma nova caracterização para semigrupos numéricos irredutíveis.

Lema 1.207 *Seja S um semigrupo numérico pseudo-simétrico. Tome*

$$A = \left\{ F(S) + 2k - 1 \mid k \in \left\{ 1, \dots, \frac{F(S)}{2} \right\} \right\}.$$

Então,

$$T = 2S \cup A \cup \{2F(S) + 1, \rightarrow\}$$

é um semigrupo numérico pseudo-simétrico com número de Frobenius $2F(S)$ e tal que $S = \frac{T}{2}$.

Demonstração. Como S é pseudo-simétrico, segue que $F(S)$ é par. Observe que A é o conjunto de inteiros ímpares pertencendo a $\{F(S) + 1, \dots, 2F(S) - 1\}$ e que $\#A = \frac{F(S)}{2}$.

A demonstração de que T é um semigrupo numérico com número de Frobenius $2F(S)$ e que $S = \frac{T}{2}$ é similar à que foi descrita no Lema 1.205.

Mostremos então que T é um semigrupo numérico pseudo-simétrico. Pelo visto no Corolário 1.74 e pelo fato de que $2F(S)$ é o número de Frobenius de T , é suficiente provar que $n(T) = F(S)$. Como S é um semigrupo numérico pseudo-simétrico, pelo Corolário 1.74 deduzimos que $n(S) = \frac{F(S)}{2}$. Consequentemente, $\#\{x \in 2S \mid x \leq 2F(S)\} = \#\{x \in S \mid x \leq F(S)\} = n(S) = \frac{F(S)}{2}$. Portanto, $n(T) = \frac{F(S)}{2} + \#A = \frac{F(S)}{2} + \frac{F(S)}{2} = F(S)$, concluindo a demonstração. \square

Com todas essas informações temos uma nova caracterização para os semigrupos numéricos irredutíveis.

Teorema 1.208 *Um semigrupo numérico é irredutível se, e somente se, é a metade de um semigrupo numérico pseudo-simétrico.*

Capítulo 2

Semigrupos Numéricos Generalizados Irredutíveis e Unicidade do Elemento Frobenius

Um submonoide $S \subseteq \mathbb{N}^d$, com a adição usual, é chamado *semigrupo numérico generalizado* (denotaremos por SNG) se $G(S) = \mathbb{N}^d \setminus S$ é um conjunto finito. Como para semigrupos numéricos, os elementos de $G(S)$ são denominadas *lacunas* de S e sua cardinalidade $g(S) = |G(S)|$ é conhecida como *gênero* de S . Nas referências [4] e [6], várias ideias originadas em semigrupos numéricos foram estendidas para semigrupos numéricos generalizados, e muitas ferramentas foram introduzidas a fim de lidar com as diferenças. Uma mudança crucial entre semigrupos numéricos em \mathbb{N} e semigrupos numéricos generalizados em \mathbb{N}^d é a definição da multiplicidade e do elemento Frobenius de S . Existe uma ordem natural dos elementos de \mathbb{N} que respeita a operação de adição. Essa ordenação é usada para definir o número de Frobenius de S . No entanto, existe uma ordem parcial natural em \mathbb{N}^d , e não uma ordem canônica total. Em [6], os autores introduzem ordens monomiais casuais, uma ordem total que é uma versão mais geral de ordens monomiais que respeitam a operação de adição do monoide em \mathbb{N}^d . Dada uma ordem monomial casual \prec em \mathbb{N}^d , o elemento Frobenius de $S \subset \mathbb{N}^d$, com respeito a \prec , é o maior elemento de $G(S)$. Neste capítulo vamos introduzir e caracterizar os *semigrupos numéricos generalizados irredutíveis* em termos da cardinalidade de um subconjunto especial de seu conjunto de lacunas, seguindo o que foi feito no artigo [2]. Vamos provar que, como no caso de semigrupos numéricos, todo semigrupo numérico generalizado pode ser escrito como interseção de uma quantidade finita de SNG irredutíveis. Além disso, para um SNG irredutível, o elemento Frobenius é único com respeito a qualquer ordem monomial casual.

2.1 Preliminares

Denotaremos em negrito os termos que representem elementos com d coordenadas

Definição 2.1 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG. Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^d$, e definiremos a seguinte relação:*

$$\mathbf{a} \leq_S \mathbf{b} \text{ se, e só se, } \mathbf{b} - \mathbf{a} \in S.$$

Observe que \leq_S é uma relação de ordem parcial em \mathbb{Z}^d , pois:

- $\mathbf{0} \in S \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{x} \in S \Rightarrow \mathbf{x} \leq_S \mathbf{x}$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ (reflexiva);
- se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$, e temos que $\mathbf{x} \leq_S \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \leq_S \mathbf{x}$, então $\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, \dots, x_d - y_d) \in S \subseteq \mathbb{N}^d$ e $\mathbf{y} - \mathbf{x} = (y_1 - x_1, \dots, y_d - x_d) \in S \subseteq \mathbb{N}^d \Rightarrow x_i - y_i = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, isto é, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (antissimétrica);

Desse modo,

- $PF(S) = \{(0, 3), (1, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (3, 0)\}$;
- $Ap(S, (0, 2)) = \{(0, 0), (0, 5), (1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (5, 0), (5, 1), (n, 0), (n, 1) | n \geq 6\}$;
- $Maximais_{\leq S} Ap(S, (0, 2)) = \{(0, 5), (1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$.

Aplicando a proposição anterior, os elementos de $PF(S)$ são:

$$(0, 5) - (0, 2) = (0, 3), (1, 2) - (0, 2) = (1, 0), (1, 5) - (0, 2) = (1, 3), (2, 2) - (0, 2) = (2, 0), (2, 3) - (0, 2) = (2, 1) \text{ e } (3, 2) - (0, 2) = (3, 0).$$

2.2 Semigrupos Numéricos Generalizados Irredutíveis

Nesta seção estenderemos para os SNGs alguns resultados que foram formulados para semigrupos numéricos. As demonstrações necessitam de argumentos diferentes que para semigrupos numéricos. Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$, denotamos por $x^{(i)}$ a i -ésima coordenada para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. A seguir vamos denotar por \leq a ordem parcial natural em \mathbb{N}^d , isto é, se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ se, e somente se, $x^{(i)} \leq y^{(i)}$, para cada $i = 1, \dots, d$.

Definição 2.6 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG. Definimos*

$$SG(S) = \{\mathbf{x} \in G(S) | 2\mathbf{x} \in S \text{ e } \mathbf{x} + \mathbf{s} \in S, \text{ para cada } \mathbf{s} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}\},$$

como sendo o conjunto de lacunas especiais.

Observação 2.7 *Note que $SG(S) \subseteq PF(S)$, mas a igualdade não é verdade em geral. Por exemplo, se $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (2, 0)\}$, temos que $PF(S) = G(S)$ e $SG(S) = \{(0, 1), (2, 0)\}$.*

Além disso, $SG(S)$ é não vazio, já que se \mathbf{f} é um elemento maximal em $G(S)$ com a ordem parcial natural em \mathbb{N}^d (o qual existe, já que $G(S)$ é finito), então $\mathbf{f} \in SG(S)$.

Proposição 2.8 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG e $\mathbf{x} \in G(S)$. Então $S \cup \{\mathbf{x}\}$ é um SNG se, e só se, $\mathbf{x} \in SG(S)$.*

Demonstração. A demonstração segue direto da definição de $SG(S)$. □

Definição 2.9 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG. Dizemos que S é irredutível se não pode ser escrito como interseção de dois SNGs que contêm S propriamente.*

Agora, vamos mostrar duas caracterizações de semigrupos numéricos generalizados irredutíveis. Resultados similares foram formulados em [14] no caso de semigrupos numéricos em \mathbb{N} .

Proposição 2.10 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG. S é irredutível se, e somente se, $|SG(S)| = 1$.*

Demonstração. \Rightarrow) Seja S um SNG irredutível, e suponha que existem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in EH(S)$, com $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Então $S \cup \{\mathbf{x}\}$ e $S \cup \{\mathbf{y}\}$ são SNGs distintos que contêm S propriamente, e $(S \cup \{\mathbf{x}\}) \cap (S \cup \{\mathbf{y}\}) = S$, contrariando a irredutibilidade de S .

\Leftarrow) Assuma agora que $|SG(S)| = 1$, e suponha que existem dois semigrupos numéricos generalizados diferentes S_1, S_2 tais que $S \subsetneq S_1$, $S \subsetneq S_2$ e $S_1 \cap S_2 = S$. Sejam \mathbf{x}, \mathbf{y} elementos maximais em $S_1 \setminus S$ e $S_2 \setminus S$, respectivamente, com respeito à ordem parcial natural em \mathbb{N}^d (note que $S_1 \setminus S$ e $S_2 \setminus S$ são conjuntos finitos, logo esses elementos maximais existem). Observe que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G(S)$. Vamos provar que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in SG(S)$. Como \mathbf{x} é maximal em $S_1 \setminus S$ com respeito a ordem parcial natural, temos que $2\mathbf{x} \notin S_1 \setminus S$, já que $2\mathbf{x} > \mathbf{x}$. Se $\mathbf{s} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$, então $\mathbf{x} + \mathbf{s} > \mathbf{x}$, assim $\mathbf{x} + \mathbf{s} \notin S_1 \setminus S$. Além disso, $\mathbf{x} \in S_1$ e $\mathbf{s} \in S \setminus \{\mathbf{0}\} \subset S_1 \setminus \{\mathbf{0}\}$, logo $\mathbf{x} + \mathbf{s} \in S_1$, concluindo que $\mathbf{x} + \mathbf{s} \in S$. Consequentemente, $\mathbf{x} \in SG(S)$. De modo similar, podemos provar que $\mathbf{y} \in SG(S)$. Por hipótese, $|SG(S)| = 1$, então $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, ou seja, $\mathbf{x} \in S_1 \setminus S$ e $\mathbf{x} \in S_2 \setminus S$, daí $\mathbf{x} \in S_1 \cap S_2 = S$, contradizendo que $\mathbf{x} \in G(S)$. □

Exemplo 2.11 Tomando $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (6, 0)\}$, temos que $PF(S) = \{(3, 0), (6, 0)\}$, logo $SG(S) = \{(6, 0)\}$, concluindo pela proposição anterior que S é irredutível. Por outro lado, o semigrupo do Exemplo 2.5 não é irredutível, já que $PF(S) = \{(0, 3), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (3, 0)\} = SG(S)$.

Proposição 2.12 Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG. S é irredutível se, e somente se, existe $\mathbf{f} \in G(S)$ tal que para cada $\mathbf{h} \in G(S)$, com $2\mathbf{h} \neq \mathbf{f}$, temos que $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$.

Demonstração. \Rightarrow) Pela Proposição 2.10, $SG(S)$ consiste em um elemento. Tome $SG(S) = \{\mathbf{f}\}$. Seja $\mathbf{h} \in G(S)$, com $\mathbf{h} \neq \mathbf{f}$, e suponha que $2\mathbf{h} \neq \mathbf{f}$. Como $\mathbf{h} \notin SG(S)$, temos duas possibilidades:

(1) Suponha que existe $\mathbf{s}_1 \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $\mathbf{f}_1 = \mathbf{h} + \mathbf{s}_1 \notin S$, em particular, $\mathbf{f}_1 - \mathbf{h} \in S$. Se $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}$ a afirmação é válida. Se $\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{f}$, então $\mathbf{f}_1 \notin SG(S)$. Vamos mostrar que em qualquer caso existe $\mathbf{s}_2 \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $\mathbf{f}_2 \notin S$ com $\mathbf{f}_2 > \mathbf{f}_1$ tais que $\mathbf{f}_2 = \mathbf{h} + \mathbf{s}_2$. Como $\mathbf{f}_1 \notin SG(S)$, se existe $\mathbf{t} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $\mathbf{f}_1 + \mathbf{t} \notin S$, colocamos $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{t} = \mathbf{h} + (\mathbf{s}_1 + \mathbf{t})$, $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1 + \mathbf{t}$, então $\mathbf{f}_2 > \mathbf{f}_1$. Por outro lado, se $\mathbf{f}_1 + \mathbf{t} \in S$, para cada $\mathbf{t} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$, consideramos $\mathbf{f}_2 = 2\mathbf{f}_1 \notin S$, logo $\mathbf{f}_2 = \mathbf{h} + (\mathbf{h} + 2\mathbf{s}_1)$ e $\mathbf{s}_2 = \mathbf{h} + 2\mathbf{s}_1 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{s}_1 \in S$. Portanto, provamos que existe $\mathbf{s}_2 \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $\mathbf{f}_2 \notin S$ com $\mathbf{f}_2 > \mathbf{f}_1$ tal que $\mathbf{f}_2 = \mathbf{h} + \mathbf{s}_2$. Se $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}$ acabamos, caso contrário, seguimos o mesmo argumento para obter uma sequência de elementos $\mathbf{f}_i \notin S$ com $\mathbf{f}_i > \mathbf{f}_{i-1}$ para cada i , e $\mathbf{f}_i = \mathbf{h} + \mathbf{s}_i$, com $\mathbf{s}_i \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$. Como $G(S)$ é um conjunto finito, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}$, consequentemente, $\mathbf{f}_k - \mathbf{h} \in S$.

(2) Suponha que $\mathbf{h} + \mathbf{s} \in S$, para todo $\mathbf{s} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $2\mathbf{h} \notin S$. Vamos mostrar que teremos uma contradição. Observe que para cada $i \in \mathbb{N}$ temos que $i\mathbf{h} + \mathbf{s} \in S$, para cada $\mathbf{s} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$. Como $G(S)$ é finito, existe $k = \max\{i \in \mathbb{N} \mid i\mathbf{h} \notin S\}$, em particular, $k\mathbf{h} \in SG(S)$, isto é, $k\mathbf{h} = \mathbf{f}$. Como $2\mathbf{h} \neq \mathbf{f}$, segue que $k \geq 3$. Considere o elemento $\bar{\mathbf{h}} = (k-1)\mathbf{h}$, logo $\bar{\mathbf{h}} + \mathbf{s} \in S$, para todo $\mathbf{s} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$ e $2\bar{\mathbf{h}} = 2(k-1)\mathbf{h} \in S$, já que $2(k-1) > k$, ou seja, $\bar{\mathbf{h}} \in SG(S)$. Mas isso é uma contradição, pois $\bar{\mathbf{h}} \neq \mathbf{f}$.

\Leftarrow) Por hipótese, \mathbf{f} é maior que cada elemento de $G(S)$ com respeito a ordem parcial \leq_S , exceto o elemento $\mathbf{h} \in G(S)$ tal que $2\mathbf{h} = \mathbf{f}$, se existir. Pela Proposição 2.3, os elementos possíveis em $PF(S)$ são \mathbf{f} e $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{f}}{2}$. Portanto, $SG(S) \subseteq PF(S)$ e $\mathbf{h} \notin SG(S)$, já que $2\mathbf{h} = \mathbf{f} \notin S$, então devemos ter que $SG(S) = \{\mathbf{f}\}$, concluindo que S é irredutível. \square

Lema 2.13 Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG irredutível com $SG(S) = \{\mathbf{f}\}$. Então uma, e apenas uma, dessas condições é satisfeita:

- (1) $PF(S) = \{\mathbf{f}\}$ se existe uma coordenada de \mathbf{f} que seja ímpar;
- (2) $PF(S) = \left\{ \mathbf{f}, \frac{\mathbf{f}}{2} \right\}$ se todas as coordenadas de \mathbf{f} são pares.

Demonstração. Se \mathbf{f} possui uma coordenada ímpar, então não existe $\mathbf{h} \in G(S)$ tal que $2\mathbf{h} = \mathbf{f}$ e, pela Proposição 2.12, \mathbf{f} é o elemento maximal em $G(S)$ com respeito a ordem parcial \leq_S , logo $PF(S) = \{\mathbf{f}\}$ pela Proposição 2.3.

Se todas as coordenadas de \mathbf{f} são pares, então $\frac{\mathbf{f}}{2} \in \mathbb{N}^d$, e deve pertencer a $G(S)$, já que $\mathbf{f} \in G(S)$. Como $\mathbf{f} - \frac{\mathbf{f}}{2} = \frac{\mathbf{f}}{2} \notin S$, então \mathbf{f} e $\frac{\mathbf{f}}{2}$ não são comparáveis com relação a ordem parcial \leq_S . Portanto, pela Proposição 2.12, \mathbf{f} é maior que todos os elementos em $G(S)$ diferentes de $\frac{\mathbf{f}}{2}$ com respeito a ordem parcial \leq_S , assim \mathbf{f} é um elemento maximal com respeito a essa ordem, isto é, $\mathbf{f} \in PF(S)$. Além disso, $\frac{\mathbf{f}}{2}$ é maximal em $G(S)$ com respeito a ordem parcial \leq_S , caso contrário, existe $\mathbf{h} \in G(S)$ tal que $\frac{\mathbf{f}}{2} \leq_S \mathbf{h} \leq_S \mathbf{f}$, o que é uma contradição. Desse modo, $PF(S) = \left\{ \mathbf{f}, \frac{\mathbf{f}}{2} \right\}$. \square

Observação 2.14 Note que se uma das condições do Lema 2.13 é satisfeita, então S é irreduzível. De fato, em ambos os casos $SG(S) = \{\mathbf{f}\}$ e a afirmação segue da Proposição 2.10.

Reunimos os resultados anteriores nos seguintes teoremas.

