

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA – MESTRADO PROFISSIONAL**

ALINE SILVESTRE BORGES

**MODELAGEM MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS NA
APRENDIZAGEM DA TEORIA DOS CONJUNTOS *FUZZY* NO ENSINO MÉDIO**

ORIENTADORA: ROSANA SUELI DA MOTTA JAFELICE

**Uberlândia
2022**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

B732 Borges, Aline Silvestre, 1994-
2022 MODELAGEM MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS NA
 APRENDIZAGEM DA TEORIA DOS CONJUNTOS FUZZY NO ENSINO
 MÉDIO [recurso eletrônico] / Aline Silvestre Borges. -
 2022.

Orientadora: Rosana Sueli da Motta Jafelice.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Ensino de Ciências e
Matemática.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.207>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Ciência - Estudo ensino. I. Jafelice, Rosana Sueli
da Motta, 1964-, (Orient.). II. Universidade Federal de
Uberlândia. Pós-graduação em Ensino de Ciências e
Matemática. III. Título.

CDU: 50:37

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

ALINE SILVESTRE BORGES

**MODELAGEM MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS NA
APRENDIZAGEM DA TEORIA DOS CONJUNTOS *FUZZY* NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

UBERLÂNDIA

2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 ordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1A, Sala 207 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3230-9419 - www.ppgecm.ufu.br - secretaria@ppgecm.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Ensino de Ciências e Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico Profissional PPGECM				
Data:	10/03/2022	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	15:40
Matrícula do Discente:	11912ECM002				
Nome do Discente:	Aline Silvestre Borges				
Título do Trabalho:	Modelagem Matemática e Tecnologias Digitais na Aprendizagem da Teoria dos Conjuntos Fuzzy no Ensino Médio				
Área de concentração:	Ensino de Ciências e Matemática				
Linha de pesquisa:	Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Conjuntos Fuzzy dos Tipos 1 e 2 na Modelagem Matemática de Incertezas				

Reuniu-se por meio da Plataforma Plataforma Google Meet, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, assim composta: Professores Doutores: Rosana Sueli da Motta Jafelice - FAMAT, orientadora; Arlindo José de Souza Júnior - FAMAT; José Antonio Salvador - UFSCar.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu a Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando a candidata:

Aprovada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Rosana Sueli da Motta Jafelice, Professor(a) do**



Magistério Superior, em 10/03/2022, às 15:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Arlindo José de Souza Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 10/03/2022, às 15:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **José Antonio Salvador, Usuário Externo**, em 10/03/2022, às 15:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3427560** e o código CRC **525A4214**.

*“O Senhor de todos não fará exceção
para ninguém, e não se deixará
impor pela grandeza.”
(Sabedoria 6,7)*

*Aos meus pais, Sandra e José Silvestre,
e minha avó Teodora (in memoriam), sei que,
de algum lugar, ela olha por mim.*

AGRADECIMENTO

Agradeço a Deus que assume todo senhorio em minha vida. A Nossa Senhora, eternamente minha gratidão, pois a esperança que trazemos em nós não é fruto da imaginação ou esforço humano, mas é dom gratuito que Deus nos concede.

A toda minha família, em especial minha mãe e meu pai, que se orgulham de mim, os quais me ensinaram os preciosos valores da vida. A minha irmã, pela compreensão e companheirismo. A minha avó por sempre estar ao meu lado, com cuidado, carinho e amor a todo instante. A meus padrinhos e madrinhas por acreditarem em meu potencial. Aos meus primos e primas, tios e tias aquele abraço agradecido a vocês.

A minha orientadora Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice pela colaboração, sinceridade, compreensão e respeito, o qual foi ao meu ver, o esteio da grande parceria, aqui conquistadas. A minha admiração pela pessoa a qual me relacionei e pelo seu trabalho, só fortaleceu.

Gratidão profunda e sincera aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - UFU, não somente por terem me ensinado, mas terem me feito aprender. A palavra mestre, nunca fará justiça aos professores dedicados aos quais sem nomear terão os meus eternos agradecimentos.

Ao Prof. Dr. Carlos Eugênio Pereira, especialista em hidráulica e saneamento pela incrível orientação sobre as barragens e apoio em todos os momentos de dúvidas, além da contribuição realizada no minicurso aplicado.

A Profa. Dra. Érika Maria Chioca Lopes pela parceria e por colaborar com seu conhecimento acrescentando sobre a fundamentação teórica deste trabalho.

Ao Fernando, pela colaboração no início do estudo, pelas dúvidas sanadas e companheirismo.

Ao técnico Fabricio, do Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEST) da Universidade Federal de Uberlândia, por ceder o tempo e o espaço para a impressão do protótipo da barragem na impressora 3D.

Ao Marcelo, que foi fundamental para que a tão sonhada barragem se rompesse, com a sabedoria de um programador apto a grandes projetos.

Ao melhor amigo, Japa, que não mediu esforço para ajudar na conclusão desse trabalho, principalmente na construção do jogo, assistindo vídeos, aprendendo e ensinando.

A minha amiga e irmã de coração, Marina, que sempre esteve no apoio psicológico e confiou no meu potencial, não me deixando esquecer jamais dos meus sonhos.

A amiga Gabriela, por compartilhar momentos e disciplinas, além das angústias e conquistas.

Ao amigo Hugo, por ter trago esse sonho para minha vida e me incentivar cada vez em ir mais longe.

Ao amigo Walyssom, por ser um ouvinte fiel e por sempre acrescentar ao trabalho.

Ao Lucas C., que me mostrou ser paciente e compreensivo, me incentivando a ir mais longe e conseguindo me acalmar nos momentos de angústia.

Aos meus ex-alunos, que aceitaram usar seu tempo, em meio a uma pandemia, para um novo conhecimento, alunos esses, que me viram no início desse projeto, e graças a eles, consegui aplicar e finalizar.

À Dhara e ao Lucas A., pelo total apoio e monitoria a esse minicurso aplicado, participando de cada encontro e acrescentando sempre positivamente.

Um obrigado caloroso aos amigos do programa e todos aqueles que vivenciaram essa luta comigo... Todos verdadeiros colaboradores. Que nossa amizade perdure sempre e que Deus ilumine nossos caminhos.

RESUMO

O objetivo do trabalho é propor uma sequência didática para introduzir o ensino da teoria dos conjuntos *fuzzy* no ensino médio, tendo como motivação o rompimento de uma barragem de rejeitos. A proposta das atividades em sala de aula é interativa e utiliza tecnologias digitais da informação e comunicação. A lógica *fuzzy* é introduzida e destacam-se as principais diferenças com a lógica matemática clássica. Os estudantes constroem, com o auxílio de um especialista na área de hidráulica e saneamento, um Sistema Baseado em Regras *Fuzzy*, utilizando o *software* livre *FisPro*, que controla o risco de rompimento ou de vazamento de rejeitos da barragem. Uma maquete em acrílico foi construída com um protótipo de barragem, com o auxílio de uma impressora 3D. Assim, os estudantes interagem, através de um *smartphone*, com o sensor colocado na barragem, inserindo dados das variáveis de entrada do Sistema Baseado em Regras *Fuzzy*. As variáveis de entrada do sistema são: idade, altura e volume de rejeitos da barragem. Dependendo do valor de saída do sistema, a barragem rompe uma quantidade de bolinhas coloridas em gel, que representam os rejeitos. Essa sequência didática foi aplicada em um minicurso para estudantes do ensino médio. A avaliação do aprendizado do conteúdo foi realizada através de um jogo elaborado no *software* livre *RPG Maker*. Os resultados da avaliação quantitativa foram significativos. Ressalta-se que o mais importante é introduzir uma teoria que considera matematicamente a incerteza, utilizando tecnologias digitais e um tema da atualidade.

Palavras-chave: conjuntos *fuzzy*; barragem de rejeitos; internet das coisas; ensino.

ABSTRACT

The aim of the work is to propose a didactic sequence to introduce the teaching of *fuzzy* sets theory in high school, having as a motivation the rupture of a tailings dam. The methodology uses communications technologies that utilize digital information and interactivity. *Fuzzy* logic is introduced and the main differences with classical mathematical logic are highlighted. Students build, with the help of an expert in hydraulics and sanitation, a *Fuzzy* Rule-Based System, using the free *software FisPro*, which controls the risk of rupture or risk of leakage of the tailings from the dam. An acrylic model was built of a dam prototype, with the aid of a 3D printer. Thus, students interact, using a *smartphone*, with a sensor placed on the dam, entering data from the *input* variables of the *Fuzzy* Rule-Based System. The *input* variables of this system are: age, height and volume of tailings from the dam. Depending on the output value of this system, the dam will break a number of colored gel balls, which represent the tailings. This didactic sequence was applied in a short course for high school students. The evaluation of the content learning was carried out through a game created in the free *software RPG Maker*. The results of the quantitative assessment were significant. It is noteworthy that the most important thing is to introduce a theory that mathematically considers uncertainty using digital technologies and a current issue.

Keywords: *fuzzy* sets; tailings dam; internet of things; teaching.

Lista de Figuras

Figura 1 - Esquema das fases do desenvolvimento do trabalho	26
Figura 2 - Esquema de uma modelagem matemática.....	28
Figura 3 - Esquema do tipo de pesquisa	30
Figura 4 - Estrutura do Sistema Baseado em Regras <i>Fuzzy</i>	33
Figura 5 - Método de Inferência de Mamdani <i>Fuzzy</i>	35
Figura 6 - Estrutura do SBRF construído com as variáveis de entrada idade, altura e volume da barragem.....	36
Figura 7 - Funções de pertinência (FPs) da variável idade da barragem em anos.....	36
Figura 8 - Faixa de domínio dos conjuntos <i>fuzzy</i> referentes à altura da barragem impressa em 3D.....	37
Figura 9 - Funções de pertinência (FPs) da variável altura da barragem em centímetros.....	37
Figura 10 - Funções de pertinência (FPs) da variável volume da barragem em centímetros cúbicos.....	38
Figura 11 - Funções de pertinência (FPs) do risco de rompimento	38
Figura 12 - Funções de pertinência (FPs) do risco de vazamento	39
Figura 13 - Protótipo da Maquete 3D	40
Figura 14 - Protótipo da Maquete 3D	40
Figura 15 - Placa eletrônica ESP8266	41
Figura 16 - Ambiente de programação da plataforma Arduino	41
Figura 17 - Plataforma <i>Blynk</i> com três cursores indicando as variáveis de entrada e um demonstrativo de saída do SBRF	42
Figura 18 - Esquema de conexão dos sensores com os celulares	42
Figura 19 - Foto da tela do minicurso	48
Figura 20 - Imagem do rompimento da barragem de Brumadinho	48
Figura 21 - Quatro grupos criados no <i>WhatsApp</i>	49
Figura 22 - Foto da tela do jogo	52
Figura 23 - Conjunto <i>fuzzy</i> dos números próximos de 4	60
Figura 24 - Gráfico $\mu_{A \cup B}$ e $\mu_{A \cap B}$	60
Figura 25 - Imagens do passo a passo para baixar o <i>FisPro</i> enviado no grupo de alunos	61
Figura 26 - Imagens do passo a passo para baixar o <i>FisPro</i> enviado no grupo de alunos	62
Figura 27 - Imagens do passo a passo para baixar o <i>FisPro</i> enviado no grupo de alunos	62
Figura 28 - Imagens do passo a passo para baixar o <i>FisPro</i> enviado no grupo de alunos	63

Figura 29 - Aplicativo <i>Blynk</i>	65
Figura 30 - Protótipo da maquete	66
Figura 31 - Foto dos comentários do chat.....	66
Figura 32 - Resultados 1ª Avaliação	72
Figura 33 - Resultados 2ª Avaliação	72
Figura 34 - Certificado elaborado para os alunos comprovando a participação	72
Figura 35 - Certificado de monitoria	74

Lista de Figuras Apêndice

Figura A1 - Representação dos grupos	83
Figura A2 - Integrantes do grupo G1 que pertencem ao grupo \bar{G}	84
Figura A3 - Representação conjunto unitário	86
Figura A4 - Representação conjunto finito	86
Figura A5 - Representação dos elementos de dois conjuntos	87
Figura A6 - Representação de casos da operação união de conjuntos	88
Figura A7 - Representação dos elementos de dois conjuntos	88
Figura A8 - Representação da interseção de dois conjuntos	89
Figura A9 - Casos da operação de interseção de conjuntos numéricos	89
Figura A10 - Representação dos elementos de dois conjuntos	90
Figura A11 - Representação dos elementos da operação $G3 - G5$	90
Figura A12 - Representação de um conjunto complementar	91
Figura A13 - Representação de um conjunto complementar	91
Figura A14 - Imagem de um dos mapas do jogo	92
Figura A15 - Representação se o elemento pode pertencer ao conjunto	94
Figura A16 - Grau de pertinência das horas em torno de 12h.	95
Figura A17 - Grau de pertinência de uma jarra de água	96
Figura A18 - Conjuntos <i>fuzzy</i> dos números próximos de 3	99
Figura A19 - Conjuntos <i>fuzzy</i> dos números próximos de 4	99
Figura A20 - Gráfico $\mu_{A \cup B}$ e $\mu_{A \cap B}$	99
Figura A21 - Gráfico de $\mu_{A \cup B}$	100
Figura A22 - Gráfico de $\mu_{A \cap B}$	100
Figura A23 - Gráfico de A^C	100
Figura A24 - Funções de pertinência da variável capacidade de memória do dispositivo....	103
Figura A25 - Funções de pertinência da variável qualidade da câmera do dispositivo.....	103
Figura A26 - Funções de pertinência da variável tempo de duração da bateria do dispositivo	103
Figura A27 - Função de pertinência da variável qualidade do <i>smartphone</i>	104
Figura A28 - Grupos montados para a realização das atividades	107
Figura A29 - Imagem de um dos mapas do jogo	107

Lista de Abreviaturas e Siglas

Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL)

Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Comitê Brasileiro de Barragens (CBDB)

Funções de pertinência (FPs)

Instituto Federal do Triângulo Mineiro (IFTM)

Jornal Nacional (JN)

Mestrado profissional em matemática pela rede nacional (PROFMAT)

Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE)

Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)

Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA)

Programa Pós-Graduação de Ensino em Ciências e Matemática (PPGECM)

Sistema Baseado em Regras *Fuzzy* (SBRF)

Tecnologias de informação e comunicação (TIC)

Sumário

Resumo.....	8
Abstract	9
1. Introdução	15
2. Fundamentação Teórica.....	17
2.1 Tecnologias no Ensino da Matemática	17
2.2 A Multidisciplinaridade na Educação	23
2.3 A Interdisciplinaridade na Educação	24
2.4 Modelagem Matemática	25
2.5 O Professor Mediador	29
3. Metodologia.....	30
4. Desenvolvimento.....	32
4.1 Conjuntos <i>Fuzzy</i>	32
4.2 Sistema Baseado em Regras <i>Fuzzy</i>	33
4.3 Sistema Baseado em Regras <i>Fuzzy</i> para Rompimento de uma Barragem de Rejeitos	36
4.4 Detalhamento das Atividades	43
5. Relato do Minicurso	46
6. Conclusão	74
7. Referências Bibliográficas.....	77
Apêndice A	81
Anexo.....	108
Apêndice B	111

1. Introdução

Nos dias de hoje, em que cada vez mais o homem quer ter controle sobre o mundo que o cerca, é crescente o interesse por processos quantitativos para predizer fenômenos da realidade.

Em novembro de 2015, o Brasil se assustava com o rompimento da barragem de Fundão, da Mineradora Samarco. A lama devastou o distrito de Bento Rodrigues, no município de Mariana, em Minas Gerais, destruindo casas e ocasionando a morte de 19 pessoas, provocando, ainda, o maior desastre ambiental registrado no Brasil. Apenas três anos mais tarde, em janeiro de 2019, mais um acidente envolvendo o rompimento de outra barragem, a barragem da Vale, na Mina Córrego do Feijão, ocasionando a morte de dezenas de pessoas por onde a onda passou, cheia de rejeitos acumulados na barragem, em todo o vale a jusante.

As barragens são grandes estruturas, utilizadas há mais de 6.000 anos, sendo definidas pelo Comitê Brasileiro de Barragens (CBDB) como obstáculos com a capacidade de reter qualquer líquido, rejeitos ou detritos, para fins de armazenamento ou controle, podendo variar de tamanho. Geralmente, são usadas para fornecimento de água, geração de energia hidroelétrica, controle de cheias e irrigação. Essas estruturas podem romper de várias formas (erosão interna, galgamento, deslizamento, derrubamento e outras), e isso pode ser causado por fenômenos naturais ou também por má gestão (ZHANG, XU; JIA, 2007).

Com o intuito de calcular os riscos de rompimento e de vazamento de uma barragem utilizando-se a teoria dos conjuntos *fuzzy*, um especialista em hidráulica e saneamento, Prof. Dr. Carlos Eugênio Pereira, colaborou com o trabalho. Através de sua orientação, foram estabelecidos os parâmetros dos níveis do risco do rompimento e de vazamento de barragens de rejeitos. O vazamento do reservatório deve-se à abertura de uma pequena fresta ou rachadura na estrutura da barragem que permite o escoamento de certa porção do fluido armazenado, enquanto a ruptura é o colapso completo da barragem, com escoamento do fluido armazenado. Por meio de uma planilha compartilhada da Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) (BRASIL, 2000), são estabelecidas três variáveis fundamentais: idade, altura e volume de rejeitos da barragem. Essas variáveis influenciam o risco de rompimento e de vazamento da barragem. Neste trabalho, considerou-se que a barragem é construída de terra-enrocamento.

Na seção de metodologia, alguns conceitos da teoria dos conjuntos *fuzzy* são apresentados. Essa teoria foi desenvolvida por Lotfi Asker Zadeh (ZADEH, 1965), com o objetivo de formular matematicamente a subjetividade própria de fenômenos naturais. A lógica proposta na teoria foi elaborada a partir dos conceitos já conhecidos da lógica clássica booleana (ALENCAR FILHO, 2002). Os conjuntos *fuzzy* podem ser aplicados em situações nas quais

não podemos responder apenas “sim” ou “não” a determinada questão. Os sistemas *fuzzy* fazem parte do núcleo da inteligência computacional, que são sistemas de computação capazes de tratar novas situações, usando raciocínio, associação e descobrindo novas capacidades (PEDRYCZ; GOMIDE, 2007).

Para exemplificar a junção da teoria dos conjuntos *fuzzy* ao estudo do risco de rompimento de barragens é apresentado o trabalho de Leite (2019). Esse trabalho analisa os riscos em anomalias e patologias em barragens para prevenção de incidentes e acidentes que levem à ruptura com impacto danoso. São também identificados fatores de risco para o rompimento de barragens, utilizando-se o método de apoio multicritério à tomada de decisão associado a regras *fuzzy*, de forma a caracterizar a natureza desse risco.

De acordo com a pesquisa de Corcoll-Spina (2010), a lógica *fuzzy* pode ser aplicada a certos problemas do ensino médio, através da modelagem matemática. Com isso, os estudantes podem estabelecer os graus de pertinência de determinado problema a partir das questões que lhes são propostas, sendo respondidas e analisadas com base na lógica *fuzzy*.

É preciso repensar as práticas pedagógicas para se trabalhar com o conteúdo de matemática. Nas escolas, são conhecidos o desinteresse e a dificuldade dos estudantes com a matemática, fazendo-se necessário desenvolver atividades que atraiam e motivem os estudantes e os coloquem como sujeitos ativos no processo de aprendizagem. A partir desses pressupostos, apresenta-se a modelagem matemática como alternativa de ensino, com atividades que levem o estudante a construir o seu próprio conhecimento, por meio de relações concretas.

A modelagem matemática permite refletir sobre a realidade, entendendo-a – ao selecionar argumentos – e agindo sobre ela, ao formalizá-la, por meio de um modelo. Segundo Bassanezi (1994),

Modelagem Matemática é um processo que consiste em traduzir uma situação ou tema do meio em que vivemos para uma linguagem matemática. Essa linguagem, que denominamos Modelo Matemático, pressupõe um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam o fenômeno em questão (BASSANEZI, 1994, p. 01).

No contexto escolar, é suficiente um modelo matemático básico, mesmo que não apresente fielmente os dados experimentais, desde que atinja os objetivos propostos e de interesse do aluno e que seja validado pela comparação dos dados modelados com os dados experimentais (BERTONE; BASSANEZI; JAFELICE, 2014), ou seja, o processo de modelar o que leva à aprendizagem.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma sequência didática para desenvolver o pensamento de uma nova habilidade para os estudantes do ensino médio, através da inserção do conteúdo básico da teoria dos conjuntos *fuzzy*. Como motivação, é realizada a modelagem

matemática da incerteza, que envolve o rompimento ou vazamento de uma barragem de rejeitos, por meio de um Sistema Baseado em Regras *Fuzzy* (SBRF). Esse sistema tem como variáveis de entrada a idade, a altura e o volume de rejeitos; e como variáveis de saída o risco de rompimento ou de vazamento de uma barragem. Um protótipo de barragem é construído, através de tecnologias de informação e comunicação, e um SBRF que controla o rompimento da barragem é instalado, para que os estudantes possam manipular e controlar o rompimento da barragem.

Finalmente, cabe destacar que esta proposta está na direção do rol de habilidades que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta aos docentes:

Compreender e conectar os saberes sobre a estrutura disciplinar e a BNCC, utilizando este conhecimento para identificar como as dez competências da Base podem ser desenvolvidas na prática, a partir das competências e conhecimentos específicos de sua área de ensino e etapa de atuação, e a inter-relação da área com os demais componentes curriculares (BRASIL, 2018, p. 15).

O conjunto de competências docentes da BNCC também contempla as tecnologias, enfatizando a busca de soluções tecnológicas e o uso da linguagem digital como forma de expressão e compartilhamento de ideias e experiências. Além disso, esse conjunto de competências contempla a compreensão, a utilização e a criação de tecnologias digitais de forma crítica, significativa e ética. Tais tecnologias, como recurso pedagógico, são uma ferramenta de formação, produção de conhecimento, resolução de problemas e potencialização da aprendizagem dos estudantes.

A dissertação é organizada da seguinte forma. Na seção 2 é apresentado o referencial teórico que fundamenta esse trabalho; na seção 3 é descrita a metodologia empregada na realização da dissertação; o desenvolvimento das atividades é exibido na seção 4 e a narrativa do processo de aprendizagem do minicurso aplicado para os estudantes do ensino médio, na seção 5. Finalmente, na seção 6 são apresentadas as conclusões e os produtos obtidos a partir desse trabalho.

2. Fundamentação Teórica

2.1 Tecnologias no Ensino da Matemática

As instituições escolares precisam evoluir e acompanhar o desenvolvimento social do país, onde as novas tecnologias da informação estão cada vez mais presentes e transformando

espetacularmente a comunicação, o trabalho, a decisão e modo de pensar das pessoas (PERRENOUD, 2000).

Não podemos mais negar a importância do ensino da Matemática na atualidade e na vida de cada ser humano. Porém, a disciplina de matemática sempre foi o bicho de sete cabeças para muitos alunos ao longo da sua formação. E essa perspectiva está atrelada à má formação por parte de alguns professores de matemática que atuam no ensino da matemática oferecendo as respostas prontas, não oportunizando que o aluno construa seus próprios conceitos.

De acordo com Valente (1999, p.34-35), ensinar Matemática dentro das nossas escolas hoje, é promover o desenvolvimento disciplinado do raciocínio lógico dedutivo, ou seja, o ensino tradicional de Matemática está ultrapassado e fora de uso.

São inúmeros os problemas que decorrem da questão: evasão escolar; pavor diante da disciplina; medo e aversão à escola, dentre outros. Em larga medida, o problema pode estar atrelado a uma metodologia amplamente adotada nas escolas para o ensino em geral e especificamente para o da Matemática (VALENTE, 1999, p. 78).

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), tradução de *Programme for International Student Assessment*, é um estudo comparativo internacional realizado a cada três anos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). O PISA oferece informações sobre o desempenho dos estudantes na faixa etária dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países, vinculando dados sobre seus *backgrounds* e suas atitudes em relação à aprendizagem, e também aos principais fatores que moldam sua aprendizagem, dentro e fora da escola.

A edição 2018, revela que 68,1% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de matemática, o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Quando comparado com os países da América do Sul analisados pelo Pisa, o Brasil é pior país em matemática, empatado estatisticamente com a Argentina, com 384 e 379 pontos, respectivamente. Uruguai (418), Chile (417), Peru (400) e Colômbia (391) estão à frente.

Diante de tal cenário, uma pergunta se impõe: o que fazer para melhorar o processo de ensino e aprendizagem dos conhecimentos matemáticos no Brasil? Na atualidade, o uso de tecnologias de informação e comunicação (TIC) alteram significativamente a forma como as pessoas se relacionam e a forma como a informação é propagada e processada; sendo assim apresenta-se aos professores um novo perfil de aluno. Desse modo, é necessário que o professor esteja preparado para o uso de tecnologias (POCINHO; GASPARG, 2012), pesquisando constantemente sobre metodologias de ensino condizentes com essa nova realidade, além de

aprimorar seus conhecimentos com o uso efetivo das TIC em sua formação inicial e continuada (MARTINS et al., 2020).

No entanto, a inserção das TIC no contexto escolar é lenta. Segundo Blikstein e Zuffo (2003), “não basta introduzir tecnologias – é fundamental pensar em como elas são disponibilizadas, como seu uso pode efetivamente desafiar as estruturas existentes em vez de reforçá-las”. De fato, o uso de computadores, um dos principais recursos em TIC, está restrito, de forma geral, a laboratórios de informática e tarefas administrativas.

Os documentos oficiais que norteiam o ensino de Matemática no Brasil vêm apresentando a necessidade do uso das tecnologias digitais em sala de aula há certo tempo. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), “as técnicas, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas implicações que exercem no cotidiano das pessoas” (BRASIL, 1997, p. 34).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) preveem a influência do uso das TIC no ensino da Matemática e a mudança no seu paradigma de ensino e aprendizado quando afirmam que

o impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento, sob uma perspectiva curricular, que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento (BRASIL, 2002, p. 41).

Seguindo a mesma linha, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ao propor as dez competências gerais que materializam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento, trata da importância do uso das TIC de forma crítica e reflexiva no contexto escolar, “nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva” (BRASIL, 2017, p. 9).

Em outro estudo, intitulado *Educação híbrida*, Moran afirma que “em um mundo tão dinâmico, de múltiplas linguagens, telas, grupos e culturas, cada um de nós precisa – junto com todas as interações sociais – encontrar tempo para aprofundar, refletir, reelaborar, produzir e fazer novas sínteses” (MORAN, 2016, p. 7). O texto de José Moran favorece uma importante reflexão sobre as mudanças que precisam ocorrer na prática pedagógica a fim de que seja inovadora e eficaz. Há muito tempo vivencia-se um sistema de ensino estruturado verticalmente, em que o professor é o transmissor do conhecimento e o aluno, o receptor. Todavia, percebe-se, por meio de estudos recentes, o início de uma estruturação horizontal do

ensino e a busca por aplicação de práticas inovadoras com vistas a uma aprendizagem significativa. Para que esse objetivo seja alcançado, José Moran propõe a adoção de um modelo de ensino e aprendizagem híbrido, além de apresentar em seu texto exemplos de escolas que adotaram projetos inovadores.

Para D’Ambrosio (2012), o maior desafio da educação hoje é pôr em prática o que servirá para o futuro. “A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto. Sobretudo ao se falar em ciência e tecnologia”. Sendo assim, será necessário valorizar “a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e nas expectativas da sociedade. Isso será impossível de atingir sem ampla utilização de tecnologia na educação. Informática e comunicações dominarão a tecnologia educativa do futuro” (D’AMBROSIO, 2012, p. 74).

Ao tratar dos *softwares* educacionais, o PCN informa que é fundamental que o professor aprenda a escolhê-los em função dos objetivos que pretende atingir e de sua própria concepção de conhecimento e de aprendizagem, distinguindo os que se prestam mais a um trabalho dirigido para testar conhecimentos dos que procuram levar o aluno a interagir com o programa de forma a construir conhecimento (BRASIL, 1997).

A efetiva contribuição de *softwares* educativos no processo de ensino-aprendizagem está diretamente ligada aos recursos que eles disponibilizam e a forma como são utilizados. De acordo com Tajra (2001), o professor precisa conhecer os recursos disponíveis dos programas escolhidos para suas atividades de ensino, pois só assim conseguirá realizar uma aula dinâmica, criativa e segura.

Há inúmeros *softwares* educativos; contudo, é necessário que o professor avalie a natureza do *software* em relação às características que propiciarão experiências significativas. De acordo com Gravina (1998), ainda é grande a oferta de *softwares* que, mesmo tendo interface com interessantes recursos de hipermídia, nada mais oferecem aos alunos do que ler definições e propriedades e aplicá-las em exercícios práticos (tipo tutorial) ou testar e fixar “conhecimentos” através da realização de exercícios protótipos e repetitivos.

A seguir está listado alguns dos *softwares* utilizados no desenvolver desta pesquisa e suas contribuições.

O **GeoGebra** é um *software* livre, escrito em linguagem Java (linguagem de programação orientada a objetos), disponível gratuitamente em várias línguas, inclusive em português, foi desenvolvido para facilitar o entendimento e ensino de Matemática nos mais variados níveis de ensino. Possui recursos de Geometria, Álgebra e Cálculo. Utiliza-se o *software Geogebra* para a construção de gráficos e a elaboração de exemplos das operações de

união, intersecção e complementar de conjuntos *fuzzy* podendo ser simples de elaborar e visualizar (HOHENWARTER, 2019).

O **FisPro** (<https://www.fispro.org/en/>), um *software* livre, escrito na linguagem C++, mostrou ser de fácil utilização e disponibiliza recursos suficientes para o desenvolvimento de FIS. Por ser implementado em código aberto, este *software* traz a oportunidade de associação de outros recursos para a avaliação de desempenho dos modelos de classificação gerados. Nesse trabalho, esse *software* livre é utilizado para a construção do SBRF do risco de rompimento de uma barragem, onde as variáveis de entrada são: altura, idade e volume da barragem.

O **RPGMaker** (<https://www.rpgmakerweb.com/products/rpg-maker-vx-ace>), permite que os usuários criem seus próprios jogos de RPG e com algumas mudanças no sistema pode criar até outros tipos de jogos. A construção do jogo é realizada no *RPG Maker* com o intuito de avaliar o aprendizado dos estudantes, as histórias são construídas para estimar o conhecimento de conjuntos numéricos e conjuntos *fuzzy*.

O **Arduino** (<https://www.arduino.cc/en/guide/windows>) é uma plataforma *open source* ou *hardware* para prototipagem eletrônica, com linguagem de programação padrão baseado no em C/C++, mas explicando de uma forma bem simples, Arduino é uma plaquinha para se fazer projetos de eletrônica de uma forma bem mais simples que os métodos anteriores. Para se utilizar o Arduino precisa da placa do Arduino, um cabo USB, uma fonte de tensão e um computador para programação do Arduino. A plataforma é utilizada para realizar a programação do motor e sensores que gera o rompimento do protótipo da barragem.

O aplicativo **Blynk**, é um aplicativo gratuito disponível para Android e IOS que permite ao usuário criar interfaces de projetos de forma bastante simples, em que é necessário apenas arrastar os Widgets (botões, chaves, *displays*, joysticks) e realizar a configuração dos mesmos. Através do aplicativo interligado com a programação do Arduino, é possível controlar as variáveis de entrada: idade da barragem e altura da barragem. O volume da barragem é calculado através de um sensor que mede a altura das bolinhas de gel, que são colocadas no interior da barragem.

No produto/manual a construção e utilização de todos esses *softwares* e aplicativos citados anteriormente, é descrito de forma específica.

O ensino de Matemática apresenta inúmeros problemas e deficiências que necessitam ser revistos. Cabe aos professores rever suas práticas e ter interesse em mudar sua metodologia, tornando as aulas mais criativas e dinâmicas, a fim de despertar o interesse dos alunos em aprender matemática. O uso das tecnologias em sala de aula é uma forma de proporcionar um ambiente de aprendizagem diferente, em que os alunos podem desenvolver atividades, explorar diferentes formas de resolução de problemas, discutir com os colegas os possíveis resultados.

Desse modo, é importante desenvolver as capacidades operacionais e as possibilidades de uso da tecnologia e, para tanto, oferecer aos professores os meios e as possibilidades de formação para uma compreensão da complexidade envolvida no seu funcionamento, a fim de que o uso e a apropriação dos recursos digitais não ocorram a partir do estabelecimento de propostas totalmente mecanicistas, com um fim em si mesmas.

Vários são os recursos tecnológicos à disposição dos professores de Matemática, desde os mais simples, como a calculadora, até ferramentas mais elaboradas, como é o caso dos *softwares*. Todavia, quando fala-se do uso de microcomputadores e seus *softwares* educativos, está se referindo a uma potencial ferramenta que ainda não se encontra, de forma considerável e aceitável, inserida na prática docente do professor de Matemática.

Frente a esse cenário, em que o uso das tecnologias em sala de aula torna-se possível, o ensino de Matemática precisa ser revisto, sendo plausível a inserção de ferramentas tecnológicas no aprendizado da disciplina; para tanto se faz necessário definir ações e estratégias que explorem as potencialidades desses recursos.

É possível substituir os processos de ensino que priorizam a exposição, que levam a um receber passivo do conteúdo, por meio de processos que não estimulem os alunos a participar das aulas. É importante que eles deixem de ver a Matemática como um produto pronto, cuja transmissão é vista como um conjunto estático de conhecimentos e técnicas (D'AMBROSIO, 2012).

Os professores podem contribuir para a melhoria do aprendizado a fim de favorecer o gosto pela Matemática, dando aos alunos a oportunidade de conhecer e explorar essa disciplina tão importante. Destarte, é possível a apresentação aos alunos de conceitos matemáticos de modo que se valorize sua construção do conhecimento. Além disso, o professor pode, sempre que julgar necessário, alterar suas metodologias e usufruir, sempre que possível, dos diferentes recursos, pois não existe uma receita infalível para ensinar matemática.

O ensino da Matemática mediado pelas tecnologias e a utilização das TIC no ensino de conteúdos matemáticos, fornece a possibilidade desses recursos transformarem a prática educativa, afinal envolvem professor e aluno em um ambiente de maior interação e colaboração.

Seguindo a mesma linha de pensamento, os PCN (BRASIL, 1997) referem-se às TIC como um recurso desafiador para a escola: havendo a necessidade de incorporá-la à prática pedagógica como nova ferramenta de apoio; o computador deve ser visto como um recurso didático que favorece enormes possibilidades ao processo ensino-aprendizagem de Matemática. O caráter lógico-matemático dos computadores pode ser um importante aliado ao desenvolvimento cognitivo dos alunos, por permitir distintos ritmos de aprendizagem, por

constituir-se fonte de conhecimento e aprendizagem e por ser uma ferramenta para o desenvolvimento de habilidades, possibilitando a aprendizagem a partir de erros e acertos.

Os *softwares* matemáticos podem ser explorados na realização de diversas tarefas, desenvolvendo o raciocínio e a criatividade do aluno e promovendo situações que despertem a curiosidade e prendam a atenção. Há diversos *softwares* matemáticos muito bons que auxiliam o professor no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

2.2 A Multidisciplinaridade na Educação

A principal característica das relações em que ocorre esse tipo de abordagem é a justaposição de ideias. A multidisciplinaridade estaria hierarquicamente no primeiro nível, de integração entre as disciplinas, quando comparada à interdisciplinaridade. Em definição dada por Nicolescu et al. (2000), a multidisciplinaridade corresponde à busca da integração de conhecimentos por meio do estudo de um objeto de uma mesma e única disciplina ou por várias delas ao mesmo tempo.

A educação multidisciplinar é aquela que estuda um objeto ou determinado assunto pela visão de diversas disciplinas. Sendo assim, é um sistema de ensino que engloba diferentes conteúdos para que os estudantes compreendam mais sobre um tema específico, gerando uma visão geral sobre ele.

Quanto à multidisciplinaridade, Fazenda (2011, p. 27) destaca que se refere à “justaposição de disciplinas diversas desprovidas de relação aparente entre elas”. Isto é, não existe elo entre as disciplinas, pois o conhecimento informado é de cada matéria, não existindo integração entre elas.

De acordo com o conceito de multidisciplinaridade, recorre-se a informações de várias matérias para estudar um determinado elemento, sem a preocupação de interligar as disciplinas entre si. Assim, cada matéria contribuiu com informações próprias do seu campo de conhecimento, sem considerar que existe uma integração entre elas. Essa forma de relacionamento entre as disciplinas é considerada pouco eficaz para a transferência de conhecimentos, que impede uma relação entre os vários conhecimentos.

Segundo Piaget (1973), a multidisciplinaridade ocorre quando

A solução de um problema torna necessário obter informação de duas ou mais ciências ou setores do conhecimento sem que as disciplinas envolvidas no processo sejam elas mesmas modificadas ou enriquecidas.

A multidisciplinaridade é considerada importante para acabar com um ensino extremamente especializado, concentrado em uma única disciplina.

A origem da multidisciplinaridade encontra-se na ideia de que o conhecimento pode ser dividido em partes (disciplinas), resultado da visão cartesiana e depois cientificista na qual a disciplina é um tipo de saber específico e possui um objeto determinado e reconhecido, bem como conhecimentos e saberes relativos a este objeto e métodos próprios. Constitui-se, então, a partir de uma determinada subdivisão de um domínio específico do conhecimento.

Segundo Bassanezi (2011), a modelagem pressupõe multidisciplinaridade. E, nesse sentido, vai ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa.

No contexto da pesquisa, a multidisciplinaridade é trabalhada pela junção dos conhecimentos para um resultado com maiores expectativas. Através de um mesmo objetivo, fazer com que o protótipo da barragem se rompesse.

2.3 A Interdisciplinaridade na Educação

Conforme Fazenda (1991, p. 39), a interdisciplinaridade é “uma relação de reciprocidade, de mutualidade, que pressupõe uma atitude diferente a ser assumida frente ao problema de conhecimento, ou seja, é a substituição de uma concepção fragmentária para unitária do ser humano”, ou seja, da capacidade de estabelecer relações entre os diferentes conhecimentos, em um mundo de relações.

Nos PCN, Brasil (1998), foi verificado uma considerável abordagem dos denominados temas transversais, como: Ética, Orientação Sexual, Meio Ambiente, Saúde, Pluralidade Cultural, Trabalho e Consumo. Fica subentendido que trabalhar esses temas nas aulas de todas as disciplinas tende naturalmente a um caráter interdisciplinar. Na proposta da BNCC, a questão interdisciplinar é frequentemente destacada em todas as fases de ensino, da educação infantil ao ensino médio. Tratando do ensino médio é apresentado na proposta da BNCC, Brasil (2015), que, assim como nas outras fases:

a articulação interdisciplinar é igualmente importante no interior de cada área do conhecimento ou entre as áreas, como ao tratar questões econômicas ou sociais, a obtenção e distribuição de energia ou a sustentabilidade socioambiental, envolvendo, por exemplo, história, sociologia, geografia e ciências naturais. Particularmente cálculos e algoritmos matemáticos, essenciais às ciências naturais, demandam de correlações entre diversos aprendizados e articulação entre formulação teórica e aplicações práticas (BRASIL, 2015, p. 11).

Quando a prática desenvolvida com o SBRF é realizada, é possível contemplar a interdisciplinaridade de forma efetiva, pois professores de diferentes áreas desenvolveram parcerias consideráveis para um melhor entendimento sobre as barragens e quais as principais situações para o rompimento de uma barragem.

Salienta-se que a interdisciplinaridade não tem como função criar uma nova disciplina, mas sim utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema ou compreender determinados fenômenos por diferentes pontos de vista, tudo conforme as diversas situações do cotidiano.

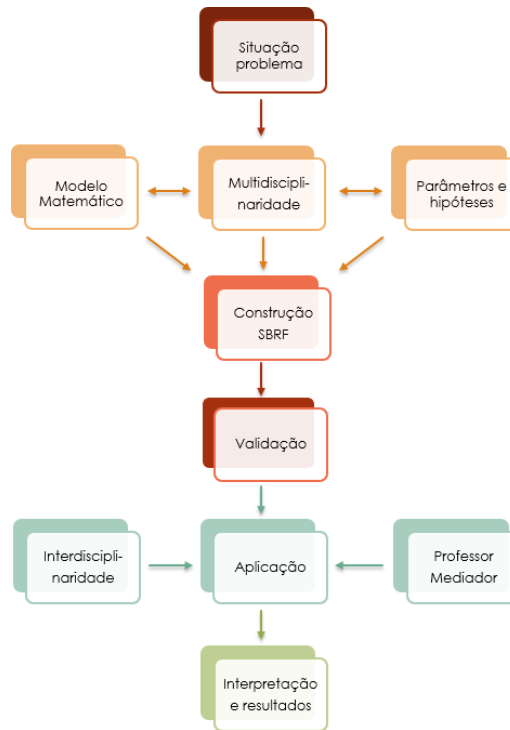
É importante, desse modo, estabelecer de forma clara o que é uma atitude ou um comportamento interdisciplinar. De acordo Fazenda (2013), o termo interdisciplinaridade apresenta inúmeros conceitos e entendimentos, podendo ser interpretado de maneira equivocada como sinônimo de multidisciplinaridade, pluridisciplinaridade e transdisciplinaridade. De uma forma geral, todos esses conceitos refletem práticas pedagógicas que contribuem para a relação existente entre as disciplinas do currículo escolar.

Na modelagem matemática tudo deve partir de um assunto, tema de interesse do grupo ou dos grupos (BURAK, 1994). Esse fato possibilita ao professor mediador, atento às possibilidades oferecidas pela prática com essa metodologia, fazer acontecer a contextualização, a resolução de problemas e a interdisciplinaridade. Para este autor, esses três elementos surgem naturalmente quando o professor, que adota a Modelagem em sua prática docente possui um significativo conhecimento da metodologia, aproveita cada situação que é contemplada no desenvolvimento do tema para enriquecer o processo de ensino e de aprendizagem, relacionando várias outras áreas do conhecimento.

2.4 Modelagem Matemática

A Figura 1 é um esquema que mostra as fases do desenvolvimento do estudo realizado neste trabalho. O esquema apresenta as atividades do processo de construção deste trabalho, desenvolvendo a situação problema que é risco de rompimento da barragem, através da interação com professores dos cursos da Engenharia Civil e Geografia, o conceito da multidisciplinaridade foi aplicado, assim trabalhando em conjunto, os parâmetros e hipóteses, apresentado pelo especialista (Anexo). O modelo matemático elaborado para a resolução do problema, resultando na construção do SBRF. Após a validação do estudo realizado, concretizando com a aplicação que pode ser trabalhada com outras disciplinas para um melhor entendimento do tema e com a ação do professor mediador, foi realizada. Conclui-se com os resultados significativos da avaliação do aprendizado da lógica *fuzzy* pelos estudantes.

Figura 1 - Esquema das fases do desenvolvimento do trabalho.



Fonte: Elaborado pela autora.

É preciso repensar as práticas pedagógicas para se trabalhar com o conteúdo de matemática. Nas escolas, são conhecidos o desinteresse e a dificuldade dos estudantes com a prática da matemática, fazendo-se necessário desenvolver atividades que atraiam e motivem os estudantes e os coloquem como sujeitos ativos no processo de aprendizagem. A partir desses pressupostos, apresenta-se a modelagem matemática como alternativa de ensino, com desenvolvimento de atividades que levem o estudante a construir o seu próprio conhecimento, por meio de relações concretas.

A modelagem matemática permite refletir sobre a realidade, entendendo-a – ao selecionar argumentos – e agindo sobre ela, ao formalizá-la, por meio de um modelo. Segundo Bassanezi (1994),

Modelagem Matemática é um processo que consiste em traduzir uma situação ou tema do meio em que vivemos para uma linguagem matemática. Essa linguagem, que denominamos Modelo Matemático, pressupõe um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam o fenômeno em questão (BASSANEZI, 1994, p. 01).

No contexto escolar, é suficiente um modelo matemático básico, mesmo que não apresente fielmente os dados experimentais, desde que atinja os objetivos propostos e de interesse do aluno e que seja validado pela comparação dos dados modelados com os dados

experimentais (BERTONE; BASSANEZI; JAFELICE, 2014), ou seja, o processo de modelar o que leva à aprendizagem.

A modelagem matemática tem aplicação nas mais diversas áreas da ciência, como física, biologia, economia e engenharias. Com o advento das tecnologias digitais, tornou-se possível fazer simulações dos mais diversos fenômenos e prever seu comportamento: pode-se prever a ocorrência de terremotos, analisar a resistência de uma estrutura de concreto no projeto de edifícios e estimar a probabilidade de chuvas por meio de modelagem matemática e tecnologia computacional.

Sobre o ensino de Matemática por meio da Modelagem a BNCC informa que:

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental (BRASIL, 2017, p. 266).

No corpo da BNCC a palavra modelagem é anunciada algumas vezes, a maioria na área de Matemática. No entanto, no documento não se encontra como se fazer essa modelagem, e que concepções de Modelagem Matemática podem ser seguidas ou adaptadas. Isso se deve ao fato de que o objetivo da BNCC não é de propor metodologias e sim de propor “uma Base para toda a Educação Básica brasileira” (BNCC, 2017, p. 5).

Sobre Modelagem Matemática, encontrei na literatura algumas concepções que norteiam o seu estudo, o seu trabalho e a sua pesquisa. Bassanezi (2011) a entende como a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. A Modelagem Matemática nessa concepção pode ser compreendida através do esquema da Figura 2, as setas vermelhas indicam a primeira aproximação e as setas verdes a busca de um modelo matemático que melhor descreva o problema estudado (BASSANEZI, 2011).

Consiste nas seguintes etapas:

- 1) Experimentação: Atividade onde se processa a obtenção dos dados;
- 2) Abstração: Formulação do modelo matemático, seleção de variáveis, problematização ou formulação de problemas, formulação de hipóteses, simplificação do problema;
- 3) Resolução: Etapa em que o programa é resolvido utilizando teoria analítica ou numérica;
- 4) Validação: É o processo de aceitação ou não do modelo proposto;

informes feitos pela BNCC acerca do uso da Modelagem, considero relevante para o ensino de Matemática na Educação Básica compartilhar como se deu o desenvolvimento de uma atividade baseada em características do processo de Modelagem Matemática alinhada com a proposta curricular da BNCC.

2.5 O Professor Mediador

Nos PCN é constatado que, ao tratar da relação professor-aluno, a função de mediador, por parte do professor, defendida:

Além de organizador, o professor também é facilitador nesse processo. Não mais aquele que expõe todo o conteúdo aos alunos, mas aquele que fornece as informações necessárias, que o aluno não tem condições de obter sozinho. Nessa função, faz explanações, oferece materiais, textos etc. Outra de suas funções é como mediador, ao promover a análise das propostas dos alunos e sua comparação, ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar, contestar. Nesse papel, o professor é responsável por arrolar os procedimentos empregados e as diferenças encontradas, promover o debate sobre resultados e métodos, orientar as reformulações e valorizar as soluções mais adequadas. Ele também decide se é necessário prosseguir o trabalho de pesquisa de um dado tema ou se é o momento de elaborar uma síntese, em função das expectativas de aprendizagem previamente estabelecidas em seu planejamento (BRASIL, 1998, p. 38)

Essa citação dos PCN está muito próxima das concepções de Modelagem. Até parece que se está apresentando parte de uma delas, mas o objetivo dessas colocações nos PCN é enfatizar a importância de se romper com o ensino da Matemática em que tudo parte do professor, motivando a participação dos estudantes, sendo o professor um orientador do processo.

Segundo a proposta da BNCC, Brasil (2015, p. 134), “a Matemática não é e não pode ser vista pela escola como um aglomerado de conceitos antigos e definitivos a serem transmitidos aos estudantes”. Muitas vezes observa-se na prática de alguns professores, que os mesmos exercem apenas o papel de transmissor de conhecimentos antigos e definitivos, como sugerido na versão preliminar da BNCC. Na Modelagem, o papel que deve ser assumido pelo professor é o de mediador do processo de ensino e de aprendizagem, como sugerido em Burak (2004) e Klüber e Burak (2008).

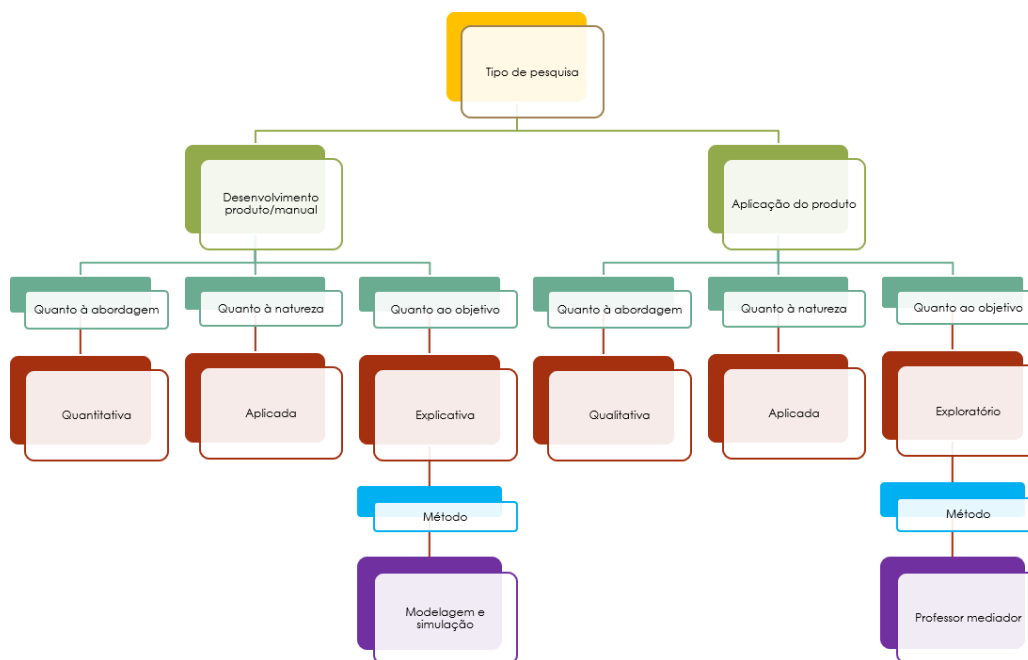
Professor e estudantes são beneficiados quando compartilham seus conhecimentos. As aulas tornam-se mais agradáveis e significativas para ambos.

