

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

LUCAS BOAVENTURA PEREIRA

Integração GPS/INS baseada em filtro de Kalman para navegação

Uberlândia

2022

LUCAS BOAVENTURA PEREIRA

Integração GPS/INS baseada em filtro de Kalman para navegação

Projeto de Fim de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Mecatrônica.

Orientador: Pedro Augusto Queiroz de Assis

Uberlândia

2022

LUCAS BOAVENTURA PEREIRA

Integração GPS/INS baseada em filtro de Kalman para navegação

Projeto de Fim de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Mecatrônica.

Uberlândia, 11/04/2022

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Pedro Augusto Queiroz de Assis – FEMEC/UFU

---

Prof. Dr. José Jean-Paul Zanlucchi de Souza Tavares – FEMEC/UFU

---

Prof. Dr. Roberto de Souza Martins – FEMEC/UFU

Dedico este trabalho à minha família, aos meus amigos e a todos que me apoiaram ao longo dessa jornada.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus pelo dom da vida, por todas as bênçãos recebidas e por todos os obstáculos que me fizeram amadurecer e evoluir.

Aos meus pais, Cláudio e Márcia, pelo amor incondicional. Por terem me incentivado a enfrentar essa jornada acadêmica e terem se mantidos sempre próximos ao longo do processo, me proporcionado tudo para que fosse possível eu completá-la.

À minha irmã, Clara, por ser uma pessoa com quem eu sempre pude contar, por me aconselhar e encorajar durante os anos em que moramos juntos em Uberlândia.

À minha namorada, Viviane, por todo amor, demonstrado dia a dia em forma de companheirismo, incentivo, escuta e carinho, tornando minha vida mais suave.

Ao meu cunhado, Felipe, pelos ensinamentos transmitidos e pelos *insights* que me possibilitou ter sobre diversos assuntos de Engenharia, seja em conversas despreziosas ou durante as oportunidades de iniciação científica e estágio que me proporcionou.

Aos meus amigos, que me acompanharam ao longo dessa caminhada, compartilhando as dificuldades, superações e alegrias e que permanecem comigo até hoje.

Aos meus professores, que compartilharam seus conhecimentos e que foram essenciais em minha formação.

Ao meu orientador, Pedro Augusto Queiroz de Assis, por ter aceitado minha proposta de tema para esse trabalho e ter encarado os desafios junto comigo. Além disso, por ser para mim um exemplo de professor: ótima didática e enorme entusiasmo e comprometimento no que faz.

Ao professor Nassau de Nogueira Nardez por ter realizado as medições com o GPS de precisão para mim, sempre com grande disponibilidade em ajudar.

“Faça o teu melhor na condição que você tem,  
enquanto não tem condições melhores,  
para fazer melhor ainda.”

Mário Sérgio Cortella

## RESUMO

Navegação significa determinar a posição e a atitude de um corpo móvel em relação a um referencial ao longo do tempo. As grandezas posição, velocidade e atitude, que permitem georreferenciar esse corpo, são chamadas de estados de navegação. Já a combinação de sensores que possibilita a determinação dos estados de navegação é conhecida como sistema de navegação. A integração de sistemas de navegação busca superar a qualidade da estimativa dos estados em relação àquela obtida com qualquer um dos sistemas operando isoladamente. Para isso, tipicamente combinam-se sistemas com características complementares. Neste contexto, o presente trabalho envolveu o desenvolvimento de um sistema de navegação utilizando a integração GPS/INS por meio de dois filtros de Kalman. O primeiro é usado para estimativa de atitude, utilizando as leituras do acelerômetro, giroscópio e magnetômetro. Já o segundo é empregado para estimar a posição a partir da medição do GPS e da saída do acelerômetro. A integração GPS/INS se beneficia dos pequenos erros de estimativa do INS a curto prazo e do fato das medições do GPS não divergirem ao longo do tempo. Para validar o sistema implementado, definiu-se uma trajetória de referência, a partir de quatro pontos que foram definidos utilizando um GPS de precisão. Tal validação foi realizada em simulação e a partir de dados experimentais. Com os dados simulados a integração GPS/INS apresentou um resultado melhor que a medição do GPS isoladamente. Mais precisamente, o erro médio e a variância do erro dos valores estimados pelos filtros foram menores que os dos valores medidos. No entanto, no teste com dados reais os resultados do sistema de navegação desenvolvido ficaram abaixo do esperado. Isso ocorreu devido ao alto nível de ruídos do acelerômetro de baixo custo empregado, alinhado à dupla integração feita no modelo dinâmico do filtro de Kalman para estimativa de posição.

**Palavras-chave:** Sistema de Navegação Integrado. Filtro de Kalman. GPS. INS. Estimativa de atitude. Estimativa de posição.

## ABSTRACT

Navigation means determining position and attitude of a moving body in relation to a reference over time. The quantities position, velocity and attitude, which allow this body to be georeferenced, are called navigation states. The combination of sensors that makes it possible to determine navigation states is known as a navigation system. The integration of navigation systems seeks to overcome the quality of states estimation in relation to that obtained with any of the systems operating in isolation. For this, systems with complementary characteristics are typically combined. In this context, the present paper involved the development of a navigation system using GPS/INS integration through two Kalman filters. The first is used for attitude estimation, using accelerometer, gyroscope and magnetometer readings. The second is used to estimate the position from the GPS measurement and the accelerometer output. GPS/INS integration benefits from small short-term INS estimation errors and the fact that GPS measurements do not diverge over time. To validate the implemented system, a reference trajectory was defined, from four points that were defined using a precision GPS. Such validation was performed in simulation and from experimental data. With the simulated data, the GPS/INS integration presented a better result than the GPS measurement alone. More precisely, the mean error and the error variance of the values estimated by the filters were smaller than those of the measured values. However, in the test with real data, the results of the developed navigation system were below expectations. This was due to the high noise level of the low-cost accelerometer used, in line with the double integration performed in the dynamic model of the Kalman filter for position estimation.

**Keywords:** Integrated Navigation System. Kalman filter. GPS. INS Attitude estimation. Position estimation.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - <i>ECEF frame</i> em relação ao referencial inercial.....	12
Figura 2 - Referenciais ECEF e de navegação ( <i>ECEF frame</i> e <i>n-frame</i> ).....	15
Figura 3 - Referencial do corpo ( <i>b-frame</i> ).....	16
Figura 4 - Ângulos de Euler .....	16
Figura 5 - Diagrama do filtro de Kalman para estimativa de atitude (FKA).....	19
Figura 6 - Diagrama da combinação entre filtros de Kalman para estimativa de posição .....	23
Figura 7 - Pontos utilizados para definição da trajetória de referência .....	28
Figura 8 - Ângulo de rolagem estimado pelo FKA ( $\phi$ ) a partir de dados simulados. Também são mostrados os dados reais ( $\phi$ ) e medidos ( $\phi_{acc}$ ).....	30
Figura 9 - Ângulo de arfagem estimado pelo FKA ( $\theta$ ) a partir de dados simulados. Também são mostrados os dados reais ( $\theta$ ) e medidos ( $\theta_{acc}$ ).....	31
Figura 10 - Ângulo de guinada estimado pelo FKA ( $\psi$ ) a partir de dados simulados. Também são mostrados os dados reais ( $\psi$ ) e medidos ( $\psi_{mag}$ ).....	31
Figura 11 - Posição estimada pelo FKP ( $\lambda$ vs $\varphi$ ) a partir de dados simulados. Também são mostrados os dados reais ( $\lambda$ vs $\varphi$ ) e medidos ( $\lambda_{GPS}$ vs $\varphi_{GPS}$ ).....	32
Figura 12 - Montagem dos sensores para coleta dos dados.....	34
Figura 13 - Atitude estimada pelo FKA a partir de dados reais .....	35
Figura 14 - Posição estimada pelo FKP a partir de dados reais .....	35
Figura 15 - Operação completa do filtro de Kalman.....	41
Figura 16 - Leituras do magnetômetro ao se realizar movimentos em variados padrões de oito antes da calibração.....	42
Figura 17 - Leituras do magnetômetro ao se realizar movimentos em variados padrões de oito após a calibração.....	43
Figura 18 - Espectro de frequência do eixo $x$ do acelerômetro antes e depois da aplicação do filtro passa-baixas .....	44
Figura 19 - Sinal do eixo $x$ do acelerômetro antes e depois da aplicação do filtro passa-baixas .....	45

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Erro médio e variância do erro das atitudes medida e estimada .....	33
Tabela 2 - Erro médio e variância do erro das posições medida e estimada .....	33

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GPS	<i>Global Positioning System</i>
ECEF	<i>Earth-centered, Earth-fixed</i>
INS	<i>Inertial Navigation System</i>
IMU	<i>Inertial Measurement Unit</i>
NED	<i>north-east-down</i>
FKA	Filtro de Kalman para estimativa de atitude
FKP	Filtro de Kalman para estimativa de posição

## SUMÁRIO

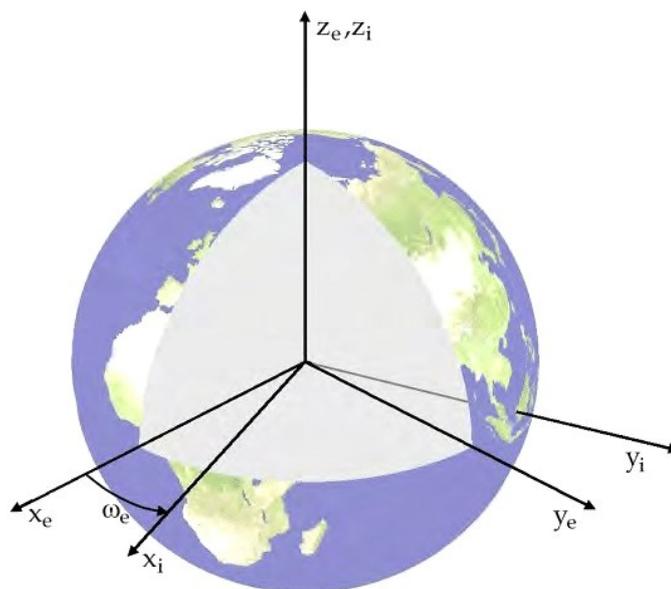
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>ESTIMATIVA DE ATITUDE.....</b>	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Definição de referenciais .....</b>	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>Definição dos ângulos de Euler.....</b>	<b>16</b>
<b>2.3</b>	<b>Filtro de Kalman para estimativa de atitude .....</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>ESTIMATIVA DE POSIÇÃO.....</b>	<b>23</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>27</b>
<b>4.1</b>	<b>Resultados de simulação.....</b>	<b>29</b>
<b>4.2</b>	<b>Resultados experimentais.....</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>37</b>
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>38</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A navegação de um corpo móvel consiste em determinar a posição e a atitude (ou orientação) desse objeto em relação a um referencial ao longo do tempo. As grandezas posição, velocidade e atitude, como variáveis em função do tempo, são conhecidas como estados de navegação, uma vez que contêm as informações necessárias para georreferenciar um corpo móvel. Um sistema de navegação é a combinação adequada de sensores que possibilita a determinação dos estados de navegação (MARQUES FILHO, 2005).

O Sistema de Posicionamento Global, mais conhecido como GPS (*Global Positioning System*), é um sistema de navegação por satélite que foi desenvolvido com o intuito de ser utilizado pelas forças armadas americanas. Posteriormente, tal sistema passou a ser adotado por diversos segmentos da comunidade civil, tais como: navegação aérea e marítima, controle de frotas de veículos e agricultura de precisão (MONICO, 2000). Utilizando um receptor GPS é possível obter informações de latitude, longitude e altura em relação ao sistema de referência *World Geodetic System 1984* (WGS 84) (DRAKE, 2002), que é um referencial *Earth-centered, Earth-fixed* (*ECEF frame*), isto é, tem a origem no centro da Terra, mas é fixo ao planeta, logo gira em conjunto com a Terra (NIELSEN et al., 2008). A Figura 1 mostra o *ECEF frame* (eixos com subscrito *e*), que se move com uma velocidade angular  $\omega_e$  em relação ao referencial inercial (eixos com subscrito *i*), sendo esse fixo.

Figura 1 - *ECEF frame* em relação ao referencial inercial



Fonte: Adaptado de Lammas; Sammut e He (2010).

Receptores GPS funcionam por meio da recepção de sinais de rádio emitidos por satélites. Os sinais envolvidos na comunicação podem sofrer interferências do meio no qual esses sinais se propagam, sendo distorcidos por fatores como condições atmosféricas adversas e elementos presentes no meio de propagação, como edificações ou túneis (PISSARDINI et al., 2017). Mais ainda, tipicamente as informações do GPS possuem uma baixa frequência de atualização (por volta de 1 Hz) (FAKHARIAN; GUSTAFSSON; MEHRFAM, 2011). Essas características podem impedir o emprego do GPS para navegação em determinadas situações. Por exemplo, se for necessária uma frequência de atualização elevada para fins de controle.

