Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Matemática

Ana Lídia da Silva Lício

Lineabilidade de conjuntos de funções contínuas reais que atingem o máximo em um único ponto

Uberlândia - MG

2022

Ana Lídia da Silva Lício

Lineabilidade de conjuntos de funções contínuas reais que atingem o máximo em um único ponto

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientadora: Elisa Regina dos Santos.

Uberlândia - MG

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Faculdade de Matemática

Av. João Naves de Àvila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902

Telefone: +55 (34) 3239-4158/4156/4126 - www.famat.ufu.br - famat@ufu.br

ATA DE DEFESA - GRADUAÇÃO

<table>
<tr><td>Curso de Graduação em:</td><td colspan="5">Matemática</td></tr>
<tr><td>Defesa de:</td><td colspan="5">Trabalho de Conclusão de Curso 2 (GMA031)</td></tr>
<tr><td>Data:</td><td>31/03/2022</td><td>Hora de início:</td><td>14h00min</td><td>Hora de encerramento:</td><td>15h40min</td></tr>
<tr><td>Matrícula do Discente:</td><td colspan="5">11811MAT010</td></tr>
<tr><td>Nome do Discente:</td><td colspan="5">Ana Lídia da Silva Lício</td></tr>
<tr><td>Título do Trabalho:</td><td colspan="5">Lineabilidade de conjuntos de funções contínuas reais que atingem o máximo em um único ponto.</td></tr>
<tr><td colspan="3">A carga horária curricular foi cumprida integralmente?</td><td colspan="3">(x) Sim ( ) Não</td></tr>
</table>

Em função da pandemia mundial e da DECISÃO DO COMITÊ DE MONITORAMENTO À COVID-19/UFU, DE 16 DE MARÇO DE 2020 a respeito da suspensão de aulas e atividades acadêmicas da UFU a partir de 18 de março de 2020, a defesa de Trabalho de Conclusão de Curso ocorreu virtualmente através da plataforma Microsoft Teams, presente no Office 365 Educacional e disponibilizado de forma gratuita pela Microsoft para toda comunidade da UFU.

Reuniu-se virtualmente, a Banca Examinadora assim composta pelos Professores: Prof. Dr. Fábio Bertolotto – FAMAT/UFU, Dr. Ariosvaldo Marques Jatobá – FAMAT/UFU e Prof. Dra. Elisa Regina dos Santos – FAMAT/UFU, orientador(a) do(a) candidato(a).

Iniciando os trabalhos, o(a) presidente da mesa, Prof. Dra. Elisa Regina dos Santos, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato(a), agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra, para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do curso.

A seguir o(a) senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

(X) Aprovado(a) Nota [100] (Somente números inteiros)

OU

( ) Aprovado(a) sem nota.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Elisa Regina dos Santos**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 31/03/2022, às 16:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Fabio José Bertoloto**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 31/03/2022, às 16:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Ariosvaldo Marques Jatoba**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 31/03/2022, às 19:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3474665** e o código CRC **400E481D**.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao meu bom Deus que me sustentou e me protegeu até aqui. Sempre reconheci que apenas os planos dEle se realizariam na minha vida e tenho plena certeza que, se estou realizando o sonho de me formar, foi porque Ele permitiu!

Em segundo lugar, gostaria de agradecer aos meus pais Hélida e Roberto que nunca duvidaram da minha capacidade de ser alguém na vida e sempre confiaram que eu estava indo atrás do meu sonho. Agradeço pelo apoio financeiro, por me darem apoio emocional em tantos dias difíceis e por sempre se orgulharem tanto e me relembrarem que eu era capaz de passar por cima de todas as dificuldades.

Agradeço também ao meu namorado Artur por todo cuidado e amor, por sempre estar ao meu lado e desde 2014 me encorajar e ajudar a não desistir do meu sonho. Tantas vezes, mesmo com a distância, ele se fez presente e se dispunha a me ouvir e me aconselhar. A ele a minha gratidão por estar ao meu lado até aqui.

Deixo minha gratidão também ao restante da minha família, meus avós, minhas tias, minhas primas, meus irmãos e todos os outros que sempre me aconselharam, sempre torceram para a minha felicidade.