Pode-se então destacar que, desde a publicação dos PCN até hoje, ainda são apresentadas propostas aos professores para que os mesmos procurem deixar a postura de detentores únicos do conhecimento e se tornem mediadores do processo de ensino e de aprendizagem, valorizando o conhecimento e interesse dos estudantes. A Modelagem vai ao encontro dessas propostas como observado nas práticas relatadas na dissertação.

3. Metodologia

Neste trabalho é apresentada uma pesquisa que visou a produzir conhecimento com a relação entre teoria e atividades práticas por meio do produto educacional, modelagem matemática e uso de tecnologias digitais. A conduta é um tipo de pesquisa combinada, quantitativa e qualitativa. A primeira foi utilizada para o desenvolvimento do produto deste trabalho. A segunda abordagem é relativa à aplicação do produto, através das aulas que nesse caso foi de forma *online*. Segundo Turrioni e Mellos (2012, p. 81), “A pesquisa combinada considera que o pesquisador pode combinar aspectos das pesquisas qualitativas e quantitativas em todos ou em algumas das etapas do processo de pesquisa”. A Figura 3 exibe a estrutura do tipo de pesquisa utilizada neste trabalho.

Figura 3 - Esquema do tipo de pesquisa.



Fonte: Adaptado de Turrioni e Mellos (2012) e Ludke e André (1986).

A metodologia modelagem e simulação que possuem abordagem quantitativa e natureza aplicada está presente na construção dos recursos didáticos descritos no manual. A simulação do controle da barragem pelo SBRF exigiu muita experimentação e testes empíricos, como afirma Alves (2013):

A modelagem e a simulação são utilizadas quando o objetivo da pesquisa é experimentar, por meio de um modelo, um sistema real, determinando-se como esse sistema responde a modificações que lhe são propostas (ALVES, 2013, p. 94).

A pesquisa também é qualitativa, o que ajuda a desenvolver ideias e hipóteses para as pesquisas quantitativas em potencial: estuda as características individuais e coletivas dos indivíduos observados em relação aos recursos educacionais e tecnológico acrescentados na pesquisa e sua efetividade na motivação dos estudantes. Além disso, a abordagem qualitativa permite ao pesquisador estar em contato com o ambiente de pesquisa, que, com base em observação e registro de fatos, auxilia na compreensão e na interpretação do fenômeno estudado. Segundo Silva e Menezes (2005, p. 20), a pesquisa qualitativa:

[...] considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. É descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem (SILVA; MENEZES, 2005, p.20).

Com o propósito de responder à pergunta norteadora da pesquisa – como propor uma sequência didática da lógica *fuzzy*? –, foram realizadas atividades com ex-alunos que atualmente cursam o ensino médio em Escolas Estaduais e Particulares, no município de Uberlândia, região do Triângulo Mineiro, no estado de Minas Gerais. Os recursos desenvolvidos fazem parte do produto desta pesquisa e foram utilizados para apresentar o conceito de conjuntos *fuzzy*.

Para a atingir os objetivos propostos, a pesquisa foi dividida em quatro fases (MELAZZO, 2020):

- fase exploratória de definição do produto – definiram-se quais recursos educacionais e recurso tecnológicos seriam desenvolvidos e as ferramentas envolvidas.

- fase de modelagem dos recursos educacionais – demonstrou-se a matemática envolvida em cada atividade planejada meio da modelagem matemática. Os detalhes de desenvolvimento são apresentados no produto resultante desta pesquisa em formato de manual.

- fase de planejamento das atividades – prepararam-se as atividades para serem aplicadas.

- fase de aplicação das atividades – devido a pandemia da COVID 19, aplicou-se de forma *online*, os recursos desenvolvidos e fez-se o relato das atividades realizadas.

4. Desenvolvimento

O pressuposto teórico do trabalho é o construcionismo de Piaget (VALENTE, 1999), definido como a construção do conhecimento por meio do computador. Esse pressuposto tem como objetivo colocar o estudante como sujeito ativo no desenvolvimento do próprio conhecimento, a partir da utilização de *softwares*, ou seja, o estudante desenvolve uma ação concreta, o que torna o processo estimulante e com significado para o estudante.

O trabalho é desenvolvido de forma a integrar a realidade, através da modelagem matemática, contribuindo, assim, para o aprendizado sobre as barragens e o impacto ambiental que o seu rompimento causa.

Ao longo do planejamento do trabalho, algumas perguntas foram levantadas:

- como propor uma sequência didática da lógica *fuzzy*?
- é possível ensinar lógica *fuzzy* no ensino médio?

O resultado da aprendizagem da teoria dos conjuntos *fuzzy* foi significativo, a partir da interação com materiais concretos. De fato, a junção de materiais concretos e tecnológicos contribuiu para que os estudantes visualizassem o rompimento da barragem, de forma mais realista.

4.1 Conjuntos *Fuzzy*

Definição: Um conjunto *fuzzy* A do universo U é caracterizado por uma função de pertinência:

$$\mu_A: U \rightarrow [0,1]$$

Esta função é chamada função de pertinência do conjunto *fuzzy* A . O valor $\mu_A(x)$ da função é interpretado como o grau com que o elemento x pertence ao conjunto *fuzzy* A , ou seja, $\mu_A(x) = 0$ indica a não pertinência do x à A , e o $\mu_A(x) = 1$ indica pertinência total ao conjunto A .

Um conjunto *fuzzy* A também pode ser identificado por um conjunto clássico de pares ordenados:

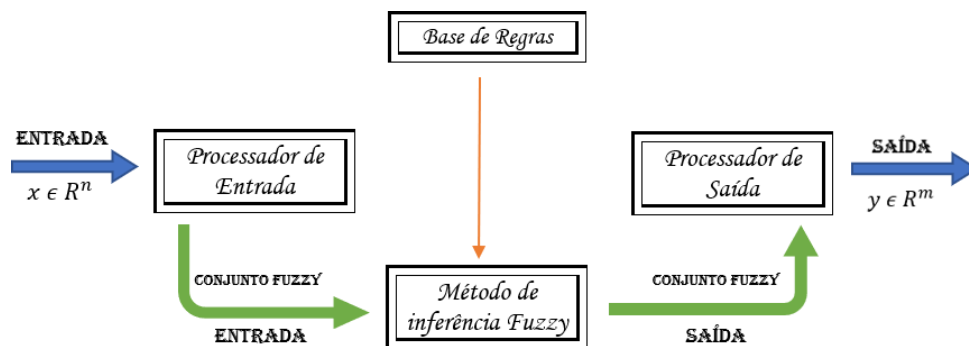
$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\}.$$

Para descrever o conhecimento sobre os fenômenos em estudo, utilizam-se variáveis linguísticas. Estes termos, traduzidos por conjuntos *fuzzy*, estão relacionados através de uma proposição *fuzzy*. Estas proposições conectam as variáveis através de operadores lógicos como: “e”, “ou”, “então” e compõem um conjunto de regras *fuzzy* conhecido como base de regras. A seguir definimos o SBRF.

4.2 Sistema Baseado em Regras *Fuzzy*

O SBRF contém quatro componentes: um processador de entrada que realiza a fuzzificação dos dados de entrada; uma coleção de regras *fuzzy* chamada base de regras; um método de inferência *fuzzy*; e um processador de saída, que fornece um número real como saída (JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2012). Estes componentes estão conectados conforme a Figura 4, em que os conjuntos R^n e R^m estão definidos para $n \geq 1$ e $m \geq 1$ dois números naturais.

Figura 4 - Estrutura do Sistema Baseado em Regras *Fuzzy*.



Fonte: Elaborado pela autora.

Processador de Entrada (Fuzzificação)

Neste componente as entradas do sistema são traduzidas em conjuntos *fuzzy* em seus respectivos domínios. A atuação de um especialista na área do fenômeno a ser modelado é de fundamental importância para colaborar na construção das funções de pertinências para a descrição das entradas.

Base de Regras

Este componente, juntamente com o método de inferência, pode ser considerado o núcleo dos sistemas baseados em regras *fuzzy*. Ele é composto por uma coleção de proposições *fuzzy* na forma: “Se...então...”. Cada uma destas proposições pode, por exemplo, ser descrita linguisticamente, de acordo com o conhecimento de um especialista. A base de regras descreve relações entre as variáveis linguísticas, para serem utilizadas no método de inferência *fuzzy*, que descrevemos a seguir.

Método de Inferência *Fuzzy*

É neste componente que cada proposição *fuzzy* é traduzida matematicamente por meio das técnicas de raciocínio aproximado. Os operadores matemáticos serão selecionados para definir a relação *fuzzy* que modela a base de regras. Desta forma, o método de inferência *fuzzy* é de fundamental importância para o sucesso do sistema *fuzzy*, já que fornece a saída a partir de cada entrada *fuzzy* e da relação definida pela base de regras para entendimento do Método de Inferência de Mamdani. De modo a simplificar o método de inferência *fuzzy*, somente um modelo de regras com duas entradas e uma saída é ilustrado.

Método de Inferência de Mamdani

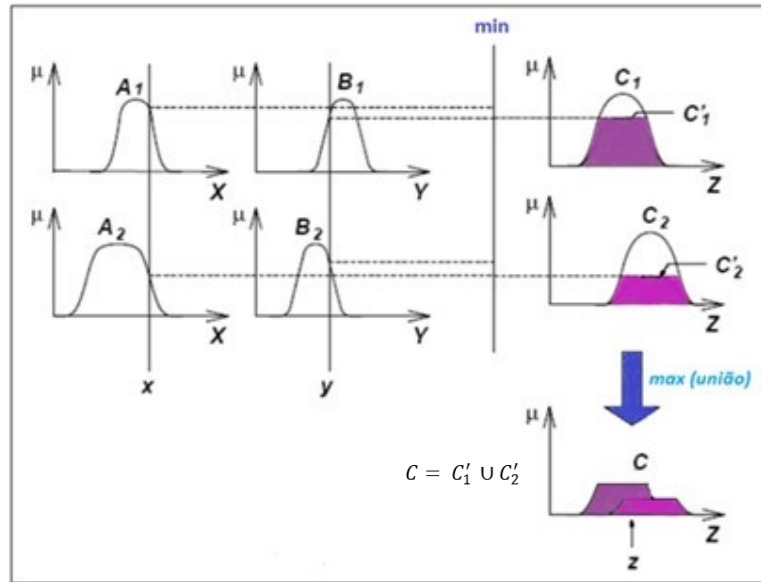
Uma regra Se (antecedente) então (consequente) é definida pelo produto cartesiano *fuzzy* dos conjuntos *fuzzy* que compõem o antecedente e o consequente da regra. O método de Mamdani agrega as regras através do operador lógico “OU”, que é modelado pelo operador máximo e, em cada regra, o operador lógico “E” é modelado pelo operador mínimo. Veja as regras a seguir:

Regra 1: Se (x é A_1 e y é B_1) então (z é C_1).

Regra 2: Se (x é A_2 e y é B_2) então (z é C_2).

A Figura 5 ilustra como uma saída real z de um sistema de inferência do tipo Mamdani é gerada a partir das entradas x e y reais e a regra de composição max-min.

Figura 5 - Método de Inferência de Mamdani *Fuzzy*.



Fonte: Elaborado pela autora.

A saída z é obtida pela defuzzificação do conjunto *fuzzy* de saída C da Figura 2.

Processador de Saída (Defuzzificação)

Na teoria dos conjuntos *fuzzy* pode-se dizer que a defuzzificação é um processo de se representar um conjunto *fuzzy* por um número real. Em sistemas *fuzzy*, em geral, a saída é um conjunto *fuzzy*. Assim, devemos escolher um método para defuzzificar a saída e obter um número real que a represente.

A seguir, apresenta-se o método mais comum de defuzzificação.

Centro de gravidade

Este método de defuzzificação é semelhante à média ponderada para distribuição de dados, com a diferença que os pesos são os valores $\mu_C(z_i)$ que indicam o grau de compatibilidade do valor z_i com o conceito modelado pelo conjunto *fuzzy* C . Para o domínio discreto tem-se:

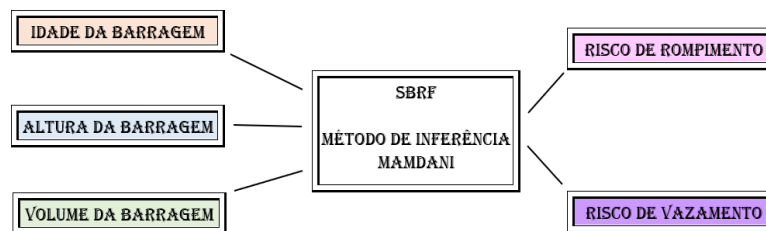
$$G(C) = \frac{\sum_{i=0}^n z_i \mu_C(z_i)}{\sum_{i=0}^n \mu_C(z_i)}$$

4.3 Sistema Baseado em Regras *Fuzzy* para Rompimento de uma Barragem de Rejeitos

Para modelar o rompimento ou vazamento da barragem de rejeitos e formular o SBRF, foram consideradas as variáveis de entrada idade, altura e volume da barragem. A estrutura do SBRF é apresentada na Figura 6. O método de inferência *fuzzy* utilizado foi o de Mamdani, e o método de defuzzificação foi o centro de gravidade.

Como variável linguística do SBRF, a idade da barragem foi considerada nova (até 20 anos), média (entre 20 e 40 anos) ou velha (entre 40 e 60 anos). As idades foram determinadas conforme a matriz de classificação de risco da planilha compartilhada da ANEEL.

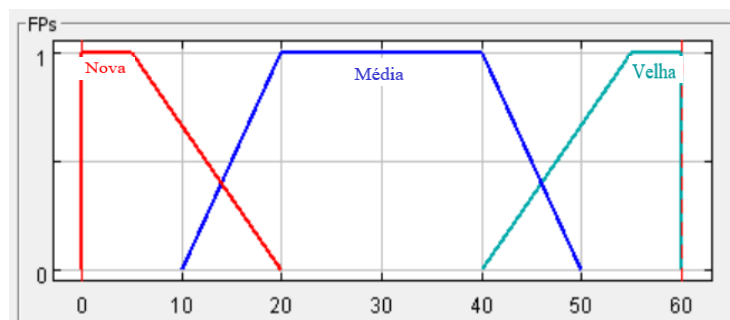
Figura 6 - Estrutura do SBRF construído com as variáveis de entrada idade, altura e volume da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na Figura 7 são apresentados os gráficos das funções da variável de entrada idade da barragem. Os termos linguísticos são: Nova, Média e Velha.

Figura 7 - Funções de pertinência (FPs) da variável idade da barragem em anos.

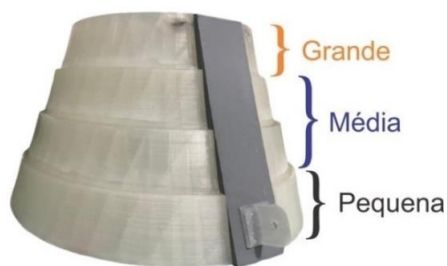


Fonte: Elaborado pela autora por meio do *software FisPro*.

O protótipo da barragem construído na impressora 3D tinha 16 centímetros de altura. Assim, o domínio da variável linguística foi de 0 a 16 centímetros e dividiu-se em três intervalos, correspondendo ao domínio dos conjuntos *fuzzy* relativos à altura denominados:

Pequena, Média e Grande. A Figura 8 é a imagem da barragem impressa e a indicação de sua altura com os termos linguísticos.

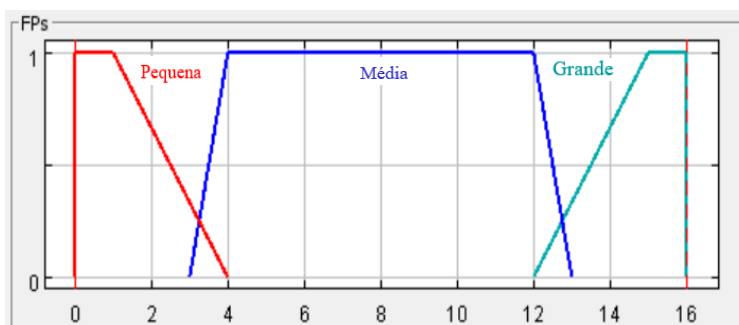
Figura 8 - Faixa de domínio dos conjuntos *fuzzy* referentes à altura da barragem impressa em 3D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na Figura 9 são apresentados os gráficos das funções de pertinência da variável de entrada altura da barragem. Os termos linguísticos da altura da barragem são: Pequena, Média e Grande.

Figura 9 - Funções de pertinência (FPs) da variável altura da barragem em centímetros.



Fonte: Elaborado pela autora por meio do *software FisPro*.

O formato da barragem impressa é o de um tronco de cone. O cálculo do volume foi realizado da seguinte forma:

$$V = \frac{\pi h}{3} [R^2 + Rr + r^2],$$

em que **V** = volume, **h** = altura, **R** = raio maior e **r** = raio menor.

Considerou-se a contagem dos degraus de baixo para cima.

Volume do primeiro degrau

Diâmetro maior: 24 cm

Raio: 12 cm

Diâmetro menor: 22 cm

Raio: 11 cm

$V = 1662,10 \text{ cm}^3$

Volume do segundo degrau

Diâmetro maior: 21 cm

Raio: 10,5 cm

Diâmetro menor: 19 cm

Raio: 9,5 cm

$V = 1257,04 \text{ cm}^3$

Volume do terceiro degrau

Diâmetro maior: 18 cm
Raio: 9 cm
Diâmetro menor: 16 cm
Raio: 8 cm
 $V = 90850 \text{ cm}^3$

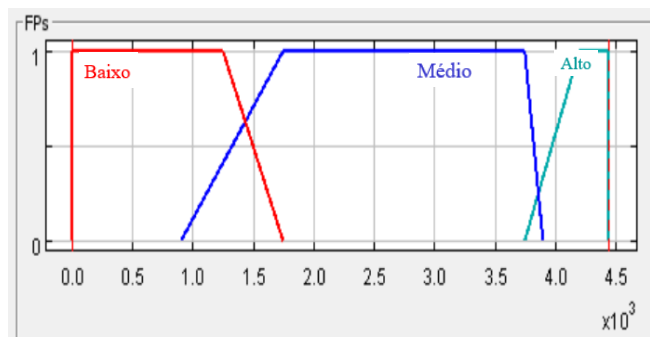
Volume do quarto degrau

Diâmetro maior: 15 cm
Raio: 7,5 cm
Diâmetro menor: 13 cm
Raio: 6,5 cm
 $V = 61648 \text{ cm}^3$

Volume total da barragem impressa em 3D: 4444,12 cm³.

O domínio do volume da barragem é $[0, 4444,12]$. As faixas consideradas são: menor do que 1662,10; de 1662,10 a 3827,64; e maior do que 3827,64, com os termos linguísticos Baixo, Médio e Alto, respectivamente. Na Figura 10 são apresentados os gráficos das funções de pertinência da variável de entrada volume da barragem.

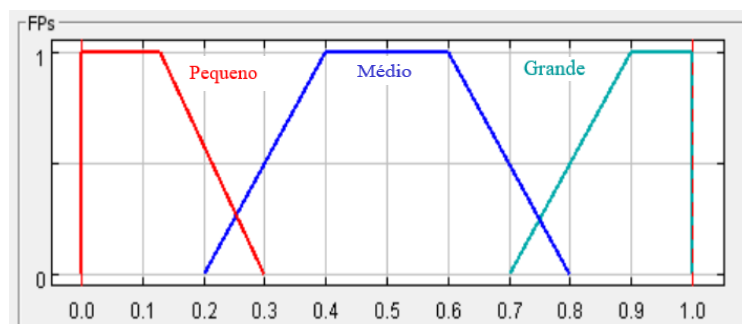
Figura 10 - Funções de pertinência (FPs) da variável volume da barragem em centímetros cúbicos.



Fonte: Elaborado pela autora por meio do software *FisPro*.

Na Figura 11 são apresentados os gráficos das funções de pertinência do risco de rompimento da barragem. Os termos linguísticos são: Pequeno, Médio e Grande.

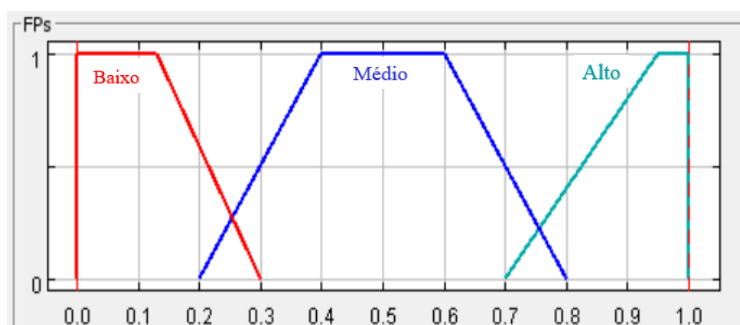
Figura 11 - Funções de pertinência (FPs) do risco de rompimento.



Fonte: Elaborado pela autora por meio do software *FisPro*.

Na Figura 12 são apresentados os gráficos das funções de pertinência da variável de saída risco de vazamento. Os termos linguísticos são: Baixo, Médio e Alto.

Figura 12 - Funções de pertinência (FPs) do risco de vazamento.



Fonte: Elaborado pela autora por meio do software FisPro.

A base de regras *fuzzy* foi construída e analisada com a orientação do especialista em barragens. As regras *fuzzy* são apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1 - Base de regras *fuzzy*.

Idade da barragem	Altura da barragem	Volume da barragem	Risco de rompimento	Risco de vazamento
<i>Nova</i>	<i>Pequena</i>	<i>Baixo</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Nova</i>	<i>Pequena</i>	<i>Médio</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Alto</i>
<i>Nova</i>	<i>Pequena</i>	<i>Alto</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Alto</i>
<i>Nova</i>	<i>Média</i>	<i>Baixo</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Nova</i>	<i>Média</i>	<i>Médio</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Nova</i>	<i>Média</i>	<i>Alto</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Alto</i>
<i>Nova</i>	<i>Alta</i>	<i>Baixo</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Nova</i>	<i>Alta</i>	<i>Médio</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Nova</i>	<i>Alta</i>	<i>Alto</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Média</i>	<i>Pequena</i>	<i>Baixo</i>	<i>Médio</i>	<i>Baixo</i>
<i>Média</i>	<i>Pequena</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>
<i>Média</i>	<i>Pequena</i>	<i>Alto</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>
<i>Média</i>	<i>Média</i>	<i>Baixo</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Média</i>	<i>Média</i>	<i>Médio</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Média</i>	<i>Média</i>	<i>Alto</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>
<i>Média</i>	<i>Alta</i>	<i>Baixo</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Média</i>	<i>Alta</i>	<i>Médio</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Média</i>	<i>Alta</i>	<i>Alto</i>	<i>Médio</i>	<i>Baixo</i>
<i>Velha</i>	<i>Pequena</i>	<i>Baixo</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Velha</i>	<i>Pequena</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>
<i>Velha</i>	<i>Pequena</i>	<i>Alto</i>	<i>Grande</i>	<i>Alto</i>
<i>Velha</i>	<i>Média</i>	<i>Baixo</i>	<i>Médio</i>	<i>Baixo</i>
<i>Velha</i>	<i>Média</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>	<i>Baixo</i>
<i>Velha</i>	<i>Média</i>	<i>Alto</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>
<i>Velha</i>	<i>Alta</i>	<i>Baixo</i>	<i>Médio</i>	<i>Baixo</i>
<i>Velha</i>	<i>Alta</i>	<i>Médio</i>	<i>Grande</i>	<i>Baixo</i>
<i>Velha</i>	<i>Alta</i>	<i>Alto</i>	<i>Grande</i>	<i>Baixo</i>

Para exemplificar uma regra *fuzzy*:

Se a idade da barragem é velha, a altura da barragem é média e o volume da barragem é médio então o risco de rompimento é médio e o risco de vazamento é baixo.

Após a construção do SBRF no *software* livre *FisPro* inserindo-se os dados de entrada, foi possível obter o risco de rompimento e vazamento da barragem. Veja-se o exemplo.

Considerem-se os valores das variáveis de entrada: idade da barragem = 57 anos; altura da barragem = 6 cm; volume da barragem = 3.800 cm³.

Os valores das variáveis de saída são: o risco de rompimento é 0.5; e o risco de vazamento é 0.236.

Nas Figuras 13 e 14 são mostradas as imagens da maquete de acrílico construída com a barragem impressa e algumas peças para ilustrar uma cidade.

Figura 13 – Protótipo da Maquete 3D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 14 – Protótipo da Maquete 3D.



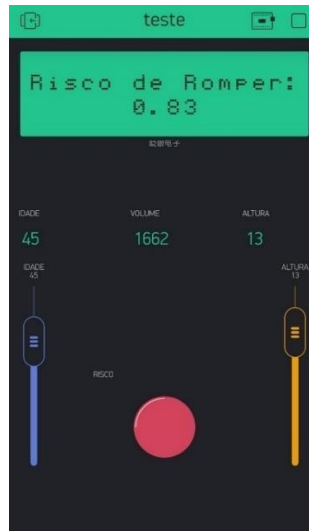
Fonte: Elaborado pela autora.

O engenheiro elétrico e mestre em Ensino de Ciência e Matemática, Marcelo Melazzo Rodrigues, instalou o SBRF na barragem da maquete 3D, os procedimentos realizados são descritos a seguir.

O SBRF construído anteriormente é programado em linguagem C na placa eletrônica ESP8266 através de uma biblioteca *fuzzy* (ALVES, 2012). Na Figura 15 é apresentada uma foto desta placa. A programação na placa é realizada através da plataforma Arduino. Na Figura 16 é apresentado o ambiente de programação da plataforma Arduino.

calculado pela altura da quantidade de bolinhas de gel inseridas pelo estudante no início da atividade.

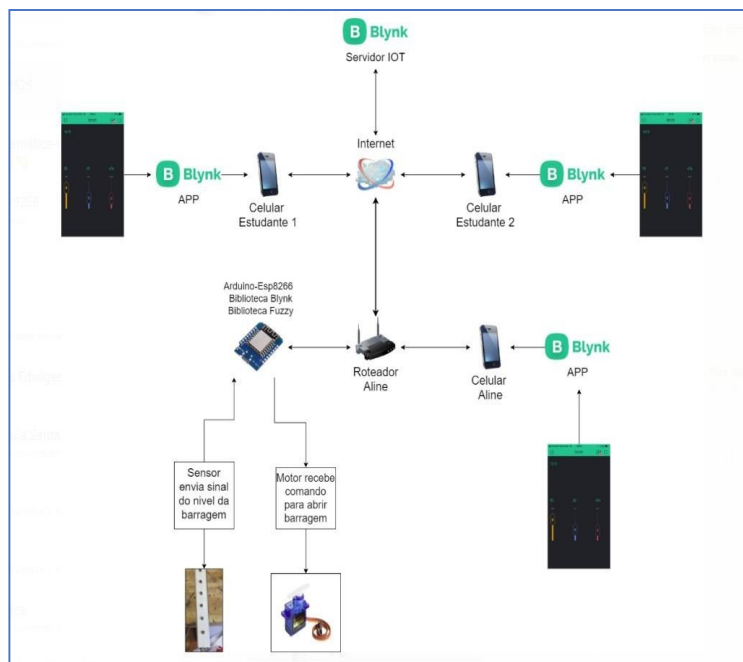
Figura 17 - Plataforma *Blynk* com três cursores indicando as variáveis de entrada e um demonstrativo de saída do SBRF.



Fonte: Aplicativo *Blynk*.

A Figura 18 apresenta um esquema do funcionamento do controle do rompimento da barragem.

Figura 18 - Esquema de conexão dos sensores com os celulares.



Fonte: Elaborado pela autora.

Os estudantes antes de utilizarem este dispositivo, terão em aulas anteriores a introdução da teoria dos conjuntos *fuzzy* e construirão SBRF similar no *software* livre *FISPRO*. Tem como pressuposto teórico o construcionismo, definido como a construção do conhecimento por meio do computador e faz referência ao construtivismo de Piaget (VALENTE, 1999). Este pressuposto tem como objetivo colocar o aluno como sujeito ativo no desenvolvimento do próprio conhecimento a partir da utilização de *softwares*, ou seja, o aluno desenvolve uma ação concreta, o que torna o processo estimulante e com significado para o mesmo.

As atividades foram planejadas tendo por base os recursos educacionais desenvolvidos ao longo das estratégias traçadas. Antes de se iniciarem as atividades em sala de aula, pesquisadora e orientadora reuniram-se diversas vezes para o planejamento em conjunto das atividades, feitos os devidos ajustes na abordagem dos temas relacionados as atividades. Pretende-se avaliar o envolvimento dos estudantes com as atividades a serem desenvolvidas e se terá o efeito motivador no ensino através da maquete 3D de forma lúdica.

Na próxima seção é detalhada a proposta de atividade educacional que envolve o conteúdo da teoria do conjunto *fuzzy* utilizando o *software* livre *FisPro* para a construção do SBRF e ajustar a maquete 3D. O público alvo para a atividade são os alunos do ensino médio, com o objetivo de revisar conceitos de conjunto numérico e lógica matemática, além de aprender o novo conceito de conjuntos *fuzzy* por meio de modelagem matemática e programação computacional.

4.4 Detalhamento das Atividades

As atividades ocorreram em dez aulas de forma remota, cada uma com uma hora de duração, e estão expostas no Quadro 2, que apresenta a sequência didática com o conteúdo e os recursos utilizados. Inicialmente, os conceitos de conjuntos clássicos foram revistos (Apêndice).

Essas atividades foram apresentadas para a turma que cursava a disciplina de Modelagem Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, ministrada pela minha orientadora Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice, no dia 19 junho de 2021. Compartilhei alguns relatos do minicurso que havia sido finalizado na semana da apresentação, os colegas de curso tiraram algumas dúvidas sobre a construção do projeto, podendo ajudar na elaboração de seus próprios projetos.

1ª AULA – MOTIVACIONAL		
CONTEÚDOS	DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
- Rompimento da barragem	No intuito de motivar os estudantes, para o estudo da modelagem <i>fuzzy</i> do risco do rompimento da barragem, inicialmente, apresenta-se o vídeo de uma barragem de rejeitos se rompendo (https://www.youtube.com/watch?v=ioyMjZikiW8). Através do vídeo, os estudantes são desafiados a desenvolverem as atividades para controlar o risco de rompimento da barragem.	- Data <i>show</i> - Vídeo
2ª AULA – CONJUNTOS NUMÉRICOS		
CONTEÚDOS	DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
- Relação de pertinência - Relação de inclusão - Conjunto vazio - Conjunto unitário	Essa atividade tem caráter motivacional e exemplificativo. O objetivo é realizar dinâmicas de forma que os estudantes sejam os elementos divididos em grupos que formam conjuntos. Em seguida, são orientados a encontrar alguma semelhança entre si. As dinâmicas têm como objetivo exemplificar a relação de pertinência e de inclusão, de conjunto vazio e unitário. O educador pode instigar os estudantes a expressarem matematicamente esses conjuntos.	- Quadro-negro - Papel
3ª AULA – OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS		
CONTEÚDOS	DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
- União de conjuntos - Interseção de conjuntos - Conjunto complementar	Em grupos, os estudantes interagem e, com a orientação do educador, continuam as dinâmicas da aula anterior, agora focadas nas operações entre conjuntos. Os grupos são reorganizados, e solicita-se que os estudantes encontrem as semelhanças entre si e realizem as operações matemáticas associadas a esses conjuntos. Novamente, o educador pode instruir os estudantes a formalizarem matematicamente os conceitos revistos.	- Quadro-negro - Papel
4ª AULA – AVALIAÇÃO DO APRENDIZADO		
CONTEÚDO	DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
- Conjuntos clássicos numéricos.	Um jogo com questões no <i>software</i> livre <i>RPGMAKER</i> avalia os estudantes quanto ao conteúdo de conjuntos numéricos. O jogo é constituído de fases, de modo que cada fase possui dicas da resolução do problema que deve ser resolvido para se passar para a próxima fase. Os estudantes realizaram a atividade individualmente.	- Jogo no <i>RPG Maker</i>
5ª AULA – LÓGICA MATEMÁTICA		
CONTEÚDO	DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
- Lógica clássica - Lógica <i>fuzzy</i>	Proposições associadas à lógica <i>fuzzy</i> , com as condições das proposições mencionadas pelo educador, fazem com que os estudantes formem grupos. Essas proposições trazem a incerteza na formação dos conjuntos, o que faz com que os estudantes iniciem o entendimento da lógica <i>fuzzy</i> .	- Quadro-negro - Papel

6ª AULA – FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA		
CONTEÚDO	DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
<ul style="list-style-type: none"> - Conjuntos <i>fuzzy</i> - Grau de pertinência - Função de pertinência triangular - Função de pertinência trapezoidal 	<p>A motivação se realiza com a exemplificação de conjuntos <i>fuzzy</i>, como o conjunto das pessoas altas, das pessoas jovens, entre outros. Nesse momento, o educador apresenta aos estudantes gráficos para ilustrar os conjuntos <i>fuzzy</i>. Os estudantes classificam o grau de pertinência dos conjuntos mencionados anteriormente, determinando o melhor intervalo para analisar a proposição. Quando o conjunto atinge o grau de pertinência 1, em apenas um ponto temos a função de pertinência triangular. Para exemplificar esse tipo de função de pertinência, será considerado um conjunto de horas em torno do meio-dia (12h); das 6h e às 18h; nesse conjunto, haverá grau de pertinência 0 e, às 12h, grau de pertinência 1. No caso da função de pertinência trapezoidal, um intervalo tem grau de pertinência 1. Para ilustrar esta definição, pode-se utilizar uma jarra com capacidade de 1 litro, de modo que o conceito de jarra cheia e vazia seja trabalhado; o educador pode inserir 1,1 litro de água, de modo que seja observado que o grau de pertinência para a jarra cheia permanece igual a 1.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - <i>Software Geogebra</i> - Quadro-negro - Papel - Jarra - Água
7ª AULA- OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS FUZZY		
CONTEÚDO	DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
<ul style="list-style-type: none"> - Interseção dos conjuntos <i>fuzzy</i> - União dos conjuntos <i>fuzzy</i> - Complementar dos conjuntos <i>fuzzy</i> 	<p>Utilizando o <i>software Geogebra</i>, a construção de gráficos e a elaboração de exemplos das operações de união, interseção e complementar de conjuntos <i>fuzzy</i> podem ser simples de elaborar e visualizar.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - <i>Software Geogebra</i>
8ª AULA – SISTEMA BASEADO EM REGRAS FUZZY (SBRF)		
CONTEÚDO	DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
<ul style="list-style-type: none"> - Variáveis linguísticas - Sistema Baseado em Regras <i>Fuzzy</i> (SBRF) 	<p>O objetivo desta atividade é orientar nas dúvidas de construção do SBRF. Primeiramente, os estudantes transformam conjuntos de números reais em conjuntos <i>fuzzy</i> através as funções de pertinência, o que é chamado de fuzzificação. Em seguida, as proposições (regras) são definidas e examinadas paralelamente (inferência). O educador pode orientar os estudantes a escolherem um tema para construir um SBRF que os leve a ter uma boa compreensão do assunto. Utilizando-se o <i>software FisPro</i>, os gráficos das funções de pertinência das variáveis linguísticas podem ser construídos, no intuito de se verificar a qualidade de um <i>smartphone</i>. As regras <i>fuzzy</i> podem ser construídas no do próprio <i>software</i> de forma a se associarem as variáveis linguísticas de entrada com a saída.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - <i>Software FisPro</i>

9ª AULA – SISTEMA BASEADO EM REGRAS <i>FUZZY</i> (SBRF) – BARRAGEM		
CONTEÚDO	DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
<ul style="list-style-type: none"> - Sistema Baseado em Regras <i>Fuzzy</i> (SBRF) - Fuzzificação - Inferência - Defuzzificação 	<p>O objetivo da atividade é construir um SBRF similar ao que foi utilizado no controle da barragem impressa. A aula desenvolvida na experiência real com base nesta sequência didática contou com a participação de um especialista na área de hidráulica e saneamento, para conversar com os estudantes, analisar as regras criadas por eles e conversar sobre o problema do rompimento de barragens. Através da maquete construída, que utiliza a plataforma Arduino (placa eletrônica ESP8266), tornou-se fácil o controle das variáveis linguísticas através de <i>smartphone</i>. Assim, dependendo do valor de saída do SBRF, poderia ocorrer o rompimento da barragem.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Maquete - <i>Software FisPro</i> - <i>Blynk</i> - Arduino - <i>Smartphone</i>
10ª AULA – AVALIAÇÃO DO APRENDIZADO		
CONTEÚDO	DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
<ul style="list-style-type: none"> - Teoria dos conjuntos <i>fuzzy</i> 	<p>Na experiência real que tinha como fundamento esta sequência didática, desenvolvida através de um minicurso, houve como atividade final uma competição entre dois grupos, cada um com oito estudantes, acerca de cinco questões relacionadas ao conteúdo de conjuntos <i>fuzzy</i>, através de dois grupos criados no <i>WhatsApp</i>. As questões estavam inseridas nas fases do jogo construído no <i>software</i> livre <i>RPG MAKER</i>. Devido à dificuldade de instalação alterou-se o planejamento inicial. No ensino presencial a atividade poderá ser realizada em laboratório de informática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - <i>Smartphone</i> - Jogo no <i>RPG Maker</i>

Quadro 2 – Atividades propostas.

5. Relato do Minicurso

No exame de qualificação foi apresentada a ideia de aplicar este projeto presencialmente, mas dada a situação da pandemia do coronavírus, isso não foi possível. Em virtude do grande desafio do ensino *online* para professores e estudantes, as escolas estão enfatizando o cumprimento do currículo básico anual. Nesse sentido, não foi viável a aplicação de um minicurso com conteúdo extra.

Assim, a alternativa para a aplicação do minicurso, foi convidar discentes que estudaram na Escola Estadual 6 de Junho, para os quais ministrei aulas no ano letivo de 2019. Atualmente, esses estudantes estão cursando o Ensino Médio. Entrei em contato com os mesmos através das redes sociais e foi encaminhado convite para todos, explicando do que se tratava e informando que no final receberiam certificado pela participação. Houve um retorno significativo do interesse em participar do minicurso, e assim iniciei um grupo em rede social,

para facilitar a comunicação e repassar uma ficha de inscrição para ser preenchida de forma *online*. No total, houveram 22 alunos inscritos.

A escola na qual lecionei para esses alunos possui Ensino Fundamental completo, mas não oferece o Ensino Médio. Assim, quatro destes alunos estudam em escolas particulares, cinco estudam no Instituto Federal do Triângulo Mineiro (IFTM), Campus Uberlândia e 13 alunos estudam em escolas da rede estadual, com a maioria cursando o 2º ano do Ensino Médio. A diversidade de escolas frequentadas pelos participantes do minicurso merece destaque porque possibilita a vivência dos estudantes de diferentes níveis de aprendizado e socialização. É importante relatar que um desses alunos convidados contou para uma colega de classe sobre o minicurso e esta solicitou permissão para que ela e outra amiga participassem também, o que foi permitido com muito entusiasmo.

Convidei dois amigos de profissão, Dhara e Lucas, para participarem e conhecerem mais sobre o trabalho, ajudarem no desenvolvimento do minicurso e opinarem por melhorias que poderiam ser acrescentadas. A Dhara Cristina de Freitas Lago Grande é estudante do curso de licenciatura em matemática na UFU e o Lucas Aparecido de Castro Oliveira tem graduação em licenciatura em matemática pela UFU e mestrado profissional em matemática pela rede nacional (PROFMAT). A Dhara estagiou nas turmas desses estudantes, quando lecionei para eles em 2019; ela se disponibilizou a ser monitora do minicurso, anotando destaques dos encontros, que serão relatados posteriormente.

Foi acordado que os encontros ocorreriam nas segundas e quartas-feiras, das 20h às 21h, pela plataforma do *Google Meet*, o *link* era compartilhado no grupo.

1ª AULA

O primeiro encontro foi marcado para o dia 10 de maio de 2021, iniciando assim, a proposta da sequência didática. Apresentei-me e pedi para que os amigos de profissão também se apresentassem. Informei sobre a participação de duas estudantes que o grupo não conhecia e pedi para que elas também se apresentassem. Expliquei um pouco mais sobre o minicurso, que é o resultado desse projeto de mestrado e o quanto era satisfatório estar aplicando-o para quem fez parte dessa trajetória, e que, em cada encontro poderíamos crescer e aprender. Na Figura 19 é apresentada a foto da tela da aula. Os pais dos estudantes autorizaram a exposição das imagens de seus filhos nesta dissertação.

Figura 19 - Foto da tela do minicurso.



Fonte: Elaborado pela autora.

Uma breve apresentação foi elaborada e exibida, para falar mais sobre o tema em geral: as barragens. Apresentados os tipos de barragens existentes, quais são suas utilizações e como se constrói uma barragem, enfocou-se que o objetivo desse minicurso seria, ao final, conseguir realizar um cálculo para saber qual o risco de rompimento de uma barragem. Foram discutidos alguns desastres que aconteceram em virtude do rompimento de barragens. O vídeo do momento exato do rompimento da barragem da Companhia Vale do Rio Doce, localizada em Brumadinho-MG, foi mostrado e os alunos interagiram bastante, lembrando o caso e o impacto de quantidade de vidas que foram perdidas. Na Figura 20 é exibida a imagem do rompimento da barragem.

Figura 20 - Imagem do rompimento da barragem de Brumadinho.



Fonte: Imagens da reportagem do JN, disponível no site: www.youtube.com.br

Assim, foi possível discutir um pouco mais sobre o material montado e a aplicação da lógica fuzzy no minicurso.

2ª AULA

No segundo encontro, que foi realizado no dia 12 de maio de 2021, iniciou-se a revisão do conteúdo de conjuntos numéricos. No planejamento da sequência didática pretendia-se dividir os alunos em grupos e solicitar que os grupos encontrassem semelhanças e diferenças entre eles, assim poderiam relembrar o conteúdo de relação de pertinência e relação de inclusão entre conjuntos. Como alternativa para separar esses grupos de forma *online*, criei grupos dos alunos no aplicativo do *WhatsApp*. Na Figura 21 é exibido os quatro grupos criados no aplicativo.

Figura 21 - Quatro grupos criados no *WhatsApp*.



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, iniciou-se a discussão sobre semelhanças e diferenças entre os membros dos grupos. Nesse sentido, os alunos falaram sobre altura, idade, cor dos olhos, gostos musicais, ano escolar, séries favoritas, fluência em um idioma, ter ou não ter animal de estimação, entre outras questões. Logo em seguida, foi aberta outra discussão, no sentido de analisar se eles saberiam dizer se existiam características em comum entre integrantes de grupos diferentes, por exemplo: pessoas que gostam de sertanejo, pessoas que têm 16 anos, entre outros. Dessa forma, foram selecionados membros de grupos diferentes e montado um novo grupo, formando uma interseção entre conjuntos diferentes, com elementos em comum. Assim, pode-se trabalhar com os conceitos desejados. Foi um encontro mais rápido, com uma dinâmica um pouco diferente. Contudo, de início, foi um pouco trabalhoso controlar o que todos digitavam nos grupos, mas ao abrir a discussão para todos, foi interessante ver a participação e a criatividade que tiveram para a realização das atividades.

Para finalizar, busquei mais uma proposição: alguém já havia viajado para o exterior? Como apenas uma aluna realizou esse tipo de viagem, foi possível a apresentação sobre o conjunto unitário, acrescentando também o conceito de conjunto vazio.

3ª AULA

No terceiro encontro, realizado no dia 17 de maio de 2021, revisaria também o conceito de operações com conjuntos numéricos. A aula começou de forma um pouco mais descontraída. Relembrei algumas propriedades dos conjuntos, bem como as proposições utilizadas na aula anterior, e pedi para que os alunos fizessem mais algumas observações sobre as semelhanças entre cada um dos integrantes dos grupos. Foi disponibilizado um momento para que um integrante de cada grupo falasse sobre as semelhanças que encontraram e foram feitas algumas anotações. Em um próximo passo, apresentou-se a união de conjuntos, ou seja, o intuito seria juntar dois grupos, por exemplo. Se estivéssemos trabalhando com interseção de conjuntos, no caso dos grupos, estaríamos trabalhando com a semelhança de elementos. Nesse caso, a semelhança de características levantadas entre os membros de grupos diferentes foram, por exemplo: ter ou não ter irmão.

Posteriormente, mostrou-se a notação simbólica para representar a interseção e a união de conjuntos e apresentou-se o Diagrama de *Venn*, o que levou a uma grande comunicação entre os participantes. Os alunos começaram a buscar exemplos para melhor entendimento do referido diagrama. Como haviam sido planejadas algumas atividades para fixação do conteúdo para o final da aula, permiti que conversassem entre si e esperei um resultado. Isso colaborou para que eles entendessem melhor o conceito de união e interseção. Então, aproveitei o entusiasmo para apresentar um exemplo de operação entre conjuntos e pedi para os alunos responderem quais seriam os elementos do conjunto subtração. A medida que iam respondendo, eu escrevia no slide o resultado, para que eles verificassem se estava correto. A seguir, os exercícios elaborados e apresentados para os estudantes.

Questão 1: Considere os conjuntos:

$$A = \{1, 4, 7\}$$

$$B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$$

É correto afirmar que:

- a) $A \supset B$
- b) $A \subset B$
- c) $B \not\subset A$
- d) $B \cap A = B$

Questão 2: Observe os conjuntos a seguir e marque a alternativa correta.

$$A = \{x | x \text{ é um múltiplo positivo de } 4\}$$

$$B = \{x | x \text{ é um número par e } 4 \leq x < 16\}$$

- a) $145 \in A$
- b) $26 \in A$ e B
- c) $11 \in B$
- d) $12 \in A$ e B

Questão 3: Qual a possível lei de formação do conjunto $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$?

- a) $A = \{x|x \text{ é um número simétrico e } 2\}$
- b) $A = \{x|x \text{ é um número primo}\}$
- c) $A = \{x|x \text{ é um número ímpar positivo e } 1\}$
- d) $A = \{x|x \text{ é um número natural menor que } 10\}$

Foi apresentado o conceito de conjuntos complementares e alguns exercícios para a fixação do conteúdo foram resolvidos. Mostrei os exercícios e os alunos foram falando a forma de resolvê-los. Eu escrevia no slide e eles iam verificando o resultado, como anteriormente. Em alguns momentos, eles perceberam que os cálculos não estavam caminhando para o resultado correto, e discutindo um pouco, fizeram a correção. Alguns alunos tiveram dificuldades sobre os conceitos de número simétrico e na leitura da lei de formação de um conjunto, então tentei trazer uma explicação, com os exemplos trabalhados nas aulas anteriores. O que colaborou para o melhor entendimento dos estudantes que estavam com dúvidas.

Para finalizar, comentei sobre a próxima aula, na qual aplicaríamos um jogo elaborado por mim no *RPG Maker*, para avaliar o entendimento do conteúdo ministrado até então. Todos ficaram empolgados e alguns estavam achando o conteúdo longo. Todavia, a diversão é uma ótima motivação.

4ª AULA

No quarto encontro, realizado no dia 19 de maio de 2021, iniciei a aula explicando um pouco mais sobre o programa *RPG Maker*, como o mesmo foi criado e qual o intuito de utilizá-lo no minicurso. Expliquei também que enviaria o *link* do *drive* para baixarem e poderem jogá-lo, solicitei que prestassem atenção em cada fase do jogo, pois precisariam responder um formulário junto com a passagem dos níveis. Na Figura 22 é apresentada uma foto da tela do jogo com uma questão de múltipla escolha para ser resolvida pelos participantes.

Figura 22 - Foto da tela do jogo.



Fonte: Elaborado pela autora.

Contudo, não me atentei ao fato de que nem todos utilizavam o computador para acesso aos encontros, o que gerou uma dificuldade e atraso, pois o jogo não é executado em aparelhos celulares. Vários problemas frequentes ocorreram, quando se trabalha em ambiente *online*, de acesso ao jogo, como por exemplo: *softwares* não compatíveis, *link* de acesso incorreto, acessos não simultâneos e outros. Então, decidi rodar o arquivo do jogo no meu computador e compartilhar a tela, e juntos iriam respondendo o formulário.