Como alternativa pode-se adotar o sistema de navegação inercial ou INS (*Inertial Navigation System*), que é composto por uma unidade de medidas inerciais ou IMU (*Inertial Measurement Unit*). A IMU é formada por acelerômetros e giroscópios, geralmente três de cada, montados em uma base comum (GREWAL; WEILL; ANDREWS, 2001). Combinando-se as informações desses sensores, é possível calcular posição, atitude e velocidade de um corpo por meio de sucessivas integrações numéricas em relação ao tempo, baseadas nas leis da mecânica clássica de Newton (TITTERTON; WESTON, 2004). O INS é um sistema totalmente autocontido, isto é, não depende da recepção de sinais de fontes externas (TITTERTON; WESTON, 2004), como é o caso do GPS. Além disso, a IMU pode fornecer altas frequências de amostragem, o que permite o INS ter elevadas taxas de atualização (FAKHARIAN; GUSTAFSSON; MEHRFAM, 2011). Por outro lado, o INS depende do conhecimento preciso da posição inicial do corpo, a partir da qual as medições inerciais são usadas para se obter estimativas dos estados de navegação (TITTERTON; WESTON, 2004). Caso tal informação não seja conhecida precisamente, o erro de estimativa pode divergir devido a erros na integração.

É possível perceber que o INS e o GPS são complementares. No curto prazo, o INS gera erros de estimativa pequenos. Já o GPS pode apresentar erros elevados, devido a interferências nos sinais dos satélites. Em contrapartida, a longo prazo, as estimativas realizadas com base no INS podem divergir em relação aos estados reais. Esse fenômeno não ocorre no GPS (GREWAL; WEILL; ANDREWS, 2001). Portanto, a integração desses dois sistemas de navegação foi e é amplamente explorada na literatura. Tipicamente tal integração é realizada com base em um filtro de Kalman, como é feito em Shin e El-Sheimy (2002), Honghui Qi e Moore (2002) e Romaniuk e Gosiewski (2014). Esse filtro se aproveita das características complementares do INS e do GPS e, por meio de informações estatísticas sobre os erros de ambos os sistemas, fornece uma implementação integrada com desempenho superior ao dos sistemas separados (GREWAL; WEILL; ANDREWS, 2001).

Em particular, em Romaniuk e Gosiewski (2014) também é feita a integração GPS/INS. Naquele trabalho emprega-se uma combinação de dois filtros de Kalman. O primeiro filtro é utilizado para estimar a atitude do corpo com base nos dados provenientes de uma IMU e um magnetômetro. Essa atitude é, então, empregada para transformar a aceleração medida pelo acelerômetro para o referencial de navegação. Por fim, essa informação e os dados do GPS são combinados em um segundo filtro de Kalman para estimativa da posição em relação ao *ECEF frame*. Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo geral a implementação de um sistema de navegação utilizando a integração GPS/INS. Em particular, adotar-se-á a abordagem de Romaniuk e Gosiewski (2014). Assim, tem-se como objetivo específico a implementação de dois filtros de Kalman, uma para estimativa de atitude e outro para estimativa de posição.

O restante do trabalho encontra-se organizado da maneira descrita a seguir. O Capítulo 2 descreve como foi feita a estimativa de atitude. O Capítulo 3 mostra como realizar a estimativa de posição e a implementação completa do filtro desenvolvido. O Capítulo 4 apresenta os resultados obtidos em simulação e na prática, bem como a discussão desses resultados. O Capítulo 5 expõe as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 ESTIMATIVA DE ATITUDE

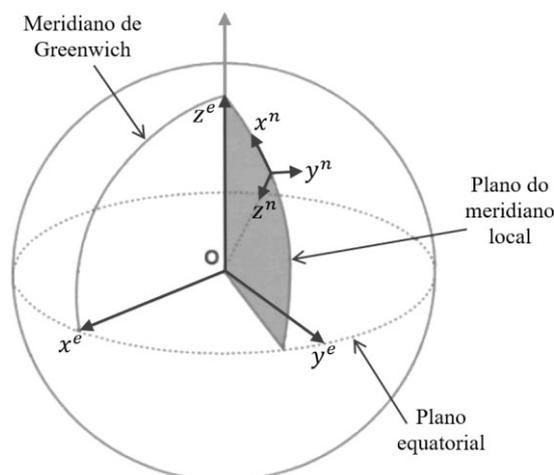
Esse capítulo apresenta o desenvolvimento de um filtro de Kalman que combina informações de acelerômetro, giroscópio e magnetômetro para estimar a atitude. Com esse propósito, primeiramente definir-se-ão referenciais que serão empregados no desenvolvimento do filtro.

### 2.1 Definição de referenciais

O referencial *Earth-centered, Earth-fixed (ECEF frame)* tem a origem no centro da Terra e rotaciona junto com o planeta. Os eixos desse referencial,  $x^e$ ,  $y^e$  e  $z^e$ , são definidos da seguinte maneira:  $z^e$  aponta para o polo norte terrestre,  $x^e$  e  $y^e$  pertencem ao plano equatorial, o primeiro apontando para o meridiano de Greenwich e o segundo para uma longitude de  $90^\circ$  a leste (NIELSEN et al., 2008). A Figura 2 ilustra o referencial ECEF.

O referencial de navegação (*n-frame*), composto pelos eixos  $x^n$ ,  $y^n$  e  $z^n$ , é um referencial geográfico local com a origem na localização do sistema de navegação (TITTERTON; WESTON, 2004). Na convenção *north-east-down (NED)*, o eixo  $x^n$  aponta em direção ao norte geográfico, o eixo  $z^n$  é ortogonal ao elipsoide de referência (superfície definida matematicamente se aproximando do formato da Terra) apontando para baixo e o eixo  $y^n$  completa um sistema de referência dextrogiro (SHIN; EL-SHEIMY, 2002), como é mostrado na Figura 2. Essa convenção é adotada nesse trabalho.

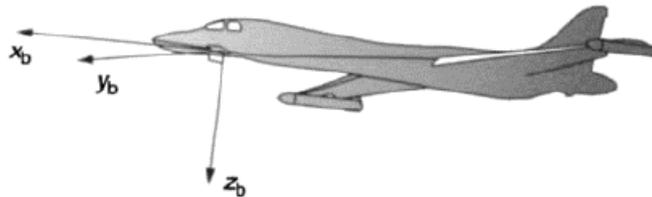
Figura 2 - Referenciais ECEF e de navegação (*ECEF frame* e *n-frame*)



Fonte: Adaptado de Titterton e Weston (2004).

O referencial do corpo (*b-frame*) é um referencial preso ao corpo com a origem coincidente com a do *n-frame*. No entanto, o *b-frame* rotaciona junto com o corpo (NIELSEN et al., 2008). Os eixos desse referencial ( $x^b$ ,  $y^b$ ,  $z^b$ ) são alinhados aos eixos principais do corpo: longitudinal, transversal e vertical (SHIN; EL-SHEIMY, 2002), como mostra a Figura 3.

Figura 3 - Referencial do corpo (*b-frame*)

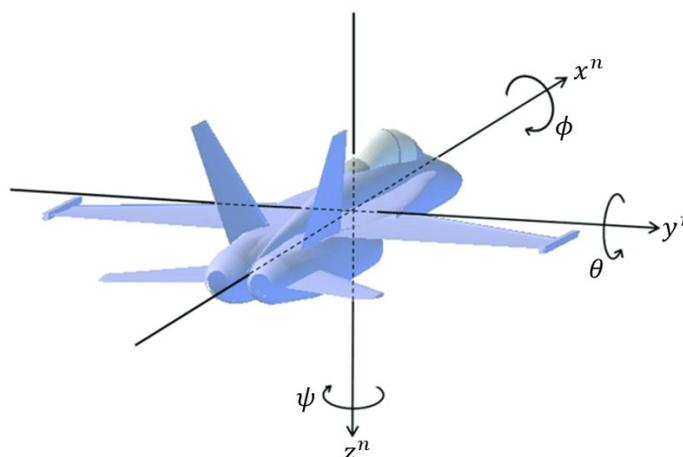


Fonte: Titterton e Weston (2004).

## 2.2 Definição dos ângulos de Euler

Conhecendo-se os referenciais, é possível definir os ângulos de Euler, comumente representados por  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ , como mostrado na Figura 4. Mais precisamente, o ângulo de rolagem ( $\phi$ ) representa uma rotação em torno do eixo  $x^n$ . O ângulo  $\theta$  representa uma rotação em torno de  $y^n$ . Essa rotação é conhecida como arfagem. Por fim, a guinada do corpo é uma rotação em torno do eixo  $z^n$  e é representada pelo ângulo  $\psi$ .

Figura 4 - Ângulos de Euler



Fonte: Adaptado de Civita; Fiori e Romani (2018).

Esses ângulos representam uma combinação de três rotações que move o *n-frame* para o *b-frame*. Então, são utilizados para descrever a atitude de um corpo. Isso equivale a dizer que qualquer atitude pode ser alcançada compondo três rotações elementares, isto é, rotações sobre

o único eixo. Além disso, significa que qualquer rotação pode ser decomposta como um produto de três matrizes de rotação elementares (FLORES, 2015).

Para realizar tal rotação, neste trabalho adota-se a seguinte convenção: primeiro rotacionar um ângulo  $\psi$  em torno do eixo  $z^n$  original, depois rotacionar um ângulo  $\theta$  em torno do novo eixo  $y^n$  e, finalmente, rotacionar um ângulo  $\phi$  em torno do novo eixo  $x^n$ . A matriz de rotação elementar para cada uma dessas operações é dada, respectivamente, por (TITTERTON; WESTON, 2004)

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \cos\psi & \text{sen}\psi & 0 \\ -\text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \text{sen}\phi \\ 0 & -\text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (3)$$

Dessa forma, a transformação do  $n$ -frame para o  $b$ -frame pode ser expressa por

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n^b &= \mathbf{C}_3\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1 \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\text{sen}\psi & -\text{sen}\theta \\ \cos\psi\text{sen}\theta\text{sen}\phi - \cos\phi\text{sen}\psi & \cos\phi\cos\psi + \text{sen}\theta\text{sen}\phi\text{sen}\psi & \cos\theta\text{sen}\phi \\ \cos\phi\cos\psi\text{sen}\theta + \text{sen}\phi\text{sen}\psi & \cos\phi\text{sen}\theta\text{sen}\psi - \cos\psi\text{sen}\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \quad (4) \end{aligned}$$

### 2.3 Filtro de Kalman para estimativa de atitude

O filtro de Kalman tem como finalidade estimar o vetor de estados  $\mathbf{x}$  de um processo discreto que pode ser modelado no espaço de estados por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (5)$$

possuindo um vetor de medição  $\mathbf{z}$  dado por

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k \quad (6)$$

em que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  são matrizes constantes com elementos conhecidos que representam a dinâmica discreta do sistema,  $\mathbf{u}$  é o vetor de entrada do modelo e  $k$  é o índice de tempo discreto (BISHOP; WELCH, 2001). O Apêndice A contém um resumo sobre a implementação do filtro de Kalman. Nesta seção, concentrar-se-á na composição do filtro para estimativa de atitude.

No caso do filtro de Kalman para estimativa de atitude (FKA), o vetor de estados  $\mathbf{x}^a$  é composto pelos ângulos de Euler, isto é,

$$\mathbf{x}^a = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (7)$$

e as matrizes  $\mathbf{A}^a$ ,  $\mathbf{B}^a$  e  $\mathbf{H}^a$  representam uma dinâmica de movimento uniforme com três graus de liberdade, como proposto em Romaniuk e Gosiewski (2014), e são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{A}^a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

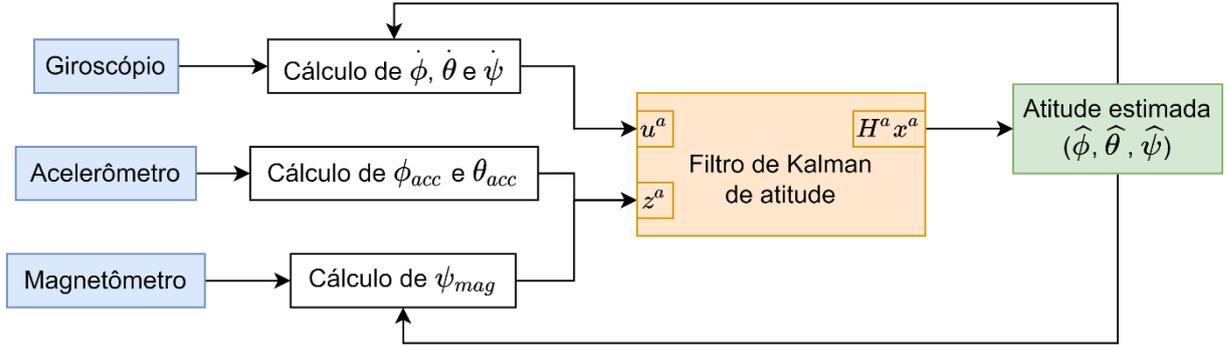
$$\mathbf{B}^a = \begin{bmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{H}^a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

em que  $T$  é o período de amostragem.

Os vetores de entrada  $\mathbf{u}^a$  da equação (5) e de medição  $\mathbf{z}^a$  são calculados a partir dos sensores, como ilustrado no diagrama da Figura 5 e detalhado na sequência. Note que as variáveis estimadas são indicadas com o sobrescrito “^”, como a atitude estimada pelo FKA, apresentada na Figura 5.

Figura 5 - Diagrama do filtro de Kalman para estimativa de atitude (FKA)



Fonte: O autor.

O vetor de entrada  $\mathbf{u}^a$  do FKA é dado pelas taxas de variação dos ângulos de Euler ( $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\psi}$ ). Pode-se calcular essas taxas de variação a partir das leituras do giroscópio do seguinte modo (TITTERTON e WESTON, 2004):

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (11)$$

em que  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  são as velocidades angulares medidas pelo giroscópio. A dependência com o tempo das variáveis foi omitida por claridade.