Teorema 2.15 Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG. As seguintes condições são equivalentes:

- (1) $|PF(S)| = 1$;
- (2) $PF(S) = \{\mathbf{f}\}$ e \mathbf{f} possui pelo menos uma coordenada ímpar;
- (3) Existe $\mathbf{f} \in G(S)$ tal que, para todo $\mathbf{h} \in G(S)$, $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$.

Teorema 2.16 Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG. Então as seguintes condições são equivalentes:

- (1) $PF(S) = \left\{ \mathbf{f}, \frac{\mathbf{f}}{2} \right\}$;
- (2) Existe $\mathbf{f} \in G(S)$ tal que suas coordenadas são todas pares e para todo $\mathbf{h} \in G(S)$, com $\mathbf{h} \neq \frac{\mathbf{f}}{2}$, temos que $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$.

Definição 2.17 Um semigrupo numérico generalizado $S \subseteq \mathbb{N}^d$ é chamado simétrico se satisfaz uma das condições equivalentes do Teorema 2.15. S é chamado pseudo-simétrico se satisfaz uma das condições equivalentes do Teorema 2.16.

Pelo Lema 2.13, qualquer SNG irreduzível é simétrico ou pseudo-simétrico, como para semigrupos numéricos.

Exemplo 2.18 Seja $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0)\}$. Por cálculos elementares temos que $PF(S) = \{(5, 0)\} = SG(S)$, logo S é simétrico.

Tome agora $S' = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 10)\}$. Nesse caso, $PF(S') = \{(0, 5), (0, 10)\}$ e $SG(S') = \{(0, 10)\}$, concluindo que S' é pseudo-simétrico.

Ambos S e S' são SNGs irreduzíveis.

Observação 2.19 Se $d = 1$ e S é um semigrupo numérico simétrico, então S é irreduzível, $SG(S) = \{f\}$ e pelo Teorema 2.15, f é ímpar. Além disso, f é o número de Frobenius de S , já que para cada semigrupo numérico o número de Frobenius é trivialmente um elemento de $SG(S)$. Portanto, a definição de um SNG simétrico, dada aqui, é uma generalização da definição de um semigrupo numérico simétrico. O mesmo argumento é válido para um SNG pseudo-simétrico.

2.3 Decomposição de um SNG como interseção de uma quantidade finita de irreduzíveis

Sabemos que todo semigrupo numérico pode ser escrito como uma interseção de um número finito de semigrupos numéricos irreduzíveis. Uma decomposição com a menor quantidade possível de semigrupos numéricos irreduzíveis envolvidos pode ser obtida algoritmicamente. O objetivo dessa seção é encontrar resultados análogos para SNGs.

Definição 2.20 Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG. Definimos os conjuntos:

- (1) $\mathcal{O}(S) = \{T \subseteq \mathbb{N}^d \mid T \text{ é um SNG, } S \subseteq T\}$, denominado o conjunto de semigrupos que contêm S ;
- (2) $\mathcal{I}(S) = \{T \in \mathcal{O}(S) \mid T \text{ é irreduzível}\}$.

Observe que $\mathcal{O}(S)$ é um conjunto finito, já que S possui complemento finito em \mathbb{N}^d , além disso, $\mathcal{I}(S) \subseteq \mathcal{O}(S)$.

Vimos que se $S \subseteq \mathbb{N}^d$ é um SNG e $\mathbf{x} \notin S$, então $S \cup \{\mathbf{x}\}$ é um SNG se, e só se, \mathbf{x} é uma lacuna especial de S . Em particular, a fim de obter o conjunto de semigrupos que contêm S , basta calcular o conjunto $SG(S)$, então para todo $\mathbf{x} \in SG(S)$ computamos $S_{\{\mathbf{x}\}} = S \cup \{\mathbf{x}\}$ e repetimos o processo para todos os semigrupos $S_{\mathbf{x}}$ até conseguir \mathbb{N}^d .

Proposição 2.21 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG. Se S não é irredutível, então $S = S_1 \cap \dots \cap S_n$, com $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{I}(S)$.*

Demonstração. Se S não é irredutível, então $S = S_1 \cap S_2$, onde S_1 e S_2 são SNGs tais que $S \subset S_1$ e $S \subset S_2$. Se S_1 e S_2 não são irredutíveis, então podemos repetir o mesmo argumento de S . Finalmente, obtemos S como uma interseção de uma quantidade finita de irredutíveis SNGs, já que $\mathcal{I}(S)$ é um conjunto finito. \square

Seja $Minimais_{\subseteq} \mathcal{I}(S)$ o conjunto dos elementos em $\mathcal{I}(S)$ que são minimais com respeito à inclusão de conjuntos. Uma decomposição $S = S_1 \cap \dots \cap S_n$ de S , com $S_i \in \mathcal{I}(S)$ para cada i , é chamada *minimal* (ou *não refinável*) se $S_1, \dots, S_n \in Minimais_{\subseteq} \mathcal{I}(S)$.

Proposição 2.22 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG e $S = S_1 \cap \dots \cap S_n$, com $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{I}(S)$. Então, existem $S'_1, \dots, S'_n \in Minimais_{\subseteq} \mathcal{I}(S)$ tal que $S = S'_1 \cap \dots \cap S'_n$.*

Demonstração. Se $S = S_1 \cap \dots \cap S_n$ e existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $S_i \notin Minimais_{\subseteq} \mathcal{I}(S)$, então podemos escolher $S'_i \subset S_i$ com $S'_i \in Minimais_{\subseteq} \mathcal{I}(S)$. \square

Lema 2.23 *Sejam S e T dois semigrupos numéricos generalizados em \mathbb{N}^d tais que $S \subsetneq T$. Seja $\mathbf{h} \in Maximais(T \setminus S)$ (maximais com respeito à ordem parcial natural em \mathbb{N}^d). Então, $\mathbf{h} \in SG(S)$.*

Demonstração. Vamos denotar a ordem parcial natural em \mathbb{N}^d por \leq , e seja $\mathbf{h} \in Maximais(T \setminus S)$. Então, $\mathbf{h} \in G(S)$ e para todo $\mathbf{s} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$ temos que $\mathbf{h} + \mathbf{s} \in T$ e $\mathbf{h} + \mathbf{s} > \mathbf{h}$, logo $\mathbf{h} + \mathbf{s} \in S$. Analogamente, $2\mathbf{h} \in T$ e $2\mathbf{h} > \mathbf{h}$, assim $2\mathbf{h} \in S$. Daí, $\mathbf{h} \in SG(S)$. \square

Definição 2.24 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG e $T \in \mathcal{O}(S)$. Definimos:*

$$\mathcal{C}(S) = \{\mathbf{h} \in SG(S) \mid \mathbf{h} \notin T\}.$$

Proposição 2.25 *Sejam $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG e $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{O}(S)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- 1) $S = S_1 \cap \dots \cap S_n$;
- 2) Para todo $\mathbf{h} \in SG(S)$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\mathbf{h} \notin S_i$;
- 3) $\mathcal{C}(S_1) \cup \dots \cup \mathcal{C}(S_n) = SG(S)$.

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$) Seja $\mathbf{h} \in SG(S)$. Então, $\mathbf{h} \notin S = S_1 \cap \dots \cap S_n$, ou seja, $\mathbf{h} \notin S_i$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$.

$2 \Rightarrow 1$) Suponha que $S \subsetneq S_1 \cap \dots \cap S_n$. Daí, tome $\mathbf{h} \in Maximais((S_1 \cap \dots \cap S_n) \setminus S)$, pelo Lema 2.23 temos que $\mathbf{h} \in SG(S)$ e $\mathbf{h} \in S_1 \cap \dots \cap S_n$, contrariando a hipótese.

$2 \Rightarrow 3$) Segue de forma trivial. \square

Como no caso de semigrupos numéricos, é possível considerar uma decomposição minimal em irredutíveis e produzir um algoritmo para calcular tal decomposição.

Algoritmo 2.26 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG não irredutível.*

- (1) *Calcule o conjunto $SG(S)$;*
- (2) *Tome os conjuntos $I = \emptyset$ e $C = \{S\}$;*
- (3) *Para todo S' em C , seja B o conjunto dos semigrupos numéricos generalizados \bar{S} tal que $|\bar{S} \setminus S'| = 1$;*
- (4) *Remova de B os semigrupos numéricos generalizados S' tais que $SG(S) \subseteq S'$;*
- (5) *Remova de B os semigrupos numéricos generalizados S' tal que existe $T \in I$ com $T \subseteq S'$;*
- (6) *Seja $C = \{S' \in B \mid S' \text{ não é irredutível}\}$;*
- (7) *Seja $I = \{S' \in B \mid S' \text{ é irredutível}\}$;*
- (8) *Se $C \neq \emptyset$, volte para o passo (3);*
- (9) *Para cada $S' \in I$, calcule $\mathcal{C}(S')$;*
- (10) *Retorne um conjunto de semigrupos S'_1, \dots, S'_r tal que são minimais em I e*

$$\mathcal{C}(S'_1) \cup \dots \cup \mathcal{C}(S'_r) = SG(S).$$

Vamos explicar brevemente algumas linhas do algoritmo anterior:

- Passo (3): Os semigrupos \bar{S} são obtidos como $S' \cup \{\mathbf{x}\}$ com $\mathbf{x} \in SG(S')$.
- Passo (4): Se $SG(S) \subseteq S'$, pela Proposição 2.25, S' não aparece na representação de S como uma interseção de SNGs.
- Passo (5): Já que queremos calcular uma decomposição minimal de S como uma interseção de semigrupos irredutíveis, não precisamos de semigrupos que contenham um SNG irredutível obtido.
- Passo (8): Pelos passos (4) e (5), teremos que C será vazio em alguma iteração.
- Passo (10): Como $\text{Minimais}_{\subseteq} \mathcal{I}(S) \subseteq I$, podemos obter uma decomposição minimal como na Proposição 2.22.

Sabemos que para semigrupos numéricos uma decomposição minimal como definida na Proposição 2.22 não é única e nem sempre é minimal com relação ao número de semigrupos que aparecem na decomposição. O mesmo acontece para SNGs. No passo (10) do Algoritmo 2.26 também poderíamos produzir uma decomposição de um SNG contendo o menor número de elementos irredutíveis.

Exemplo 2.27 *Tome $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$, então:*

- (1) $SG(S) = \{(0, 1), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$;
 - (2) $I = \emptyset$ e $C = \{S\}$;
 - (3) $B = \{S \cup \{(0, 1)\}, S \cup \{(1, 1)\}, S \cup \{(2, 0)\}, S \cup \{(2, 1)\}\}$; *(aqui B já está com as devidas remoções dos itens (4) e (5) do algoritmo)*
 - (6) $C = B$;
 - (7) $I = \emptyset$;
- (como $C \neq \emptyset$, pelo passo (8) voltamos para o passo (3))*
- (3) *Observe que*
 - $SG(S \cup \{(0, 1)\}) = \{(1, 1), (2, 1)\}$
 - $SG(S \cup \{(1, 1)\}) = \{(0, 1), (2, 0), (2, 1)\}$
 - $SG(S \cup \{(2, 0)\}) = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1)\}$
 - $SG(S \cup \{(2, 1)\}) = \{(0, 1), (1, 1), (2, 0)\}$, logo
- $B = \{S \cup \{(0, 1), (1, 1)\}, S \cup \{(0, 1), (2, 1)\}, S \cup \{(1, 1), (2, 0)\}, S \cup \{(1, 1), (2, 1)\}, S \cup \{(1, 0), (2, 0)\}, S \cup \{(2, 0), (2, 1)\}\}$; *(aqui B já está com as devidas remoções dos itens (4) e (5) do algoritmo)*
- (6) $C = \{S \cup \{(0, 1), (2, 1)\}, S \cup \{(1, 1), (2, 1)\}, S \cup \{(2, 0), (2, 1)\}\}$;
 - (7) $I = \{S \cup \{(0, 1), (1, 1)\}, S \cup \{(1, 1), (2, 0)\}, S \cup \{(1, 0), (2, 0)\}\}$;
- (como $C \neq \emptyset$, pelo passo (8) voltamos para o passo (3))*

(3) *Observe que*

- $SG(S \cup \{(0, 1), (2, 1)\}) = \{(1, 1), (2, 0)\}$
- $SG(S \cup \{(1, 1), (2, 1)\}) = \{(0, 1), (2, 0)\}$
- $SG(S \cup \{(2, 0), (2, 1)\}) = \{(1, 0), (1, 0), (1, 1)\}$, logo

$B = \{S \cup \{(0, 1), (2, 0), (2, 1)\}\}$; (aqui B já está com as devidas remoções dos itens 4 e 5 do algoritmo)

(6) $C = \emptyset$;

(7) $I = \{S \cup \{(0, 1), (1, 1)\}, S \cup \{(1, 1), (2, 0)\}, S \cup \{(1, 0), (2, 0)\}, S \cup \{(0, 1), (2, 0), (2, 1)\}\}$;

(9) $\mathcal{C}(S \cup \{(0, 1), (1, 1)\}) = \{(2, 0), (2, 1)\}$

$\mathcal{C}(S \cup \{(1, 1), (2, 0)\}) = \{(0, 1), (2, 1)\}$

$\mathcal{C}(S \cup \{(1, 0), (2, 0)\}) = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$

$\mathcal{C}(S \cup \{(0, 1), (2, 0), (2, 1)\}) = \{(1, 1)\}$;

(10) $S = \{S \cup \{(0, 1), (1, 1)\}\} \cap \{S \cup \{(1, 1), (2, 0)\}\} \cap \{S \cup \{(0, 1), (2, 0), (2, 1)\}\}$.

O conjunto de lacunas especiais de um SNG nos permite obter algumas propriedades sobre a maximalidade de um dado SNG no conjunto de todos os SNGs.

Proposição 2.28 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG e $\{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\} \subseteq G(S)$. Então as seguintes condições são equivalente:*

- 1) S é maximal com respeito à inclusão de SNGs T tal que $T \cap \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\} = \emptyset$;
- 2) $SG(S) \subseteq \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\}$.

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$) Seja $\mathbf{h} \in G(S)$ e suponha que $\mathbf{h} \notin \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\}$, então $S \subsetneq S \cup \{\mathbf{h}\}$ e $(S \cup \{\mathbf{h}\}) \cap \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\} = \emptyset$, contrariando a hipótese.

$2 \Rightarrow 1$) Seja T um SNG tal que $T \cap \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\} = \emptyset$ e suponha que $S \subsetneq T$. Considere $\mathbf{h} \in \text{Maximais}_{\leq}(T \setminus S)$. Pelo Lema 2.23, $\mathbf{h} \in SG(S)$, mas $\mathbf{h} \notin \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\}$, já que $T \cap \{\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t\} = \emptyset$, o que é uma contradição. \square

Isso significa que se S e T são dois SNGs tais que $SG(S) = SG(T)$ mas $G(S) \neq G(T)$, então $S \not\subseteq T$ e $T \not\subseteq S$.

2.4 Unicidade do elemento Frobenius

Em \mathbb{N}^d não existe uma ordem natural total, então não é imediatamente claro como definir o elemento Frobenius de um SNG (como é para semigrupos numéricos em \mathbb{N}). Em [6] esse objetivo é alcançado definindo uma *ordem monomial casual*, cujo principal propósito é permitir a construção de uma *árvore* de SNGs para cada d , de modo similar ao caso $d = 1$. O elemento Frobenius de um SNG é unicamente determinado com respeito à ordem monomial casual definida. Desejamos investigar condições para as quais o elemento Frobenius não depende da ordem monomial casual escolhida.

Definição 2.29 *Uma ordem total, \prec , nos elementos de \mathbb{N}^d é chamada uma ordem monomial casual se satisfaz:*

- (i) Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{N}^d$ e $\mathbf{v} \prec \mathbf{w}$, então $\mathbf{v} \prec \mathbf{w} + \mathbf{u}$, para qualquer $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^d$.
- (ii) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^d$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, então $\mathbf{0} \prec \mathbf{v}$.

As ordens monomiais mais conhecidas definidas nos monômios de um dado anel polinomial induz em \mathbb{N}^d ordens totais que podem ser chamadas de *ordens monomiais* em \mathbb{N}^d , e tais ordens são, em particular, ordens monomiais casuais (a volta não é verdadeira). Será útil considerar que qualquer ordem monomial nos elementos de \mathbb{N}^d pode ser definida em termos de produtos

escalares por meio de uma coleção ordenada de d vetores peso linearmente independente em $\mathbb{R}_{\neq 0}^d$. Mais precisamente, se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_d$ são vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}_{\neq 0}^d$, então podemos definir uma ordem monomial $<_m$ nos elementos de \mathbb{N}^d por

$$\mathbf{u} <_m \mathbf{v} \Leftrightarrow \text{o menor } i \text{ para o qual } \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{u} \neq \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v} \text{ temos que } \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{u} < \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}.$$

Além disso, $<_m$ também é uma ordem monomial casual.

Exemplo 2.30 *A seguir daremos alguns exemplos de ordens monomiais casuais em \mathbb{N}^d :*

1) *A ordem lexicográfica determinada pelos vetores peso $\mathbf{w}_i = \mathbf{e}_i$, onde $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\mathbf{e}_d = (0, 0, 0, \dots, 1)$. Essa também é uma ordem monomial.*

2) *Toda permutação dos elementos \mathbf{e}_i , para $i \in \{1, \dots, d\}$ determina uma ordem monomial casual.*

3) *Sejam $<_1$ uma ordem monomial e $\min(\mathbf{u}) = \min\{u^{(i)} | i = 1, \dots, d\}$. Defina $\mathbf{u} \prec \mathbf{v}$ se*

(i) *$\min(\mathbf{u}) < \min(\mathbf{v})$, ou se*

(ii) *$\min(\mathbf{u}) = \min(\mathbf{v})$ e $\mathbf{u} <_1 \mathbf{v}$.*

Observe que \prec é uma ordem monomial casual, mas não é uma ordem monomial em geral. Para ilustrar essa situação, note que tomando $\mathbf{u} = (0, 2, 3)$ e $\mathbf{v} = (1, 1, 3)$, temos que $\min(\mathbf{u}) = 0 < 1 = \min(\mathbf{v})$. Seja $\mathbf{k} = (3, 0, 1)$. Daí, $\mathbf{u} + \mathbf{k} = (3, 2, 4) \Rightarrow \min(\mathbf{u} + \mathbf{k}) = 2$, enquanto $\mathbf{v} + \mathbf{k} = (4, 1, 4) \Rightarrow \min(\mathbf{v} + \mathbf{k}) = 1$, concluindo que a ordem monomial casual definida no item 3) não é uma ordem monomial.