Quando o jogo foi aberto e dado o *play*, alguns alunos comentaram no *chat* que tinham achado muito legal o jogo:

- “gente que top, amando”.
- “q massa”, “muitoo lindinhoo mdssss, eu amei”.
- “parece Pokémon rpg antigo, mas em vez de Pokémon são problemas matemáticos. gostei, achei nostálgico”.
- “o jogo é mt massa”, “a gameplay tb foi legal”.
- “obgg pela aula/gameplay Aline kkk o jogo fico lindoooo :)”.
- “podia também dar uma aula de como fazer o jogo, pq ficou muito bom”.
- “obrigada pela aula, fico muitoo legall”, “eu amei”.

À medida que navegava pelo RPG, realizava as perguntas junto com o jogo, e alguns alunos iam respondendo no *chat* e também na chamada. A seguir, descreve-se toda a história montada para o jogo e as perguntas elaboradas.

Mapa 1

Professora: Por hoje é só, pessoal. Não deixem de estudar para a prova de Matemática da semana que vem. Bom final de semana!

Pai: Olá. Que bom que chegou. Como foi na escola hoje?

Filho (a): Foi bem, estamos estudando sobre conjuntos numéricos, a professora passou uma revisão de todo conteúdo hoje, semana que vem teremos prova.

Pai: Semana que vem?

Filho (a): Sim, na segunda-feira.

Pai: Preciso que você vá ao vilarejo de Santana buscar uma túnica. Para não atrapalhar seus estudos para a prova, preparei alguns desafios.

Filho (a): Tudo bem, pai. Vai ver que estou preparado.

Pai: Tome cuidado e boa viagem.

Guardinhas: Olá criança! Tenha um bom trabalho!

Vilarejo Santana

Guardinha do segundo mapa: Olá, criança! Que bom te ver por aqui. Andei conversando com seu pai, e para entrar, responda-me corretamente.

- 1) Um gerador automático de números aleatórios utiliza os seguintes conjuntos ao gerar os números: **R** o conjunto de todos os números inteiros divisíveis por 2; **S** o conjunto de todos os números inteiros divisíveis por 3; e **T** o conjunto de todos os números inteiros divisíveis por 6. Esse gerador possui algumas afirmações verdadeiras sobre esses conjuntos. Com base nessa situação hipotética, a interseção de R e S é um conjunto vazio.
- a) Certo
 - b) Errado

Vozinha: Para estar aqui, você passou pelo primeiro desafio. É importante você lembrar que possuímos vários conjuntos numéricos: Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais. Os símbolos que os representam são as letras \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{I} , \mathbb{R} , respectivamente. Tenha um bom dia!

Cavaleiro: A rua dos comércios é abaixo dessa, é lá que você encontra a túnica que seu pai pediu. Aproveitando que você parou por aqui comigo, vale lembrá-la que relação entre um elemento e um conjunto é chamada de relação de pertinência. Esse elemento pertence ou não pertence ao conjunto, e a relação entre dois conjuntos é chamada de relação de inclusão, para mostrar que um conjunto está contido em outro conjunto.

Vendedor 1: Olá. Em que posso ajudar? Ah, você veio buscar a túnica do seu pai. Como eu tinha falado com seu pai, é necessário que você busque o fio de ouro e a lã de Mohair, para dar acabamento na peça.

Na vila Everest você encontra o fio de ouro e na Fazenda Estrelar você pega a lã de Mohair. É uma viagem rápida e seu pai deixou alguns desafios para o seu estudo.

Guardinhas: Boa viagem, minha cara criança.

Vila Everest

Guardinha do terceiro mapa: Olá, criança. Novamente, para você chegar ao seu destino desta vila, você será desafiada.

2) Sejam x e y números tais que os conjuntos $\{0, 7, 1\}$ e $\{x, y, 1\}$ são iguais, então, podemos afirmar que:

a) $x = 0$ e $y = 5$

b) $x + y = 7$

c) $x = 0$ e $y = 1$

d) $x = y$

Mulher ruiva: Olá! Alguns outros lembretes importantes: Um conjunto que não possui elementos é chamado de conjunto vazio e o conjunto unitário se diferencia por ter apenas um elemento.

Guarda do castelo: Pelo visto, está se saindo bem com os desafios! Meus parabéns! Seu pai ficará orgulhoso! Vou te passar um lembrete importante para sua prova dessa semana:

A união entre dois conjuntos A e B é formada por todos os elementos que pertencem a A , ou a B e a interseção de dois conjuntos A e B é formada por elementos que pertencem a A e a B .

Vendedor 2: Olá! Veio buscar o fio de ouro? Já foi encomendado e está aqui embrulhado. Dez metros de fio de Ouro!

Sabe me falar se 10 “pertence” ao conjunto dos números naturais e ímpares?

Filho (a): Não. Ele é um número par.

Vendedor 2: Estou vendo que está se saindo bem com os desafios!

Obrigada! Volte sempre!

Vendedor de enfeite: Fico feliz que tenha passado na minha venda. Seja bem-vindo. Veja só, tenho apenas uma garrafa de tinta. Sabe me falar que tipo de conjunto ele é?

Filho (a): Conjunto unitário.

Vendedor de enfeite: Está se saindo muito bem.

Guardinha: Precisa ainda buscar a lã. Correto? A fazenda estrelar fica bem ali. Boa viagem!

Fazendeira: Olá! Como está? Meu marido foi retirar a lã, deve estar voltando!

Enquanto isso, quero te propor um desafio!

3) Dado que $A = \{x \text{ pertence aos } \mathbb{N} \mid 1 < x < 4\}$ e $B = \{x \text{ pertence aos } \mathbb{N} \mid 2 < x < 20\}$, então $A \cap B$ é igual a?"

Parabéns!!

Pode ir buscar a lã com o meu marido. Ele está perto do pasto.

Fazendeiro: Olá, criança! Como você cresceu. Hahaha. Vejo que conseguiu chegar no destino final! Espero que tenha conseguido passar por todos os seus desafios
Aqui está a lã de Mohair. Boa viagem de volta! Mande lembranças ao seu pai!

Vila Santana

Vendedor 1: Olá, realizou bem rápido a viagem. Sente-se, vou terminar a túnica, é rápido.

Enquanto isso, mais um desafio para você:

4) Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$; $C = \{1, 2, 3, 10, 11, 12\}$ e $D = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Quais são os elementos do conjunto $G = (B \cup C) \cap (A \cap D)$?

a) $G = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

b) $G = \{4, 5, 6\}$

c) $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$

d) $G = \{3, 4, 6\}$

Meus parabéns! Aqui está a túnica. Tenha uma boa viagem de volta!

Mapa 1

Pai: Como foi de viagem? Já tive notícias suas e se saiu muito bem nos desafios propostos pelos meus amigos. Gostaria de te passar um último exercício. Esse vai ser mais difícil, mas assim saberei que estará preparada para sua prova.

5) Os senhores A, B e C concorriam à liderança de certo partido político. Para escolher o líder, cada eleitor votou apenas em dois candidatos de sua preferência. Houve 100 votos para A e B, 80 votos para B e C, e 20 votos para A e C. Em consequência:

a) venceu A, com 140 votos.

b) A e B empataram em primeiro lugar.

c) venceu B, com 180 votos.

Segue um dos formulários, respondido pela aluna Ana Clara Seratto:

Questionário – Jogo (Conjuntos Numéricos)

Vila Santana

No segundo mapa, para entrar na Vila Santana, você precisa passar pelo primeiro desafio. Conseguiu responder na primeira tentativa? Se não, quantas vezes você tentou?

Sim. Na primeira tentativa.

Qual a resposta correta?

“Um gerador automático de números aleatórios utiliza os seguintes conjuntos ao gerar os números: R o conjunto de todos os números inteiros divisíveis por 2; S o conjunto de todos os números inteiros divisíveis por 3; e T o conjunto de todos os números inteiros divisíveis por 6. Esse gerador possui algumas afirmações verdadeiras sobre esses conjuntos. Com base nessa situação hipotética, a interseção de R e S é um conjunto vazio.”

- (a) Certo
- (b) Errado

Na vila Santana, quais os aprendizados passados pelas pessoas da Vila?

Vozinha: A existência de vários conjuntos numéricos, sendo eles Naturais(N), Inteiros(Z), Racionais(Q), Irracionais(I) e Reais(R),

Cavaleiro: A relação entre um elemento e um conjunto é chamada de relação de pertinência. Esse elemento pertence ou não pertence ao conjunto.

A relação entre dois conjuntos é chamada de relação de inclusão, para mostrar que um conjunto está contido em outro conjunto

Vila Everest

No terceiro mapa, para você entrar na Vila Everest. Você tem que responder uma questão do desafio. Conseguiu responder na primeira tentativa? Se não, quantas vezes você tentou?

Sim, na primeira tentativa.

Qual a resposta correta?

“Sejam x e y números tais que os conjuntos $\{0, 7, 1\}$ e $\{x, y, 1\}$ são iguais. Então, podemos afirmar que:”

- (a) $x = 0$ e $y = 5$
- (b) $x + y = 7$

(c) $x = 0$ e $y = 1$

(d) $x = y$

Quais os aprendizados passados pelas pessoas da Vila?

Mulher ruiva: *Um conjunto que não possui elementos é chamado de conjunto vazio e o conjunto unitário se diferencia por ter apenas um elemento*

Guarda do Castelo: *A união entre dois conjuntos A e B é formada por todos os elementos que pertence à A , ou à B ou aos dois.*

A interseção de dois conjuntos, A e B , é formada por elementos que pertencem, ao mesmo tempo, à A e B .

Vendedor 1: *O número 10 pertence ao conjunto dos números naturais e par.*

Vendedor 2: *Formando um conjunto com apenas uma garrafa de tinta, formaria um conjunto unitário.*

Fazenda

Na fazenda, a dona de casa faz um outro desafio. Você acertou na primeira tentativa?

Na 2º Tentativa

Qual a resposta correta?

“Dado que $A = \{x \text{ pertence aos } \mathbb{N} \mid 1 < x < 4\}$ e $B = \{x \text{ pertence aos } \mathbb{N} \mid 2 < x < 20\}$, então $A \cap B$ é igual a?”

{3}

Vila Santana

De volta à Vila Santana, o vendedor te desafiou novamente. Você conseguiu resolver na primeira tentativa? Se não, quantas vezes você tentou?

Na Segunda tentativa.

Qual a resposta correta?

“Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$; $C = \{1, 2, 3, 10, 11, 12\}$ e $D = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Quais são os elementos do conjunto $G = (B \cup C) \cap (A \cap D)$?”

(a) $G = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

(b) $G = \{4, 5, 6\}$

(c) $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$

(d) $G = \{3, 4, 6\}$

E por último, o pai passa o desafio final. Você conseguiu resolver na primeira tentativa? Se não, quantas vezes você tentou?

SIM.

Qual a resposta correta?

Os senhores A, B e C concorriam à liderança de certo partido político. Para escolher o líder, cada eleitor votou apenas em dois candidatos de sua preferência. Houve 100 votos para A e B, 80 votos para B e C, e 20 votos para A e C. Em consequência:

A) venceu A, com 140 votos.

B) A e B empataram em primeiro lugar.

C) venceu B, com 180 votos.

No final, os alunos elogiaram bastante o jogo e informei que corrigiria o *link* e mandaria um vídeo explicando como baixar, para todos poderem jogar depois.

5ª AULA

Comecei o quinto encontro, realizado no dia 24 de maio de 2021, explicando como instalar o arquivo do jogo, porque nem todos os alunos possuem um grande conhecimento de informática. Enviei o *link* do jogo antecipadamente para a Dhara, para um teste, e tudo o que foi realizado no computador dela foi tirado *print*, para explicar passo a passo aos alunos. Assim, a Dhara foi conduzindo os passos para que conseguissem o acesso ao jogo. Depois que conseguiram acessar o jogo, começaram a conversar sobre o mesmo, sobre o conteúdo e o que estavam fazendo para chegar à fase final. Para aqueles que não conseguiram fazer os passos necessários, foi dada a opção de esperarem um pouco após o horário de término marcado (21h) para que pudesse ajudá-los.

Mesmo tendo utilizado esse tempo para repassar os passos a passos da instalação do jogo, foi dado início ao conteúdo programado para esse encontro, que era sobre a lógica *fuzzy*. Nesse sentido, era necessário que os alunos entendessem a diferença entre a lógica matemática clássica e a lógica *fuzzy*. Realizando a montagem de grupos com as proposições já intencionadas, perguntei: Quem se considera tímido? Não obtive muitas respostas, então insisti para que falassem quem eles consideravam tímidos, pois, já que eles estudaram juntos, conheciam as características de cada um. Assim, houve uma maior comunicação tanto pelo *chat* quanto pelo microfone, contando e conversando sobre os amigos e relações dentro de sala. No

final, uma aluna até perguntou: “*E a Aline? A Aline é tímida?*”. Então surgiu uma interação ainda maior.

A outra proposição utilizada foi quem assiste a TV com uma frequência alta. Mesmo que os alunos não estivessem abrindo o microfone para conversar, muitos estavam enviando mensagens no *chat*, respondendo o que estava sendo perguntado, e assim eu ia abrindo a discussão e envolvendo-os nas diferenças entre as lógicas clássica e *fuzzy*. Houve bastante interação dos alunos pelo *chat* e muitas brincadeiras a cada proposição apresentada. Analisava a proposição de pessoas tímidas, “o quanto uma pessoa é tímida”, ela pode ser inserida no grupo de pessoas tímidas com que “grau” de timidez?

Para finalizar, deixei a seguinte questão: Como representar os alunos meio tímidos, os alunos que assistiam um pouco de televisão, como representar isso matematicamente?

6ª AULA

No sexto encontro, realizado no dia 26 de maio de 2021, a motivação era com a exemplificação de conjuntos *fuzzy*, voltado com as proposições das pessoas altas, das pessoas jovens, entre outros. Neste momento, foram apresentados aos estudantes os gráficos utilizados para ilustrar os conjuntos *fuzzy*. Foi solicitado aos estudantes que eles classificassem o grau de pertinência dos conjuntos mencionados anteriormente, determinando o melhor intervalo para analisar a proposição. “O quão alto o Joab é? De 0 a 1, se ele possui 1,78 metros”. Quando o conjunto atinge o grau de pertinência 1, em apenas um ponto temos a função de pertinência triangular. Para exemplificar esse tipo de função de pertinência, foi introduzido o conjunto de horas em torno do meio-dia (12h); às 6h e às 18h; esse conjunto, terá grau de pertinência 0 e às 12h grau de pertinência 1. No caso da função de pertinência trapezoidal, um intervalo tem grau de pertinência 1. Para ilustrar essa definição, pode-se utilizar uma jarra, com a capacidade de 1 litro, possibilitando que o conceito de jarra cheia e vazia seja trabalhado. Informei que seria inserido 1,1 litro de água, de modo que fosse observado que o grau de pertinência para a jarra cheia permanece igual a 1. Este processo foi apresentado através de gráficos esboçados no *Geogebra*, com o grau de pertinência sendo controlado pelo cursor.

Alguns estudantes apresentaram algumas dúvidas referentes ao grau de pertinência e ao formato dos gráficos. Apresentei um exemplo numérico para alcançar um entendimento matemático melhor.

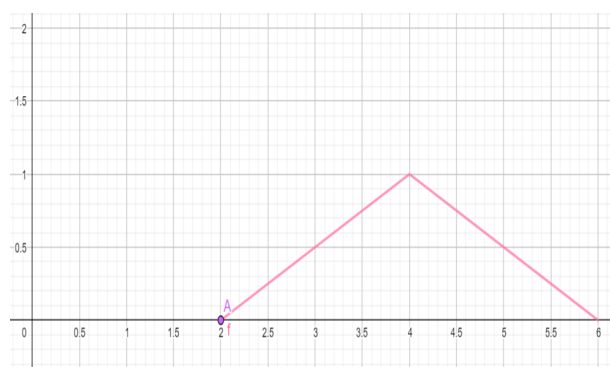
7ª AULA

No dia 31 de maio de 2021 ocorreu o sétimo encontro. Iniciei insistindo com todos quanto ao preenchimento do questionário do jogo que foi aplicado anteriormente, pois estes registros são importantes para avaliar o aprendizado.

Para esse encontro, foi utilizando o *software Geogebra*, a construção de gráficos e a elaboração de exemplos das operações de união, intersecção e complementar de conjuntos *fuzzy*, facilitando o aprendizado através da visualização gráfica.

Optei por apresentar a parte teórica antes dos gráficos, e logo depois apresentar também um exemplo numérico. Enquanto, apresentava o gráfico de um conjunto *fuzzy*, representando os números próximos de 4, Figura 23, surgiu uma dúvida. A estudante perguntou se: *os números 3,5 e 4,5, possuem o mesmo grau de pertinência?* A dúvida foi esclarecida e consegui perceber que era uma dúvida de muitos.

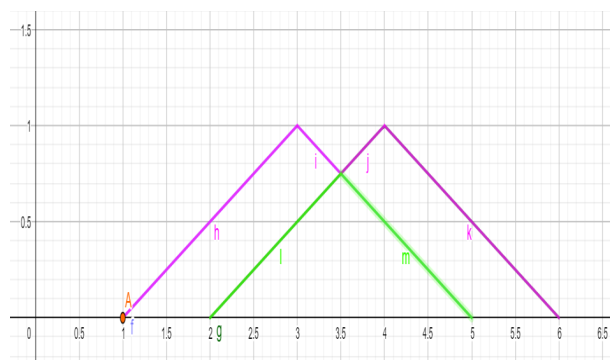
Figura 23 - Conjunto *fuzzy* dos números próximos de 4.



Fonte: Elaborado pela autora.

Enquanto, apresentava o gráfico da união de dois conjuntos *fuzzy*, Figura 24, foi feita a seguinte pergunta por uma estudante: *Qual é o grau de pertinência máximo nos conjuntos fuzzy A e B, se você escolher o ponto 3,5?*

Figura 24 - Gráfico $\mu_{A \cup B}$ e $\mu_{A \cap B}$.



Fonte: Elaborado pela autora.

A dúvida também foi esclarecida, e quando apresentado o gráfico do complementar, as dúvidas em relação a esse gráfico foram muitas. Expliquei um exemplo numérico, para depois voltar ao gráfico, na intenção de que assim entenderiam melhor. Após terminar a explicação, foi perguntado se havia alguma dúvida. Alguns estudantes responderam no *chat* que conseguiram entender. Finalizei a aula comentando sobre os planos para os últimos dias do minicurso e expliquei que logo iriam começar a trabalhar com o SBRF relacionado à barragem. Observei que alguns alunos ficaram empolgados.

Conforme programado, o próximo encontro ocorreria na quarta-feira dia 02/06/2021, véspera de feriado prolongado. Então optei pelo adiamento do encontro, aumentando mais um dia de minicurso, sem alterar a programação das próximas aulas. Assim, a aplicação do jogo avaliativo, que estava prevista para ocorrer no dia 02/06, foi adiada para o dia 16/06.

8ª AULA

No dia 07 de junho de 2021 ocorreu o oitavo encontro. O objetivo era orientar a construção de um SBRF utilizando o *software FISPRO*. Foi solicitado, antes do início da aula, que os alunos entrassem pelo computador, para realizar o *download* do *software* gratuito do *FisPro*. Solicitei que a Dhara fizesse o *download* com antecedência, ela tirou o *print* de todas as telas e enviou para o grupo de *WhatsApp*, para que os estudantes fossem seguindo passo a passo, Figuras 25, 26, 27 e 28.

Figura 25 - Imagens do passo a passo para baixar o *FisPro* enviado no grupo de alunos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 26 - Imagens do passo a passo para baixar o *FisPro* enviado no grupo de alunos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 27- Imagens do passo a passo para baixar o *FisPro* enviado no grupo de alunos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 28 - Imagens do passo a passo para baixar o *FisPro* enviado no grupo de alunos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Iniciei a explicação sobre como utilizar o *software FisPro*, que será importante para modelar a barragem se rompendo através da construção de um SBRF neste *software*. Inicialmente, no intuito de aprender a utilização do *software*, será construído um SBRF para verificar a qualidade de um *smartphone*. As regras *fuzzy* podem ser construídas no próprio *software*, de forma a se associarem às variáveis linguísticas da entrada com a saída. O SBRF tem como variável linguística de saída a qualidade de um *smartphone*, sendo as variáveis de entrada: a memória do dispositivo, o tempo da duração da bateria e a qualidade da câmera do *smartphone*.

O domínio da variável “memória do dispositivo” é de 8 GB a 256 GB; da variável “qualidade da câmera” é de 4 *megapixel* a 108 *megapixel*; e da variável “tempo de duração da bateria” é de 0 a 16 horas. Os termos linguísticos das variáveis de entrada, capacidade de memória do dispositivo e da qualidade da câmera são: ruim, regular e boa. Os termos linguísticos da variável de entrada tempo de duração de bateria são: fraca, média e forte.

E assim foi sendo atribuído cada parte do SBRF no *FisPro*, realizando juntamente com os estudantes e esclarecendo as dúvidas que iam surgindo ao longo da explicação. Para finalizar, solicitei aos estudantes que tentassem montar um SBRF para o rompimento de barragem. Antes de encerrar, perguntei se tinham alguma opinião das variáveis de entrada para a construção do SBRF do rompimento da barragem, e houve algumas sugestões, como: chuva, construção, material de rejeito, trabalhos próximos, erosão, problemas naturais, tempo de utilização. Então, informei as variáveis de entrada que decidimos estudar para o trabalho: altura, idade e volume da barragem; e reforcei, para que tentassem montar o SBRF. Também comuniquei que na

próxima aula o professor especialista, Dr. Carlos Eugênio, na área de hidráulica e saneamento estaria presente na aula, para comentar com mais detalhes o assunto.

9ª AULA

No dia 9 de junho de 2021 aconteceria o nono encontro, que tinha, como previsto no cronograma, o intuito da montagem do SBRF do rompimento da barragem. Porém, ocorreram problemas de instabilidade da internet na minha residência e também na dos alunos, por esse motivo, desmarquei a aula deste dia.

No dia 14 de junho de 2021, antes do início do agora nono encontro, encaminhei mensagem no grupo do *WhatsApp*, lembrando a todos que nesta aula, o professor Carlos participaria do nosso encontro, para conversar sobre as barragens. Reforcei, para que não entrassem atrasados na aula.

Quando iniciou a aula, realizei a apresentação do professor para todos, expliquei também que os participantes são meus ex-alunos, que nesse ano estão cursando o 2º Ano do Ensino Médio, alguns em escolas particulares, outros em escolas estaduais, e alunos que fazem o curso técnico de meio ambiente no IFTM.

Passei a palavra para o professor Carlos, que começou falando o quanto estava feliz em estar participando e deu início à explicação sobre barragens e suas principais características. Surgiram várias perguntas e interações por parte dos participantes do minicurso. Listarei, a seguir, algumas falas:

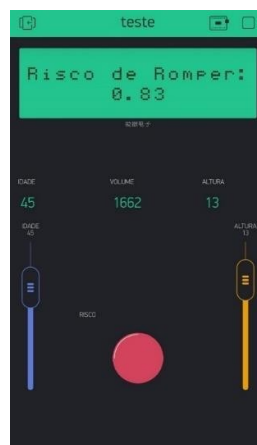
- *geente, não sabia disso! Interessante*
- *gente eu achava que barragem era só de mineradora*
- *excelente mesmo*
- *Muito interessante Carlos*
- *“Eu queria perguntar como seria o funcionamento das barragens por vazão que o senhor comentou”*
- *A aluna que fez a pergunta acima fez o seguinte comentário após o professor responder a pergunta dela: nossa, muito interessante. quando estudei vazão não me falaram sobre esse tipo de barragem. interessante demais*
- *Boa noite, eu gostaria de perguntar como é feita a construção das barragens em rios por exemplo, e como os desenvolvedores do projeto descobrem a espessura e altura ideal para a construção*
- *Qual que é o critério que eles usam para a construção das barragens?*
- *Usando o mesmo exemplo de um fio, para fazer a manutenção interna de uma barragem, tem que fazer o desvio da barragem ou tem outra maneira?*
- *Como que fica em relação às pessoas que são atingidas quando a barragem é rompida? As empresas se responsabilizam por todos os atos? Tem como a cidade voltar a ser como era antes ou por conta da barragem a chance é zero?*
- *O engenheiro tem responsabilidade?*
- *Supondo que uma grande barragem que é impossível fazer manutenção interna, comece a rachar de dentro pra fora, essa barragem está condenada a cair ou tem alguma coisa que o engenheiro possa fazer pra evitar que isso aconteça?*

– *Eu acredito que a matemática e a física têm grande importância nessas construções e onde podemos encaixar a lógica fuzzy? (essa pergunta foi respondida por mim).*

Fui relendo as perguntas escritas no *chat* para o professor, e ele pacientemente foi respondendo-as individualmente, interagindo com os alunos e fazendo novos comentários.

Nesse encontro, estava programado para que fosse mostrado o protótipo da barragem se rompendo. Porém, antes novamente expliquei a construção do SBRF do risco de rompimento da barragem. O professor Carlos decidiu permanecer na chamada, para ver o rompimento da barragem, então foi apresentado o aplicativo *Blynk* no celular para controle da barragem, Figura 29.

Figura 29 - Aplicativo *Blynk*.



Fonte: Elaborada pela autora.

O referido aplicativo possui os cursores para o controle das variáveis de entrada da barragem: idade e altura da barragem, o volume é controlado pelos sensores dentro do protótipo de barragem, a partir da altura das camadas de bolinhas coloridas em gel. Fui mostrando toda a maquete para os estudantes, Figura 30, com os rejeitos representados pelas bolinhas de gel, as casinhas, os sensores, e finalizei com a inserção dos graus de pertinência, que são também colocados no aplicativo *Blynk*, mostrando que quando é alterado o cursor, o valor do grau de pertinência do rompimento altera-se juntamente com as luzes de aviso. Quando verde, o risco de rompimento é baixo; quando amarela, o risco de rompimento é médio; e quando vermelha, o risco de rompimento é alto e a barragem se rompe.

Figura 30 - Protótipo da maquete.



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, apresentado toda a maquete, coloquei a câmera virada para o protótipo da barragem e mudei os cursores, para que o risco de rompimento fosse alto, e a barragem se rompesse, os estudantes ficaram encantados. Agradecemos a presença do professor Carlos e ele saiu da sala. Os estudantes fizeram muitas perguntas e elogios, eles queriam ter mais informações sobre a construção, como chegou-se a esse resultado e como foi a montagem da barragem.

A aula havia ultrapassado o tempo previsto, encerramos a aula às 21h45min, com os alunos fervorosos com tudo o que ocorreu na aula. Na Figura 31 são apresentados outros comentários que foram postados pelos alunos no *chat*.

Figura 31 - Foto dos comentários do chat.

NICOLAS FERREIRA LIMA ALVES 9:17 PM AMEI	muito top
ana clara soares duarte 9:18 PM que legall	NICOLAS FERREIRA LIMA ALVES 9:20 PM perfeito
NICOLAS FERREIRA LIMA ALVES 9:18 PM tô achando tão chique VEM AI	Carlos Eugenio Pereira 9:21 PM Muito bom. Grande abraço a todos!!
MARIA EDUARDA CUNHA LÚCIO 9:19 PM kkkkkkkkkk ah não, muito criativo	NICOLAS FERREIRA LIMA ALVES 9:22 PM abraço muito obrigado professor!!
NICOLAS FERREIRA LIMA ALVES 9:19 PM MDSSS VEI	Melissa Costa 9:22 PM muito obrigada pelas explicações Carlos

ligia alvesp 9:19 PM
perfeito

NICOLAS FERREIRA LIMA ALVES 9:19 PM
a barragem explodindo

Melissa Costa 9:19 PM
incrível alinee

Fonte: Elaborado pela autora.

10ª AULA

No dia 16 de junho de 2021, ocorria, então, o nosso décimo e último encontro. Comecei agradecendo a todos pela participação e por terem chegado até o final. Lembrando que esse encontro estava acontecendo por ter sido adiado o encontro do dia 02/06/2021 e ainda precisava aplicar o jogo para a avaliação do aprendizado de conjunto *fuzzy*. Assim como foi construído um jogo no *RPG Maker* para a avaliação de conjuntos numéricos, foi construído um jogo para a avaliação do aprendizado dos conjuntos *fuzzy*. Porém, assim como na aplicação do outro jogo, ocorreram alguns erros, principalmente para que todos conseguissem acessar o *link* do jogo. Como nossos encontros estavam atrasados, então mudei a forma de aplicar a avaliação. Em vez de enviar o *link* do jogo elaborado no *RPG Maker*, separei os alunos presentes em dois grupos e criei novamente os grupos no aplicativo *WhatsApp*, para poderem se comunicar, pois ocorreria uma disputa entre os dois grupos. Enviei as questões elaboradas em um documento do *Word*, bem como o questionário que deveriam responder juntamente com as questões.

Seguem as questões de conjuntos *fuzzy* elaboradas.

Questão 1:

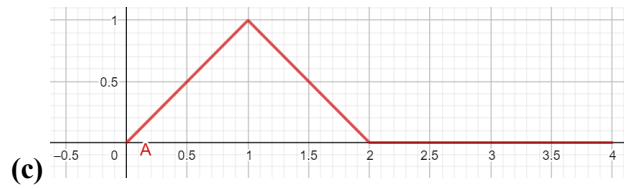
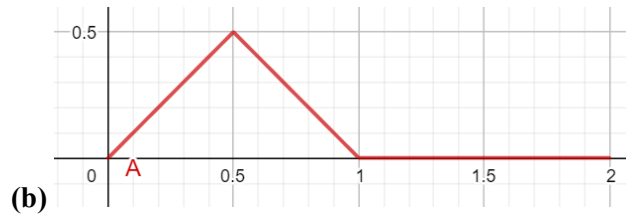
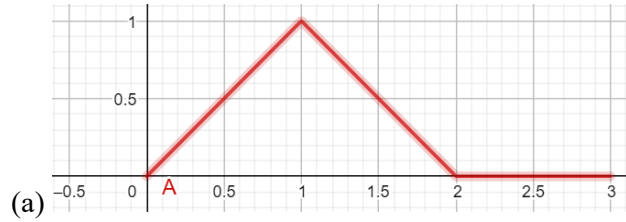
Analise qual proposição a seguir é relacionada com a lógica *fuzzy*.

- (a) Conjunto das alunas com cabelo claro da turma.
- (b) Conjunto dos números naturais pares menores que 10.
- (c) Conjunto dos alunos que não possuem falta na disciplina de matemática.
- (d) Conjunto dos alunos que possuem nota 10 na disciplina de matemática.

Questão 2:

Marque a representação gráfica correta do conjunto *fuzzy* definido no universo $U = [0, 3]$.

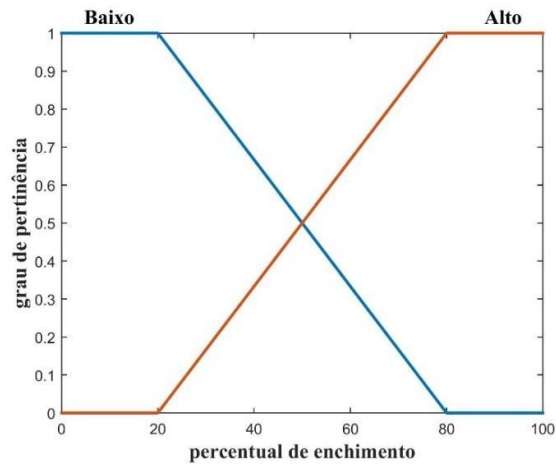
$$\mu(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$



Questão 3:

Considere um tanque de gasolina definido sobre um universo, que é a faixa de valores esperados para níveis: baixo e alto, com o intervalo $[0,100]$ com percentuais de tanque cheio. Pela representação do gráfico, 10% de enchimento do termo linguístico é:

Qual é o termo linguístico para o percentual de 10% do enchimento do tanque?



(a) Baixo

(b) Alto

Questão 4:

Seja X o conjunto dos números naturais, sem o zero:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Seja A o conjunto dos números próximos de 3:

$$\{x \in A \mid x \text{ é próximo de } 3\}.$$

Definimos a função $\mu_A: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$, que associa cada x natural ao valor próximo de 3 por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{-x+5}{2}, & \text{se } 3 < x \leq 5 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Quais os graus de proximidade de alguns números do conjunto X em relação ao conjunto A?

- (a) $\mu_A(1) = 1, \mu_A(2) = 1, \mu_A(3) = 1, \mu_A(4) = 1, \mu_A(5) = 1$
- (b) $\mu_A(1) = 0, \mu_A(2) = 0.5, \mu_A(3) = 0, \mu_A(4) = 0.5, \mu_A(5) = 0$
- (c) $\mu_A(1) = 0, \mu_A(2) = 0.5, \mu_A(3) = 1, \mu_A(4) = 0.5, \mu_A(5) = 0$

Questão 5.

Em uma sala de aula, a professora de matemática gostaria de entender e conhecer melhor qual seria seu desafio com os estudantes naquele ano letivo. Então, pediu para que eles avaliassem de 0 a 1 o quanto estudavam em casa, e avaliassem, na mesma escala, qual seu interesse por Matemática. Veja a tabela abaixo dos valores de alguns desses estudantes. Qual o grau de pertinência de $A \cap B$ para os estudantes?

	<i>Grau de Pertinência para Estudo (μ_A)</i>	<i>Grau de pertinência para Interesse por Matemática (μ_B)</i>
<i>Estudante 1</i>	0.8	0.9
<i>Estudante 2</i>	0.3	0.2
<i>Estudante 3</i>	0.5	0.9

- (a) *Estudante 1: 0.8; Estudante 2: 0.3; Estudante 3: 0.9*
- (b) *Estudante 1: 0.8; Estudante 2: 0.2; Estudante 3: 0.5*
- (c) *Estudante 1: 0.9; Estudante 2: 0.3; Estudante 3: 0.5*

Solicitei aos estudantes que resolvessem uma questão por vez, para que fosse possível discuti-las, já que eles estavam há alguns encontros sem ver as definições dos conjuntos *fuzzy*.

Eles discutiam no grupo sobre a questão e depois juntos na reunião do *Google Meet*, e assim eles podiam ir respondendo o questionário.

A seguir, o questionário respondido por um dos grupos:

Grupo:

- Matheus Borges Naves
- Athos Daniel
- Maria Eduarda Cunha
- Lorena Palhano
- Ana Clara Soares
- Haicha Oliveira

Questionário – Jogo (Conjuntos *Fuzzy*)

Questão 1

Conte o que te levou a resolver a questão

RESPOSTA: Nós observamos o exemplo ao qual se poderia aplicar o conceito do grau de pertinência.

Consegue escrever uma definição para a lógica *fuzzy*?

RESPOSTA: Logica *fuzzy* é uma lógica que se baseia em um grau de pertinência o qual os valores de 0 e 1 são referentes a falso e verdadeiro respectivamente.

Questão 2

Cite os pontos que analisou para a resolução da questão.

RESPOSTA: A gente analisou os pontos no gráfico e o universo da função...

Teve algum problema para chegar no resultado correto?

RESPOSTA: Nós tivemos divergências de raciocínios, mas debatemos e chegamos ao resultado.

Questão 3

Cite os pontos que analisou para a resolução da questão

RESPOSTA: Nós analisamos o ponto referente a 10% do tanque.

Consegue escrever uma definição para grau de pertinência e termo linguístico?

RESPOSTA: O grau de pertinência indica com o qual grau de certeza um elemento faz parte de um conjunto. Termo linguístico é o mediador que define o grau de pertinência.

Questão 4

Qual conteúdo podemos associar a essa questão?

RESPOSTA: Função afim e conjuntos numéricos.

Foi difícil chegar no resultado? Cite quais pontos levou à resolução dessa questão.

RESPOSTA: Nós tivemos divergências de raciocínios, mas debatemos e chegamos ao resultado.

Questão 5

Consegue escrever uma definição para a união e intersecção dos conjuntos *fuzzy*?

RESPOSTA: A intersecção é o menor dos valores. A união é o maior dos valores.

Foi difícil chegar no resultado? Cite quais pontos levou à resolução dessa questão.

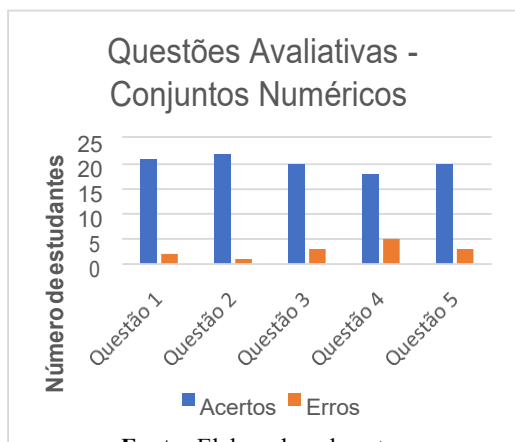
RESPOSTA: Não difícil. Analisamos a intersecção dos conjuntos.

Cada questão foi discutida com o grupo todo. Foi bom ver os próprios estudantes abrindo a discussão nas questões que havia divergência de resultado e ajudando a entender a forma certa de resolução.

5.1 Resultados da Sequência Didática Proposta como Minicurso

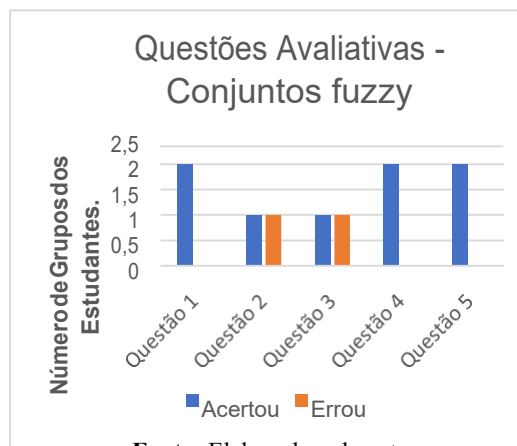
Na experimentação da sequência didática proposta, participaram do minicurso 21 estudantes que cursam o 2º ano e um aluno do 1º ano do ensino médio. Na Figuras 32 e 33 são apresentados os resultados da primeira avaliação e da segunda avaliação, respectivamente.

Figura 32 - Resultados 1ª Avaliação.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 33 - Resultados 2ª Avaliação.



Fonte: Elaborado pela autora.

Os relatórios dos resultados das atividades avaliativas mostram que o aprendizado ocorreu de forma satisfatória.

5.2 Agradecimentos

Para finalizar esse encontro, agradei novamente por terem aceitado o convite, o quanto isso foi importante para mim e quanto eu fiquei feliz por estar aplicando para eles, que me viram no começo do mestrado, iniciando esse projeto, e poder estar aplicando e finalizando com eles foi de grande satisfação e alegria. Informei que logo mais estaria enviando o certificado de participação para todos e que entregaria na residência de cada um mimo preparado com todo carinho. Na Figura 34, o modelo de certificado elaborado para os alunos e assinado pelo coordenador do Mestrado e pela minha orientadora é apresentado.

Figura 34 - Certificado elaborado para os alunos comprovando a participação.



Fonte: Elaborado pela autora.

Pedi para dois alunos escrever em poucas palavras como foi a experiência em participar do minicurso. Seguem os relatos:

Matheus: *O minicurso conteve uma gama de aprendizagem com conteúdo ministrados normalmente nas Universidades. A interligação entre os alunos da ``Logica Fuzzy`` foi usufruído pelo passar do conhecimento de formas pedagógicas e dinâmicas da Mestrando Aline e os seus companheiros Dhara e Lucas. Com isso, pode entender como funciona uma barragem e o seu rompimento, e com momentos de retirar dúvidas. Agradeço a Professora a Aline por convidar-me a participar do minicurso.*

Athos: *A experiência do minicurso foi algo realmente gratificante; a forma a qual se abordou e trabalhou cada segmento do tema foi de uma didática excepcional. Poder partilhar deste curso com outros colegas todos interagindo juntos em meio à pandemia, um momento com muitos obstáculos para o ensino e o aprendizado, foi realmente interessante e bom. Além disso, o trabalho e a preparação realizado pela professora Aline e seus companheiros, Lucas e Dhara, para cada aula do curso com materiais de qualidade e interativos como atividades em que todos participam, atividades em grupo e até mesmo em jogos foi deveras incrível e fantástico, visto que conseguir essa atenção, entusiasmo e interação do aluno por um curso online é algo muito difícil no momento a qual estamos. Sou grato a Srta. Aline por me propiciar a participação nesse curso, o qual tenho certeza de que teve muita importância e agregou muito à minha vida profissional.*

Agradei também a participação da Dhara e do Lucas, pelo apoio, pois sem eles eu não conseguiria ir melhorando a cada encontro, como ocorreu. Pedi para que eles escrevessem, em poucas palavras, o que eles acharam do minicurso. Seguem os relatos:

Lucas: *Apesar da forma que foi ministrado o minicurso (remota), por causa da pandemia, conduziu-se da melhor maneira possível, sendo muito proveitoso e relevante para os seus participantes. Os alunos tiveram a oportunidade de aprender/rever o conteúdo sobre conjuntos, podendo associar com a prática, vislumbrando uma futura profissão, como por exemplo, no ramo da engenharia. Destaco que o jogo e a maquete da barragem foram ferramentas pedagógicas significativas, que fizeram a diferença no minicurso, causando grande entusiasmo e interesse aos participantes.*

Dhara: *Participar do minicurso foi uma experiência muito interessante para mim, pois eu pude ver a aplicação de um conteúdo que geralmente aprendemos apenas na universidade, mas para estudantes de Ensino Médio e a maneira como os participantes interagiram e ficaram empolgados com o assunto ao decorrer no minicurso mostrou que estavam realmente interessados no que estava sendo ensinado. Além disso, pude perceber as limitações e até mesmo benefícios de um minicurso ministrado de forma online, visto que tivemos a*

participação de um professor para tirar algumas dúvidas com relação às barragens. Agradeço à Aline por ter me convidado e me permitido participar dessa experiência.

Certificados de monitoria não remunerada, conforme mostrado na Figura 35.

Figura 35 - Certificado de monitoria.



Fonte: Elaborado pela autora.

6. Conclusão

Os estudos realizados neste trabalho possibilitaram o desenvolvimento de recursos educacionais de base tecnológica de forma a integrar a teoria e prática matemática, trabalhando com um novo conceito, e desafiando novas formas de ensino. Além disso, possibilitou analisar o aprendizado dos alunos através dos jogos de *RPG Maker* elaborados para avaliação, os registros obtidos durante a pesquisa por meio de anotações, vídeos e registros dos próprios alunos também permitiram a realização de um excelente trabalho.

A implementação da sequência didática proposta mobilizou os estudantes a resolverem os problemas propostos com entusiasmo, reflexão e intuição. Estimulados pela curiosidade, até pesquisaram sobre o tema rompimento de barragens em vários meios de informação.

O conhecimento e a interação dos estudantes tornaram a participação no ensino *online* uma forma ativa no processo de aprendizagem, em oposição ao costume à aula tradicional, levando em consideração o ensino – aprendizado, onde o conteúdo é exposto de modo que atribui conceitos já elaborados. O que levou a questionamentos em relação a conceitos que não

estavam explícitos nas atividades, momento esse em que o professor faz a mediação e deve estar preparado para sanar as dúvidas e propor novos desafios.

Dentre as dificuldades encontradas na etapa de aplicação de forma *online*, listam-se o tempo escasso e alguns imprevistos tecnológicos. Por exemplo, a conexão da internet, a falta de programas devidamente instalados, que foram contornados, devido a paciência de ambas as partes e a contribuição tecnológica realizada em cada instalação de *software*. Estas atividades foram realizadas através de um minicurso *online*, com horários extraescolares combinados com os estudantes.

A metodologia aplicada motivou os estudantes a aprenderem conceitos matemáticos novos, diferentes dos usuais dos currículos estabelecidos. Dessa forma, tem sido proporcionada a construção de uma análise crítica através de um problema vigente da realidade, possibilitando, assim, a aprendizagem de conceitos básicos fundamentais da teoria dos conjuntos *fuzzy*.

Os relatórios dos resultados das atividades avaliativas mostram que o aprendizado ocorreu de forma satisfatória. Por fim, acredita-se que a aplicação dessa atividade mostra que é possível que estudantes de ensino médio aprendam novos conceitos matemáticos de forma motivadora e participativa.

Para a elaboração desse trabalho, reconheceu-se a importância dos temas abordados nas disciplinas cursadas no mestrado profissional. Na disciplina de Fundamentos e Pressupostos Teóricos para o Ensino de Ciências e Matemática, a fundamentação dos principais teóricos para a educação, contribuiu para a escrita da fundamentação teórica em torno dos temas abordados, suas ideologias e aprendizado. A disciplina de Conteúdo e Métodos Matemáticos contribuiu com as possibilidades metodológicas e de planejamento de aula. E não menos importante, a disciplina de Modelagem Matemática, que estruturou a base de estudo e desenvolvimento da situação problema do trabalho proposto.

A temática desenvolvida na pesquisa gerou um artigo aceito pela Revista EIXO, do Instituto Federal de Brasília, com o título: “**Modelagem matemática e tecnologias digitais na aprendizagem da teoria dos conjuntos *fuzzy* no ensino médio**”, que contribuiu para a divulgação deste trabalho. Além, dos dois produtos que foram desenvolvidos: o manual para a construção da maquete 3D e a sequência didática que serão disponibilizados.

Portanto, o presente trabalho permitiu a aplicação dos produtos desenvolvidos na pesquisa e atingiu seu objetivo de apresentar uma sequência didática para desenvolver o pensamento de uma nova habilidade, através da inserção do conteúdo básico da teoria dos conjuntos *fuzzy*, através da motivação realizada pela modelagem matemática da incerteza, que envolve o rompimento ou vazamento de uma barragem de rejeitos, por meio de um Sistema Baseado em Regras *Fuzzy*. Este realiza o controle do rompimento do protótipo da barragem na

maquete 3D, que é sinalizado pelas cores do semáforo: vermelho, amarelo e verde. Permitindo que os estudantes visualizem o rompimento da barragem através das bolinhas de gel que se espalham na cidade, podendo levá-los a conscientização da importância da manutenção e conservação das barragens.

7. Referências Bibliográficas

- ALENCAR FILHO, E. **Introdução à Lógica Matemática**. São Paulo: Nobel, 2002.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.
- ALVES, A. J. **Uma biblioteca Fuzzy para Arduino e Sistemas Embarcados**. Blog ZeRoKoL. Teresina – PI.; 28 de set de 2012. Disponível em: <<https://blog.zerokol.com/2012/09/arduinofuzzy-uma-biblioteca-fuzzy-para.html>>. Acesso em: 04 de nov. 2020.
- ALVES, A. M. **Proposta de uma estrutura de medição para qualidade do SPB – Software Público Brasileiro. 2013. 365 f. Tese (Doutorado em Ciências)** – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3136/tde-11072014-001021/publico/Tese_Inicio_AAAlves.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2021.
- ARDUINO, Plataforma *online*. Disponível em: <<https://www.arduino.cc/en/guide/windows>>. Acesso em: 04 de nov. 2020.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino – aprendizagem com modelagem matemática**. 3.ed. São Paulo: Contexto, 2011.
- BASSANEZI, R. C. **Modelagem como estratégia metodológica no ensino da matemática**. Boletim de Educação da SBMAC. São Paulo: IMECC/Unicamp, 1994.
- BERTONE, A. M. A; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. M. **Modelagem Matemática**. Uberlândia: Edufu, 2014. 187 p.
- BLINK, Plataforma *online*. Disponível em: <<https://blynk.io/>>. Acesso em: 04 de nov. 2020.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. Agência Nacional de Energia Elétrica – ANEEL., 2000. **Segurança barragens – Tabulação**. Disponível em: <<https://www.aneel.gov.br/>> Acesso em: 09 fev. 2021.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2002.
- BRASIL. **Versão preliminar da Base Nacional Comum Curricular**: Ministério da Educação 2015. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>>. Acesso em 19 nov. 2021.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- Disponível em:

<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>

Acesso em: 09 fev. 2021.

BURAK, D. **Critérios Norteadores para a adoção da Modelagem Matemática no Ensino Fundamental e Secundário**. *Zetetiké*, v. 2, n. 2, p. 47-60, 1994.

CORCOLL-SPINA, C. O. **Lógica Fuzzy: reflexões que contribuem para a questão da subjetividade na construção do conhecimento matemático**. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo, 165 p., 2010.

BLIKSTEIN, P.; ZUFFO, M. K. **As sereias do ensino eletrônico**. In: SILVA, Marco (org.). *Educação online*. 4. ed. São Paulo: Loyola, 2003. p. 1-20. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/242421586_As_sereias_do_ensino_eletronico>

Acesso em: 30 dez. 2021.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 23ª ed. Campinas: Papyrus, 2012.

FAZENDA, I. C. A. **Práticas Interdisciplinares na Escola**. 8. Cortez, 147 p, 1991.

FAZENDA, I. C. A. **Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro: efetividade ou ideologia**. Edições Loyola, 2011.

FAZENDA, I. C. A. **Práticas interdisciplinares na escola**. (13). Cortez, 2013.

FISPRO, Plataforma *online*. Disponível em: <<https://www.fispro.org/en/>>. Acesso em: 04 de nov. 2020.

GRAVINA, M. A. **A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados**.

Informática na Educação. Teoria e Prática, Porto Alegre, v. 1, nº 1, 1998.

HOHENWARTER, M. GeoGebra 5.0, 2019. Disponível em: <http://www.geogebra.org>.

