UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Faculdade de Matemática
Av. João Naves de Àvila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: +55 (34) 3239-4158/4156/4126 - www.famat.ufu.br - famat@ufu.br

ATA DE DEFESA - GRADUAÇÃO

Curso de Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Trabalho de Conclusão de Curso 2 (GMA031)				
Data:	25/03/2022	Hora de início:	08h30min	Hora de encerramento:	09h52min
Matrícula do discente	11521MAT013				
Nome do Discente:	Leonardo Alves Borges Nunes				
Título do Trabalho:	Funções aritméticas e teoremas elementares na distribuição dos números primos.				
A carga horária curricular foi cumprida integralmente?	(x) Sim ( ) Não				

Em função da pandemia mundial e da DECISÃO DO COMITÊ DE MONITORAMENTO À COVID-19/UFU, DE 16 DE MARÇO DE 2020 a respeito da suspensão de aulas e atividades acadêmicas da UFU a partir de 18 de março de 2020, a defesa de Trabalho de Conclusão de Curso ocorreu virtualmente através da plataforma Microsoft Teams, presente no Office 365 Educacional e disponibilizado de forma gratuita pela Microsoft para toda comunidade da UFU.

A Banca Examinadora assim composta pelos Professores: Dr. Josimar João Ramirez Aguirre – FAMAT/UFU, Dr. Ariosvaldo Marques Jatobá – FAMAT/UFU e Dr. Victor Gonzalo Lopez Neumann – FAMAT/UFU, orientador(a) do(a) candidato(a), orientador(a) do(a) candidato(a), reuni-se via webconferência no horário previsto.

Iniciando os trabalhos, o(a) presidente da mesa, Prof. Dr. Victor Gonzalo Lopez Neumann, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato(a), agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra, para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do curso.

A seguir o(a) senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

(X) Aprovado(a) Nota [80] (Somente números inteiros)

OU

( ) Aprovado(a) sem nota.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Ariosvaldo Marques Jatoba**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 07/04/2022, às 19:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Josimar João Ramirez Aguirre**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 07/04/2022, às 19:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Victor Gonzalo Lopez Neumann**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 07/04/2022, às 19:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3507930** e o código CRC **DF8E1C70**.

Referência: Processo nº 23117.000257/2022-73 SEI nº 3507930

Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Matemática

Funções aritméticas e teoremas elementares na distribuição dos números primos

Leonardo Alves Borges Nunes
Orientando

Victor Gonzalo Lopez Neumann
Orientador

Uberlândia - MG

2022

Leonardo Alves Borges Nunes

Funções aritméticas e teoremas elementares na distribuição dos números primos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Uberlândia (UFU), como parte das exigências para a obtenção do título de licenciatura em Matemática.

Orientador: Victor Gonzalo Lopez Neumann.

Uberlândia

2022

Leonardo Alves Borges Nunes

Funções aritméticas e teoremas elementares na distribuição dos números primos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Uberlândia (UFU), como parte das exigências para a obtenção do título de licenciatura em Matemática.

Uberlândia, ____de____________de______

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Victor Gonzalo Lopez Neumann
Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

Prof. Dr. Ariosvaldo Jatobá
Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

Prof. Dr. Josimar João Ramirez Aguirre
Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

Uberlândia

2022

Agradecimentos

Agradeço grandemente e eternamente à Deus primeiramente por tudo, pela saúde, pela vida e força de vontade para os momentos difíceis enfrentados.

Aos meus amados pais, Arizontina Alves e Waldir Borges, que sempre me incentivaram.

À minha esposa, Ana Paula, pela compreensão com minha ausência consequente das muitas horas de estudos e pesquisa e aos meus filhos que solidificam a base da minha família.

Aos colegas da Graduação pelos momentos partilhados nesse período. Ao ilustríssimo orientador professor Dr. Victor Gonzalo Lopez Neumman, o qual tem me auxiliado e orientado em toda trajetória do presente trabalho de conclusão de curso, por toda paciência e disposição e que ao longo do curso de matemática também tem sido muito muito amigo e conselheiro.

Agradeço também a todas as outras pessoas que fizeram parte dessa jornada como amigos de sala, amigos casuais, conhecidos e professores em geral.

"Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação."

(Carl Friedrich Gauss)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo de funções aritméticas e estudo de teoremas elementares acerca da distribuição dos números primos no qual, primeiramente serão definidas as funções aritméticas e o produto de Dirichlet, a função de Euler, função de Möbius e sua inversa, relações entre as funções, dentre outros. Logo, serão estudados as médias de funções aritméticas, passando pela fórmula de soma de Euler, fórmulas assintóticas e ordem média de algumas funções. Por fim, será visto alguns teoremas elementares sobre a distribuição de números primos, funções de Chebysshev e formas equivalentes do teorema dos números primos, Teorema tauberiano de Shapiro e aplicações e somas parciais da função de Möbius.

Palavras-chave: Funções Aritméticas, Produto de Dirichlet, Função de Möbius, Função de Euler, Função de Mangoldt, Funções de Chebyshev, Funções multiplicativas.

Abstract

This work aims at the study of arithmetic functions and the study of elementary theorems about the distribution of numbers. primes in which, first, the arithmetic functions and the Dirichlet product, the Euler function, Möbius function and its inverse, relations between functions, among others. Soon they will be studied the averages of arithmetic functions, passing through the Euler sum formula, asymptotic formulas and the average order of some functions. Finally, some elementary theorems about the distribution of prime numbers, Chebysshev functions and equivalent forms of the prime number theorem, Shapiro's Tauberian theorem and applications and partial sums of the Möbius function will be discussed.

Keywords: Arithmetic Functions, Dirichlet Product, Möbius Function, Euler Function, Mangoldt Function, Chebyshev Functions, Multiplicative Functions.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Este trabalho visa o estudo de funções aritméticas bem como teoremas elementares na distribuição dos números primos, funções de Euler, Möbius, Mangoldt, produto de dirichlet, dentre outros serão abordados no capítulo 1 e 2. Sobre a distribuição dos números primos, Euclides de Alexandria (300 a.C.) provou que existem infinitos números primos. Isso já significa que por maior que seja um número natural, haverá algum número primo "perto". A partir daí, foi produzida muita matemática na tentativa de se determinar algo concreto a respeito da distribuição dos números primos dentro do conjunto dos números naturais. Gauss (1777 - 1855) e Legendre (1752 - 1833) conjecturaram no final do século XVIII e Jacques Hadamard (1865 - 1963) e Charles Jean de la Vallé Poussin (1866 - 1962) provaram no final do século XIX que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/ln(x)} = 1$$

O fato acima é conhecido como Teorema dos números primos. A função $\pi(x)$ é definida como sendo a quantidade de números primos no intervalo $[2, x]$ e $ln(x)$ é o logaritmo natural de x.

O limite acima mostra que a função $\pi(x)$ fica tão próxima de $x/ln(x)$ quanto se deseja, bastando que se tome valores de x suficientemente em intervalos grandes. Em outras palavras, estudar o comportamento de $x/ln(x)$ é compreender de forma aproximada a distribuição de números primos em intervalos grandes.

A quantidade de números primos cresce à medida em que avaliamos números naturais cada vez maiores.

A frequência com a qual os números primos aparecem vai ficando menor à medida que avaliamos números naturais cada vez maiores.

Ao que parece, a distribuição de números primos no conjunto dos números naturais é bem irregular. Imagine um número natural qualquer n. Seja agora o número natural $n! = n.(n-1).(n-2)....3.2.1$. Esse número é composto, já que pode ser divisível por todos os números naturais entre 2 e n. Agora imagine os números consecutivos $n!, n!+1, n!+2, n!+3, \ldots n!+n$. Todos esses números são compostos também. Ou seja, você pode construir um deserto de primos tomando um valor de n suficientemente grande.

Capítulo 1

Funções aritméticas e Produto de Dirichlet

INTRODUÇÃO

Em teoria dos números assim como em muitas outras áreas da matemática, é frequente a preocupação com sequências de números reais ou complexos. Na teoria dos números tais sequências são chamadas de funções aritméticas.

Definição 1.0.1. *Uma função real ou complexa válida definida sobre os inteiros positivos é chamada de função aritmética.*

Este capítulo apresenta várias funções aritméticas que desempenham um papel importante no estudo das propriedades de divisibilidade de inteiros e na distribuição de primos. O capítulo também discute a multiplicação de Dirichlet, um conceito que ajuda a esclarecer as inter-relações entre várias funções aritméticas.

Começaremos com dois exemplos importantes: A função de Möbius $\mu(n)$ e a função totiente de Euler $\varphi(n)$.

1.1 Função de Möbius $\mu(n)$

Definição 1.1.1. *A função de Möbius μ é definida como : $\mu(1) = 1$.*

Se $n > 1$ escrevemos a sequência: $n = p_1^{\alpha_1}, \dots, p_k^{\alpha_k}$ a fatoração de n em produto de primos distintos. Definimos:

$$\mu(n) = (-1)^k \quad \textit{se} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 1$$

$$\mu(n) = 0 \quad \textit{caso haja algum primo } p \textit{ tal que } p^2 \mid n$$

Temos assim abaixo alguns valores para $\mu(n)$:

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n):$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

A função de Möbius aparece em diversas áreas da teoria dos números e uma das propriedades fundamentais seria a fórmula da soma da função de Möbius dos divisores de n. Nesta fórmula denotamos $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a n.

Teorema 1.1.1. *Se $n \geq 1$ temos:*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & se\ n = 1 \\ 0 & se\ n > 1 \end{cases} .$$

Demonstração. A fórmula é claramente verdadeira se $n = 1$.

Vamos assumir então $n > 1$ e escrevemos: $n = p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$ no somatório $\sum_{d|n} \mu(d)$ os únicos termos não zeros vem de $d = 1$ e daqueles divisores de n que são produtos de primos distintos. Assim temos: $\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p_1) + \cdots + \mu(p_k) + \mu(p_1p_2) + \cdots + \mu(p_{(k-1)}p_k) + \cdots + \mu(p_1p_2 \ldots p_k) = 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k}(-1)^k = (1-1)^k = 0.$ ∎

1.2 Função de Euler $\varphi(n)$

Definição 1.2.1. *Se $n \geq 1$ a função de Euler $\varphi(n)$ é definida como sendo a quantidade de números inteiros positivos sem exceder n e relativamente primos com n.*

Veja abaixo uma sequência de valores de $\varphi(n)$:

$$\begin{array}{rcccccccccc} n: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \varphi(n): & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 6 & 4 & 6 & 4 \end{array}$$

Do mesmo modo que para $\mu(n)$, existe uma fórmula simples para a soma dos divisores: $\sum_{d|n} \varphi(d)$ e assim temos o seguinte teorema:

Teorema 1.2.1. *Se $n \geq 1$ teremos:*

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n. \tag{1.1}$$

Demonstração. Seja o conjunto $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Vamos distribuir os inteiros de S dentro de conjuntos disjuntos como:

Para cada divisor d de n seja:

$$A(d) = \{k : (k, n) = d,\ 1 \leq k \leq n\}.$$

Isto é, $A(d)$ está composto pelos elementos $k \in S$ tais que o máximo divisor comum de k e n é d. Os conjuntos $A(d)$ formam uma coleção disjunta cuja união é S. Entretanto se $f(d)$ denota o número de inteiros em $A(d)$ temos:

$$\sum_{d|n} f(d) = n \tag{1.2}$$

Mas $(k, n) = d$ se, e somente se, $(k/d, n/d) = 1$.

Entretanto se escrevemos $q = k/d$, haverá uma correspondência um a um entre os elementos de $A(d)$ e os inteiros q satisfazendo: $0 < q \leq n/d, (q, n/d) = 1$.

A quantidade de inteiro q é $\varphi(n/d)$ e de (1.2) temos que:

$$\sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d}) = n.$$

Mas isso é equivalente a demonstrar: $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$ pois quando d percorre todos os divisores de n então n/d também. ∎

1.3 Uma relação ligando φ e μ

A função totiente de Euler está relacionado com a função de Möbius através da seguinte fórmula:

Teorema 1.3.1. *Se $n \geq 1$ temos:*

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$$

Demonstração. Veja que:

$$\left[\frac{1}{(n,m)}\right] = \begin{cases} 1 & \text{se } (n,m) = 1 \\ 0 & \text{se } (n,m) > 1 \end{cases}$$

Logo:

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(n,k)}\right]$$

Agora usamos o Teorema 1.2.1 com n substituido por (n, k) para obter:

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|(n,k)} \mu(d)$$

Para um divisor fixo d de n nós devemos somar todos k tais que $1 \leq k \leq n$. Então $k = qd$ para algum q com $1 \leq q \leq \dfrac{n}{d}$

Logo o último somatório pode ser escrito como:

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \sum_{k=1}^{n/d} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{q=1}^{n/d} 1 = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

E isso prova o teorema. ∎

1.4 A fórmula do produto para φ

O somatório para φ no Teorema 1.4.1 pode também ser expresso como o produto extendido dos divisores primos distintos de n.

Teorema 1.4.1. *Para $n \geq 1$ temos:*

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \tag{1.3}$$

Demonstração. Para $n = 1$ o produto é vazio desde que não há primos que divide 1. Por convenção um produto vazio igual à 1.

Suponha que $n > 1$ e que $p_1, \ldots, p_r$ seja os divisores primos distintos de n. O produto pode ser escrito como sendo

$$\begin{aligned} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) &= \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \\ &= 1 - \sum \frac{1}{p_i} + \sum \frac{1}{p_i p_j} - \sum \frac{1}{p_i p_j p_k} + \cdots + \frac{(-1)^r}{p_1 p_2 \cdots p_r}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde a soma $\sum 1/p_i p_j p_k$ é uma soma onde consideramos todos os produtos possíveis $p_i p_j p_k$ de fatores primos distintos de n tomados 3 a 3. Note que cada termo na direita de (1.4) é da forma $\pm 1/d$ dessa forma vemos que d é um divisor de n que é ou 1 ou um produto de primos distintos. O numerador ± 1 é exatamente $\mu(d)$. Observe que $\mu(d) = 0$, se d é divísivel pelo quadrado de qualquer p_i, vemos que o somatório em (1.3) é exatamente:

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Isso prova o teorema. ∎

Observamos que muitas propriedades de $\varphi(n)$ podem facilmente ser deduzidas da fórmula do produto. Veja alguns deles abaixo:

Teorema 1.4.2. *A função totiente de Euler satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{(\alpha-1)}$ *para todo primo p e $\alpha \geq 1$.*

(b) $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)(d/\varphi(d))$, $d = (m, n)$.

(c) $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ *se* $(m, n) = 1$.

(d) $a|b$ *implica* $\varphi(a)|\varphi(b)$.

(e) $\varphi(n)$ *é par se $n \geq 3$. Além, se n tem r fatores primos ímpares então $2^r|\varphi(n)$.*

Demonstração. Para (a) tomamos $n = p^\alpha$ em (1.3). Para a prova de (b)

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Agora, notamos que cada divisor primo de mn é ou um divisor primo de m ou de n. E aqueles primos que dividem ambos m e n também dividem (m,n). Logo:

$$\frac{\varphi(m,n)}{mn} = \prod_{p|mn}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\prod_{p|m}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\prod_{p|m}\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod_{p|mn}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} = \frac{\frac{\varphi(m)}{m}\frac{\varphi(n)}{n}}{\frac{\varphi(d)}{d}}.$$

Se $(m,n) = 1$ nessa fórmula, obtemos o resultado do caso (c).

Agora deduzimos (d) de (b) ja que se $a|b$ temos $b = ac$ para algum inteiro positivo c $1 \leq c \leq b$. Se $c = b$ então $a = 1$ e (d) é satisfeito. Entretanto, assuma $c < b$. Logo de (b) temos:

$$\varphi(b) = \varphi(ac) = \varphi(a)\varphi(c)\frac{d}{\varphi(d)} = d\varphi(a)\frac{\varphi(c)}{\varphi(d)}, \tag{1.5}$$

no qual $d = (a,c)$. Agora o resultado segue por indução em (b). Para $b = 1$ é trivial. Suponha que vale para todo inteiro menor que b. Então para c tem se $\varphi(d)|\varphi(c)$ já que $d|c$. Por isso, o membro direto em (1.5) é um múltiplo de $\varphi(a)$, o que significa que $\varphi(a)|\varphi(b)$. Isso prova (d).