Definição 2.31 *Sejam $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG e \prec uma ordem monomial casual em \mathbb{N}^d . O elemento Frobenius de S com respeito a \prec , denotado por \mathbf{f}_{\prec} , é o maior elemento de $G(S)$ com respeito a \prec .*

Proposição 2.32 *Toda ordem monomial casual em \mathbb{N}^d é uma extensão da ordem parcial natural em \mathbb{N}^d .*

Demonstração. *Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^d$ elementos distintos com $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, então existe $\mathbf{c} \in \mathbb{N}^d$ tal que $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b}$. Além disso, seja \prec uma ordem monomial casual em \mathbb{N}^d . Suponha que $\mathbf{b} \prec \mathbf{a}$, logo $\mathbf{b} \prec \mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b}$, o que é uma contradição. \square*

Proposição 2.33 *Sejam $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG e $\mathbf{f} \in G(S)$. Então $\mathbf{f}_{\prec} = \mathbf{f}$ para cada ordem monomial casual \prec se, e somente se, \mathbf{f} é o único elemento maximal em $G(S)$ com respeito à ordem parcial natural em \mathbb{N}^d .*

Demonstração. *A volta desse resultado é uma consequência direta da Proposição 2.32. Observe que \mathbf{f} deve ser maximal em $G(S)$ com respeito à ordem natural parcial em \mathbb{N}^d , pois se existe $\mathbf{h} \in G(S)$ com $\mathbf{f} < \mathbf{h}$, então $\mathbf{f} \preceq \mathbf{h}$ para cada ordem monomial casual em \mathbb{N}^d , pela Proposição 2.32. Precisamos mostrar que \mathbf{f} é o único elemento maximal. Se existe outro elemento maximal $\mathbf{g} \neq \mathbf{f}$, como $\mathbf{f} \not\leq \mathbf{g}$ e $\mathbf{g} \not\leq \mathbf{f}$, então \mathbf{g} possui ao menos uma coordenada, digamos a j -ésima, que é maior que a j -ésima coordenada de \mathbf{f} . Vamos definir uma ordem monomial casual, \prec , atribuindo vetores peso adequados $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_d$. Denote por \mathbf{e}_i , para $i = 1, \dots, d$, os vetores básicos padrão. Fixando $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_j$, $\mathbf{w}_j = \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{w}_i = \mathbf{e}_i$ para $i \neq 1, j$, temos que a ordem monomial casual definida de tal maneira leva a $\mathbf{f} \prec \mathbf{g}$, contrariando a hipótese. \square*

Pela Proposição 2.33, se S é um SNG tal que existe um único elemento maximal $\mathbf{f} \in G(S)$ com respeito à ordem parcial natural em \mathbb{N}^d , então S possui um único elemento Frobenius, independentemente da ordem monomial casual fixada.

Definição 2.34 *Seja S um SNG tal que existe um único elemento maximal $\mathbf{f} \in G(S)$ com respeito à ordem parcial \leq em \mathbb{N}^d . Chamamos (S, \mathbf{f}) um SNG Frobenius e podemos nos referir a \mathbf{f} como o elemento Frobenius de S sem ambigüidade.*

Observação 2.35 *Todo semigrupo numérico é um SNG Frobenius (S, f) , onde f é o número de Frobenius.*

Proposição 2.36 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG irredutível com $SG(S) = \{\mathbf{f}\}$. Então, (S, \mathbf{f}) é um SNG Frobenius.*

Demonstração. Basta mostrar que \mathbf{f} é o único elemento maximal em $G(S)$ com relação à ordem parcial natural em \mathbb{N}^d . Seja $\mathbf{h} \in G(S)$, se $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{f}}{2}$, é claro que $\mathbf{h} \leq \mathbf{f}$. Se $\mathbf{h} \neq \frac{\mathbf{f}}{2}$, pela Proposição 2.12, $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S \subseteq \mathbb{N}^d$, assim $\mathbf{h} \leq \mathbf{f}$. \square

Observação 2.37 *A volta da Proposição 2.36 não é verdadeira. Se $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 5), (0, 6), (0, 9)\}$, temos que $(0, 9)$ é o único elemento maximal em $G(S)$ com respeito a ordem parcial natural em \mathbb{N}^2 , mas $SG(S) = \{(0, 6), (0, 9)\}$. Desse modo, $(S, (0, 9))$ é um SNG Frobenius, mas não é irredutível.*

Corolário 2.38 *SNGs simétricos e pseudo-simétricos são SNGs Frobenius.*

Proposição 2.39 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG. Então S é irredutível com elemento Frobenius \mathbf{f} se, e somente se, é maximal no conjunto de todos os SNGs que não contêm \mathbf{f} .*

Demonstração. \Rightarrow) Se S é irredutível com elemento Frobenius \mathbf{f} , então $SG(S) = \{\mathbf{f}\}$, logo o resultado segue da Proposição 2.28.

\Leftarrow) Suponha que $S = S_1 \cap S_2$, com $S \subsetneq S_1$ e $S \subsetneq S_2$. Então $\mathbf{f} \in S_1 \cap S_2$, contrariando a hipótese. \square

Agora desejamos investigar sobre a existência de ordens monomiais casuais tais que, com respeito a elas, um elemento $\mathbf{h} \in G(S)$ é o elemento Frobenius. Pela Proposição 2.32, esses elementos devem ser maximais em $G(S)$ com relação à ordem parcial natural em \mathbb{N}^d .

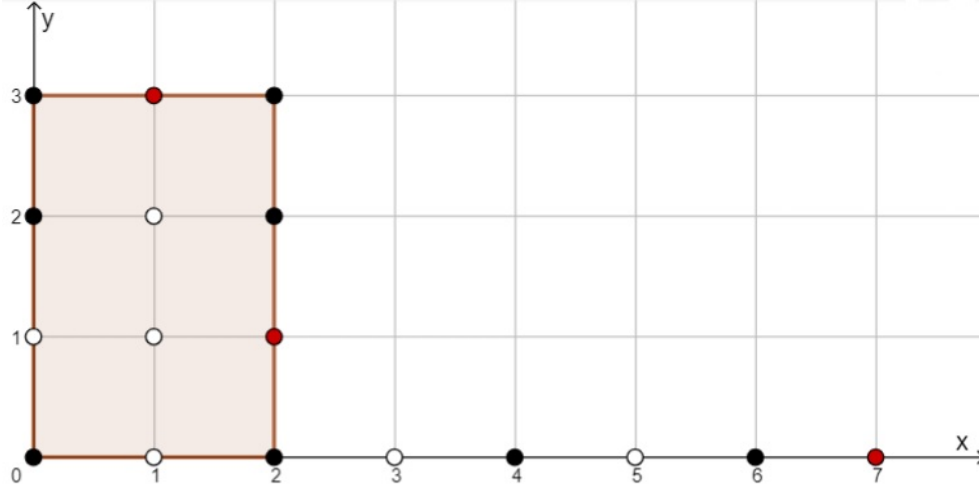
Definição 2.40 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG e $\mathbf{h} \in G(S)$. Chamamos \mathbf{h} um Frobenius permissível se existe uma ordem monomial casual, \prec , tal que $\mathbf{f}_\prec = \mathbf{h}$.*

Proposição 2.41 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG cujo conjunto de lacunas $G(S)$ possui exatamente dois elementos maximais, $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$, com respeito à ordem parcial natural em \mathbb{N}^d . Então ambos \mathbf{h}_1 e \mathbf{h}_2 são Frobenius permitíveis.*

Demonstração. Basta mostrar que existem ordens monomiais casuais, \prec_1, \prec_2 , tais que $\mathbf{h}_1 \prec_1 \mathbf{h}_2$ e $\mathbf{h}_2 \prec_2 \mathbf{h}_1$. Como \mathbf{h}_1 e \mathbf{h}_2 são elementos maximais distintos, então \mathbf{h}_1 possui pelo menos uma coordenada, digamos a i -ésima, tal que é maior que a i -ésima coordenada de \mathbf{h}_2 , e \mathbf{h}_2 possui uma coordenada, suponha que é a j -ésima, tal que é maior que a j -ésima coordenada de \mathbf{h}_1 . Podemos definir duas ordens monomiais casuais pelos vetores peso, como na demonstração da Proposição 2.33. Desse modo, seja \prec_1 tomando $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_j$, $\mathbf{w}_j = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{w}_k = \mathbf{e}_k$ para $k \neq 1, j$, enquanto para \prec_2 escolha $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{w}_i = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{w}_k = \mathbf{e}_k$ para $k \neq 1, i$. Desse modo, $\mathbf{h}_1 \prec_1 \mathbf{h}_2$ e $\mathbf{h}_2 \prec_2 \mathbf{h}_1$, como desejado. \square

Exemplo 2.42 Se $G(S)$ mais do que um elemento maximal, o mesmo argumento não funciona, mas ainda pode acontecer de que qualquer elemento maximal em $G(S)$ é um Frobenius permitível, como no seguinte exemplo:

Seja $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 0), (5, 0), (7, 0)\}$, ilustrado na seguinte imagem, onde os pontos brancos são lacunas, os pretos representam os elementos de S que pertencem a área do plano que deve ser analisada, e os vermelhos são os elementos maximais de $G(S)$ com relação a ordem parcial natural.



Tomando $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, temos que

- $(1, 3)$ é Frobenius permitível, pois podemos definir \prec uma ordem monomial casual pelos vetores peso $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1$. Daí, $(7, 0) \prec (2, 1) \prec (1, 3)$;
- $(7, 0)$ é Frobenius permitível, pois podemos definir \prec uma ordem monomial casual pelos vetores peso $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2$. Daí, $(1, 3) \prec (2, 1) \prec (7, 0)$;
- também é Frobenius permitível com respeito a ordem monomial casual \prec definida no item 3) do Exemplo 2.30, onde \prec_1 é a ordem lexicográfica. Daí, $(7, 0) \prec (1, 3) \prec (2, 1)$.

2.5 Fórmulas para SNGs Frobenius e irredutíveis

Nessa seção vamos dar algumas caracterizações de SNGs simétricos e pseudo-simétricos em termos do elementos Frobenius e do gênero. Vamos começar dando algumas notações.

Para um elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$, vamos usar $\mathbf{x} + \mathbf{1}$ para referir ao elemento de \mathbb{N}^d cuja i -ésima coordenada é $x^{(i)} + 1$, para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, e o símbolo $|\mathbf{x}|_{\times}$ para representar $x^{(1)} \cdots x^{(d)}$, o produto das coordenadas de \mathbf{x} .

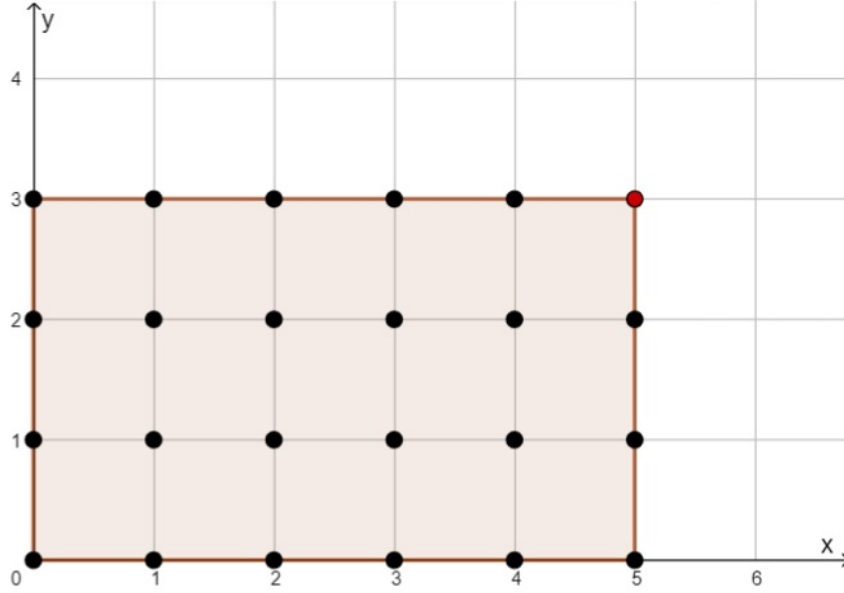
Definição 2.43 Sejam $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG, $\mathbf{h} \in \mathbb{N}^d$, e \leq a ordem parcial natural em \mathbb{N}^d . Defina os conjuntos:

- $\pi(\mathbf{h}) = \{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d \mid \mathbf{n} \leq \mathbf{h}\}$;
- $LG(\mathbf{h}) = \{\mathbf{g} \in G(S) \mid \mathbf{g} \leq \mathbf{h}\}$;
- $N(\mathbf{h}) = \{\mathbf{n} \in \pi(\mathbf{h}) \mid \mathbf{n} \in S\}$;
- $MG(S)$ é o conjunto dos elementos maximais de $G(S)$, com respeito a ordem parcial natural.

Lema 2.44 Sejam $\mathbf{h} \in \mathbb{N}^d$ e $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG. Então as seguintes propriedades são válidas:

- (1) $|\pi(\mathbf{h})| = (h^{(1)} + 1)(h^{(2)} + 1) \cdots (h^{(d)} + 1) = |\mathbf{h} + \mathbf{1}|_{\times}$;
- (2) $|N(\mathbf{h})| + |LG(\mathbf{h})| = |\mathbf{h} + \mathbf{1}|_{\times}$.

Demonstração. Observe que $\pi(\mathbf{h})$ representa o conjunto de pontos inteiros do hiper retângulo cujos vértices são \mathbf{h} , a origem dos eixos, e os pontos cujas coordenadas são $(h^{(1)}, 0, \dots, 0)$, $(0, h^{(2)}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, h^{(d)})$. Veja a figura a seguir (os pontos marcados são elementos do conjunto $\pi((3, 4))$ em \mathbb{N}^2):



Assim, é fácil concluir a primeira afirmação. A segunda segue do fato de que $\pi(\mathbf{h}) = N(\mathbf{h}) \cup LG(\mathbf{h})$, para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{N}^d$, e que $N(\mathbf{h})$ e $LG(\mathbf{h})$ são disjuntos. \square

Proposição 2.45 *Seja (S, \mathbf{f}) um SNG Frobenius de gênero g em \mathbb{N}^d . Então, $2g \geq |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$.*

Demonstração. Observe que $g = |G(S)| = |LG(\mathbf{f})|$, pois (S, \mathbf{f}) é um SNG Frobenius. Além disso, se $\mathbf{x} \in N(\mathbf{f})$, então $\mathbf{x} < \mathbf{f}$, já que $\mathbf{f} \notin S$, logo existe $\mathbf{y} \in \pi(\mathbf{f})$ tal que $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{f}$ (observe que \mathbf{y} não pode pertencer a S , caso contrário deveríamos ter que $\mathbf{f} \in S$). Assim $\mathbf{y} \in LG(\mathbf{f})$, ou seja, cada elemento de $N(\mathbf{f})$ está relacionado com um de $LG(\mathbf{f})$, o que significa que $|LG(\mathbf{f})| \geq |N(\mathbf{f})|$. Portanto, $|\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times} = |LG(\mathbf{f})| + |N(\mathbf{f})| \leq 2g$. \square

Todo semigrupo numérico é um SNG Frobenius, e a proposição anterior nos dá a inequação bastante conhecida $g \geq \frac{F(S) + 1}{2}$, onde $F(S)$ e g são, respectivamente, o número de Frobenius e o gênero de um dado semigrupo numérico.

Definição 2.46 *Sejam $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG e $\mathbf{h} \in G(S)$. Então vamos definir a seguinte função:*

$$\Psi_{\mathbf{h}} : N(\mathbf{h}) \rightarrow LG(\mathbf{h}), \mathbf{s} \mapsto \mathbf{h} - \mathbf{s}.$$

É fácil ver que a função está bem definida e é injetora.

Lema 2.47 *Sejam $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG e $\mathbf{h} \in G(S)$. Então $|N(\mathbf{h})| \leq |LG(\mathbf{h})| \leq |G(S)| = g$.*

Demonstração. Segue do fato de que a função $\Psi_{\mathbf{h}}$ é injetora. \square

Vamos dar agora novas caracterizações para SNGs simétricos e pseudo-simétricos.

Teorema 2.48 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG de gênero g . Então S é simétrico se, e somente se, existe $\mathbf{f} \in G(S)$ com $2g = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$. Além disso, \mathbf{f} é o elemento Frobenius de S .*

Demonstração. \Rightarrow) Suponha que S é simétrico. Então, $SG(S) = PF(S) = \{\mathbf{f}\}$, logo $LG(\mathbf{f}) = G(S)$, pela Proposição 2.36. Vamos mostrar que a função $\Psi_{\mathbf{f}}$ é bijetora, ou seja, que também é sobrejetora. Se $\mathbf{h} \in LG(\mathbf{f})$, como S é simétrico, então $\mathbf{s} = \mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$, assim $\Psi_{\mathbf{f}}(\mathbf{s}) = \mathbf{h}$ e temos que a função é sobrejetora. Desse modo, $|N(\mathbf{f})| = |LG(\mathbf{f})| = g$ e $2g = |N(\mathbf{f})| + |LG(\mathbf{f})| = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$, pelo Lema 2.44.