JAFELICE, R. S. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C.; **Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações** – São Carlos, SP: SBMAC, 2012, 119p., 20.5 cm – (Notas em Matemática Aplicada; v.17) – 2ª edição.

JERONIMUS, J. **RFID and Wmos D1 mini**; Blog The Jeronimus; 29 de mar. 2018. Disponível em: <<https://blog.jeronimus.net/2018/03/rfid-and-wemos-d1-mini-1.html>>. Acesso em: 04 de nov. 2020.

KLÜBER, T. E.; BURAK, D. **Concepções de Modelagem Matemática: contribuições teóricas**. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17-34, 2008.

MARTINS, A. L. C. F. et al. **O professor e as TIC: da formação inicial à continuada**. *Revista Psicologia & Saberes*, v. 9, nº 17, p. 201-216, 2020.

LEITE, S. R. **Modelo para Avaliação de Riscos em Segurança de Barragens com Associação de Métodos de Análise de Decisão Multicritério e Conjuntos Fuzzy**. 2019, 222

f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Computação Aplicada. Área de concentração: Mestrado Profissional em Computação Aplicada da Universidade de Brasília. Brasília, 2019.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: E.P.U., 2012.

MELAZZO, M. R. **Modelagem Matemática da Voz, Trigonométrica e Robótica: Atividades Interativas**. 2020, Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

MORAN, J. **A Educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá**. Campinas: Papirus, 2016.

NICOLESCU, B. et. Al. (orgs) **Educação e transdisciplinaridade**. Tradução de VERO, Judite; Mello, Maria F. de; e SOMMERMAN, Américo. Brasília: UNESCO, 2000 (Edições UNESCO).

PERRENOUD, P. **10 Novas Competências para Ensinar**. Artimed Editora, Porto Alegre, 2000.

PIAGET, J. **The epistemology of interdisciplinary relationships**. In PIAGET, J. (org.) *Main Trends in Interdisciplinary Research*. New York: Harper & Row, 1973. pp. 12739.

POCINHO, R. F. S.; GASPAR, J. P. M. **O uso das TIC e as alterações no espaço educativo**. *Exedra: Revista Científica*, nº 6, p. 143-154, 2012.

RPG MAKER - VX ACE. Disponível em: < <https://www.rpgmakerweb.com/products/rpg-maker-vx-ace> >. Acesso em: 04 de nov. 2020.

SILVA, M. F. **Uma Proposta de Aplicação da Lógica Fuzzy no Ensino Médio**. Tese (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, 43f.: il. Color; 2018.

SILVA, E. L.; MENEZES, E. M. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 4. ed. rev. atual. Florianópolis: UFSC, 2005. 138 p.

TAJRA, S. F. **Informática na Educação: novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade**. 3ª ed. São Paulo: Érica, 2001.

TURRIONI, J. B.; MELLO, C. H. P. **Metodologia de pesquisa em engenharia de produção: estratégias, métodos e técnicas para condução de pesquisas quantitativas e qualitativas**. Itajubá: UNIFEI, 2012. 191 p. Disponível em: <http://www.marco.eng.br/adm-organizacao-I/Apostila_Metodologia_Completa_2012_%20UNIFEI.pdf>. Acesso em 26 jan. 2021.

VALENTE, José Armando (org.). **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/ Núcleo de Informática Aplicada à Educação-NIED, 1999.

PEDRYCZ, W; GOMIDE, F. **Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing**, Wiley-Interscience, Hoboken, 2007.

ZADEH, L.A. **Fuzzy Sets, Information and Control**, 8, 338 – 353, 1965.

ZHANG, L. M.; XU, Y.; JIA, J. S. **Analysis of earth dam failures- A database approach**. Isgsr2007- First International Symposium on Geotechnical Safety & Risk, Shanghai, v. 1, n. 1, p.293-302, 18 out. 2007.

Apêndice A

Aula 1

No intuito de motivar os estudantes, para o estudo da modelagem *fuzzy* do risco do rompimento da barragem, inicialmente, apresenta-se o vídeo de uma barragem de rejeitos se rompendo (<https://www.youtube.com/watch?v=ioyMjZikiW8>). Por intermédio do vídeo, o educador faz uma breve estruturação dos casos e tipos de barragem que existem, e quais os danos que podem ocorrer com o rompimento, assim os estudantes são desafiados a desenvolverem as atividades para controlar o risco de rompimento da barragem.

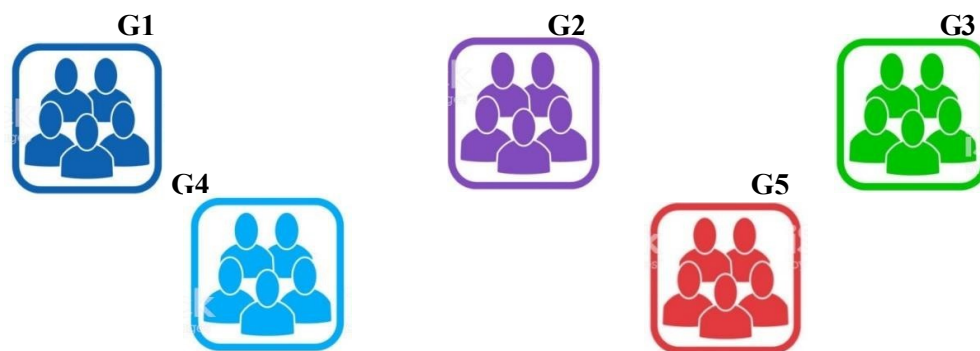
Aula 2

Nessa aula é realizada uma revisão do conteúdo de conjuntos e suas operações.

Considerando que a sala tenha 25 alunos, o educador divide a sala em cinco grupos com cinco integrantes em cada grupo.

Suponha-se que os grupos formados são: G1, G2, G3, G4 e G5, conforme Figura A1.

Figura A1 - Representação dos grupos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Em cada grupo, solicitar aos estudantes que encontrem algumas semelhanças e diferenças entre eles. É interessante que os estudantes façam anotações, para que na hora de conversar com toda a turma, não deixem de mencionar o que estava sendo discutido no grupo. A intenção é que eles percebam que nem todos possuem o mesmo gosto e que encontrar uma semelhança em um grupo de 5 pessoas é algo extremamente difícil.

O educador solicita que os grupos comentem o que encontraram de características semelhantes.

Para melhor visualização de como isso aconteceria, veja o exemplo:

Elementos do grupo “G1”: Paula, Débora, Barbara, Gustavo e Tiago. E assim atribuir perguntas como: Barbara pertence ao conjunto G1?

Ou ainda escolher um outro integrante do conjunto G2 e perguntar: Hugo pertence ao conjunto G1?

É interessante deixar os estudantes chegarem no conceito de pertencer ou não pertencer ao conjunto. Nesse momento, o educador solicita uma escrita matemática para o conceito atribuído à dinâmica.

Relação de Pertinência

A relação entre um ELEMENTO e um CONJUNTO é chamada relação de pertinência. Para mostrar que um elemento pertence a um conjunto, usamos os símbolos:

\in - Pertence

\notin - Não pertence

Dando uma continuidade, veja o que os estudantes encontrarão de comum nos conjuntos formados.

Conjunto G1: todos os componentes do grupo praticam algum esporte.

Conjunto G2: todos os integrantes assistem uma série de TV.

Conjunto G3: todos têm um irmão ou irmã caçula.

Conjunto G4: todos possuem aparelhos celulares de uma marca específica.

Conjunto G5: todos os integrantes possuem um animal de estimação.

Pode-se conversar com todos os estudantes sobre outras características que são citadas no grupo e que nem todos os integrantes tenham. Assim, pode-se relacionar os conjuntos.

Ao associar isso com a turma, pode-se encontrar outros elementos que se unem a semelhança encontrada no conjunto. Por exemplo:

No conjunto G4, todos possuem aparelhos celulares da marca “Apple”, dentro dos outros conjuntos de alunos, quais também possuem celulares dessa marca?

No conjunto G1, três dos cinco estudantes possuem aparelhos celulares da marca “Apple”, ou seja, pode-se considerar esses três estudantes como possíveis integrantes do conjunto G4. (Figura A2)

Esse conjunto de três estudantes é denominado \bar{G} . Esse novo conjunto dos três elementos de G1 que possuem celular “Apple” juntos com G4 é denominado \bar{G} .

Figura A2 - Integrantes do grupo G1 que pertencem ao grupo \bar{G}



Fonte: Elaborado pela autora.

O educador instiga os estudantes a pensarem que o conjunto \bar{G} é um subconjunto de G1. Matematicamente, o subconjunto \bar{G} está contido no conjunto \bar{G} . Define-se a relação de inclusão, da seguinte forma:

Relação de Inclusão

A relação entre dois CONJUNTOS é chamada de relação de inclusão. Para mostrar que um conjunto está contido em um outro conjunto, usamos os símbolos:

\subset - Está contido

$\not\subset$ - Não está contido

Lembre-se de que **um conjunto está contido no outro se cada um dos seus elementos também pertence ao outro conjunto.**

O educador pode formar outros conjuntos. Fazendo uma pergunta:

Na turma, qual aluno já viajou para fora do país? Nessa turma, não possui nenhum aluno que já tenha feito uma viagem para o exterior. Logo, esse conjunto é vazio.

Conjunto vazio

Um conjunto que não possui elementos é chamado de conjunto vazio. Para representar esse conjunto, usamos o símbolo de vazio:

$$\emptyset = \{ \}$$

Algumas outras questões ainda podem ser levantadas com a turma para dar continuidade nas teorias de conjunto. O educador ainda pode elaborar outras perguntas como, por exemplo: Alguém aqui já fez algum tipo de cirurgia?

Uma aluna já fez uma cirurgia para a retirada de amígdalas. Assim, a estudante, está em um conjunto sozinha, ou seja, um conjunto unitário.

Conjunto unitário

O **conjunto unitário** diferencia-se por ter apenas um elemento. Não importa que tipo de elemento tenha, pode ser um gato, um cachorro, um número, uma letra ou qualquer outra coisa, se ele tiver apenas um elemento, o chamaremos de conjunto unitário.

Na Figura A3 é mostrados tipos de representações do conjunto unitário. Figura A3 (a) é o diagrama de Venn e Figura A3 (b) o elemento entre chaves.

Figura A3 - Representação conjunto unitário.



Fonte: Elaborado pela autora.

Para finalizar os tipos de conjuntos, considera-se as quantidades de elementos de cada grupo. No início da dinâmica, foi solicitado que os estudantes se separassem em cinco grupos, ou seja, cada conjunto possui cinco elementos. A Figura A4 é um exemplo de conjunto finito.

Figura A4 - Representação conjunto finito.



Fonte: Elaborado pela autora.

Considerar o conjunto dos números naturais que terminam em três, pode-se defini-lo assim:

$$T = \{x/x \text{ é um número natural que termina em três}\}.$$

Como a reta numérica é infinita, sempre existirá um número no qual termina em três. Conclui-se que esse conjunto é infinito.

Vale ressaltar nesse momento que existe uma forma de representar alguns conjuntos infinitos por [extensão](#). Basta exibir os primeiros elementos do conjunto e indicar com **três pontos** que a lista continua indefinidamente. No caso do conjunto T, formado pelos números que terminam em três:

$$T = \{3, 13, 23, 33, 43, 53, \dots\}.$$

Faça uma observação para os estudantes, pergunte se o conjunto de grãos de areia da Terra é um conjunto infinito. Talvez tenhamos respostas de diferentes defesas relacionados ao conjunto finito ou infinito. Nesse caso, ainda que o conjunto tenha uma enorme quantidade de elementos, deve existir um número que o represente, mesmo que esse número seja gigantesco.

Aula 3

Operações de conjuntos

Para trabalhar com as operações de conjuntos, pode-se ainda utilizar os grupos da dinâmica da aula passada, talvez seja preciso fazer uma reorganização para que alguns conceitos sejam contextualizados.

Suponhamos que os grupos fiquem da seguinte forma:

Conjunto G1 = {Alan, Bruno, Gustavo, Rafael e Tiago};

Conjunto G2 = {Alexandre, Carlos, Guilherme, Hugo e Renato};

Conjunto G3 = {Ana, Barbara, Debora, Luísa, Paula};

Conjunto G4 = {Alessandra, Mariane, Marina, Raquel, Thais};

Conjunto G5 = {Ana, Lucas, Marcelo, Rosana, Silvia}.

Refeito os grupos, o educador solicita que encontrem novas semelhanças entre si, o que definirá a junção do conjunto. Suponha-se que alguns “temas” foram eventualmente surgindo.

Conjunto G1 = todos os elementos possuem uma irmã ou um irmão;

Conjunto G2 = todos os elementos praticam algum tipo de esporte;

Conjunto G3 = todos os elementos acordam antes das 6h todos os dias da semana;

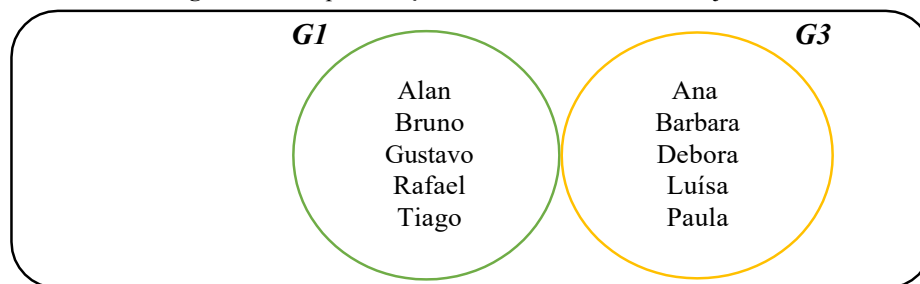
Conjunto G4 = todos os elementos moram em apartamento;

Conjunto G5 = todos os elementos possuem telefone celular de mesma marca.

Assim, outras semelhanças já apresentadas na aula passada foram também citadas. Observou-se que a semelhança atribuída a um conjunto, pode ser também a de um outro conjunto diferente, podendo, assim, fazer a união de dois conjuntos.

A semelhança do conjunto G1 é que todos os elementos do conjunto possuem uma irmã ou irmão e no conjunto G3 isso também acontece. A Figura A5 apresenta os conjuntos G1 e G3.

Figura A5 - Representação dos elementos de dois conjuntos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Questiona-se aos estudantes o que isso pode gerar e assim temos a união de dois conjuntos G1 e G3, formando um novo conjunto com todos os elementos: $G1 \cup G3$.

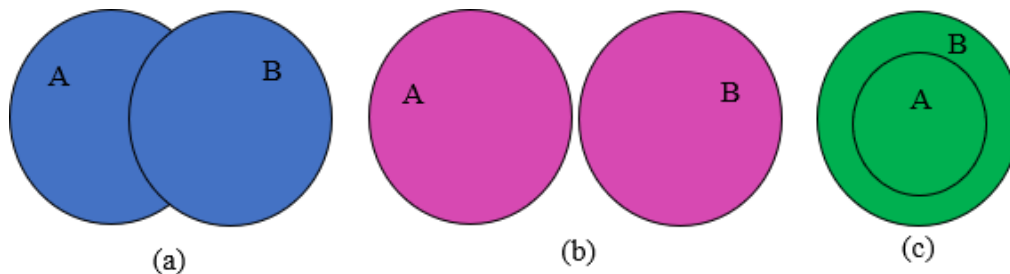
União de conjuntos

Dados dois conjuntos **A** e **B**, chama-se união de **A** e **B** o conjunto formado pelos elementos que pertencem a **A**, ou a **B**. Em símbolos:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\} \rightarrow \text{Lê-se: } A \text{ união com } B.$$

Representação por meio de diagrama da operação de União (**parte colorida**) em três casos diferentes: Figura A6 (a) quando os conjuntos possuem alguns elementos em comum; Figura A6 (b) quando os conjuntos não possuem elementos em comum (são disjuntos); Figura A6 (c) quando um conjunto é subconjunto do outro ($A \subset B$).

Figura A6 - Representação de casos da operação união de conjuntos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Considerar que foi levantado algumas sugestões que não fizeram o tema valer para o grupo, pois nem todos os elementos compartilham da mesma característica.

Por exemplo, a situação de quem é filho único. No conjunto G2, três elementos satisfazem essa afirmação e no conjunto G5 um elemento satisfaz a afirmação. Pode-se então trabalhar com a interseção desses dois conjuntos. A Figura A7 apresenta os diagramas de Venn dos conjuntos G2 e G5.

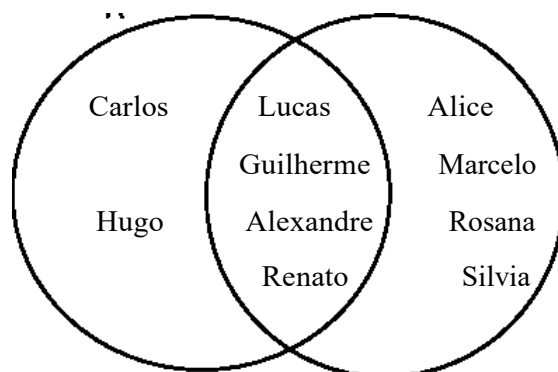
Figura A7 - Representação dos elementos de dois conjuntos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tendo a situação de quem é filho único e sabendo que os seguintes elementos satisfazem a afirmação: Alexandre, Guilherme, Renato e Lucas. Então a interseção desses conjuntos G2 e G5 são justamente esses elementos, para o quesito ser filho único. A Figura A8 é a interseção dos dois conjuntos.

Figura A8 - Representação da interseção de dois conjuntos.



Fonte: Elaborado pela autora.

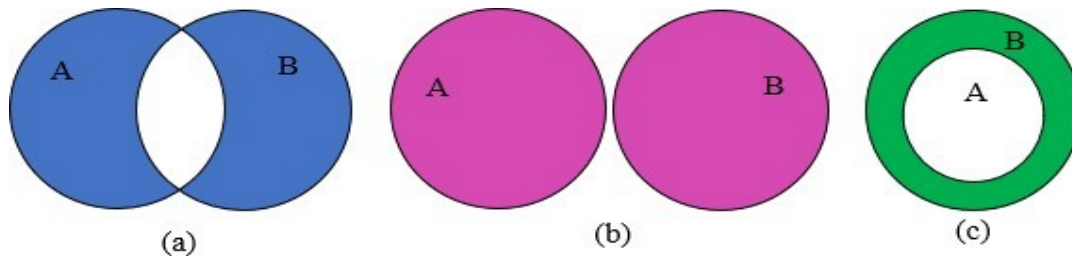
Interseção de Conjuntos

Dados dois conjuntos **A** e **B**, chama-se a interseção de **A** e **B** o conjunto formado pelos elementos que pertencem, ao mesmo tempo, a **A** e a **B**. Em símbolos:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\} \rightarrow \text{Lê-se: } A \text{ interseção com } B.$$

Representação por meio de diagrama da operação de Interseção (**parte em branco**) em três casos diferentes apresentado: Na Figura A9 (a) quando os conjuntos possuem alguns elementos em comum; Na Figura A9 (b) quando os conjuntos não possuem elementos em comum (são disjuntos), não há interseção ($A \cap B = \emptyset$); na Figura A9 (c) quando um conjunto é subconjunto do outro ($A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$).

Figura A9 - Casos da operação de interseção de conjuntos numéricos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Nesse momento, o educador introduz a diferença entre dois conjuntos. Este faz a seguinte pergunta para os estudantes: qual a diferença entre os conjuntos G3 e G5? Quando fala-se em diferença, associa-se à subtração, assim, pode-se subtrair um conjunto do outro: $G3 - G5$. Como é apresentado na Figura A10.

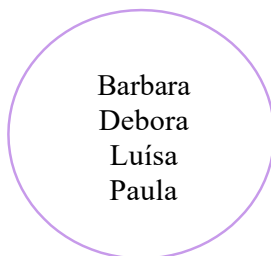
Figura A10 - Representação dos elementos de dois conjuntos.



Fonte: Elaborado pela autora.

O educador faz a seguinte observação: que os dois conjuntos possuem um nome em comum. Retirado esse elemento do conjunto G3, os elementos que sobram são: Barbara, Debora, Luísa e Paula. A Figura A11 representa os elementos que sobraram do conjunto G3 depois da subtração.

Figura A11 - Representação dos elementos da operação $G3 - G5$.

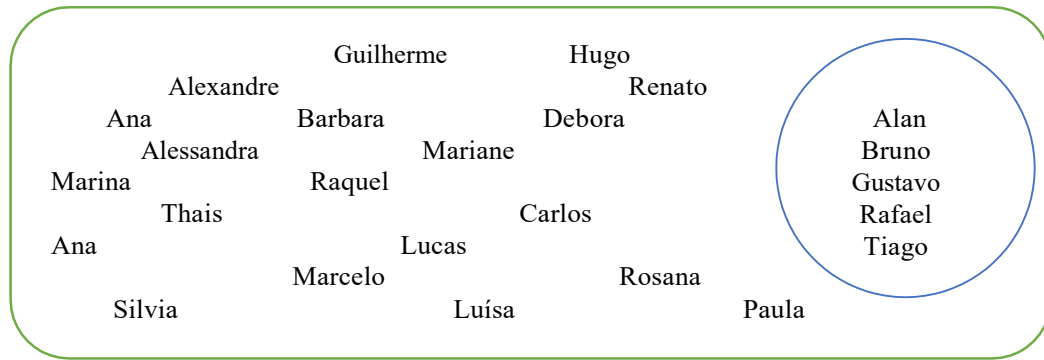


Fonte: Elaborado pela autora.

Para finalizar, considere a turma toda como o conjunto universo (possui todos os elementos). Formule com os alunos o que é ter todos os elementos dentro desse conjunto, a intenção é que eles percebam que os conjuntos formados são sempre subconjuntos desse conjunto universo, ou seja, considerando-se os conjuntos gerados na aula passada, pode-se concluir que são subconjuntos que estão contidos no conjunto universo.

Como decidido, o conjunto universo é a turma de alunos, considere um subconjunto de alunos, A1 por exemplo, e faça a seguinte pergunta para a turma: quem é complementar a esse subconjunto para chegar no conjunto universo? Espere que eles respondam e cheguem à conclusão que o conjunto complementar é todo o restante da turma. Figura A12.

Figura A12 - Representação de um conjunto complementar.



Fonte: Elaborado pela autora.

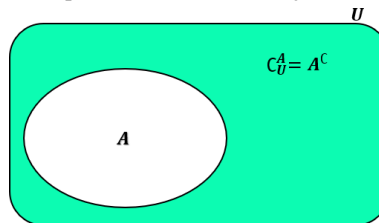
Conjunto Complementar

Dado um conjunto A , subconjunto de um conjunto universo U ($A \subset U$), dizemos que o complementar de A em relação à U é formado por todos os elementos de U que não são elementos de A . Em símbolos:

$$C_U^A = A^c = \bar{A} = \{x | x \in U \text{ e } x \notin A\} \rightarrow \text{Lê-se: complementar de } A \text{ em relação a } U.$$

O complementar do conjunto A em relação ao conjunto universo U está representado na Figura A13 (parte colorida).

Figura A13 - Representação de um conjunto complementar.



Fonte: Elaborado pela autora.

Aula 4

Nas duas aulas anteriores, o conteúdo de conjuntos numéricos foi aplicado. A aula 4 pode ocorrer no laboratório de informática, para a aplicação do jogo construído pela autora no *software* livre *RPG Maker*, para a consolidação do conteúdo.

O jogo funciona da seguinte forma: um jogo de fases, em que cada fase tem uma pergunta problematizando o conteúdo de conjuntos numéricos.

O aluno pode encontrar no mapa algumas dicas de como resolver as questões, essas dicas estão escondidas pelo mapa do jogo. Só se passa para a próxima fase depois de ter acertado a questão (Figura A14). Em todos os computadores do laboratório estará disponibilizado o jogo para os alunos.

Figura A14 - Imagem de um dos mapas do jogo.



Fonte: Elaborado pela autora.

Exemplificando: Considere os conjuntos $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{6,7,8,9\}$ e $C = \{2,4,6,8,10\}$. Quais são os elementos do conjunto $(A \cap B) \cup C$?

- a) Os mesmos do conjunto A
- b) Os mesmos do conjunto B
- c) $\{6\}$
- d) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- e) Os mesmos do conjunto C

Aula 5

Nas aulas anteriores, foi trabalhado e revisado o conceito dos conjuntos clássicos. Utilizando o mesmo desenvolvimento dinâmico, podemos associar a lógica clássica e a lógica *fuzzy* nas atividades de conjuntos.

Na lógica clássica, sentenças verdadeiras têm valor lógico 1, enquanto sentenças falsas têm valor lógico 0. O que difere da lógica *fuzzy* que possui um valor lógico entre 0 e 1.

Na aula de hoje, o educador propõe para a turma que os estudantes dividam os grupos, com as condições das proposições.

Proposições:

- ❖ Conjunto de alunos tímidos da sala.
- ❖ Conjunto de alunos com cabelo escuro da sala.
- ❖ Conjunto de alunos que assistem televisão com muita frequência.
- ❖ Conjunto de professores que ministram muitas aulas na turma.
- ❖ Conjunto de alunos altos da sala.
- ❖ Conjunto de alunos que bebem muita água durante a aula.
- ❖ Conjunto de alunos que viajam com baixa frequência.
- ❖ Conjunto de alunos que tomam muitos banhos durante o dia.

O educador observa o desenrolar da turma para montar esses conjuntos e se for preciso conduz algumas dicas para os estudantes.

Por exemplo, formar um conjunto de alunos altos da sala, inicialmente os estudantes podem achar fácil, porque reconhecem que dois alunos da turma são de maior estatura. Estes possuem 1,80m, logicamente, esses alunos estariam no conjunto de alunos altos. Mas isso bastaria? Apenas esses alunos fariam parte desse conjunto? O educador incentiva os estudantes a analisarem todos os “elementos” da turma, para observarem se outros colegas pertencem ao conjunto dos estudantes altos. Em algum momento, eles se depararão com um estudante que possui 1,75m. Veja a Figura A15, o que confirmará a questão da incerteza ao tentar definir os elementos que pertencem a tal conjunto. Isso certamente irá gerar várias discussões, o que pode levar o estudante a sugerir ideias de conjuntos com graus de incerteza, pois os estudantes irão verificar que nem todos os alunos pertencem por completo a um determinado conjunto, mas também que não há como classificar alguns alunos fora desse conjunto.

Nesse momento, o educador solicita aos estudantes que sugiram uma solução de como incluir todos os alunos da turma (ou de um determinado grupo) nesses conjuntos e que seja

aberta uma concordância entre todos de como solucionar os casos dos estudantes que não se encaixam fora ou dentro do conjunto.

Figura A15 - Representação se o elemento pode pertencer ao conjunto.



O conjunto *fuzzy* é caracterizado por uma função de pertinência e o grau de pertinência pode ser considerado como uma medida que expressa a possibilidade de que um elemento seja membro do conjunto *fuzzy* (SILVA, 2018).

Aula 6

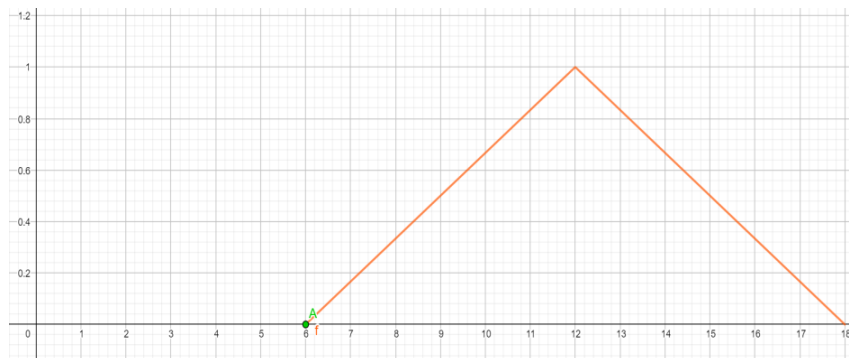
Função de pertinência triangular

Na aula passada, definiu-se o conceito de conjunto *fuzzy*, concluindo-se que pode-se classificar um elemento pelo grau de pertinência relacionado ao conjunto. Sabe-se também que esse grau de pertinência varia entre 0 e 1, nesta aula isso é observado graficamente.

Solicite que os estudantes levem em consideração as horas em torno do meio-dia (12 horas). Nesse caso, considerem que o dia inicie às 6 horas e termine às 18 horas. Comparem as horas próximas ao meio-dia (12 horas) e encontre o grau de pertinência em torno de 12 horas usando o bom senso.

E, assim, pode-se analisar o gráfico construído no *Geogebra* conforme Figura A16.

Figura A16 - Grau de pertinência das horas em torno de 12h.



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

O educador apresenta as principais características do gráfico: O eixo “x” representa as horas, vale ressaltar que trabalha-se no intervalo de 6 horas à 18 horas. O eixo “y” representa o grau de pertinência que varia entre 0 e 1.

Com o cursor deslizante, pode-se observar cada valor da variável linguística e o seu grau de pertinência que varia de 0 a 1, pelo ponto A que se desloca sobre a função.

Algumas características que devem ser notadas nessa função de pertinência triangular:

- Um único valor atende o grau de pertinência igual a 1, esse valor ocorre no próprio 12 (meio-dia).
- Valores menores que 12 e valores maiores que 12, que possuem o mesmo distanciamento de 12, possuem também o mesmo valor de grau de pertinência.

- Como foi imposto um intervalo de 6 à 18, pode-se observar que 6 e 18 possuem grau de pertinência igual a 0, pois são os mais distantes de 12, considerando os números entre esse intervalo.

- Como um único valor possui o grau de pertinência igual a 1, observa-se a formação uma função de pertinência triangular.

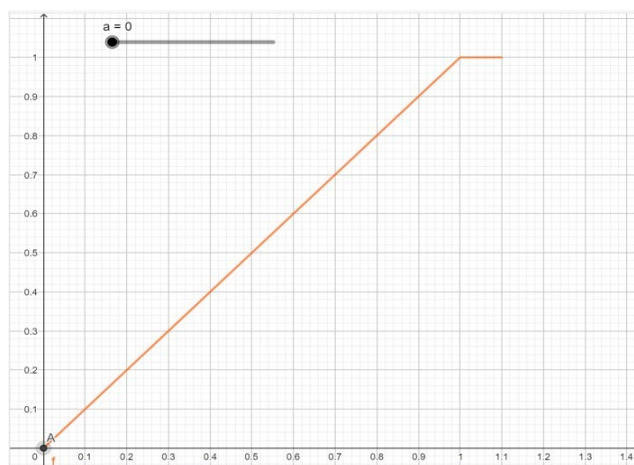
Função de pertinência trapezoidal

Como dito anteriormente, o grau de pertinência pode ser considerado como uma medida que expressa a possibilidade de que um dado elemento seja membro do conjunto *fuzzy* e é claro que existem variações de resultado. Apresenta-se um exemplo de função de pertinência trapezoidal.

Considere uma jarra que tenha capacidade de 1 litro, trabalha-se com o conceito de jarra cheia e vazia. O educador pode trabalhar com o exemplo concreto, com essa jarra na sala de aula enquanto tenta inserir 1,1 litros de água. Pergunte aos estudantes se é possível determinar o grau de pertinência enquanto enche a jarra e o que vai acontecer com o excesso de água que se tem. Pode-se analisar o volume da jarra e o grau de pertinência graficamente.

Analisaremos o gráfico construído no *Geogebra* (Figura A17).

Figura A17 - Grau de pertinência de uma jarra cheia de água.



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

Novamente o educador apresenta certas características do gráfico, o eixo “x” representa a quantidade de água em ml. Mostre aos estudantes que cada intervalo equivale a 100 ml. O eixo “y” representa o grau de pertinência que varia de 0 a 1.

Com o cursor deslizante, pode-se observar cada valor da variável linguística e o seu grau de pertinência que varia de 0 a 1, por meio do ponto A que se desloca sobre o gráfico da função.

Algumas características que devem ser notadas nessa função de pertinência trapezoidal:

- O grau de pertinência igual a 0 se encontra no volume 0, ou seja, quando não possui água dentro da jarra.
- Assim que o volume vai aumentando, o grau de pertinência aumenta simultaneamente.
- Quando chega em 1 litro, a jarra enche e o grau de pertinência chega a 1, pois a jarra está cheia.
- O grau de pertinência permanece constante igual a 1, quando inserimos 1,1 ml de água, pois a jarra mesmo que vazando água, permanece cheia.

A seguir apresenta-se um exemplo de conjunto *fuzzy*.

Exemplo: Seja X o conjunto dos números naturais:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Seja A o conjunto dos números próximos de 3:

$$\{x \in A \mid x \text{ é próximo de } 3\}.$$

Definimos a função $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$, que associa cada x natural ao valor próximo de 3 por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{-x+5}{2}, & \text{se } 3 < x \leq 5 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Veja agora os graus de proximidade de alguns números do conjunto X em relação ao conjunto A :

$$\mu_A(1) = 0 \quad \mu_A(2) = 0.5 \quad \mu_A(3) = 1 \quad \mu_A(4) = 0.5 \quad \mu_A(5) = 0$$

Aula 7

Nas primeiras aulas, trabalhou-se com os conjuntos numéricos e suas operações, nota-se que é possível trabalhar com operações relacionados aos conjuntos *fuzzy* também.

Para obter os conjuntos *fuzzy* e suas operações, basta generalizar a função característica da lógica clássica para o intervalo $[0, 1]$. O elemento irá pertencer ao conjunto A com um grau de pertinência que é um valor no intervalo $[0, 1]$. Apresentado graficamente na aula passada.

Definição 1: Sejam A e B dois subconjuntos *fuzzy* de um universo U, com funções de pertinência μ_A e μ_B , respectivamente.

Definição 1.1: A é subconjunto *fuzzy* de B, ou $A \subset B$, se

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \text{ para todo } x \in U.$$

Definição 1.2: A união de A com B é o subconjunto *fuzzy* $A \cup B$ de U cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max_{x \in U} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Definição 1.3: A intersecção de A com B é o subconjunto *fuzzy* $A \cap B$ de U cuja função de pertinência é dada por:

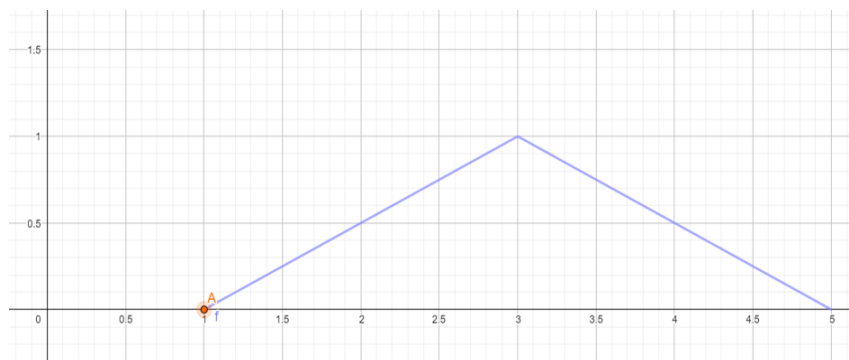
$$\mu_{A \cap B}(x) = \min_{x \in U} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Definição 1.4: O complementar de A em relação a U é o subconjunto *fuzzy* A^C de U cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x), x \in U.$$

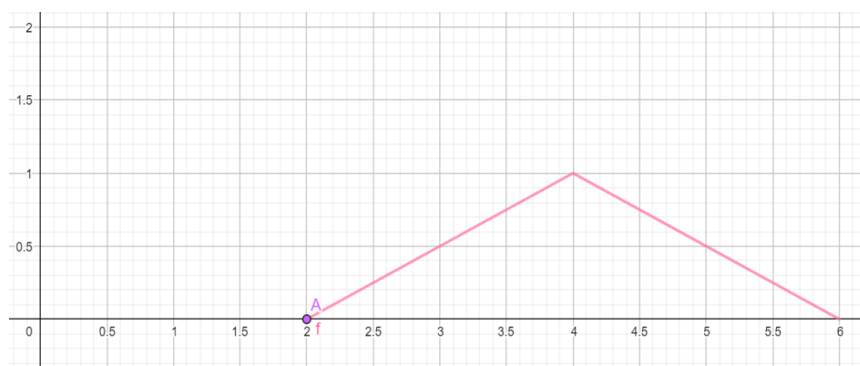
Exemplo: Veja a representação gráfica para os conjuntos *fuzzy* dos números próximos de 3 e próximos de 4 (Figuras A18 e A19).

Figura A18 - Conjuntos *fuzzy* dos números próximos de 3.



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

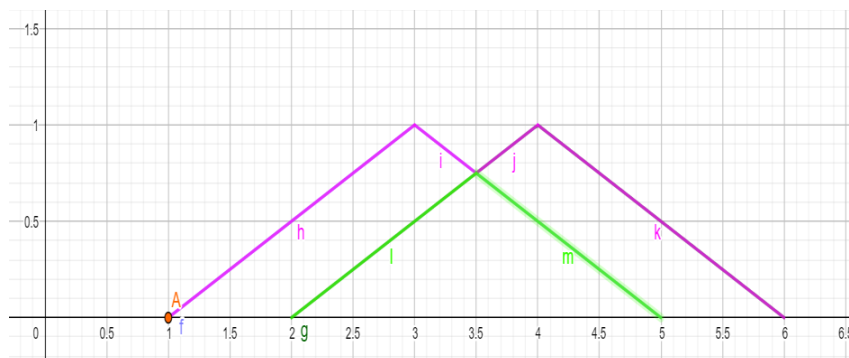
Figura A19 - Conjuntos *fuzzy* dos números próximos de 4.



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

A Figura A20 representa a junção dos dois conjuntos *fuzzy*, com as operações de união (parte rosa) e interseção (parte verde).

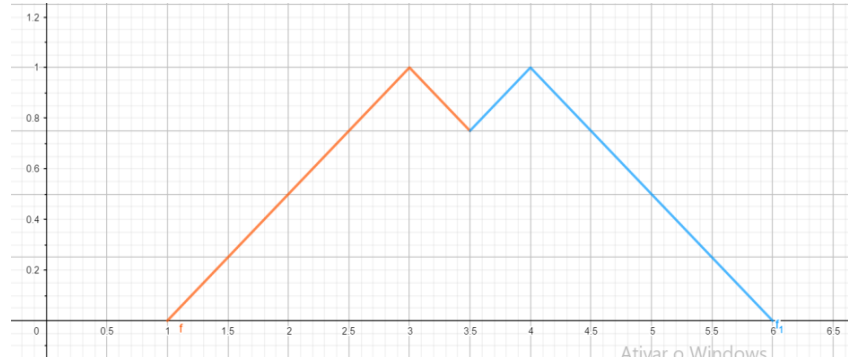
Figura A20 - Gráfico $\mu_{A \cup B}$ e $\mu_{A \cap B}$.



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

A Figuras A21 apresenta o gráfico de $\mu_{A \cup B}(x)$.

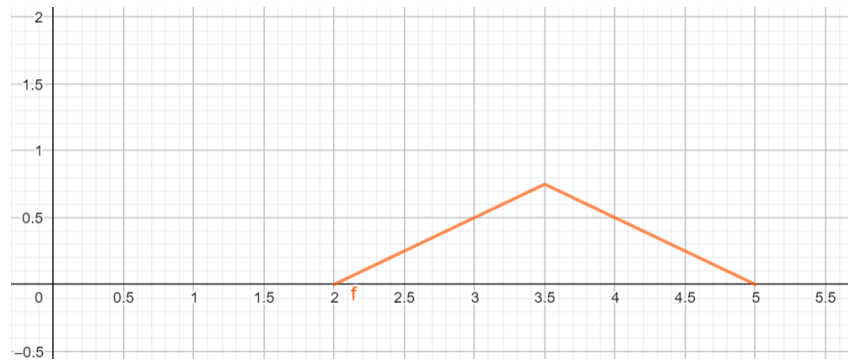
Figura A21 - Gráfico de $\mu_{A \cup B}$.



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

A Figuras A22 apresenta o gráfico de $\mu_{A \cap B}(x)$.

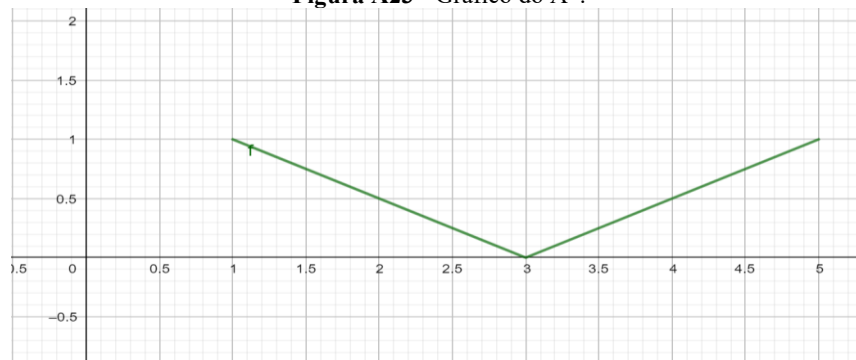
Figura A22 - Gráfico de $\mu_{A \cap B}$.



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

A Figuras A23 apresenta o gráfico de A^C .

Figura A23 - Gráfico do A^C .



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

Suponha que o conjunto universo U seja composto pelos pacientes de uma clínica, identificados pelos números 1, 2, 3, 4 e 5. Sejam A e B os conjuntos *fuzzy* que representam os pacientes com febre e dor, respectivamente. A Tabela 1 ilustra a união, intersecção e o complemento. (JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2012).

Tabela 1 - As operações de união, intersecção e complementar.

<i>Paciente</i>	<i>Febre (μ_A)</i>	<i>Dor (μ_B)</i>	$\mu_{A \cup B}$	$\mu_{A \cap B}$	μ_{A^c}
1	0.7	0.6	0.7	0.6	0.3
2	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
3	0.4	0.2	0.4	0.2	0.6
4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
5	1.0	0.2	1.0	0.2	0.0

Fonte: Elaborado pela autora.

Os valores das colunas, exceto os da primeira, indicam os graus com que cada paciente pertence aos conjuntos *fuzzy* A , B , $A \cup B$, $A \cap B$ e A^c , respectivamente, em que A e B são supostamente dados.

Aula 8

Sistemas baseados em regras *fuzzy*

Utiliza-se um exemplo para que os estudantes entendam como construir o sistema utilizando todo o conteúdo visto até aqui. Essa aula pode ser realizada no laboratório de informática, nos computadores está instalado o *software FisPro*. Orienta-se aos alunos para que entendam que cada variável linguística vai possuir um grau de pertinência e que isso irá influenciar o resultado.

As variáveis linguísticas são modeladas por conjuntos *fuzzy* e as proposições são descritas de acordo com as informações de um especialista. Quanto mais informações se tem das condições mais preciso será o resultado.

Exemplo: O SBRF tem como variável linguística de saída a qualidade de um *smartphone*, sendo as variáveis de entrada: a memória do dispositivo, a duração da bateria e a qualidade da câmera.

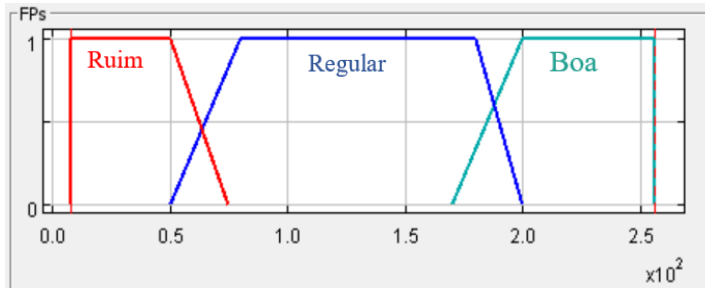
A partir da definição dos alunos do que seria a boa qualidade de um *smartphone* levando em consideração essas três características, pode-se introduzir o conceito da base de regras, associando as três variáveis de entrada apresentadas com a escolha do *smartphone*.

O SBRF é construído no *software* livre *FisPro*. O objetivo do uso dessa ferramenta é somente a resolução do problema, sem detalhar o modo de utilização do *software* e os passos a serem seguidos.

Depois pode-se construir, juntamente com os estudantes, os conjuntos *fuzzy* da capacidade de memória do dispositivo, duração da bateria e qualidade da câmera. Apresentadas em detalhes nas Figuras A24, A25 e A26.

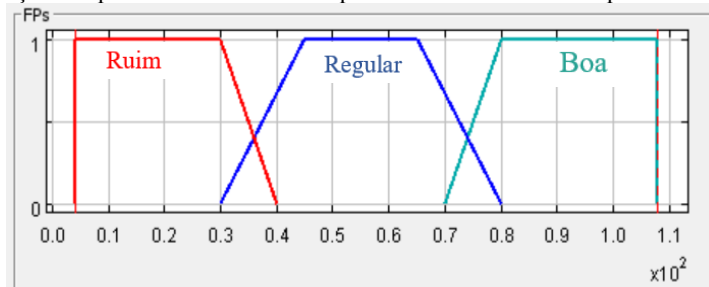
O domínio da variável de entrada “capacidade de memória” do dispositivo é de 8 GB a 256 GB, da variável de entrada “qualidade da câmera” é de 4 *megapixel* a 108 *megapixel* e da variável de entrada “tempo de duração da bateria” de 0 a 16 horas. Os termos linguísticos das variáveis de entrada “capacidade de memória do dispositivo” e da “qualidade da câmera” são: ruim, regular e boa. Os termos linguísticos da variável de entrada “tempo de duração de bateria” são: fraca, média e forte.

Figura A24 - Funções de pertinência da variável capacidade de memória do dispositivo.



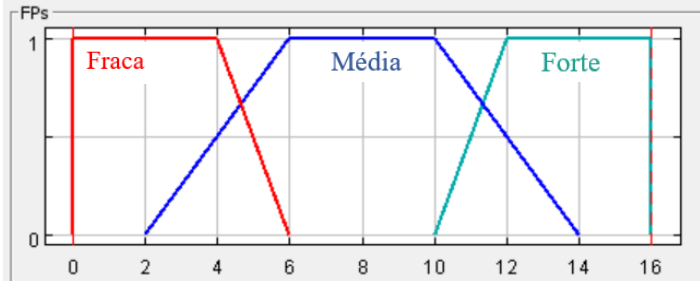
Fonte: Elaborado pela autora pelo *software FisPro*.

Figura A25 - Funções de pertinência da variável qualidade da câmera do dispositivo.



Fonte: Elaborado pela autora pelo *software FisPro*.

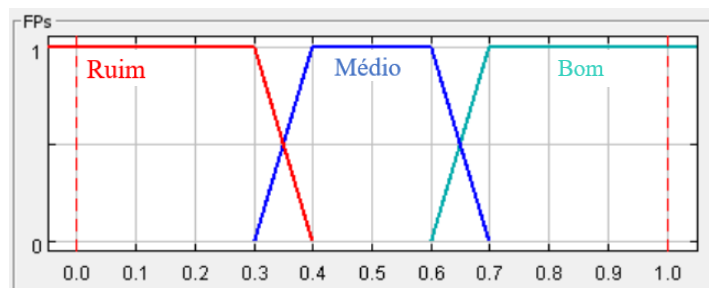
Figura A26 - Função de pertinência da variável tempo de duração da bateria do dispositivo.



Fonte: Elaborado pela autora pelo *software FisPro*.

Como saída é mostrado o conjunto *fuzzy* de qualidade do aparelho, que deve ser construído juntamente com os estudantes, considerando os termos linguísticos: ruim, médio e bom (Figura A27).

Figura A27 - Função de pertinência da variável qualidade do *smartphone*.



Fonte: Elaborado pela autora pelo *software FisPro*.

A base de regras é apresentada na Tabela 2.

Tabela 2 - Regras *Fuzzy*.

Regra	Ativa	SE Me...	E Câme...	E Bateria	ENTÃO ...
1	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Ruim	Fraca	Ruim
2	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Ruim	Média	Ruim
3	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Ruim	Forte	Ruim
4	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Regular	Fraca	Ruim
5	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Regular	Média	Regular
6	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Regular	Forte	Regular
7	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Boa	Fraca	Ruim
8	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Boa	Média	Regular
9	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Boa	Forte	Bom
10	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Ruim	Fraca	Ruim
11	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Ruim	Média	Regular
12	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Ruim	Forte	Regular
13	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Regular	Fraca	Regular
14	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Regular	Média	Regular
15	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Regular	Forte	Regular
16	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Boa	Fraca	Regular
17	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Boa	Média	Bom
18	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Boa	Forte	Bom
19	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Ruim	Fraca	Ruim
20	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Ruim	Média	Regular
21	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Ruim	Forte	Bom
22	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Regular	Fraca	Regular
23	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Regular	Média	Regular
24	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Regular	Forte	Bom
25	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Boa	Fraca	Bom
26	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Boa	Média	Bom
27	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Boa	Forte	Bom

Fonte: Elaborado pela autora pelo *software FisPro*.

Após todas as informações serem adicionados ao *software* (tanto os conjuntos *fuzzy* de entrada e saída como a base de regras), é feita a inclusão dos dados da simulação ou para obter a qualidade dos *smartphones* dos alunos.

Exemplo: Um *smartphone* com capacidade de memória de 64G, qualidade da câmera de 12 *megapixels* e a duração de bateria de 12h então tem a possibilidade de ter qualidade igual a 0,505.

Aula 9

Sistema baseado em regras *fuzzy* para o risco de rompimento da barragem

Após aplicação do problema do *smartphone*, nessa aula constrói-se o SBRF para o risco de rompimento da barragem de rejeitos. Essa aula pode ser realizada no laboratório de informática. Deve-se dividir os estudantes em grupos, de maneira a tornar o aprendizado descontraído.