Agora para (e). Se $n = 2^\alpha,\ \alpha \geq 2$, então por (a) temos: $\varphi(n) = 2^\alpha - 2^{\alpha-1} = 2^{\alpha-1}(2-1) = 2^{\alpha-1}$. Se n tem no mínimo um fator primo escrevemos:

$$\varphi(n) = n\prod_{p|n}\frac{p-1}{p} = \frac{n}{\prod_{p|n} p}\prod_{p|n}(p-1) = c(n)\prod_{p|n}(p-1),$$

no qual $c(n)$ é um inteiro. Se n possui um fator ímpar então $\prod(p-1)$ é par, logo $\varphi(n)$ é par. Além disso, cada primo ímpar p contribui com pelo menos um fator 2 para o produto $\prod_{p|n}(p-1)$. Então $2^r|\varphi(n)$ se n tem r fatores primos ímpares distintos ∎

1.5 O produto de Dirichlet

No Teorema 1.3.1 provamos que:

$$\varphi(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}.$$

O somatório à direita ocorre frequentemente na teoria dos números. Estas somas tem a seguinte forma:

$$\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Definição 1.5.1. *Quando f e g são funções aritméticas, definimos o produto de Dirichlet (ou convolução de Dirichlet) como sendo a função aritmética h definida pela equação:*

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Notação: Escrevemos $f*g$ para h e $(f*g)(n)$ para $h(n)$. O símbolo N será usado pela função aritmética dada por $N(n) = n$ para todo n. Nesta notação, o Teorema 1.3.1 pode ser colocado na forma:

$$\varphi = \mu * N.$$

O próximo teorema descreve propriedades algébricas do produto de Dirichlet.

Teorema 1.5.1. *O produto de Dirichlet é comutativo e associativo. Isto é, para várias funções aritméticas f, g, k nós temos:*

$$f * g = g * f \quad \textit{(comutatividade)}$$

$$(f * g) * k = f * (g * k) \quad \textit{(associatividade).}$$

Demonstração. Primeiramente, notamos que a definição de $f * g$ pode ser expressa como:

$$(f * g)(n) = \sum_{a \cdot b = n} f(a)f(b),$$

sendo que a e b variam ao longo de todos os inteiros positivos cujo produto é n. Isso faz com que a propriedade comutativa seja evidente. Para provar a propriedade associativa fazemos $A = g * k$ e consideramos $f * A = f * (g * k)$. Teremos:

$$\begin{aligned} (f * A)(n) &= \sum_{a \cdot d = n} f(a)A(d) = \sum_{a \cdot d = n} f(a) \sum_{b \cdot c = d} g(b)k(c) \\ &= \sum_{a \cdot b \cdot c = n} f(a)g(b)k(c). \end{aligned}$$

Do mesmo modo, se fizermos $B = f * g$ e considerar $B * k$, teremos a mesma forma para $(B * k)(n)$. Assim, $f * A = B * k$, o que significa que o produto de Dirichlet é associativo. ∎

Agora introduziremos o elemento identidade para esta multiplicação.

Definição 1.5.2. *A função aritmética I dada por:*

$$I(n) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1 & se\ n = 1, \\ 0 & se\ n > 1, \end{cases}$$

é chamada de função identidade.

Teorema 1.5.2. *Para todo f, temos que: $I * f = f * I = f$.*

Demonstração. Temos

$$(f * I)(n) = \sum_{d|n} f(d) I\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d)\left[\frac{d}{n}\right] = f(n)$$

já que $[d/n] = 0$ se $d < n$. ∎

1.6 Inversa de Dirichlet e a fórmula de inversão de Möbius.

Teorema 1.6.1. *Se f é uma função aritmética com $f(1) \neq 0$ então existe uma única função aritmética com f^{-1}, chamada inversa de Dirichlet de f, tal que:*

$$f * f^{-1} = f^{-1} * f = I \quad \textit{(identidade)}.$$

Além disso, $f^{-1}(1)$ é dada pelas fórmulas de recursão:

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}, \quad f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) \quad \textit{para } n > 1.$$

Demonstração. Dado f, devemos mostrar que a equação $(f * f^{-1})(n) = I(n)$ tem solução única para os valores da função $f^{-1}(n)$. Para $n = 1$, temos que resolver a equação:

$$(f * f^{-1})(1) = I(1)$$

que se reduz a:

$$f(1)f^{-1}(1) = 1.$$

Desde que $f(1) \neq 0$, existe uma e apenas uma solução, nomeada como $f^{-1}(1) = 1/f(1)$. Assume agora que os valores de $f^{-1}(k)$ são conhecidos para todo $k < n$. Como $(f * f^{-1})(n) = I(n)$ então para $n > 1$ temos: $0 = (f * f^{-1})(n) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{c}) f^{-1}(d)$. Como os termos $f^{-1}(d)$ são conhecidos para $d < n$, podemos isolar $f^{-1}(n)$ e obtemos

$$f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d),$$

desde que $f(1) \neq 0$. Isso estabelece a existência e unicidade de f^{-1} por indução. ∎

Observação 1.6.1. *Temos $(f * g)(1) = f(1)g(1)$. Além disso, se $f(1) \neq 0$ e $g(1) \neq 0$, daí $(f * g)(1) \neq 0$. Este fato, junto com os Teoremas 1.5.1, 1.5.2, 1.6.1, indicam que, na linguagem da teoria de grupos, o conjunto de todas funções aritméticas f com $f(1) \neq 0$ forma um grupo abeliano com relação a operação $*$, o elemento identidade sendo a função I. Podemos facilmente verificar que*

$$(f * g)^{-1} = f^{-1} * g^{-1} \quad \textit{se } f(1) \neq 0 \quad \textit{e } g(1) \neq 0.$$

Definição 1.6.1. *Definimos que a função unidade u como sendo a função aritmética tal que $u(n) = 1$ para todo n.*

O Teorema 1.1.1 diz que $\sum_{d|n} \mu(d) = I(n)$. Na notação do produto de Dirichlet isso se torna como

$$\mu * u = I.$$

Portanto u e μ são funções inversas de Dirichlet uma da outra

$$u = \mu^{-1} \quad \text{e} \quad \mu = u^{-1}.$$

A relação acima, entre a função de Möbius e a função unidade, junto com a propriedade associativa do produto de Dirichlet, nos permite dar uma prova simples do próximo teorema.

Teorema 1.6.2. *Fórmula da inversão de Möbius. A equação*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \tag{1.6}$$

implica

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) \tag{1.7}$$

e por outro lado (1.7) implica (1.6).

Demonstração. A equação (1.6) diz que $f = g * u$. Multiplicando por μ tem $f * \mu = (g * u) * \mu = g * (u * \mu) = g * I = g$, que está na equação (1.7). Por outro lado, multiplicando $f * \mu = g$ de u obtemos a equação (1.6). ∎

A fórmula de inversão de Möbius já está ilustrada por um par de fórmulas nos Teoremas 1.3.1 e 1.2.1:

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d), \qquad \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left(\frac{n}{d}\right).$$

1.7 A função Mangoldt $\Lambda(n)$

Introduzimos a função de Mangoldt Λ que tem um papel central na distribuição dos primos.

Definição 1.7.1. *Para todo inteiro $n \geq 1$ definimos:*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \textit{se } n = p^m \textit{ para algum primo } p \textit{ e algum } m \geq 1, \\ 0, & \textit{caso contrário}. \end{cases}$$

Vejamos uma pequena tabela de valores para $\Lambda(n)$:

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Lambda(n):$	0	$\log 2$	$\log 3$	$\log 2$	$\log 5$	0	$\log 7$	$\log 2$	$\log 3$	0

A prova do próximo teorema mostra como esta função surge naturalmente do teorema fundamental da aritmética.

Teorema 1.7.1. *Se $n \geq 1$ temos*

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d). \tag{1.8}$$

Demonstração. O teorema é verdadeiro se $n = 1$ já que ambos membros são 0. No entanto assumindo $n > 1$ e escrevendo:

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{ak}.$$

Aplicando logaritmo temos que

$$\log n = \sum_{k=1}^{r} a_k \log p_k.$$

Agora considere a soma do lado direito de (1.8). Os únicos termos diferente de zero no somatório vem dos divisores d da forma p_k^m para $m = 1, 2, \ldots, a_k$ e $k = 1, 2, \ldots, r$. Por isso

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \Lambda(p_k^m) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \log p_k = \sum_{k=1}^{r} a_k \log p_k = \log n,$$

que prova assim (1.8). ∎

Agora usemos a inversão de Möbius para expressar $\Lambda(n)$ em termos de logaritmos.

Teorema 1.7.2. *Se $n \geq 1$ temos:*

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} = -\sum_{d|n} \mu(d) \log d.$$

Demonstração. Invertendo (1.8) pela fórmula de inversão de Möbius obtemos

$$\begin{aligned} \Lambda(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} = \log n \sum_{d|n} \mu(d) - \sum_{d|n} \mu(d) \log d \\ &= I(n) \log n - \sum_{d|n} \mu(d) \log d. \end{aligned}$$

já que $I(n) \log n = 0$ para todo n. A prova está feita. ∎

1.8 Funções multiplicativas

Já vimos que o conjunto de todas funções f aritméticas com $f(1) \neq 0$ forma um grupo abeliano com o produto de Dirichlet. Nesta seção discutiremos um importante subgrupo deste grupo: O subgrupo das funções multiplicativas.

Definição 1.8.1. *Uma função aritmética f é chamada multiplicativa se f não é identicamente zero e se:*

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \textit{sempre que } (m, n) = 1.$$

A função multiplicativa f é chamada completamente multiplicativa se temos também $f(m, n) = f(m)f(n)$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.1. *Seja $f_\alpha(n) = n^\alpha$, onde α é um real fixo ou número complexo. Esta função é completamente multiplicativa. Em particular, a função unitária $u = f_0$ é completamente multiplicativa. Nos denotamos a função f_α por N^α e chamamos de função potêncial.*

Exemplo 1.2. *A função identidade $I(n) = [1/n]$ é completamente multiplicativa.*

Exemplo 1.3. *A função de Möbius é multiplicativa mas não completamente multiplicativa. É facil ver pela definição de μ. Considere dois inteiros primos entre si m e n. Se m ou n tem um fator primo ao quadrado então também mn e ambos $\mu(mn)$ e $\mu(m)\mu(n)$ são zero. Se nenhum tem um fator ao quadrado escrevemos $m = p_1, \ldots, p_s$ e $n = q_1, \ldots, q_t$, onde p_i e q_i são primos distintos. Daí $\mu(m) = (-1)^p, \mu(n) = (-1)^t$ e $\mu(mn) = (-1)^{s+t} = \mu(m)\mu(n)$. Isso mostra que μ é multiplicativo. Ela não é completamente multiplicativa já que $\mu(4) = 0$ mas $\mu(2)\mu(2) = 1$.*

Exemplo 1.4. *A função totiente de Euler $\varphi(n)$ é multiplicativa. Isto é a parte (c) do Teorema 2.5. Ela não é completamente multiplicativa já que $\varphi(4) = 2$ enquanto $\varphi(2)\varphi(2) = 1$.*

Exemplo 1.5. *O produto ordinário fg de duas funções aritméticas f e g é definida pela fórmula usual*

$$(fg)(n) = f(n)g(n).$$

Similarmente, o quociente f/g é definido pela fórmula

$$\left(\frac{f}{g}\right)(n) = \frac{f(n)}{g(n)} \quad \textit{enquanto } g(n) \neq 0.$$

Se f e g são multiplicativas, então fg e f/g também são multiplicativas. Se f e g são completamente multiplicativa, então também fg e f/g também são.

Agora vejamos algumas propriedades em comum para todas as funções multiplicativas.

Teorema 1.8.1. *Se f é multiplicativa então $f(1) = 1$.*

Demonstração. Temos $f(n) = f(1)f(n)$ já que $(n, 1) = 1$ para todo n. Desde que f não seja identicamente nulo temos $f(n) \neq 0$ para algum n e então $f(1) = 1$. ∎

Observação 1.8.1. *Temos que $\Lambda(1) = 0$, a função Mangoldt não é multiplicativa.*

Se f é multiplicativa, $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_r^{\alpha_r}$ são primos entre si e $f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha^r}) = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \cdots f(p_r^{\alpha^r})$.

Teorema 1.8.2. *Dado f com $f(1) = 1$ temos:*

(a) *f é multiplicativa se e só se,*

$$f(p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_r^{\alpha_r}) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r})$$

para quaisquer primos $p_1, \ldots, p_r$ distintos e quaisquer inteiros positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$

(b) *Se f é multiplicativa, então f é completamente multiplicativa se e só se,*

$$f(p^a) = f(p)^a$$

para todo primo p e todo inteiro positivo $a \geq 1$.

1.9 Funções multiplicativas e produto de Dirichlet

Teorema 1.9.1. *Se f e g são multiplicativas, então o produto de Dirichlet $f * g$ é multiplicativa*

Demonstração. Seja $h = f * g$ e escolha inteiros relativamente m e n. Então

$$h(mn) = \sum_{c|mn} f(c) g\left(\frac{mn}{c}\right).$$

Agora todo divisor c de mn pode ser expresso na forma $c = ab$ sendo que $a|m$ e $b|n$. Mais ainda, $(a, b) = 1$, $(m/a, n/b) = 1$, e existe uma correspondência um a um entre o conjunto dos produtos ab e os divisores c de mn. Por isso:

$$\begin{aligned} h(mn) &= \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(ab)g\left(\frac{mn}{ab}\right) = \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(a)f(b)g\left(\frac{m}{a}\right)g\left(\frac{n}{b}\right) \\ &= \sum_{a|m} f(a)g\left(\frac{m}{a}\right)\sum_{b|n} f(b)g\left(\frac{n}{b}\right) = h(m)h(n). \end{aligned}$$

e a prova está feita. ∎

Aviso. O produto de Dirichlet de duas funções completamente multiplicativas não precisa ser completamente multiplicativa.

Teorema 1.9.2. *Se ambos g e $f * g$ são multiplicativas, então f também é multiplicativa.*

Demonstração. Assuma que f não é multiplicativa e deduza que $f * g$ também não seja multiplicativa. Seja $h = f * g$. Já que f não é multiplicativa, existe m e n inteiros positivos com $(m, n) = 1$ tal que

$$f(mn) \neq f(m)f(n).$$

Escolhemos como um par m e n para que o produto mn seja o menor possível.

Se $mn = 1$ então $f(1) \neq f(1)f(1)$ e $f(1) \neq 1$. Já que $h(1) = f(1)g(1) = f(1) \neq 1$, isso mostra que h não é multiplicativa.

Se $mn > 1$, então temos $f(ab) = f(a)f(b)$ para todos os inteiros positivos a e b com $(a, b) = 1$ e $ab < mn$. Agora nosso argumento é a prova do Teorema 1.9.1, exceto que na soma definindo $h(mn)$ separamos o termo correspondente para $a = m,\ b = n$. Temos assim:

$$\begin{aligned} h(mn) &= \sum_{\substack{a|m \\ b|n \\ ab<mn}} f(ab)g\left(\frac{mn}{ab}\right) + f(mn)g(1) = \sum_{\substack{a|m \\ b|n \\ ab<mn}} f(a)f(b)g\left(\frac{m}{a}\right)g\left(\frac{n}{b}\right) + f(mn) \\ &= \sum_{a|m} f(a)g\left(\frac{m}{a}\right)\sum_{b|n} f(b)g\left(\frac{n}{b}\right) - f(m)f(n) + f(mn) \\ &= h(m)h(n) - f(m)f(n) + f(mn). \end{aligned}$$

Já que $f(mn) \neq f(m)f(n)$, isso mostra que $h(mn) \neq h(m)h(n)$ e então h não é multiplicativa. ∎

Teorema 1.9.3. *Se g é multiplicativa, então g^{-1} também é, ou seja, a inversa de Dirichlet é multiplicativa*

Demonstração. Pelo Teorema 1.9.2, g^{-1} é multiplicativa, já que ambos g e $g * g^{-1} = I$ são multiplicativas. ∎

Observação 1.9.1. *Os Teoremas 1.91 e 1.9.3 juntos mostram que o conjunto das funções multiplicativas é um subgrupo de todas as funções aritméticas f com $f(1) \neq 0$.*

1.10 O inverso da função completamente multiplicativa

A inversa de Dirichlet de uma função completamente multiplicativa e muito fácil de se determinar.