Substituindo em (11) as matrizes de rotação elementares  $\mathbf{C}_2$  e  $\mathbf{C}_3$ , dadas em (2) e (3), respectivamente, e rearranjando os termos, é possível obter

$$\mathbf{u}^a = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen}\phi \tan\theta & \text{cos}\phi \tan\theta \\ 0 & \text{cos}\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\phi \text{sec}\theta & \text{cos}\phi \text{sec}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

O vetor de medição do FKA é composto pelos ângulos de Euler, isto é,  $\mathbf{z}^a = [\phi_{acc} \ \theta_{acc} \ \psi_{mag}]^T$ , sendo  $\phi_{acc}$  e  $\theta_{acc}$  calculados a partir das medições do acelerômetro, por isso são representados com o subscrito “acc”, e  $\psi_{mag}$  calculado utilizando as informações do magnetômetro (subscrito “mag”).

A saída  $\mathbf{G}_p$  do acelerômetro pode ser representada transformando-se o vetor gravitacional ( $\mathbf{g} = [0 \ 0 \ g]^T$ ) do  $n$ -frame para o  $b$ -frame. Isto é, fazendo-se

$$\mathbf{G}_p = \begin{bmatrix} G_{px} \\ G_{py} \\ G_{pz} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_n^b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (13)$$

Assume-se, portanto, que o corpo não possui aceleração linear em relação ao  $n$ -frame, o que é uma limitação dessa formulação.

Além disso, adota-se a convenção de que a saída do acelerômetro é negada, de forma a se obter um valor de  $+1g$  em qualquer eixo alinhado com o campo gravitacional descendente da Terra (PEDLEY, 2013).

Substituindo (4) em (13) e dividindo ambos os lados por  $\sqrt{G_{px}^2 + G_{py}^2 + G_{pz}^2} = g$ , obtém-se (14) (PEDLEY, 2013).

$$\frac{1}{\sqrt{G_{px}^2 + G_{py}^2 + G_{pz}^2}} \begin{bmatrix} G_{px} \\ G_{py} \\ G_{pz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\theta \\ \text{cos}\theta\text{sen}\phi \\ \text{cos}\theta\text{cos}\phi \end{bmatrix} \quad (14)$$

Finalmente, rearranjando (14), pode-se calcular os ângulos  $\phi_{acc}$  e  $\theta_{acc}$  fazendo-se (PEDLEY, 2013)

$$\tan\phi_{acc} = \frac{G_{py}}{G_{pz}} \quad (15)$$

$$\tan\theta_{acc} = \frac{-G_{px}}{\sqrt{G_{py}^2 + G_{pz}^2}} \quad (16)$$

Note que, caso  $G_{pz} = 0$ , há uma singularidade em (15). Para contornar esse problema, pode-se adicionar um novo termo no denominador. Assim como proposto em Pedley (2013), aqui adota-se

$$\tan\phi_{acc} = \frac{G_{py}}{\text{sign}(G_{pz})\sqrt{\mu G_{px}^2 + G_{pz}^2}} \quad (17)$$

em que a função sinal ( $\text{sign}$ ) é utilizada para manutenção do sinal de  $G_{pz}$  e  $\mu$  é um escalar de baixa magnitude.

Além disso, uma vez que (16) e (17) têm um número infinito de soluções em múltiplos de  $360^\circ$ , adota-se a convenção de restringir as soluções para  $\phi$  e  $\theta$  na faixa de  $-180^\circ$  a  $180^\circ$ . No entanto, para garantir que exista apenas uma solução única, ainda é necessário limitar o ângulo  $\theta$  na faixa de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$ . Dessa forma, (17) é calculada com a função ATAN2 (intervalo de ângulo de saída de  $-180^\circ$  a  $180^\circ$ ) e (16) é calculada com a função ATAN (intervalo de ângulo de saída  $-90^\circ$  a  $90^\circ$ ) (OZYAGCILAR, 2015).

De maneira similar ao acelerômetro, é necessário modelar a saída do magnetômetro, o que pode ser feito transformando-se o vetor campo magnético da Terra ( $\mathbf{B} = B[\cos\delta \ 0 \ \sin\delta]^T$ ) do *n-frame* para o *b-frame*, isto é

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} B_{px} \\ B_{py} \\ B_{pz} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_n^b B \begin{bmatrix} \cos\delta \\ 0 \\ \sin\delta \end{bmatrix} \quad (18)$$

em que  $B$  e  $\delta$  são, respectivamente, a intensidade e o ângulo de inclinação do campo geomagnético. Ambos variam ao longo da superfície da Terra. No entanto, não há necessidade de conhecer esses valores, uma vez que estes se cancelam nos cálculos a seguir (OZYAGCILAR, 2015).

Substituindo (4) em (18) e resolvendo a equação resultante para  $\psi_{mag}$ , obtém-se

$$\tan\psi_{mag} = \frac{B_{pz}\sin\phi - B_{py}\cos\phi}{B_{px}\cos\theta + B_{py}\sin\theta\sin\phi + B_{pz}\sin\theta\cos\phi} \quad (19)$$

Nota-se que essa formulação também leva em conta os ângulos  $\phi$  e  $\theta$ , por isso é chamada de *tilt-compensated* (inclinação compensada) (OZYAGCILAR, 2015).

Assim como (16) e (17), (19) também possui um número infinito de soluções em múltiplos de  $360^\circ$ , logo deve-se limitá-las para  $\psi$  na faixa de  $-180^\circ$  a  $180^\circ$  e utilizar a função ATAN2 para o cálculo desse ângulo (OZYAGCILAR, 2015).

Vale comentar que há um bias inicial na leitura do giroscópio. Isto é, tal sensor apresenta medições diferentes de zero ainda que o sensor se encontre parado. Neste trabalho, estimou-se o bias inicial realizando uma média das medições do giroscópio, para cada um dos eixos, deixando a IMU em repouso sobre uma superfície plana por alguns instantes. Esses valores de bias estimados foram, então, subtraídos das medições do giroscópio.

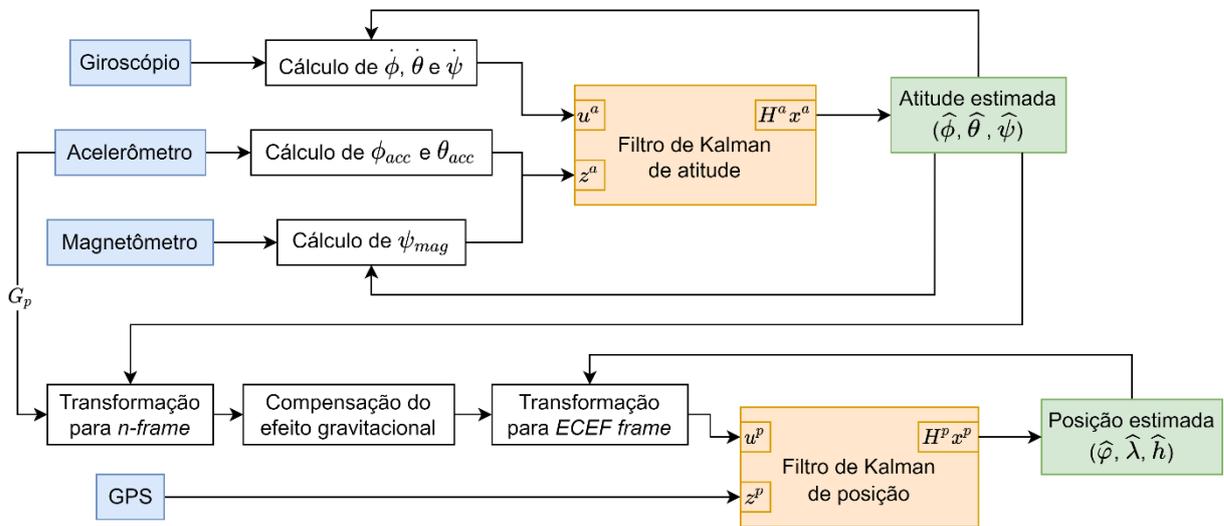
Cabe salientar também que se faz necessário calibrar o magnetômetro antes da utilização. Um procedimento de calibração é detalhado no Apêndice B.

Em resumo, para estimativa de atitude, primeiramente convertem-se as leituras não enviesadas dos giroscópios para taxas de variação dos ângulos de Euler utilizando (12). Então, as informações do acelerômetro são empregadas para calcular os ângulos de arfagem e rolagem por meio de (16) e (17). Mais ainda, o magnetômetro é utilizado para calcular o ângulo de guinada a partir de (19). Todas essas informações são combinadas com o modelo matemático (8) - (10) no FKA para obtenção de uma estimativa de atitude.

### 3 ESTIMATIVA DE POSIÇÃO

O presente capítulo apresenta um filtro de Kalman para estimativa de posição a partir de informações de um GPS e de uma IMU. Como já mencionado, esse filtro requer a informação da atitude do corpo, que pode ser estimada utilizando-se o FKA descrito no capítulo anterior. O diagrama completo, que apresenta o filtro de Kalman para estimativa de posição (FKP) e o FKA, é mostrado na Figura 6.

Figura 6 - Diagrama da combinação entre filtros de Kalman para estimativa de posição



Fonte: O autor.

O vetor de estados  $x^p$  do FKP é composto pela posição do corpo em coordenadas geodésicas, latitude ( $\varphi$ ), longitude ( $\lambda$ ) e altura ( $h$ ), e pela taxa de variação dessa posição, ambas expressas no *ECEF frame*. Isto é,

$$x^p = \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \lambda \\ \dot{\lambda} \\ h \\ \dot{h} \end{bmatrix} \quad (20)$$

O sistema do FKP é modelado como uma dinâmica de movimento uniformemente variado, assim como em Romaniuk e Gosiewski (2014), que é representada pelas matrizes

$$\mathbf{A}^p = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{B}^p = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{H}^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

O vetor de medição  $\mathbf{z}^p$  do FKP, como pode ser visto na Figura 6, é composto diretamente pelas leituras do GPS, isto é,

$$\mathbf{z}^p = \begin{bmatrix} \varphi_{GPS} \\ \lambda_{GPS} \\ h_{GPS} \end{bmatrix} \quad (24)$$

em que  $\varphi_{GPS}$ ,  $\lambda_{GPS}$  e  $h_{GPS}$  são, respectivamente, latitude, longitude e altura dadas pelo GPS no *ECEF frame*.

O vetor de entrada  $\mathbf{u}^p$  do FKP é formado pelas medições do acelerômetro após três de operações. A primeira operação é a transformação da saída do acelerômetro, que é dada no *b-frame*, para o *n-frame*. Para isso é utilizada a matriz  $\mathbf{C}_b^n$ , obtida a partir de  $\mathbf{C}_n^b$ , dada em (4), fazendo-se (TITTERTON; WESTON, 2004)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_b^n &= \mathbf{C}_n^b{}^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\psi\sin\theta + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \cos\psi\sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

em que  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  são os ângulos de Euler estimados utilizando o FKA.

Após a conversão para o  $n$ -frame, adiciona-se, à saída do acelerômetro, o vetor gravitacional  $\mathbf{g}$ , também expresso no  $n$ -frame, com o intuito de se retirar a influência da aceleração gravitacional. Considerando pequenas variações da aceleração gravitacional ao longo do movimento do corpo, estimou-se  $\mathbf{g}$  apenas realizando-se a média das medições do acelerômetro, deixando a IMU parada sobre uma superfície plana por alguns instantes.

A última operação é a transformação da aceleração do  $n$ -frame para o  $ECEF$  frame. Como resultado, a saída do modelo do FKP é dada em coordenadas geodésicas. Isso pode ser feito por meio de

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_N + h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sec\varphi}{R_E + h} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

em que a altura  $h$  e a latitude  $\varphi$  utilizadas são as estimadas no instante de amostragem anterior. Os parâmetros  $R_N$  e  $R_E$  são, respectivamente, os raios de curvatura da Terra meridional e transversal de acordo com o elipsoide de referência modelado pelo WGS 84 (NIELSEN et al., 2008). Esses parâmetros são dados por

$$R_N = \frac{R(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (27)$$

$$R_E = \frac{R}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (28)$$

em que  $e$  e  $R$  são a excentricidade e o tamanho do semieixo maior do elipsoide de referência, respectivamente, e possuem os seguintes valores (NIELSEN et al., 2008):

$$e = 0,0818191908426 \quad (29)$$

$$R = 6.378.137 \text{ m} \quad (30)$$

Vale comentar que foi aplicado um filtro passa-baixas às medições do acelerômetro antes de serem utilizadas no FKP, uma vez que as medidas desse sensor são bastante ruidosas. A frequência de corte desse filtro foi determinada a partir da inspeção do espectro de frequência do sinal, obtido por meio da aplicação da transformada de Fourier. Dessa forma, procurou-se

remover das medições do acelerômetro frequências mais elevadas que não correspondessem à frequência do movimento realizada na prática. A análise de frequência realizada é apresentada no Apêndice C.

Outro ponto importante é que a frequência de amostragem das medições do acelerômetro, que compõem o vetor de entrada  $\mathbf{u}^p$ , é maior que das leituras do GPS, que compõem o vetor de medição  $\mathbf{z}^p$ . Nos instantes de tempo em que apenas o vetor  $\mathbf{u}^p$  é atualizado, a fase de predição do filtro de Kalman é realizada. Logo, a fase de correção, que depende do vetor  $\mathbf{z}^p$ , é omitida. Novamente, um detalhamento sobre o filtro de Kalman é apresentado no Apêndice A.