Inicialmente, induzir os estudantes a definir as variáveis de entrada que influenciam o rompimento e o vazamento da barragem.

Incentivar os estudantes a elaborar um SBRF, no *software FisPro*, nessa oportunidade, o educador verifica se todos compreenderam e tira-se as dúvidas que ainda possam surgir. É interessante ressaltar que o especialista em barragens juntamente com o professor de Geografia pode estar presente para dar suporte e gerar uma conversa com toda a turma sobre os acertos e erros na elaboração da base de regras e outras variáveis.

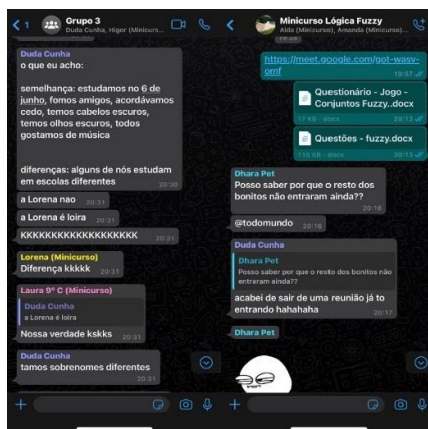
Para finalizar, um SBRF similar foi elaborado na plataforma Arduino utilizando a placa eletrônica ESP8266 na maquete 3D, podendo ser manuseado pelo *smartphone* via plataforma *Blynk* e, assim, controlar os dados das variáveis linguísticas inseridas. É importante lembrar que com a orientação do professor Dr. Carlos Eugênio Pereira, especialista em hidráulica e saneamento, considerou-se as variáveis linguísticas de entrada: idade da barragem; altura da barragem e volume da barragem. Assim, calcula-se os dados das variáveis de entrada inseridos, o risco de rompimento e o risco de vazamento dessa barragem. Por meio dos sensores utilizando a placa EPS8266 é possível controlar o rompimento e o vazamento da barragem.

Aula 10

Na experiência realizada dessa sequência didática, desenvolvida em formato de um minicurso, houve como atividade final, uma competição entre dois grupos, com a quantidade de alunos que estavam presentes, cada um com oito estudantes, acerca de cinco questões relacionadas ao conteúdo de conjuntos *fuzzy*, por intermédio de dois grupos criados no *WhatsApp* (Figura A28). Foram discutidas e resolvidas pelos grupos com bom aproveitamento de acertos.

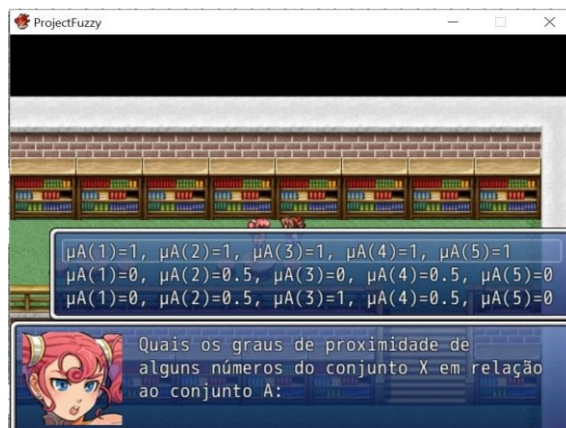
Essas questões estavam inseridas nas fases do jogo construído no *software* livre *RPG Maker* (Figura A29). Mas, devido a dificuldade de instalação, alterou-se o planejamento inicial. No ensino presencial, a atividade pode ser realizada em laboratório de informática.

Figura A28 - Grupos montados para a realização das atividades.



Fonte: Aplicativo *WhatsApp*.

Figura A29 - Imagem de um dos mapas do jogo.



Fonte: Elaborado pela autora.

Anexo

II.1 - MATRIZ DE CLASSIFICAÇÃO QUANTO À CATEGORIA DE RISCO (ACUMULAÇÃO DE ÁGUA)

1 - CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS - CT											
Altura (a)		Comprimento (b)		Tipo de Barragem quanto ao material de construção (c)		Tipo de fundação (d)		Idade da Barragem (e)		Vazão de Projeto (f)	
Altura ≤ 15m	0	comprimento ≤ 200m	2	Concreto Convencional	1	Rocha sã	1	entre 30 e 50 anos	1	Decamlenar ou CMP - TR = 10.000 anos	3
15m < Altura < 30m	1	comprimento > 200m	3	Alv. Pedra/Conc. Ciclópico/Conc. Rolado -CCR	2	Rocha alterada dura com trat.	2	entre 10 e 30 anos	2	Milenar - TR = 1.000 anos	5
30m ≤ Altura ≤ 60m	2	-	-	Terra Homog./Enrocamento / Terra Enrocamento	3	Rocha alt. sem trat. / Rocha alt. Frat. com trat.	3	entre 5 e 10 anos	3	TR = 500 anos	8
Altura > 60m	3	-	-	-	-	Rocha alt. mole / Saprolito / Solo compacto	4	< 5 ou > 50 anos ou sem inf.	4	TR < 500 anos ou Desconhec. / Est. não confiável	10
-	-	-	-	-	-	Solo residual / aluvião	5	-	-	-	-

II.1 - MATRIZ DE CLASSIFICAÇÃO QUANTO À CATEGORIA DE RISCO (ACUMULAÇÃO DE ÁGUA)

2 - ESTADO DE CONSERVAÇÃO - EC											
Confiabilidade das Estruturas Extravasoras (g)		Confiabilidade das Estruturas de Adução (h)		Percolação (i)		Deformações e Recalques (j)		Deterioração dos Taludes / Paramentos (k)		Eclusa (*) (m)	
Est. civis e eletrom. em pleno func. (canais de agro. ou de restrição ou vertedouro (tipo soleira livre) desobstruídos)	0	Estruturas civis e dispositivos hidroeletromecânicos em condições adequadas de manutenção e funcionamento	0	Percolação totalmente controlada pelo sistema de drenagem	0	Inexistente	0	Inexistente	0	Não possui eclusa	0
Estrut. civis e eletromec. preparada para a oper., mas sem fontes de suprím. de enerj. de emerg. / canais ou vert. (tipo sol. Liv.) com erosões ou obstruções, porém sem riscos a estrutura vertente	4	Estruturas civis comprometidas ou Dispositivos hidroeletromecânicos com problemas identificados, com redução de capacidade de adução e com medidas corretivas em implantação	4	Umidade ou surgência nas áreas de jusante, paramentos, taludes ou ombreiras estabilizada e/ou monitorada	3	Existência de trincas e abatimentos de pequena extensão e impacto nulo	1	Falhas na proteção dos taludes e paramentos, presença de arbustos de pequena extensão e impacto nulo.	1	Estruturas civis e eletromecânicas bem mantidas e funcionando	1
Estrut. civis comp. ou Dispositivos hidroeletromec. com problem. identif., com red. de capacid. de adução e com med. corret. em implant. / canais ou verted. (tipo sol. liv.) com erosões e/ou parciais, obstruídos, com risco de comprom. da estrut. vert.	7	Estruturas civis comprometidas ou Dispositivos hidroeletromecânicos com problemas identificados, com redução de capacidade de adução e sem medidas corretivas	6	Umidade ou surgência nas áreas de jusante, paramentos, taludes ou ombreiras sem tratamento ou em fase de diagnóstico	5	Trincas e abatimentos de impacto considerável gerando necessidade de estudos adicionais ou monitoramento.	5	Erosões superficiais, ferragem exposta, crescimento de vegetação generalizada, gerando necessidade de monitoramento ou atuação corretiva.	5	Estruturas civis comprometidas ou Dispositivos hidroeletromecânicos com problemas identificados e com medidas corretivas em implantação	2
Estruturas civis comprometidas ou Dispositivos hidroeletromecânicos com problemas identificados, com redução de capacidade de adução e sem medidas corretivas/ canais ou vertedouro (tipo soleira livre) obstruídos ou com estruturas danificadas	10	-	-	Surgência nas áreas de jusante, taludes ou ombreiras com carreamento de material ou com vazão crescente	6	Trincas, abatimentos ou escorregamentos expressivos, com potencial de comprometimento da segurança	6	Depressões acentuadas nos taludes, escorregamentos, sulcos profundos de erosão, com potencial de comprometimento da segurança.	7	Estruturas civis comprometidas ou Dispositivos hidroeletromecânicos com problemas identificados e sem medidas corretivas	4

II.1 - MATRIZ DE CLASSIFICAÇÃO QUANTO À CATEGORIA DE RISCO (ACUMULAÇÃO DE ÁGUA)									
3 - PLANO DE SEGURANÇA DA BARRAGEM - PS									
Existência de documentação de projeto (n)		Estrutura organizacional e qualificação técnica dos profissionais da equipe de Segurança da Barragem (o)		Procedimentos de roteiros de inspeções de segurança e de monitoramento (p)		Regra operacional dos dispositivos de descarga da barragem (q)		Relatórios de inspeção de segurança com análise e interpretação (r)	
Projeto executivo e "como construído"	0	Possui estrutura organizacional com técnico responsável pela segurança da barragem	0	Possui e aplica procedimentos de inspeção e monitoramento	0	Sim ou Vertedouro tipo soleira livre	0	Emite regularmente os relatórios	0
Projeto executivo ou "como construído"	2	Possui técnico responsável pela segurança da barragem	4	Possui e aplica apenas procedimentos de inspeção	3	Não	6	Emite os relatórios sem periodicidade	3
Projeto básico	4	Não possui estrutura organizacional e responsável técnico pela segurança da barragem	8	Possui e não aplica procedimentos de inspeção e monitoramento	5	-	-	Não emite os relatórios	5
Anteprojeto ou Projeto conceitual	6	-	-	Não possui e não aplica procedimentos para monitoramento e inspeções	6	-	-	-	-
Inexiste documentação de projeto	8	-	-	-	-	-	-	-	-

II.2 - MATRIZ DE CLASSIFICAÇÃO QUANTO AO DANO POTENCIAL ASSOCIADO - DPA (ACUMULAÇÃO DE ÁGUA)									
Volume Total do Reservatório para barragens de uso múltiplo ou aproveitamento energético (s)		Potencial de perdas de vidas humanas (t)		Impacto ambiental (u)		Impacto sócio-econômico (v)			
Pequeno <= 5hm³	1	INEXISTENTE (Não existem pessoas permanentes/residentes ou temporárias/transitando na área a jusante da barragem)	0	SIGNIFICATIVO (quando a área afetada da barragem não representa área de interesse ambiental, áreas protegidas em legislação específica ou encontra-se totalmente descaracterizada de suas condições naturais)	3	INEXISTENTE (Quando não existem quaisquer instalações e serviços de navegação na área afetada por acidente da barragem)	0		
Médio - 5 a 75hm³	2	POUCO FREQUENTE (Não existem pessoas ocupando permanentemente a área a jusante da barragem, mas existe estrada vicinal de uso local.)	4	MUITO SIGNIFICATIVO (quando a área afetada da barragem apresenta interesse ambiental relevante ou protegida em legislação específica)	5	BAIXO (quando existe pequena concentração de instalações residenciais e comerciais, agrícolas, industriais ou de infraestrutura na área afetada da barragem)	4		
Grande - 75 a 200hm³	3	FREQUENTE (Não existem pessoas ocupando permanentemente a área a jusante da barragem, mas existe rodovia municipal ou estadual ou federal ou outro local e/ou empreendimento de permanência eventual de pessoas que poderão ser atingidas.)	8	-	-	ALTO (quando existe grande concentração de instalações residenciais e comerciais, agrícolas, industriais, de infraestrutura e serviços de lazer e turismo na área afetada da barragem ou instalações portuárias ou serviços de navegação)	8		
Muito Grande > 200hm³	5	EXISTENTE (Existem pessoas ocupando permanentemente a área a jusante da barragem, portanto, vidas humanas poderão ser atingidas.)	12	-	-	-	-		

Apêndice B

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA – MESTRADO PROFISSIONAL**

ALINE SILVESTRE BORGES

*Guia para implementação de um recurso educacional
desenvolvido na pesquisa:*

*Modelagem Matemática e Tecnologias Digitais na
Aprendizagem da Teoria dos Conjuntos Fuzzy no Ensino Médio*

ORIENTADORA: ROSANA SUELI DA MOTTA JAFELICE

**UBERLÂNDIA
2022**

Sumário

1. Introdução	3
2. Descrição dos Componentes	3
2.1 O protótipo 3D da maquete	3
2.2 Programa <i>FisPro</i>	4
2.3 Aplicativo de celular	5
3. Construção da Maquete	6
3.1 Visão geral da maquete	6
3.2 Sequência didática	7
3.3 Lista de materiais	11
3.4 Montagem da maquete	14
3.4.1 Impressão do protótipo da barragem 3D	14
3.4.2 Software <i>solidworks</i> e <i>simplify</i>	15
3.5 Material de acrílico	16
3.6 Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) no <i>FisPro</i>	16
3.7 Montagem da parte eletrônica da barragem impressa	26
3.7.1 Configuração do Arduino IDE com Esp8266 e <i>Blynk</i> (HomeLab)	27
3.7.2 Instalar a biblioteca <i>Blynk</i>	32
3.8 Os sensores internos do protótipo da barragem 3D	34
3.9 Luzes <i>Led</i>	35
3.10 Aplicativo <i>Blynk</i>	37
3.10.1 Composição do <i>Blynk</i>	37
3.10.2 Requisitos para utilizar o <i>Blynk</i>	38
3.10.3 <i>Download</i> e instalação do <i>Blynk</i>	38
3.10.4 Configuração do <i>Blynk</i> no dispositivo móvel	39
3.10.5 Criação da tela de controle no <i>Blynk</i>	40
4. Conclusão	57
APÊNDICE A	56
APÊNDICE B	83

1. Introdução

O presente material foi desenvolvido como parte da dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Federal de Uberlândia, com o título “Modelagem Matemática e Tecnologias Digitais na Aprendizagem da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* no Ensino Médio” trata-se de um manual e tutorial com objetivo de auxiliar os professores de matemática, para que possam desenvolver atividades com a utilização de tecnologias digitais e a impressão da maquete em 3D, com o tema a modelagem do risco de rompimento de uma barragem de rejeitos.

Para a realização da pesquisa descrita na dissertação, foi desenvolvido um Sistema Baseado em Regras *Fuzzy* (SBRF), no programa computacional *FisPro* (*Fuzzy Inference System Professional*). Esse SBRF foi transferido para a plataforma eletrônica do *hardware* livre Arduino que é acionado no protótipo 3D da barragem para aplicação das atividades em sala de aula, para responder as questões norteadoras do trabalho:

- como propor uma sequência didática da lógica *fuzzy*?
- é possível ensinar lógica *fuzzy* no ensino médio?

Em razão disso, foram elaboradas dez atividades dinâmicas para desenvolver todo o conteúdo com os estudantes, incluindo a revisão de conjuntos numéricos e a introdução de conjuntos *fuzzy*, que por meio da construção do SBRF, pode calcular o risco de rompimento de uma barragem, portanto, o manual tem a finalidade de descrever a construção da maquete, para uma melhor visualização do rompimento da barragem.

A seguir, são dadas as instruções para a implementação dos recursos desenvolvidos e também sua aplicação.

2. Descrição dos Componentes

2.1 O protótipo 3D da maquete

O protótipo 3D da barragem (Figura 1) foi construída com base na necessidade de mostrar aos estudantes o resultado de todo o conteúdo apresentado. O seu controle é feito por meio do Arduino, que é uma plataforma integrada para programação de diversos tipos de placas eletrônicas, neste trabalho utiliza-se a placa eletrônica ESP8266 (Figura 2), ou seja, permite por meio do computador e um cabo de dados USB programar a placa eletrônica para executar uma certa tarefa, como por exemplo, piscar um *led* ou controlar a velocidade de um pequeno motor. Para programar a placa é utilizada a linguagem de programação C, que é de fácil aprendizado e tem ampla quantidade de material de apoio na internet. Na perspectiva da

sala de aula, educadores estão percebendo o potencial da plataforma Arduino no ensino, devido à possibilidade de abordar diversos conceitos de forma interdisciplinar e também, pela fácil utilização e seu baixo custo. Importante dizer que a maquete foi desenvolvida com recursos financeiros da própria autora, no intuito de facilitar a construção desse material.

Figura 1 - Maquete.



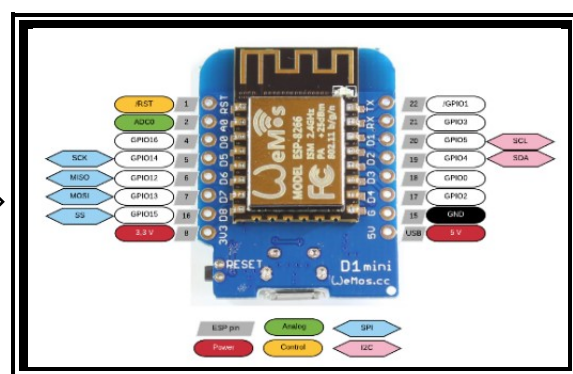
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 2 - Esquema do ambiente Arduino de programação da placa ESP8266.



Fonte: Software Arduino¹.

USB



Fonte: Solectroshop²

2.2. Programa *FisPro*

O *FisPro*³ é uma linguagem computacional, desenvolvida para computação matemática. Possui uma interface gráfica para introduzir as variáveis de entrada e saída, além das regras *fuzzy* para implementação de um SBRF. Esse programa tem um grande número de recursos e grande quantidade de conteúdo explicativo disponível na internet. Além disso, o *software* foi escolhido por ser gratuito e possuir ferramentas para a implementação do projeto desenvolvido na pesquisa.

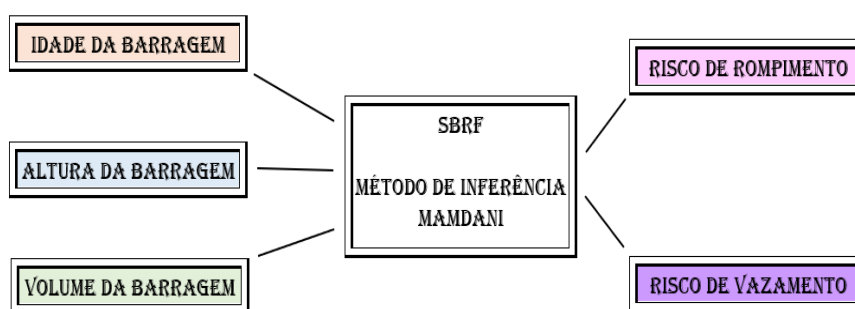
¹ Disponível em: <https://www.arduino.cc/en/guide/windows>

² Disponível em: <https://solectroshop.com/pt/>

³ Disponível em: <https://www.fispro.org/en/>

A programação permite relacionar o risco de rompimento e de vazamento com as variáveis linguísticas escolhidas por meio da planilha compartilhada da Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) sobre a segurança das barragens. Esse processo ocorre por meio do SBRF que é criado com base nos valores das variáveis linguísticas: idade, altura e volume da barragem e calcula-se o risco de rompimento e o risco de vazamento (Figura 3). O método de inferência *fuzzy* utilizado é o de Mamdani e o método de defuzzificação é o centro de gravidade. O SBRF é construído primeiramente no *FisPro* e depois programado em linguagem C na placa eletrônica ESP8266⁴, através de uma biblioteca *fuzzy*. A programação na placa⁵ é realizada pela plataforma Arduino.

Figura 3 - Estrutura do SBRF construído com as variáveis de entrada: idade, altura e volume da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

2.3 Aplicativo de celular

A plataforma *Blynk*⁶ é utilizada para fazer a conexão da Internet das Coisas (*Internet of Things – IoT*). A placa ESP8266 tem Wi-Fi embutido, que permite que o estudante interaja com o SBRF que modela o rompimento da barragem pelo celular. O estudante apenas tem que baixar o aplicativo da plataforma *Blynk* para colocar os valores das variáveis de entrada do SBRF, que são: idade, altura e volume da barragem. O volume da barragem é obtido por um sensor colocado no interior da barragem 3D, que é calculado pela altura da quantidade de bolinhas de gel inseridas pelo estudante no início da atividade.

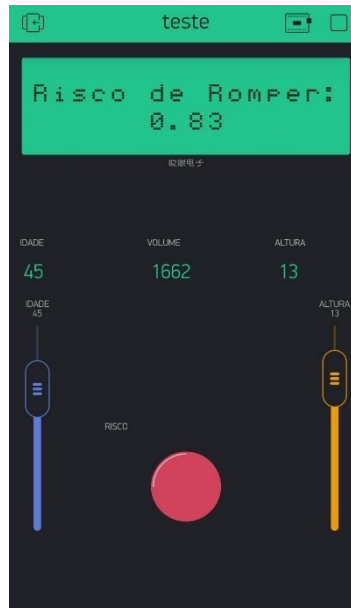
A seguir, a Figura 4 ilustra a plataforma *Blynk*.

⁴ Disponível em: <https://blog.zerokol.com/2012/09/arduinofuzzy-uma-biblioteca-fuzzy-para.html>

⁵ Disponível em: <https://blog.jeronimus.net/2018/03/rfid-and-wemos-d1-mini-1.html>

⁶ Disponível em: <https://blynk.io/>.

Figura 4 - Plataforma *Blynk* com três cursores indicando as variáveis de entrada e um demonstrativo de saída do SBRF.



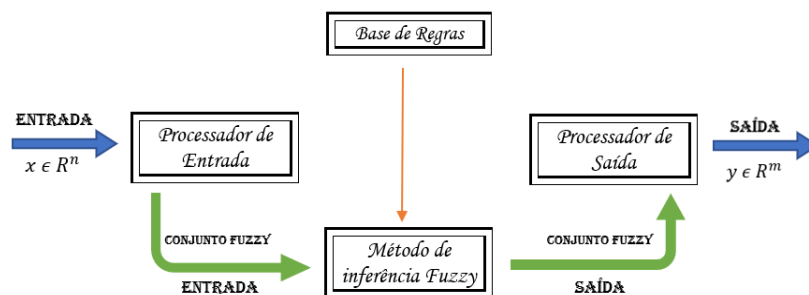
Fonte: Aplicativo *Blynk*.

3. Construção da Maquete

3.1. Visão geral da maquete

A barragem 3D é uma construção programada para receber comandos enviados por um celular e que resulta no rompimento da barragem quando o valor do risco de rompimento é alto, isto é, maior ou igual a 0,8. Antes de utilizar esse dispositivo, em aulas anteriores é introduzido a teoria dos conjuntos *fuzzy* e construído o SBRF similar pelos estudantes, no *software* livre *FisPro*. O SBRF contém quatro componentes: um processador de entrada, que realiza a fuzzificação das variáveis de entrada e de saída; uma coleção de regras *fuzzy*, chamada base de regras; um método de inferência *fuzzy*; e um processador de saída, que fornece um número real como saída. Esses componentes estão conectados, conforme indicado na Figura 5.

Figura 5 - Estrutura do Sistema Baseado em Regras *Fuzzy*.



Fonte: Elaborado pela autora.

Todo esse processo acontece por meio de comunicação sem fio por Wi-Fi. Este permite que dois dispositivos se comuniquem, ou seja, troquem dados um com o outro de forma simples e confiável. Para o controle do protótipo da barragem 3D, foi escolhida a placa eletrônica ESP8266 devido aos recursos necessários exigidos no projeto. Esta tem a função de controlar o motor da barragem 3D, receber e decodificar os dados enviados pelo celular.

A estrutura física da maquete foi projetada e construída com peças e materiais de resistência e boa qualidade. Sua estrutura é composta de acrílico para formar a barreira da cidade e as casas, placa de fibra de média densidade (MDF) para as árvores, para a barragem, o filamento de ABS, pois foi impressa em uma impressora 3D. A parte eletroeletrônica é composta por um motor e a placa ESP8266.

Na próxima seção é apresentada a sequência didática elaborada para a aplicação do conteúdo, em forma de minicurso oferecido para alunos do Ensino Médio.

3.2. Sequência didática

As atividades ocorreram em dez aulas de forma remota, cada uma com uma hora de duração e estão expostas no Quadro 1, que apresenta a sequência didática com o conteúdo e os recursos utilizados. Inicialmente, os conceitos de conjuntos clássicos foram revistos. Após a análise das propostas de atividades envolvendo a teoria de conjuntos *fuzzy*, apresenta-se os planos de aula elaborados, no Apêndice A. As atividades foram ministradas em forma de minicurso, no primeiro semestre de 2021.

Quadro 1 - Atividades propostas.

1ª AULA – MOTIVACIONAL		
CONTEÚDOS	OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
- Rompimento da barragem	No intuito de motivar os estudantes, para o estudo da modelagem <i>fuzzy</i> do risco do rompimento da barragem, inicialmente, apresenta-se o vídeo de uma barragem de rejeitos se rompendo (https://www.youtube.com/watch?v=ioyMjZikiW8). Por meio do vídeo, os estudantes são desafiados a desenvolverem as atividades para controlar o risco de rompimento da barragem.	- <i>Data show</i> - Vídeo

2ª AULA – CONJUNTOS NUMÉRICOS

CONTEÚDOS	OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
<ul style="list-style-type: none">- Relação de pertinência- Relação de inclusão- Conjunto vazio- Conjunto unitário	Essa atividade tem caráter motivacional e exemplificativo. O objetivo é realizar dinâmicas de forma que os estudantes sejam os elementos divididos em grupos que formam conjuntos. Em seguida, são orientados a encontrar alguma semelhança entre si. As dinâmicas têm como objetivo exemplificar a relação de pertinência e de inclusão, de conjunto vazio e unitário. O educador pode instigar os estudantes a expressarem matematicamente esses conjuntos.	<ul style="list-style-type: none">- Quadro-negro- Papel

3ª AULA – OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

CONTEÚDOS	OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
<ul style="list-style-type: none">- União de conjuntos- Interseção de conjuntos- Conjunto complementar	Em grupos, os estudantes interagem e, com a orientação do educador, continuam as dinâmicas da aula anterior, agora focadas nas operações entre conjuntos. Os grupos são reorganizados, e solicita-se que os estudantes encontrem as semelhanças entre si e realizem as operações matemáticas associadas a esses conjuntos. Novamente, o educador pode instruir os estudantes a formalizarem matematicamente os conceitos revistos.	<ul style="list-style-type: none">- Quadro-negro- Papel

4ª AULA – AVALIAÇÃO DO APRENDIZADO

CONTEÚDO	OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
<ul style="list-style-type: none">- Conjuntos clássicos numéricos	Um jogo com questões no <i>software</i> livre <i>RPG MAKER</i> avalia os estudantes quanto ao conteúdo de conjuntos numéricos. O jogo é constituído de fases, de modo que cada fase possui dicas da resolução do problema que deve ser resolvido para se passar para a próxima fase. Os estudantes realizaram a atividade individualmente.	<ul style="list-style-type: none">- Jogo no <i>RPG Maker</i>

5ª AULA – LÓGICA MATEMÁTICA

CONTEÚDO	OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
<ul style="list-style-type: none">- Lógica clássica- Lógica <i>fuzzy</i>	Proposições associadas à lógica <i>fuzzy</i> , com as condições das proposições mencionadas pelo educador, fazem com que os estudantes formem grupos. Essas proposições trazem a incerteza na formação dos conjuntos, o que faz com que os estudantes iniciem o entendimento da lógica <i>fuzzy</i> .	<ul style="list-style-type: none">- Quadro-negro- Papel

6ª AULA – FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA

CONTEÚDO	OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
<ul style="list-style-type: none"> - Conjuntos <i>fuzzy</i> - Grau de pertinência - Função de pertinência triangular - Função de pertinência trapezoidal 	<p>A motivação realiza-se com a exemplificação de conjuntos <i>fuzzy</i>, como o conjunto das pessoas altas, das pessoas jovens, entre outros. Nesse momento, o educador apresenta aos estudantes gráficos para ilustrar os conjuntos <i>fuzzy</i>. Os estudantes classificam o grau de pertinência dos conjuntos mencionados anteriormente, determinando o melhor intervalo para analisar a proposição. Quando o conjunto atinge o grau de pertinência 1, em apenas um ponto temos a função de pertinência triangular. Para exemplificar esse tipo de função de pertinência, será considerado um conjunto de horas em torno do meio-dia (12h); das 6h e às 18h; nesse conjunto, haverá grau de pertinência 0 e às 12h grau de pertinência 1. No caso da função de pertinência trapezoidal, um intervalo tem grau de pertinência 1. Para ilustrar essa definição, pode-se utilizar uma jarra com capacidade de 1 litro, de modo que o conceito de jarra cheia e vazia seja trabalhado; o educador pode inserir 1,1 litro de água, de modo que seja observado que o grau de pertinência para a jarra cheia permanece igual a 1.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - <i>Software Geogebra</i> - Quadro-negro - Papel - Jarra - Água

7ª AULA – OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS FUZZY

CONTEÚDO	OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
<ul style="list-style-type: none"> - Interseção dos conjuntos <i>fuzzy</i> - União dos conjuntos <i>fuzzy</i> - Complementar dos conjuntos <i>fuzzy</i> 	<p>Utilizando o <i>software Geogebra</i>, a construção de gráficos e a elaboração de exemplos das operações de união, intersecção e complementar de conjuntos <i>fuzzy</i> podem ser simples de elaborar e visualizar.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - <i>Software Geogebra</i>

8ª AULA – SISTEMA BASEADO EM REGRAS FUZZY (SBRF)

CONTEÚDO	OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
<ul style="list-style-type: none"> - Variáveis linguísticas - Sistema Baseado em Regras <i>Fuzzy</i> (SBRF) 	<p>O objetivo desta atividade é orientar nas dúvidas de construção do SBRF. Primeiramente, os estudantes transformam conjuntos de números reais em conjuntos <i>fuzzy</i> por meio das funções de pertinência, o que é chamado de fuzziificação. Em seguida, as proposições (regras) são definidas e examinadas paralelamente</p>	<ul style="list-style-type: none"> - <i>Software FisPro</i>

	(inferência). O educador pode orientar os estudantes a escolherem um tema para construir um SBRF que os leve a ter uma boa compreensão do assunto. Utilizando-se o <i>software FisPro</i> , os gráficos das funções de pertinência das variáveis linguísticas podem ser construídos, no intuito de se verificar a qualidade de um <i>smartphone</i> . As regras <i>fuzzy</i> podem ser construídas no próprio <i>software</i> de forma a se associarem as variáveis linguísticas de entrada com a saída.	
--	--	--

9ª AULA – SISTEMA BASEADO EM REGRAS FUZZY (SBRF) – BARRAGEM

CONTEÚDO	OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
<ul style="list-style-type: none"> - Sistema Baseado em Regras <i>Fuzzy</i> (SBRF) - Fuzzificação - Inferência - Defuzzificação 	<p>O objetivo da atividade é construir um SBRF similar ao que foi utilizado no controle da barragem impressa. A aula desenvolvida na experiência real com base nessa sequência didática contou com a participação de um especialista na área de hidráulica e saneamento, para conversar com os estudantes, analisar as regras criadas por eles e conversar sobre o problema do rompimento de barragens. Pela maquete construída, que utiliza a plataforma Arduino (placa eletrônica ESP8266), tornou-se fácil o controle das variáveis linguísticas por um <i>smartphone</i>. Assim, dependendo do valor de saída do SBRF, poderia ocorrer o rompimento da barragem.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Maquete - <i>Software FisPro</i> - <i>Blynk</i> - Arduino - <i>Smartphone</i>

10ª AULA – AVALIAÇÃO DO APRENDIZADO

	OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES	RECURSOS
<ul style="list-style-type: none"> - Teoria dos conjuntos <i>fuzzy</i> 	<p>Na experiência real que tinha como fundamento essa sequência didática, desenvolvida em um formato de minicurso, houve como atividade final uma competição entre dois grupos, cada um com oito estudantes, acerca de cinco questões relacionadas ao conteúdo de conjuntos <i>fuzzy</i>, por intermédio de dois grupos criados no <i>WhatsApp</i>. As questões estavam inseridas nas fases do jogo construído no <i>software</i> livre <i>RPG Maker</i>. Devido à dificuldade de instalação, alterou-se o planejamento inicial. No ensino presencial, a atividade poderá ser realizada em laboratório de informática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - <i>Smartphone</i> - Jogo no <i>RPG Maker</i>

3.3. Lista de materiais

Para a construção dessa maquete, contou-se com o auxílio de um técnico do Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEST) da Universidade Federal de Uberlândia, que por meio dos *softwares SolidWorks*⁷ e *Simplify*⁸ foi possível realizar os desenhos com os parâmetros semelhantes ao da planilha compartilhada da ANEEL, bem como a impressão da barragem, em uma impressora 3D. A lista de materiais é descrita em duas tabelas, em que nas colunas é fornecido o nome, função, imagem e quantidade de cada item para a construção da maquete 3D. A Tabela 1 descreve os itens eletrônicos. A Tabela 2 exhibe os materiais relativos à construção da maquete.

Tabela 1 - Lista de Materiais dos itens eletrônicos.

<i>- LISTA DE MATERIAIS PARA A CONSTRUÇÃO DA MAQUETE - ELETRÔNICA</i>			
<i>NOME</i>	<i>FUNÇÃO</i>	<i>IMAGEM</i>	<i>QUANTIDADE</i>
ESP8266	Controlar o motor e decodificar os dados enviados pelo celular.		1
Servo Motor Mg996r Metal Gear Tower	O motor é ligado ao ESP8266 e tem a função de abrir a barragem.		1
Sensores infravermelho	Indicar o nível de altura da representação da barragem impressa em 3D.		8

⁷ Disponível em: <https://discover.solidworks.com>

⁸ Disponível em: <https://www.simplify3d.com>








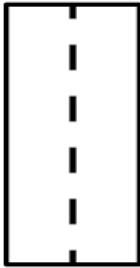

Luzes de <i>LED</i> RGB	Indicar os níveis de risco de rompimento da barragem.		1
Placa Wemos D1	Controlar o motor e decodificar os dados da placa ESP8266		1
Cabo USB	Conectar as placas de controle com o computador.		1

Tabela 2 - Lista de materiais para a construção da Maquete.

<i>- LISTA DE MATERIAIS PARA A CONSTRUÇÃO DA MAQUETE -</i>			
<i>NOME</i>	<i>FUNÇÃO</i>	<i>IMAGEM</i>	<i>QUANTIDADE</i>
Filamento de ABS	Utilizado para a impressão da barragem 3D.		1
Barragem impressa em 3D	Representar uma barragem.		1

<p>Bandeja em acrílico</p>	<p>Instaurar as limitações da maquete. (60cm x 50cm)</p>		<p>1</p>
<p>Casinhas de acrílico</p>	<p>Representar a cidade que fica ao redor da barragem.</p>		<p>12</p>
<p>Árvores de MDF</p>	<p>Representar a vegetação ao redor de uma barragem.</p>		<p>25</p>
<p>Igreja de acrílico</p>	<p>Representar a cidade em volta da barragem.</p>		<p>1</p>
<p>Ruas de acrílico</p>	<p>Representar a cidade em volta da barragem.</p>		<p>8</p>
<p>Bolinhas em gel</p>	<p>Representar a lama e os rejeitos da barragem.</p>		<p>Aproximadamente 2.000 bolinhas.</p>

3.4. Montagem da maquete

Nessa etapa são descritas as fases de montagem da maquete (Figura 6). Esta tem como característica possuir uma barragem que se rompe quando o grau de pertinência da saída do SBRF for maior que 0,8; ou seja, possui um risco de rompimento alto.

Além disso, por meio da plataforma *Blynk*, pode-se controlar os níveis das variáveis linguísticas: idade, volume e altura da barragem. Assim, pelo celular envia-se os comandos para a maquete.

A estrutura da maquete é composta por materiais de alta qualidade, pensando na locomoção de um local para outro, sendo materiais de alta resistência. Esses materiais são recortados e montados por uma máquina específica para o material de acrílico ou de filamento ABS.

Figura 6 - Maquete 3D.



Fonte: Elaborado pela autora.

3.4.1. Impressão do protótipo da barragem 3D

Essa maquete tem o protótipo de uma barragem construída com adaptação dos parâmetros nacionais retirados de uma planilha da ANEEL, disponibilizada pelo professor Dr. Carlos Eugênio Pereira, especialista convidado para contribuir nos estudos e na construção do SBRF. A construção foi realizada com o auxílio de um técnico do LMEST da Universidade Federal de Uberlândia, que projetou com os *softwares SolidWorks* e *Simplify*; e imprimiu a barragem em uma impressora 3D.

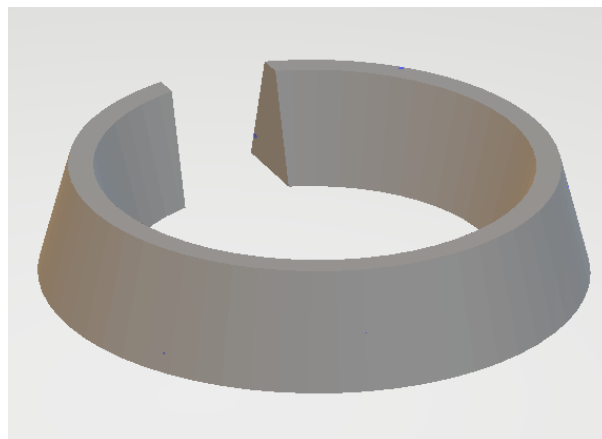
3.4.2. Software *SolidWorks* e *Simplify*

O *SolidWorks* é um *software* de CAD 3D (*Computer-Aided Design*) desenvolvido inicialmente pela *Solid Corporation* que funciona no sistema operacional Windows. O programa baseia-se em computação paramétrica, criando formas tridimensionais com base em operações geométricas elementares (Figura 7). No ambiente do programa, a criação de um sólido ou superfície começa com a definição de um *sketch* 2D, que depois é transformado em um modelo tridimensional.

O *Simplify3D software* é um dos programas de fatiamento, o seu uso em conjunto com as impressoras proporciona uma melhor experiência na impressora 3D. É possível assistir a animação detalhada da impressão da peça, linha a linha, ou camada a camada e ainda estimar o tempo, o custo e o uso de material antes da impressão 3D. A impressão do protótipo da barragem 3D (Figura 8) foi realizada degrau por degrau e depois colados.

As dimensões foram calculadas e transferidas para o *software*, seguindo a melhor proximidade, a seguir os valores dos diâmetros de cada degrau do protótipo da barragem.

Figura 7 - Peça desenvolvida no *Software SolidWorks*.



Fonte: Elaborado pela autora.

O protótipo da maquete foi construído com quatro degraus para representação de uma barragem montante. As medidas a seguir são os valores dos diâmetros maiores para a construção de cada degrau.

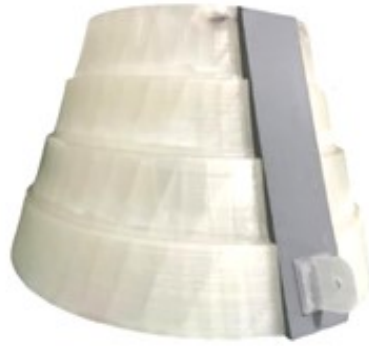
1º Degrau: Diâmetro interno: 25 cm
(base) Diâmetro externo: 28 cm

3º Degrau: Diâmetro interno: 16 cm
Diâmetro externo: 19 cm

2º Degrau: Diâmetro interno: 19 cm
Diâmetro externo: 22 cm

4º Degrau: Diâmetro interno: 13 cm
Diâmetro externo: 16 cm

Figura 8 - Resultado final impresso.



Fonte: Elaborado pela autora.

3.5. Material de acrílico

Para estruturar a cidade ao redor do protótipo da barragem 3D, foram utilizadas peças de acrílico, encomendadas e criadas com os tamanhos específicos para a maquete. Uma bandeja de acrílico 50cm x 60cm para deixar mais fácil o manuseio de toda a maquete. Doze casinhas de seis centímetros de altura, essas com telhado, porta e janelas, vinte cinco árvores de doze centímetros de altura, cortadas em MDF com EVA verde para representar as folhas, uma igreja de seis centímetros de altura e ruas de trinta centímetros de comprimento.

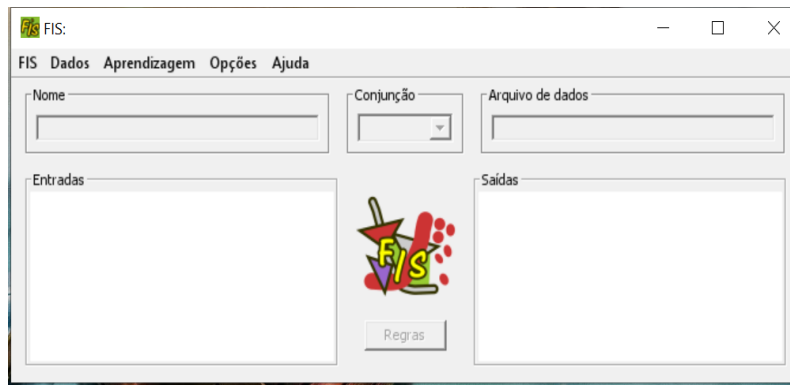
3.6. Sistema Baseado em Regras *Fuzzy* (SBRF) no *FisPro*.

Para a elaboração do SBRF, utiliza-se o *software* livre *FisPro* para modelar o rompimento ou vazamento da barragem de rejeitos, considerando as variáveis de entrada: idade, altura e volume da barragem.

Nessa seção, são apresentados os detalhes da construção do SBRF estudado, utilizando os parâmetros adequados para o controle do risco de rompimento ou vazamento da barragem 3D.

1. Abra o *software FisPro* (Figura 9).

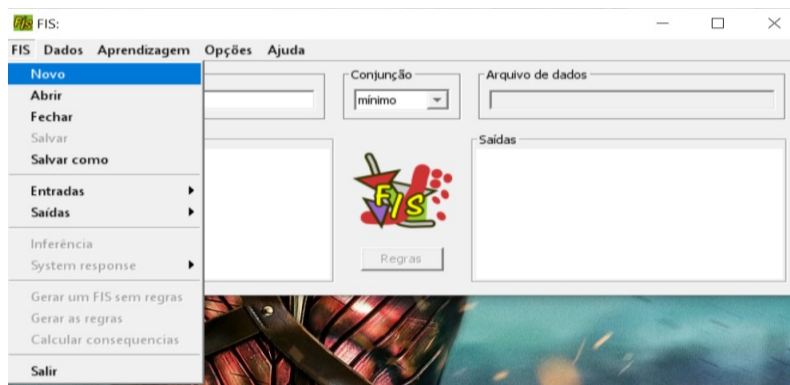
Figura 9 - Software FisPro.



Fonte: Elaborado pela autora.

2. Primeiramente, clique em: FIS e crie um novo documento (Figura 10).

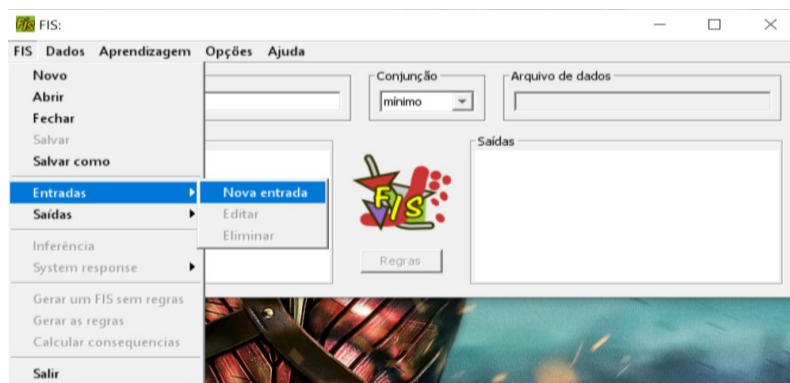
Figura 10 - Criar um novo documento no FisPro.



Fonte: Elaborado pela autora.

3. Para adicionar as variáveis de entradas: clique em FIS → Entradas → Nova Entrada (Figura 11).

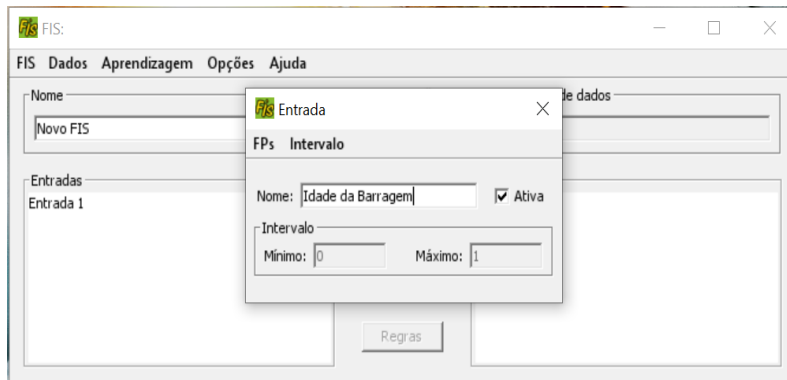
Figura 11 - Adicionar uma nova entrada.



Fonte: Elaborado pela autora.

4. Uma janela nova irá abrir, para adicionar o nome e o domínio dessa variável (Figura 12).

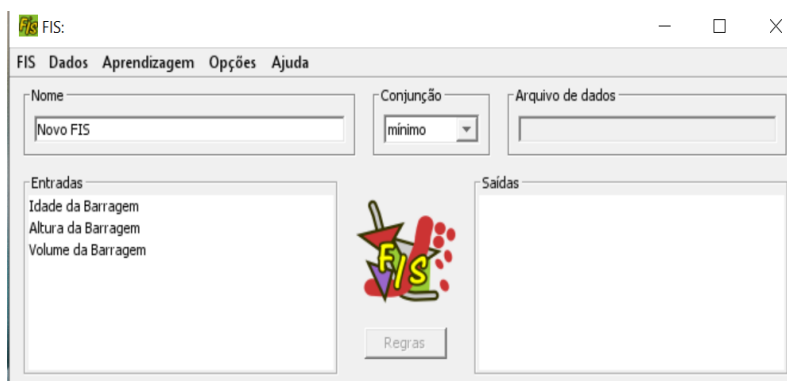
Figura 12 - Janela para adicionar uma nova entrada.



Fonte: Elaborado pela autora.

5. Adicione todas as variáveis de entradas selecionadas para esse SBRF (Figura 13).

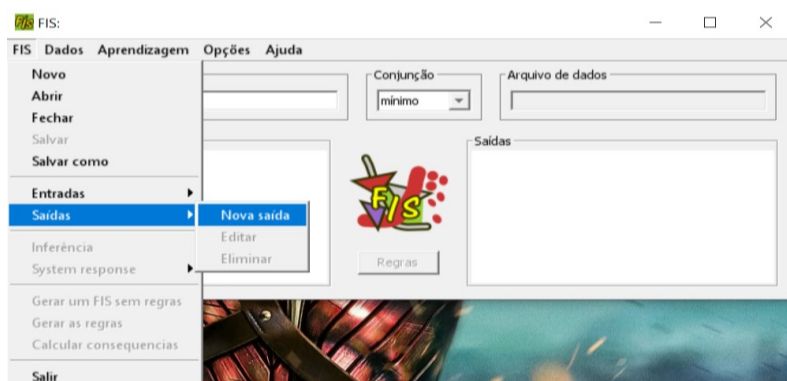
Figura 13 - Variáveis de entrada.



Fonte: Elaborado pela autora.

6. Adicione também as variáveis de saída, clique em FIS → Saídas → Adicionar saída (Figura 14).

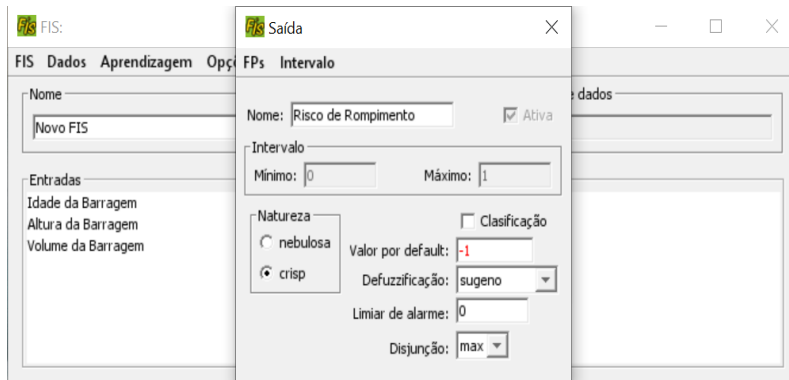
Figura 14 - Adicionar as variáveis de saída.



Fonte: Elaborado pela autora.

7. Uma nova janela é aberta para adicionar o nome da variável de saída e o intervalo do domínio dessa variável e a natureza *fuzzy* (Figura 15).

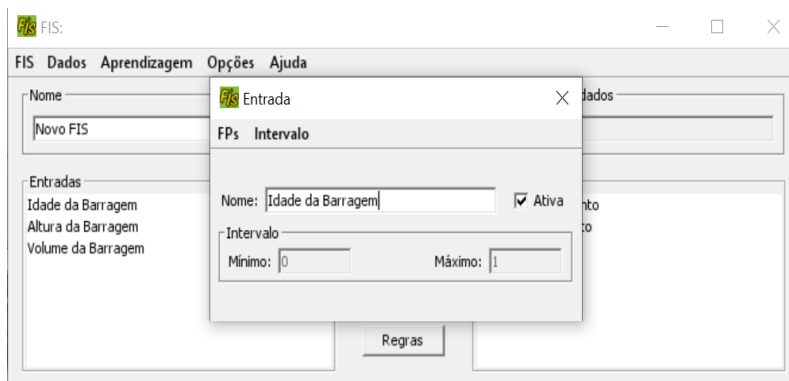
Figura 15 - Adicionar uma nova variável de saída.