Teorema 1.10.1. *Seja f multiplicativa. Então f é completamente multiplicativa se e só se,*

$$f^{-1}(n) = \mu(n)f(n) \quad \textit{para todo } n \geq 1.$$

Demonstração. Seja $g(n) = \mu(n)f(n)$. Se f é completamente multiplicativa temos

$$(g * f)(n) = \sum_{d|n} \mu(d)f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)\sum_{d|n} \mu(d) = f(n)I(n) = I(n).$$

já que $f(1) = 1$ e $I(n) = 0$ para $n > 1$. Portanto, $g = f^{-1}$.

Por outro lado, assumimos $f^{-1} = \mu(n)f(n)$. Para mostrar que f é completamente multiplicativa, basta provar que $f(p^\alpha) = f(p)^\alpha$ para potências de primos. A equação $f^{-1} = \mu(n)f(n)$ implica que

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = 0 \quad \text{para todo } n > 1.$$

Portanto, tomando $n = p^\alpha = 0$ temos

$$\mu(1)f(1)f(p^\alpha) + \mu(p)f(p)f(p^{\alpha-1}) = 0,$$

Isso implica em $f(p^\alpha) = f(p)f(p^{\alpha-1})$, logo $f(p^\alpha)$ = $f(p)^\alpha$, então f é completamente multiplicativa. ∎

Exemplo 1.6. *A inversa da função φ de Euler. Já que $\varphi = \mu * N$ temos que $\varphi^{-1} = \mu^{-1} * N^{-1}$. Mas $N^{-1} = \mu N$ já que, N é completamente multiplicativa, então*

$$\varphi^{-1} = \mu^{-1} * \mu N = u * \mu N.$$

Daí,

$$\varphi^{-1}(n) = \sum_{d|n} d\mu(d).$$

O próximo teorema nos mostra que

$$\varphi^{-1}(n) = \prod_{p|n}(1 - p).$$

Teorema 1.10.2. *Se f é multiplicativa temos*

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = \prod_{p|n}(1 - f(p)).$$

Demonstração. Seja

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d)f(d).$$

Daí g é multiplicativa, então para determinar $g(n)$ basta calcular $g(p^\alpha)$. Mas,

$$g(p^\alpha) = \sum_{d|p^\alpha} \mu(d)f(d) = \mu(1)f(1) + \mu(p)f(p) = 1 - f(p).$$

Portanto,

$$g(n) = \prod_{p|n} g(p^\alpha) = \prod_{p|n}(1 - f(p)).$$

∎

1.11 Função $\lambda(n)$ de Liouville

Um exemplo importante de uma função completamente multiplicativa é a função λ de Liouville.

Definição 1.11.1. *Definimos $\lambda(1) = 1$, e se $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ então definimos:*

$$\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}.$$

A definição mostra que λ é completamente multiplicativa. O próximo teorema descreve o somatório dos divisores de λ.

Teorema 1.11.1. *Para todo $n \geq 1$ temos*

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \textit{se } n \textit{ é um quadrado}, \\ 0 & \textit{caso contrário}. \end{cases}$$

Também, $\lambda^{-1}(n) = |\mu(n)|$ para todo n.

Demonstração. Seja $g(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)$. Daí g é multiplicativa, então para determinar $g(n)$ precisamos apenas calcular $g(p^\alpha)$ para potências de primos. Temos

$$\begin{aligned} g(p^\alpha) &= \sum_{d|p^\alpha} \lambda(d) = 1 + \lambda(p) + \lambda(p^2) + \cdots + \lambda(p^\alpha) \\ &= 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \text{ é ímpar,} \\ 0 & \text{se } \alpha \text{ é par .} \end{cases} \end{aligned}$$

Por isso, se $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ temos $g(n) = \prod_{i=1}^k g(p_i^{\alpha_i})$. Se qualquer expoente α_i é impar então $g(p_i^{\alpha i}) = 0$ e $g(n) = 0$. Se todos expoentes α_i são pares, então $g(p_i^{\alpha i}) = 1$ para todo i e $g(n) = 1$. Isso mostra que $g(n) = 1$ se n é um quadrado, e $g(n) = 0$. Por outro lado, também $\lambda^{-1}(n) = \mu(n)\lambda(n) = \mu^2(n) = |\mu(n)|$.
∎

1.12 As funções de divisor $\sigma_\alpha(n)$

Definição 1.12.1. *Para um α real ou complexo e qualquer inteiro $n \geq 1$ definimos*

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha.$$

O somatório dos divisores de n na potência α.

As funções σ_α assim definidas, são chamadas de funções de divisores. Elas são funções multiplicativas porque $\sigma_\alpha = u * N^\alpha$, o produto de Dirichlet de duas funções multiplicativas.

Quando $\alpha = 0$, $\sigma_0(n)$ é o número de divisores de n, isto frequentemente é denotado por $d(n)$.

Quando $\alpha = 1$, $\sigma_1(n)$ é o somatório dos divisores de n, isto frequentemente chamado de $\sigma(n)$, já que σ_α é multiplicativo temos

$$\sigma_\alpha(p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}) = \sigma_\alpha(p_1^{a_1}) \cdots \sigma_\alpha(p_k^{a_k}).$$

Para calcular $\sigma_\alpha(p^a)$, notamos que os divisores de uma potência p^a de um primo são

$$1, p, p^2, \ldots, p^a,$$

então

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(p^a) = 1^\alpha + p^\alpha + p^{2\alpha} + \cdots + p^{a\alpha} &= \frac{p^{\alpha(a+1)} - 1}{p^\alpha - 1} \quad \text{se } \alpha \neq 0 \\ &= a + 1 \qquad \text{se } \alpha = 0. \end{aligned}$$

A inversa de Dirichlet de σ_α pode também ser expressada como combinação linear das potências α-ésima dos divisores de n.

Teorema 1.12.1. *Para* $n \geq 1$ *temos*

$$\sigma_{\alpha}^{-1}(n) = \sum_{d|n} d^{\alpha}\mu(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Demonstração. Já que $\sigma_{\alpha} = N^{\alpha} * u$ e N^{α} é completamente multiplicativa temos $(N^{\alpha}N)^{-1} = (N^{\alpha})^{-1} * u^{-1}$.

$$\sigma_{\alpha}^{-1}(n) = (\mu N^{\alpha}) * u^{-1}(n) = (\mu N^{\alpha}) * \mu(n) = \sum_{d|n} d^{\alpha}\mu(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

∎

1.13 Convoluções Generalizadas

Ao longo dessa seção, F denota uma função real ou complexa, definida no eixo real positivos $(0, +\infty)$ com $F(x) = 0$ para $0 < x < 1$. Analisemos somatórios do tipo

$$\sum_{n \leq x} \alpha(n) F\left(\frac{x}{n}\right).$$

Aqui α é qualquer função aritmética. A soma acima define uma nova função G sobre $(0, +\infty)$ tal que $G(x) = 0$ para $0 < x < 1$, já que nesse caso a soma é vazia. Denotamos esta função G por $\alpha \circ F$. Daí temos

$$(\alpha \circ F)(x) = \sum_{n \leq x} \alpha(n) F\left(\frac{x}{n}\right).$$

Se $F(x) = 0$, para $x \notin \mathbb{Z}$, a restrição de F para os inteiros é uma função aritmética e descobrimos que

$$(\alpha \circ F)(m) = (\alpha * F)(m)$$

para todos os inteiros $m \geq 1$, então a operação $\circ$ pode ser considerada como uma generalização da convolução de Dirichlet $*$.

Entretanto, o seguinte teorema serve como substituição útil para à associatividade.

Teorema 1.13.1. *Propriedade associativa* $\circ$ *e* $*$. *Para quaisquer funções aritméticas* α *e* β *temos*

$$\alpha \circ (\beta \circ F) = (\alpha * \beta) \circ F. \tag{1.9}$$

Demonstração. Para $x > 0$, temos

$$\begin{aligned}\{\alpha \circ (\beta \circ F)\}(x) &= \sum_{n\le x} \alpha(n) \sum_{m\le x/n} \beta(m) F\left(\frac{x}{mn}\right) = \sum_{mn\le x} \alpha(n)\beta(m) F\left(\frac{x}{mn}\right) \\ &= \sum_{k\le x} \left(\sum_{n|k} \alpha(n)\beta\left(\frac{k}{n}\right)\right) F\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{k\le x} (\alpha * \beta)(k) F\left(\frac{x}{k}\right) \\ &= \{(\alpha * \beta) \circ F\}(x).\end{aligned}$$

O que prova o resultado. ∎

Agora note que a função identidade $I(n) = [1/n]$ para convolução de Dirichlet também é uma identidade para operação $\circ$. E temos

$$(I \circ F)(x) = \sum_{n\le x} \left[\frac{1}{n}\right] F\left(\frac{x}{n}\right) = F(x).$$

Agora usamos esse fato com a propriedade associativa para provar a seguinte fórmula da inversão de Möbius generalizada.

Teorema 1.13.2. *Fórmula de inversão de Möbius generalizada. Se α tem uma inversa de Dirichlet α^{-1} então a equação:*

$$G(x) = \sum_{n\le x} F\left(\frac{x}{n}\right) \tag{1.10}$$

implíca:

$$F(x) = \sum_{n\le x} \alpha^{-1}(n) G\left(\frac{x}{n}\right). \tag{1.11}$$

Temos que (1.10) implica (1.11).

Demonstração. Se $G = \alpha \circ F$ então:

$$\alpha^{-1} \circ G = \alpha^{-1} \circ (\alpha \circ F) = (\alpha^{-1} * \alpha) \circ F = I \circ F = F.$$

Dai (1.10) implica (1.11). E o contrário e provado de forma similar. ∎

Teorema 1.13.3. *Generalização da fórmula de inversão de Möbius. Se α é completamente multiplicativa temos*

$$G(x) = \sum_{n\le x} \alpha(n) F\left(\frac{x}{n}\right) \textit{ se, e só se, } F(x) = \sum_{n\le x} \mu(n)\alpha(n) G\left(\frac{x}{n}\right).$$

Demonstração. Neste caso $\alpha^{-1}(n) = \mu(n)\alpha(n)$. ∎

1.14 Potência em séries formais

Em cálculo, uma série infinita da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n = a(0) + a(1)x + a(2)x^2 + \cdots + a(n)x^n + \cdots \tag{1.12}$$

é chamada série de potências em x. Tanto x quanto os coeficientes $a(n)$ são números reais ou complexos. Para cada série de potências, definimos o raio de convergência $r \geq 0$ tal que a série de potências converge absolutamente se $|x| < r$ e diverge se $|x| > r$. (O raio r pode ser $+\infty$.)

Nesta seção vamos considerar a série de potências com uma visão diferente. Chamamos elas de séries de potências formais para diferenciá-las das séries de potências ordinárias do cálculo. Nesta teoria de séries de potências formais, x nunca está escrito como um valor numérico, e questões de convergência ou divergência não são de interesse.

O objeto de interesse é a sequência de coeficientes:

$$(a(0), a(1), \ldots, a(n), \ldots). \tag{1.13}$$

Tudo que nós fazemos com séries de potências formais poderia também ser feito com sequências cujos coeficientes formam um vetor infinito unidimensional com componentes $a(0), a(1), \ldots$. mas para nosso propósito é mais conveniente mostrar os termos como coeficientes de uma série de potências como em (1.12) do que como componentes de um vetor como em (1.13). O simbolo x^n é um simples dispositivo para localizar a posição do enésima coeficiente $a(n)$. O coeficiente $a(0)$ é chamado de *coeficiente constante de série*.

Somamos e multiplicamos séries de potências formais algebricamente como se fossem séries de potências convergentes. Sejam $A(x)$ e $B(x)$ duas séries de potências formais, definidas por:

$$A(x) = \sum_{n=x}^{\infty} a(n)x^n \quad \text{e} \quad B(x) = \sum_{n=x}^{\infty} b(n)x^n,$$

Dizemos

Equação: $A(x) = B(x)$ significa que $a(n) = b(n)$ para todo $n \geq 0$.

Soma: $A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a(n) + b(n))x^n$.

Produto: $A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^n$, onde:

$$c(n) = \sum_{k=0}^{n} a(k)b(n-k). \tag{1.14}$$

A sequência $\{c(n)\}$ determinada por (1.14) é chamada de Produto de Cauchy das sequências $\{a(n)\}$ e

$\{b(n)\}$.

O leitor pode facilmente verificar que essas duas operações satisfazem as condições de comutatividade e associatividade, e que a multiplicação é distributiva com respeito à adição. Na linguagem moderna da álgebra, as séries de potências formais formam um anel. Este anel tem o elemento zero para a adição que denotamos por 0,

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n, \quad \text{onde } a(n) = 0 \text{ para todo } n \geq 0,$$

e um elemento identidade para a multiplicação que denotamos por 1,

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n \quad \text{onde } a(0) = 1 \text{ e } a(n) = 0 \text{ para } n \geq 1.$$

A série de potências é chamada polinomial se todos seus coeficientes são zeros a partir de algum ponto.

Para cada série de potências formal $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$ com coeficiente constante $a(0) \neq 0$ há uma série de potências formal determinada de forma única $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)x^n$ tal que $A(x)B(x) = 1$. Seus coeficientes podem ser determinados pela resolução do sistema de equações infinito:

$$\begin{array}{rcl} a(0)b(0) & = & 1 \\ a(0)b(0) & + & a(1)b(0) = 0, \\ a(0)b(2) & + & a(1)b(1) + a(2)b(0) = 0, \\ & \vdots & \end{array}$$

nas variáveis $b(0), b(1), b(2), \ldots$ A série $B(x)$ é chamada de inversa de $A(x)$ e denotada por $A(x)^{-1}$ ou por $1/A(x)$.

A série especial

$$A(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n x^n$$

é chamada série geométrica. Aqui a é um real arbitrário ou complexo. Seu inverso é o polinômio formal

$$B(x) = 1 - ax.$$

Em outras palavras, temos

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n x^n.$$

1.15 A série de Bell da função aritmética

E. T. Bell usou séries de potências formais para estudar propriedades da multiplicação de funções aritméticas.

Definição 1.15.1. *Dado uma função aritmética f e um primo p, denotamos por $f_p(x)$ a série de potências formal*

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(p^n)x^n$$

e chamamos ela de série de Bell de f módulo p.

Séries de Bell são especialmente úteis quando f é multiplicativa.

Teorema 1.15.1. *Teorema da unicidade. Sejam f e g funções multiplicativas. Então $f = g$ se, e só se,*

$$f_p(x) = g_p(x) \quad \textit{para todo primo } p.$$

Demonstração. Se $f = g$ então $f(p^n) = g(p^n)$ para todo p e todo $n \geq 0$, assim $f_p(x) = g_p(x)$. Por outro lado, se $f_p(x) = g_p(x)$ então $f_p(x) = g_p(x)$ para todo p e $f(p^n) = g(p^n)$ para todo $n \geq 0$. Já que f e g são multiplicativas isso implica que $f = g$. ∎

É fácil determinar a série de Bell para algumas funções multiplicativas introduzidas anteriormente neste capítulo.

Exemplo 1.7. *Função de Möbius μ. Já que $\mu(p) = -1$ e $\mu(p^n) = 0$ para $n \geq 2$ temos que*

$$\mu_p(x) = 1 - x.$$

Exemplo 1.8. *Função φ de Euler. Já que $\varphi(p^n) = p^n - p^{(n-1)}$ para $n \geq 1$ temos*

$$\begin{aligned}\varphi_p(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(p^n - p^{n-1})x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p^n x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} p^n x^n \\ &= (1-x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n x^n\right) = \frac{1-x}{1-px}.\end{aligned}$$

Exemplo 1.9. *Funções completamente multiplicativas. Se f é completamente multiplicativa então $f(p^n) = f(p)^n$ para todo $n \geq 0$ e a série de Bell $f_p(x)$ é a série geométrica*

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(p)^n x^n = \frac{1}{1 - f(p)x}.$$

Em particular temos a seguinte série de Bell para a função identidade I, a função unidade μ, a função *potência N^α, e a função de Liouville λ:*

$$\begin{aligned}
I_p(x) &= 1.\\
\mu_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.\\
N_p^\alpha(x) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty} p^{\alpha n}x^n = \frac{1}{1-p^\alpha x}.\\
\lambda_p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.
\end{aligned}$$

1.16 Séries de Bell e Produto de Dirichlet

O próximo teorema mostra a relação entre o produto de séries de Bell com o produto de Dirichlet.