Sintetizando, para estimar a posição, retira-se o efeito gravitacional das leituras do acelerômetro, após serem convertidas para o referencial de navegação usando (25). Em seguida, transformam-se esses dados para o mesmo referencial da saída do GPS por meio de (26). Finalmente, as informações desses dois sensores são combinadas com o modelo matemático (21) - (23) no FKP para obtenção de uma estimativa de posição.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

No presente capítulo, apresentam-se resultados de testes realizados com os filtros descritos anteriormente. Ambos os filtros foram implementados em ambiente de simulação e em dados experimentais.

Para a realização do teste com dados simulados utilizou-se a biblioteca *GNSS-INS-SIM* (<https://github.com/Aceinna/gnss-ins-sim>), escrita em linguagem de programação *Python*. Essa biblioteca simula as leituras dos sensores giroscópio, acelerômetro, magnetômetro e GPS fixados a um corpo enquanto este se movimenta por uma trajetória determinada. A *GNSS-INS-SIM* também permite definir imprecisões de medição como ruído e bias. O movimento que o corpo realiza durante a simulação é definido pelo usuário criando-se um arquivo contendo o perfil de movimento. Nesse arquivo é necessário especificar o estado inicial do corpo (atitude e posição), além de entradas de aceleração e atitude que o impulsionam a se mover. Além disso, a biblioteca gera a atitude e a posição reais do corpo ao longo do movimento simulado. Essas informações podem ser utilizadas para avaliar a precisão do sistema de navegação. (ACEINNA, 2019).

Já os dados experimentais foram obtidos a partir de uma trajetória de referência realizada no Campus Santa Mônica da Universidade Federal de Uberlândia. Mais precisamente, mediram-se as coordenadas geodésicas de quatro pontos (*PT01*, *PT02*, *PT03* e *PT04*) em tal campus com um receptor GPS Ashtech Promark 2, considerado de alta precisão. A trajetória foi, então, definida considerando esses pontos como vértices de um quadrilátero (vide Figura 7). O relatório gerado pelo GPS de precisão pode ser encontrado no Anexo A.

Figura 7 - Pontos utilizados para definição da trajetória de referência



Fonte: Google Maps.

Como pode-se ver na Figura 7, ao percorrer a trajetória de referência, passa-se por baixo de árvores do  $PT01$  ao  $PT02$  e por um trecho coberto pelo telhado de um bloco do  $PT03$  ao  $PT04$ . Esses obstáculos podem influenciar o sinal do GPS utilizado nos testes e, consequentemente, a precisão da medida de posição.

Nos testes, inicializou-se o vetor de estados  $x^a$  do FKA da seguinte forma:

$$x_0^a = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^\circ \\ 0^\circ \\ 75^\circ \end{bmatrix} \quad (31)$$

Os ângulos  $\theta_0$  e  $\phi_0$  foram determinados a partir das medições do acelerômetro aplicadas em (16) e (17), respectivamente, com o sensor em uma superfície plana. Já o ângulo  $\psi_0$  foi calculado a partir das informações do magnetômetro em (19), com o sensor posicionado em  $PT01$  e apontado para o ponto  $PT02$ . Esse ângulo é indicado na Figura 7.

Além disso ajustaram-se as matrizes covariância do ruído de processo  $Q^a$  e do ruído de saída  $R^a$  do filtro FKA, respectivamente, com

$$Q^a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{R}^a = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Os valores de  $\mathbf{R}^a$  foram ajustados de modo a reduzir o efeito do ruído de medida do acelerômetro e do magnetômetro. Em particular, o valor associado com o estado  $\theta$  foi mais elevado a fim de compensar o erro causado pelas acelerações lineares que surgem durante o movimento do corpo. Isso será detalhado mais adiante.

No caso do FKP, inicializou-se o vetor de estados  $\mathbf{x}^p$  do seguinte modo:

$$\mathbf{x}_0^p = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \dot{\varphi}_0 \\ \lambda_0 \\ \dot{\lambda}_0 \\ h_0 \\ \dot{h}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18,918986^\circ \\ 0^\circ/s \\ -48,256146^\circ \\ 0^\circ/s \\ 862,148 \text{ m} \\ 0 \text{ m/s} \end{bmatrix} \quad (34)$$

A posição inicial  $(\varphi_0, \lambda_0, h_0)$  foi inicializada com as coordenadas geodésicas do *PT01* e a velocidade inicial  $(\dot{\varphi}_0, \dot{\lambda}_0, \dot{h}_0)$  com valores nulos, uma vez que o movimento do corpo parte do repouso.

As matrizes  $\mathbf{Q}^p$  e  $\mathbf{R}^p$  do filtro FKP foram ajustadas de forma similar às do FKA. Isto é, manteve-se  $\mathbf{Q}^p$  como uma matriz identidade e aumentaram-se os valores da diagonal da matriz  $\mathbf{R}^p$  até a obtenção de uma estimativa adequada.

$$\mathbf{Q}^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{R}^p = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 0 \\ 0 & 0 & 250 \end{bmatrix} \quad (36)$$

#### 4.1 Resultados de simulação

Realizou-se uma simulação de um veículo se movimentando pela trajetória de referência, utilizando a biblioteca *GNSS-INS-SIM*. Uma vez que sensores de baixo custo foram

utilizados no teste com dados reais, em simulação configurou-se um modelo de ruído de baixa acurácia predefinido para simular os erros dos sensores. Já na configuração de movimento da simulação, a posição e a atitude iniciais foram definidas como sendo iguais a (31) e (34), respectivamente. Além disso, especificaram-se os comandos de movimento necessários para percorrer a trajetória mostrada na Figura 7. Esses comandos são acelerações lineares e atitudes impostas ao veículo. Para deslocar o corpo, que inicialmente encontrava-se posicionado em *PT01*, na direção do *PT02*, aplicou-se uma determinada aceleração linear durante alguns segundos. Em seguida, para que o veículo chegasse em *PT02* com uma velocidade nula, impôs-se uma aceleração com sinal oposto a anterior. Finalmente, rotacionou-se o veículo em direção ao *PT03*, configurando-se um ângulo de guinada adequado. A mesma metodologia foi adotada para os trechos seguintes da trajetória.

Aplicaram-se, então, as leituras dos sensores geradas pela simulação aos filtros desenvolvidos (FKA e FKP). A atitude real ( $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ), também gerada pela simulação, foi comparada às atitudes medida ( $\phi_{acc}$ ,  $\theta_{acc}$ ,  $\psi_{mag}$ ) e estimada pelo FKA ( $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{\psi}$ ). Da mesma forma, comparou-se a posição real ( $\varphi$  e  $\lambda$ ) às posições medida ( $\varphi_{GPS}$  e  $\lambda_{GPS}$ ) e estimada pelo FKP ( $\hat{\varphi}$  e  $\hat{\lambda}$ ). As Figuras 8 até 11 mostram essas comparações. Em todos os casos, vê-se que o emprego do filtro possibilitou a suavização de variações causadas pelo ruído de medida.

Figura 8 - Ângulo de rolagem estimado pelo FKA ( $\hat{\phi}$ ) a partir de dados simulados. Também são mostrados os dados reais ( $\phi$ ) e medidos ( $\phi_{acc}$ ).

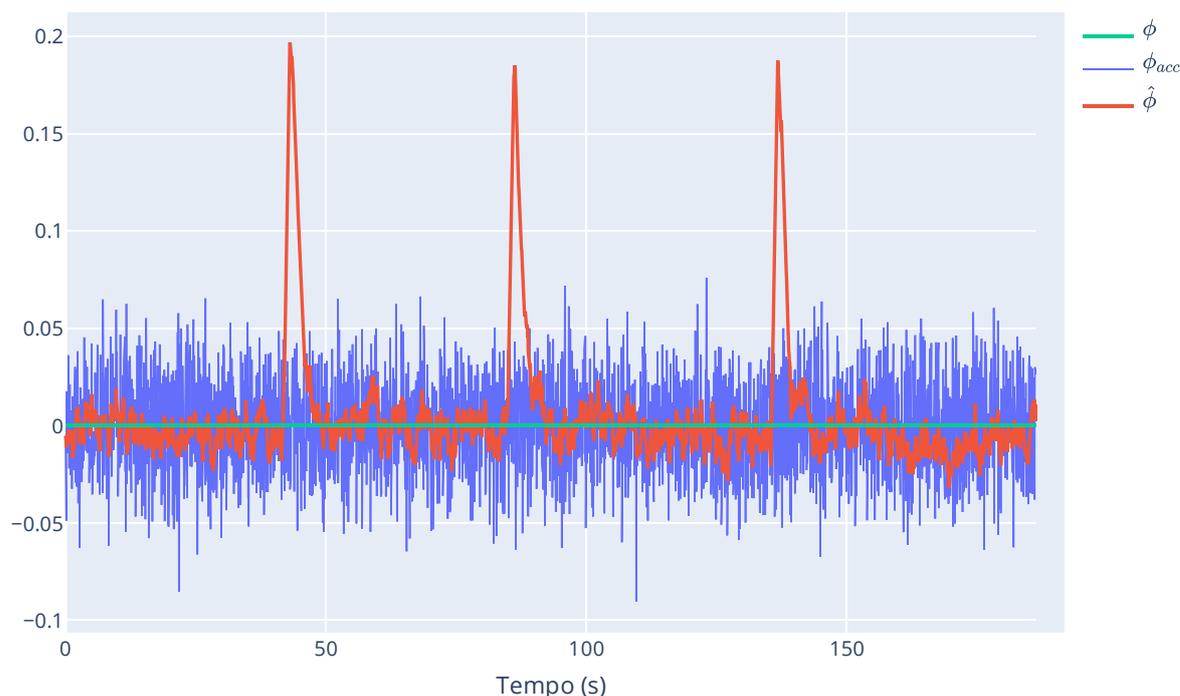
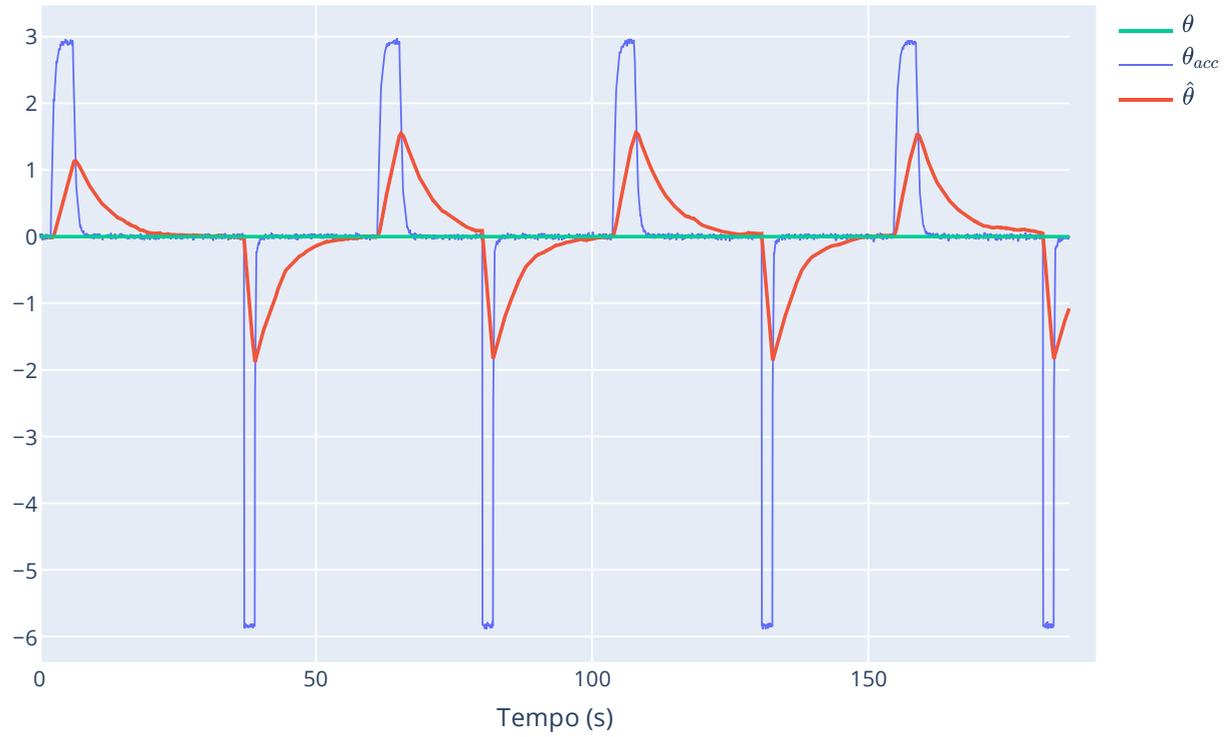
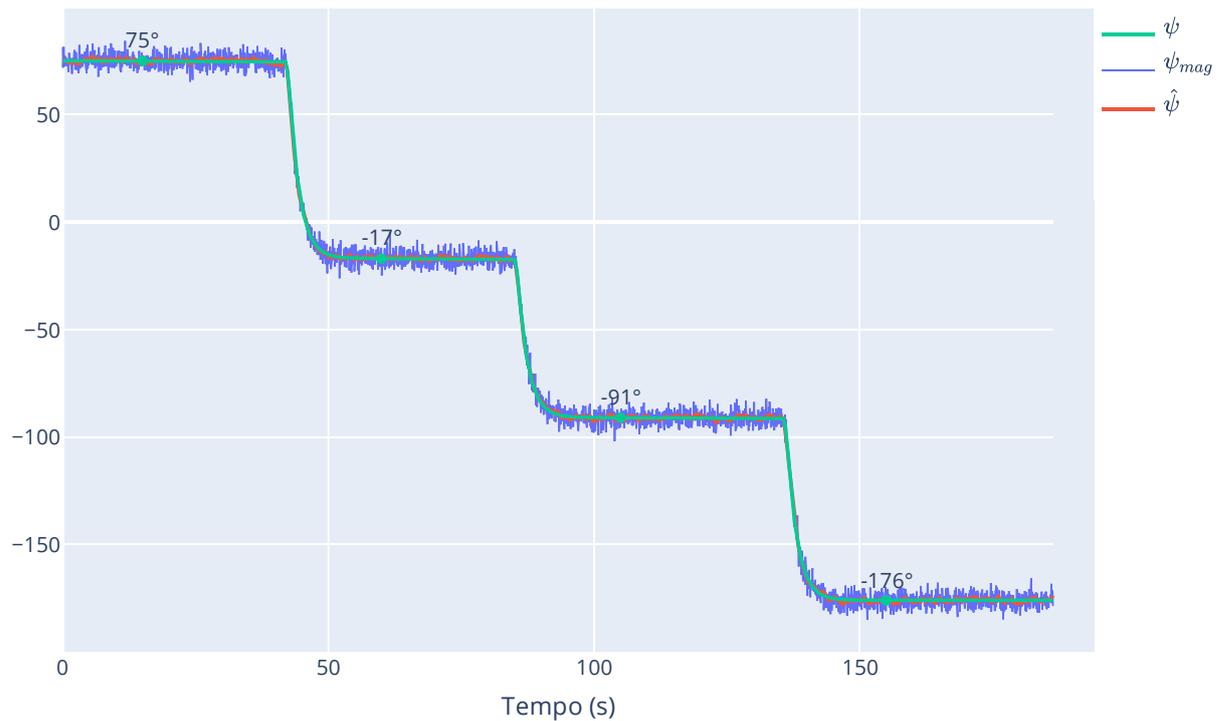


Figura 9 - Ângulo de arfagem estimado pelo FKA ( $\hat{\theta}$ ) a partir de dados simulados. Também são mostrados os dados reais ( $\theta$ ) e medidos ( $\theta_{acc}$ ).