\Leftarrow) Seja $\mathbf{f} \in G(S)$ tal que $2g = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$. Pelos Lemas 2.44 e 2.47, segue que $2g = |N(\mathbf{f})| + |LG(\mathbf{f})| \leq 2|LG(\mathbf{f})| \leq 2g$. Desse modo, $|LG(\mathbf{f})| = g$ e $|N(\mathbf{f})| = g$, conseqüentemente $\Psi_{\mathbf{f}}$ é bijetora. Agora vamos provar que para todo $\mathbf{h} \in G(S)$, temos que $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$. Como $|LG(\mathbf{f})| = g$ e $\Psi_{\mathbf{f}}$ é sobrejetora, então $LG(\mathbf{f}) = G(S)$ e se $\mathbf{h} \in G(S)$, existe $\mathbf{s} \in S$ tal que $\Psi_{\mathbf{f}}(\mathbf{s}) = \mathbf{f} - \mathbf{s} = \mathbf{h}$, em outras palavras, $\mathbf{f} - \mathbf{h} = \mathbf{s} \in S$. Pelo Teorema 2.15 segue que S é simétrico, em particular $\mathbf{f} \in MG(S)$, concluindo que é o elemento Frobenius. \square

Teorema 2.49 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG de gênero g . Então S é pseudo-simétrico se, e somente se, existe $\mathbf{f} \in G(S)$ com $2g - 1 = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$. Além disso, \mathbf{f} é o elemento Frobenius de S .*

Demonstração. \Rightarrow) Suponha que S é pseudo-simétrico, então $PF(S) = \left\{ \mathbf{f}, \frac{\mathbf{f}}{2} \right\}$, $SG(S) = \{\mathbf{f}\}$ e $LG(\mathbf{f}) = G(S)$. Além disso, para cada $\mathbf{h} \in G(S)$, com $\mathbf{h} \neq \frac{\mathbf{f}}{2}$, temos que $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$, então argumentando como na demonstração do Teorema 2.48, podemos provar que $|N(\mathbf{f})| + |LG(\mathbf{f})| = g + g - 1 = 2g - 1$.

\Leftarrow) Seja $\mathbf{f} \in G(S)$ tal que $2g - 1 = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$, em particular, todas as coordenadas de \mathbf{f} são pares, e $2g - 1 = |N(\mathbf{f})| + |LG(\mathbf{f})| \leq 2|LG(\mathbf{f})| \leq 2g$. Portanto, $|LH(\mathbf{f})| = g$ (é impossível que $2g - 1 = 2|LG(\mathbf{f})|$), e como consequência $|N(\mathbf{f})| = g - 1$. Além disso, $\frac{\mathbf{f}}{2} \in G(S)$, pois $\mathbf{f} \in G(S)$, assim a função $\overline{\Psi}_{\mathbf{f}} : N(\mathbf{f}) \rightarrow LG(\mathbf{f}) \setminus \left\{ \frac{\mathbf{f}}{2} \right\}$, induzida por $\Psi_{\mathbf{f}}$, é bijetora. Isso implica que, para cada $\mathbf{h} \in LG(S) \setminus \left\{ \frac{\mathbf{f}}{2} \right\}$, isto é, se $\mathbf{h} \in G(S)$ e $\mathbf{h} \neq \frac{\mathbf{f}}{2}$, existe $\mathbf{s} \in S$ tal que $\mathbf{f} - \mathbf{s} = \mathbf{h}$, daí $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$. Conseqüentemente, S é pseudo-simétrico pelo Teorema 2.16, em particular, $\mathbf{f} \in MG(S)$, concluindo que é o elemento Frobenius. \square

Exemplo 2.50 *Seja $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$. S é um SNG de gênero $g = 7$ e para $\mathbf{f} = (6, 1) \in G(S)$ a igualdade $2g = (6 + 1)(1 + 1)$ é válida, logo S é simétrico. Na verdade, temos que $PF(S) = \{(6, 1)\}$.*

Seja $S' = \mathbb{N}^2 = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0), (6, 0), (12, 0)\}$. S' é um SNG de gênero $g = 7$ e para o elemento $\mathbf{f} = (12, 0)$, é válido que $2g - 1 = (12 + 1)(0 + 1)$, assim S' é pseudo-simétrico. Além disso, $PF(S') = \{(12, 0), (6, 0)\}$.

Observação 2.51 *Se $d = 1$, então o Teorema 2.48 se torna: S é simétrico se, e somente se, $2g = F(S) + 1$, onde $F(S)$ é o número de Frobenius de S , que é um resultado bastante conhecido para semigrupos numéricos. Para o Teorema 2.49, segue o resultado correspondente sobre semigrupos numéricos pseudo-simétricos.*

Exemplo 2.52 *Seja $S = \mathbb{N}^3 \setminus \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (2, 0, 0), (2, 0, 1)\}$. S é um SNG Frobenius com elemento Frobenius $\mathbf{f} = (2, 0, 1)$. Além disso, $2g = 8 > (2 + 1)(0 + 1)(1 + 1) = 6$, logo S não é irredutível.*

Seja $S' = \mathbb{N}^3 \setminus \{(1, 0, 0), (2, 0, 0), (2, 0, 1)\}$. Nesse caso, o elemento Frobenius é $\mathbf{f} = (2, 1, 0)$ e $2g = 6 = (2 + 1)(0 + 1)(1 + 1)$, em particular, S é simétrico.

Capítulo 3

Sobre Quase Simetria em Semigrupos Numéricos Generalizados

Neste capítulo apresentaremos o que foi estudado em [3], cujo objetivo foi estender os conceitos de semigrupos numéricos quase simétricos para SNGs em \mathbb{N}^d , e construir uma árvore de SNGs quase simétricos com elemento Frobenius fixo, cuja base é um semigrupo numérico generalizado ordinário.

3.1 Preliminares

Vamos introduzir uma nova família de SNGs estendendo ideias formuladas para semigrupos numéricos para o contexto de SNGs.

Definição 3.1 *Sejam $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG e $\mathbf{h}' \in PF(S)$. Defina a seguinte função:*

$$\psi_{\mathbf{h}'} : N(\mathbf{h}') \rightarrow G(S) \setminus (PF(S) \setminus \{\mathbf{h}'\}), \mathbf{x} \mapsto \mathbf{h}' - \mathbf{x}.$$

É fácil ver que $\psi_{\mathbf{h}'}$ está bem definida e é injetora.

Proposição 3.2 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG com gênero g e tipo t . Para cada $\mathbf{h} \in G(S)$, é válido que*

$$2g + 1 - t \geq |\mathbf{h} + \mathbf{1}|_{\times}.$$

Demonstração. Dados $\mathbf{h}' \in PF(S)$, como a função $\psi_{\mathbf{h}'}$ é injetora, segue que

$$|N(\mathbf{h}')| \leq |H(S) \setminus (PF(S) \setminus \{\mathbf{h}'\})| = g - (t - 1) = g + 1 - t.$$

Conseqüentemente, usando o Lema 2.47, obtemos

$$|\mathbf{h}' + \mathbf{1}|_{\times} = |LG(\mathbf{h}')| + |N(\mathbf{h}')| \leq g + (g + 1 - t) = 2g + 1 - t,$$

para cada $\mathbf{h}' \in PF(S)$. Agora, como $PF(S)$ consiste nos elementos maximais de $G(S)$ com respeito a ordem parcial \leq_S pela Proposição 2.3, dado $\mathbf{h} \in G(S)$, existe $\mathbf{h}' \in PF(S)$ tal que $\mathbf{h} \leq_S \mathbf{h}'$. Em particular, temos que $\mathbf{h} \leq \mathbf{h}'$, e portanto, $|\mathbf{h} + \mathbf{1}|_{\times} \leq |\mathbf{h}' + \mathbf{1}|_{\times} \leq 2g + 1 - t$, o que prova a equação desejada para qualquer $\mathbf{h} \in G(S)$. \square

O limite superior dado na Proposição 3.2 motivou a seguinte definição.

Definição 3.3 *Seja S um SNG com gênero g e tipo t . Dizemos que S é quase simétrico se*

$$2g + 1 - t = |\mathbf{h} + \mathbf{1}|_{\times},$$

para algum $\mathbf{h} \in G(S)$.

Observe que os Teoremas 2.48 e 2.49 garantem que os SNGs irreduzíveis são uma subclasse de SNGs quase simétricos.

Exemplo 3.4 Considere $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 5), (0, 6), (0, 10)\}$ o SNG com gênero $g = 6$ e elemento Frobenius $(0, 10)$. Temos que $PF(S) = \{(0, 5), (0, 10)\}$, logo $t(S) = 2$. Desse modo, S é quase simétrico, já que

$$2g + 1 - t = 12 + 1 - 2 = 11 = 11 \cdot 1 = |(1, 11)|_{\times}.$$

Exemplo 3.5 Os SNGs ordinários são SNGs da forma $S(\mathbf{f}) = (\mathbb{N}^d \setminus \pi(\mathbf{f})) \cup \{\mathbf{0}\}$ para algum $\mathbf{f} \in \mathbb{N}^d$. Eles são exemplos de SNGs quase simétricos. De fato, para $S(\mathbf{f})$ um SNG ordinário, temos que $PF(S(\mathbf{f})) = G(S(\mathbf{f}))$, logo $g(S(\mathbf{f})) = t(S(\mathbf{f}))$. Daí, $2g(S(\mathbf{f})) + 1 - t(S(\mathbf{f})) = g(S(\mathbf{f})) + 1 = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$.

É natural perguntar quantos $\mathbf{h} \in G(S)$ podem satisfazer a Definição 3.3 para S um SNG quase simétrico. A resposta é uma consequência do próximo resultado:

Proposição 3.6 Todo SNG quase simétrico é um SNG Frobenius. Em particular, se (S, \mathbf{f}) é um SNG quase simétrico com gênero g e tipo t , então $2g + 1 - t = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$.

Demonstração. Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG quase simétrico e $\mathbf{h} \in G(S)$ tal que a Definição 3.3 é satisfeita. Pelo Lema 2.47 e pela demonstração da Proposição 3.2, $|LG(\mathbf{h})| \leq g$ e $|N(\mathbf{h})| \leq g + 1 - t$.

Consequentemente, como $|\mathbf{h} + \mathbf{1}|_{\times} = |LG(\mathbf{h})| + |N(\mathbf{h})|$, o limite superior $2g + 1 - t$ dado na Proposição 3.2 é alcançado por $|\mathbf{h} + \mathbf{1}|_{\times}$ se, e só se, $|LG(\mathbf{h})| = g$ e $|N(\mathbf{h})| = g + 1 - t$. Assim, $H(S) = LG(\mathbf{h})$, logo \mathbf{h} é o único elemento maximal em $H(S)$ com respeito à ordem parcial natural \leq . Portanto, para um SNG quase simétrico S , existe exatamente um elemento $\mathbf{h} \in G(S)$ que satisfaz a Definição 3.3, que é o elemento Frobenius de S . \square

Na referência [2] foi perguntado sobre a possibilidade de classificar outras classes de SNGs Frobenius diferentes de irreduzíveis. A proposição anterior também se move em direção a essa questão.

Observação 3.7 Colocando juntas as Proposições 3.2 e 3.6, podemos deduzir uma propriedade de maximalidade para SNGs quase simétricos: todo SNG quase simétrico é maximal com respeito a inclusão no conjunto dos SNGs Frobenius possuindo tipo e elemento Frobenius fixados. Isso ocorre pois, de acordo com os resultados mencionados acima, SNGs quase simétricos atingem o menor gênero possível entre os SNGs Frobenius com tipo e elemento Frobenius fixos. Note, no entanto, que nem todo SNG com elemento Frobenius \mathbf{f} e tipo t está contido em um SNG quase simétrico com mesmo elemento Frobenius e tipo. Por exemplo, $S = S((2, 1)) \cup \{(0, 1)\}$ possui elemento Frobenius $(2, 1)$ e tipo 2, e não existe SNG quase simétrico com elemento Frobenius $(2, 1)$ e tipo 2, já que nesse caso $2g - t + 1$ é um número ímpar, enquanto $|\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times} = 6$ é par.

Observação 3.8 Vale a pena notar que a Proposição 3.6 nos diz que um SNG Frobenius (S, \mathbf{f}) em \mathbb{N}^d é quase simétrico se, e somente se, a função $\psi_{\mathbf{f}}$ é uma bijeção. Observe ainda que a equivalência produz uma generalização da Proposição 2.12, já que, pelo visto na Definição 3.1, significa que S é quase simétrico se, e só se, para cada $\mathbf{h} \in G(S) \setminus (PF(S) \setminus \{\mathbf{f}\})$ temos que $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$.

3.2 Simetrias em SNGs quase simétricos

Nessa seção vamos investigar propriedades sobre simetrias dos elementos pseudo-Frobenius e elementos no conjunto de Apéry que ocorrem em SNGs quase simétricos. O estudo de tais propriedades segue o que foi feito na referência [8] para estender vários resultados dados para semigrupos numéricos ao contexto de SNGs, providenciando algumas equivalências à noção de quase simetria.

Vamos começar lembrando que uma ordem total \prec em \mathbb{N}^d é chamada ordem monomial se satisfaz:

- (i) Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{N}^d$ e $\mathbf{v} \prec \mathbf{w}$, então $\mathbf{v} + \mathbf{u} \prec \mathbf{w} + \mathbf{u}$, para qualquer $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^d$;
- (ii) Se $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^d$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, então $\mathbf{0} \prec \mathbf{v}$.

Além disso, toda ordem monomial em \mathbb{N}^d é uma extensão da ordem parcial natural em \mathbb{N}^d (a demonstração é similar à que foi feita na Proposição 2.32). O próximo lema é sobre certos conjuntos finitos em \mathbb{N}^d ordenados por uma ordem monomial.

Lema 3.9 *Sejam \prec uma ordem monomial em \mathbb{N}^d e $\{\mathbf{x}_1 \prec \mathbf{x}_2 \prec \dots \prec \mathbf{x}_{t-1}\}$ um subconjunto de \mathbb{N}^d . Suponha que existe $\mathbf{f} \in \mathbb{N}^d$ tal que, para cada $i \in \{1, \dots, t-1\}$, existe $j \in \{1, \dots, t-1\}$ com $\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j = \mathbf{f}$. Então, $\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{t-i} = \mathbf{f}$, para todo $i \in \{1, \dots, t-1\}$.*

Demonstração. Suponha que, ao contrário do nosso objetivo, existe $i \in \{1, \dots, t-1\}$ tal que $\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{t-i} \neq \mathbf{f}$. Consequentemente, podemos escolher $i = \min\{l \mid 1 \leq l \leq t-1 \text{ com } \mathbf{x}_l + \mathbf{x}_{t-l} \neq \mathbf{f}\}$. Por hipótese, para esse i existe $j \in \{1, \dots, t-1\}$ tal que $\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j = \mathbf{f}$, com $j \neq t-i$. Se $j > t-i$, então $j = t - (i - k)$, onde $0 < k \leq t-1$. Além disso, $i - k < i$, assim $\mathbf{x}_{i-k} + \mathbf{x}_{t-(i-k)} = \mathbf{f} = \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j$, isto é, $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-k}$, que é uma contradição. Por outro lado, se $j < t-i$, considere $k \in \{1, \dots, t-1\}$ tal que $\mathbf{x}_{t-i} + \mathbf{x}_k = \mathbf{f}$. Como $k \neq i$, temos os seguintes casos:

- Se $k < i$, então $\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_{t-k} = \mathbf{f} = \mathbf{x}_{t-i} + \mathbf{x}_k$, em particular $\mathbf{x}_{t-k} = \mathbf{x}_{t-i}$, concluindo que $k = i$, contradizendo que $k < i$;
- Se $k > i$, $\mathbf{f} = \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j \prec \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{t-i} \prec \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_{t-i} = \mathbf{f}$, que é uma contradição.

Assim, todos os casos deram uma contradição, logo $\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{t-i} = \mathbf{f}$, para todo $i \in \{1, \dots, t-1\}$.

□

3.2.1 Elementos pseudo-Frobenius

Vamos mostrar a seguir que o conjunto dos elementos pseudo-Frobenius tem um papel importante na determinação da propriedade de quase simetria em SNGs.

Definição 3.10 *Seja (S, \mathbf{f}) um SNG Frobenius em \mathbb{N}^d . Definimos os conjuntos relacionados a S :*

- a) $Z_S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \mid \mathbf{x} \leq \mathbf{f}\} \cup \mathbb{N}^d$, observe que $G(S) \subset Z_S$;
- b) $L(S) = \{\mathbf{h} \in G(S) \mid \exists \mathbf{h}' \in G(S), \mathbf{h} + \mathbf{h}' = \mathbf{f}\}$.

O próximo resultado estabelece algumas condições equivalentes para um SNG ser quase simétrico, em termos dos seus elementos pseudo-Frobenius.