Fonte: Elaborado pela autora.

8. Para adicionar os termos linguísticos de cada variável basta clicar duas vezes nos nomes adicionados. A janela da variável de entrada se abrirá novamente (Figura 16).

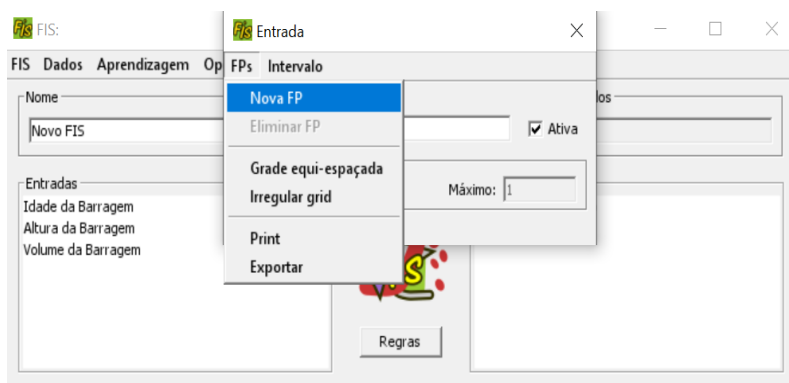
Figura 16 - Janela da variável de entrada.



Fonte: Elaborado pela autora.

9. Para inserir os termos linguísticos clique em FPs → Nova FP (Figura 17).

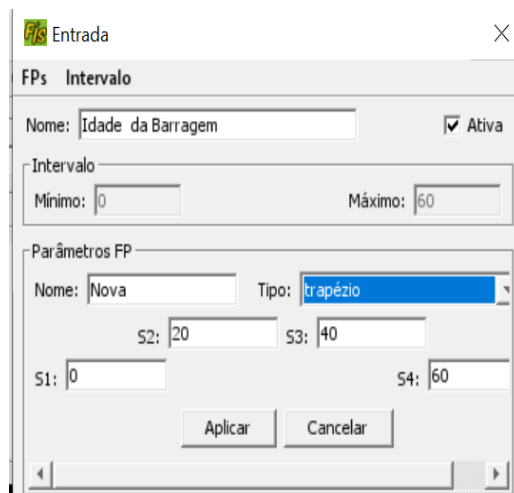
Figura 17 - Nova FP da variável de entrada.



Fonte: Elaborado pela autora.

10. Inserir os termos linguísticos de cada variável de entrada e saída, verificar o nome da variável e o intervalo do domínio. Por meio dos parâmetros FP, inserir os nomes para os termos linguísticos, o tipo que no nosso caso é o trapézio e os intervalos do domínio (Figura 18).

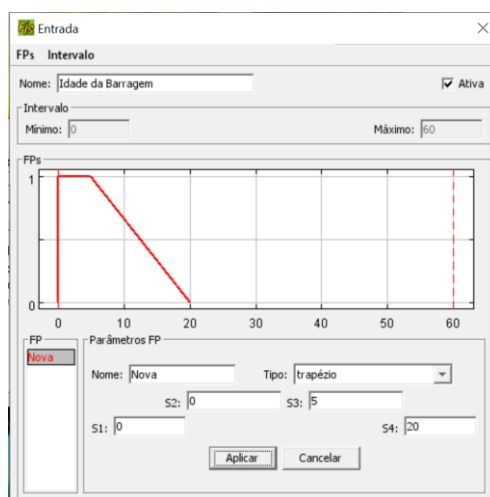
Figura 18 - Adicionar uma FP.



Fonte: Elaborado pela autora.

11. Ao clicar em aplicar, a janela das funções de pertinência da variável irá se abrir juntamente com o gráfico (Figura 19).

Figura 19 - Função de pertinência da variável de entrada Idade da Barragem

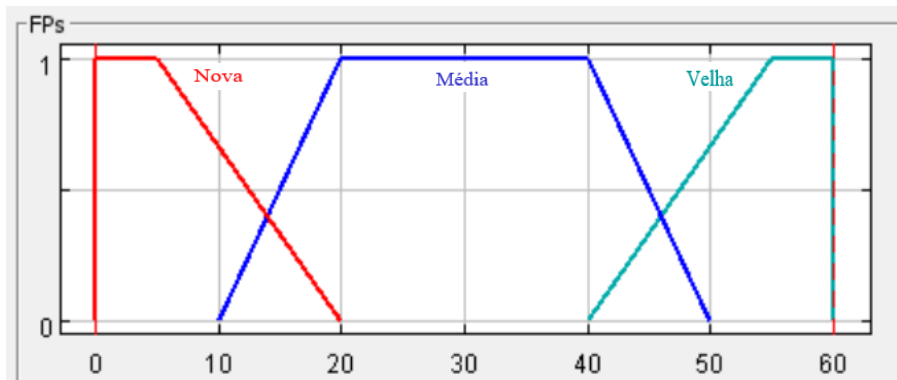


Fonte: Elaborado pela autora.

12. No SBRF, a idade da barragem é considerada: nova (até 20 anos), média (entre 20 e 40 anos) e velha (entre 40 e 60 anos). Essas idades foram estabelecidas conforme a matriz de classificação de risco da planilha compartilhada da ANEEL.

Na Figura 20 são apresentados os gráficos das funções da variável de entrada idade da barragem. Os termos linguísticos são: Nova, Média e Velha.

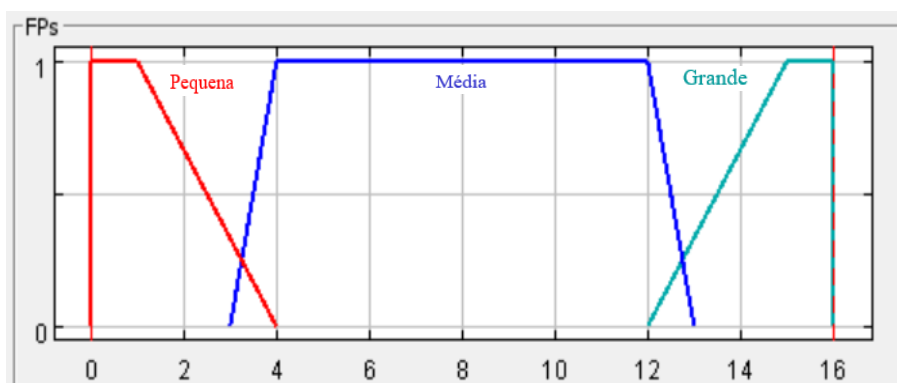
Figura 20 - Funções de pertinência (FPs) da variável idade da barragem em anos.



Fonte: Elaborado pela autora, por meio do *software FisPro*.

13. O protótipo da barragem construído na impressora 3D tem 16 centímetros de altura. Assim, o domínio da variável linguística é de 0 a 16 centímetros. Esse domínio foi dividido em três intervalos, que correspondem ao domínio dos conjuntos *fuzzy* denominados: altura pequena, média e grande. Na Figura 21 são apresentados os gráficos das funções de pertinência da variável de entrada altura da barragem. Os termos linguísticos da altura da barragem são: Pequena, Média e Grande.

Figura 21 - Funções de pertinência (FPs) da variável altura da barragem em centímetros.



Fonte: Elaborado pela autora, por meio do *software FisPro*.

14. O formato da barragem impressa é de um tronco de cone. O cálculo do volume foi realizado da seguinte forma:

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} [R^2 + Rr + r^2]$$

em que:

V = Volume;
h = altura;
R = raio maior;
r = raio menor.

Volume do primeiro degrau

Diâmetro maior: 24 – Raio: 12

Diâmetro menor: 22 – Raio: 11

$$V = \frac{4\pi}{3} [(12)^2 + 12 \cdot 11 + (11)^2]$$

$$V = \frac{4\pi}{3} [144 + 132 + 121]$$

$$V = \frac{4\pi}{3} [397]$$

$$V = \frac{1588\pi}{3} = 1662,10 \text{ cm}^3$$

Volume do segundo degrau

Diâmetro maior: 21 – Raio: 10,5

Diâmetro menor: 19 – Raio: 9,5

$$V = \frac{4\pi}{3} [(10,5)^2 + 10,5 \cdot 9,5 + (9,5)^2]$$

$$V = \frac{4\pi}{3} [110,25 + 99,75 + 90,25]$$

$$V = \frac{4\pi}{3} [300,25]$$

$$V = \frac{1201\pi}{3} = 1257,04 \text{ cm}^3$$

Volume do terceiro degrau

Diâmetro maior: 18 – Raio: 9

Diâmetro menor: 16 – Raio: 8

$$V = \frac{4\pi}{3} [(9)^2 + 9 \cdot 8 + (8)^2]$$

$$V = \frac{4\pi}{3} [81 + 72 + 64]$$

$$V = \frac{4\pi}{3} [217]$$

$$V = \frac{868\pi}{3} = 908,50 \text{ cm}^3$$

Volume do quarto degrau

Diâmetro maior: 15 – raio: 7,5

Diâmetro menor: 13 – raio: 6,5

$$V = \frac{4\pi}{3} [(7,5)^2 + 7,5 \cdot 6,5 + (6,5)^2]$$

$$V = \frac{4\pi}{3} [56,25 + 48,75 + 42,25]$$

$$V = \frac{4\pi}{3} [147,25]$$

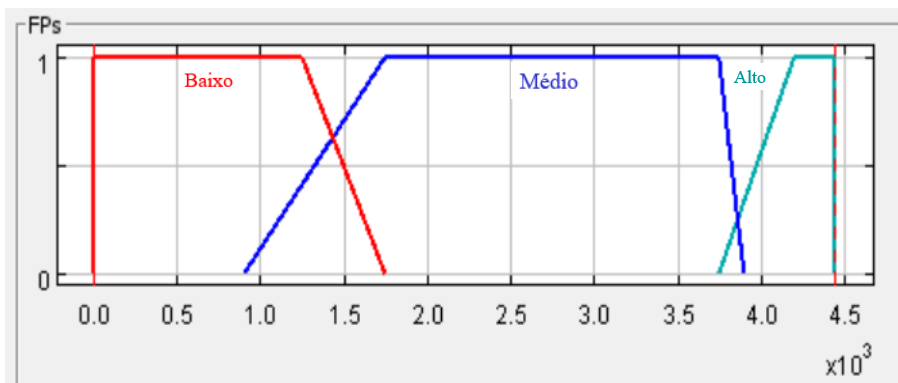
$$V = \frac{589\pi}{3} = 616,48 \text{ cm}^3$$

15. Tomando os valores necessários, calculou-se o volume para cada faixa de domínio da variável de entrada altura da barragem, satisfazendo o volume de cada termo linguístico, resultando no volume total que a barragem impressa suporta.

Volume total da barragem impressa em 3D: 4444,12 cm³.

16. O domínio do volume da barragem é [0, 4444,12]. As faixas consideradas são: menor do que 1662,10, de 1662,10 a 3827,64 e maior do que 3827,64, com os termos linguísticos Baixo, Médio e Alto, respectivamente. Na Figura 22 são apresentados os gráficos das funções de pertinência da variável de entrada volume da barragem.

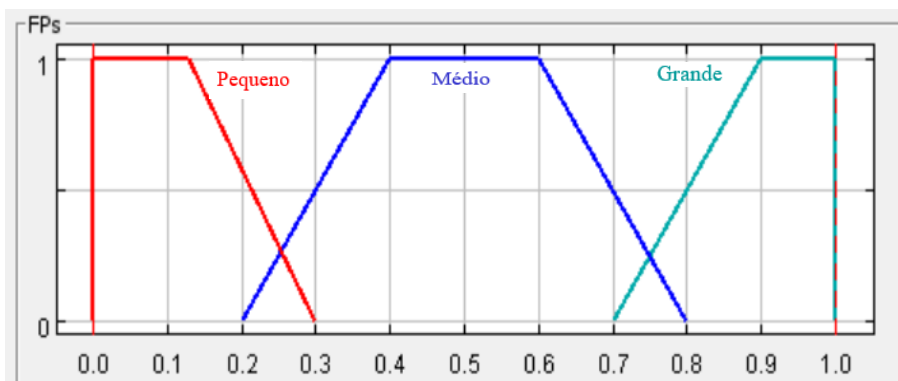
Figura 22 - Funções de pertinência (FPs) da variável volume da barragem em centímetros cúbicos.



Fonte: Elaborado pela autora, por meio do *software FisPro*.

17. Na Figura 23 são apresentados os gráficos das funções de pertinência do risco de rompimento da barragem. Os termos linguísticos são: Pequeno, Médio e Grande.

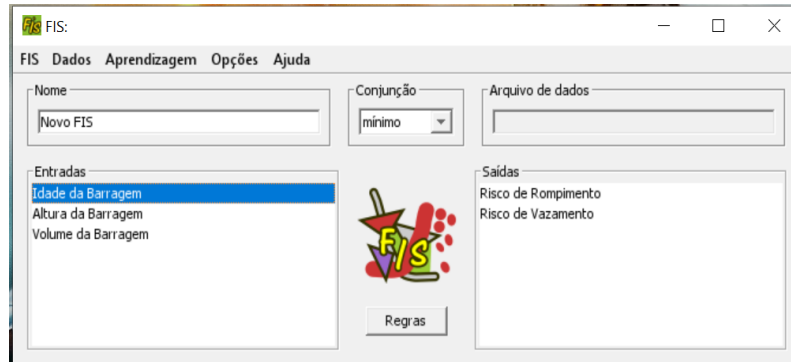
Figura 23 - Função de Pertinência (FPs) do risco de rompimento.



Fonte: Elaborado pela autora, por meio do *software FisPro*.

18. A base de regras *fuzzy* foi construída e analisada com a orientação do especialista na área. Para adicionar as regras, volte a janela inicial e clique em regras (Figura 24).

Figura 24 - Janela inicial do *FisPro*.

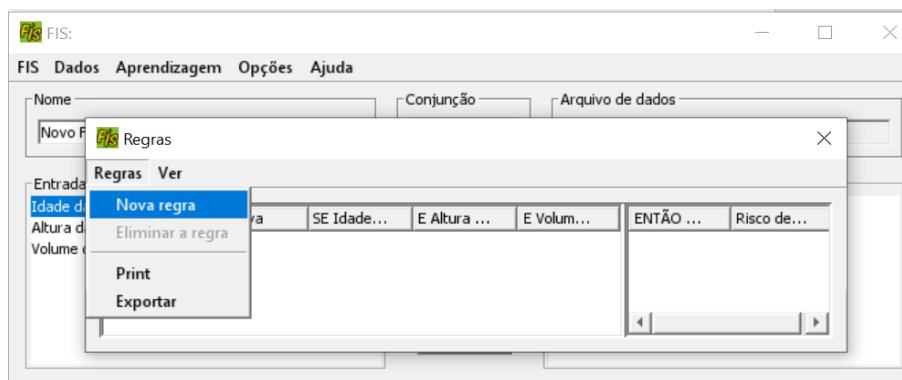


Fonte: Elaborado pela autora.

19. Na janela das regras, clique em Regras → Nova Regra (Figura 25).

Todas as possibilidades de combinação das variáveis de entrada são adicionadas, no total são vinte e sete regras.

Figura 25 - Janela de Regras.



Fonte: Elaborado pela autora.

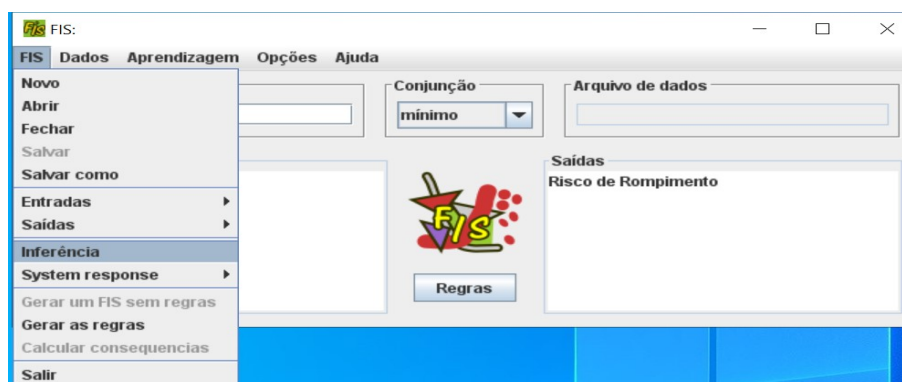
As regras *fuzzy* são apresentadas no Quadro 2.

Quadro 2 - Base de regras fuzzy.

Idade da barragem	Altura da barragem	Volume da barragem	Risco de Rompimento	Risco de Vazamento
<i>Nova</i>	<i>Pequena</i>	<i>Baixo</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Nova</i>	<i>Pequena</i>	<i>Médio</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Alto</i>
<i>Nova</i>	<i>Pequena</i>	<i>Alto</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Alto</i>
<i>Nova</i>	<i>Média</i>	<i>Baixo</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Nova</i>	<i>Média</i>	<i>Médio</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Nova</i>	<i>Média</i>	<i>Alto</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Alto</i>
<i>Nova</i>	<i>Alta</i>	<i>Baixo</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Nova</i>	<i>Alta</i>	<i>Médio</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Nova</i>	<i>Alta</i>	<i>Alto</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Média</i>	<i>Pequena</i>	<i>Baixo</i>	<i>Médio</i>	<i>Baixo</i>
<i>Média</i>	<i>Pequena</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>
<i>Média</i>	<i>Pequena</i>	<i>Alto</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>
<i>Média</i>	<i>Média</i>	<i>Baixo</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Média</i>	<i>Média</i>	<i>Médio</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Média</i>	<i>Média</i>	<i>Alto</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>
<i>Média</i>	<i>Alta</i>	<i>Baixo</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Média</i>	<i>Alta</i>	<i>Médio</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Média</i>	<i>Alta</i>	<i>Alto</i>	<i>Médio</i>	<i>Baixo</i>
<i>Velha</i>	<i>Pequena</i>	<i>Baixo</i>	<i>Pequeno</i>	<i>Baixo</i>
<i>Velha</i>	<i>Pequena</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>
<i>Velha</i>	<i>Pequena</i>	<i>Alto</i>	<i>Grande</i>	<i>Alto</i>
<i>Velha</i>	<i>Média</i>	<i>Baixo</i>	<i>Médio</i>	<i>Baixo</i>
<i>Velha</i>	<i>Média</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>	<i>Baixo</i>
<i>Velha</i>	<i>Média</i>	<i>Alto</i>	<i>Médio</i>	<i>Médio</i>
<i>Velha</i>	<i>Alta</i>	<i>Baixo</i>	<i>Médio</i>	<i>Baixo</i>
<i>Velha</i>	<i>Alta</i>	<i>Médio</i>	<i>Grande</i>	<i>Baixo</i>
<i>Velha</i>	<i>Alta</i>	<i>Alto</i>	<i>Grande</i>	<i>Baixo</i>

20. Para visualizar o método de inferência clique em FIS → Inferência, como mostra a Figura 26.

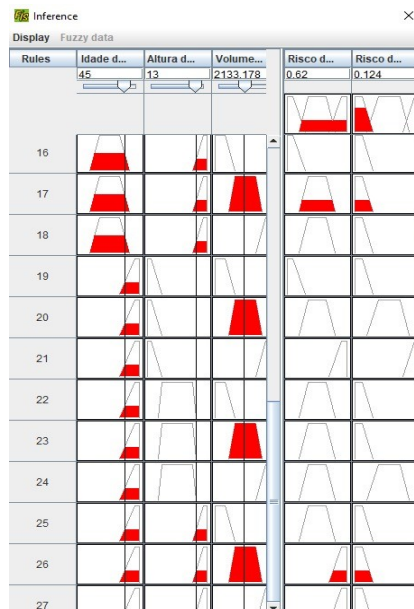
Figura 26 - Consultar inferências.



Fonte: Elaborado pela autora.

As inferências de cada regra podem ser visualizadas na Figura 27. Para exemplificar, considerando a idade da barragem 45 anos, altura da barragem 13 e volume 2133, é calculado o risco de rompimento 0,62. Nesse caso, a barragem 3D da maquete não rompe.

Figura 27 - Exemplo do cálculo de risco de rompimento da barragem.

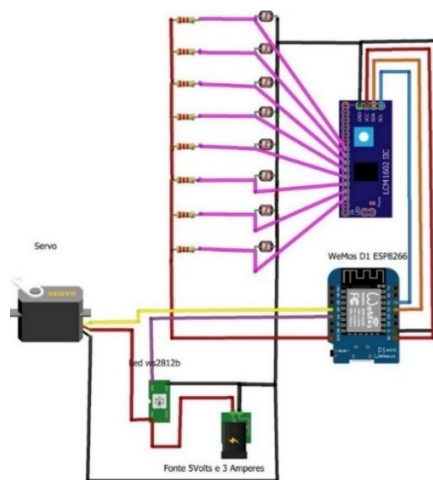


Fonte: Elaborado pela autora.

3.7. Montagem da parte eletrônica da barragem impressa

Como visto anteriormente, o controle para a abertura da barragem é feito pelo Arduino e a comunicação sem fio é pelo módulo Wi-Fi. A alimentação de energia é feita por uma fonte ligada a uma tomada de energia bivolt. O esquema a seguir (Figura 28) demonstra como os módulos são interligados.

Figura 28 - Esquema Eletrônico.



Fonte: Elaborado pela autora.

3.7.1. Configuração do Arduino IDE com ESP8266 e *Blynk (HomeLab)*

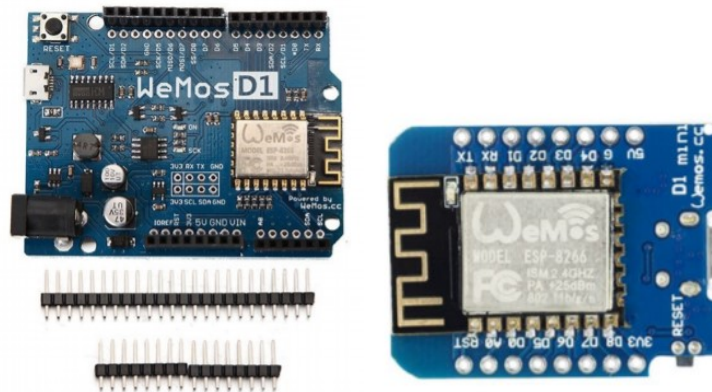
A seguir é descrito o procedimento de programação do Arduino Nano para que possa receber os comandos e realizar os movimentos, veja Apêndice B.

Materiais utilizados:

- Computador (este tutorial foi feito no ambiente Windows)
- Placa Wemos D1 R2 (esquerda) ou Wemos D1 mini (direita) (Figura 29).
- Cabo Micro USB (Figura 30).

Se utilizar placa Wemos D1 mini necessita de solda para conectar os pinos, já a Wemos D1 R2 não precisa.

Figura 29 - Placa Wemos D1 e Placa Wemos D1 mini.



Fonte: Filipiflop.

Figura 30 - Cabo USB.



Fonte: Imagem da Internet.

1. Baixar e instalar a IDE de programação do Arduino em: <https://www.arduino.cc/en/main/software> e faça o *download* da versão do Arduino IDE para seus sistemas operacionais (Figura 31):

Figura 31 - Software Arduino.

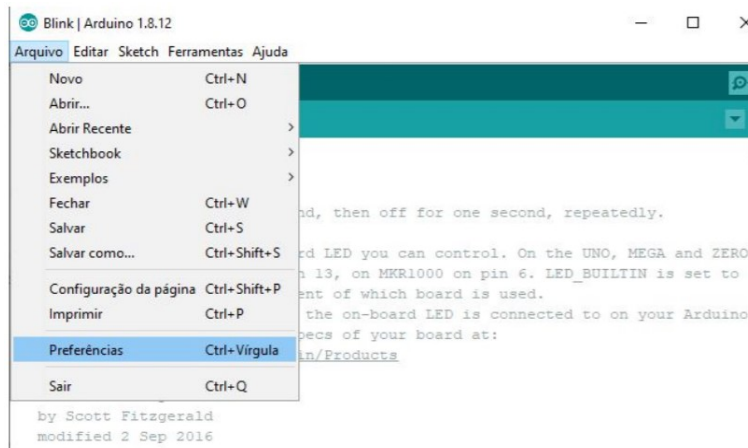


Fonte: <https://www.arduino.cc/en/main/software>.

Após o *download*, abra o programa Arduino IDE.

No menu superior esquerdo, vá em: Arquivo → Preferências (Figura 32).

Figura 32 - Software Arduino

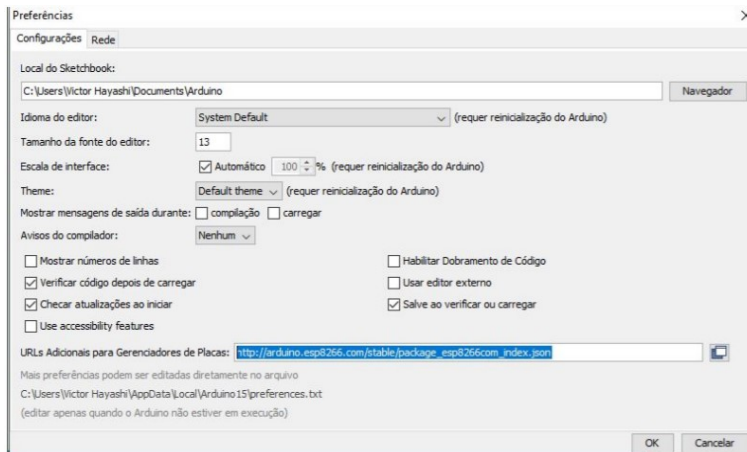


Fonte: Elaborado pela autora.

Uma nova janela será aberta. No Campo “URLs adicionais para Gerenciadores de Placas”, cole o seguinte endereço:

http://arduino.esp8266.com/stable/package_esp8266com_index.json, veja Figura 33.

Figura 33 - Software Arduino.

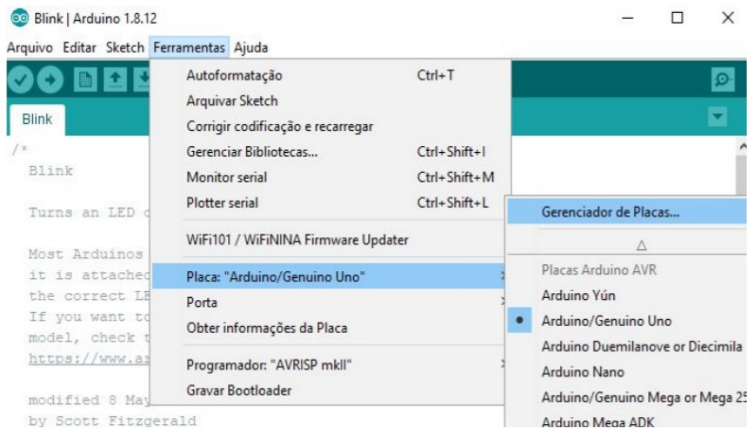


Fonte: Elaborado pela autora.

Clique em “OK” para salvar as alterações.

Agora, vá em: Ferramentas → Placa → Gerenciador de Placas (Figura 34).

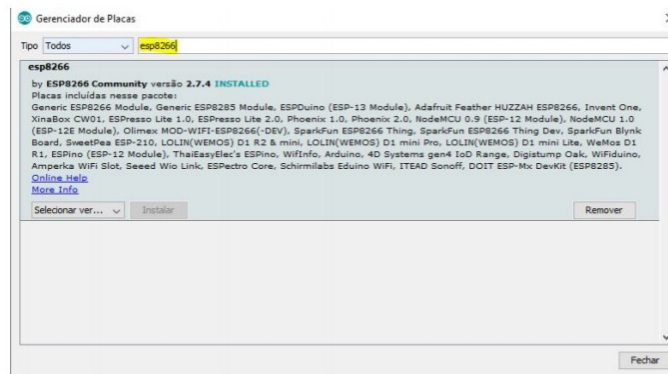
Figura 34 - Salvar alterações.



Fonte: Elaborado pela autora.

Pesquise por “ESP8266” na janela que foi aberta (Figura 35):

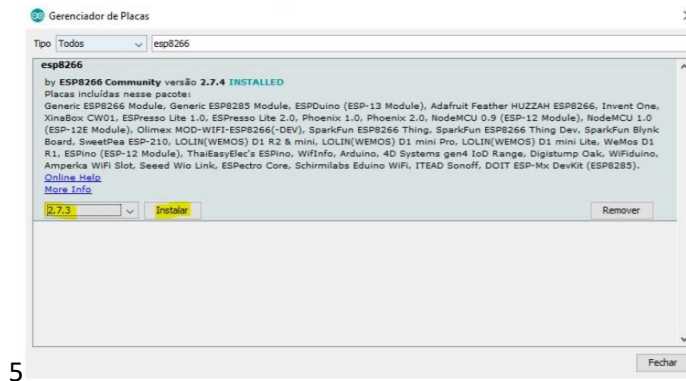
Figura 35 - Placa Esp8266.



Fonte: Elaborado pela autora.

Selecione a versão mais recente e clique em “Instalar” (Figura 36).

Figura 36 - Instalar placa.

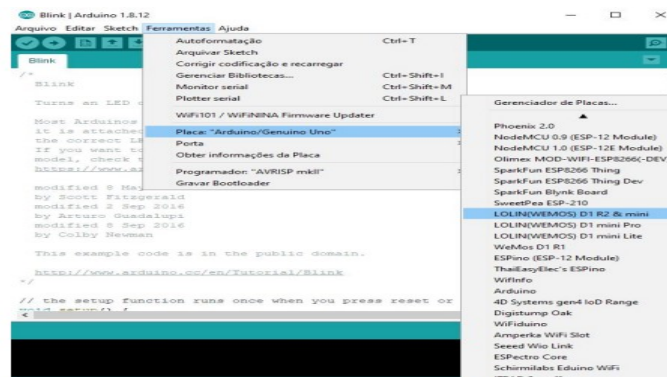


Fonte: Elaborado pela autora.

Aguarde a instalação.

Após a instalação, é possível selecionar o Wemos D1, em Ferramentas → Placa → LOLIN (WEMOS) D1 R2 & mini (Figura 37).

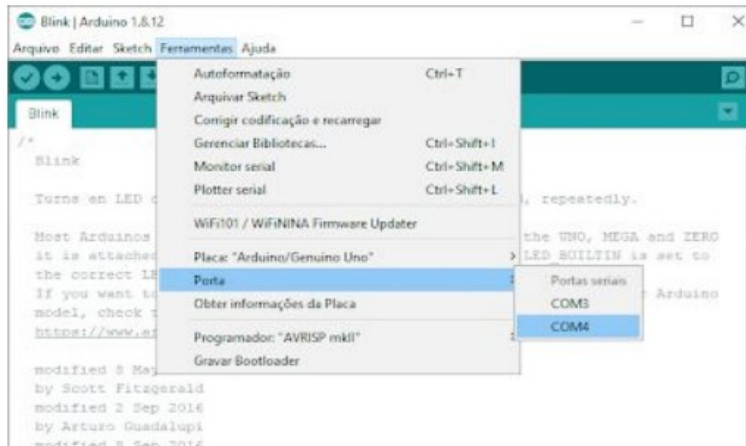
Figura 37 - Selecionar placa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Conecte a placa Wemos no computador com cabo micro USB e selecione a porta USB onde a placa Wemos está conectada (Figura 38).

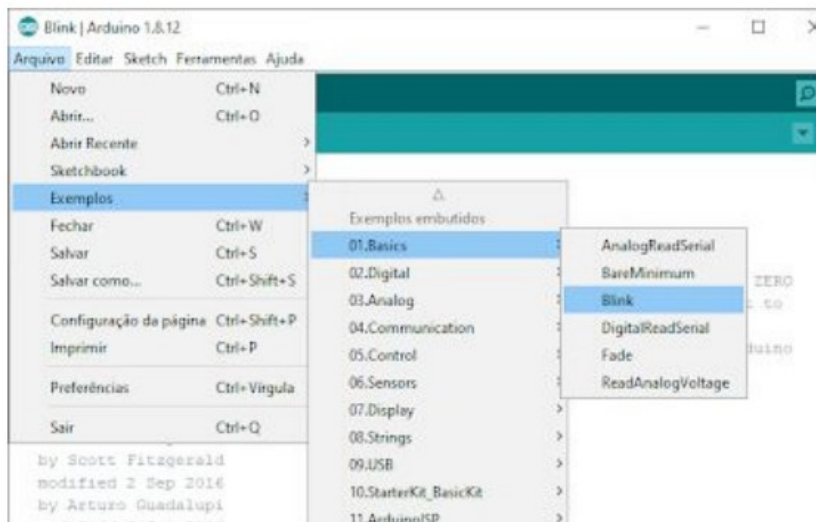
Figura 38 - Conectar a placa.



Fonte: Elaborado pela autora.

Para testar, abra o exemplo Blink em Arquivo → Exemplos → 01.Basics → Blink (Figura 39).

Figura 39 - Testar software.



Fonte: Elaborado pela autora.


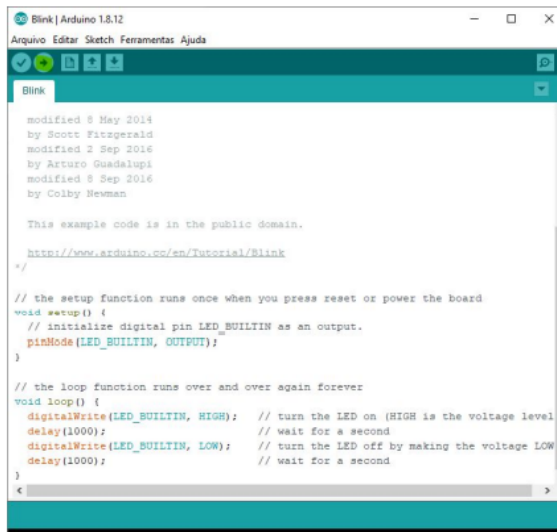
Aperte o botão de carregar  para compilar e carregar o exemplo na placa Wemos (Figura 40).

Figura 40 - Teste do arquivo.



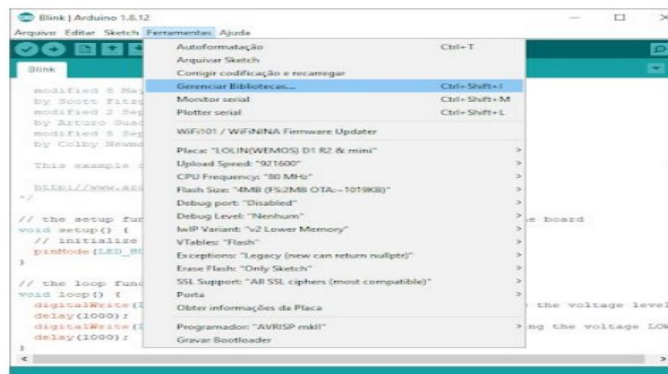
Fonte: Elaborado pela autora.

O led da placa deve começar a piscar com o programa carregado. Caso isso não ocorra, experimente trocar as ocorrências de “LED_BUILTIN” para “D4” no código do exemplo.

3.7.2. Instalar a biblioteca *Blynk*

Na Arduino IDE, selecione Ferramentas → Gerenciar Bibliotecas (Figura 41).

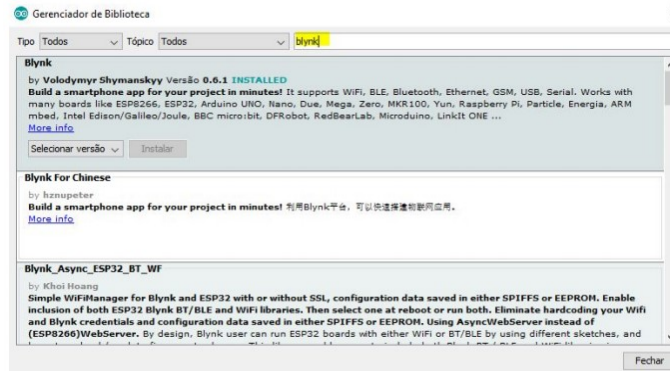
Figura 41 - Selecionar biblioteca.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na janela que irá abrir, busque por “*blynk*” (Figura 42).

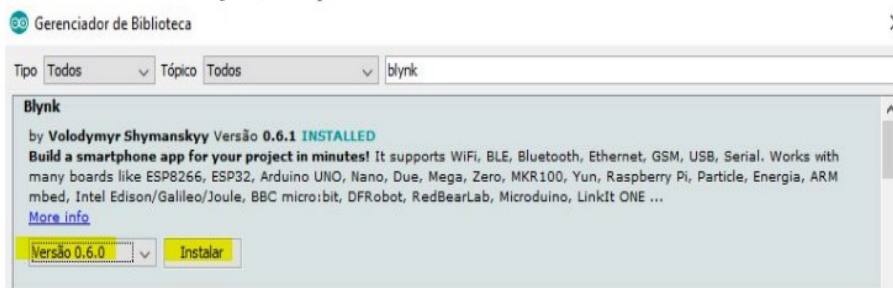
Figura 42 - Pesquisa por *Blynk* na biblioteca do Arduino.



Fonte: Elaborado pela autora.

Selecione a versão desejada e clique em “Instalar” (Figura 43).

Figura 43 - Seleção da biblioteca e instalar.

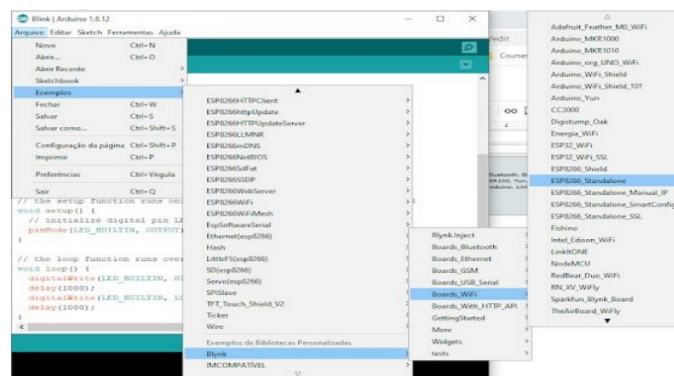


Fonte: Elaborado pela autora.

Aguarde a instalação.

Após a instalação da biblioteca, vá em Arquivo → Exemplos → *Blynk* → Boards_Wifi - ESP8266_Standolone (Figura 44).

Figura 44 - Seleção na placa na biblioteca.

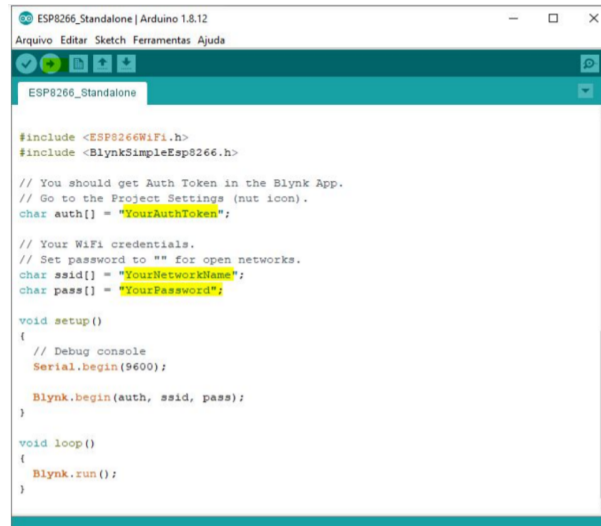


Fonte: Elaborado pela autora.

Substitua os valores dos parâmetros ssid e pass pelos nomes de SSID e senha de sua rede Wi-Fi respectivamente, insira o *auth token* de seu projeto no *Blynk* (Figura 45).

Aperte o botão de  para compilar e carregar o firmware na placa.

Figura 45 - Inserir a rede de Wi-Fi e a senha.



```
ESP8266_Standalone | Arduino 1.8.12
Arquivo  Editor  Sketch  Ferramentas  Ajuda

ESP8266_Standalone

#include <ESP8266WiFi.h>
#include <BlynkSimpleEsp8266.h>

// You should get Auth Token in the Blynk App.
// Go to the Project Settings (nut icon).
char auth[] = "YourAuthToken";

// Your WiFi credentials.
// Set password to "" for open networks.
char ssid[] = "YourNetworkName";
char pass[] = "YourPassword";

void setup()
{
  // Debug console
  Serial.begin(9600);

  Blynk.begin(auth, ssid, pass);
}

void loop()
{
  Blynk.run();
}
```

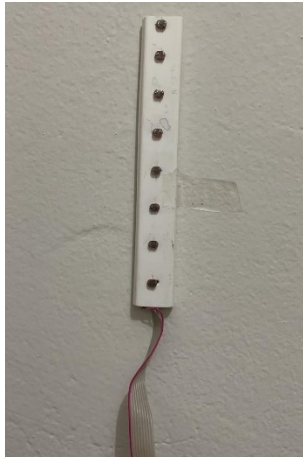
Fonte: Elaborado pela autora.

Ao adicionar um *push button* virtual no aplicativo *Blynk* e mapeá-lo no pino D4, é possível controlar o *built-in led* da placa Wemos pelo celular.

3.8. Os sensores internos do protótipo da barragem 3D

Para que o protótipo da barragem 3D se rompesse, as variáveis de entrada: idade e altura da barragem foram programadas na plataforma Arduino e controladas pelo aplicativo *Blynk*. A terceira variável de entrada que é o volume da barragem é controlada por sensores infravermelhos, inseridos na parte interna do protótipo da barragem 3D, são oito sensores com distanciamento de dois centímetros entre eles, totalizando os dezesseis centímetros de altura da barragem. Na Figura 46 é mostrada a barra com os sensores que é inserida na parte interna do protótipo. Para que esses sensores sejam ativados, os comandos foram programados na plataforma Arduino e interligados na placa ESP8266. As bolinhas em gel que representam o rejeito da barragem, assim que são colocadas no interior do protótipo da barragem 3D, os sensores captam e registram que o volume está aumentando.

Figura 46 - Sensores infravermelhos.



Fonte: Elaborado pela autora.

3.9 Luzes *LED*

Pensando em realizar um aviso prévio do rompimento da barragem, assim como as sirenes avisam o risco de rompimento da barragem à população, a luz *led* foi adicionada ao topo do protótipo da barragem impressa.

Esse único ponto de luz aciona três cores para os diferentes valores de risco de rompimento.

- Risco de Rompimento entre 0 e 0,49 a luz fica verde (Figura 47).

Figura 47 - Risco de rompimento baixo com luz *led* verde.



Fonte: Elaborado pela autora.

- Risco de Rompimento entre 0,50 e 0,79 a luz fica amarela (Figura 48).

Figura 48 - Risco de rompimento médio com luz *led* amarela.



Fonte: Elaborado pela autora.

- Risco de Rompimento entre 0,8 e 1 a luz fica vermelha e o protótipo de barragem se rompe (Figura 49).

Figura 49 - Risco de rompimento alto com luz *led* vermelha.



Fonte: Elaborado pela autora.

3.10. Aplicativo *Blynk*

O *Blynk* foi desenvolvido para ser utilizado em projetos *Iot* (*Internet of Things* ou *Internet das coisas*, em português), que é um termo utilizado para descrever a forma como objetos do mundo real permanecem conectados em rede e podem ser acessados pela internet.

A principal característica do *Blynk* é permitir que a comunicação com uma plataforma microcontrolada/embarcada possa ser realizada sabendo o mínimo de programação e até mesmo sem criar uma linha de código. Ele permite que plataformas sejam controladas remotamente, de forma que dados de sensores e módulos possam ser obtidos e exibidos no aplicativo que fica instalado no dispositivo móvel. Permite também que cargas sejam acionadas, além de muitas outras funcionalidades que a ferramenta disponibiliza.

Nesta sessão é apresentada a utilização do *Blynk* em conjunto com o ESP8266, NodeMCU e Wemos D1. O *Blynk* aliado a essas plataformas possibilitará o desenvolvimento de projetos *Iot* e de automação residencial utilizando rede WiFi.

3.10.1. Composição do *Blynk*

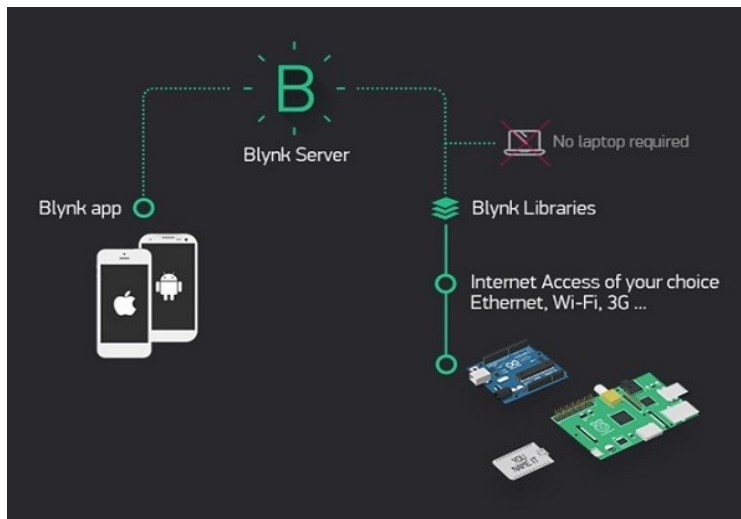
App *Blynk*: possibilita criar interfaces de controle de forma simples, em que é necessário apenas arrastar os *widgets* e em poucos passos fazer a configuração.

Servidor *Blynk*: é responsável por todas as comunicações entre o dispositivo móvel e a plataforma. O *Blynk Cloud* pode ser usado ou executar um servidor *Blynk* em sua máquina local. O servidor pode trabalhar com diversos dispositivos, inclusive pode rodar em um *Raspberry Pi*.

Bibliotecas *Blynk*: há bibliotecas para todas as plataformas mais populares e compatíveis com o *Blynk*, permitindo a comunicação com o servidor na nuvem (*cloud*) ou local, processando todos os comandos de entrada e saída.

Na Figura 50 é apresentada a arquitetura de funcionamento.

Figura 50 - Estrutura do aplicativo *Blynk*.



Fonte: Blog Master Walker.

3.10.2. Requisitos para utilizar o *Blynk*

Plataforma (*hardware*): Arduino, ESP8266, NodeMCU, ESP32, *Raspberry Pi* ou alguma plataforma que figure na lista de dispositivos suportados pelo *Blynk*.

Acesso à internet: O *Blynk* funciona pela internet, logo, a plataforma que é escolhida deverá ser capaz de se conectar à internet.

Smartphone: o aplicativo *Blynk* possui uma interface bem intuitiva e este funciona em dispositivos móveis Android ou iOS.

Conta de usuário: após a instalação do aplicativo no dispositivo móvel, é necessária a criação de uma conta de usuário para poder utilizar a ferramenta.

Biblioteca *Blynk*: para uso do *Blynk*, é necessário efetuar a instalação de um pacote de bibliotecas.

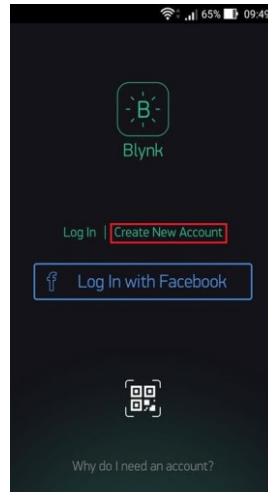
3.10.3. Download e instalação do *Blynk*

Para fazer o *download* e instalação do app *Blynk* em seu dispositivo móvel (*smartphone* ou *tablet*), será necessário que acesse a loja de aplicativos do seu dispositivo.

Se utiliza um dispositivo com sistema operacional Android, então basta acessar a *Play Store* diretamente do seu aparelho, fazer o *download* e a instalação do app *Blynk*. Caso utilize um dispositivo com sistema operacional iOS (Apple), basta acessar a *iTunes App Store* e fazer o *download* e instalação do *Blynk*.

Após o *download* e instalação do *Blynk* em seu dispositivo móvel, abra o aplicativo e clique em “*Create New Account*” para que você possa criar suas credenciais de entrada no aplicativo (Figura 51).

Figura 51 - Tela inicial do aplicativo *Blynk*.



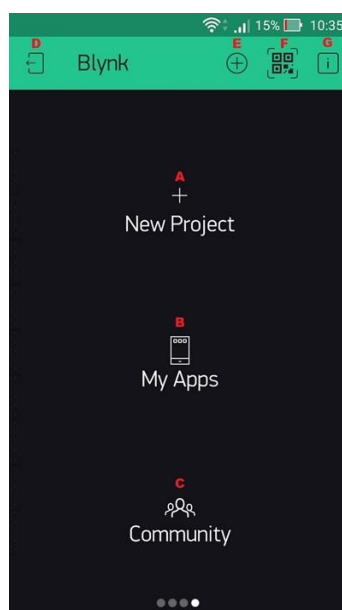
Fonte: Elaborado pela autora.

Insira um endereço de e-mail válido, uma senha e clique em “*Sign Up*” para se registrar. Após o registro, verá uma tela de criação do primeiro projeto.

3.10.4. Configuração do *Blynk* no dispositivo móvel.

Na Figura 52 é apresentada a primeira tela de criação de projetos.

Figura 52 - Tela de criação de projetos.



Fonte: Elaborado pela autora.