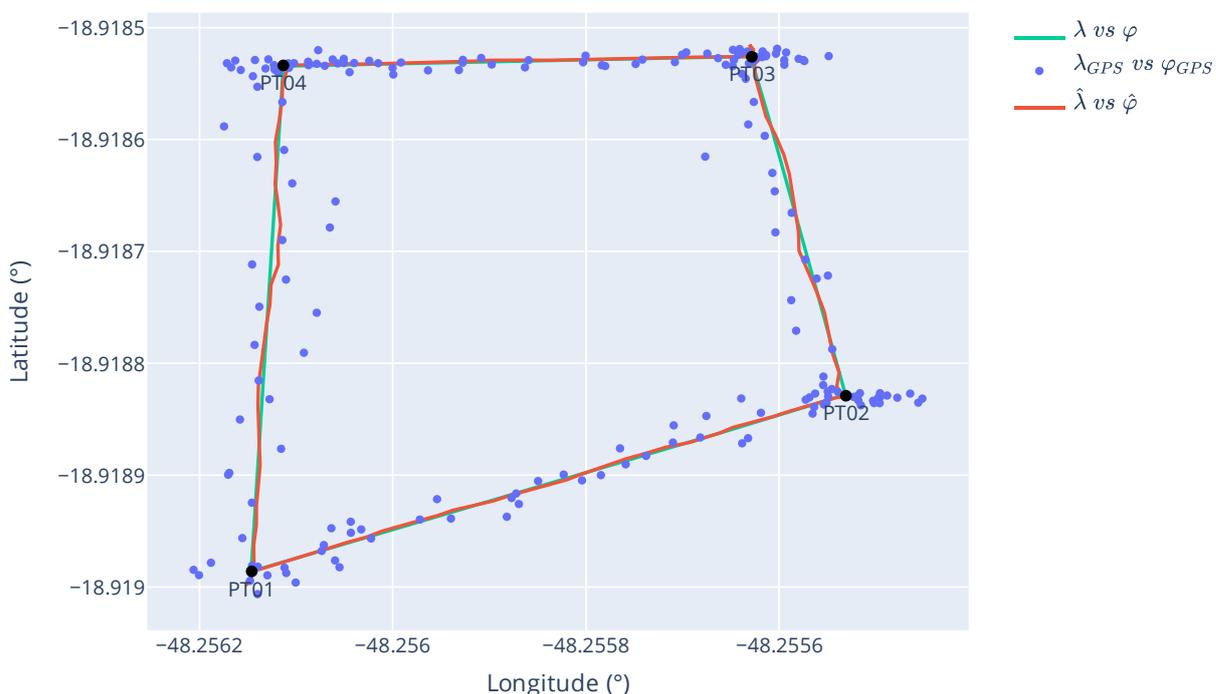
Fonte: O autor.

Figura 10 - Ângulo de guinada estimado pelo FKA ( $\hat{\psi}$ ) a partir de dados simulados. Também são mostrados os dados reais ( $\psi$ ) e medidos ( $\psi_{mag}$ ).



Fonte: O autor.

Figura 11 - Posição estimada pelo FKP ( $\hat{\lambda}$  vs  $\hat{\varphi}$ ) a partir de dados simulados. Também são mostrados os dados reais ( $\lambda$  vs  $\varphi$ ) e medidos ( $\lambda_{GPS}$  vs  $\varphi_{GPS}$ ).



Fonte: O autor.

Nas Figuras 8 e 9 nota-se que  $\phi$  e  $\theta$  são nulos durante todo o movimento, o que era esperado, uma vez que a simulação é desenvolvida considerando que os sensores são mantidos alinhados ao longo de todo o movimento.

O ângulo  $\hat{\phi}$ , mostrado na Figura 8, apresentou picos de pequena amplitude ( $< 0,2^\circ$ ) em alguns trechos. Isso ocorre devido aos ruídos presentes nas leituras do giroscópio. Essas leituras, após serem transformadas em taxas de variação dos ângulos de Euler por meio de (12), são utilizadas no vetor de entrada  $\mathbf{u}^a$ , gerando esses pequenos desvios na saída estimada pelo FKA.

Na Figura 9, o ângulo  $\theta_{acc}$  se desviou do valor real nos instantes em que se impôs acelerações lineares ao corpo simulado. Isso ocorre porque, na formulação do vetor de medição  $\mathbf{z}^a$ , assume-se que a única aceleração presente no sistema é a aceleração gravitacional. Conseqüentemente, as acelerações lineares do movimento geram erros nos valores medidos. Aqui justifica-se o valor mais elevado associado ao estado  $\theta$  da matriz  $\mathbf{R}^a$ . Isso é feito de forma a se obter um ângulo  $\hat{\theta}$  menos susceptível a esse erro relacionado às acelerações lineares, como pode ser visto também na Figura 9.

Nota-se que, com o ajuste realizado na matriz  $\mathbf{R}^p$ , obteve-se visualmente uma posição estimada mais precisa que a medida pelo GPS, como mostra a Figura 11. Além disso, fez-se uma análise quantitativa dos dados obtidos em simulação. Para isso, calculou-se o erro médio

( $\varepsilon_{m\u00e9dio}$ ) entre os valores de atitude e posi\u00e7\u00e3o medidos e estimados pelos filtros em rela\u00e7\u00e3o aos valores reais. Tamb\u00e9m se determinou a vari\u00e2ncia ( $\sigma^2$ ) do erro m\u00e9dio. Esses resultados est\u00e3o organizados nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1 - Erro m\u00e9dio e vari\u00e2ncia do erro das atitudes medida e estimada

	Dados medidos			Dados estimados pelo FKA		
	$\phi_{acc}$ ( $^\circ$ )	$\theta_{acc}$ ( $^\circ$ )	$\psi_{mag}$ ( $^\circ$ )	$\hat{\phi}$ ( $^\circ$ )	$\hat{\theta}$ ( $^\circ$ )	$\hat{\psi}$ ( $^\circ$ )
$\varepsilon_{m\u00e9dio}$	0,017836	0,514760	2,404905	0,013987	0,434744	0,597876
$\sigma^2$	0,000781	1,815665	3,220249	0,000181	0,236892	0,226817

Tabela 2 - Erro m\u00e9dio e vari\u00e2ncia do erro das posi\u00e7\u00f5es medida e estimada

	Dados medidos		Dados estimados pelo FKP	
	$\lambda_{GPS}$ ( $^\circ$ )	$\varphi_{GPS}$ ( $^\circ$ )	$\hat{\lambda}$ ( $^\circ$ )	$\hat{\varphi}$ ( $^\circ$ )
$\varepsilon_{m\u00e9dio}$	0,000018	0,000051	0,000004	0,000009
$\sigma^2$	4,823782e-11	4,860154e-10	9,338474e-12	6,449811e-11

Ao observar os resultados obtidos, v\u00ea-se que o  $\varepsilon_{m\u00e9dio}$  dos valores estimados pelos filtros \u00e9 menor que o dos valores medidos, o que indica uma maior acur\u00e1cia dos dados estimados. Da mesma forma, o  $\sigma^2$  dos valores estimados tamb\u00e9m \u00e9 menor, indicando um aumento da precis\u00e3o da estimativa em rela\u00e7\u00e3o \u00e0 medi\u00e7\u00e3o. Esses resultados justificam, ent\u00e3o, a aplica\u00e7\u00e3o dos filtros.

Portanto, o teste com os dados simulados permite concluir que as formula\u00e7\u00f5es desenvolvidas para o FKA e FKP est\u00e3o adequadas e permitem estimar a atitude e a posi\u00e7\u00e3o de um ve\u00edculo, respectivamente.

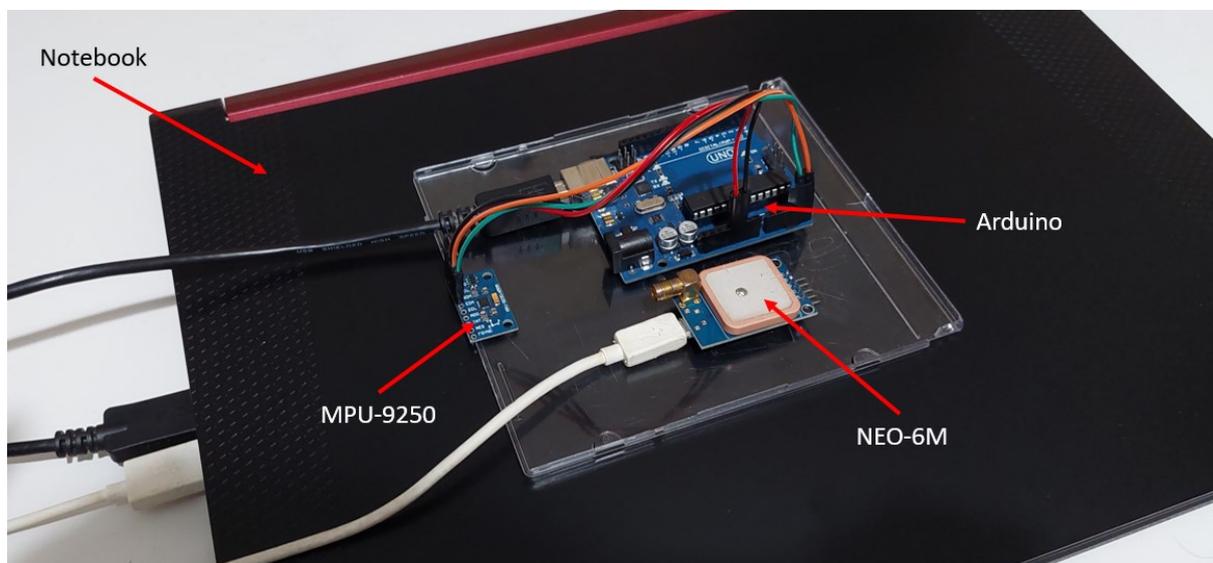
## 4.2 Resultados experimentais

Para a realiza\u00e7\u00e3o do teste com dados reais utilizou-se o m\u00f3dulo MPU-9250. Esse m\u00f3dulo combina um MPU-6500, que consiste em um girosc\u00f3pio de tr\u00eas eixos e um aceler\u00f4metro de tr\u00eas eixos, e um AK8963, que \u00e9 um magnet\u00f4metro de tr\u00eas eixos (INVENSENSE, 2016). A frequ\u00eancia de amostragem usada foi de 20 Hz. Utilizou-se tamb\u00e9m o m\u00f3dulo de GPS NEO-6M da fabricante u-blox (U-BLOX, 2011), configurado com uma frequ\u00eancia de amostragem de 1 Hz.

Fixaram-se esses sensores a uma superf\u00edcie plana e esta, por sua vez, foi fixada na tampa de um *notebook*, respons\u00e1vel por coletar os dados dos sensores. Os m\u00f3dulos foram conectados

ao *notebook*, em particular o MPU-9250 não possui porta para conectar-se diretamente ao computador, por isso foi utilizado um Arduino Uno, como mostra a Figura 12.

Figura 12 - Montagem dos sensores para coleta dos dados



Fonte: O autor.

Os dados foram coletados levando-se o conjunto mostrado na Figura 12 ao longo da trajetória entre os pontos  $PT01$ ,  $PT02$ ,  $PT03$  e  $PT04$  mostrados na Figura 7. Iniciou-se o percurso no ponto  $PT01$  em direção ao ponto  $PT02$  e com o eixo  $x^b$  do MPU-9250 apontando para o  $PT02$ . Buscou-se caminhar em linha reta entre esses pontos.