Teorema 1.16.1. *Para qualquer duas funções aritméticas f e g temos $h = f * g$. Dai para cada primo p temos*

$$h_p(x) = f_p(x)g_p(x).$$

Demonstração. Já que os divisores de p^n são: $1, p, p^2, \ldots, p^n$ temos

$$h(p^n) = \sum_{d|p^n} f(d)g\left(\frac{p^n}{d}\right) = \sum_{k=0}^{n} f(p^k)g(p^{n-k}).$$

Isso completa a prova pois a última soma é o produto de Cauchy das sequências $\{f(p^n)\}$ e $\{g(p^n)\}$. ∎

Exemplo 1.10. *Já que $\mu^2(n) = \lambda^{-1}(n)$, a série de Bell de μ^2 módulo p é*

$$\mu_p^2(x) = \frac{1}{\lambda_p(x)} = 1 + x.$$

Exemplo 1.11. *Já que $\sigma_\alpha = N^\alpha * \mu$, a série de Bell de σ_α módulo p é*

$$(\sigma_\alpha)_p(x) = N_p^\alpha(x)\mu_p(x) = \frac{1}{1-p^\alpha x}\cdot\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\sigma_\alpha(p)x + p^\alpha x^2}.$$

Exemplo 1.12. *Este exemplo ilustra como a série de Bell pode ser usada para descobrir identidades envolvendo função aritmética. Seja*

$$f(n) = 2^{v(n)},$$

sendo que $v(1) = 0$ e $v(n) = k$ se $n = p_1^{a_1}, \ldots, p_k^{a_k}$. Daí f é multiplicativa e sua série de Bell módulo p é

$$f_p(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{v(p^n)}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2x^n = 1 + \frac{2x}{1-x} = \frac{1+x}{1-x}.$$

Portanto

$$f_p(x) = \mu_p^2(x)u_p(x)$$

o que implica $f = \mu^2 * u$ ou

$$2^{v(n)} = \sum_{d|n} \mu^2(d).$$

1.17 Derivada de funções aritméticas

Definição 1.17.1. *Para qualquer função aritmética f definimos sua derivada f' como sendo a função aritmética dada pela equação*

$$f'(n) = f(n)\log n \quad \textit{para } n \geq 1.$$

Exemplo 1.13. *Já que $I(n)\log n = 0$ para todo n temos $I' = 0$. Já que $u(n) = 1$ para todo n temos $u'(n) = \log n$. Portanto, a fórmula $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$ pode ser escrita como:*

$$\Lambda * u = u' \tag{1.15}$$

Usando o conceito de derivada podemos rapidamente derivar a fórmula de Selberg que é usada como o ponto de partida de uma prova do teorema elementar dos números primos. Por exemplo, as regras usuais para diferenciação de somas e produtos também servem se os produtos são produtos de Dirichlet.

Teorema 1.17.1. *Se f e g são funções aritméticas temos:*

(a) $(f+g)' = f' + g'$.

(b) $(f * g)' = f' * g + f * g'$.

(c) $(f^{-1})' = -f' * (f * f)^{-1}$, *sempre que* $f(1) \neq 0$.

Demonstração. A prova de (a) é imediata. Claro, é sábido que $f + g$ é a função para qual $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$ para todo n.

Para provar (b) usamos a identidade $\log n = \log d + \log(n/d)$ para escrever

$$\begin{aligned}
(f * g)'(n) &= \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \log n \\
&= \sum_{d|n} f(d) \log d g\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \log\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= (f' * g)(n) + (f * g')(n).
\end{aligned}$$

Para provar (c) aplicamos o item (b) para a fórmula $I' = 0$, relembrando que $I = F * f^{-1}$. Isso nos dá

$$0 = (f * f^{-1})' = f' * f^{-1} + f * (f^{-1})'$$

então

$$f * (f^{-1})' = -f' * f^{-1}.$$

Multiplicando por f^{-1} nos dá

$$(f^{-1})' = -(f' * f^{-1}) * f^{-1} = -f' * (f^{-1} * f^{-1}).$$

Mas $f^{-1} * f^{-1} = (f * f)^{-1}$ e então (c) está provado. ∎

1.18 A identidade de Selberg

Usando o conceito de derivada podemos rapidamente derivar a fórmula de Selberg que é às vezes usada como um ponto de partida de uma prova elementar do teorema de números primos.

Teorema 1.18.1. *A identidade de Selberg. Para $n \geq 1$ temos*

$$\Lambda(n) \log n + \sum_{d|n} \Lambda(d) \Lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \log^2 \frac{n}{d}.$$

Demonstração. A equação (15) afirma que $\Lambda * u = u'$. A diferenciação da equação é dada por

$$\Lambda' * u + \Lambda * u' = u''$$

ou, já que $u' = \Lambda * u$,

$$\Lambda' * u + \Lambda * (\Lambda * u) = u''.$$

Agora multiplicamos ambos os lados por $\mu = u^{-1}$ para obtermos

$$\Lambda' + \Lambda * \Lambda = u'' * \mu.$$

E está é a identidade. ∎

Capítulo 2

Médias de funções aritméticas

2.1 Introdução

O último capítulo discutiu várias identidades satisfeitas por funções aritméticas como $\mu(n)$, $\varphi(n)$, $\Lambda(n)$, e as funções divisoras $\sigma_\alpha(n)$. Agora estudaremos o comportamento dessas e de outras funções aritméticas $f(n)$ para valores grandes de n.

Considere por exemplo, $d(n)$, o número de divisores de n. Essa função assume infinitas vezes o valor 2 (quando n é primo) e também assume valores arbitrariamente grandes quando n tem um grande número de divisores. Assim, os valores de $d(n)$ flutuam consideravelmente à medida que n aumenta.

Muitas funções aritméticas flutuam dessa maneira e muitas vezes é difícil determinar seu comportamento para valores grandes de n. Às vezes é melhor estudar a média aritmética

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k).$$

As médias suavizam as flutuações, de modo que é razoável esperar que os valores médios $\widehat{f}(n)$ se comportem mais regularmente do que $f(n)$. Este é realmente o caso da função divisora $d(n)$. Vamos provar mais tarde que a média $\widehat{d}(n)$ cresce como $\log n$ para n grande; mais precisamente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\widehat{d}(n)}{\log n} = 1. \tag{2.1}$$

Isso é descrito dizendo que a ordem média de $d(n)$ é $\log n$.

Para estudar a média de uma função arbitrária f, precisamos conhecer suas somas parciais $\sum_{k=1}^{n} f(k)$. Por vez é conveniente substituir o índice superior n por um número real positivo arbitrário x e considerar, em vez disso, somas da forma

$$\sum_{k\le x} f(k).$$

Entende-se aqui que o índice k varia de 1 a $[x]$, o maior inteiro $\leq x$. Se $0 < x < 1$ a soma fica vazia e atribuímos o valor 0. Nosso objetivo é determinar o comportamento desta soma em função de x, especialmente para x grande.

Para a função divisora provaremos um resultado obtido por Dirichlet em 1849, que é mais forte que (2.1) , a saber

$$\sum_{k \leq x} d(k) = x \log x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}) \tag{2.2}$$

para todo $x > 1$. Aqui C é a constante de Euler, definida pela equação

$$C = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right). \tag{2.3}$$

O símbolo $O(\sqrt{x})$ representa uma função não especificada de x que não cresce mais rápido do que algumas constantes vezes $\sqrt{x}$. Este é um exemplo da notação "O grande" de Landau que é definida como segue.

2.2 A notação "O grande". Igualdade assintótica de funções

Definição 2.2.1. *Se $g(x) > 0$ para todo $x \geq a$, escrevemos*

$$f(x) = O(g(x)) \qquad \textit{(leia-se: "}f(x) \textit{ é O grande de } g(x)\textit{")}$$

para dizer que o quociente $f(x)/g(x)$ é limitado para $x \geq a$; isto é, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(x)| < M g(x) \quad \textit{para todo } x \geq a.$$

Uma equação da forma

$$f(x) = h(x) + O(g(x))$$

significa que $f(x) - h(x) = O(g(x))$. Notamos que $f(t) = O(g(t))$ para $t \geq a$ implica $\int_a^x f(t)dt = O(\int_a^x g(t)dt)$ para $x \geq a$.

Definição 2.2.2. *Se*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

dizemos que $f(x)$ é assintótico a $g(x)$ quando $x \to \infty$, e escrevemos

$$f(x) \sim g(x) \quad \textit{quando } x \to \infty.$$

Por exemplo, a Equação (2.2) implica que

$$\sum_{k\le x} d(k) \sim x\log x \quad \text{quando } x\to\infty.$$

Na Equação (2.2) o termo $x\log x$ é chamado de valor assintótico da soma; os outros dois termos representam o erro cometido ao aproximar a soma por seus valores assintóticos. Se denotarmos este erro por $E(x)$, então (2.2) afirma que

$$E(x) = (2C-1)x + O(\sqrt{x}). \tag{2.4}$$

Isso também pode ser escrito $E(x) = O(x)$, uma equação que está correta, mas que não transmite a informação mais precisa em (2.4). A equação (2.4) nos diz que o valor assintótico de $E(x)$ é $(2C-1)x$.

2.3 Fórmula de soma de Euler

Às vezes, o valor assintótico de uma soma parcial pode ser obtido comparando-o com uma integral. A fórmula de soma de Euler fornece uma expressão exata para o erro cometido em tal aproximação. Nesta fórmula $[t]$ denota o maior inteiro $\le t$.

Teorema 2.3.1. *Fórmula de soma de Euler. Se f tem uma derivada contínua f' no intervalo $[y,x]$, onde $0<y<x$, então*

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\le x} f(n) = &\int_y^x f(t)dt + \int_y^x (t-[t])f'(t)dt\\ &+f(x)([x]-x) - f(y)([y]-y).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Demonstração. Seja $m=[y]$, $k=[x]$. Para inteiros n e $n-1$ em $[y,x]$ temos

$$\begin{aligned}\int_{n-1}^n [t]f'(t)dt &= \int_{n-1}^n (n-1)f'(t)dt = (n-1)\{f(n)-f(n-1)\}\\ &= \{nf(n)-(n-1)f(n-1)\} - f(n).\end{aligned}$$

Somando de $n=m+1$ a $n=k$ encontramos

$$\begin{aligned}\int_m^k [t]f'(t)dt &= \sum_{n=m+1}^{k} \{nf(n)-(n-1)f(n-1)\} - \sum_{y<n\le x} f(n)\\ &= kf(k) - mf(m) - \sum_{y<n\le x} f(n),\end{aligned} \tag{2.6}$$

portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq x} f(n) &= -\int_m^k [t]f'(t)dt + kf(k) - mf(m)\\ &= -\int_x^y [t]f'(t)dt + kf(k) - mf(y).\end{aligned}$$

A integração por partes nos dá

$$\int_y^x f(t)dt = xf(x) - yf(y) - \int_y^x tf'(t)dt,$$

e quando isto é combinado com (2.6) obtemos (2.5). ∎

2.4 Algumas fórmulas assintóticas elementares

O próximo teorema fornece uma série de fórmulas assintóticas que são conseqüências fáceis da fórmula de soma de Euler. Na parte (a) a constante C é a constante de Euler definida em (2.3). Na parte (b), $\zeta(s)$ denota a função zeta de Riemann que é definida pela equação

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{se } s > 1,$$

e pela equação

$$\zeta(s) = \lim_{x\to\infty} \left(\sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} \right) \quad \text{se } 0 < s < 1.$$

Teorema 2.4.1. *Se $x \geq 1$, temos:*

(a) $\displaystyle\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right).$

(b) $\displaystyle\sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s})$ *se* $s > 0,\ s \neq 1.$

(c) $\displaystyle\sum_{n>x} \frac{1}{n^s} = O(x^{1-s})$ *se* $s > 1.$

(d) $\displaystyle\sum_{n\leq x} n^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^{\alpha})$ *se* $\alpha \geq 0.$

Demonstração. Para a parte (a) tomamos $f(t) = 1/t$ na fórmula de soma de Euler para obter

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} &= \int_1^x\frac{dt}{t} - \int_1^x\frac{t-[t]}{t^2}dt + 1 - \frac{x-[x]}{x}\\ &= \log x - \int_1^x\frac{t-[t]}{t^2}dt + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \log x + 1 - \int_1^\infty\frac{t-[t]}{t^2}dt + \int_1^\infty\frac{t-[t]}{t^2}dt + O\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

A integral imprópria $\int_1^\infty(t-[t])t^{-2}dt$ existe porque é limitada por $\int_1^\infty t^{-2}dt$. Além disso,

$$0 \leq \int_x^\infty\frac{t-[t]}{t^2}dt \leq \int_x^\infty\frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{x}$$

então a última equação se torna

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} = \log x + 1 - \int_x^\infty\frac{t-[t]}{t^2}dt + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Isso prova (a) com

$$C = 1 - \int_1^\infty\frac{t-[t]}{t^2}dt.$$

Deixando $x\to\infty$ em (a) encontramos que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} - \log x\right) = 1 - \int_1^\infty\frac{t-[t]}{t^2}dt,$$

então C também é igual à constante de Euler.

Para provar a parte (b) usamos o mesmo tipo de argumento com $f(x) = x^{-s}$, onde $s > 0$, $s\neq 1$. A fórmula de soma de Euler nos dá

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{1}{n^s} &= \int_1^x\frac{dt}{t^s} - s\int_1^x\frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt + 1 - \frac{x-[x]}{x^s}\\ &= \frac{x^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} + 1 - s\int_1^x\frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt + O(x^{-s}).\end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + C(s) + O(x^{-s}), \tag{2.7}$$

onde

$$C(s) = 1 - \frac{1}{1-s} - s\int_1^\infty\frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt.$$

Se $s > 1$, o membro esquerdo de (2.7) se aproxima de $\zeta(s)$ quando $x\to\infty$ e os termos x^{1-s} e x^{-s}

ambos se aproximam de 0. Portanto, $C(s) = \zeta(s)$ se $s > 1$. Se $0 < s < 1$, $x^{-s} \to 0$ e (2.7) mostra que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s}\right) = C(s).$$

Portanto, $C(s)$ também é igual a $\zeta(s)$ se $0 < s < 1$. Isso prova (b).

Para provar (c) usamos (b) com $s > 1$ para obter

$$\sum_{n>x}\frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \sum_{n\le x}\frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{-s}) = O(x^{1-s})$$

desde $x^{-s} \le x^{1-s}$.

Finalmente, para provar (d) usamos a fórmula de soma de Euler mais uma vez com $f(t) = t^\alpha$ para obter

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x} n^\alpha &= \int_1^x t^\alpha dt + \alpha\int_1^x t^{\alpha-1}([t]-t)dt + 1 - ([x]-x)x^\alpha \\
&= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} + O\left(\alpha\int_1^x t^{\alpha-1}dt\right) + O(x^\alpha) \\
&= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}O(x^\alpha).
\end{aligned}$$

∎

2.5 A ordem média de $d(n)$

Nesta seção derivamos a fórmula assintótica de Dirichlet para as somas parciais da função divisora $d(n)$.

Teorema 2.5.1. *Para todo $x \ge 1$ temos*

$$\sum_{n\le x} d(n) = x\log x + (2C-1)x + O(\sqrt{x}), \tag{2.8}$$

onde C é a constante de Euler.