Agradeço aos meus amigos, aos que já me conheciam e aos que conheci em Uberlândia, seja na graduação ou na igreja. Obrigada Letícia, Bianca, Rodrigo, Lourival, Tales, Lorrayne, Bruna, Marília, Marina, Carol, Andrêssa, Nath, Isaac, Bruno L., Bruno Pádua, Ana Laura, Leo Soria, Lari Y., Larissa Silva, Laíse e tantos outros que sempre me ajudaram e me deram um ombro amigo e uma palavra de conforto quando precisei.

Não poderia deixar de destacar a minha admiração e agradecimento por alguns professores que contribuíram para a minha formação e me deram bons conselhos ao longo da graduação. Agradeço em especial aos/as professores/as Josimar Ramirez, Vinícius Fávaro, Rosana Jafelice e ao querido professor Fábio Bertoloto, que além de professor se tornou um grande amigo! Agradeço também aos professores Ariosvaldo Marques e Fábio Bertoloto, que aceitaram fazer parte da minha banca e por todas as sugestões feitas no trabalho.

E, por fim, um agradecimento mais que especial à minha orientadora professora Elisa Regina dos Santos. Sempre gosto de mencionar que conheci a Elisa antes de ao menos sonhar passar na UFU, pelo PIC. Trocávamos e-mails e, coincidentemente, quando ingressei na ufu ela foi escolhida para ser

minha orientadora desde o primeiro período. Mais que orientadora, ela me ouviu em dias difíceis, me aconselhou em diversos momentos e sempre confiou no meu potencial. Não seria metade do que sou neste fim de graduação se não fosse pela ajuda dela. Obrigada Elisa!

Aos meus pais Hélida e Roberto...

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos o conceito de lineabilidade e algumas aplicações em conjuntos de funções. Tais conjuntos têm a característica de seus elementos serem funções contínuas que atingem o máximo absoluto em um único ponto de seu domínio. No primeiro capítulo, veremos algumas noções de Espaços Métricos, Topologia Geral e Análise Funcional que serão utilizadas ao longo do trabalho. No segundo capítulo, apresentaremos alguns resultados considerando conjuntos de funções cujos domínios serão a reta e alguns de seus intervalos. No terceiro capítulo, vamos generalizar os resultados do capítulo anterior para domínios mais gerais.

Palavras-Chave: Lineabilidade, funções contínuas, máximo absoluto.

Abstract

In this work, we will present the concept of lineability and some applications in sets of functions. The elements of such sets will be continuous functions that reach the absolute maximum at a single point in their domain. In the first chapter, we will see some notions of Metric Spaces, General Topology and Functional Analysis that will be used throughout the work. In the second chapter, we will present some results for sets of functions whose domains are the real line and some of its intervals. In the third chapter, we will generalize the results of the previous chapter to more general domains.

Key-Words: Lineability, continuous functions, absolute maximum.

Sumário

Introdução

Segundo [7], ao longo da história sempre houveram objetos matemáticos que contradisseram a intuição dos pesquisadores. Alguns desses objetos são: o monstro de Weierstrass, o tapete de Sierpinski, funções descontínuas aditivas (funções de Jones), curvas de Peano e funções de Cantor. Devido a estranheza de tais objetos, é natural esperar que não existam muitos objetos desses tipos. Mas a história e recentes estudos têm mostrado que esse pensamento está errado.

Nos últimos 20 anos, houve um grande aumento do interesse pela procura de estruturas algébricas em conjuntos formados por objetos patológicos. Uma das perguntas frequentes é se existem espaços vetoriais dentro de tais conjuntos e qual seria a dimensão de tais espaços. Dessa pergunta nasce o termo *lineabilidade*. A noção de lineabilidade surgiu nos anos 80, mas esse termo aparece pela primeira vez no artigo *On lineability of sets of continuous functions* de V. I. Gurariy e L. Quarta [4] e se refere ao estudo de conjuntos lineáveis, que são definidos da seguinte forma:

Dado um espaço vetorial topológico X, temos que um conjunto $M \subseteq X$ é dito n*-lineável* (respectivamente, *lineável*) em X se $M \cup \{0\}$ contém um subespaço Y de X tal que $\dim Y = n$ (respectivamente, $\dim Y = \infty$).

Neste trabalho, nosso objetivo é investigar a lineabilidade de conjuntos formados por funções contínuas reais que atingem o máximo em um único ponto de seu domínio. Será que esses conjuntos unidos com a função nula contém algum subespaço vetorial? Será que é possível provar, além da existência de tal subespaço, que ele tem dimensão n?

Num primeiro momento, traremos algumas definições e alguns resultados de Espaços Métricos, Topologia Geral e Análise Funcional que serão utilizados ao longo do trabalho. Caso o leitor tenha interesse, sugerimos as referências [1], [6] e [8] para mais detalhes.