O resultado obtido com os filtros FKA e FKP com os dados reais dos sensores é apresentado nas Figuras 13 e 14. A primeira mostra a atitude estimada pelo FKA e a segunda as seguintes posições: estimada pelo FKP ( $\hat{\varphi}$  e  $\hat{\lambda}$ ), medida pelo GPS ( $\varphi_{GPS}$  e  $\lambda_{GPS}$ ) e obtida interpolando linearmente os pontos dados pelo GPS de precisão ( $\varphi_{ref}$  e  $\lambda_{ref}$ ).

Figura 13 - Atitude estimada pelo FKA a partir de dados reais

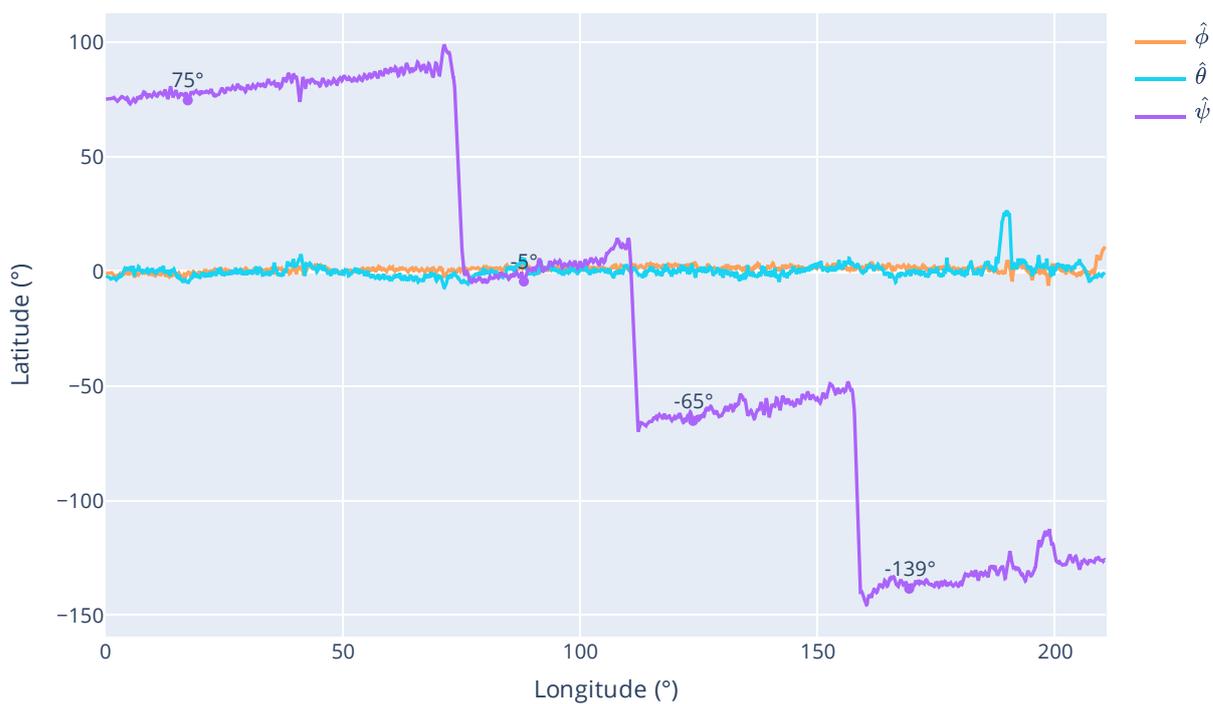
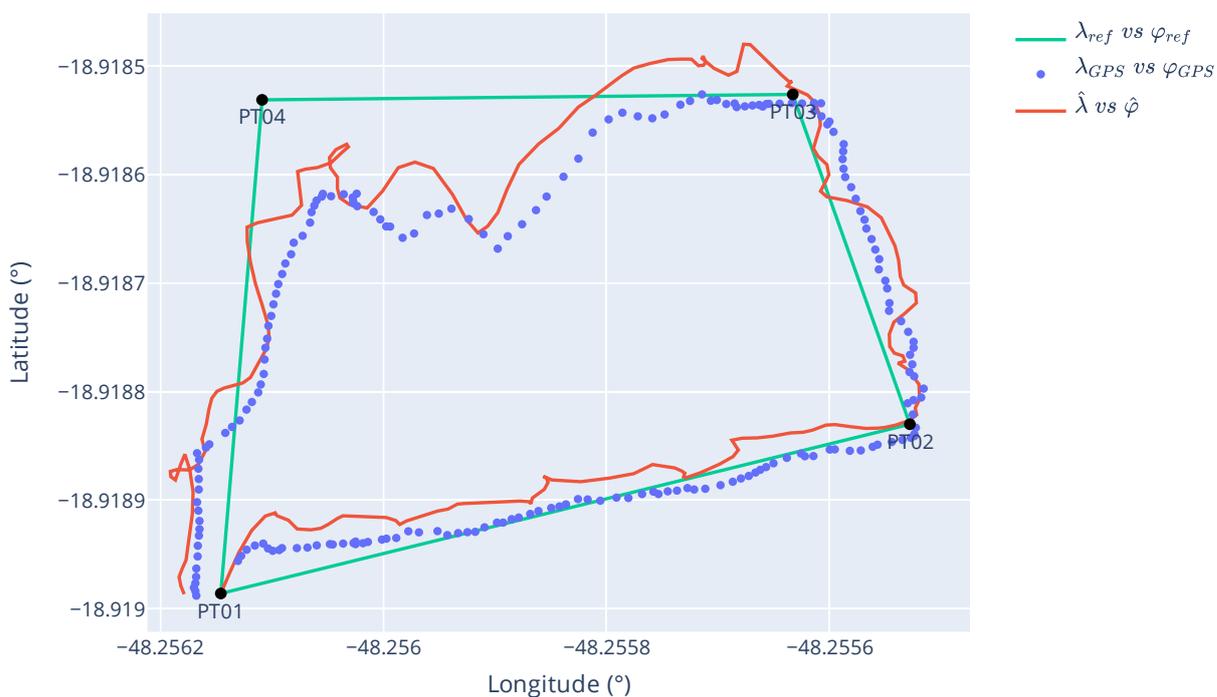


Figura 14 - Posição estimada pelo FKP a partir de dados reais



Fonte: O autor.

Na Figura 13 vê-se que os ângulos estimados pelo FKA estão coerentes com os vistos em simulação. Os ângulos  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\theta}$  ficaram próximo de  $0^\circ$  e o ângulo  $\hat{\psi}$  variou em degraus ao longo do tempo. No entanto, é possível perceber que a atitude estimada ainda é bastante ruidosa.

Na Figura 14 é possível verificar que a posição medida pelo GPS se distanciou da posição de referência, principalmente na parte superior da trajetória. Possivelmente, isso ocorreu devido a esse trecho ser coberto, como citado anteriormente, o que interfere na recepção do sinal do GPS. Nessa mesma figura, nota-se que a posição estimada pelo FKP visualmente não teve um desempenho melhor que a posição medida pelo GPS. Esse fato pode ser explicado primeiramente pelos ruídos na estimativa da atitude, o que compromete a transformação da medição de aceleração para o *n-frame*. Além disso, a própria medição do acelerômetro é muito ruidosa, uma vez que se trata de um sensor de baixo custo. Como explicado anteriormente, a leitura do acelerômetro, após algumas transformações, compõe o vetor de entrada  $\mathbf{u}^p$ . Dessa forma, a medição ruidosa desse sensor prejudica a fase de predição do FKP e faz com que esse filtro não tenha um desempenho tão bom, no que tange à aproximação da posição estimada da posição de referência.

Como principal ponto positivo, o emprego da combinação GPS e INS permitiu obter a informação de posição com uma frequência maior do que utilizando-se apenas o GPS. Cabe lembrar que, enquanto o GPS é atualizado a uma frequência de amostragem de 1 Hz, a IMU fornece informações a 20 Hz.

## 5 CONCLUSÕES

Este trabalho envolveu o desenvolvimento de um sistema de navegação utilizando a integração GPS/INS. Sistemas de navegação integrados buscam produzir um sistema que forneça maior precisão do que qualquer um deles operando isoladamente. Isso é feito aproveitando-se as características complementares de sistemas diferentes. Para realizar a integração, escolheu-se o uso do filtro de Kalman e, em particular, adotou-se a abordagem de Romaniuk e Gosiewski (2014). Nessa abordagem, são empregados dois filtros de Kalman, um para estimativa de atitude e outro para estimativa de posição.

As entradas do filtro de Kalman para estimativa de atitude são os ângulos de Euler, calculados a partir das medições do acelerômetro e do magnetômetro, e as taxas de variação dos ângulos de Euler obtidas das leituras do giroscópio. O filtro de Kalman para estimativa de posição tem como entradas a medição do GPS e a saída do acelerômetro, após algumas transformações. Uma dessas transformações é a conversão das acelerações para o referencial de navegação, utilizando a estimativa de atitude do primeiro filtro.

Realizaram-se testes com dados simulados e reais. Em ambos se utilizou uma trajetória de referência, gerada a partir da medição das coordenadas geodésicas de quatro pontos com um GPS de precisão. No teste com dados simulados, foi possível validar as formulações desenvolvidas para os filtros de Kalman. No entanto, no teste com dados reais a estimativa de posição do sistema integrado GPS/INS não apresentou uma precisão maior que a medição do GPS isoladamente. Esse resultado é atribuído à saída ruidosa do acelerômetro empregado, alinhado ao fato de que no modelo dinâmico do filtro de Kalman para estimativa de posição é feita uma dupla integração dessa medição ruidosa. Essas integrações fazem os erros do sensor se acumularem rapidamente, prejudicando a estimativa desse filtro.

Trabalhos futuros podem investigar outras abordagens para a integração GPS/INS utilizando o filtro de Kalman, a fim de se evitar que o efeito da integração da aceleração ruidosa no modelo do filtro prejudique a estimativa realizada. Em Shin e El-Sheimy (2002), por exemplo, o modelo do filtro de Kalman desenvolvido é baseado nas equações dinâmicas dos erros de posição, velocidade e atitude do sistema por meio de uma análise de perturbação. Os erros estimados realimentam, então, as equações dinâmicas do INS.

## 6 REFERÊNCIAS

- ACEINNA. **GNSS-INS-SIM**, 2019. Disponível em: <<https://github.com/Aceinna/gnss-ins-sim>>. Acesso em: 14 mar. 2022.
- BISHOP, G.; WELCH, G. An introduction to the kalman filter. **SIGGRAPH, Course**, v. 8, n. 27599–23175, p. 41, 2001.
- CIVITA, A.; FIORI, S.; ROMANI, G. A Mobile Acquisition System and a Method for Hips Sway Fluency Assessment. **Information**, v. 9, n. 12, p. 321, 12 dez. 2018.
- DRAKE, S. Converting GPS coordinates  $[\phi, \lambda, h]$  to navigation coordinates (ENU). **DSTO Electronics and Surveillance Research Laboratory**, v. 1, n. DSTO-TN-0432, 1 abr. 2002.
- FAKHARIAN, A.; GUSTAFSSON, T.; MEHRFAM, M. **Adaptive Kalman filtering based navigation: An IMU/GPS integration approach**. 2011 International Conference on Networking, Sensing and Control. **Anais...IEEE**, abr. 2011.
- FLORES, P. Euler Angles, Bryant Angles and Euler Parameters. In: **Concepts and Formulations for Spatial Multibody Dynamics**. 1. ed. Cham: Springer, 2015. p. 15–22.
- GREWAL, M. S.; WEILL, L. R.; ANDREWS, A. P. **Global positioning systems, inertial navigation, and integration**. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- HONGHUI QI; MOORE, J. B. Direct Kalman filtering approach for GPS/INS integration. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, v. 38, n. 2, p. 687–693, abr. 2002.
- INVENSENSE. **MPU-9250 Product Specification Revision 1.1**. Disponível em: <<https://invensense.tdk.com/wp-content/uploads/2015/02/PS-MPU-9250A-01-v1.1.pdf>>. Acesso em: 12 fev. 2022.
- LAMMAS, A.; SAMMUT, K.; HE, F. 6-DoF Navigation Systems for Autonomous Underwater Vehicles. In: **Mobile Robots Navigation**. 1. ed. London: IntechOpen, 2010.
- MARQUES FILHO, E. A. **Navegação através de um sistema integrado GPS-INS baseado em IMU não-giroscópica**. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2005.
- MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS: descrição, fundamentos e aplicações**. 1. ed. São Paulo: UNESP, 2000.

NIELSEN, M. B.; RAQUET, J. F.; VETH, M.; PACHTER, M. **Development and flight test of a robust optical-inertial navigation system using low-cost sensors**. 21st International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2008). **Anais...**2008.

OZYAGCILAR, T. Implementing a tilt-compensated eCompass using accelerometer and magnetometer sensors. **Freescale semiconductor, application note**, nov. 2015.

PEDLEY, M. Tilt sensing using a three-axis accelerometer. **Freescale semiconductor, application note**, mar. 2013.

PISSARDINI, R. S.; DE OLIVEIRA, R. H.; VAZ, J. A.; ALMEIDA FILHO, F. G. V.; FONSECA JUNIOR, E. S. O problema do posicionamento para transporte terrestre no ambiente urbano. **Revista Brasileira de Geomática**, v. 5, n. 3, p. 380, 4 ago. 2017.

ROMANIUK, S.; GOSIEWSKI, Z. Kalman Filter Realization for Orientation and Position Estimation on Dedicated Processor. **Acta Mechanica et Automatica**, v. 8, n. 2, p. 88–94, 15 ago. 2014.