Como $d(n) = \sum_{d|n} 1$ temos

$$\sum_{n\le x} d(n) = \sum_{n\le x}\sum_{d|n} 1.$$

Esta é uma soma dupla estendida sobre n e d. Como $d|n$ podemos escrever $n = qd$ e estender a soma sobre todos os pares de inteiros positivos q, d com $qd \le x$. Por isso,

$$\sum_{n\le x} d(n) = \sum_{q,d \; qd\le x} 1. \tag{2.9}$$

Isso pode ser interpretado como uma soma estendida sobre certos pontos da rede no plano qd, como sugerido pela Figura 2.1. (Um ponto de rede é um ponto com coordenadas inteiras.) Os pontos de rede com $qd = n$ estão em uma hipérbole, então a soma em (2.9) conta o número de pontos de rede que se encontram nas hipérboles correspondentes a $n = 1, 2, ..., [x]$. Para cada $d \leq x$ fixo, podemos contar primeiro esses pontos de rede no segmento de linha horizontal $1 \leq q \leq x/d$, e então somar todos os $d \leq x$. Assim (2.9) torna-se

$$\sum_{n \leq x} d(n) = \sum_{d \leq x} \sum_{q \leq x/n} 1. \tag{2.10}$$

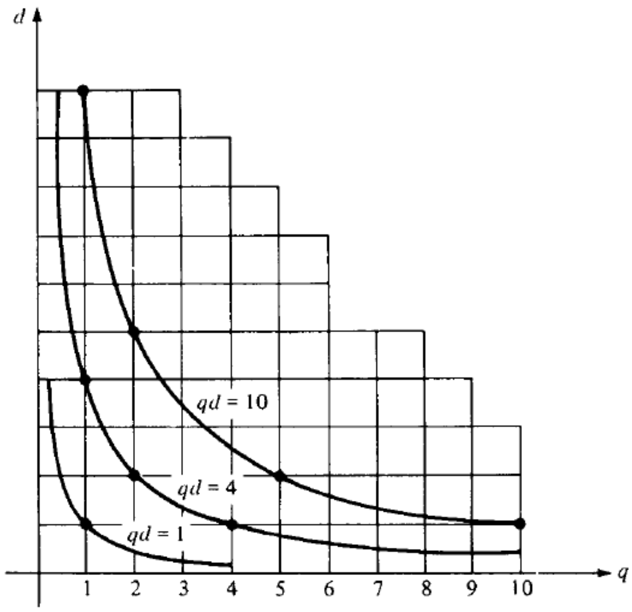

Figura 2.1

Agora usamos a parte (d) do Teorema 2.4.1 com $\alpha = 0$ para obter

$$\sum_{q \leq x/d} 1 = \frac{x}{d} + O(1).$$

Usando isso junto com o Teorema 2.4.1(a), encontramos

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} d(n) &= \sum_{d \leq x} \left\{ \frac{x}{d} + O(1) \right\} = x \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} + O(x) \\ &= x \left\{ \log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\} + O(x) = x \log x + O(x). \end{aligned}$$

Esta é uma versão fraca de (2.8), o que implica

$$\sum_{n \leq x} d(n) \sim x \log x \quad \text{quando } x \to \infty$$

e dá $\log n$ como a ordem média de $d(n)$.

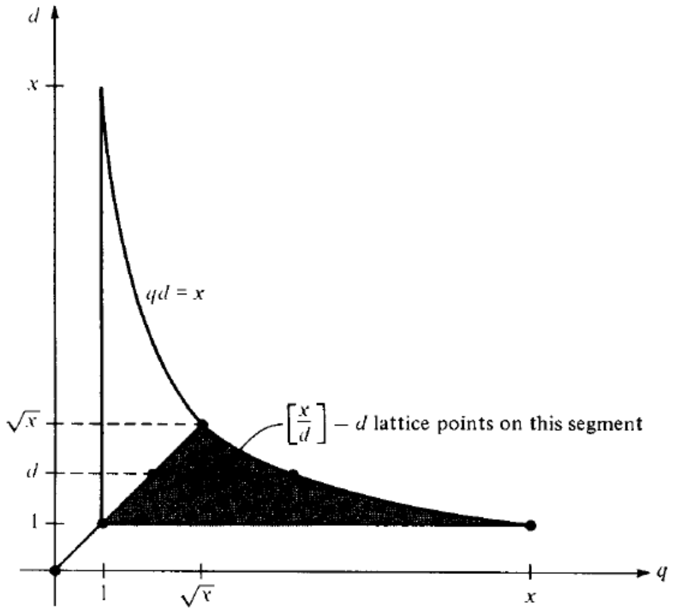

Figura 2.2

Para provar a fórmula (2.8) de forma mais precisa voltamos à soma (2.9) que conta o número de pontos de rede em uma região hiperbólica e aproveitamos a simetria da região em torno da linha $q = d$. O número total de pontos de rede na região é igual a duas vezes o número abaixo da linha $q = d$ mais o número no segmento de linha bissetriz. Referindo-se à Figura 2.2 vemos que

$$\sum_{n\leq x} d(n) = 2\sum_{d\leq\sqrt{x}}\left\{\left[\frac{x}{d}\right] - d\right\} + [\sqrt{x}].$$

Agora usamos a relação $[y] = y + O(1)$ e as partes (a) e (d) do Teorema 2.4.1 para obter

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} d(n) &= 2\sum_{d\leq\sqrt{x}}\left\{\frac{x}{d} - d + O(1)\right\} + O(\sqrt{x}) \\
&= 2x\sum_{d\leq\sqrt{x}}\frac{1}{d} - 2\sum_{d\leq\sqrt{x}} d + O(\sqrt{x}) \\
&= 2x\left\{\log\sqrt{x} + C + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right\} - 2\left\{\frac{x}{2} + O(\sqrt{x})\right\} + O(\sqrt{x}) \\
&= x\log x + (2C-1)x + O(\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

Isso completa a prova da fórmula de Dirichlet.

Observação. O termo de erro $O(\sqrt{x})$ pode ser melhorado. Em 1903, Voronoi provou que o erro é $O(x^{1/3}\log x)$; em 1922, van der Corput melhorou isso para $O(x^{33/100})$. A melhor estimativa até hoje é $O(x^{(12/37)+\varepsilon})$ para todo $\varepsilon > 0$, obtida por Kolesnik [4] em 1969. A determinação do ínfimo de todo θ tal que o termo de erro é $O(x^{\theta})$ é um problema não resolvido conhecido como problema do divisor de Dirichlet.

Em 1915 Hardy e Landau mostraram que $\inf \theta \geq 1/4$.

2.6 A ordem média das funções divisoras $\sigma_\alpha(n)$

O caso $\alpha = 0$ foi considerado no Teorema 2.5.1. Em seguida, consideramos $\alpha > 0$ real e tratamos o caso $\alpha = 1$ separadamente.

Teorema 2.6.1. *Para todo $x \geq 1$ temos*

$$\sum_{n\leq x} \sigma_1(n) = \frac{1}{2}\zeta(2)x^2 + O(x\log x). \tag{2.11}$$

Observação 2.6.1. *Pode-se mostrar que $\zeta(2) = \pi^2/6$. Portanto (2.11) mostra que a ordem média de $\sigma_1(n)$ é $\pi^2 n/12$.*

Demonstração. O método é semelhante ao usado para derivar a versão fraca do Teorema 2.5.1. Nós temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} \sigma_1(n) &= \sum_{n\leq x}\sum_{q|n} q = \sum_{q,d\ qd\leq x} q = \sum_{d\leq x}\sum_{q\leq x/d} q \\
&= \sum_{d\leq x}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{d}\right)^2 + O\left(\frac{x}{d}\right)\right\} = \frac{x^2}{2}\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^2} + O\left(x\sum_{d\leq x}\frac{1}{d}\right) \\
&= \frac{x^2}{2}\left\{-\frac{1}{x} + \zeta(2) + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\} + O(x\log x) = \frac{1}{2}\zeta(2)x^2 + O(x\log x),
\end{aligned}$$

onde usamos as partes (a) e (b) do Teorema 2.4.1. ∎

Teorema 2.6.2. *Se $x \geq 1$ e $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, temos*

$$\sum_{n\leq x} \sigma_\alpha(n) = \frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + O(x^\beta),$$

onde $\beta = \max\{1, \alpha\}$.

Demonstração. Desta vez usamos as partes (b) e (d) do Teorema 2.4.1 para obter

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} \sigma_\alpha(n) &= \sum_{n\leq x}\sum_{q|n} q^\alpha = \sum_{d\leq x}\sum_{q\leq x/d} q^\alpha \\
&= \sum_{d\leq x}\left\{\frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{x}{d}\right)^{\alpha+1} + O\left(\frac{x^\alpha}{d^\alpha}\right)\right\} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^{\alpha+1}} + O\left(x^\alpha\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^\alpha}\right) \\
&= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left\{\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha} + \zeta(\alpha+1) + O(x^{-\alpha-1})\right\} + O\left(x^\alpha\left\{\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \zeta(\alpha) + O(x^{-\alpha})\right\}\right) \\
&= \frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + O(x) + O(1) + O(x^\alpha) = \frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + O(x^\beta),
\end{aligned}$$

onde $\beta = \max\{1, \alpha\}$. ∎

Para encontrar a ordem média de $\sigma_\alpha(n)$ para α negativo escrevemos $\alpha = -\beta$, onde $\beta > 0$.

Teorema 2.6.3. *Se* $\beta > 0$, *seja* $\delta = \max\{0, 1-\beta\}$. *Então se* $x > 1$ *temos*

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \sigma_{-\beta}(n) &= \zeta(\beta+1)x + O(x^\delta) \quad \textit{se } \beta \neq 1, \\ &= \zeta(2)x + O(\log x) \quad \textit{se } \beta = 1.\end{aligned}$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \sigma_{-\beta}(n) &= \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} \frac{1}{d^\beta} = \sum_{d\leq x} \frac{1}{d^\beta} \sum_{q\leq x/d} 1 \\ &= \sum_{d\leq x} \frac{1}{d^\beta}\left\{\frac{x}{d} + O(1)\right\} = x\sum_{d\leq x} \frac{1}{d^{\beta+1}} + O\left(\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^\beta}\right).\end{aligned}$$

O último termo é $O(\log x)$ se $\beta = 1$ e $O(x^\delta)$ se $\beta \neq 1$. Desde que

$$x\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^{\beta+1}} = \frac{x^{1-\beta}}{-\beta} + \zeta(\beta+1)x + O(x^{-\beta}) = \zeta(\beta+1)x + O(x^{1-\beta}).$$

Isso completa a prova. ∎

2.7 A ordem média de $\varphi(n)$

A fórmula assintótica para as somas parciais da função φ de Euler envolve a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2}.$$

Esta série converge absolutamente, pois é limitada por $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$. Em [1, Teorema 11.5], está provado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}. \tag{2.12}$$

Assumindo este resultado por enquanto temos

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2} - \sum_{n>x}\frac{\mu(n)}{n^2} \\ &= \frac{6}{\pi^2} + O\left(\sum_{n>x}\frac{1}{n^2}\right) = \frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

pela parte (c) do Teorema 2.4.1. Agora usamos isso para obter a ordem média de $\varphi(n)$.

Teorema 2.7.1. *Para $x > 1$ temos*

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\log x), \tag{2.13}$$

então a ordem média de $\varphi(n)$ é $3n/\pi^2$.

Demonstração. O método é semelhante ao usado para as funções divisoras. Começamos com a relação

$$\varphi(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{q}$$

e obter

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x}\varphi(n) &= \sum_{n\leq x}\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{q} = \sum_{q,d\ qd\leq x}\mu(d)q = \sum_{d\leq x}\mu(d)\sum_{q\leq x/d}q \\
&= \sum_{d\leq x}\mu(d)\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{d}\right)^2 + O\left(\frac{x}{d}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}x^2\sum_{d\leq x}\frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(x\sum_{d\leq x}\frac{1}{d}\right) \\
&= \frac{1}{2}x^2\left\{\frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right\} + O(x\log x) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\log x).
\end{aligned}$$

∎

Capítulo 3

Alguns Teoremas Elementares sobre a Distribuição de Números Primos

3.1 Introdução

Para $x > 0$, $\pi(x)$ denota o número de primos que não excede x. Então $\pi(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$ já que existem infinitos primos. O comportamento de $\pi(x)$ em função de x tem sido objeto de intenso estudo por muitos matemáticos célebres desde o século XVIII. A inspeção de tabelas de primos levou Gauss (1792) e Legendre (1798) a conjecturar que $\pi(x)$ é assintótico a $x/\log x$, ou seja,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1.$$

Esta conjectura foi provada pela primeira vez em 1896 por Hadamard [3] e de la Vallée Poussin [8] e é conhecida agora como o teorema dos números primos.

As provas do teorema dos números primos são frequentemente classificadas como analíticas ou elementares, dependendo dos métodos usados para realizá-las. A prova de Hadamard e de la Vallée Poussin é analítica, usando teoria de funções complexas e propriedades da função zeta de Riemann. Uma prova elementar foi descoberta em 1949 por A. Selberg e P. Erdos. Sua prova não faz uso da função zeta nem da teoria de funções complexas, mas é bastante complexa. Este capítulo trata principalmente de teoremas elementares sobre primos. Em particular, mostramos que o teorema dos números primos pode ser expresso de várias formas equivalentes.

Por exemplo, mostraremos que o teorema dos números primos é equivalente à fórmula assintótica

$$\sum_{n\le x} \Lambda(n) \sim x \quad \text{quando } x \to \infty. \tag{3.1}$$

As somas parciais da função de Mangoldt $\Lambda(n)$ definem uma função introduzida por Chebyshev em 1848.

3.2 Funções $\psi(x)$ e $\vartheta(x)$ de Chebyshev

Definição 3.2.1. *Para $x > 0$ definimos a função $\psi(x)$ de Chebyshev pela fórmula*

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Assim, a fórmula assintótica em (3.1) afirma que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1. \tag{3.2}$$

Como $\Lambda(n) = 0$, a menos que n seja uma potência prima, podemos escrever a definição de $\psi(x)$ da seguinte forma:

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{\substack{m=1 \\ p^m \leq x}}^{\infty} \sum_{p} \Lambda(p^m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \leq x^{1/m}} \log p.$$

A soma em m é na verdade uma soma finita. De fato, a soma em p é vazia se $x^{1/m} < 2$, ou seja, se $(1/m)\log x < \log 2$, ou se

$$m > \frac{\log x}{\log 2} = \log_2 x.$$

Portanto temos

$$\psi(x) = \sum_{m \leq \log_2 x} \sum_{p \leq x^{1/m}} \log p.$$

Definição 3.2.2. *Se $x > 0$ definimos a função $\vartheta(x)$ de Chebyshev pela equação*

$$\vartheta(x) = \sum_{n \leq x} \log p,$$

onde p percorre todos os primos $\leq x$.

A última fórmula para $\psi(x)$ agora pode ser reformulada da seguinte forma:

$$\psi(x) = \sum_{m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}). \tag{3.3}$$

O próximo teorema relaciona os dois quocientes $\psi(x)/x$ e $\vartheta(x)/x$.

Teorema 3.2.1. *Para $x > 0$, temos*

$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{(\log x)^2}{2\sqrt{x}\log 2}.$$

Observação 3.2.1. *Essa desigualdade implica que*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\psi(x)}{x}-\frac{\vartheta(x)}{x}\right)=0.$$

Em outras palavras, se um de $\dfrac{\psi(x)}{x}$ *ou* $\vartheta(x)/x$ *tende a um limite, então o outro também tende, e os dois limites são iguais.*

Demonstração. De (3.3) encontramos

$$0\le\psi(x)-\vartheta(x)=\sum_{2\le m\le\log_2 x}\vartheta(x^{1/m}).$$

Mas da definição de $\vartheta(x)$ temos a desigualdade trivial

$$\vartheta(x)\le\sum_{p\le x}\log x\le x\log x$$

assim

$$\begin{aligned}0\le\psi(x)-\vartheta(x) &\le \sum_{2\le m\le\log_2 x}x^{1/m}\log(x^{1/m})\le(\log_2 x)\sqrt{x}\log\sqrt{x}\\ &= \frac{\log x}{\log 2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2}\log x=\frac{\sqrt{x}(\log 2)^2}{2\log 2}.\end{aligned}$$

Agora divida por x para obter o teorema. ∎

3.3 Relações conectando $\vartheta(x)$ e $\pi(x)$

Nesta seção obtemos duas fórmulas relacionando $\vartheta(x)$ e $\pi(x)$. Estes serão usados para mostrar que o teorema dos números primos é equivalente à relação limite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\vartheta(x)}{x}=1.$$

Ambas as funções $\pi(x)$ e $\vartheta(x)$ são funções degrau com saltos nos primos; $\pi(x)$ tem um salto de 1 em cada primo p, enquanto $\vartheta(x)$ tem um salto de $\log p$ em p. As somas envolvendo funções degrau desse tipo podem ser expressas como integrais por meio do seguinte teorema.