Proposição 3.11 *Seja (S, \mathbf{f}) um SNG Frobenius em \mathbb{N}^d com tipo t . Desse modo, as seguintes condições são equivalentes:*

- i) S é quase simétrico;
- ii) $L(S) \subseteq PF(S)$;
- iii) $PF(S) = L(S) \cup \{\mathbf{f}\}$;
- iv) se $\mathbf{h} \in Z_S \setminus S$, então $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$, ou $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in PF(S)$;
- v) se $\mathbf{h} \in G(S)$, então $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$, ou $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in PF(S)$;
- vi) para cada ordem monomial \prec em \mathbb{N}^d , se

$$PF(S) \setminus \{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{x}_1 \prec \mathbf{x}_2 \prec \cdots \prec \mathbf{x}_{t-1}\},$$

então

$$\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{t-i} = \mathbf{f}, \text{ para } i = 1, \dots, t-1;$$

vii) existe uma ordem monomial \prec em \mathbb{N}^d tal que se

$$PF(S) \setminus \{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{x}_1 \prec \mathbf{x}_2 \prec \cdots \prec \mathbf{x}_{t-1}\},$$

então

$$\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{t-i} = \mathbf{f}, \text{ para } i = 1, \dots, t-1.$$

Demonstração. $i \Rightarrow ii$) Se existe $\mathbf{h} \in L(S) \setminus PF(S)$. Como a função $\psi_{\mathbf{f}}$ (dada na Definição 3.1) é uma bijeção pela Observação 3.8, obtemos que $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$, contradizendo que $\mathbf{h} \in L(S)$. Logo, $L(S) \subseteq PF(S)$.

$ii \Rightarrow iii$) Como $L(S) \cup \{\mathbf{f}\} \subseteq PF(S)$, suponha que existe $\mathbf{h} \in PF(S) \setminus (L(S) \cup \{\mathbf{f}\})$. Daí, $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$ e assim, $\mathbf{f} = \mathbf{h} + (\mathbf{f} - \mathbf{h}) \in S$, o que é uma contradição.

$iii \Rightarrow iv$) Para $\mathbf{h} \in Z_S \setminus S$, como $Z_S \setminus S = H(S) \cup (\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \mid \mathbf{x} \leq \mathbf{f}\} \setminus \mathbb{N}^d)$, em todos os casos segue que $\mathbf{h} \leq \mathbf{f}$, desse modo $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in \mathbb{N}^d$. Suponha que $\mathbf{f} - \mathbf{h} \notin PF(S)$. Então obtemos por iii) que $\mathbf{f} - \mathbf{h} \notin L(S)$, e temos duas possibilidades. Primeiro, se $\mathbf{f} - \mathbf{h} \notin G(S)$, então $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$ (já que $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in \mathbb{N}^d$). Na segunda possibilidade, $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in G(S)$, e $\mathbf{f} \geq \mathbf{f} - \mathbf{h}$, em particular, $\mathbf{h} = \mathbf{f} - (\mathbf{f} - \mathbf{h}) \in \mathbb{N}^d$. Como $\mathbf{h} \notin S$, segue que $\mathbf{h} \in G(S)$. Assim, $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in G(S)$ e $\mathbf{f} - (\mathbf{f} - \mathbf{h}) = \mathbf{h} \in G(S)$, isto é, $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in L(S)$, contrariando a hipótese.

$iv \Rightarrow v$) Essa é uma consequência imediata, já que $G(S) \subseteq Z_S \setminus S$.

$v \Rightarrow vi$) Seja $\mathbf{x}_i \in PF(S) \setminus \{\mathbf{f}\}$. Observe que $\mathbf{f} - \mathbf{x}_i \notin S$, caso contrário, como $\mathbf{x}_i \in PF(S)$, teríamos que $\mathbf{f} = \mathbf{x}_i + (\mathbf{f} - \mathbf{x}_i) \in S$. Desse modo, segue de v) que $\mathbf{f} - \mathbf{x}_i \in PF(S) \setminus \{\mathbf{f}\}$, e consequentemente, $\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j = \mathbf{f}$, para algum $j \in \{1, \dots, t-1\}$. A afirmação segue agora do Lema 3.9.

$vi \Rightarrow vii$) Essa implicação é trivial.

$vii \Rightarrow i$) Pela Observação 3.8, basta mostrar que a função $\psi_{\mathbf{f}}$ (dada na Definição 3.1) é bijetora, isto é, $\mathbf{f} \in G(S) \setminus PF(S)$ implica que $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$. Se $\mathbf{h} \in G(S) \setminus PF(S)$, pela Proposição 2.3, temos que $\mathbf{h} \leq_S \mathbf{g}$, para algum $\mathbf{g} \in PF(S)$. Se $\mathbf{g} = \mathbf{f}$, finalizamos, já que isso daria $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$. Caso contrário, temos $\mathbf{h} \leq_S \mathbf{x}_i$, para algum $i \in \{1, \dots, t-1\}$, e então $(\mathbf{f} - \mathbf{x}_{t-i}) - \mathbf{h} = \mathbf{x}_i - \mathbf{h} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$ por vii). Portanto, $\mathbf{f} - \mathbf{h} = \mathbf{x}_{t-i} + ((\mathbf{f} - \mathbf{x}_{t-i}) - \mathbf{h}) \in S$. \square

Como uma consequência, obtemos a seguinte descrição para SNGs pseudo-simétricos.

Corolário 3.12 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG. Então S é pseudo-simétrico se, e somente se, S é quase simétrico e $t(S) = 2$.*

Demonstração. Se S é pseudo-simétrico é claro que S possui tipo 2 e é quase simétrico. Por outro lado, assuma que S é quase simétrico com elemento Frobenius \mathbf{f} e tipo 2. Então, $PF(S) \setminus \{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{x}\}$ e pelo item vi) da Proposição 3.11, temos que $2\mathbf{x} = \mathbf{f}$. Assim, $PF(S) = \left\{ \mathbf{f}, \frac{\mathbf{f}}{2} \right\}$, ou seja, S é pseudo-simétrico. \square

Observação 3.13 *Seja S um submonoide de \mathbb{N}^d . Podemos definir um idela relativo de S como um subconjunto I de \mathbb{Z}^d tal que $I + S \subseteq I$ e $\mathbf{s} + I \subseteq S$, para algum $\mathbf{s} \in S$, generalizando conceitos conhecidos como estão escritos em [8]. Para um semigrupo numéricos quase simétrico S (ou seja, quando $d = 1$), $Z_S = \mathbb{Z}$ e a condição iv) da Proposição 3.11 podemos reescrever como: se*

$h \in \mathbb{Z} \setminus S$, então $f-h \in S$, ou $f-h \in PF(S)$, onde f é o número de Frobenius. A generalização natural dessa condição para um SNG Frobenius (S, \mathbf{f}) em \mathbb{N}^d com $d \geq 1$ se torna: se $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^d \setminus S$, então $\mathbf{f}-\mathbf{h} \in S$, ou $\mathbf{f}-\mathbf{h} \in PF(S)$. Entretanto, essa formulação generalizada não é válida para SNGs quase simétricos $S \subseteq \mathbb{N}^d$ quando $d > 1$, como podemos ver no exemplo a seguir. Esse comportamento pode ser relacionado com o fato de que o conjunto $K_S = \{\mathbf{f}-\mathbf{h} | \mathbf{h} \in \mathbb{Z}^d \setminus S\}$ não é um ideal relativo, no sentido de que não é verdade que $\mathbf{s} + K_S \subseteq S$, para algum $\mathbf{s} \in S$. Observe no entanto que isso é válido se considerarmos $\bar{K}_S = \{\mathbf{f}-\mathbf{h} | \mathbf{h} \in Z_S \setminus S\}$ no lugar de K_S .

Exemplo 3.14 Seja $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,1), (0,2)\}$. Como S é pseudo-simétrico, deve ser quase simétrico e possui elemento Frobenius $\mathbf{f} = (0,2)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere que $(-n,3) \notin Z_S$, já que $f - (-n,3) = (n,-1) \notin \mathbb{N}^2$, logo não pertence a S nem a $PF(S)$. Além disso, K_S não é um ideal relativo de S . Se é verdade que $\mathbf{s} + K_S \subseteq S$, para algum $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in S$, tomando $\mathbf{t} = \mathbf{f} - \mathbf{h} \in K_S$, com $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ tal que $h_1 > 0$ e $h_2 > s_2 + 2$, temos que $\mathbf{s} + \mathbf{t} = (s_1 - h_1, s_2 + 2 - h_2) \notin \mathbb{N}^2$, e assim não pertence a S . Um exemplo de elementos que pertence a Z_S é $(-n,1)$, com $n \in \mathbb{N}$.

3.2.2 Apéry e conjuntos relacionados

Conjuntos de Apéry estão envolvidos com o tópico de quase simetria em semigrupos numéricos por meio das caracterizações dadas em [8]. No que segue, após relembra algumas ferramentas úteis, vamos introduzir um conjunto especial dos conjuntos de Apéry que preserva algumas propriedades interessantes dos conjuntos de Apéry do caso de semigrupos numéricos e permite produzir uma generalização dessas caracterizações no contexto de SNGs. Vamos começar relembando a definição do conjunto de Apéry para submonoides de \mathbb{N}^d .

Definição 3.15 Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um monoide e $\mathbf{n} \in S$. O conjunto de Apéry de S com respeito a \mathbf{n} é o conjunto

$$Ap(S, \mathbf{n}) = \{\mathbf{s} \in S | \mathbf{s} - \mathbf{n} \notin S\},$$

onde $\mathbf{s} - \mathbf{n}$ representa a diferença usual em \mathbb{Z}^d .

Observação 3.16 Observe que se $S \subseteq \mathbb{N}^d$ é um monoide e $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in S$, com $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \in Ap(S, \mathbf{n})$. Então $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in Ap(S, \mathbf{n})$. De fato, se $\mathbf{s}_1 - \mathbf{n} \in S$, então $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 - \mathbf{n} \in S$, o que é uma contradição.

Lembrando que a principal diferença entre o conjunto de Apéry de um submonoide de \mathbb{N} e um submonoide de \mathbb{N}^d com $d > 1$ é que no segundo caso o conjunto de Apéry pode conter uma quantidade infinita de elementos, vamos focar em um subconjunto do conjunto de Apéry, que foi introduzido primeiro em [1].

Definição 3.17 Sejam $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG e $\mathbf{n} \in S$. Definimos o conjunto de Apéry reduzido de S com respeito a \mathbf{n} como

$$C(S, \mathbf{n}) = \{\mathbf{s} \in Ap(S, \mathbf{n}) | \mathbf{s} \leq \mathbf{h} + \mathbf{n} \text{ para algum } \mathbf{h} \in G(S)\}.$$

Observe que para semigrupos numéricos $C(S, \mathbf{n}) = Ap(S, \mathbf{n})$. Algumas relações úteis de $C(S, \mathbf{n})$ e $Ap(S, \mathbf{n})$ são dadas no próximo resultado.

Proposição 3.18 Sejam $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG e $\mathbf{n} \in S$. As seguintes afirmações são válidas:

- 1) $Maximais_{\leq} Ap(S, \mathbf{n}) = Maximais_{\leq} C(S, \mathbf{n}) = \{\mathbf{h} + \mathbf{n} | \mathbf{h} \in Maximais_{\leq} G(S)\}$;
- 2) $Maximais_{\leq_S} Ap(S, \mathbf{n}) \subseteq Maximais_{\leq_S} C(S, \mathbf{n})$.

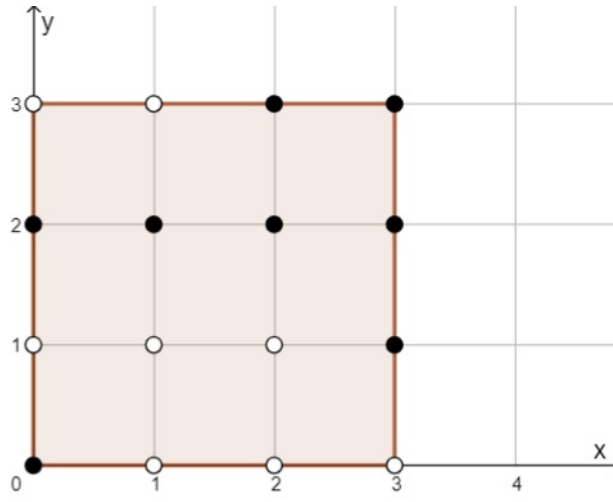
Demonstração. Sejam e_1, \dots, e_d os vetores básicos padrão de \mathbb{N}^d .

1) Seja $\mathbf{a} \in S$ maximal em $Ap(S, \mathbf{n})$ com respeito a ordem parcial natural. Daí, $\mathbf{a} - \mathbf{n} \notin S$. Se $\mathbf{a} - \mathbf{n} \notin \mathbb{N}^d$, então existe $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ tal que é possível escrever $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + a^{(i)}e_i$ e $\mathbf{n} = \mathbf{n}' + n^{(i)}e_i$, onde $\mathbf{a}', \mathbf{n}' \in \mathbb{N}^d$ cuja i -ésima coordenada é zero, e $a^{(i)} < n^{(i)}$. Como $G(S)$ é finito, as coordenadas dos elementos de $G(S)$ são limitadas, portanto, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x} = \mathbf{a} + te_j \in S$, com $j \neq i$. Em particular, $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$ e $\mathbf{x} - \mathbf{n} \notin S$, contradizendo a maximalidade de \mathbf{a} . Assim, $\mathbf{a} - \mathbf{n} \in \mathbb{N}$, isto é, existe \mathbf{h} maximal em $G(S)$ com respeito a ordem parcial natural tal que $\mathbf{a} - \mathbf{n} \leq \mathbf{h}$. Desse modo, $\mathbf{a} \leq \mathbf{h} + \mathbf{n}$ e $\mathbf{h} + \mathbf{n} \in Ap(S, \mathbf{n})$. Pela maximalidade de \mathbf{a} , segue que $\mathbf{a} = \mathbf{h} + \mathbf{n}$. Além disso, segue da definição que $C(S, \mathbf{n})$ possui os mesmos elementos maximal.

2) Seja \mathbf{a} maximal em $Ap(S, \mathbf{n})$ com respeito a ordem parcial \leq_S . Então, $\mathbf{h} = \mathbf{a} - \mathbf{n} \in PF(S)$, pela Proposição 2.4. Em particular, $\mathbf{a} = \mathbf{h} + \mathbf{n}$, ou seja, $\mathbf{a} \in C(S, \mathbf{n})$. Se existe $\mathbf{s} \in C(S, \mathbf{n})$ tal que $\mathbf{a} \leq_S \mathbf{s}$, obtemos uma contradição com a maximalidade de \mathbf{a} em $Ap(S, \mathbf{n})$, pois $\mathbf{s} \in Ap(S, \mathbf{n})$. \square

Em geral é verdade que $Maximais_{\leq_S} Ap(S, \mathbf{n}) \subsetneq Maximais_{\leq_S} C(S, \mathbf{n})$, como podemos ver no próximo exemplo.

Exemplo 3.19 Seja $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 0), (3, 0)\}$, como ilustrado na figura a seguir.



Vamos calcular os conjuntos $Ap(S, \mathbf{n})$ e $C(S, \mathbf{n})$, para $\mathbf{n} = (4, 0)$.

$$Ap(S, (4, 0)) = \{(0, 0), (0, 2), (0, n), (1, 2), (1, n), (2, 2), (2, 3), (2, n), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, n), (4, 1), (4, 3), (5, 0), (5, 1), (5, 3), (6, 1), (6, 0), (7, 0) | n \leq 4\};$$

$$C(S, (4, 0)) = \{(0, 0), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 3), (5, 0), (5, 1), (5, 3), (6, 1), (6, 0), (7, 0)\}.$$

Observe que:

- $Maximais_{\leq} Ap(S, \mathbf{n}) = \{(7, 0), (6, 1), (5, 3)\}$;
- $Maximais_{\leq} C(S, \mathbf{n}) = \{(7, 0), (6, 1), (5, 3)\}$;
- $Maximais_{\leq_S} Ap(S, \mathbf{n}) = \{(4, 3), (5, 0), (5, 3), (6, 1), (6, 0), (7, 0)\}$;
- $Maximais_{\leq_S} C(S, \mathbf{n}) = \{(4, 3), (5, 0), (5, 3), (6, 1), (6, 0), (7, 0), (3, 3), (3, 2), (2, 3)\}$.

Além disso, $(3, 3)$ não é maximal em $Ap(S, (4, 0))$ com respeito a ordem parcial \leq_S , pois $(3, 5) - (3, 3) = (0, 2) \in S$ e $(3, 5) \in Ap(S, (4, 0))$, mas $(3, 3) \in Maximais_{\leq_S} C(S, \mathbf{n})$.

Teorema 3.20 Sejam $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG, $\mathbf{n} \in S$ e \prec uma ordem monomial em \mathbb{N}^d . Então S é quase simétrico com tipo t se, e somente se, é possível ordenar o conjunto $C(S, \mathbf{n})$ da maneira

$$C(S, \mathbf{n}) = \{\mathbf{a}_0 = \mathbf{0} \prec \mathbf{a}_1 \prec \cdots \prec \mathbf{a}_m\} \cup \{\mathbf{b}_1 \prec \cdots \prec \mathbf{b}_{t-1}\},$$

com as seguintes condições:

- 1) $\mathbf{b}_{t-1} \prec \mathbf{a}_m$;
- 2) $\mathbf{b}_i - \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, para cada $i \in \{1, \dots, t-1\}$;
- 3) $\mathbf{b}_i \not\leq_S \mathbf{b}_j$, para cada $i \neq j$;
- 4) $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{m-i} = \mathbf{a}_m$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, m\}$;
- 5) $\mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{t-j} = \mathbf{a}_m + \mathbf{n}$, para todo $j \in \{1, \dots, t-1\}$.