A finalidade de cada um dos botões da primeira tela é explicada a seguir:

A: botão “*Create New Project*”. Nesse botão é possível criar o seu primeiro projeto *Blynk*.

B: botão “*My Apps*”. Ao clicar nesse botão, é possível acessar uma outra tela que possui o botão “*Create App Preview*”. Este permite criar um app e dentro desse app disponibilizar um ou mais dos seus projetos *Blynk*. O app que for criado ficará disponível nas apps *stores* para que outros usuários possam fazer o *download*.

C: botão “*Community*”. Ao clicar nesse botão, abrirá a tela do fórum da comunidade do *Blynk*.

D: botão para fazer *logout* da sua conta, ou seja, retornar para a tela de login.

E: possui a mesma função do botão “*Create New Project*”.

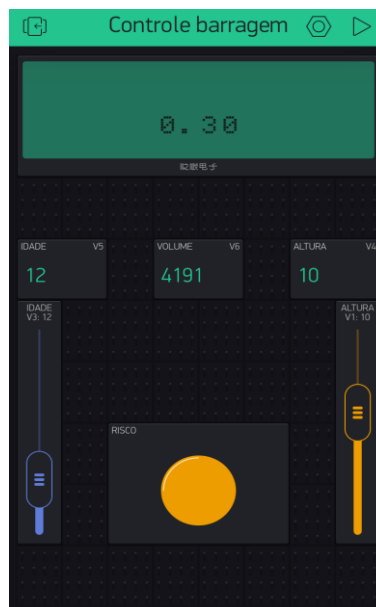
F: permite ler um QR Code e copiar um projeto já existente e que foi compartilhado por algum usuário do *Blynk*.

G: traz algumas informações do aplicativo.

3.10.5. Criação da tela de controle no *Blynk*

A seguir será apresentada a programação do aplicativo *Blynk* (Figura 53).

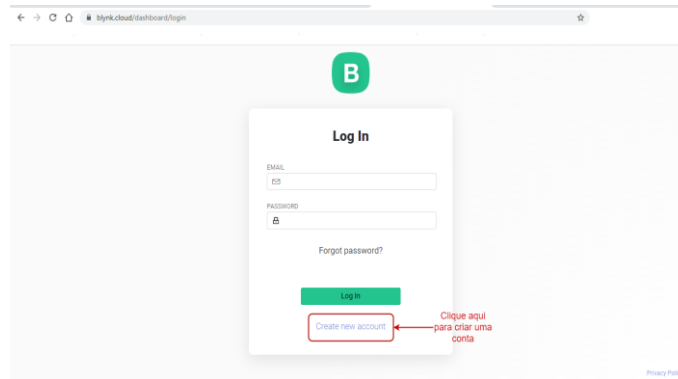
Figura 53 - Tela do aplicativo *Blynk* com a programação rompimento de barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

Abrir uma conta no site https://blynk.cloud/dashboard/login_ Figura 54.

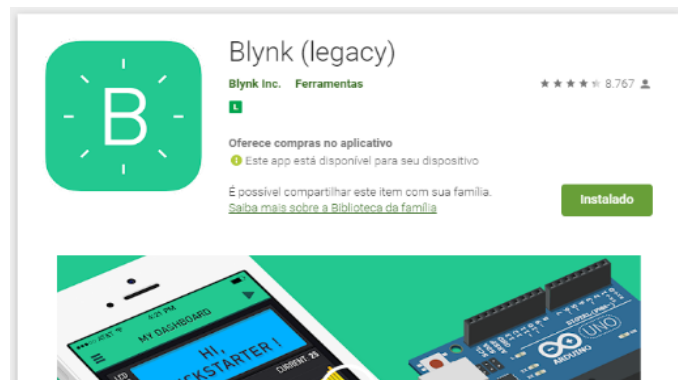
Figura 54 - Página de login do aplicativo *Blynk*.



Fonte: Elaborado pela autora.

Instalar aplicativo no celular (Figura 55).

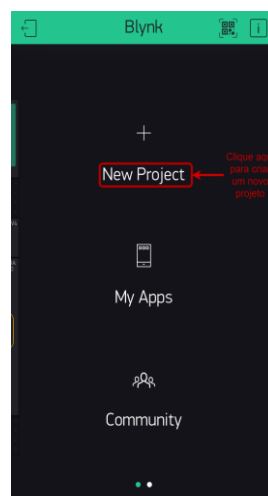
Figura 55 - Aplicativo *Blynk*.



Fonte: Elaborado pela autora.

Abrir o aplicativo com a conta criada e clicar em novo projeto (Figura 56).

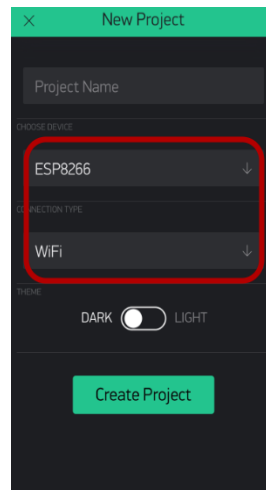
Figura 56 - Tela inicial do aplicativo *Blynk*.



Fonte: Elaborado pela autora.

Atribuir nome ao projeto e selecionar ESP8266 em “*choose device*” e Wi-Fi em “*connection type*” (Figura 57).

Figura 57 - Atribuir a placa utilizada e nome do projeto.



Fonte: Elaborado pela autora.

Para sair, clique em uma área livre (Figura 58).

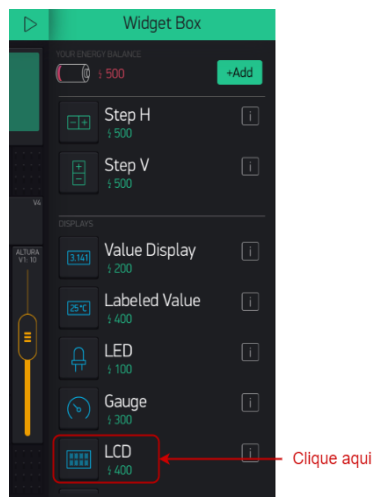
Figura 58 - Área livre do aplicativo.



Fonte: Elaborado pela autora.

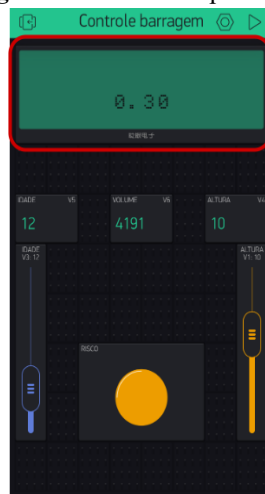
Clicar na tela e adicionar LCD e ajustar posição (Figuras 59 e 60).

Figura 59 - Adicionar LCD.



Fonte: Elaborado pela autora.

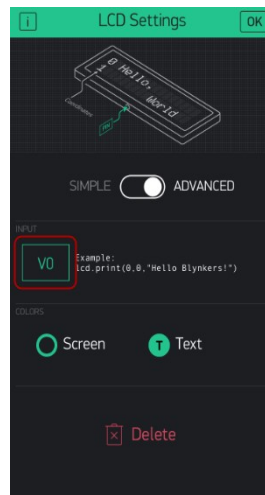
Figura 60 - LCD no aplicativo.



Fonte: Elaborado pela autora.

Selecionar “V0” para o input do “LCD” (Figura 61).

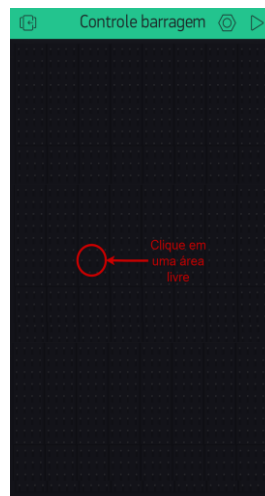
Figura 61 - Tecla VO para o input.



Fonte: Elaborado pela autora.

Clicar na tela e adicionar “*Value Display*” e posicionar para indicar idade (Figuras 62, 63 e 64).

Figura 62 - Adicionar conversor de idade da barragem.



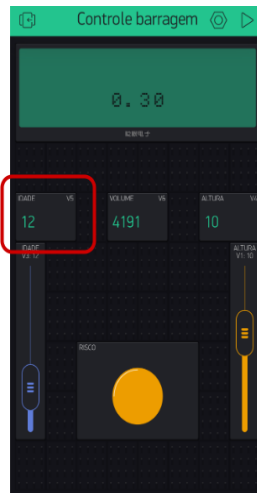
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 63 - Adicionar conversor de idade da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 64 - Adicionar conversor de idade da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

Clicar no *display* e configurar como na Figura 65.

Figura 65 – Inserir o *display* da idade da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

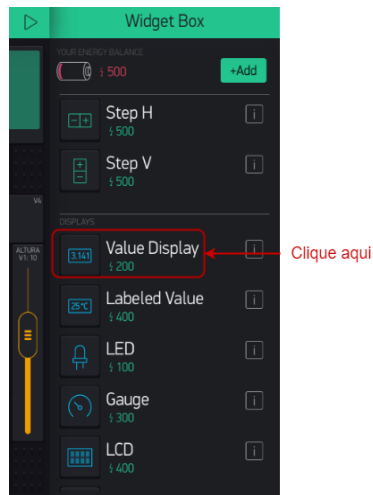
Clicar na tela e adicionar “*Value Display*” e posicionar para indicar Volume (Figuras 66, 67, 68).

Figura 66 - Adicionar sensor de volume da barragem.



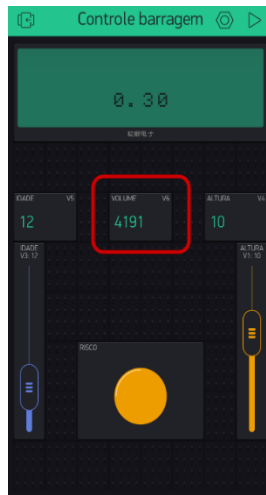
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 67 - Adicionar sensor de volume da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 68 - Adicionar sensor de volume da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

Clicar no *display* e configurar como na Figura 69.

Figura 69 - Inserir o *display* do volume da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

Clicar na tela e adicionar “*Value Display*” e posicionar para indicar Altura (Figuras 70, 71 e 72).

Figura 70 - Adicionar conversor da altura da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 71 - Adicionar conversor da altura da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 72 - Adicionar conversor da altura da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

Clicar no *display* e configurar como na Figura 73.

Figura 73 - Inserir o *display* do volume da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

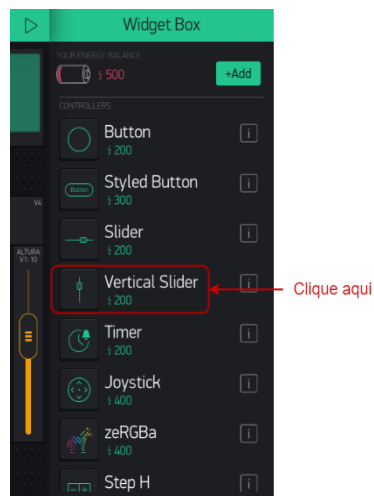
Clicar na tela e adicionar “*Vertical Slider*” e posicionar para variar a variável idade (Figuras 74, 75 e 76).

Figura 74 - Adicionar conversor de idade da barragem.



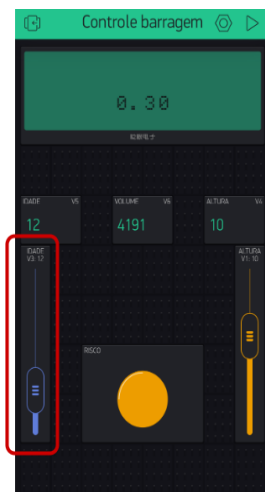
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 75 - Adicionar conversor de idade da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 76 - Adicionar conversor de idade da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

Clicar no display e configurar como na Figura 77.

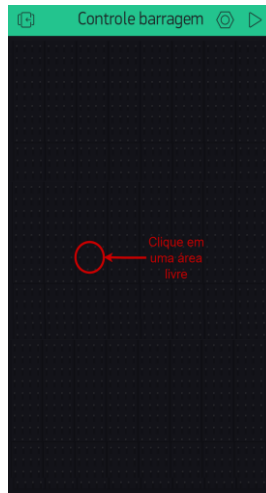
Figura 77 - Inserir o display da idade da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

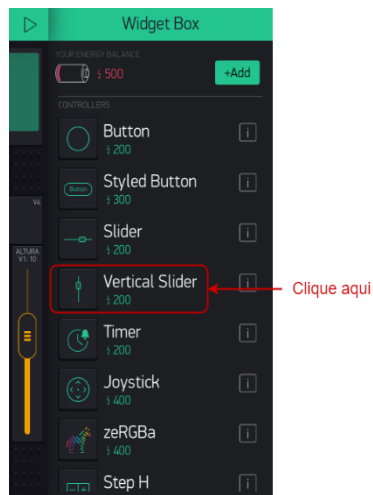
Clicar na tela e adicionar “*Vertical Slider*” e posicionar para variar a variável Altura (Figuras 78, 79 e 80).

Figura 78 - Adicionar conversor da variável altura da barragem.



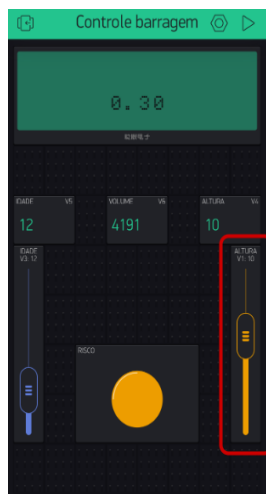
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 79 - Adicionar conversor da variável altura da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 80 - Adicionar conversor da variável altura da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

Clicar no *display* e configurar como na Figura 81.

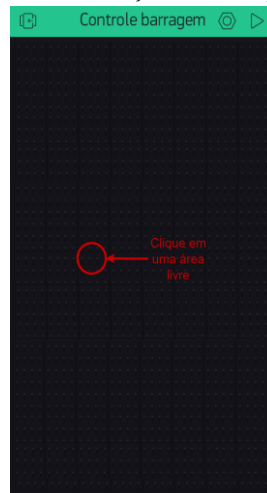
Figura 81 - Inserir o *display* da idade da barragem.



Fonte: Elaborado pela autora.

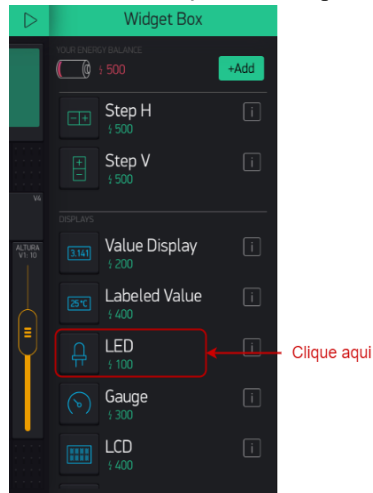
Clicar na tela e adicionar “LED” e posicionar para indicação de risco por meio de cores (Figuras 82, 83 e 84).

Figura 82 - Adicionar indicação de risco por meio de cores.



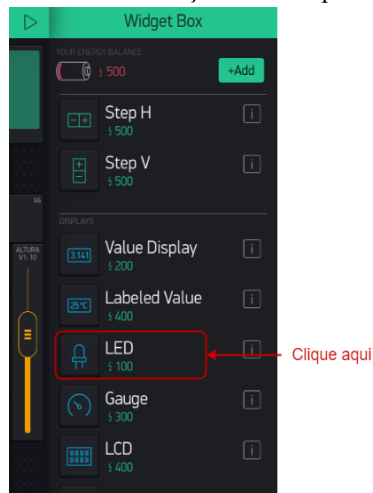
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 83 - Adicionar indicação de risco por meio de cores.



Fonte: Elaborado pela autora.

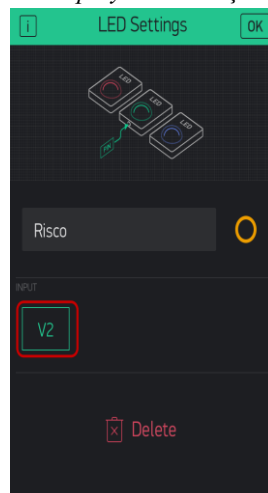
Figura 84 - Adicionar indicação de risco por meio de cores.



Fonte: Elaborado pela autora.

Clicar no *display* e configurar como na Figura 85.

Figura 85 - Inserir o *display* da indicação por meio de cores.



Fonte: Elaborado pela autora.

4. Conclusão

Assim, a maquete está pronta com o protótipo da barragem 3D instalada.

A autora espera que este material colabore com o trabalho dos professores em sala de aula, estimulando a aprendizagem dos estudantes por meio do pensamento computacional e matemático da lógica *fuzzy*.

Apêndice A

Aula 1

No intuito de motivar os estudantes, para o estudo da modelagem *fuzzy* do risco do rompimento da barragem, inicialmente, apresenta-se o vídeo de uma barragem de rejeitos se rompendo (<https://www.youtube.com/watch?v=ioyMjZikiW8>). Por intermédio do vídeo, o educador faz uma breve estruturação dos casos e tipos de barragem que existem, e quais os danos que podem ocorrer com o rompimento, assim os estudantes são desafiados a desenvolverem as atividades para controlar o risco de rompimento da barragem.

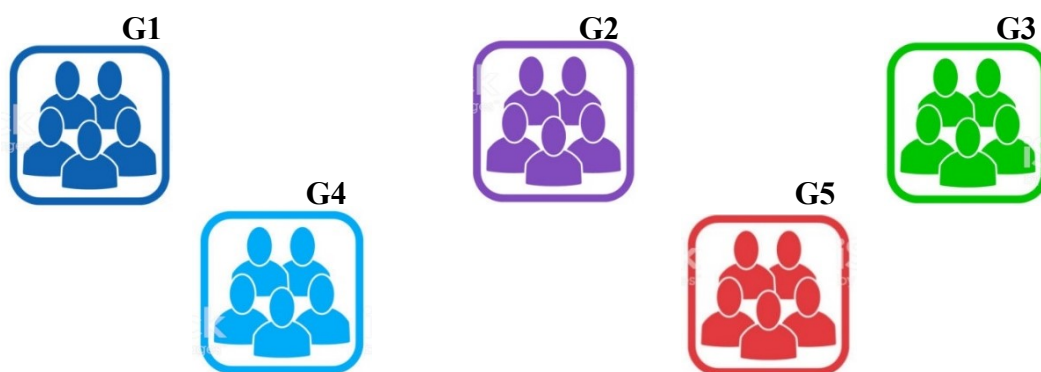
Aula 2

Nessa aula é realizada uma revisão do conteúdo de conjuntos e suas operações.

Considerando que a sala tenha 25 alunos, o educador divide a sala em cinco grupos com cinco integrantes em cada grupo.

Suponha-se que os grupos formados são: G1, G2, G3, G4 e G5, conforme Figura A1.

Figura A1 – Representação dos grupos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Em cada grupo, solicitar aos estudantes que encontrem algumas semelhanças e diferenças entre eles. É interessante que os estudantes façam anotações, para que na hora de conversar com toda a turma, não deixem de mencionar o que estava sendo discutido no grupo. A intenção é que eles percebam que nem todos possuem o mesmo gosto e que encontrar uma semelhança em um grupo de 5 pessoas é algo extremamente difícil.

O educador solicita que os grupos comentem o que encontraram de características semelhantes.

Para melhor visualização de como isso aconteceria, veja o exemplo:

Elementos do grupo “G1”: Paula, Débora, Barbara, Gustavo e Tiago. E assim atribuir perguntas como: Barbara pertence ao conjunto G1?

Ou ainda escolher um outro integrante do conjunto G2 e perguntar: Hugo pertence ao conjunto G1?

É interessante deixar os estudantes chegarem no conceito de pertencer ou não pertencer ao conjunto. Nesse momento, o educador solicita uma escrita matemática para o conceito atribuído à dinâmica.

Relação de Pertinência

A relação entre um ELEMENTO e um CONJUNTO é chamada relação de pertinência. Para mostrar que um elemento pertence a um conjunto, usamos os símbolos:

\in - Pertence
 \notin - Não pertence

Dando uma continuidade, veja o que os estudantes encontrarão de comum nos conjuntos formados.

Conjunto G1: todos os componentes do grupo praticam algum esporte.

Conjunto G2: todos os integrantes assistem uma série de TV.

Conjunto G3: todos têm um irmão ou irmã caçula.

Conjunto G4: todos possuem aparelhos celulares de uma marca específica.

Conjunto G5: todos os integrantes possuem um animal de estimação.

Pode-se conversar com todos os estudantes sobre outras características que são citadas no grupo e que nem todos os integrantes tenham. Assim, pode-se relacionar os conjuntos.

Ao associar isso com a turma, pode-se encontrar outros elementos que se unem a semelhança encontrada no conjunto. Por exemplo:

No conjunto G4, todos possuem aparelhos celulares da marca “Apple”, dentro dos outros conjuntos de alunos, quais também possuem celulares dessa marca?

No conjunto G1, três dos cinco estudantes possuem aparelhos celulares da marca “Apple”, ou seja, pode-se considerar esses três estudantes como possíveis integrantes do conjunto G4. (Figura A2)

Esse conjunto de três estudantes é denominado $\overline{G1}$. Esse novo conjunto dos três elementos de G1 que possuem celular “Apple” juntos com G4 é denominado $\overline{G4}$.

Figura A2 - Integrantes do grupo G1 que pertencem ao grupo $\overline{G4}$.



Fonte: Elaborado pela autora.

O educador instiga os estudantes a pensarem que o conjunto $\overline{G1}$ é um subconjunto de $G1$. Matematicamente, o subconjunto $\overline{G1}$ está contido no conjunto $\overline{G4}$. Define-se a relação de inclusão, da seguinte forma:

Relação de Inclusão

A relação entre dois CONJUNTOS é chamada de relação de inclusão. Para mostrar que um conjunto está contido em um outro conjunto, usamos os símbolos:

\subset - Está contido

$\not\subset$ - Não está contido

Lembre-se de que **um conjunto está contido no outro se cada um dos seus elementos também pertence ao outro conjunto.**

O educador pode formar outros conjuntos. Fazendo uma pergunta:

Na turma, qual aluno já viajou para fora do país? Nessa turma, não possui nenhum aluno que já tenha feito uma viagem para o exterior. Logo, esse conjunto é vazio.

Conjunto vazio

Um conjunto que não possui elementos é chamado de conjunto vazio. Para representar esse conjunto, usamos o símbolo de vazio:

$$\emptyset = \{ \}$$

Algumas outras questões ainda podem ser levantadas com a turma para dar continuidade nas teorias de conjunto. O educador ainda pode elaborar outras perguntas como, por exemplo: Alguém aqui já fez algum tipo de cirurgia?

Uma aluna já fez uma cirurgia para a retirada de amígdalas. Assim, a estudante, está em um conjunto sozinha, ou seja, um conjunto unitário.

Conjunto unitário

O **conjunto unitário** diferencia-se por ter apenas um elemento. Não importa que tipo de elemento tenha, pode ser um gato, um cachorro, um número, uma letra ou qualquer outra coisa, se ele tiver apenas um elemento, o chamaremos de conjunto unitário.

Na Figura A3 é mostrada tipos de representações do conjunto unitário. Figura A3 (a) é o diagrama de Venn e Figura A3 (b) o elemento entre chaves.

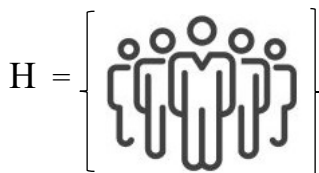
Figura A3 - Representação conjunto unitário.



Fonte: Elaborado pela autora.

Para finalizar os tipos de conjuntos, considera-se as quantidades de elementos de cada grupo. No início da dinâmica, foi solicitado que os estudantes se separassem em cinco grupos, ou seja, cada conjunto possui cinco elementos. A Figura A4 é um exemplo de conjunto finito.

Figura A4 - Representação conjunto finito.



Fonte: Elaborado pela autora.

Considerar o conjunto dos números naturais que terminam em três, pode-se defini-lo assim:

$$T = \{x/x \text{ é um número natural que termina em três}\}.$$

Como a reta numérica é infinita, sempre existirá um número no qual termina em três. Conclui-se que esse conjunto é infinito.

Vale ressaltar nesse momento que existe uma forma de representar alguns conjuntos infinitos por extensão. Basta exibir os primeiros elementos do conjunto e indicar com três pontos que a lista continua indefinidamente. No caso do conjunto T, formado pelos números que terminam em três:

$$T = \{3, 13, 23, 33, 43, 53, \dots\}.$$

Faça uma observação para os estudantes, pergunte se o conjunto de grãos de areia da Terra é um conjunto infinito. Talvez tenhamos respostas de diferentes defesas relacionados ao conjunto finito ou infinito. Nesse caso, ainda que o conjunto tenha uma enorme quantidade de elementos, deve existir um número que o represente, mesmo que esse número seja gigantesco.

Aula 3

Operações de conjuntos

Para trabalhar com as operações de conjuntos, pode-se ainda utilizar os grupos da dinâmica da aula passada, talvez seja preciso fazer uma reorganização para que alguns conceitos sejam contextualizados.

Suponhamos que os grupos fiquem da seguinte forma:

Conjunto G1 = {Alan, Bruno, Gustavo, Rafael e Tiago};

Conjunto G2 = {Alexandre, Carlos, Guilherme, Hugo e Renato};

Conjunto G3 = {Ana, Barbara, Debora, Luísa, Paula};

Conjunto G4 = {Alessandra, Mariane, Marina, Raquel, Thais};

Conjunto G5 = {Ana, Lucas, Marcelo, Rosana, Silvia}.

Refeito os grupos, o educador solicita que encontrem novas semelhanças entre si, o que definirá a junção do conjunto. Suponha-se que alguns “temas” foram eventualmente surgindo.

Conjunto G1 = todos os elementos possuem uma irmã ou um irmão;

Conjunto G2 = todos os elementos praticam algum tipo de esporte;

Conjunto G3 = todos os elementos acordam antes das 6h todos os dias da semana;

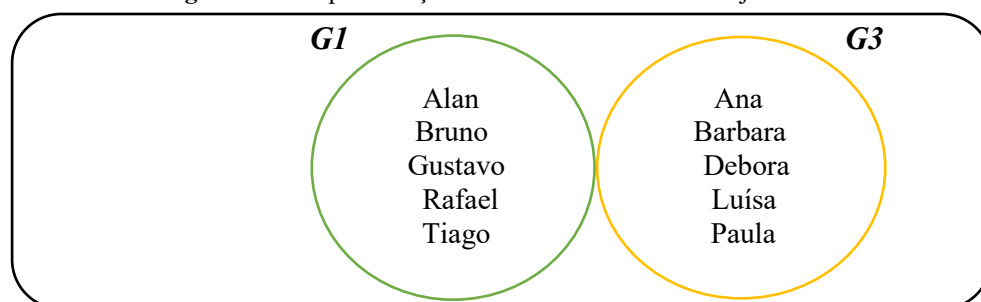
Conjunto G4 = todos os elementos moram em apartamento;

Conjunto G5 = todos os elementos possuem telefone celular de mesma marca.

Assim, outras semelhanças já apresentadas na aula passada foram também citadas. Observou-se que a semelhança atribuída a um conjunto, pode ser também a de um outro conjunto diferente, podendo, assim, fazer a união de dois conjuntos.

A semelhança do conjunto G1 é que todos os elementos do conjunto possuem uma irmã ou irmão e no conjunto G3 isso também acontece. A Figura A5 apresenta os conjuntos G1 e G3.

Figura A5 - Representação dos elementos de dois conjuntos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Questiona-se aos estudantes o que isso pode gerar e assim temos a união de dois conjuntos G1 e G3, formando um novo conjunto com todos os elementos: $G1 \cup G3$.

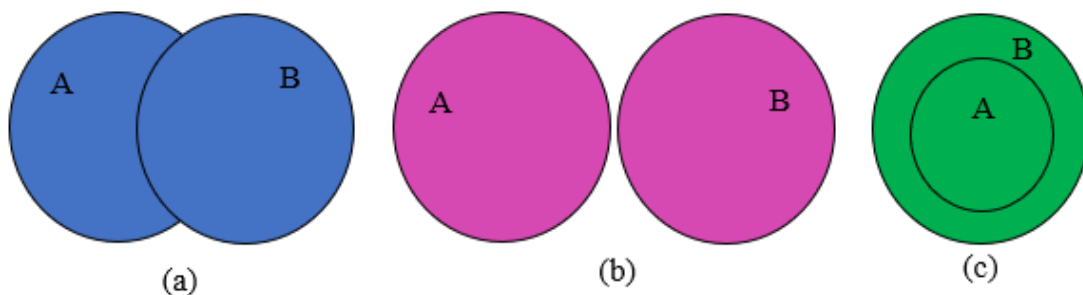
União de conjuntos

Dados dois conjuntos **A** e **B**, chama-se união de **A** e **B** o conjunto formado pelos elementos que pertencem a **A**, ou a **B**. Em símbolos:

$$A \cup B = \{x|x \in A \text{ ou } x \in B\} \rightarrow \text{Lê-se: } A \text{ união com } B.$$

Representação por meio de diagrama da operação de União (**parte colorida**) em três casos diferentes: Figura A6 (a) quando os conjuntos possuem alguns elementos em comum; Figura A6 (b) quando os conjuntos não possuem elementos em comum (são disjuntos); Figura A6 (c) quando um conjunto é subconjunto do outro ($A \subset B$).

Figura A6 - Representação de casos da operação união de conjuntos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Considerar que foi levantado algumas sugestões que não fizeram o tema valer para o grupo, pois nem todos os elementos compartilham da mesma característica.

Por exemplo, a situação de quem é filho único. No conjunto G2, três elementos satisfazem essa afirmação e no conjunto G5 um elemento satisfaz a afirmação. Pode-se então trabalhar com a interseção desses dois conjuntos. A Figura A7 apresenta os diagramas de Venn dos conjuntos G2 e G5.

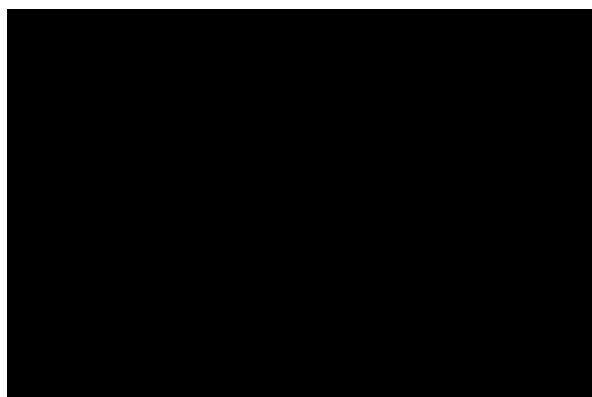
Figura A7 - Representação dos elementos de dois conjuntos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Tendo a situação de quem é filho único e sabendo que os seguintes elementos satisfazem a afirmação: Alexandre, Guilherme, Renato e Lucas. Então a interseção desses conjuntos G2 e G5 são justamente esses elementos, para o quesito ser filho único. A Figura A8 é a interseção dos dois conjuntos.

Figura A8 - Representação da interseção de dois conjuntos.



Fonte: Elaborado pela autora.

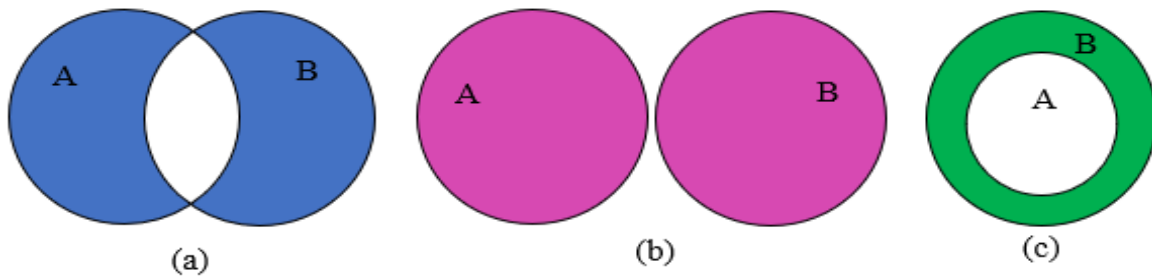
Interseção de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B , chama-se a interseção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem, ao mesmo tempo, a A e a B . Em símbolos:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\} \rightarrow \text{Lê-se: } A \text{ interseção com } B.$$

Representação por meio de diagrama da operação de Interseção (**parte em branco**) em três casos diferentes apresentado: Na Figura A9 (a) quando os conjuntos possuem alguns elementos em comum; Na Figura A9 (b) quando os conjuntos não possuem elementos em comum (são disjuntos), não há interseção ($A \cap B = \emptyset$); na Figura A9 (c) quando um conjunto é subconjunto do outro ($A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$).

Figura A9 - Casos da operação de interseção de conjuntos numéricos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Nesse momento, o educador introduz a diferença entre dois conjuntos. Este faz a seguinte pergunta para os estudantes: qual a diferença entre os conjuntos G3 e G5? Quando fala-se em diferença, associa-se à subtração, assim, pode-se subtrair um conjunto do outro: $G3 - G5$. Como é apresentado na Figura A10.

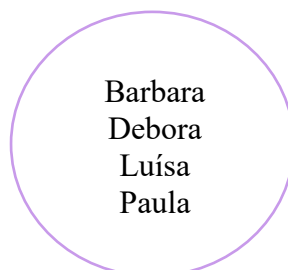
Figura A10 - Representação dos elementos de dois conjuntos.



Fonte: Elaborado pela autora.

O educador faz a seguinte observação: que os dois conjuntos possuem um nome em comum. Retirado esse elemento do conjunto G3, os elementos que sobram são: Barbara, Debora, Luísa e Paula. A Figura A11 representa os elementos que sobraram do conjunto G3 depois da subtração.

Figura A11 - Representação dos elementos da operação $G3 - G5$.

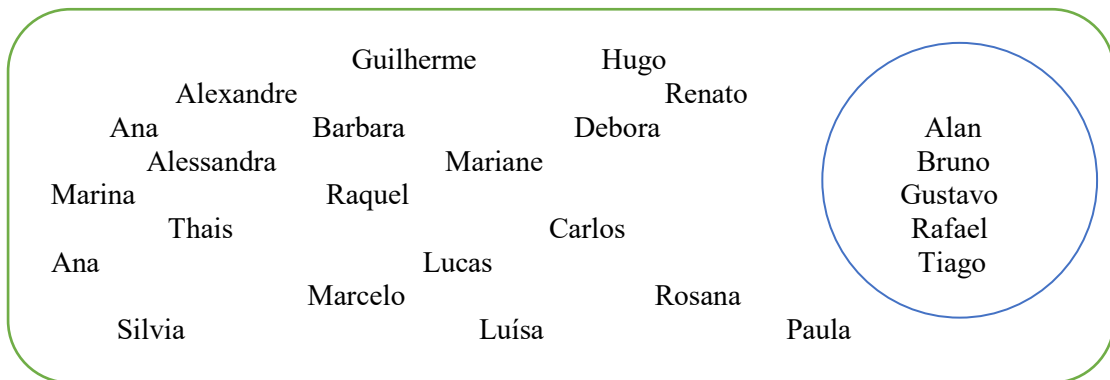


Fonte: Elaborado pela autora.

Para finalizar, considere a turma toda como o conjunto universo (possui todos os elementos). Formule com os alunos o que é ter todos os elementos dentro desse conjunto, a intenção é que eles percebam que os conjuntos formados são sempre subconjuntos desse conjunto universo, ou seja, considerando-se os conjuntos gerados na aula passada, pode-se concluir que são subconjuntos que estão contidos no conjunto universo.

Como decidido, o conjunto universo é a turma de alunos, considere um subconjunto de alunos, A1 por exemplo, e faça a seguinte pergunta para a turma: quem é complementar a esse subconjunto para chegar no conjunto universo? Espere que eles respondam e cheguem à conclusão que o conjunto complementar é todo o restante da turma. Figura A12.

Figura A12 - Representação de um conjunto complementar.



Fonte: Elaborado pela autora.

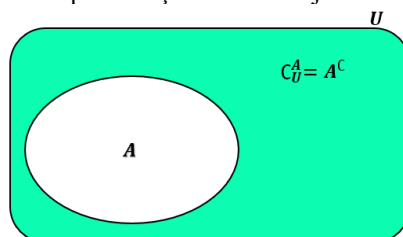
Conjunto Complementar

Dado um conjunto A , subconjunto de um conjunto universo U ($A \subset U$), dizemos que o complementar de A em relação à U é formado por todos os elementos de U que não são elementos de A . Em símbolos:

$$C_U^A = A^c = \bar{A} = \{x | x \in U \text{ e } x \notin A\} \rightarrow \text{Lê-se: complementar de } A \text{ em relação a } U.$$

O complementar do conjunto A em relação ao conjunto universo U está representado na Figura A13 (**parte colorida**).

Figura A13 - Representação de um conjunto complementar.



Fonte: Elaborado pela autora.

Aula 4

Nas duas aulas anteriores, o conteúdo de conjuntos numéricos foi aplicado. A aula 4 pode ocorrer no laboratório de informática, para a aplicação do jogo construído pela autora no *software* livre *RPG Maker*, para a consolidação do conteúdo.

O jogo funciona da seguinte forma: um jogo de fases, em que cada fase tem uma pergunta problematizando o conteúdo de conjuntos numéricos.

O aluno pode encontrar no mapa algumas dicas de como resolver as questões, essas dicas estão escondidas pelo mapa do jogo. Só se passa para a próxima fase depois de ter acertado a questão (Figura A14). Em todos os computadores do laboratório estará disponibilizado o jogo para os alunos.

Figura A14 - Imagem de um dos mapas do jogo.



Fonte: Elaborado pela autora.

Exemplificando: Considere os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{6, 7, 8, 9\}$ e $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Quais são os elementos do conjunto $(A \cap B) \cup C$?

- a) Os mesmos do conjunto A
- b) Os mesmos do conjunto B
- c) $\{6\}$
- d) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- e) Os mesmos do conjunto C

Aula 5

Nas aulas anteriores, foi trabalhado e revisado o conceito dos conjuntos clássicos. Utilizando o mesmo desenvolvimento dinâmico, podemos associar a lógica clássica e a lógica *fuzzy* nas atividades de conjuntos.

Na lógica clássica, sentenças verdadeiras têm valor lógico 1, enquanto sentenças falsas têm valor lógico 0. O que difere da lógica *fuzzy* que possui um valor lógico entre 0 e 1.

Na aula de hoje, o educador propõe para a turma que os estudantes dividam os grupos, com as condições das proposições.

Proposições:

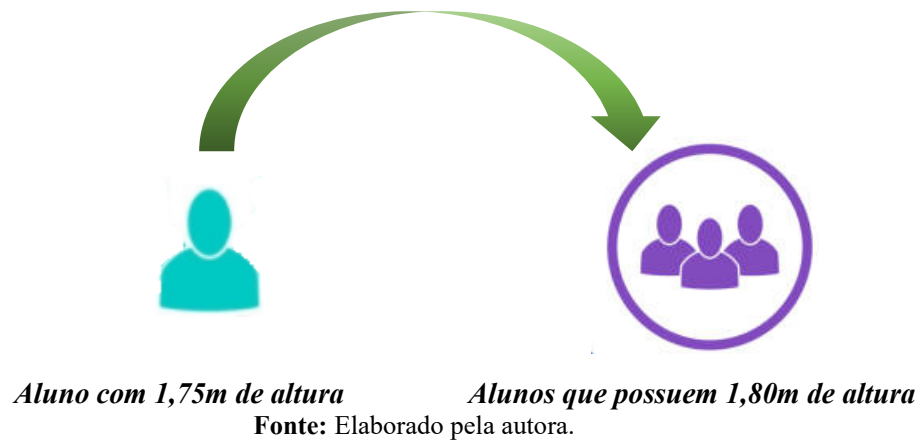
- ❖ Conjunto de alunos tímidos da sala.
- ❖ Conjunto de alunos com cabelo escuro da sala.
- ❖ Conjunto de alunos que assistem televisão com muita frequência.
- ❖ Conjunto de professores que ministram muitas aulas na turma.
- ❖ Conjunto de alunos altos da sala.
- ❖ Conjunto de alunos que bebem muita água durante a aula.
- ❖ Conjunto de alunos que viajam com baixa frequência.
- ❖ Conjunto de alunos que tomam muitos banhos durante o dia.

O educador observa o desenrolar da turma para montar esses conjuntos e se for preciso conduz algumas dicas para os estudantes.

Por exemplo, formar um conjunto de alunos altos da sala, inicialmente os estudantes podem achar fácil, porque reconhecem que dois alunos da turma são de maior estatura. Estes possuem 1,80m, logicamente, esses alunos estariam no conjunto de alunos altos. Mas isso bastaria? Apenas esses alunos fariam parte desse conjunto? O educador incentiva os estudantes a analisarem todos os “elementos” da turma, para observarem se outros colegas pertencem ao conjunto dos estudantes altos. Em algum momento, eles se depararão com um estudante que possui 1,75m. Veja a Figura A15, o que confirmará a questão da incerteza ao tentar definir os elementos que pertencem a tal conjunto. Isso certamente irá gerar várias discussões, o que pode levar o estudante a sugerir ideias de conjuntos com graus de incerteza, pois os estudantes irão verificar que nem todos os alunos pertencem por completo a um determinado conjunto, mas também que não há como classificar alguns alunos fora desse conjunto.

Nesse momento, o educador solicita aos estudantes que sugiram uma solução de como incluir todos os alunos da turma (ou de um determinado grupo) nesses conjuntos e que seja aberta uma concordância entre todos de como solucionar os casos dos estudantes que não se encaixam fora ou dentro do conjunto.

Figura A15 - Representação se o elemento pode pertencer ao conjunto.



O conjunto *fuzzy* é caracterizado por uma função de pertinência e o grau de pertinência pode ser considerado como uma medida que expressa a possibilidade de que um elemento seja membro do conjunto *fuzzy* (SILVA, 2018).

Aula 6

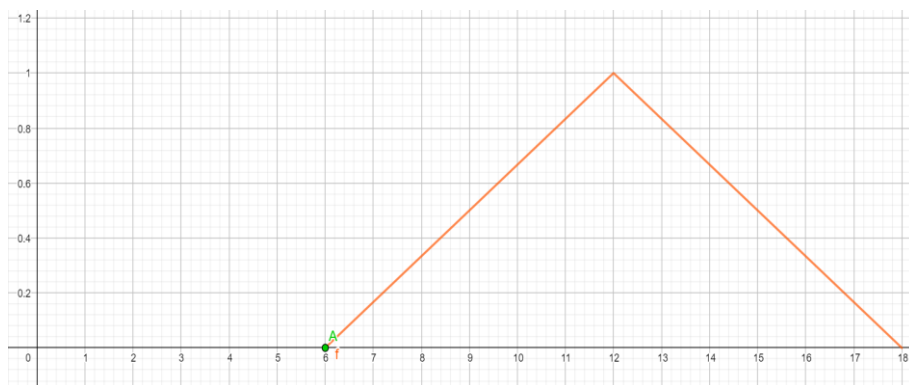
Função de pertinência triangular

Na aula passada, definiu-se o conceito de conjunto *fuzzy*, concluindo-se que pode-se classificar um elemento pelo grau de pertinência relacionado ao conjunto. Sabe-se também que esse grau de pertinência varia entre 0 e 1, nesta aula isso é observado graficamente.

Solicite que os estudantes levem em consideração as horas em torno do meio-dia (12 horas). Nesse caso, considerem que o dia inicie às 6 horas e termine às 18 horas. Comparem as horas próximas ao meio-dia (12 horas) e encontre o grau de pertinência em torno de 12 horas usando o bom senso.

E, assim, pode-se analisar o gráfico construído no *Geogebra* conforme Figura A16.

Figura A16 - Grau de pertinência das horas em torno de 12h.



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

O educador apresenta as principais características do gráfico: O eixo “x” representa as horas, vale ressaltar que trabalha-se no intervalo de 6 horas à 18 horas. O eixo “y” representa o grau de pertinência que varia entre 0 e 1.

Com o cursor deslizante, pode-se observar cada valor da variável linguística e o seu grau de pertinência que varia de 0 a 1, pelo ponto A que se desloca sobre a função.

Algumas características que devem ser notadas nessa função de pertinência triangular:

- Um único valor atende o grau de pertinência igual a 1, esse valor ocorre no próprio 12 (meio-dia).
- Valores menores que 12 e valores maiores que 12, que possuem o mesmo distanciamento de 12, possuem também o mesmo valor de grau de pertinência.

- Como foi imposto um intervalo de 6 à 18, pode-se observar que 6 e 18 possuem grau de pertinência igual a 0, pois são os mais distantes de 12, considerando os números entre esse intervalo.

- Como um único valor possui o grau de pertinência igual a 1, observa-se a formação uma função de pertinência triangular.

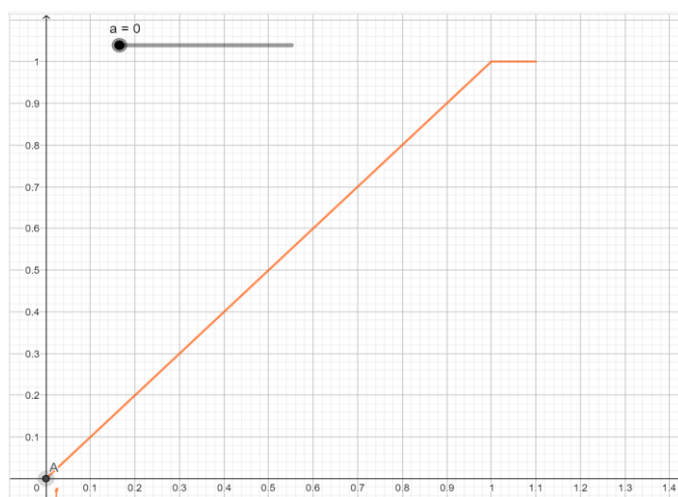
Função de pertinência trapezoidal

Como dito anteriormente, o grau de pertinência pode ser considerado como uma medida que expressa a possibilidade de que um dado elemento seja membro do conjunto *fuzzy* e é claro que existem variações de resultado. Apresenta-se um exemplo de função de pertinência trapezoidal.

Considere uma jarra que tenha capacidade de 1 litro, trabalha-se com o conceito de jarra cheia e vazia. O educador pode trabalhar com o exemplo concreto, com essa jarra na sala de aula enquanto tenta inserir 1,1 litros de água. Pergunte aos estudantes se é possível determinar o grau de pertinência enquanto enche a jarra e o que vai acontecer com o excesso de água que se tem. Pode-se analisar o volume da jarra e o grau de pertinência graficamente.

Analisaremos o gráfico construído no *Geogebra* (Figura A17).

Figura A17 - Grau de pertinência de uma jarra cheia de água.



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

Novamente o educador apresenta certas características do gráfico, o eixo “x” representa a quantidade de água em ml. Mostre aos estudantes que cada intervalo equivale a 100 ml. O eixo “y” representa o grau de pertinência que varia de 0 a 1.

Com o cursor deslizante, pode-se observar cada valor da variável linguística e o seu grau de pertinência que varia de 0 a 1, por meio do ponto A que se desloca sobre o gráfico da função.

Algumas características que devem ser notadas nessa função de pertinência trapezoidal:

- O grau de pertinência igual a 0 se encontra no volume 0, ou seja, quando não possui água dentro da jarra.

- Assim que o volume vai aumentando, o grau de pertinência aumenta simultaneamente.

- Quando chega em 1 litro, a jarra enche e o grau de pertinência chega a 1, pois a jarra está cheia.

- O grau de pertinência permanece constante igual a 1, quando inserimos 1,1 ml de água, pois a jarra mesmo que vazando água, permanece cheia.

A seguir apresenta-se um exemplo de conjunto *fuzzy*.

Exemplo: Seja X o conjunto dos números naturais:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Seja A o conjunto dos números próximos de 3:

$$\{x \in A \mid x \text{ é próximo de } 3\}.$$

Definimos a função $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$, que associa cada x natural ao valor próximo de 3 por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{-x+5}{2}, & \text{se } 3 < x \leq 5 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Veja agora os graus de proximidade de alguns números do conjunto X em relação ao conjunto A :

$$\mu_A(1) = 0 \quad \mu_A(2) = 0.5 \quad \mu_A(3) = 1 \quad \mu_A(4) = 0.5 \quad \mu_A(5) = 0$$

Aula 7

Nas primeiras aulas, trabalhou-se com os conjuntos numéricos e suas operações, nota-se que é possível trabalhar com operações relacionados aos conjuntos *fuzzy* também.

Para obter os conjuntos *fuzzy* e suas operações, basta generalizar a função característica da lógica clássica para o intervalo $[0, 1]$. O elemento irá pertencer ao conjunto A com um grau de pertinência que é um valor no intervalo $[0, 1]$. Apresentado graficamente na aula passada.

Definição 1: Sejam A e B dois subconjuntos *fuzzy* de um universo U, com funções de pertinência μ_A e μ_B , respectivamente.