Teorema 3.3.1. *A identidade de Abel. Para qualquer função aritmética* $a(n)$ *seja*

$$A(x)=\sum_{n\le x}a(n),$$

onde $A(x) = 0$ *se* $x < 1$. *Suponha que f tenha uma derivada contínua no intervalo* $[y, x]$, *onde* $0 < y < x$. *Então nós temos*

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt. \tag{3.4}$$

Demonstração. Seja $k = [x]$ e $m = [y]$, de modo que $A(x) = A(k)$ e $A(y) = A(m)$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= \sum_{n=m+1}^{k} a(n)f(n) = \sum_{n=m+1}^{k} \{A(n) - A(n-1)\}f(n) \\
&= \sum_{n=m+1}^{k} A(n)f(n) - \sum_{n=m}^{k-1} A(n)f(n+1) \\
&= \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)\{f(n) - f(n+1)\} + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\
&= -\sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)\int_n^{n+1} f'(t)dt + A(k)f(x) - A(m)f(m+1) \\
&= -\sum_{n=m+1}^{k-1} \int_n^{n+1} A(t)f'(t)dt + A(k)f(x) - A(m)f(m+1) \\
&= -\int_{m+1}^{k} A(t)f'(t)dt + A(k)f(x) - \int_k^x A(t)f'(t)dt - A(y)f(y) - \int_y^{m+1} A(t)f'(t)dt \\
&= A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt.
\end{aligned}$$

∎

Demonstração. `PROVA ALTERNATIVA.` Uma prova mais curta de (3.4) está disponível para os leitores familiarizados com a integração de Riemann-Stieltjes. (Veja [1], Capítulo 7.) Como $A(x)$ é uma função degrau com salto $f(n)$ em cada inteiro n, a soma em (3.4) pode ser expressa como uma integral de Riemann-Stieltjes,

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = \int_y^x f(t)dA(t).$$

A integração por partes nos dá

$$\begin{aligned}
\sum_{y<n\leq x} f(n) &= f(x)A(x) - f(y)A(y) - \int_y^x A(t)df(t) \\
&= f(x)A(x) - f(y)A(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt.
\end{aligned}$$

∎

Observação. Como $A(t) = 0$ se $t < 1$, quando $y < 1$ a Equação (3.4) assume a forma

$$\sum_{n\leq x} a(n)f(n) = f(x)A(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt. \tag{3.5}$$

Deve-se notar também que a fórmula de soma de Euler pode ser facilmente deduzida de (3.4). De fato, se $a(n) = 1$ para todo $n \geq 1$ encontramos $A(x) = [x]$ e (3.4) implica

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = f(x)[x] - f(y)[y] - \int_y^x [t]f'(t)dt.$$

Combinando isso com a fórmula de integração por partes

$$\int_y^x tf'(t)dt = xf(x) - yf(y) - \int_y^x f(t)dt$$

obtemos imediatamente a fórmula de soma de Euler (Teorema 1.2.1).

Agora usamos (3.4) para expressar $\vartheta(x)$ e $\pi(x)$ em termos de integrais.

Teorema 3.3.2. *Para $x \geq 2$ temos*

$$\vartheta(x) = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt \tag{3.6}$$

e

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}dt. \tag{3.7}$$

Demonstração. Seja $a(n)$ a função característica dos primos; isso é

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é primo,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, temos

$$\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1 = \sum_{1<n\leq x} a(n) \quad \text{e} \quad \vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \log p = \sum_{1<n\leq x} a(n)\log n.$$

Fazendo $f(x) = \log x$ em (3.4) com $y = 1$ obtemos

$$\vartheta(x) = \sum_{1<n\leq x} a(n)\log n = \pi(x)\log x - \pi(1)\log 1 - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t}dt,$$

o que prova (3.6) uma vez que $\pi(t) = 0$ para $t < 2$.

Em seguida, seja $b(n) = a(n)\log n$ e escreva

$$\pi(x) = \sum_{3/2<n\leq x} b(n)\frac{1}{\log n}, \qquad \vartheta(x) = \sum_{n\leq x} b(n).$$

Falando $f(x) = 1/\log x$ em (3.4) com $y = 3/2$ obtemos

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} - \frac{\vartheta(3/2)}{\log 3/2} + \int_{3/2}^x \frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}dt,$$

o que prova (3.7) uma vez que $\vartheta(t) = 0$ se $t < 2$. ∎

3.4 Algumas formas equivalentes do teorema dos números primos

Teorema 3.4.1. *As seguintes relações são logicamente equivalentes:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1. \tag{3.8}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1. \tag{3.9}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1. \tag{3.10}$$

Demonstração. De (3.6) e (3.7) obtemos, respectivamente,

$$\frac{\vartheta(x)}{x} = \frac{\pi(x)\log x}{x} - \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt$$

e

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} = \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)dt}{t\log^2 t}.$$

Para mostrar que (3.8) implica (3.9) precisamos apenas mostrar que (3.8) implica

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt = 0.$$

Mas (3.8) implica $\dfrac{\pi(t)}{t} = O\left(\dfrac{1}{\log t}\right)$ para $t \geq 2$ então

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt = O\left(\frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log t}\right).$$

Agora

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log t} \leq \frac{\sqrt{x}}{\log 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{\log\sqrt{x}},$$

assim

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log t} \to 0 \quad \text{quando } x \to \infty.$$

Isso mostra que (3.8) implica (3.9).

Para mostrar que (3.9) implica (3.8) precisamos apenas mostrar que (3.9) implica

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)dt}{t\log^2 t} = 0.$$

Mas (3.9) implica $\vartheta(t) = O(t)$ então

$$\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)dt}{t\log^2 t} = O\left(\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t}\right).$$

Agora

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log^2 t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log^2 t} \leq \frac{\sqrt{x}}{\log^2 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{\log^2\sqrt{x}},$$

por isso

$$\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \to 0 \quad \text{quando } x\to\infty.$$

Isso prova que (3.9) implica (3.8), então (3.8) e (3.9) são equivalentes. Já sabemos, pelo Teorema 3.2.1, que (3.9) e (3.10) são equivalentes. ∎

O próximo teorema relaciona o teorema dos números primos ao valor assintótico do enésimo primo.

Teorema 3.4.2. *Seja p_n o enésimo primo. Então as seguintes relações assintóticas são logicamente equivalentes:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x} = 1. \tag{3.11}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log \pi(x)}{x} = 1. \tag{3.12}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{n\log n} = 1. \tag{3.13}$$

Demonstração. Mostramos que (3.11) implica (3.12), (3.12) implica (3.13), (3.13) implica (3.12) e (3.12) implica (3.11).

Suponha que (3.11) seja válido. Fazendo logaritmos obtemos

$$\lim_{x\to\infty}[\log\pi(x) + \log\log x - \log x] = 0$$

ou

$$\lim_{x\to\infty}\left[\log x\left(\frac{\log\pi(x)}{\log x} + \frac{\log\log x}{\log x} - 1\right)\right] = 0.$$

Como $\log x\to\infty$ quando $x\to\infty$ segue que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log\pi(x)}{\log x} + \frac{\log\log x}{\log x} - 1\right) = 0$$

de onde obtemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log\pi(x)}{\log x} = 1.$$

Isso, junto com (3.11), dá (3.12).

Agora suponha (3.12) vale. Se $x = p_n$ então $\pi(x) = n$ e

$$\pi(x) \log \pi(x) = n \log n$$

então (3.12) implica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{p_n} = 1.$$

Assim, (3.12) implica (3.13).

Em seguida, suponha que (3.13) seja válido. Dado x, defina n pelas desigualdades

$$p_n \leq x < p_{n+1},$$

de modo que $n = \pi(x)$. Dividindo por $n \log n$, temos

$$\frac{p_n}{n \log n} \leq \frac{x}{n \log n} < \frac{p_{n+1}}{n \log n} = \frac{p_{n+1}}{(n+1)\log(n+1)} \frac{(n+1)\log(n+1)}{n \log n}.$$

Agora seja $n \to \infty$ e use (3.13) para obter

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n \log n} = 1, \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\pi(x) \log \pi(x)} = 1.$$

Portanto, (3.13) implica (3.12).

Finalmente, mostramos que (3.12) implica (3.11). Tomando logaritmos em (3.12) obtemos

$$\lim_{x\to\infty} (\log \pi(x) + \log\log \pi(x) - \log x) = 0$$

ou

$$\lim_{x\to\infty} \left[\log \pi(x) \left(1 + \frac{\log\log \pi(x)}{\log \pi(x)} - \frac{\log x}{\log \pi(x)}\right)\right] = 0.$$

Como $\log \pi(x) \to \infty$ segue que

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\log\log \pi(x)}{\log \pi(x)} - \frac{\log x}{\log \pi(x)}\right) = 0$$

ou

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\log \pi(x)} = 1.$$

Isso, junto com (3.12), dá (3.11). ∎

3.5 Desigualdades para $\pi(n)$ e p_n

O teorema dos números primos afirma que $\pi(n) \sim n/\log n$ quando $n \to \infty$. As desigualdades no próximo teorema mostram que $n/\log n$ é a ordem correta de magnitude de $\pi(n)$. Embora melhores desigualdades possam ser obtidas com maior esforço (veja [5]), o seguinte teorema é de interesse devido à natureza elementar de sua prova.

Teorema 3.5.1. *Para todo inteiro $n \geq 2$ temos*

$$\frac{1}{6}\frac{n}{\log n} < \pi(n) < 6\frac{n}{\log n}. \tag{3.14}$$

Demonstração. Começamos com as desigualdades

$$2^n \leq \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right) < 4^n, \tag{3.15}$$

onde $\left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right) = \frac{(2n)!}{n!n!}$ é um coeficiente binomial. A desigualdade da direita segue da relação

$$4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \left(\begin{array}{c} 2n \\ k \end{array}\right) > \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right),$$

e o outro é facilmente verificado por indução. Tomando logaritmos em (3.15) encontramos

$$n\log 2 \leq \log(2n)! - 2\log n! < n\log 4. \tag{3.16}$$

Mas o Teorema 2.14 implica que

$$\log n! = \sum_{p\leq n} \alpha(p)\log p$$

onde a soma é estendida sobre primos e $\alpha(p)$ é dado por

$$\alpha(p) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{\log n}{\log p}\right]} \left[\frac{n}{p^m}\right].$$

Por isso

$$\log(2n)! - 2\log n! = \sum_{p\leq 2n} \sum_{m=1}^{\left[\frac{\log 2n}{\log p}\right]} \left\{\left[\frac{2n}{p^m}\right] - 2\left[\frac{n}{p^m}\right]\right\}\log p. \tag{3.17}$$

Como $[2x] - 2[x]$ é 0 ou 1, a desigualdade da esquerda em (3.16) implica

$$n \log 2 \leq \sum_{p \leq 2n} \left(\sum_{m=1}^{\left[\frac{\log 2n}{\log p}\right]} 1 \right) \log p \leq \sum_{p \leq 2n} \log 2n = \pi(2n) \log 2n.$$

Isso nos dá

$$\pi(2n) \geq \frac{n \log 2}{\log 2n} = \frac{2n}{\log 2n} \frac{\log 2}{2} > \frac{1}{4} \frac{2n}{\log 2n} \tag{3.18}$$

já que $\log 2 > 1/2$. Para inteiros ímpares temos

$$\pi(2n+1) \geq \pi(2n) > \frac{1}{4} \frac{2n}{\log 2n} > \frac{1}{4} \frac{2n}{2n+1} \frac{2n+1}{\log(2n+1)} \geq \frac{1}{6} \frac{2n+1}{\log(2n+1)}$$

desde que $2n/(2n+1) > 2/3$. Isso, junto com (3.18), nos dá

$$\pi(n) > \frac{1}{6} \frac{n}{\log n}$$

para todo $n \geq 2$, o que prova a desigualdade mais à esquerda em (3.14).

Para provar a outra desigualdade voltamos a (3.17) e extraímos o termo correspondente a $m = 1$. Os termos restantes são não negativos, então temos

$$\log(2n)! - 2 \log n! \geq \sum_{p \leq 2n} \left\{ \left[\frac{2n}{p} \right] - 2 \left[\frac{n}{p} \right] \right\} \log p.$$

Para aqueles primos p no intervalo $n < p \leq 2n$ temos $[2n/p] - 2[n/p] = 1$ então

$$\log(2n)! - 2 \log n! \geq \sum_{n < p \leq 2n} \log p = \vartheta(2n) - \vartheta(n).$$

Portanto (3.16) implica

$$\vartheta(2n) - \vartheta(n) < n \log 4.$$

Em particular, se n é uma potência de 2, isso dá

$$\vartheta(2^{r+1}) - \vartheta(2^r) < 2^r \log 4 = 2^{r+1} \log 2.$$

Somando em $r = 0, 1, 2, \ldots, k$, a soma nos telescópios da esquerda e encontramos

$$\vartheta(2^{k+1}) < 2^{k+2} \log 2.$$

Agora escolhemos k de modo que $2^k \leq n < 2^{k+1}$ e obtemos

$$\vartheta(n) \leq \vartheta(2^{k+1}) < 2^{k+2} \log 2 \leq 4n \log 2.$$

Mas se $0 < \alpha < 1$ temos

$$(\pi(n) - \pi(n^\alpha)) \log n^\alpha < \sum_{n^\alpha < p \leq n} \log p \leq \vartheta(n) < 4n \log 2,$$

por isso

$$\begin{aligned} \pi(n) &< \frac{4n \log 2}{\alpha \log n} + \pi(n^\alpha) < \frac{4n \log 2}{\alpha \log n} + n^\alpha \\ &= \frac{n}{\log n} \left(\frac{4 \log 2}{\alpha} + \frac{\log n}{n^{1-\alpha}} \right). \end{aligned}$$

Agora, se $c > 0$ e $x \geq 1$ a função $f(x) = x^{-c} \log x$ atinge o máximo em $x = e^{1/c}$, então $n^{-c} \log n \leq 1/(ce)$ para $n \geq 1$. Tomando $\alpha = 2/3$ na última desigualdade para $\pi(n)$, encontramos

$$\pi(n) < \frac{n}{\log n} \left(6 \log 2 + \frac{3}{e} \right) < 6 \frac{n}{\log n}.$$

Isso completa a prova. ∎

O Teorema 3.5.1 pode ser usado para obter os limites superior e inferior do tamanho do enésimo primo.

Teorema 3.5.2. *Para $n \geq 1$ o enésimo primo p_n satisfaz as desigualdades*

$$\frac{1}{6} n \log n < p_n < 12 \left(n \log n + n \log \frac{12}{e} \right). \tag{3.19}$$

Demonstração. Se $k = p_n$ então $k \geq 2$ e $n = \pi(k)$. De (3.14) temos

$$n = \pi(k) < 6 \frac{k}{\log k} = 6 \frac{p_n}{\log p_n}$$

por isso

$$p_n > \frac{1}{6} n \log p_n > \frac{1}{6} n \log n.$$

Isso dá o limite inferior em (3.19).

Para obter o limite superior, usamos novamente (3.14) para escrever

$$n = \pi(k) > \frac{1}{6} \frac{k}{\log k} = \frac{1}{6} \frac{p_n}{\log p_n},$$

do qual encontramos

$$p_n < 6n \log p_n. \tag{3.20}$$

Como $\log x \leq (2/e)\sqrt{x}$ se $x \geq 1$ temos $\log p_n \leq (2/e)\sqrt{p_n}$, então (3.20) implica

$$\sqrt{p_n} < \frac{12}{e} n.$$

Portanto

$$\frac{1}{2} \log p_n < \log n + \log \frac{12}{e}$$

que, quando usado em (3.20), nos dá

$$p_n < 6n \left(2 \log n + 2 \log \frac{12}{e} \right).$$

Isso prova o limite superior em (3.19). ∎

Observação 3.5.1. *O limite superior em (3.19) mostra mais uma vez que a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

diverge, em comparação com $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n \log n)$.

3.6 Teorema Tauberiano de Shapiro

Mostramos que o teorema dos números primos é equivalente à fórmula assintótica

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \sim 1 \quad \text{com } x \to \infty. \tag{3.21}$$

No Teorema 2.15 derivamos uma fórmula assintótica relacionada,

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n} \right] = x \log x - x + O(\log x). \tag{3.22}$$

Ambas as somas em (3.21) e (3.22) são médias ponderadas da função $\Lambda(n)$. Cada termo $\Lambda(n)$ é multiplicado por um fator de peso $1/x$ em (3.21) e por $[x/n]$ em (3.22).