Demonstração. \Rightarrow) Suponha que S é quase simétrico com tipo t , em particular S possui um único elemento Frobenius \mathbf{f} . Pela Proposição 3.18, $Maximais_{\leq} C(S, \mathbf{n}) = \{\mathbf{f} + \mathbf{n}\}$, e tome $\mathbf{a}_m = \mathbf{f} + \mathbf{n}$. Observe que se $\mathbf{x} \in PF(S)$, então é possível escrever $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{n}$, com $\mathbf{b} \in S$. Assim, seja $PF(S) = \{\mathbf{b}_i - \mathbf{n}, \mathbf{a}_m - \mathbf{n} \mid i = 1, \dots, t-1\}$, com $\mathbf{b}_1 \prec \mathbf{b}_2 \prec \cdots \prec \mathbf{b}_{t-1}$. Em particular, $\mathbf{b}_i \in C(S, \mathbf{n})$, para cada $i \in \{1, \dots, t-1\}$ e observe que $\mathbf{b}_i \not\leq_S \mathbf{b}_j$ para todo $i \neq j$ e $\mathbf{b}_{t-1} \prec \mathbf{a}_m$. Considere os dois conjuntos disjuntos $\{\mathbf{a}_0 = \mathbf{0} \prec \mathbf{a}_1 \prec \cdots \prec \mathbf{a}_m\}$ e $\mathbf{b}_1 \prec \cdots \prec \mathbf{b}_{t-1}$, cuja união é $C(S, \mathbf{n})$. Pela Lema 3.9 é suficiente provar que

- (1) para cada \mathbf{a}_i , existe \mathbf{a}_j tal que $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_m$;
- (2) para cada \mathbf{a}_i , existe \mathbf{b}_j tal que $\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_j = \mathbf{a}_m + \mathbf{n}$.

(1) Seja $i \in \{1, \dots, m-1\}$ (para $i = 0$ e $i = m$ é trivial) e considere o elemento \mathbf{a}_i . Temos que $\mathbf{a}_i - \mathbf{n} \notin S$ e como $\mathbf{a}_i \in C(S, \mathbf{n})$, então $\mathbf{f} - (\mathbf{a}_i - \mathbf{n}) = \mathbf{f} + \mathbf{n} - \mathbf{a}_i \in \mathbb{N}^d$, ou seja, $\mathbf{a}_i - \mathbf{n} \in Z_S$. Seja $\mathbf{x} = \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_i = \mathbf{f} - (\mathbf{a}_i - \mathbf{n})$, como S é quase simétrico segue que $\mathbf{x} \in PF(S)$, pelo item *iv*) da Proposição 3.11. Se $\mathbf{x} \in PF(S)$, pelo item *vi*) da Proposição 3.11, $\mathbf{a}_i - \mathbf{n} = \mathbf{f} - \mathbf{x} \in PF(S)$, que é uma contradição com a definição de \mathbf{a}_i . Desse modo, $\mathbf{x} \in S$, em particular $\mathbf{a}_m = \mathbf{a}_i + \mathbf{x}$ e segue, pela Observação 3.16, que $\mathbf{x} \in Ap(S, \mathbf{n})$. Além disso, $\mathbf{x} \leq \mathbf{f} + \mathbf{n}$, logo $\mathbf{x} \in C(S, \mathbf{n})$. Se $\mathbf{x} = \mathbf{b}_j$ para algum $j \in \{1, \dots, t-1\}$, então $\mathbf{f} = \mathbf{a}_i + (\mathbf{b}_j - \mathbf{n})$, que é uma contradição, já que $\mathbf{a}_i \in S$ e $\mathbf{b}_j - \mathbf{n} \in PF(S)$. Assim, podemos concluir que $\mathbf{x} = \mathbf{a}_j$, para algum $j \in \{1, \dots, m-1\}$ e $\mathbf{a}_m = \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j$.

(2) Seja $i \in \{1, \dots, t-1\}$ e considere o elemento \mathbf{b}_i . Então, $\mathbf{b}_i - \mathbf{n} \in PF(S)$ e pelo item *vi*) da Proposição 3.11, temos que $(\mathbf{b}_i - \mathbf{n}) + \mathbf{x} = \mathbf{f}$ para algum $\mathbf{x} \in PF(S) \setminus \{\mathbf{f}\}$. Em particular, $\mathbf{x} = \mathbf{b}_j - \mathbf{n}$ para algum $j \in \{1, \dots, t-1\}$, isto é, $\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_j = \mathbf{f} + 2\mathbf{n} = \mathbf{a}_m + \mathbf{n}$.

\Leftarrow) Queremos provar que S é quase simétrico de tipo t mostrando que $\mathbf{a}_m - \mathbf{n}$ é o elemento Frobenius de S e $PF(S) \setminus \{\mathbf{a}_m - \mathbf{n}\} = \{\mathbf{b}_1 - \mathbf{n} \prec \mathbf{b}_2 - \mathbf{n} \prec \cdots \prec \mathbf{b}_{t-1} - \mathbf{n}\}$, já que nesse caso $(\mathbf{b}_i - \mathbf{n}) + (\mathbf{b}_{t-i} - \mathbf{n}) = \mathbf{a}_m + \mathbf{n} - 2\mathbf{n} = \mathbf{a}_m - \mathbf{n}$, para todo $i = 1, \dots, t-1$, ou seja, S é quase simétrico pelo item *vii*) da Proposição 3.11.

Pelo fato de que $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{m-i} = \mathbf{a}_m$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ e $\mathbf{b}_j + \mathbf{b}_{t-j} = \mathbf{a}_m + \mathbf{n}$ para todo $i \in \{1, \dots, t-1\}$, obtemos que $Maximais_{\leq} C(S, \mathbf{n}) = \{\mathbf{a}_m\}$, em particular S é Frobenius, com elemento Frobenius $\mathbf{f} = \mathbf{a}_m - \mathbf{n}$. Além disso, $\mathbf{a}_i \leq_S \mathbf{a}_m$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, isto é, $\mathbf{a}_i - \mathbf{n} \notin PF(S)$, para cada $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ pela Proposição 2.4. Portanto, $PF(S) \setminus \{\mathbf{a}_m - \mathbf{n}\} \subseteq \{\mathbf{b}_1 - \mathbf{n} \leq \mathbf{b}_2 - \mathbf{n} \prec \cdots \prec \mathbf{b}_{t-1} - \mathbf{n}\}$ pela Proposição 2.4 e pelo item 2) da Proposição 3.18. Suponha que $\mathbf{b}_i - \mathbf{n} \notin PF(S)$ para algum $i \in \{1, \dots, t-1\}$. Como $\mathbf{b}_i - \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, segue que $\mathbf{b}_i - \mathbf{n} \in G(S)$ e existe $\mathbf{s} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $\mathbf{b}_i - \mathbf{n} + \mathbf{s} \in PF(S)$. Se $\mathbf{b}_i - \mathbf{n} + \mathbf{s} = \mathbf{b}_j - \mathbf{n}$ para algum $j \neq i$, obtemos que $\mathbf{b}_i \leq_S \mathbf{b}_j$, o que é uma contradição. Assim, a única possibilidade é $\mathbf{b}_i - \mathbf{n} + \mathbf{s} = \mathbf{f}$. Nesse caso, temos que $\mathbf{b}_i + \mathbf{s} + \mathbf{n} = \mathbf{a}_m + \mathbf{n}$, e desse modo $\mathbf{s} + \mathbf{n} = \mathbf{b}_{t-i}$, em particular, $\mathbf{s} = \mathbf{b}_{t-i} - \mathbf{n} \notin S$, contrariando a definição de \mathbf{s} . Portanto, $\mathbf{b}_i - \mathbf{n} \in PF(S)$, para cada $i \in \{1, \dots, t-1\}$. \square

Observando que para semigrupos numéricos $C(S, \mathbf{n}) = Ap(S, \mathbf{n})$, o resultado anterior nos dá uma generalização para o contexto dos SNGs da descrição de semigrupos numéricos quase simétricos com respeito ao conjunto de Apéry (conforme o Teorema 2.4 da referência [8]).

Observação 3.21 Se $S \subseteq \mathbb{N}^d$ é um SNG quase simétrico, $\mathbf{n} \in S$ e $C(S, \mathbf{n}) = \{\mathbf{a}_0 = \mathbf{0} \prec \mathbf{a}_1 \prec \cdots \prec \mathbf{a}_m\} \cup \{\mathbf{b}_1 \prec \cdots \prec \mathbf{b}_{t-1}\}$ com as hipóteses do Teorema 3.20, então pela demonstração do teorema temos que $PF(S) = \{\mathbf{b}_i - \mathbf{n}, \mathbf{a}_m - \mathbf{n} \mid i = 1, \dots, t-1\}$.

Corolário 3.22 Sejam $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG quase simétrico e $\mathbf{n} \in S$. Então,

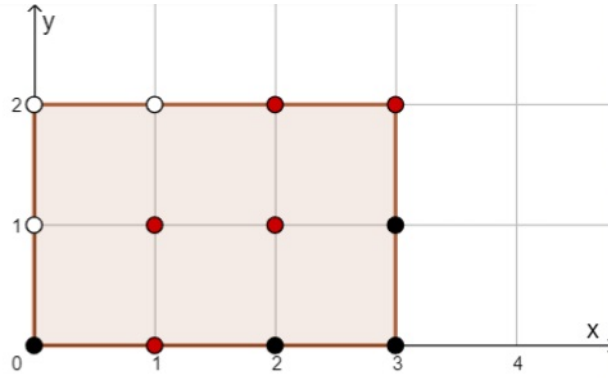
$$\text{Maximais}_{\leq_S} Ap(S, \mathbf{n}) = \text{Maximais}_{\leq_S} C(S, \mathbf{n}).$$

Demonstração. Considere $C(S, \mathbf{n}) = \{\mathbf{a}_0 = \mathbf{0} \prec \mathbf{a}_1 \prec \cdots \prec \mathbf{a}_m\} \cup \{\mathbf{b}_1 \prec \cdots \prec \mathbf{b}_{t-1}\}$ com as hipóteses do Teorema 3.20. Como $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{m-i} = \mathbf{a}_m$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, m\}$, então $\mathbf{a}_i \leq_S \mathbf{a}_m$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Além disso, $\mathbf{b}_i \not\leq_S \mathbf{a}_m$ para cada $i \in \{1, \dots, t-1\}$, já que $\mathbf{b}_i + (\mathbf{b}_{t-i} - \mathbf{n}) = \mathbf{a}_m$ e $\mathbf{b}_{t-i} - \mathbf{n} \in G(S)$. Assim, $\text{Maximais}_{\leq_S} C(S, \mathbf{n}) = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{t-1}, \mathbf{a}_m\}$. Sejam \mathbf{a}_m e \mathbf{b}_i para $i \in \{1, \dots, t-1\}$, daí pela Observação 3.21 temos que $\mathbf{a}_m - \mathbf{n}, \mathbf{b}_i - \mathbf{n} \in PF(S)$ e pela Proposição 2.4 segue que $\mathbf{a}_m, \mathbf{b}_i \in \text{Maximais}_{\leq_S} Ap(S, \mathbf{n})$. \square

Conseqüentemente, para SNGs quase simétricos é verdade que a igualdade do item 2) da Proposição 3.18.

Exemplo 3.23 Seja $S = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 2)\}$ o semigrupo numérico com elemento Frobenius $\mathbf{f} = (3, 2)$ e gênero $g = 8$. Temos que $PF(S) = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$, em particular, $t(S) = 5$. Temos que S é quase simétrico, pois $2g(S) + 1 - t(S) = 2 \cdot 8 + 1 - 5 = 12 = 4 \cdot 3 = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$.

A figura a seguir ilustra o semigrupo numérico S , onde os elementos em $PF(S)$ estão marcados em vermelho, os elementos em $G(S) \setminus PF(S)$ em branco e os elementos em $N(\mathbf{f})$ em preto.



Vamos calcular o conjunto $C(S, (3, 1))$ e ordenar de acordo com o Teorema 3.20. Considerando a ordem lexicográfica, podemos ordenar o conjunto da seguinte maneira:

$$C(S, (3, 1)) = \{(0, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 3), (3, 0), (3, 3), (4, 0), (4, 3), (5, 0), (6, 0), (6, 3)\} \cup \{(4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}.$$

Usando agora a ordem lexicográfica reversa, podemos arranjar o conjunto da forma:

$$C(S, (3, 1)) = \{(0, 0), (2, 0), (0, 3), (3, 0), (1, 3), (4, 0), (2, 3), (5, 0), (3, 3), (6, 0), (4, 3), (6, 3)\} \cup \{(4, 1), (4, 2), (5, 2), (5, 3)\}.$$

Observe que, em ambos os casos, o Teorema 3.20 é verificado.

As duas caracterizações seguintes para SNGs simétricos e pseudo-simétricos são simples conseqüências do Teorema 3.20 e da Observação 3.21. Elas também podem ser vistas como generalizações de resultados bem conhecidos em semigrupos numéricos.

Corolário 3.24 Sejam $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG, $\mathbf{n} \in S$ e \prec uma ordem monomial em \mathbb{N}^d . Então S é simétrico se, e somente se, $C(S, \mathbf{n}) = \{\mathbf{a}_0 \prec \mathbf{a}_1 \prec \cdots \prec \mathbf{a}_m\}$, com $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{m-i} = \mathbf{a}_m$ para $i = 0, 1, \dots, m$.

Corolário 3.25 Sejam $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG, $\mathbf{n} \in S$ e \prec uma ordem monomial em \mathbb{N}^d . Então S é pseudo-simétrico se, e somente se, $C(S, \mathbf{n}) = \{\mathbf{a}_0 \prec \mathbf{a}_1 \prec \cdots \prec \mathbf{a}_m = \mathbf{f} + \mathbf{n}\} \cup \left\{ \frac{\mathbf{f}}{2} + \mathbf{n} \right\}$, onde \mathbf{f} é maximal em $G(S)$ com respeito a ordem parcial natural e $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{m-i} = \mathbf{a}_m$, para $i = 0, 1, \dots, m$.

3.3 Calculando todos os SNGs quase simétricos com elemento Frobenius fixado

Começando da observação de que todo $\mathbf{f} \in \mathbb{N}^d$ é o elemento Frobenius de um SNG quase simétrico, já que podemos usar o SNG ordinário $S(\mathbf{f})$ como introduzido no Exemplo 3.5, vamos apresentar nessa seção alguns processos para obter todos os SNGs quase simétricos possuindo \mathbf{f} como elemento Frobenius. Em especial, vamos mostrar que esses métodos nos permitem ordenar todos os SNGs quase simétricos com elemento Frobenius fixado em uma árvore com raiz, que é uma noção da teoria de grafos, e cujo objetivo principal é enumerá-los, já que listamos SNGs quase simétricos com elemento Frobenius fixo sem repetição.

Vamos considerar primeiro quando a extensão unitária de um SNG preserva a propriedade de ser quase simétrico. Relembre que se S é um SNG e $\mathbf{x} \notin S$, então $S \cup \{\mathbf{x}\}$ é um SNG se, e só se, $\mathbf{x} \in SG(S)$.

Proposição 3.26 *Sejam $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG quase simétrico com elemento Frobenius \mathbf{f} e $\mathbf{x} \in SG(S) \setminus \{\mathbf{f}\}$. Então $S \cup \{\mathbf{x}\}$ é quase simétrico se, e somente se, $PF(S \cup \{\mathbf{x}\}) = PF(S) \setminus \{\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{x}\}$.*

Demonstração. \Rightarrow Suponha que $S \cup \{\mathbf{x}\}$ é quase simétrico. Seja $\mathbf{h} \in PF(S \cup \{\mathbf{x}\})$, observe que $\mathbf{f} - \mathbf{h} \notin S \cup \{\mathbf{x}\}$ e também que $\mathbf{h} \neq \mathbf{f} - \mathbf{x}$, já que $\mathbf{h} \in PF(S \cup \{\mathbf{x}\})$ e $\mathbf{h} + \mathbf{x} = \mathbf{f} \notin S \cup \{\mathbf{x}\}$. Tomando $\mathbf{s} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$, então $\mathbf{h} + \mathbf{s} \in S \cup \{\mathbf{x}\}$, mas $\mathbf{h} + \mathbf{s} \neq \mathbf{x}$, caso contrário, $(\mathbf{f} - \mathbf{x}) + \mathbf{s} = \mathbf{f} - \mathbf{h}$, o que é uma contradição, já que $\mathbf{f} - \mathbf{x} \in PF(S)$ e $\mathbf{f} - \mathbf{h} \notin S$, logo $\mathbf{h} \in PF(S)$. Seja $\mathbf{h} \in PF(S) \setminus \{\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{x}\}$, se $\mathbf{h} + \mathbf{x} \notin S \cup \{\mathbf{x}\}$, então $\mathbf{f} - \mathbf{h} - \mathbf{x} \in S \cup \{\mathbf{x}\}$ e como $\mathbf{f} - \mathbf{h} \neq \mathbf{x}$, assim $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in S$, mas isso é uma contradição, de fato $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in PF(S)$ pois S é quase simétrico. Portanto, $\mathbf{h} \in PF(S \cup \{\mathbf{x}\})$.

\Leftarrow Assuma que $PF(S \cup \{\mathbf{x}\}) = PF(S) \setminus \{\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{x}\}$. Daí, $t(S \cup \{\mathbf{x}\}) = t(S) - 2$ e $2g(S \cup \{\mathbf{x}\}) - t(S \cup \{\mathbf{x}\}) + 1 = 2g(S) - t(S) + 1 = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$. \square

No próximo resultado mostramos quando a propriedade de ser quase simétrico é preservada ao remover um elemento de um SNG. Relembre que se S é um SNG e $\mathbf{x} \in S$, então $S \setminus \{\mathbf{x}\}$ é um SNG se, e somente se, \mathbf{x} é um gerador minimal de S , ou seja, $\mathbf{x} \in S^* \setminus (S^* + S^*)$.