SHIN, E.-H.; EL-SHEIMY, N. **Accuracy improvement of low cost INS/GPS for land applications**. Proceedings of the 2002 National Technical Meeting of The Institute of Navigation. **Anais...**San Diego: Institute of Navigation (ION), jan. 2002.

TITTERTON, D.; WESTON, J. **Strapdown Inertial Navigation Technology**. 2. ed. Stevenage, Reston: Institution of Engineering and Technology, 2004.

U-BLOX. **NEO-6 u-blox 6 GPS Modules Data Sheet**. Disponível em: <[https://www.u-blox.com/sites/default/files/products/documents/NEO-6\\_DataSheet\\_\(GPS.G6-HW-09005\).pdf](https://www.u-blox.com/sites/default/files/products/documents/NEO-6_DataSheet_(GPS.G6-HW-09005).pdf)>. Acesso em: 20 mar. 2022.

VECTORNAV. **Magnetometer Hard & Soft Iron Calibration**. Disponível em: <<https://www.vectornav.com/resources/inertial-navigation-primer/specifications--and--error-budgets/specs-hsicalibration>>. Acesso em: 23 mar. 2022.

## APÊNDICE A – FILTRO DE KALMAN

Esse apêndice dá uma visão geral das equações e do funcionamento do filtro de Kalman, conforme Bishop e Welch (2001). O filtro de Kalman aborda o problema geral de estimar o estado  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  de um processo controlado a tempo discreto, que é descrito por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (37)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (38)$$

em que a matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  relaciona o estado no instante de amostragem  $k$  com o estado em  $k + 1$ , na ausência de um ruído de processo. A matriz  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times l}$  relaciona a entrada de controle  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^l$  ao estado  $\mathbf{x}$ . A matriz  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  relaciona o estado  $\mathbf{x}$  com a medição  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ . As variáveis aleatórias  $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m$  representam o ruído de processo e de medição, respectivamente, que são considerados não correlacionados, brancos e com distribuições de probabilidade normais, dadas por  $p(\mathbf{w}) \sim N(0, \mathbf{Q})$  e  $p(\mathbf{v}) \sim N(0, \mathbf{R})$ .

Define-se  $\hat{\mathbf{x}}_k^- \in \mathbb{R}^n$  como a estimativa de estado *a priori* no passo  $k$  dado o conhecimento do processo antes da etapa  $k$  e  $\hat{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^n$  como a estimativa de estado *a posteriori* no passo  $k$  dada a medição  $\mathbf{z}_k$ . Assim, pode-se definir os erros de estimativa *a priori* e *a posteriori* como  $\mathbf{e}_k^- \equiv \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-$  e  $\mathbf{e}_k \equiv \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$ , respectivamente. Logo, a covariância do erro de estimativa *a priori* é  $\mathbf{P}_k^- = E[\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T}]$  e a covariância do erro de estimativa *a posteriori* é  $\mathbf{P}_k = E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T]$ , sendo  $E[\ ]$  o operador esperança.

Ao derivar as equações para o filtro de Kalman, tem-se como objetivo encontrar uma equação que calcule uma estimativa de estado *a posteriori*  $\hat{\mathbf{x}}_k$  como uma combinação linear de uma estimativa *a priori*  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  e uma diferença ponderada entre uma medição real  $\mathbf{z}_k$  e uma predição de medição  $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-$ . Mais precisamente, calcula-se  $\hat{\mathbf{x}}_k$  como se segue

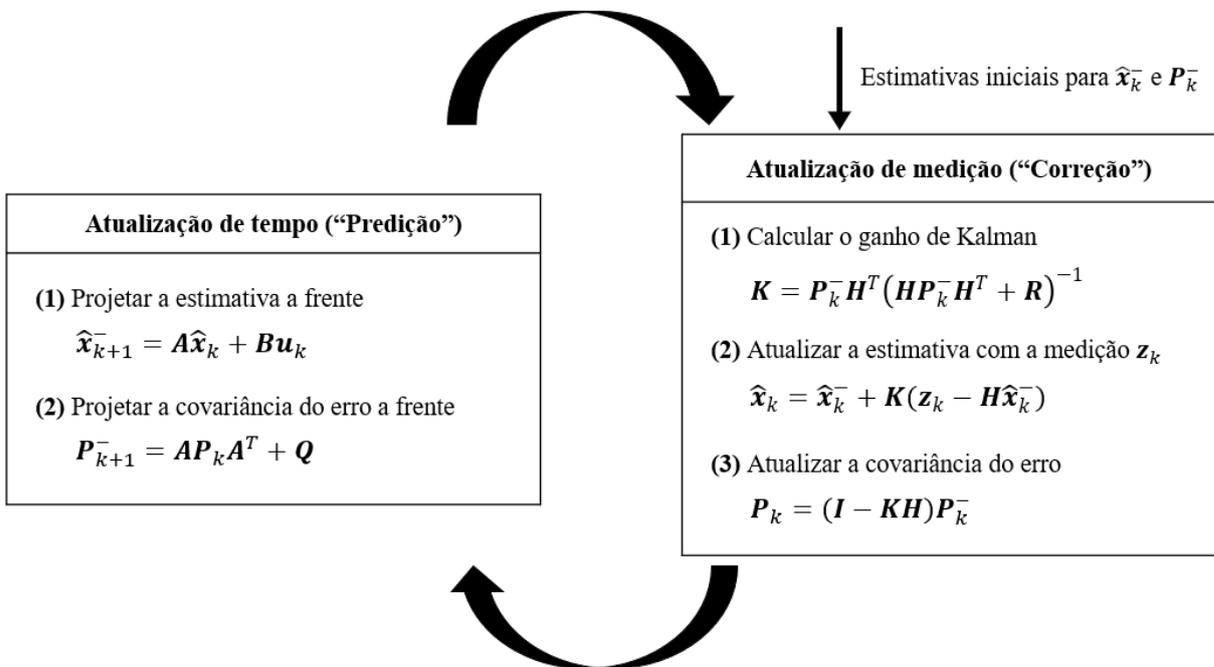
$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (39)$$

em que  $(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-)$  é chamada de inovação (ou resíduo) de medição. O resíduo reflete a discrepância entre a medição predita  $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-$  e a medição real  $\mathbf{z}_k$ . Um resíduo de zero significa que os dois estão em completo acordo. A matriz  $\mathbf{K}$  é escolhida para ser o ganho que minimiza a covariância do erro *a posteriori*  $\mathbf{P}_k$ . Mais especificamente,

$$K = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \quad (40)$$

As equações envolvidas no filtro de Kalman se dividem em dois grupos: equações de atualização de tempo (*time update*) e equações de atualização de medição (*measurement update*). As primeiras podem ser consideradas como equações de predição, enquanto as segundas como equações de correção. Assim, o algoritmo de estimativa final se assemelha ao de um algoritmo preditor-corretor para resolver problemas numéricos. Essas equações são sintetizadas na Figura 15, incluindo as equações de atualização das matrizes de covariância do erro de estimativa *a priori* é  $P_k^-$  e *a posteriori* é  $P_k$ , não mencionadas anteriormente.

Figura 15 - Operação completa do filtro de Kalman



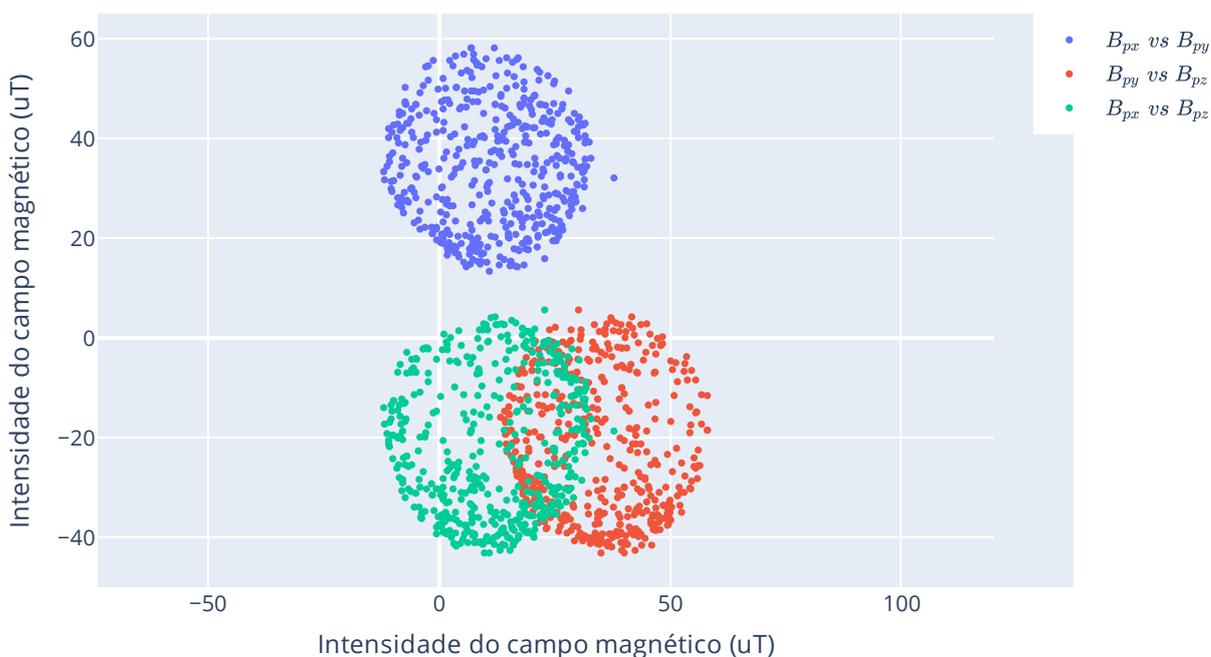
Fonte: Adaptado de Bishop e Welch (2001).

As equações do primeiro grupo são responsáveis por projetar para frente (no tempo) as estimativas do estado e da covariância de erro atuais para se obter as estimativas *a priori* para o próximo passo de tempo. Já as do segundo são responsáveis por incorporar uma nova medição na estimativa *a priori* para se obter uma estimativa *a posteriori* melhorada.

## APÊNDICE B – CALIBRAÇÃO DO MAGNETÔMETRO

A saída ideal de um magnetômetro de três eixos, ao movimentar o sensor “desenhando” variados padrões do número oito no ar, é uma superfície esférica centrada na origem, com raio igual à magnitude do campo magnético da Terra. Dessa forma, ao plotar as medições de um eixo do magnetômetro em relação a outro, isto é,  $B_{px}$  vs  $B_{py}$ ,  $B_{py}$  vs  $B_{pz}$  e  $B_{px}$  vs  $B_{pz}$ , idealmente são obtidos três círculos de mesmo raio centrados na origem. No entanto, o magnetômetro está sujeito a dois tipos de distorções, conhecidas como *hard iron* e *soft iron*, que modificam essa saída ideal. A distorção *hard iron* é criada por objetos que produzem um campo magnético, como, por exemplo, um alto-falante próximo ao sensor. Esse tipo de distorção faz com que um bias permanente esteja presente nas medições do magnetômetro. Assim, ao plotar as saídas do sensor em gráficos 2D, como explicado anteriormente, têm-se uma mudança na posição dos centros dos círculos gerados (VECTORNAV, 2022). Essa distorção pode ser visualizada na Figura 16, que apresenta as saídas do magnetômetro utilizado nesse trabalho.

Figura 16 - Leituras do magnetômetro ao se realizar movimentos em variados padrões de oito antes da calibração

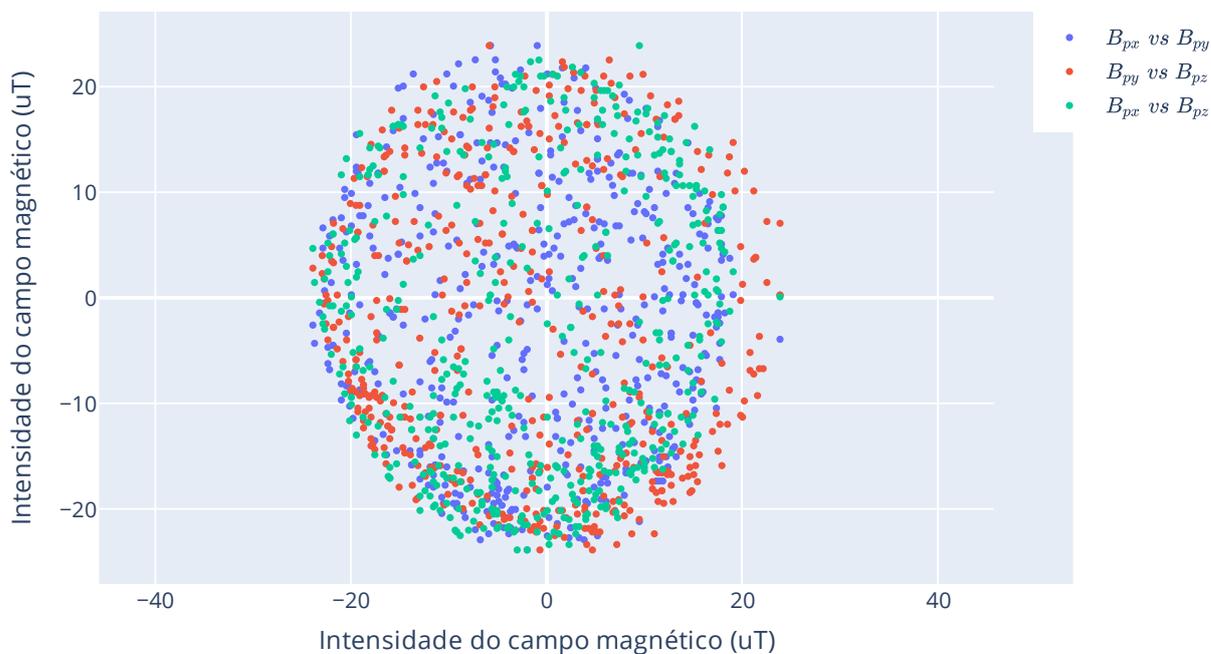


Fonte: O autor.