Teoremas que relacionam diferentes médias ponderadas de uma mesma função são chamados de *teoremas tauberianos*. Discutimos a seguir um teorema tauberiano provado em 1950 por H. N. Shapiro [6]. Relaciona somas da forma $\sum_{n \leq x} a(n)$ com as da forma $\sum_{n \leq x} a(n)[x/n]$ para $a(n)$ não-negativa.

Teorema 3.6.1. *Seja $\{a(n)\}$ uma sequência não negativa tal que*

$$\sum_{n\leq x} a(n)\left[\frac{x}{n}\right] = x\log x + O(x) \quad \textit{para todo } x\geq 1. \tag{3.23}$$

Então:

(a) Para $x \geq 1$ temos
$$\sum_{n\leq x}\frac{a(n)}{n} = \log x + O(1).$$

(Em outras palavras, eliminar os colchetes em (3.23) leva a um resultado correto.)

(b) Existe uma constante $B > 0$ tal que

$$\sum_{n\leq x} a(n) \leq Bx \quad \textit{para todo } x \geq 1.$$

(c) Existe uma constante $A > 0$ e $x_0 > 0$ tal que

$$\sum_{n\leq x} a(n) \geq Ax \quad \textit{para todo } x \geq x_0.$$

Demonstração. Seja
$$S(x) = \sum_{n\leq x} a(n), \qquad T(x) = \sum_{n\leq x} a(n)\left[\frac{x}{n}\right].$$

Primeiro provamos (b). Para isso, estabelecemos a desigualdade

$$S(x) - S\left(\frac{x}{2}\right) \leq T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right). \tag{3.24}$$

Nós escrevemos

$$\begin{aligned} T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{n\leq x}\left[\frac{x}{n}\right]a(n) - 2\sum_{n\leq x/2}\left[\frac{x}{2n}\right]a(n) \\ &= \sum_{n\leq x/2}\left(\left[\frac{x}{n}\right] - 2\left[\frac{x}{2n}\right]\right)a(n) + \sum_{x/2<n\leq x}\left[\frac{x}{n}\right]a(n). \end{aligned}$$

Como $[2y] - 2[y]$ é 0 ou 1, a primeira soma é não negativa, então

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) \geq \sum_{x/2<n\leq x}\left[\frac{x}{n}\right]a(n) = \sum_{x/2<n\leq x} a(n) = S(x) - S\left(\frac{x}{2}\right).$$

Isso prova (3.24). Mas (3.23) implica

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = x\log x + O(x) - 2\left(\frac{x}{2}\log\frac{x}{2} + O(x)\right) = O(x).$$

Portanto (3.24) implica $S(x) - S(x/2) = O(x)$. Isso significa que existe alguma constante $K > 0$ tal que

$$S(x) - \left(\frac{x}{2}\right) \leq Kx \quad \text{para todo } x \geq 1.$$

Substitua x sucessivamente por $x/2, x/4, \ldots$ para obter

$$S\left(\frac{x}{2}\right) - S\left(\frac{x}{4}\right) \leq K\frac{x}{2},$$

$$S\left(\frac{x}{4}\right) - S\left(\frac{x}{8}\right) \leq K\frac{x}{4},$$

etc. Observe que $S(x/2^n) = 0$ quando $2^n > x$. Somando essas desigualdades temos

$$S(x) \leq Kx\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 2Kx.$$

Isto prova (b) com $B = 2K$.

A seguir provamos (a). Escrevemos $[x/n] = (x/n) + O(1)$ e obtemos

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n\leq x}\left[\frac{x}{n}\right]a(n) = \sum_{n\leq x}\left(\frac{x}{n} + O(1)\right)a(n) = x\sum_{n\leq x}\frac{a(n)}{n}O\left(\sum_{n\leq x}a(n)\right) \\ &= x\sum_{n\leq x}\frac{a(n)}{n}O(x), \end{aligned}$$

pela parte (b). Por isso

$$\sum_{n\leq x}\frac{a(n)}{n} = \frac{1}{x}T(x) + O(1) = \log x + O(1).$$

Isso prova (a).

Finalmente, provamos (c). Deixar

$$A(x) = \sum_{n\leq x}\frac{a(n)}{n}.$$

Então (a) pode ser escrito da seguinte forma:

$$A(x) = \log x + R(x),$$

onde $R(x)$ é o termo de erro. Como $R(x) = O(1)$ temos $|R(x)| \leq M$ para algum $M > 0$.

Escolha α para satisfazer $0 < \alpha < 1$ (devemos especificar α mais exatamente em um momento) e considere a diferença

$$A(x) - A(\alpha x) = \sum_{\alpha x < n \leq x} \frac{a(n)}{n} = \sum_{n \leq x} \frac{a(n)}{n} - \sum_{n \leq \alpha x} \frac{a(n)}{n}.$$

Se $x \geq 1$ e $\alpha x \geq 1$ podemos aplicar a fórmula assintótica para $A(x)$ para escrever

$$\begin{aligned} A(x) - A(\alpha x) &= \log x + R(x) - (\log \alpha x + R(\alpha x)) \\ &= -\log \alpha + R(x) - R(\alpha x) \\ &\geq -\log \alpha + |R(x)| - |R(\alpha x)| \geq -\log \alpha - 2M. \end{aligned}$$

Agora escolha α para que $-\log \alpha - 2M = 1$. Isso requer $\log \alpha = -2M - 1$, ou $\alpha = e^{-2M-1}$. Observe que $0 < \alpha < 1$. Para este α, temos a desigualdade

$$A(x) - A(\alpha x) \geq 1 \quad \text{se } x \geq 1/\alpha.$$

Mas

$$A(x) - A(\alpha x) = \sum_{\alpha x < n \leq x} \frac{a(n)}{n} \leq \frac{1}{\alpha x} \sum_{n \leq x} a(n) = \frac{S(x)}{\alpha x}.$$

Por isso

$$\frac{S(x)}{\alpha x} \geq 1 \quad \text{se } x \geq 1/\alpha.$$

Portanto $S(x) > \alpha x$ se $x \geq 1/\alpha$, o que prova (c) com $A = \alpha$ e $x_0 = 1/\alpha$. ∎

3.7 Aplicação do Teorema de Shapiro

A equação (3.22) implica

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n} \right] = x \log x + O(x).$$

Como $\Lambda(n) \geq 0$ podemos aplicar o teorema de Shapiro com $a(n) = \Lambda(n)$ para obter:

Teorema 3.7.1. *Para todo $x \geq 1$ temos*

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1). \tag{3.25}$$

Além disso, existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$\psi \leq c_1 x \quad \textit{para todo } x \geq 1$$

e

$$\psi \geq c_2 x \quad \textit{para todo } x \textit{ suficientemente grande}.$$

Outra aplicação pode ser deduzida da fórmula assintótica

$$\sum_{p\leq x}\left[\frac{x}{n}\right]\log p = x\log x + O(x)$$

provado no Teorema 2.16. Isso pode ser escrito na forma

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\left[\frac{x}{n}\right] = x\log x + O(x), \tag{3.26}$$

onde Λ_1 é a função definida como segue:

$$\Lambda_1(n) = \begin{cases} \log p & \text{se } n \text{ é um primo } p, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $\Lambda_1(n) \geq 0$, a Equação (3.26) mostra que a hipótese do teorema de Shapiro é satisfeita com $a(n) = \Lambda_1(n)$. Como $\vartheta(x) = \sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)$, a parte (a) do teorema de Shapiro nos dá a seguinte fórmula assintótica.

Teorema 3.7.2. *Para todo $x \geq 1$ temos*

$$\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} = \log x + O(1). \tag{3.27}$$

Além disso, existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$\vartheta(x) \leq c_1 x \quad \textit{para todo } x \geq 1$$

e

$$\vartheta(x) \geq c_2 x \quad \textit{para todo } x \textit{ suficientemente grande}.$$

No Teorema 2.7 provamos que

$$\sum_{n\leq x} f(n)\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n\leq x} F\left(\frac{x}{n}\right)$$

para qualquer função aritmética $f(n)$ com somas parciais $F(x) = \sum_{n\leq x} f(n)$. Como $\psi(x) = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)$ e $\vartheta(x) = \sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)$, as fórmulas assintóticas em (3.22) e (3.26) podem ser expressas diretamente em termos de $\psi(x)$ e $\vartheta(x)$. Nós os declaramos como um teorema formal.

Teorema 3.7.3. *Para todo $x \geq 1$ temos*

$$\sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = x \log x - x + O(\log x) \tag{3.28}$$

e

$$\sum_{n \leq x} \vartheta\left(\frac{x}{n}\right) = x \log x + O(x).$$

3.8 Uma fórmula assintótica para as somas parciais $\sum_{p \leq x}(1/p)$

Teorema 3.8.1. *Existe uma constante A tal que*

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + A + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \quad \textit{para todo } x \geq 2. \tag{3.29}$$

Demonstração. Seja

$$A(x) = \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p}$$

e seja

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é um primo ,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \sum_{n \leq x} \frac{a(n)}{n} \quad \text{e} \quad A(x) = \sum_{n \leq x} \frac{a(n)}{n} \log n.$$

Aí se tomarmos $f(t) = 1/\log t$ no Teorema 3.3.1 encontramos, já que $A(t) = 0$ para $t < 2$,

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{A(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{A(t)}{t \log^2 t} dt. \tag{3.30}$$

De (3.27) temos $A(x) = \log x + R(x)$, onde $R(x) = O(1)$. Usando isso à direita de (3.30), encontramos

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} &= \frac{\log x + O(1)}{\log x} + \int_2^x \frac{\log t + R(t)}{t \log^2 t} dt \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) + \int_2^x \frac{dt}{t \log t} + \int_2^x \frac{R(t)}{t \log^2 t} dt. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Agora

$$\int_2^x \frac{dt}{t \log t} = \log \log x - \log \log 2$$

e

$$\int_2^x \frac{R(t)}{t \log^2 t} dt = \int_2^\infty \frac{R(t)}{t \log^2 t} dt - \int_x^\infty \frac{R(t)}{t \log^2 t} dt,$$

a existência da integral imprópria é assegurada pela condição $R(t) = O(1)$. Mas

$$\int_x^\infty \frac{R(t)}{t\log^2 t}dt = O\left(\int_x^\infty \frac{dt}{t\log^2 t}\right) = O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Portanto, a Equação (3.31) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = \log\log x + 1 - \log\log 2 + \int_x^\infty \frac{R(t)}{t\log^2 t}dt + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Isso prova o teorema com

$$A = 1 - \log\log 2 + \int_x^\infty \frac{R(t)}{t\log^2 t}dt.$$

∎

3.9 As somas parciais da função Möbius

Definição 3.9.1. *Se $x \geq 1$ definimos*

$$M(x) = \sum_{n\leq x}\mu(n).$$

A ordem exata de magnitude de $M(x)$ não é conhecida. A evidência numérica sugere que

$$|M(x)| < \sqrt{x} \quad \text{se } x > 1,$$

mas essa desigualdade, conhecida como conjectura de Mertens, não foi provada nem refutada. O melhor resultado obtido até o momento é

$$M(x) = O(x\delta(x))$$

onde $\delta(x) = \exp\{-A\log^{3/5}x(\log\log x)^{-1/5}\}$ para alguma constante positiva A. (Uma prova é dada em Walfisz [9].)

Nesta seção provamos que a afirmação mais fraca

$$\lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x} = 0$$

é equivalente ao teorema dos números primos. Primeiro relacionamos $M(x)$ com outra média ponderada de $\mu(n)$.

Definição 3.9.2. *Se $x \geq 1$ definimos*

$$H(x) = \sum_{n\leq x}\mu(n)\log n.$$

O próximo teorema mostra que o comportamento de $M(x)/x$ é determinado pelo comportamento de $H(x)/(x\log x)$.

Teorema 3.9.1. *Temos*
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{M(x)}{x}-\frac{H(x)}{x\log x}\right)=0. \tag{3.32}$$

Demonstração. Substituindo $f(t)=\log t$ no Teorema 3.3.1 obtemos

$$H(x)=\sum_{n\leq x}\mu(n)\log n = M(x)\log x-\int_1^x\frac{M(t)}{t}dt.$$

Portanto, se $x>1$ temos
$$\frac{M(x)}{x}-\frac{H(x)}{x\log x}=\frac{1}{x\log x}\int_1^x\frac{M(t)}{t}dt.$$

Portanto, para provar o teorema, devemos mostrar que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\log x}\int_1^x\frac{M(t)}{t}dt=0. \tag{3.33}$$

Mas temos a estimativa trivial $M(x)=O(x)$ então

$$\int_1^x\frac{M(t)}{t}dt=O\left(\int_1^x dt\right)=O(x),$$

de onde obtemos (3.33) e, portanto, (3.32). ∎

Teorema 3.9.2. *O teorema dos números primos implica*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}=0.$$

Demonstração. Usamos o teorema dos números primos na forma $\psi(x)\sim x$ e provamos que $H(x)/(x\log x)\to 0$ como $x\to\infty$. Para isso, exigiremos a identidade

$$-H(x)=-\sum_{n\leq x}\mu(n)\log n=\sum_{n\leq x}\mu(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right). \tag{3.34}$$

Para provar (3.34), começamos com o Teorema 1.7.2, que afirma que

$$\Lambda(n)=-\sum_{d|n}\mu(d)\log d$$

e aplique a inversão de Möbius para obter

$$-\mu(n)\log n=\sum_{d|n}\mu(d)\Lambda\left(\frac{n}{d}\right).$$

Somando sobre todo $n\leq x$ e usando o Teorema 2.10 com $f=\mu$, $g=\Lambda$, obtemos (3.34).

Como $\psi(x) \sim x$, se $\varepsilon > 0$ é dado, existe uma constante $A > 0$ tal que

$$\left|\frac{\psi(x)}{x} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{sempre que } x \geq A.$$

Em outras palavras, temos

$$|\psi(x) - x| < \varepsilon x \quad \text{sempre que } x \geq A. \tag{3.35}$$

Escolha $x > A$ e divida a soma à direita de (3.34) em duas partes,

$$\sum_{n \leq y} + \sum_{y < n \leq x},$$

onde $y = [x/A]$. Na primeira soma temos $n \leq y$ então $n \leq x/A$ e, portanto, $x/n \geq A$. Portanto, podemos usar (3.35) para escrever

$$\left|\psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right| < \varepsilon \frac{x}{n} \quad \text{se } n \leq y.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq y} \mu(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n \leq y} \mu(n)\left(\frac{x}{n} + \psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right) \\
&= x\sum_{n \leq y} \frac{\mu(n)}{n} + \sum_{n \leq y} \mu(n)\left(\psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right),
\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n \leq y} \mu(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right)\right| &\leq x\left|\sum_{n \leq y} \frac{\mu(n)}{n}\right| + \sum_{n \leq y}\left|\psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right| \\
&< x + \varepsilon \sum_{n \leq y} \frac{x}{n} < x + \varepsilon x(1 + \log y) \\
&< x + \varepsilon x + \varepsilon x \log x.
\end{aligned}$$

Na segunda soma temos $y < n \leq x$ então $n \geq y + 1$. Por isso

$$\frac{x}{n} \leq \frac{x}{y+1} < A$$

porque

$$y \leq \frac{x}{A} < y + 1.$$

A desigualdade $(x/n) < A$ implica $\psi(x/n) \leq \psi(A)$. Portanto, a segunda soma é dominada por $x\psi(A)$. Portanto, a soma total em (3.34) é dominada por

$$(1 + \varepsilon)x + \varepsilon x \log x + x\psi(A) < (2 + \psi(A))x + \varepsilon x \log x$$

se $\varepsilon < 1$. Em outras palavras, dado qualquer e tal que $0 < \varepsilon < 1$ temos

$$|H(x)| < (2 + \psi(A))x + \varepsilon x \log x \quad \text{se } x > A,$$

ou

$$\frac{|H(x)|}{x \log x} < \frac{2 + \psi(A)}{\log x} + \varepsilon.$$

Agora escolha $B > A$ de modo que $x > B$ implique $(2 + \psi(A))/\log x < \varepsilon$. Então para $x > B$ temos

$$\frac{|H(x)|}{x \log x} < 2\varepsilon,$$

o que mostra que $H(x)/(x \log x) \to 0$ quando $x \to \infty$. ∎

Voltamos à recíproca do Teorema 3.9.2 e provamos que a relação

$$\lim_{x \to \infty} \frac{M(x)}{x} = 0 \tag{3.36}$$

implica o teorema dos números primos. Primeiro, introduzimos a notação "o pequena".