Proposição 3.27 *Sejam $T \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG quase simétrico com elemento Frobenius \mathbf{f} e \mathbf{x} um gerador minimal de T tal que $\mathbf{x} < \mathbf{f}$. Então $T \setminus \{\mathbf{x}\}$ é quase simétrico se, e somente se, $\mathbf{f} - \mathbf{x} \in PF(T \setminus \{\mathbf{x}\})$, em particular, $PF(T) = PF(T \setminus \{\mathbf{x}\}) \setminus \{\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{x}\}$.*

Demonstração. Se $T \setminus \{\mathbf{x}\}$ é quase simétrico, como \mathbf{x} é um gerador minimal de T , temos que $\mathbf{x} \in PF(T \setminus \{\mathbf{x}\})$, e em particular, $\mathbf{f} - \mathbf{x} \in PF(T \setminus \{\mathbf{x}\})$. Suponha que $\mathbf{f} - \mathbf{x} \in PF(T \setminus \{\mathbf{x}\})$, vamos provar que $PF(T) = PF(T \setminus \{\mathbf{x}\}) \setminus \{\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{x}\}$. Seja $\mathbf{h} \in PF(T)$. Então, $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in PF(T)$, logo $\mathbf{h} \neq \mathbf{x}$ e $\mathbf{h} \neq \mathbf{f} - \mathbf{x}$. Se $\mathbf{t} \in T \setminus \{\mathbf{x}\} \subset T$, assim $\mathbf{h} + \mathbf{t} \in T$ e se $\mathbf{h} + \mathbf{t} = \mathbf{x}$, temos que $\mathbf{f} - \mathbf{h} = (\mathbf{f} - \mathbf{x}) + \mathbf{t} \in T \setminus \{\mathbf{x}\} \subset T$, já que $\mathbf{f} - \mathbf{x} \in PF(T \setminus \{\mathbf{x}\})$, que é uma contradição. Daí, $\mathbf{h} + \mathbf{t} \in T \setminus \{\mathbf{x}\}$ e $\mathbf{h} \in PF(T \setminus \{\mathbf{x}\}) \setminus \{\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{x}\}$. Assuma que $\mathbf{h} \in PF(T \setminus \{\mathbf{x}\}) \setminus \{\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{x}\}$, a fim de provar que $\mathbf{h} \in PF(T)$, é suficiente mostrar que $\mathbf{h} + \mathbf{x} \in T$. Se $\mathbf{h} + \mathbf{x} \notin T$, segue que $\mathbf{f} - \mathbf{h} - \mathbf{x} \in T$ ou $\mathbf{f} - \mathbf{h} - \mathbf{x} \in PF(T)$, pelo item *v*) da Proposição 3.11. Em ambos os casos, $\mathbf{f} - \mathbf{h} \in T \setminus \{\mathbf{x}\}$, contrariando que $\mathbf{h} \in PF(T \setminus \{\mathbf{x}\})$. Desse modo, $PF(T) = PF(T \setminus \{\mathbf{x}\}) \setminus \{\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{x}\}$, em particular, $t(T \setminus \{\mathbf{x}\}) = t(T) + 2$ e, portanto, $2g(T \setminus \{\mathbf{x}\}) - t(T \setminus \{\mathbf{x}\}) + 1 = 2g(T) - t(T) + 1 = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$, ou seja, $T \setminus \{\mathbf{x}\}$ é quase simétrico. \square

Observação 3.28 *Note que os métodos de adicionar e remover um único elemento em SNGs quase simétricos descritos, respectivamente, nas Proposições 3.26 e 3.27 são um tipo de inverso um do outro, no sentido que:*

- se $\mathbf{x} \in SG(S) \setminus \{\mathbf{f}\}$, então \mathbf{x} é um gerador minimal de $S \cup \{\mathbf{x}\}$ com $\mathbf{x} < \mathbf{f}$;
- se \mathbf{x} é um gerador minimal de T , com $\mathbf{x} < \mathbf{f}$, então $\mathbf{x} \in SG(T \setminus \{\mathbf{x}\}) \setminus \{\mathbf{f}\}$.

Definição 3.29 *Sejam $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG com elemento Frobenius \mathbf{f} e \prec uma ordem monomial. Considerando $N(S) = \{\mathbf{x} \in S \mid \mathbf{x} \leq \mathbf{f}\}$, definimos:*

- a) $Q(S) = \{\mathbf{x} \in SG(S) \setminus \{\mathbf{f}\} \mid S \cup \{\mathbf{x}\} \text{ é quase simétrico}\}$;
- b) $Q_{\prec}(S) = \{\mathbf{x} \in Q(S) \mid \mathbf{x} \prec \mathbf{y} \text{ para todo } \mathbf{y} \in (N(S) \setminus \{\mathbf{0}\}) \cup \{\mathbf{f}\}\}$.

Além disso, se S é não ordinário, definimos $\text{men}_{\prec}(S) = \min_{\prec}(N(S) \setminus \{\mathbf{0}\})$.

Para um SNG não ordinário, a existência de um elemento satisfazendo as condições da Proposição 3.27 é garantida pelo seguinte resultado:

Lema 3.30 *Seja $T \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG quase simétrico não ordinário com elemento Frobenius \mathbf{f} . Seja \prec uma ordem monomial e $\mathbf{x} = \text{men}_{\prec}(T)$. Então $\mathbf{f} - \mathbf{x} \in PF(T \setminus \{\mathbf{x}\})$, em particular, $T \setminus \{\mathbf{x}\}$ é quase simétrico.*

Demonstração. Como T é não ordinário, o conjunto $\{\mathbf{z} \in T^* \mid \mathbf{z} \leq \mathbf{f}\}$ é não vazio, logo \mathbf{x} está bem definido. Além disso, \mathbf{x} é um gerador minimal de T , caso contrário, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ com $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in T^*$ e $\mathbf{x}_1 \prec \mathbf{x}$, assim $T \setminus \{\mathbf{x}\}$ é um SNG. Tome $\mathbf{y} = \mathbf{f} - \mathbf{x}$, vamos provar que $\mathbf{y} \in PF(T \setminus \{\mathbf{x}\})$. Seja $\mathbf{t} \in T \setminus \{\mathbf{x}\}$ e observe que \mathbf{f} é o elemento Frobenius de $T \setminus \{\mathbf{x}\}$. Se $\mathbf{t} \not\leq \mathbf{f}$, então $\mathbf{y} + \mathbf{t} \not\leq \mathbf{f}$, daí $\mathbf{y} + \mathbf{t} \in T \setminus \{\mathbf{x}\}$. Se $\mathbf{t} \leq \mathbf{f}$, temos que $\mathbf{x} \prec \mathbf{t}$ e $\mathbf{f} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \prec \mathbf{y} \prec \mathbf{t}$, isto é, $\mathbf{y} + \mathbf{t} \in T \setminus \{\mathbf{x}\}$. Finalmente, $T \setminus \{\mathbf{x}\}$ é quase simétrico pela Proposição 3.27. \square

Lema 3.31 *Seja $S \subseteq \mathbb{N}^d$ um SNG quase simétrico com elemento Frobenius \mathbf{f} . Então existe uma sequência $S_n \subset S_{n-1} \subset \dots \subset S_1$ de SNGs quase simétricos tal que*

- $S_n = S(\mathbf{f})$;
- $S_1 = S$;
- $S_{i+1} = S_i \setminus \{\text{men}_{\prec}(S_i)\}$, para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, em particular $\text{men}_{\prec}(S_i) \in Q(S_{i+1})$.

Demonstração. Seja \prec uma ordem monomial fixada. Considerando $S_1 = S$, pelo Lema 3.30, se $\mathbf{x} = \text{men}_{\prec}(S)$, então $S \setminus \{\mathbf{x}\}$ é um SNG quase simétrico com elemento Frobenius \mathbf{f} . Tome $S_2 = S \setminus \{\mathbf{x}\}$, ou seja, $S_2 \cup \{\mathbf{x}\} = S_1$. É claro que $\mathbf{x} \in Q(S_2)$. Se S_2 é ordinário nós concluímos, caso contrário podemos repetir o processo com S_i , para $i \geq 2$, obtendo um SNG quase simétrico S_{i+1} tal que $S_{i+1} = S_i \setminus \{\text{men}_{\prec}(S_i)\}$. O processo para quando obtemos $S_i = S(\mathbf{f})$, para algum i . \square

Para $\mathbf{f} \in \mathbb{N}^d$, definimos $\mathcal{A}(\mathbf{f})$ o conjunto de todos os SNGs quase simétricos que possuem elemento Frobenius \mathbf{f} . Podemos definir o gráfico $\mathcal{G}(\mathbf{f}) = (\mathcal{A}(\mathbf{f}), \mathcal{E})$ cujo conjunto de vértices é $\mathcal{A}(\mathbf{f})$ e \mathcal{E} é o conjunto de arestas, onde $(T, S) \in \mathcal{E}$ se $T = S \cup \{\mathbf{x}\}$ para algum $\mathbf{x} \in SG(S) \setminus \{\mathbf{f}\}$ tal que T é quase simétrico. Pelo Lema 3.31, para cada SNG quase simétrico existe um caminho de arestas em $\mathcal{G}(\mathbf{f})$ conectando ao SNG ordinário $S(\mathbf{f})$. Daí, podemos considerar um primeiro procedimento para gerar todos os SNGs quase simétricos com elemento Frobenius fixado \mathbf{f} . Começando de $T = S(\mathbf{f})$, podemos tomar os SNGs quase simétricos $T_{\mathbf{x}} = T \cup \{\mathbf{x}\}$ para cada $\mathbf{x} \in Q(T)$, e então repetir o processo para cada $T_{\mathbf{x}}$, e assim por diante. O processo para quando um SNG irreduzível é obtido já que, de acordo com a Proposição 2.39, eles são maximais com respeito a inclusão no conjunto de SNGs Frobenius com elemento Frobenius fixado. Conseqüentemente, todos os quase simétricos são produzidos por esse procedimento. Observe, no entanto, que, construindo $\mathcal{G}(\mathbf{f})$ por esse método, algumas redundâncias podem acontecer, o que significa que alguns SNGs quase simétricos podem ser obtidos mais de uma vez, como no exemplo seguinte.

Exemplo 3.32 *Seja $\mathbf{f} = (1, 3)$ e $S(\mathbf{f}) = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.*

Seguindo a Proposição 3.26, de $S(\mathbf{f})$ obtemos os seguintes SNGs quase simétricos:

- $S_1^1 = S(\mathbf{f}) \cup \{(1, 2)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 3)\}$;

- $S_1^2 = S(\mathbf{f}) \cup \{(0, 3)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

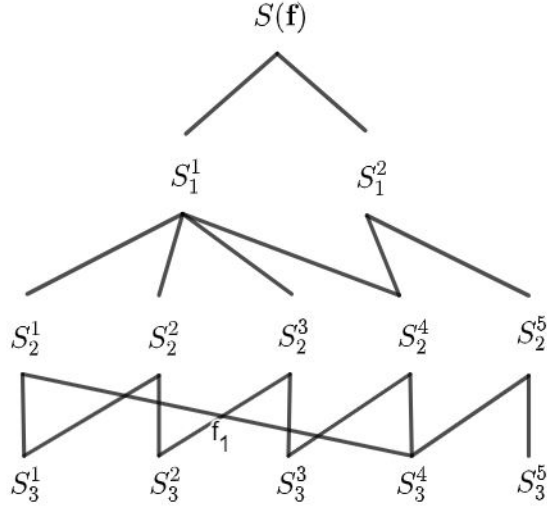
Aplicando novamente a Proposição 3.26 aos SNGs obtidos, temos:

- $S_2^1 = S_1^1 \cup \{(0, 2)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 3)\}$;
- $S_2^2 = S_1^1 \cup \{(1, 0)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 3)\}$;
- $S_2^3 = S_1^1 \cup \{(1, 1)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 3)\}$;
- $S_2^4 = S_1^1 \cup \{(0, 3)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 3)\} = S_1^2 \cup \{(1, 2)\}$;
- $S_2^5 = S_1^2 \cup \{(0, 2)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

Aplicando a Proposição 3.26 pela última vez, temos que:

- $S_3^1 = S_2^1 \cup \{(1, 0)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 3), (1, 1), (1, 3)\} = S_2^2 \cup \{(0, 2)\}$;
- $S_3^2 = S_2^2 \cup \{(1, 1)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3)\} = S_2^3 \cup \{(1, 0)\}$;
- $S_3^3 = S_2^3 \cup \{(0, 3)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 3)\} = S_2^4 \cup \{(1, 1)\}$;
- $S_3^4 = S_2^4 \cup \{(0, 2)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 3)\} = S_2^5 \cup \{(0, 3)\} = S_2^1 \cup \{(1, 2)\}$;
- $S_3^5 = S_2^5 \cup \{(0, 1)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

Os cinco semigrupos acima são todos irredutíveis (em particular, são simétricos). Na imagem a seguir apresentamos o gráfico $\mathcal{G}((1, 3))$.



Em particular, obtemos as seguintes cadeias de SNGs quase simétricos com elemento Frobenius $\mathbf{f} = (1, 3)$ distintas:

- $S(\mathbf{f}) \subset S_1^1 \subset S_2^1 \subset S_3^1$;
- $S(\mathbf{f}) \subset S_1^1 \subset S_2^1 \subset S_3^4$;
- $S(\mathbf{f}) \subset S_1^1 \subset S_2^2 \subset S_3^1$;
- $S(\mathbf{f}) \subset S_1^1 \subset S_2^2 \subset S_3^2$;
- $S(\mathbf{f}) \subset S_1^1 \subset S_2^3 \subset S_3^2$;
- $S(\mathbf{f}) \subset S_1^1 \subset S_2^3 \subset S_3^3$;
- $S(\mathbf{f}) \subset S_1^1 \subset S_2^4 \subset S_3^3$;
- $S(\mathbf{f}) \subset S_1^1 \subset S_2^4 \subset S_3^4$;
- $S(\mathbf{f}) \subset S_1^2 \subset S_2^4 \subset S_3^3$;
- $S(\mathbf{f}) \subset S_1^2 \subset S_2^4 \subset S_3^4$;
- $S(\mathbf{f}) \subset S_1^2 \subset S_2^5 \subset S_3^4$;
- $S(\mathbf{f}) \subset S_1^2 \subset S_2^5 \subset S_3^5$.

Note que, começando de um SNG quase simétrico (S, \mathbf{f}) , o processo mencionado anteriormente para obter SNGs quase simétricos ao adicionar uma lacuna especial sempre leva a um SNG irredutível T que possui elemento Frobenius \mathbf{f} . Nesse caso, $T = S \cup A$, onde A é o conjunto de elementos pseudo-Frobenius de S satisfazendo

$$PF(S) = PF(T) \cup \{\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{x} | \mathbf{x} \in A\}.$$

Por outro lado, se $S = T \setminus A$, sendo T um SNG irreduzível e A um subconjunto de T satisfazendo a relação acima, então S é necessariamente um SNG quase simétrico (contando o gênero e o tipo dos semigrupos envolvidos, isto é, pela Definição 3.3). Além disso, começando de um SNG quase simétrico S , é possível tomar um SNG irreduzível T com $S = T \setminus A$ de tal maneira que os elementos de A são na verdade geradores minimais de T . Em particular, obtemos o seguinte:

Teorema 3.33 *Seja (S, \mathbf{f}) um SNG Frobenius em \mathbb{N}^d . Então S é quase simétrico se, e somente se, existe um SNG irreduzível T com elemento Frobenius \mathbf{f} tal que $S = T \setminus A$, onde A é um subconjunto de geradores minimais de T satisfazendo*

$$PF(S) = PF(T) \cup \{\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{x} | \mathbf{x} \in A\}.$$

Nesse caso, $t(S) = 2|A| + t(T)$.

Demonstração. \Leftarrow) Segue da Definição 3.3.

\Rightarrow) Seja S um SNG quase simétrico com elemento Frobenius \mathbf{f} . Daí, pela Proposição 3.11, se \prec é uma ordem monomial em \mathbb{N}^d , dependendo da paridade de $t(S)$, podemos decompor $PF(S)$ em uma das seguintes formas

$$\{\mathbf{f} \succ \mathbf{h}_1 \succ \cdots \succ \mathbf{h}_r \succ \mathbf{f} - \mathbf{h}_r \succ \cdots \succ \mathbf{f} - \mathbf{h}_1\}$$

e

$$\{\mathbf{f} \succ \mathbf{h}_1 \succ \cdots \succ \mathbf{h}_r \succ \mathbf{f}/2 \succ \mathbf{f} - \mathbf{h}_r \succ \cdots \succ \mathbf{f} - \mathbf{h}_1\}.$$

Assim, considere $A = \{\mathbf{h}_i | i = 1, \dots, r\}$. Observe que para todos $i, j \in \{1, \dots, r\}$, segue que $\mathbf{h}_i + \mathbf{h}_j \in S$, de fato $\mathbf{h}_i + \mathbf{h}_j \succ (\mathbf{f} - \mathbf{h}_j) + \mathbf{h}_j = \mathbf{f}$. Além disso, temos que $t(S) = 2|A| + e$, onde $e = 1, 2$. Em particular, $e = 1$ no primeiro caso, $e = 2$ no segundo.