Definição 1.1: A é subconjunto *fuzzy* de B, ou $A \subset B$, se

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \text{ para todo } x \in U.$$

Definição 1.2: A união de A com B é o subconjunto *fuzzy* $A \cup B$ de U cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max_{x \in U} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Definição 1.3: A intersecção de A com B é o subconjunto *fuzzy* $A \cap B$ de U cuja função de pertinência é dada por:

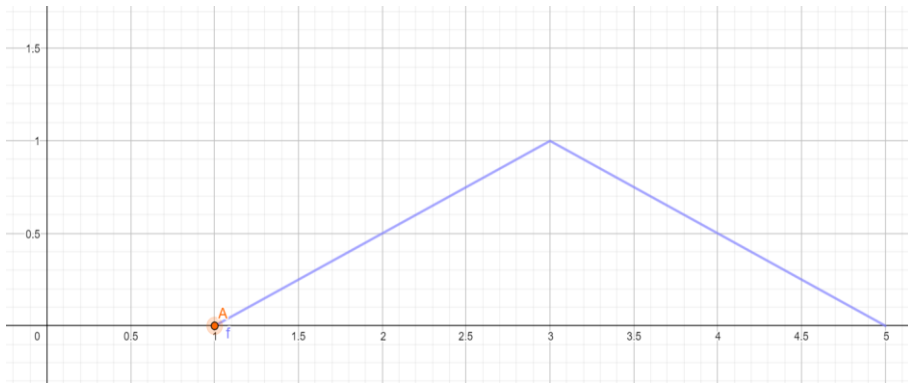
$$\mu_{A \cap B}(x) = \min_{x \in U} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Definição 1.4: O complementar de A em relação a U é o subconjunto *fuzzy* A^C de U cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x), x \in U.$$

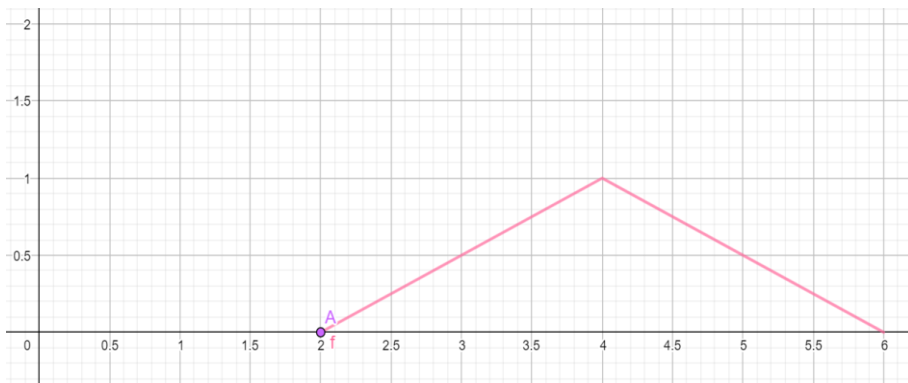
Exemplo: Veja a representação gráfica para os conjuntos *fuzzy* dos números próximos de 3 e próximos de 4 (Figuras A18 e A19).

Figura A18 - Conjuntos fuzzy dos números próximos de 3.



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

Figura A19 - Conjuntos fuzzy dos números próximos de 4.



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

A Figura A20 representa a junção dos dois conjuntos *fuzzy*, com as operações de união (parte rosa) e interseção (parte verde).

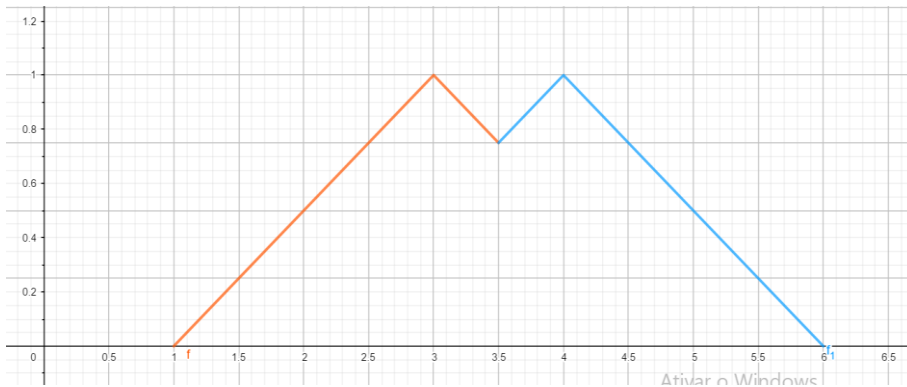
Figura A20 - Gráfico $\mu_{A \cup B}$ e $\mu_{A \cap B}$.



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

A Figuras A21 apresenta o gráfico de $\mu_{A \cup B}(x)$.

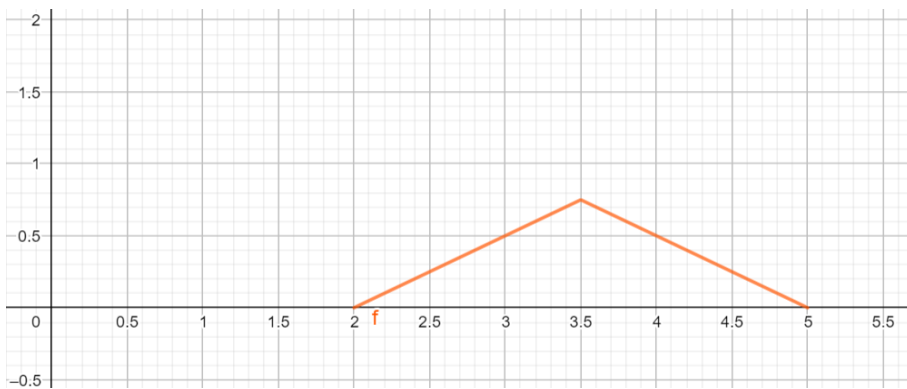
Figura A21 - Gráfico de $\mu_{A \cup B}$.



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

A Figuras A22 apresenta o gráfico de $\mu_{A \cap B}(x)$.

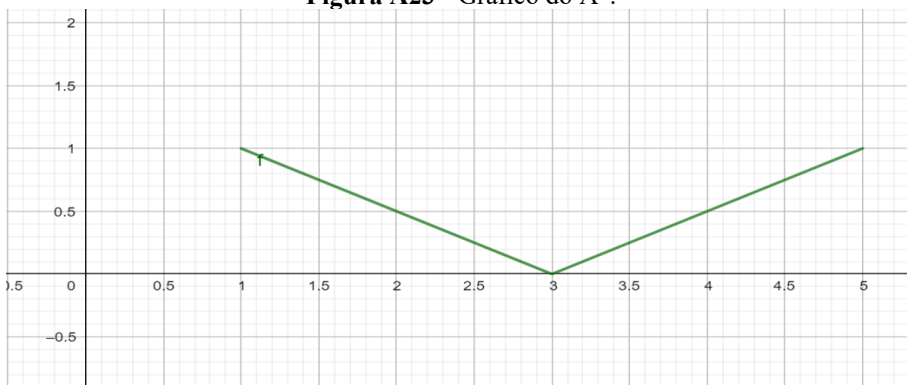
Figura A22 - Gráfico de $\mu_{A \cap B}$.



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

A Figuras A23 apresenta o gráfico de A^C .

Figura A23 - Gráfico do A^C .



Fonte: Elaborado pela autora no *software Geogebra*.

Suponha que o conjunto universo U seja composto pelos pacientes de uma clínica, identificados pelos números 1, 2, 3, 4 e 5. Sejam A e B os conjuntos *fuzzy* que representam os pacientes com febre e dor, respectivamente. A Tabela 1 ilustra a união, intersecção e o complemento. (JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2012).

Tabela 1 - As operações de união, intersecção e complementar.

<i>Paciente</i>	<i>Febre (μ_A)</i>	<i>Dor (μ_B)</i>	$\mu_{A \cup B}$	$\mu_{A \cap B}$	μ_{A^C}
1	0.7	0.6	0.7	0.6	0.3
2	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
3	0.4	0.2	0.4	0.2	0.6
4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
5	1.0	0.2	1.0	0.2	0.0

Fonte: Elaborado pela autora.

Os valores das colunas, exceto os da primeira, indicam os graus com que cada paciente pertence aos conjuntos *fuzzy* A , B , $A \cup B$, $A \cap B$ e A^C , respectivamente, em que A e B são supostamente dados.

Aula 8

Sistemas baseados em regras *fuzzy*

Utiliza-se um exemplo para que os estudantes entendam como construir o sistema utilizando todo o conteúdo visto até aqui. Essa aula pode ser realizada no laboratório de informática, nos computadores está instalado o *software FisPro*. Orienta-se aos alunos para que entendam que cada variável linguística vai possuir um grau de pertinência e que isso irá influenciar o resultado.

As variáveis linguísticas são modeladas por conjuntos *fuzzy* e as proposições são descritas de acordo com as informações de um especialista. Quanto mais informações se tem das condições mais preciso será o resultado.

Exemplo: O SBRF tem como variável linguística de saída a qualidade de um *smartphone*, sendo as variáveis de entrada: a memória do dispositivo, a duração da bateria e a qualidade da câmera.

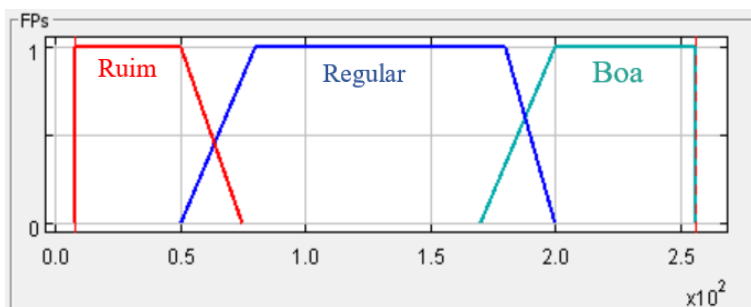
A partir da definição dos alunos do que seria a boa qualidade de um *smartphone* levando em consideração essas três características, pode-se introduzir o conceito da base de regras, associando as três variáveis de entrada apresentadas com a escolha do *smartphone*.

O SBRF é construído no *software* livre *FisPro*. O objetivo do uso dessa ferramenta é somente a resolução do problema, sem detalhar o modo de utilização do *software* e os passos a serem seguidos.

Depois pode-se construir, juntamente com os estudantes, os conjuntos *fuzzy* da capacidade de memória do dispositivo, duração da bateria e qualidade da câmera. Apresentadas em detalhes nas Figuras A24, A25 e A26.

O domínio da variável de entrada “capacidade de memória” do dispositivo é de 8 GB a 256 GB, da variável de entrada “qualidade da câmera” é de 4 *megapixel* a 108 *megapixel* e da variável de entrada “tempo de duração da bateria” de 0 a 16 horas. Os termos linguísticos das variáveis de entrada “capacidade de memória do dispositivo” e da “qualidade da câmera” são: ruim, regular e boa. Os termos linguísticos da variável de entrada “tempo de duração de bateria” são: fraca, média e forte.

Figura A24 - Funções de pertinência da variável capacidade de memória do dispositivo.



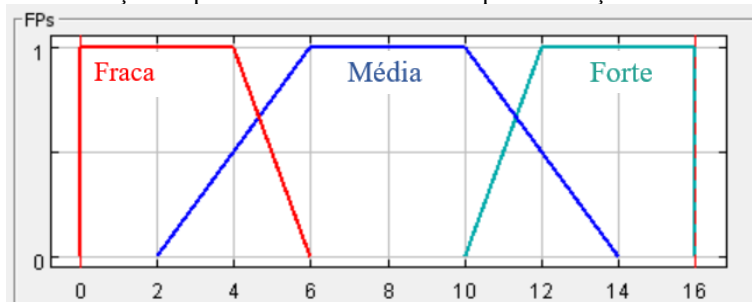
Fonte: Elaborado pela autora pelo software *FisPro*.

Figura A25 - Funções de pertinência da variável qualidade da câmera do dispositivo.



Fonte: Elaborado pela autora pelo software *FisPro*.

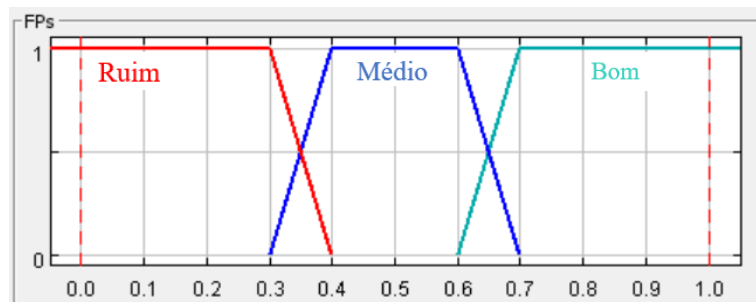
Figura A26 - Função de pertinência da variável tempo de duração da bateria do dispositivo.



Fonte: Elaborado pela autora pelo software *FisPro*.

Como saída é mostrado o conjunto *fuzzy* de qualidade do aparelho, que deve ser construído juntamente com os estudantes, considerando os termos linguísticos: ruim, médio e bom (Figura A27).

Figura A27 - Função de pertinência da variável qualidade do *smartphone*.



Fonte: Elaborado pela autora pelo *software FisPro*.

A base de regras é apresentada na Tabela 2.

Tabela 2 - Regras *Fuzzy*.

Regra	Ativa	SE Me...	E Câme...	E Bateria	ENTÃO ...
1	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Ruim	Fraca	Ruim
2	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Ruim	Média	Ruim
3	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Ruim	Forte	Ruim
4	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Regular	Fraca	Ruim
5	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Regular	Média	Regular
6	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Regular	Forte	Regular
7	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Boa	Fraca	Ruim
8	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Boa	Média	Regular
9	<input checked="" type="checkbox"/>	Ruim	Boa	Forte	Bom
10	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Ruim	Fraca	Ruim
11	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Ruim	Média	Regular
12	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Ruim	Forte	Regular
13	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Regular	Fraca	Regular
14	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Regular	Média	Regular
15	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Regular	Forte	Regular
16	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Boa	Fraca	Regular
17	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Boa	Média	Bom
18	<input checked="" type="checkbox"/>	Regular	Boa	Forte	Bom
19	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Ruim	Fraca	Ruim
20	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Ruim	Média	Regular
21	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Ruim	Forte	Bom
22	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Regular	Fraca	Regular
23	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Regular	Média	Regular
24	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Regular	Forte	Bom
25	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Boa	Fraca	Bom
26	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Boa	Média	Bom
27	<input checked="" type="checkbox"/>	Boa	Boa	Forte	Bom

Fonte: Elaborado pela autora pelo *software FisPro*.

Após todas as informações serem adicionados ao *software* (tanto os conjuntos *fuzzy* de entrada e saída como a base de regras), é feita a inclusão dos dados da simulação ou para obter a qualidade dos *smartphones* dos alunos.

Exemplo: Um *smartphone* com capacidade de memória de 64G, qualidade da câmera de 12 *megapixels* e a duração de bateria de 12h então tem a possibilidade de ter qualidade igual a 0,505.

Aula 9

Sistema baseado em regras *fuzzy* para o risco de rompimento da barragem

Após aplicação do problema do *smartphone*, nessa aula constrói-se o SBRF para o risco de rompimento da barragem de rejeitos. Essa aula pode ser realizada no laboratório de informática. Deve-se dividir os estudantes em grupos, de maneira a tornar o aprendizado descontraído.

Inicialmente, induzir os estudantes a definir as variáveis de entrada que influenciam o rompimento e o vazamento da barragem.

Incentivar os estudantes a elaborar um SBRF, no *software FisPro*, nessa oportunidade, o educador verifica se todos compreenderam e tira-se as dúvidas que ainda possam surgir. É interessante ressaltar que o especialista em barragens juntamente com o professor de Geografia pode estar presente para dar suporte e gerar uma conversa com toda a turma sobre os acertos e erros na elaboração da base de regras e outras variáveis.

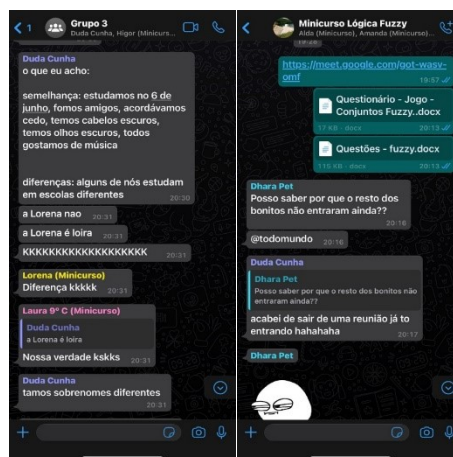
Para finalizar, um SBRF similar foi elaborado na plataforma Arduino utilizando a placa eletrônica ESP8266 na maquete 3D, podendo ser manuseado pelo *smartphone* via plataforma *Blynk* e, assim, controlar os dados das variáveis linguísticas inseridas. É importante lembrar que com a orientação do professor Dr. Carlos Eugênio Pereira, especialista em hidráulica e saneamento, considerou-se as variáveis linguísticas de entrada: idade da barragem; altura da barragem e volume da barragem. Assim, calcula-se os dados das variáveis de entrada inseridos, o risco de rompimento e o risco de vazamento dessa barragem. Por meio dos sensores utilizando a placa EPS8266 é possível controlar o rompimento e o vazamento da barragem.

Aula 10

Na experiência realizada dessa sequência didática, desenvolvida em formato de um minicurso, houve como atividade final, uma competição entre dois grupos, com a quantidade de alunos que estavam presentes, cada um com oito estudantes, acerca de cinco questões relacionadas ao conteúdo de conjuntos *fuzzy*, por intermédio de dois grupos criados no *WhatsApp* (Figura A28). Foram discutidas e resolvidas pelos grupos com bom aproveitamento de acertos.

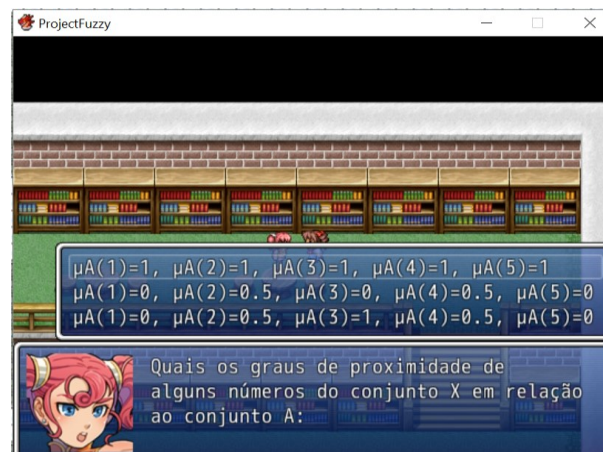
Essas questões estavam inseridas nas fases do jogo construído no *software* livre *RPG Maker* (Figura A29). Mas, devido a dificuldade de instalação, alterou-se o planejamento inicial. No ensino presencial, a atividade pode ser realizada em laboratório de informática.

Figura A28 - Grupos montados para a realização das atividades.



Fonte: Aplicativo *WhatsApp*.

Figura A29 - Imagem de um dos mapas do jogo.



Fonte: Elaborado pela autora.

Apêndice B

Software C.

```
#define FASTLED_INTERRUPT_RETRY_COUNT 0
#include <FastLED.h>
#include <PCF8574.h>
#include <Wire.h>
#include <Fuzzy.h>
#include <ESP8266WiFi.h>
#include <BlynkSimpleEsp8266.h>
#include <Servo.h>
#define FASTLED_INTERNAL
PCF8574 pcf20(0x27);
#define NUM_LEDS 1
#define DATA_PIN 12
CRGB leds[NUM_LEDS];

// You should get Auth Token in the Blynk App.
// Go to the Project Settings (nut icon).
char auth[] = "xGK0UfT5t9_DZSmeJNYXwyq1YbbPZ113";

// Your WiFi credentials.
// Set password to "" for open networks.
char ssid[] = "Mmrzzo-2.4G";
char pass[] = "y6t5r4e3w2q1";

WidgetLCD lcd(V0);
WidgetLED led1(V2);
BlynkTimer timerCalcFuzzy;
BlynkTimer timerMedeVolume;

Servo Motor_Barragem;

int altura = 0;
int volume = 0;
```



```
int idade = 0;

#define BLYNK_GREEN    "#23C48E"
#define BLYNK_BLUE     "#04C0F8"
#define BLYNK_YELLOW   "#ED9D00"
#define BLYNK_RED      "#D3435C"
#define BLYNK_DARK_BLUE "#5F7CD8"
```

```
BLYNK_WRITE(V3)
{
  Serial.println(param.asInt());
  idade = param.asInt();
  Blynk.virtualWrite(V5, idade);
  //Fuzzy_Calc();
  //Blynk.virtualWrite(V4, output_fuzzy);
}
```

```
BLYNK_WRITE(V1)
{
  Serial.println(param.asInt());
  altura = param.asInt();
  Blynk.virtualWrite(V4, altura);
  //Fuzzy_Calc();
  //Blynk.virtualWrite(V4, output_fuzzy);
}
```

```
//BLYNK_WRITE(V2)
//{
//  Serial.println(param.asInt());
//  volume = param.asInt();
//  Blynk.virtualWrite(V7, volume);
//  //Fuzzy_Calc();
//  //Blynk.virtualWrite(V4, output_fuzzy);
//}
```

```

// Fuzzy
Fuzzy *fuzzy = new Fuzzy();

// FuzzyInput idadedabarragem
FuzzySet *idadenova = new FuzzySet(0.0, 0.0, 5.0, 20.0);
FuzzySet *idademedia = new FuzzySet(10.0, 20.0, 40.0, 50.0);
FuzzySet *idadevelha = new FuzzySet(40.0, 55.0, 60.0, 60.0);

// FuzzyInput alturadabarragem
FuzzySet *alturabaixa = new FuzzySet(0.0, 0.0, 1.0, 4.0);
FuzzySet *alturamedia = new FuzzySet(3.0, 4.0, 12.0, 13.0);
FuzzySet *alturaalta = new FuzzySet(12.0, 15.0, 16.0, 16.0);

// FuzzyInput volumedabarragem
FuzzySet *volumebaixo = new FuzzySet(0, 0, 750, 1500);
FuzzySet *volumemedio = new FuzzySet(1000, 1500, 3000, 3500);
FuzzySet *volumealto = new FuzzySet(3000, 3750, 4444.12, 4444.12);

// FuzzyOutput riscoderompimento
FuzzySet *riscorompimentopequeno = new FuzzySet(0, 0, 0.1, 0.3);
FuzzySet *riscorompimentomedio = new FuzzySet(0.2, 0.35, 0.65, 0.8);
FuzzySet *riscorompimentogrande = new FuzzySet(0.7, 0.9, 1, 1);

// FuzzyOutput riscodevazamento
FuzzySet *riscovazamentobaixo = new FuzzySet(0, 0, 0.13, 0.3);
FuzzySet *riscovazamentomedio = new FuzzySet(0.2, 0.4, 0.75, 0.9);
FuzzySet *riscovazamentoalto = new FuzzySet(0.8, 0.99, 1, 1);

void setup()
{
// FuzzyInput
FuzzyInput *idadedabarragem = new FuzzyInput(1);

```

```

idadedabarragem->addFuzzySet(idadenova);
idadedabarragem->addFuzzySet(idademedia);
idadedabarragem->addFuzzySet(idadevelha);
fuzzy->addFuzzyInput(idadedabarragem);

// FuzzyInput
FuzzyInput *alturadabarragem = new FuzzyInput(2);

alturadabarragem->addFuzzySet(alturabaixa);
alturadabarragem->addFuzzySet(alturamedia);
alturadabarragem->addFuzzySet(alturaalta);
fuzzy->addFuzzyInput(alturadabarragem);
// FuzzyInput
FuzzyInput *volumedabarragem = new FuzzyInput(3);

volumedabarragem->addFuzzySet(volumebaixo);
volumedabarragem->addFuzzySet(volumemedio);
volumedabarragem->addFuzzySet(volumealto);
fuzzy->addFuzzyInput(volumedabarragem);

// FuzzyOutput
FuzzyOutput *riscoderompimento = new FuzzyOutput(1);

riscoderompimento->addFuzzySet(riscorompimentopequeno);
riscoderompimento->addFuzzySet(riscorompimentomedio);
riscoderompimento->addFuzzySet(riscorompimentogrande);
fuzzy->addFuzzyOutput(riscoderompimento);

FuzzyOutput *riscodevazamento = new FuzzyOutput(2);

riscodevazamento->addFuzzySet(riscovazamentobaixo);
riscodevazamento->addFuzzySet(riscovazamentomedio);
riscodevazamento->addFuzzySet(riscovazamentoalto);
fuzzy->addFuzzyOutput(riscodevazamento);

```

```
// Building FuzzyRule1-----
```

```
FuzzyRuleAntecedent *Nova_Baixa1 = new FuzzyRuleAntecedent();
```

```
Nova_Baixa1->joinWithAND(idadenova, alturabaixa);
```

```
FuzzyRuleAntecedent *ifNova_Baixa_Baixo1 = new FuzzyRuleAntecedent();
```

```
ifNova_Baixa_Baixo1->joinWithAND(Nova_Baixa1, volumebaixo);
```

```
FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoBaixo1 = new  
FuzzyRuleConsequent();
```

```
thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoBaixo1-
```

```
>addOutput(riscorompimentopequeno);
```

```
thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoBaixo1->addOutput(riscovazamentobaixo);
```

```
FuzzyRule *fuzzyRule1 = new FuzzyRule(1, ifNova_Baixa_Baixo1,  
thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoBaixo1);
```

```
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule1);
```

```
// Building FuzzyRule2-----
```

```
FuzzyRuleAntecedent *Nova_Baixa2 = new FuzzyRuleAntecedent();
```

```
Nova_Baixa2->joinWithAND(idadenova, alturabaixa);
```

```
FuzzyRuleAntecedent *ifNova_Baixa_Medio2 = new FuzzyRuleAntecedent();
```

```
ifNova_Baixa_Medio2->joinWithAND(Nova_Baixa2, volumemedio);
```

```
FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoAlto2 = new  
FuzzyRuleConsequent();
```

```
thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoAlto2-
```

```
>addOutput(riscorompimentopequeno);
```

```
thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoAlto2->addOutput(riscovazamentobaixo);
```

```
FuzzyRule *fuzzyRule2 = new FuzzyRule(2, ifNova_Baixa_Medio2,  
thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoAlto2);
```

```
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule2);
```

```
// Building FuzzyRule3-----
```

```
FuzzyRuleAntecedent *Nova_Baixa3 = new FuzzyRuleAntecedent();
```

```
Nova_Baixa3->joinWithAND(idadenova, alturabaixa);
```

```
FuzzyRuleAntecedent *ifNova_Baixa_Alto3 = new FuzzyRuleAntecedent();
```

```
ifNova_Baixa_Alto3->joinWithAND(Nova_Baixa3, volumealto);
```

```
FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoAlto3 = new  
FuzzyRuleConsequent();
```

```
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoAlto3-
```

```
>addOutput(riscorompimentopequeno);
```

```
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoAlto3->addOutput(riscovazamentobaixo);
```

```
FuzzyRule *fuzzyRule3 = new FuzzyRule(3, ifNova_Baixa_Alto3,  
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoAlto3);
```

```
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule3);
```

```
// Building FuzzyRule4-----
```

```
FuzzyRuleAntecedent *Nova_Media4 = new FuzzyRuleAntecedent();
```

```
Nova_Media4->joinWithAND(idadenova, alturamedia);
```

```
FuzzyRuleAntecedent *ifNova_Media_baixo4 = new FuzzyRuleAntecedent();
```

```
ifNova_Media_baixo4->joinWithAND(Nova_Media4, volumebaixo);
```

```
FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo4 = new  
FuzzyRuleConsequent();
```

```
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo4-
```

```
>addOutput(riscorompimentopequeno);
```

```
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo4->addOutput(riscovazamentobaixo);
```

```
FuzzyRule *fuzzyRule4 = new FuzzyRule(4, ifNova_Media_baixo4,  
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo4);
```

```
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule4);
```

```
//Building FuzzyRule5-----
```

```
FuzzyRuleAntecedent *Nova_Media5 = new FuzzyRuleAntecedent();  
Nova_Media5->joinWithAND(idadenova, alturamedia);  
FuzzyRuleAntecedent *ifNova_Media_Medio5 = new FuzzyRuleAntecedent();  
ifNova_Media_Medio5->joinWithAND(Nova_Media5, volumemedio);
```

```
FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoBaixo5 = new  
FuzzyRuleConsequent();  
thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoBaixo5-  
>addOutput(riscorompimentopequeno);  
thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoBaixo5->addOutput(riscovazamentobaixo);
```

```
FuzzyRule *fuzzyRule5 = new FuzzyRule(5, ifNova_Media_Medio5,  
thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoBaixo5);  
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule5);
```

```
// Building FuzzyRule6-----
```

```
FuzzyRuleAntecedent *Nova_Media6 = new FuzzyRuleAntecedent();  
Nova_Media6->joinWithAND(idadenova, alturamedia);  
FuzzyRuleAntecedent *ifNova_Media_Alto6 = new FuzzyRuleAntecedent();  
ifNova_Media_Alto6->joinWithAND(Nova_Media5, volumealto);
```

```
FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoAlto6 = new  
FuzzyRuleConsequent();  
thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoAlto6-  
>addOutput(riscorompimentopequeno);  
thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoAlto6->addOutput(riscovazamentobaixo);
```

```
FuzzyRule *fuzzyRule6 = new FuzzyRule(6, ifNova_Media_Alto6,  
thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoAlto6);  
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule6);
```

```
// Building FuzzyRule7-----
```

```
FuzzyRuleAntecedent *Nova_Alta7 = new FuzzyRuleAntecedent();
```

```
Nova_Alta7->joinWithAND(idadenova, alturaalta);
```

```
FuzzyRuleAntecedent *ifNova_Alta_Baixo7 = new FuzzyRuleAntecedent();
```

```
ifNova_Alta_Baixo7->joinWithAND(Nova_Alta7, volumebaixo);
```

```
FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo7 = new  
FuzzyRuleConsequent();
```

```
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo7-
```

```
>addOutput(riscorompimentopequeno);
```

```
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo7->addOutput(riscovazamentobaixo);
```

```
FuzzyRule *fuzzyRule7 = new FuzzyRule(7, ifNova_Alta_Baixo7,  
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo7);
```

```
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule7);
```

```
// Building FuzzyRule8-----
```

```
FuzzyRuleAntecedent *Nova_Alta8 = new FuzzyRuleAntecedent();
```

```
Nova_Alta8->joinWithAND(idadenova, alturaalta);
```

```
FuzzyRuleAntecedent *ifNova_Alta_Medio8 = new FuzzyRuleAntecedent();
```

```
ifNova_Alta_Medio8->joinWithAND(Nova_Alta8, volumemedio);
```

```
FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo8 = new  
FuzzyRuleConsequent();
```

```
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo8-
```

```
>addOutput(riscorompimentopequeno);
```

```
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo8->addOutput(riscovazamentobaixo);
```

```
FuzzyRule *fuzzyRule8 = new FuzzyRule(8, ifNova_Alta_Medio8,  
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo8);
```

```
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule8);
```

```

// Building FuzzyRule9-----

FuzzyRuleAntecedent *Nova_Alta9 = new FuzzyRuleAntecedent();
Nova_Alta9->joinWithAND(idadenova, alturaalta);
FuzzyRuleAntecedent *ifNova_Alta_Alto9 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifNova_Alta_Alto9->joinWithAND(Nova_Alta9, volumealto);

FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoBaixo9 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoBaixo9-
>addOutput(riscorompimentopequeno);
thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoBaixo9->addOutput(riscovazamentobaixo);

FuzzyRule *fuzzyRule9 = new FuzzyRule(9, ifNova_Alta_Alto9,
thenRiscoRompimentoPequenoeVazamentoBaixo9);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule9);

// Building FuzzyRule10-----

FuzzyRuleAntecedent *Media_Baixa10 = new FuzzyRuleAntecedent();
Media_Baixa10->joinWithAND(idademedias, alturabaixa);
FuzzyRuleAntecedent *ifMedia_Baixa_Baixo10 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifMedia_Baixa_Baixo10->joinWithAND(Media_Baixa10, volumebaixo);

FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo10 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo10->addOutput(riscorompimentomedio);
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo10->addOutput(riscovazamentobaixo);

FuzzyRule *fuzzyRule10 = new FuzzyRule(10, ifMedia_Baixa_Baixo10,
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo10);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule10);

```



```

// Building FuzzyRule11-----

FuzzyRuleAntecedent *Media_Baixa11 = new FuzzyRuleAntecedent();
Media_Baixa11->joinWithAND(idademedias, alturabaixa);
FuzzyRuleAntecedent *ifMedia_Baixa_Medio11 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifMedia_Baixa_Medio11->joinWithAND(Media_Baixa11, volumemedio);

FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio11 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio11->addOutput(riscorompimentomedio);
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio11->addOutput(riscovazamentomedio);

FuzzyRule *fuzzyRule11 = new FuzzyRule(11, ifMedia_Baixa_Medio11,
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio11);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule11);

// Building FuzzyRule12-----

FuzzyRuleAntecedent *Media_Baixa12 = new FuzzyRuleAntecedent();
Media_Baixa12->joinWithAND(idademedias, alturabaixa);
FuzzyRuleAntecedent *ifMedia_Baixa_Alto12 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifMedia_Baixa_Alto12->joinWithAND(Media_Baixa12, volumealto);

FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio12 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio12->addOutput(riscorompimentomedio);
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio12->addOutput(riscovazamentomedio);

FuzzyRule *fuzzyRule12 = new FuzzyRule(12, ifMedia_Baixa_Alto12,
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio12);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule12);

// Building FuzzyRule13-----

```

```

FuzzyRuleAntecedent *Media_Media13 = new FuzzyRuleAntecedent();
Media_Media13->joinWithAND(idademedias, alturamedias);
FuzzyRuleAntecedent *ifMedia_Media_Baixo13 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifMedia_Media_Baixo13->joinWithAND(Media_Media13, volumebaixo);

FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo13 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo13-
>addOutput(riscorompimentopequeno);
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo13->addOutput(riscovazamentobaixo);

FuzzyRule *fuzzyRule13 = new FuzzyRule(13, ifMedia_Media_Baixo13,
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo13);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule13);

// Building FuzzyRule14-----

FuzzyRuleAntecedent *Media_Media14 = new FuzzyRuleAntecedent();
Media_Media14->joinWithAND(idademedias, alturamedias);
FuzzyRuleAntecedent *ifMedia_Media_Medio14 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifMedia_Media_Medio14->joinWithAND(Media_Media14, volumemedio);

FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo14 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo14-
>addOutput(riscorompimentopequeno);
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo14->addOutput(riscovazamentobaixo);

FuzzyRule *fuzzyRule14 = new FuzzyRule(14, ifMedia_Media_Medio14,
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo14);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule14);

// Building FuzzyRule15-----

```

```

FuzzyRuleAntecedent *Media_Media15 = new FuzzyRuleAntecedent();
Media_Media15->joinWithAND(idademedias, alturamedias);
FuzzyRuleAntecedent *ifMedia_Media_Alto15 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifMedia_Media_Alto15->joinWithAND(Media_Media15, volumealto);

FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio15 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio15->addOutput(riscorompimentomedio);
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio15->addOutput(riscovazamentomedio);

FuzzyRule *fuzzyRule15 = new FuzzyRule(15, ifMedia_Media_Alto15,
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio15);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule15);

// Building FuzzyRule16-----

FuzzyRuleAntecedent *Media_Alta16 = new FuzzyRuleAntecedent();
Media_Alta16->joinWithAND(idademedias, alturaalta);
FuzzyRuleAntecedent *ifMedia_Alta_Baixo16 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifMedia_Alta_Baixo16->joinWithAND(Media_Alta16, volumebaixo);

FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo16 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo16-
>addOutput(riscorompimentopequeno);
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo16->addOutput(riscovazamentobaixo);

FuzzyRule *fuzzyRule16 = new FuzzyRule(16, ifMedia_Alta_Baixo16 ,
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo16);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule16);

// Building FuzzyRule17-----

FuzzyRuleAntecedent *Media_Alta17 = new FuzzyRuleAntecedent();

```

```

Media_Alta17->joinWithAND(idademedias, alturaalta);
FuzzyRuleAntecedent *ifMedia_Alta_Medio17 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifMedia_Alta_Medio17->joinWithAND(Media_Alta17, volumemedio);

FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo17 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo17-
>addOutput(riscorompimentomedio);
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo17->addOutput(riscovazamentobaixo);

FuzzyRule *fuzzyRule17 = new FuzzyRule(17, ifMedia_Alta_Medio17 ,
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo17);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule17);

// Building FuzzyRule18

FuzzyRuleAntecedent *Media_Alta18 = new FuzzyRuleAntecedent();
Media_Alta18->joinWithAND(idademedias, alturaalta);
FuzzyRuleAntecedent *ifMedia_Alta_Alto18 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifMedia_Alta_Alto18->joinWithAND(Media_Alta18, volumealto);

FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoMedioVazamentoBaixo18 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoMedioVazamentoBaixo18->addOutput(riscorompimentomedio);
thenRiscoRompimentoMedioVazamentoBaixo18->addOutput(riscovazamentobaixo);

FuzzyRule *fuzzyRule18 = new FuzzyRule(18, ifMedia_Alta_Alto18 ,
thenRiscoRompimentoMedioVazamentoBaixo18);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule18);

// Building FuzzyRule19

FuzzyRuleAntecedent *Velha_Baixa19 = new FuzzyRuleAntecedent();

```

```

Velha_Baixa19->joinWithAND(idadevelha, alturabaixa);
FuzzyRuleAntecedent *ifVelha_Baixa_Baixo19 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifVelha_Baixa_Baixo19->joinWithAND(Velha_Baixa19, volumebaixo);

FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo19 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo19-
>addOutput(riscorompimentopequeno);
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo19->addOutput(riscovazamentobaixo);

FuzzyRule *fuzzyRule19 = new FuzzyRule(19, ifVelha_Baixa_Baixo19 ,
thenRiscoRompimentoPequenoVazamentoBaixo19);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule19);

// Building FuzzyRule20

FuzzyRuleAntecedent *Velha_Baixa20 = new FuzzyRuleAntecedent();
Velha_Baixa20->joinWithAND(idadevelha, alturabaixa);
FuzzyRuleAntecedent *ifVelha_Baixa_Medio20 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifVelha_Baixa_Medio20->joinWithAND(Velha_Baixa20, volumemedio);

FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoMedioVazamentoMedio20 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoMedioVazamentoMedio20->addOutput(riscorompimentomedio);
thenRiscoRompimentoMedioVazamentoMedio20->addOutput(riscovazamentomedio);

FuzzyRule *fuzzyRule20 = new FuzzyRule(20, ifVelha_Baixa_Medio20 ,
thenRiscoRompimentoMedioVazamentoMedio20);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule20);

// Building FuzzyRule21

FuzzyRuleAntecedent *Velha_Baixa21 = new FuzzyRuleAntecedent();
Velha_Baixa21->joinWithAND(idadevelha, alturabaixa);

```

```
FuzzyRuleAntecedent *ifVelha_Baixa_Alto21 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifVelha_Baixa_Alto21->joinWithAND(Velha_Baixa21, volumealto);
```

```
FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoGrandeeVazamentoAlto21 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoGrandeeVazamentoAlto21->addOutput(riscorompimentogrande);
thenRiscoRompimentoGrandeeVazamentoAlto21->addOutput(riscovazamentoalto);
```

```
FuzzyRule *fuzzyRule21 = new FuzzyRule(21, ifVelha_Baixa_Alto21 ,
thenRiscoRompimentoGrandeeVazamentoAlto21);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule21);
```

```
// Building FuzzyRule22
```

```
FuzzyRuleAntecedent *Velha_Media22 = new FuzzyRuleAntecedent();
Velha_Media22->joinWithAND(idadevelha, alturamedia);
FuzzyRuleAntecedent *ifVelha_Media_Baixo22 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifVelha_Media_Baixo22->joinWithAND(Velha_Media22, volumebaixo);
```

```
FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo22 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo22->addOutput(riscorompimentomedio);
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo22->addOutput(riscovazamentobaixo);
```

```
FuzzyRule *fuzzyRule22 = new FuzzyRule(22, ifVelha_Media_Baixo22 ,
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo22);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule22);
```

```
// Building FuzzyRule23
```

```
FuzzyRuleAntecedent *Velha_Media23 = new FuzzyRuleAntecedent();
Velha_Media23->joinWithAND(idadevelha, alturamedia);
FuzzyRuleAntecedent *ifVelha_Media_Medio23 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifVelha_Media_Medio23->joinWithAND(Velha_Media23, volumemedio);
```

```
FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo23 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo23->addOutput(riscorompimentomedio);
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo23->addOutput(riscovazamentobaixo);
```

```
FuzzyRule *fuzzyRule23 = new FuzzyRule(23, ifVelha_Media_Medio23 ,
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo23);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule23);
```

```
// Building FuzzyRule24
```

```
FuzzyRuleAntecedent *Velha_Media24 = new FuzzyRuleAntecedent();
Velha_Media24->joinWithAND(idadevelha, alturamedia);
FuzzyRuleAntecedent *ifVelha_Media_Alto24 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifVelha_Media_Alto24->joinWithAND(Velha_Media24, volumealto);
```

```
FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio24 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio24->addOutput(riscorompimentomedio);
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio24->addOutput(riscovazamentomedio);
```

```
FuzzyRule *fuzzyRule24 = new FuzzyRule(24, ifVelha_Media_Alto24 ,
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoMedio24);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule24);
```

```
// Building FuzzyRule25
```

```
FuzzyRuleAntecedent *Velha_Alta25 = new FuzzyRuleAntecedent();
Velha_Alta25->joinWithAND(idadevelha, alturaalta);
FuzzyRuleAntecedent *ifVelha_Alta_Baixo25 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifVelha_Alta_Baixo25->joinWithAND(Velha_Alta25, volumebaixo);
```

```
FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo25 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo25->addOutput(riscorompimentomedio);
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo25->addOutput(riscovazamentobaixo);
```

```
FuzzyRule *fuzzyRule25 = new FuzzyRule(25, ifVelha_Alta_Baixo25 ,
thenRiscoRompimentoMedioeVazamentoBaixo25);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule25);
```

```
// Building FuzzyRule26
```

```
FuzzyRuleAntecedent *Velha_Alta26 = new FuzzyRuleAntecedent();
Velha_Alta26->joinWithAND(idadevelha, alturaalta);
FuzzyRuleAntecedent *ifVelha_Alta_Medio26 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifVelha_Alta_Medio26->joinWithAND(Velha_Alta26, volumemedio);
```

```
FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoGrandeVazamentoBaixo26 = new
FuzzyRuleConsequent();
thenRiscoRompimentoGrandeVazamentoBaixo26-
>addOutput(riscorompimentogrande);
thenRiscoRompimentoGrandeVazamentoBaixo26->addOutput(riscovazamentobaixo);
```

```
FuzzyRule *fuzzyRule26 = new FuzzyRule(26, ifVelha_Alta_Medio26 ,
thenRiscoRompimentoGrandeVazamentoBaixo26);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule26);
```

```
// Building FuzzyRule27
```

```
FuzzyRuleAntecedent *Velha_Alta27 = new FuzzyRuleAntecedent();
Velha_Alta27->joinWithAND(idadevelha, alturaalta);
FuzzyRuleAntecedent *ifVelha_Alta_Alto27 = new FuzzyRuleAntecedent();
ifVelha_Alta_Alto27->joinWithAND(Velha_Alta27, volumealto);
```



```

FuzzyRuleConsequent *thenRiscoRompimentoGrandeVazamentoBaixo27 = new
FuzzyRuleConsequent();
  thenRiscoRompimentoGrandeVazamentoBaixo27-
>addOutput(riscorompimentogrande);
  thenRiscoRompimentoGrandeVazamentoBaixo27->addOutput(riscovazamentobaixo);

FuzzyRule *fuzzyRule27 = new FuzzyRule(27, ifVelha_Alta_Alto27 ,
thenRiscoRompimentoGrandeVazamentoBaixo27);
fuzzy->addFuzzyRule(fuzzyRule27);

Serial.begin(9600);
randomSeed(analogRead(0));

Motor_Barragem.attach(D5); //14
Motor_Barragem.write(0);

FastLED.addLeds<NEOPIXEL, DATA_PIN>(leds, NUM_LEDS);

Blynk.begin(auth, ssid, pass);

pcf20.begin();

idade = 0;
altura = 0;
volume = 0;

Blynk.virtualWrite(V5, idade);
Blynk.virtualWrite(V6, altura);
//Blynk.virtualWrite(V7, volume);
timerCalcFuzzy.setInterval(2000L, Fuzzy_Calc);
timerMedeVolume.setInterval(2000L, Mede_Volume);

leds[0] = CRGB::Green;

```

```

FastLED.show();
delay(1000);

lcd.clear();
lcd.print(4, 0, "Risco de Rompimento:");
lcd.print(4, 1, "");
led1.setColor(BLYNK_GREEN);
led1.on();

}

void loop()
{
  Blynk.run();

  timerCalcFuzzy.run();
  timerMedeVolume.run();

  // wait 0.5 seconds
  delay(500);

}

void Mede_Volume(){
  Serial.println(pcf20.read8());
  int val = pcf20.read8();
  switch (val) {
    case 0: // your hand is on the sensor

    volume = 0;
    break;
    case 1: // your hand is close to the sensor
    volume = 831.05;
    break;

```

```
case 3: // your hand is a few inches from the sensor
  volume = 1662.1;
  break;
case 7: // your hand is nowhere near the sensor
  volume = 2290.62;
  break;
case 15: // your hand is nowhere near the sensor
  volume = 2919.14;
  break;
case 31: // your hand is nowhere near the sensor
  volume = 3373.39;
  break;
case 63: // your hand is nowhere near the sensor
  volume = 3827.64;
  break;
case 127: // your hand is nowhere near the sensor
  volume = 4135.88;
  break;
case 255: // your hand is nowhere near the sensor
  volume = 4444.12;
  break;
default:
  volume = 0;
  break;
}
```

```
Blynk.virtualWrite(V6, volume);
```

```
Serial.println(volume);
```

```
Serial.println("-----");
```

```
}
```

```
void Fuzzy_Calc() {
```

```

int i=0;
Serial.println("\n\n\nEntradas: ");
Serial.print("\t\t\tIdade da Barragem: ");
Serial.print(idade);
Serial.print(", Altura da Barragem: ");
Serial.print(altura);
Serial.print(", e Volume da Barragem: ");
Serial.println(volume);

fuzzy->setInput(1,idade);
fuzzy->setInput(2,altura);
fuzzy->setInput(3,volume);

fuzzy->fuzzify();

for(i=1;i<28;i++){
    Serial.print(i);
    Serial.print('-');
    Serial.println(fuzzy->isFiredRule(i));
}

Serial.print(fuzzy->isFiredRule(17));
Serial.println("Idade: ");
Serial.print("\t\t\tIdade: Nova-> ");
Serial.print(idadenova->getPertinence());
Serial.print(", Media-> ");
Serial.print(idademediamedia->getPertinence());
Serial.print(", Velha-> ");
Serial.println(idadevelha->getPertinence());
Serial.print("\t\t\tAltura: Baixa-> ");
Serial.print(alturabaixa->getPertinence());
Serial.print(", Media-> ");
Serial.print(alturamedia->getPertinence());
Serial.print(", Alta-> ");

```

```
Serial.println(alturaalta->getPertinence());
```

```
Serial.print("\tVolume: Baixo-> ");
```

```
Serial.print(volumebaixo->getPertinence());
```

```
Serial.print(", Medio-> ");
```

```
Serial.print(volumemedio->getPertinence());
```

```
Serial.print(", Alto-> ");
```

```
Serial.println(volumealto->getPertinence());
```

```
float output1 = fuzzy->defuzzify(1);
```

```
float output2 = fuzzy->defuzzify(2);
```

```
Serial.println("Saída: ");
```

```
Serial.print("\tRisco Rompimento: Baixo-> ");
```

```
Serial.print(riscorompimentopequeno->getPertinence());
```

```
Serial.print(", Medio-> ");
```

```
Serial.print(riscorompimentomedio->getPertinence());
```

```
Serial.print(", Alto-> ");
```

```
Serial.println(riscorompimentogrande->getPertinence());
```

```
Serial.print("\tRisco Vazamento: Baixo-> ");
```

```
Serial.print(riscovazamentobaixo->getPertinence());
```

```
Serial.print(", Medio-> ");
```

```
Serial.print(riscovazamentomedio->getPertinence());
```

```
Serial.print(", Alto-> ");
```

```
Serial.println(riscovazamentoalto->getPertinence());
```

```
lcd.clear(); //Use it to clear the LCD Widget
```

```
lcd.print(0, 0, "Risco de Romper:"); // use: (position X: 0-15, position Y: 0-1, "Message  
you want to print")
```

```
lcd.print(6, 1, String(output1));
```

```
if(output1 >=0 && output1 <=0.3){
```

```

Motor_Barragem.write(0);
leds[0] = CRGB::Green;
FastLED.show();
led1.setColor(BLYNK_GREEN);
}
if( output1 >0.3 && output1 <=0.7){
    Motor_Barragem.write(0);
    leds[0] = CRGB::Yellow;
    FastLED.show();
    led1.setColor(BLYNK_YELLOW);
}
if( output1 >0.7 && output1 <=1.5){
    Motor_Barragem.write(0);
    leds[0] = CRGB::Red;
    FastLED.show();
    led1.setColor(BLYNK_RED);
}
Serial.println("Resultado: ");
Serial.print("\t\tRisco Rompimento: ");
Serial.print(output1);
Serial.print("\t\tRisco Vazamento: ");
Serial.print(output2);
}

```