Já a distorção *soft iron* é caracterizada por deflexões ou alterações no campo magnético existente e é comumente causada por metais como níquel e ferro nas proximidades do sensor.

No entanto, na maioria dos casos, a distorção *hard iron* tem uma contribuição muito maior para o erro total do sensor do que a *soft iron*, além de ser mais simples de ser corrigida. Dessa forma, nesse trabalho concentrou-se em calibrar o magnetômetro a fim de compensar a distorção *hard iron*. Para isso, coletam-se as leituras do sensor por alguns instantes o movimentando lentamente em variados padrões de oito no ar. Depois, encontra-se a leitura máxima e mínima de cada eixo. Subtrai-se, então, das medições de cada eixo do sensor, a média entre os valores máximo e mínimo daquele eixo. Isso equivale a centralizar as saídas circulares do magnetômetro (VECTORNAV, 2022). O resultado dessa calibração é apresentado na Figura 17.

Figura 17 - Leituras do magnetômetro ao se realizar movimentos em variados padrões de oito após a calibração

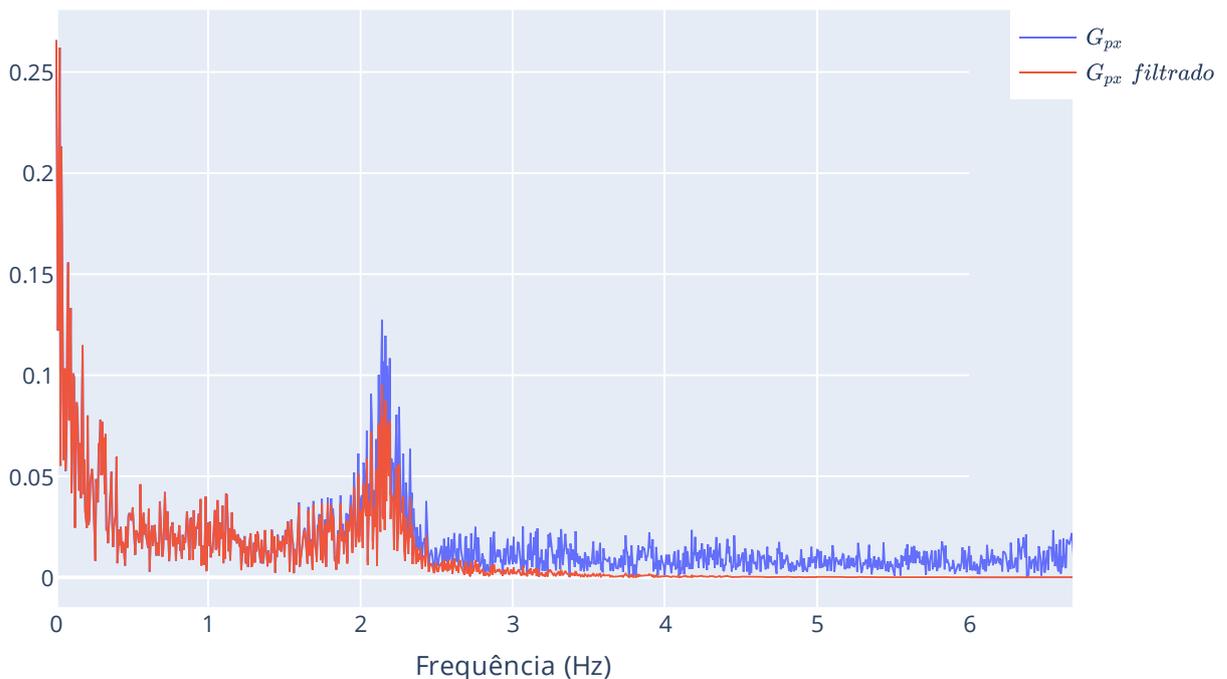


Fonte: O autor.

## APÊNDICE C – ANÁLISE DE FREQUÊNCIA DA LEITURA DO ACELERÔMETRO

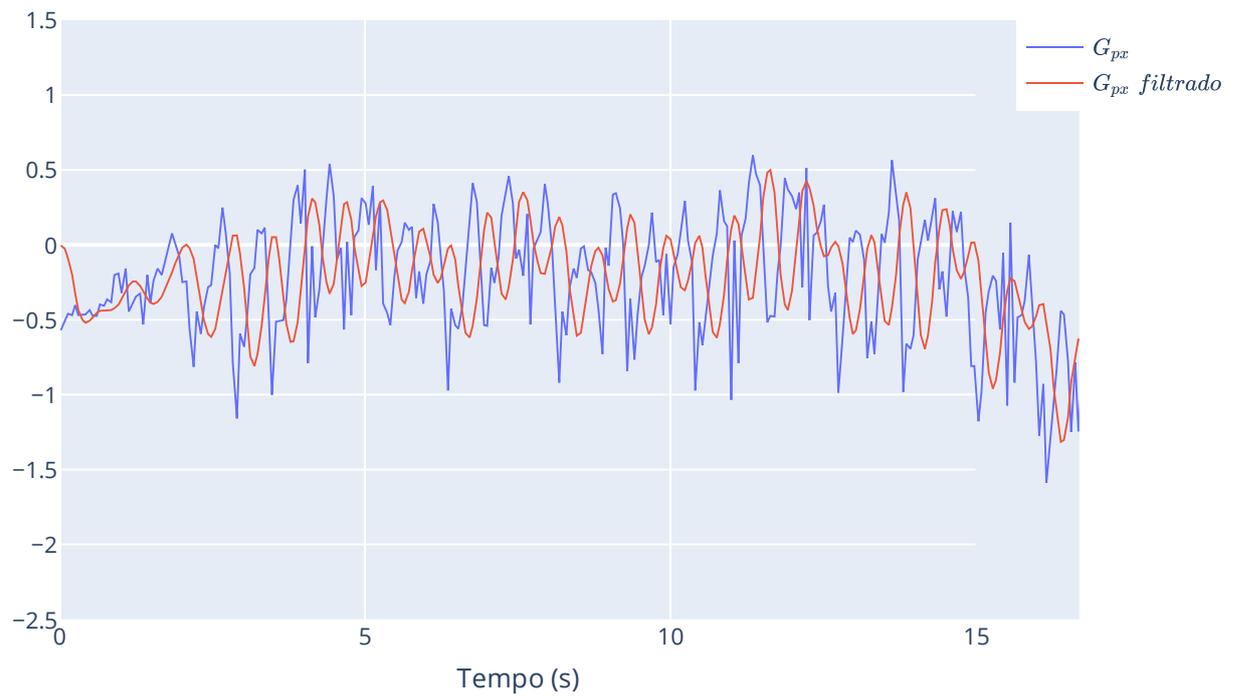
Por meio do espectro de frequência do sinal de cada um dos três eixos do acelerômetro, observou-se que as frequências predominantes na medição desse sensor são abaixo de 2,5 Hz. Dessa forma, adotou-se um valor um pouco abaixo a esse, 2,2 Hz, como a frequência de corte do filtro passa-baixas projetado. Assim, as frequências presentes no sinal do acelerômetro foram atenuadas a partir do valor de corte e praticamente eliminadas acima de 2,5 Hz. Isso pode ser verificado na Figura 18, que apresenta os espectros de frequência das medições do acelerômetro no eixo  $x$  antes e depois da aplicação do filtro passa-baixas.

Figura 18 - Espectro de frequência do eixo  $x$  do acelerômetro antes e depois da aplicação do filtro passa-baixas



Fonte: O autor.

A Figura 19 apresenta um trecho do sinal do acelerômetro (eixo  $x$ ) no domínio do tempo, antes e depois da aplicação do filtro passa-baixas. Nota-se que o sinal filtrado é menos ruidoso.

Figura 19 - Sinal do eixo  $x$  do acelerômetro antes e depois da aplicação do filtro passa-baixas

Fonte: O autor.

## ANEXO A – RELATÓRIO DE MEDIÇÃO DO GPS DE PRECISÃO

**Visão Geral do Levantamento de Terrenos**

GNSS Solutions, Copyright (C) 2010 Ashtech. 21/09/2021 14:20:28  
[www.ashtech.com](http://www.ashtech.com)

Nome do Projecto: Projecto21  
 Sistema de Referência Espacial: WGS 84  
 Fuso Horário: (UTC-03:00) Brasília  
 Unidades Lineares: Metros

**Resumo do Sistema de Coordenadas**Sistema de coordenadas

Nome: WGS 84  
 Tipo: Geográfico  
 Nome da Unidade: Radianos  
 Radianos por unidade: 1  
 Datum Vertical: Elipsóide  
 Unidade vertical: Metros  
 Metros por unidade: 1

Dado

Nome: WGS 84  
 Nome da Elipsóide: WGS 84  
 Eixo Semi-maior: 6378137.000 m  
 Achatamento Inverso: 298.257223563  
 DX para WGS84: 0.0000 m  
 DY para WGS84: 0.0000 m  
 DY para WGS84: 0.0000 m  
 RX para WGS84: -0.000000 "  
 RY para WGS84: -0.000000 "  
 RZ para WGS84: -0.000000 "  
 ppm para WGS84: 0.000000000000

Pontos de Controlo : 1  
 Pontos de Referência : 0  
 Pontos Registados : 4  
 Pontos Alvo : 0  
 Pontos Intermédios : 0

**Pontos de Controlo**

Nome	Componentes	95% Erro	Estado	Erro de
Controlo				
MGUB	Long 48° 15' 21.77766"W	0.001	Fixo	
	Lat 18° 55' 08.98803"S	0.001	Fixo	
	Altura da elipse 869.241	0.004	Fixo	
	Descrição MGUB			

## Pontos Registrados

Nome	Componentes			95%		Estado
				Erro		
PTO1	Long	48° 15'	22.12560"W	0.001	Processado	(Estático)
	Lat	18° 55'	08.34793"S	0.001	Processado	(Estático)
	Altura da elipse		862.148	0.001	Processado	(Estático)
PTO2	Long	48° 15'	19.89995"W	0.001	Processado	(Estático)
	Lat	18° 55'	07.78849"S	0.001	Processado	(Estático)
	Altura da elipse		861.830	0.001	Processado	(Estático)
PTO3	Long	48° 15'	20.27942"W	0.001	Processado	(Estático)
	Lat	18° 55'	06.69322"S	0.001	Processado	(Estático)
	Altura da elipse		861.593	0.002	Processado	(Estático)
PTO4	Long	48° 15'	21.99299"W	0.001	Processado	(Estático)
	Lat	18° 55'	06.70983"S	0.002	Processado	(Estático)
	Altura da elipse		861.041	0.007	Processado	(Estático)

## Ficheiros

Nome	Hora de Início	Amostragem	Épocas	Tamanho (Kb)	Tipo		
mgub2601.21d	21/09/16	21:00	15	5760	9870	L1/L2	GPS/GLONASS
BASHTA21.260	21/09/17	10:05	15	104	40		L1 GPS
BASHTB21.260	21/09/17	10:38	15	105	41		L1 GPS
BASHTD21.260	21/09/17	11:33	15	101	37		L1 GPS
BASHTE21.260	21/09/17	12:39	15	101	38		L1 GPS

## Ocupações

Local	Hora de Início	Intervalo	de horas	Tipo	Ficheiro
MGUB	16 setembro 2021	21:00:00.00	23:59:45.00	Static	mgub2601.21d
PTO1	17 setembro 2021	10:05:45.00	00:25:45.00	Static	BASHTA21.260
PTO2	17 setembro 2021	10:38:15.00	00:26:00.00	Static	BASHTB21.260
PTO3	17 setembro 2021	11:33:45.00	00:25:00.00	Static	BASHTD21.260
PTO4	17 setembro 2021	12:39:45.00	00:25:00.00	Static	BASHTE21.260

## Processos

Referência	Ficheiro de Referência	Móvel	Ficheiro Móvel	Modo	Núm
MGUB	mgub2601.21d	PTO4	BASHTE21.260	Static	1
MGUB	mgub2601.21d	PTO3	BASHTD21.260	Static	2
MGUB	mgub2601.21d	PTO2	BASHTB21.260	Static	3
MGUB	mgub2601.21d	PTO1	BASHTA21.260	Static	4

## Vectores processados

Identificador de Vector	Vector		Componentes	95%		SV	PDOP	QA	Solução
	Comprimento	95% Erro		Erro					
MGUB - PTO1 21/09/17 10:05	23.270	0.002	X	-7.816	0.001	10	1.6	Fixo	
			Y	-6.535	0.001				
			Z	20.921	0.001				
MGUB - PTO2 21/09/17 10:38	66.599	0.001	X	44.297	0.000	10	1.6	Fixo	
			Y	32.895	0.001				
			Z	37.298	0.000				
MGUB - PTO3 21/09/17 11:33	83.433	0.003	X	43.133	0.001	9	1.6	Fixo	
			Y	17.520	0.001				
			Z	69.237	0.002				
MGUB - PTO4 21/09/17 12:39	70.818	0.011	X	5.257	0.004	7	2.7	Fixo	
			Y	-15.356	0.005				
			Z	68.933	0.004				