Note que $T = S \cup A$ é um SNG Frobenius com elemento Frobenius \mathbf{f} . De fato, pela observação acima e considerando que $A \subset PF(S)$, se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T$, então $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S \subseteq T$. Mais ainda, o complemento de T em \mathbb{N}^d é finito, já que está contido em $G(S)$. Vamos mostrar que A é um conjunto de geradores minimais de T . Se $\mathbf{h}_i = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, com $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T^*$, temos apenas as seguintes possibilidades:

- $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \Rightarrow \mathbf{h}_i \in S$, contradizendo que $\mathbf{h}_i \in PF(S)$;
- $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A \Rightarrow \mathbf{h}_i \in S$, contradizendo novamente que $\mathbf{h}_i \in PF(S)$;
- $\mathbf{x} \in A$ e $\mathbf{y} \in S$, e como $\mathbf{h}_i \in G(S)$, temos que $\mathbf{x} \notin PF(S)$ e assim $\mathbf{x} \notin A$.

Desse modo, resta provar que T é irreduzível. Como S é quase simétrico, temos que $2g(S) + 1 - t(S) = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$. Daí, como $g(T) = g(S) - |A|$, obtemos

$$2g(T) + 1 - e = 2g(T) + 1 - (t(S) - 2|A|) = 2g(S) + 1 - t(S) = |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times},$$

e já que $2g(T) + 1 - t(T) \geq |\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}$, segue que $1 \leq t(T) \leq e$. Se $e = 1$, então $PF(T) = \{\mathbf{f}\}$, logo T é irreduzível. Se $e = 2$, observe que $\left\{\mathbf{f}, \frac{\mathbf{f}}{2}\right\} \subseteq PF(T)$, e como $t(T) \leq 2$, $PF(T) = \left\{\mathbf{f}, \frac{\mathbf{f}}{2}\right\}$. Em particular, T é irreduzível com $t(T) = t(S) - 2|A|$. Assim, em cada um dos casos $PF(S) = PF(T) \cup \{\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{x} | \mathbf{x} \in A\}$. \square

A condição que $PF(S) = PF(T) \cup \{\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in A\}$ do teorema anterior pode ser formulada em uma forma mais computacional como segue, o que torna mais simples de ser verificado. Este fato nos permite trazer para os SNGs uma extensão da descrição dada em [11] para semigrupos numéricos quase simétricos em relação a semigrupos numéricos irredutíveis.

Proposição 3.34 *Sejam (T, \mathbf{f}) um SNG irredutível e A um subconjunto de geradores minimais de T menores que \mathbf{f} com respeito a ordem parcial natural \leq . Considerando o SNG Frobenius $S = T \setminus A$, então $PF(S) = PF(T) \cup \{\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in A\}$ se, e só se, $\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{f} \notin S$, para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$.*

Demonstração. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, segue por hipótese que $\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{y} \in PF(S)$ e logo $\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{f} = \mathbf{x} - (\mathbf{f} - \mathbf{y}) \notin S$. Por outro lado, note que $A \subseteq PF(S)$, já que para cada $\mathbf{s} \in S^*$ e $\mathbf{x} \in A$, temos que $\mathbf{x} + \mathbf{s} \in T$, mas $\mathbf{x} + \mathbf{s} \notin A$. Além disso, $PF(T) \subseteq PF(S)$, de fato, é claro que $\mathbf{f} \in PF(S)$ e se $\frac{\mathbf{f}}{2} + \mathbf{s} \notin S$ para algum $\mathbf{s} \in S^*$, então $\frac{\mathbf{f}}{2} + \mathbf{s} = \mathbf{x}$ para algum $\mathbf{x} \in A$, mas nesse caso, $2\mathbf{s} = 2\mathbf{x} - \mathbf{f} \in S$, o que é uma contradição. Agora, como $PF(T) \cup A \subseteq PF(S)$, se $\mathbf{y} \in PF(S) \setminus (PF(T) \cup A)$, onde T é irredutível, assim $\mathbf{f} - \mathbf{y} \in T$ pela Proposição 2.12. No entanto, $\mathbf{f} - \mathbf{y} \in G(S)$ já que $\mathbf{y} \in PF(S)$. Daí, $\mathbf{f} - \mathbf{y} \in T \setminus S = A$. Portanto, $\mathbf{f} - \mathbf{y} = \mathbf{x}$ para algum $\mathbf{x} \in A$, e $\mathbf{y} = \mathbf{f} - \mathbf{x}$, o que prova que $PF(S) \subseteq PF(T) \cup \{\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in A\}$. Consequentemente, é suficiente mostrar que $\mathbf{f} - \mathbf{x} \in PF(S)$ para todo $\mathbf{x} \in A$. Observe que $\mathbf{f} - \mathbf{x} \in G(T)$ e logo $\mathbf{f} - \mathbf{x} \in G(S)$. Agora, assumamos que $\mathbf{f} - \mathbf{x} + \mathbf{s} \in G(S)$ para algum $\mathbf{s} \in S^*$. Se $\mathbf{f} - \mathbf{x} + \mathbf{s} \in T$, então $\mathbf{f} - \mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{y} \in A$ e assim $\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{f} \in S$, o que é uma contradição. Daí, $\mathbf{f} - \mathbf{x} + \mathbf{s} \in G(T)$. Sendo T irredutível, novamente pela Proposição 2.12, temos que $\mathbf{f} - \mathbf{x} + \mathbf{s} = \frac{\mathbf{f}}{2}$ ou $\mathbf{x} - \mathbf{s} = \mathbf{f} - (\mathbf{f} - \mathbf{x} + \mathbf{s}) \in T$. A primeira relação implica que $2\mathbf{x} - \mathbf{f} = 2(\mathbf{x} - \mathbf{f}/2) = 2(\mathbf{f} + \mathbf{s}) \in S$, contrariando a hipótese. Como \mathbf{x} é um gerador minimal de T , a segunda implica que $\mathbf{s} = \mathbf{x}$, o que não é possível, pois $S = T \setminus A$. Portanto, $\{\mathbf{f} - \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in A\} \subseteq PF(S)$, o que estabelece que $PF(S) = PF(T) \cup \{\mathbf{x}, \mathbf{f} - \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in A\}$. \square

A fim de ter um procedimento que gera todos os SNGs quase simétricos sem redundâncias, podemos definir um subgráfico de $\mathcal{G}(\mathbf{f})$ que é uma árvore.

Definição 3.35 *Sejam \prec uma ordem monomial, $\mathbf{f} \in \mathbb{N}^d$ e $\mathcal{A}(\mathbf{f})$ o conjunto de todos os SNGs quase simétricos como elemento Frobenius \mathbf{f} .*

Definimos $\mathcal{G}_{\prec}(\mathbf{f}) = (\mathcal{A}(\mathbf{f}), \mathcal{E}_{\prec})$ como o gráfico cujo conjunto de vértices é $\mathcal{A}(\mathbf{f})$ e o conjunto de arestas é \mathcal{E}_{\prec} , onde $(T, S) \in \mathcal{E}_{\prec}$ se $S = T \setminus \{\text{men}_{\prec}(T)\}$. Se $(T, S) \in \mathcal{E}_{\prec}$ dizemos que T é um filho de S .

Observe que $\mathcal{G}_{\prec}(\mathbf{f})$ é um subgráfico de $\mathcal{G}(\mathbf{f})$, de fato: se $(T, S) \in \mathcal{E}_{\prec}$, então $S = T \setminus \{\text{men}_{\prec}(T)\}$, ou seja, $S \cup \{\text{men}_{\prec}(T)\} = T$, e logo $(T, S) \in \mathcal{E}$.

Teorema 3.36 *Sejam \prec uma ordem monomial e $\mathbf{f} \in \mathbb{N}^d$. Então $\mathcal{G}_{\prec}(\mathbf{f})$ é uma árvore cuja base é $S(\mathbf{f})$. Além disso, se $S \in \mathcal{A}(\mathbf{f})$, todos os filhos de S são semigrupos $S \cup \{\mathbf{x}\}$ para todo $\mathbf{x} \in Q_{\prec}(S)$.*

Demonstração. Seja $S \in \mathcal{A}(\mathbf{f})$. Como na demonstração do Lema 3.31, podemos construir uma cadeia de semigrupos $S_n \subset S_{n-1} \subset \dots \subset S_1$ tal que $S_1 = S$, $S_n = S(\mathbf{f})$ e $S_{i+1} = S_i \setminus \{\text{men}_{\prec}(S_i)\}$. Em particular, $(S_1, S_2), (S_2, S_3), \dots, (S_{n-1}, S_n)$ é um caminho de arestas de $\mathcal{G}_{\prec}(\mathbf{f})$ de S a $S(\mathbf{f})$. Se existe outro caminho, então para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, existem dois semigrupos diferentes $T_1, T_2 \in \mathcal{A}(\mathbf{f})$ tais que $(S_i, T_1)(S_i, T_2) \in \mathcal{E}_{\prec}$, assim $T_1 = S \setminus \{\text{men}_{\prec}(S_i)\} = T_2$, que é uma contradição. Daí concluímos que $\mathcal{G}_{\prec}(\mathbf{f})$ é uma árvore cuja base é $S(\mathbf{f})$. Se T é um filho de S , então $S = T \setminus \{\text{men}_{\prec}(T)\}$, isto é, $T = S \cup \{\text{men}_{\prec}(T)\}$. Logo, $\text{men}_{\prec}(T) \in Q(S)$, e se $\mathbf{y} \in N(S) \cup \{\mathbf{f}\}$, então $\mathbf{y} \in N(T) \cup \{\mathbf{f}\}$, e $\text{men}_{\prec}(T) \prec \mathbf{y}$. Portanto, $\text{men}_{\prec}(T) \in Q_{\prec}(S)$ e isso prova a segunda afirmação do teorema. \square

Seja \prec uma ordem monomial em \mathbb{N}^d . Definimos $\mathcal{F}(S) = \{S \cup \{\mathbf{x}\} \mid \mathbf{x} \in Q_{\prec}(S)\}$. Pelo teorema anterior, a fim de calcular todos os SNGs quase simétricos com elemento Frobenius fixo, podemos considerar os seguintes passos:

- (1) $V_1 = \{S(\mathbf{f})\}$;
- (2) $V_i = \bigcup_{S \in V_{i-1}} \mathcal{F}(S)$.

Observe que para cada $T \in \mathcal{F}(S)$, temos que $g(T) = g(S) - 1$ e $t(T) = t(S) - 2$. Além disso, o processo para quando todos os semigrupos de V_i são irreduzíveis.

Em particular, se $\mathcal{I}(\mathbf{f})$ é o conjunto de todos os SNGs irreduzíveis com elemento Frobenius \mathbf{f} , pelos Teoremas 2.48 e 2.49 segue que

$$\mathcal{I}(\mathbf{f}) = V_s \text{ e } \mathcal{A}(\mathbf{f}) = \bigcup_{i=1}^s V_i, \text{ onde } s = \begin{cases} \frac{|\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times}}{2} & , \text{ se } \mathbf{f}/2 \notin \mathbb{N}^d \\ \frac{|\mathbf{f} + \mathbf{1}|_{\times} + 1}{2} & , \text{ se } \mathbf{f}/2 \in \mathbb{N}^d \end{cases}.$$

Exemplo 3.37 Seja $\mathbf{f} = (2, 1)$ e $S(\mathbf{f}) = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$.

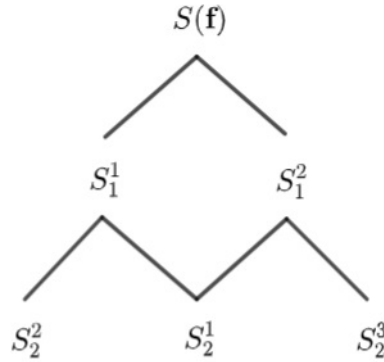
Seguindo a Proposição 3.26, de $S(\mathbf{f})$ obtemos os seguintes SNGs quase simétricos:

- $S_1^1 = S(\mathbf{f}) \cup \{(2, 0)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 1)\}$;
- $S_1^2 = S(\mathbf{f}) \cup \{(1, 1)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (2, 0), (2, 1)\}$.

Aplicando novamente a Proposição 3.26 aos SNGs obtidos, temos:

- $S_2^1 = S_1^1 \cup \{(1, 1)\} = S_1^2 \cup \{(2, 0)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (2, 1)\}$;
- $S_2^2 = S_1^1 \cup \{(1, 0)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$;
- $S_2^3 = S_1^2 \cup \{(0, 1)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(1, 0), (2, 0), (2, 1)\}$.

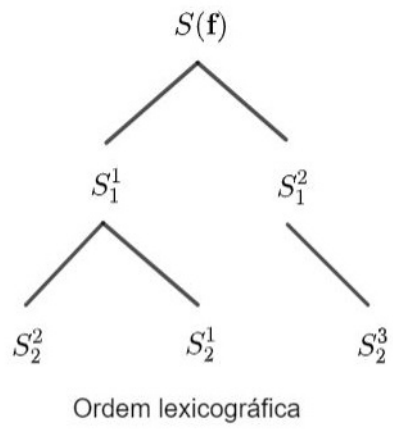
Os três semigrupos acima são irreduzíveis (em particular, são todos simétricos). Na imagem a seguir apresentamos o gráfico $\mathcal{G}((2, 1))$.



Daí, considerando a ordem lexicográfica, podemos produzir a árvore $\mathcal{G}_{\prec_{lex}}(\mathbf{f})$ sem a redundância $S_1^2 \cup \{(2, 0)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (2, 1)\}$. De fato, $S_1^1 = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (2, 0), (2, 1)\}$, em particular, $N(S_1^1) = \{(0, 0), (1, 1)\}$ e $(1, 1) \prec_{lex} (2, 0)$.

Se considerarmos \prec_{rlex} a ordem lexicográfica reversa, então a redundância está em $S_1^1 \cup \{(1, 1)\} = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (2, 1)\}$. De fato, $S_1^2 = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 1)\}$, em particular, $N(S_1^2) = \{(0, 0), (2, 0)\}$ e $(2, 0) \prec_{rlex} (1, 1)$.

Desse modo, diferentes ordens monomiais podem ordenar o conjunto $\mathcal{A}(\mathbf{f})$ em árvores $\mathcal{G}_{\prec}(\mathbf{f})$ distinta, como vemos na figura seguinte.



Referências Bibliográficas

- [1] C. Cisto, *Generalized numerical semigroups*, Ph.D. dissertation, University of Catania, Sicily, 2020. <https://doi.org/10.1142/S0219498821500791>
- [2] C. Cisto, G. Failla, C. Peterson, R. Ultano, *Irreducible generalized numerical semigroups and uniqueness of the Frobenius element*, Semigroup Forum, vol.99, 481-495, 2019. <https://doi.org/10.1007/s00233-019-10040-1>
- [3] C. Cisto, W. Tenório, *On almost-symmetry in generalized numerical semigroups*, Commun. Algebra, vol.49, 2337-2355, 2021. <https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1870998>
- [4] C. Cisto, G. Failla, R. Ultano, *On the generators of a generalized numerical semigroup*, Analele Univ. "Ovidius", vol.27, 49-59, 2019. <https://doi.org/10.2478/auom-2019-0003>
- [5] E. S. Selmer, *On the linear Diophantine problem of Frobenius*, J. reine angew. Math., 293/294, 1-17, 1977. <https://doi.org/10.1515/crll.1977.293-294.1>
- [6] G. Failla, C. Peterson, R. Ultano, *Algorithms and basic asymptotics for generalized numerical semigroups in \mathbb{N}^d* , Semigroup Forum, vol.92, 460-473, 2016. <https://doi.org/10.1007/s00233-015-9690-8>
- [7] GAP - Groups, Algorithms, e Programming, Versão 4.11.1.
- [8] H. Nari, *Symmetries on almost symmetric numerical semigroups*, Semigroup Forum, vol.86, 140-154, 2013. <https://doi.org/10.1007/s00233-012-9397-z>
- [9] H. S. Wilf, *A circle-of-lights algorithm for the "money-changing problem"*, Amer. Math. Monthly, vol.85, 562-565, 1978. <https://doi.org/10.1080/00029890.1978.11994639>
- [10] J. Backelin, *On the number of semigroups of natural numbers*, Mathematica Scandinavica, vol.66, 197-215, 1990. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-12304>
- [11] J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, *Constructing almost symmetric numerical semigroup from irreducible numerical semigroups*, Commun. Algebra, vol.42, 1362-1367, 2014. <https://doi.org/10.1080/00927872.2012.740117>
- [12] J. C. Rosales e P. A. García-Sánchez, *Numerical Semigroups*, Springer, vol.20, 2009. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0160-6>
- [13] J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, J. I. García-García, J. M. Urbano-Blanco, *Proportionally modular Diophantine inequalities*, J. Number Theory, vol.103, 281-294, 2003. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2003.06.002>
- [14] J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, J. I. García-García, J. A. Jiménez Madrid, *The oversemigroups of a numerical semigroup*, Semigroup Forum, vol.67, 145-158, 2003. <https://doi.org/10.1007/s00233-002-0007-3>

- [15] M. Bras-Amorós , *Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups*, Semi-group Forum, vol.76, 379-384, 2008. <https://doi.org/10.1007/s00233-007-9014-8>
- [16] M. Bras-Amorós, *Increasingly Enumerable Submonoids of R : Music Theory as a Unifying Theme*, The American Mathematical Monthly, vol.127, 33-44, 2020. <https://doi.org/10.1080/00029890.2020.1674073>
- [17] N. Kaplan, *Counting numerical semigroups by genus and some cases of a question of Wilf*, Journal of Pure and Applied Algebra, vol.216, 1016-1032, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2011.10.038>