Definição 3.9.3. *A notação*

$$f(x) = o(g(x)) \quad \textit{quando } x \to \infty \qquad (\textit{leia-se: } f(x) \textit{ é o pequena de } g(x))$$

significa que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Uma equação da forma

$$f(x) = h(x) + o(g(x)) \quad \text{quando } x \to \infty$$

significa que $f(x) - h(x) = o(g(x))$ como $x \to \infty$.

Assim, (3.36) afirma que

$$M(x) = o(x) \quad \text{quando } x \to \infty,$$

e o teorema dos números primos, expresso na forma $\psi(x) \sim x$, também pode ser escrito como

$$\psi(x) = x + o(x) \quad \text{quando } x \to \infty.$$

Mais geralmente, uma relação assintótica

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{quando } x \to \infty$$

é equivalente a

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad \text{quando } x \to \infty.$$

Também notamos que $f(x) = O(1)$ implica $f(x) = o(x)$ quando $x \to \infty$.

Teorema 3.9.3. *A relação*

$$M(x) = o(x) \quad \textit{quando } x \to \infty \tag{3.37}$$

implica $\psi(x) \sim x$ *quando* $x \to \infty$.

Demonstração. Primeiro expressamos $\psi(x)$ por uma fórmula do tipo

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{q,d \\ qd \le x}} \mu(d) f(q) + O(1) \tag{3.38}$$

e então use (3.37) para mostrar que a soma é $o(x)$ quando $x \to \infty$. A função f em (3.38) é dada por

$$f(n) = \sigma_0(n) - \log n - 2C,$$

onde C é a constante de Euler e $\sigma_0(n) = d(n)$ é o número de divisores de n. Para obter (3.38), começamos com as identidades

$$[x] = \sum_{n \le x} 1, \qquad \psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n), \qquad 1 = \sum_{n \le x} \left[\frac{1}{n}\right]$$

e expresse cada soma como um produto de Dirichlet envolvendo a função Möbius,

$$1 = \sum_{d|n} \mu(d) \sigma_0\left(\frac{n}{d}\right), \qquad \Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d}, \qquad \left[\frac{1}{n}\right] = \sum_{d|n} \mu(d).$$

Então

$$\begin{aligned}
[x] - \psi(x) - 2C &= \sum_{n \le x} \left\{1 - \Lambda(n) - 2C\left[\frac{1}{n}\right]\right\} \\
&= \sum_{n \le x} \sum_{d|n} \mu(d) \left\{\sigma_0\left(\frac{n}{d}\right) - \log \frac{n}{d} - 2C\right\} \\
&= \sum_{\substack{q,d \\ qd \le x}} \mu(d) \{\sigma_0(q) - \log q - 2C\} \\
&= \sum_{\substack{q,d \\ qd \le x}} \mu(d) f(q).
\end{aligned}$$

Isso implica (3.38). Portanto, a prova do teorema será completa se mostrarmos que

$$\sum_{\substack{q,d \\ qd \leq x}} \mu(d) f(q) = o(x) \quad \text{como } x \to \infty. \tag{3.39}$$

Para este propósito, usamos o Teorema 2.17 para escrever

$$\sum_{\substack{q,d \\ qd \leq x}} \mu(d) f(q) = \sum_{n \leq b} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n \leq a} f(n) M\left(\frac{x}{n}\right) - F(a)M(b) \tag{3.40}$$

onde a e b são quaisquer números positivos tais que $ab = x$ e

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n).$$

Mostramos a seguir que $F(x) = O(\sqrt{x})$ usando a fórmula de Dirichlet (Teorema 1.3.1)

$$\sum_{n \leq x} \sigma_0(n) = x \log x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x})$$

junto com a relação

$$\sum_{n \leq x} \log n = \log[x]! = x \log x - x + O(\log x).$$

Estes nos dão

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n \leq x} \sigma_0(n) - \sum_{n \leq x} \log n - 2C \sum_{n \leq x} 1 \\ &= x \log x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}) - (x \log x - x + O(\log x)) - 2Cx + O(1) \\ &= O(\sqrt{x}) + O(\log x)) + O(1) = O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Portanto, existe uma constante $B > 0$ tal que

$$|F(x)| \leq B\sqrt{x} \quad \text{para todo } x \geq 1.$$

Usando isso na primeira soma à direita de (3.40), obtemos

$$\left| \sum_{n \leq b} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq B \sum_{n \leq b} \sqrt{\frac{x}{n}} \leq A\sqrt{xb} = \frac{Ax}{\sqrt{a}} \tag{3.41}$$

para alguma constante $A > B > 0$.

Agora seja $\varepsilon > 0$ arbitrário e escolha $a > 1$ tal que

$$\frac{A}{\sqrt{a}} < \varepsilon.$$

Então (3.41) torna-se

$$\left|\sum_{n\leq b}\mu(n)F\left(\frac{x}{n}\right)\right| < \varepsilon x \tag{3.42}$$

para todo $x \geq 1$. Observe que a depende de ε e não de x.

Como $M(x) = O(x)$ quando $x \to \infty$, para o mesmo ε existe $c > 0$ (dependendo apenas de ε) tal que

$$x > c \quad \text{implica} \quad \frac{|M(x)|}{x} < \frac{\varepsilon}{K},$$

onde K é qualquer número positivo. (Vamos especificar K agora.) A segunda soma à direita de (3.40) satisfaz

$$\left|\sum_{n\leq a} f(n)M\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \sum_{n\leq a}|f(n)|\frac{\varepsilon}{K}\frac{x}{n} = \frac{\varepsilon x}{K}\sum_{n\leq a}\frac{|f(n)|}{n} \tag{3.43}$$

forneceu $x/n > c$ para todo $n \leq a$. Portanto (3.43) vale se $x > ac$. Agora pegue

$$K = \sum_{n\leq a}\frac{|f(n)|}{n}.$$

Então (3.43) implica

$$\left|\sum_{n\leq a} f(n)M\left(\frac{x}{n}\right)\right| < \varepsilon x \quad \text{forneceu } x > ac. \tag{3.44}$$

O último termo à direita de (3.40) é dominado por

$$|F(a)M(b)| \leq A\sqrt{a}|M(b)| < A\sqrt{a}b < \varepsilon\sqrt{b}\sqrt{a}b = \varepsilon\sqrt{x}b < \varepsilon x$$

desde que $\sqrt{x} > a$, ou $x > a^2$. Combinando isso com (3.44) e (3.42) encontramos que (3.40) implica

$$\left|\sum_{\substack{q,d\\ qd\leq x}}\mu(d)f(q)\right| < 3\varepsilon x$$

desde $x > a^2$ e $x > ac$, onde a e c dependem apenas de ε. Isso prova (3.39). ∎

Teorema 3.9.4. *Se*

$$A(x) = \sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n},$$

a relação

$$A(x) = o(1) \quad \textit{quando } x \to \infty \tag{3.45}$$

implica o teorema dos números primos. Em outras palavras, o teorema dos números primos é uma consequência da afirmação de que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$$

converge e tem soma 0.

Observação 3.9.1. *Também pode ser mostrado (ver [2]) que o teorema dos números primos implica a convergência desta série para 0, então (3.45) é na verdade equivalente ao teorema dos números primos.*

Demonstração. Mostraremos que (3.45) implica $M(x) = o(x)$. Pela identidade de Abel temos

$$M(x) = \sum_{n \le x} \mu(n) = \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} n = xA(x) - \int_1^x A(t)dt,$$

assim

$$\frac{M(x)}{x} = A(x) - \frac{1}{x} \int_1^x A(t)dt.$$

Portanto, para completar a prova, basta mostrar que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_1^x A(t)dt = 0. \tag{3.46}$$

Agora, se $\varepsilon > 0$ é dado, existe um c (dependendo apenas de ε) tal que $|A(x)| < \varepsilon$ se $x \ge c$. Como $|A(x)| \le 1$ para todo $x \ge 1$ temos

$$\left| \frac{1}{x} \int_1^x A(t)dt \right| \le \left| \frac{1}{x} \int_1^c A(t)dt \right| + \left| \frac{1}{x} \int_c^x A(t)dt \right| \le \frac{c-1}{x} + \frac{\varepsilon(x-c)}{x}.$$

Fazendo $x \to \infty$ encontramos

$$\limsup_{x \to \infty} \left| \frac{1}{x} \int_1^x A(t)dt \right| \le \varepsilon,$$

e como e é arbitrário, isso prova (3.46). ∎

3.10 Fórmula assintótica de Selberg

Deduzimos a fórmula de Selberg por um método dado por Tatuzawa e Iseki [7] em 1951. Ela é baseada no seguinte teorema que tem a natureza de uma fórmula de inversão.

Teorema 3.10.1. *Seja F uma função à valor real ou complexa definida em $(0, \infty)$, e seja*

$$G(x) = \log x \sum_{n \le x} F\left(\frac{x}{n}\right).$$

Então

$$F(x)\log x + \sum_{n\le x} F\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) = \sum_{d\le x}\mu(d)G\left(\frac{x}{n}\right).$$

Demonstração. Primeiro escrevemos $F(x)\log x$ como uma soma,

$$F(x)\log x = \sum_{n\le x}\left[\frac{1}{n}\right] F\left(\frac{x}{n}\right)\log\frac{x}{n} = \sum_{n\le x} F\left(\frac{x}{n}\right)\log\frac{x}{n}\sum_{d|n}\mu(d).$$

Então usamos a identidade do Teorema 1.7.2,

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\log\frac{n}{d}$$

para escrever

$$\sum_{n\le x} F\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) = \sum_{n\le x} F\left(\frac{x}{n}\right)\sum_{d|n}\mu(d)\log\frac{n}{d}.$$

Somando essas equações encontramos

$$\begin{aligned} F(x)\log x + \sum_{n\le x} F\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) &= \sum_{n\le x} F\left(\frac{x}{n}\right)\sum_{d|n}\mu(d)\left\{\log\frac{x}{n} + \log\frac{n}{d}\right\} \\ &= \sum_{n\le x}\sum_{d|n} F\left(\frac{x}{n}\right)\mu(d)\log\frac{x}{d}. \end{aligned}$$

Na última soma escrevemos $n = qd$ para obter

$$\sum_{n\le x}\sum_{d|n} F\left(\frac{x}{n}\right)\mu(d)\log\frac{x}{d} = \sum_{d\le x}\mu(d)\log\frac{x}{d}\sum_{q\le x/d} F\left(\frac{x}{qd}\right) = \sum_{d\le x}\mu(d)G\left(\frac{x}{d}\right),$$

o que prova o teorema. ∎

Teorema 3.10.2. *Fórmula assintótica de Selberg. Para $x > 0$ temos*

$$\psi(x)\log x + \sum_{n\le x}\Lambda(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right) = 2x\log x + O(x).$$

Demonstração. Aplicamos o Teorema 3.10.1 à função $F_1(x) = \psi(x)$ e também a $F_2(x) = x - C - 1$, onde C é a constante de Euler. Correspondendo a F_1 temos

$$G_1(x) = \log x\sum_{n\le x}\psi\left(\frac{x}{n}\right) = x\log^2 x - x\log x + O(\log^2 x),$$

onde usamos o Teorema 3.7.1. Correspondendo a F_2 temos

$$\begin{aligned} G_2(x) &= \log x \sum_{n\le x} F_2\left(\frac{x}{n}\right) = \log x \sum_{n\le x}\left(\frac{x}{n} - C - 1\right) \\ &= x\log x \sum_{n\le x}\frac{1}{n} - (C+1)\log x \sum_{n\le x} 1 \\ &= x\log x\left(\log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) - (C+1)\log x(x + O(1)) \\ &= x\log^2 x - x\log x + O(\log x). \end{aligned}$$

Comparando as fórmulas para $G_1(x)$ e $G_2(x)$ vemos que $G_1(x) - G_2(x) = O(\log^2 x)$. Na verdade, usaremos apenas a estimativa mais fraca

$$G_1(x) - G_2(x) = O(\sqrt{x}).$$

Agora aplicamos o Teorema 3.7.3 a cada F_1 e F_2 e subtraímos as duas relações assim obtidas. A diferença dos dois membros direitos é

$$\sum_{d\le x}\mu(d)\left\{G_1\left(\frac{x}{d}\right) - G_2\left(\frac{x}{d}\right)\right\} = O\left(\sum_{d\le x}\sqrt{\frac{x}{d}}\right) = O\left(\sqrt{x}\sum_{d\le x}\frac{1}{\sqrt{d}}\right) = O(x)$$

pelo Teorema 2.4.1(b). Portanto, a diferença dos dois membros da esquerda também é $O(x)$. Em outras palavras, temos

$$\{\psi(x) - (x - C - 1)\}\log x + \sum_{n\le x}\left\{\psi\left(\frac{x}{n}\right) - \left(\frac{x}{n} - C - 1\right)\right\}\Lambda(n) = O(x).$$

Reorganizando os termos e usando o Teorema 3.7.1 encontramos que

$$\begin{aligned} \psi(x)\log x + \sum_{n\le x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) &= (x - C - 1)\log x + \sum_{n\le x}\left(\frac{x}{n} - C - 1\right)\Lambda(n) + O(x) \\ &= 2x\log x + O(x). \end{aligned}$$

∎

Conclusão

Este trabalho nos mostra como os números primos são fascinantes ao longo da história da matemática. E isso vem desafiando a comunidade científica há muitos séculos. O estudo das funções aritméticas nos mostra como se desenvolve operações aditivas e multiplicativas bem como suas relações. As série de potência de Bell relacionada ao produto de Dirichlet usada para descobrir identidades envolvendo função aritmética nos mostra a interrelação entre os números primos diante de tais situações. Teoremas que relacionam os primos nos traz a noção da sua importância na matemática. Sendo assim, é surpreendente que a teoria de números confiou na análise para seu desenvolvimento e como surpreende os números primos, fundamentais na aritmética, possuam distribuição imprevisível e ainda um tanto incompreendida.

Referências Bibliográficas

[1] Apostol,Tom M.(1970) Euler's $\varphi - function$ and separable Gauss sums. *Proc. Amer. Math. Soc., 24: 482-485; MR41, 1661. https://doi.org/10.2307/2037392*

[2] Ayoub, Raymond G. (1963). *An Introduction to the Analytic Theory of Numbers*. Mathematical Surveys, No. 10. Providence, R.I.: American Mathematical Society.

[3] Hadamard, J. (1896). Sur la distribution des zéros de la fontion $\zeta(S)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bull. Soc. Math. France, 24: 199-220. https://doi.org/10.24033/bsmf.545*

[4] Kolesnik, G. A. (1969). An improvement of the remainder therm in the divisor problem. (Russian). *Mat. Zametki, 6: 545-554; MR 41, 1659. [English translation: (1969),Math. Notes, 6: 784-791. https://doi.org/10.1007/BF01101405*

[5] Rosser, J. Barkley, and Schoenfeld, Lowell (1962). Approximate formulas for some functions of prime number theory. *Illinois J. Math., 6: 69-94/; MR 25, 1139. https://doi.org/10.1215/ijm/1255631807*

[6] Shapíro, Harold N. (1950). On the number of primes less than or equal x. *Proc. Amer. Math. Soc., I: 346-348; MR 12,80. https://doi.org/10.2307/2032381*

[7] Tatuzawa, Tikao, and Iseki Kaneshiro (1951). On Selberg's elementary proof of the prime number theorem. *Proc. Japan Acad., 27: 340-342; MR 13, 725. https://doi.org/10.3792/pja/1195571353*

[8] Vallée Poussin, Ch. de la (1896). Recheerches analytiques sur la théorie des nombres premiers. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 20: 183-256, 281-297.*

[9] Walfisz, A.(1963) *Weylsche Exponentalsummen in der neweren Zahlentheorie*.Mathematische Forshungsberichte, XV, V E B Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[10] Apostol, T.M.: *Introduction to analytic number theory*. Springer Science and Business Media, 2013.