No segundo capítulo, apresentaremos alguns resultados do artigo supracitado, de Gurariy e Quarta [4]. No artigo foi provado que o conjunto $\widehat{C}[a,b)$, formado pelas funções contínuas de $[a,b)$ em $\mathbb{R}$ que atingem o máximo em um único ponto de seu domínio, é 2-lineável, e que, ao considerarmos $[a,b]$, temos que $\widehat{C}[a,b]$ não é lineável. Mais ainda, foi mostrado que se olharmos para o domínio das funções como sendo $\mathbb{R}$, ao invés de seus intervalos, temos que $\widehat{C}(\mathbb{R})$ é 2-lineável dentro de $C(\mathbb{R})$.

No segundo capítulo também veremos que o subconjunto $\widehat{C}_0(\mathbb{R}) \subset \widehat{C}(\mathbb{R})$ das funções contínuas que se anulam no infinito e que atingem o máximo em um único ponto é 2-lineável, mas não é n-lineável para $n \geq 3$. Para fechar esse capítulo, vamos investigar a lineabilidade de $\widehat{c}_0$, o conjunto das sequências que convergem para 0 e atingem o máximo em um único ponto, e mostrar que $||\widehat{c}_0||$, o conjunto das sequências que convergem para zero e atingem a norma em um único ponto, é não linéavel.

Finalmente, no último capítulo, tomaremos como referência o artigo *On very non-linear subsets of continuous functions* [2] em que Botelho, Cariello, Fávaro, Pellegrino e Seoane-Sepúlveda generalizaram os resultados de Gurariy e Quarta olhando para domínios mais gerais. Veremos que, considerando esses novos domínios, conseguimos, dentro dos conjuntos, subespaços de dimensão n. Para fechar esse capítulo, traremos um exemplo de um espaço com dimensão infinita que é lineável, ou seja, que contém um subespaço de dimensão infinita.

Os resultados que serão apresentados nos capítulos 2 e 3 foram a partir de [5], principal referência deste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo apresentaremos algumas definições e alguns resultados importantes que serão utilizados ao longo do trabalho. Num primeiro momento olharemos para algumas definições sobre Espaços Métricos.

1.1 Noções de Espaços Métricos

Definição 1.1.1. *Um **espaço métrico** é um par ordenado (M, d) formado por um conjunto não vazio M e uma função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, chamada **métrica**, satisfazendo as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

(a) $d(x, y) \geq 0$*;*

(b) $d(x, y) = 0$ *se, e somente se,* $x = y$*;*

(c) $d(x, y) = d(y, x)$*;*

(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$*.*

Se E e F são subconjuntos de M, a **distância** entre E e F é definida por

$$\mathrm{dist}(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E \text{ e } y \in F\}.$$

Definição 1.1.2. *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência no espaço métrico (M, d).*
*(a) A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ **converge** para $x \in M$ se*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Neste caso escrevemos $x = \lim_n x_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n$ ou $x_n \longrightarrow x$.
*(b) A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é dita **convergente** se existe $x \in M$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Caso contrário, é dita*

divergente.

(c) A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma **sequência de Cauchy** se*

$$\lim_{m,n\longrightarrow\infty} d(x_m, x_n) = 0.$$

É imediato que toda sequência convergente é de Cauchy.

(d) O espaço métrico (M, d) *é um **espaço métrico completo** se toda sequência de Cauchy em* M *convergir para um elemento de* M*.*

Definição 1.1.3. *Seja* (M, d) *um espaço métrico.*

(a) Dados $a \in M$ *e* $\varepsilon > 0$*, o conjunto* $B(a, \varepsilon) = \{x \in M : d(x, a) < \varepsilon\}$ *é chamado de **bola aberta com centro a e raio r**.*

(b) Um subconjunto $A \subseteq M$ *é **aberto** se para cada* $x \in A$ *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B(x, \varepsilon) \subseteq A$*.*

(c) Um subconjunto $F \subseteq M$ *é **fechado** se seu complementar* $M \setminus F$ *é aberto.*

Definição 1.1.4. *Um espaço métrico* M *é **compacto** se para toda coleção de abertos* $(A_i)_{i\in I}$ *tais que* $M = \bigcup_{i\in I} A_i$*, existem* $n \in \mathbb{N}$ *e* $i_1, \ldots, i_n \in I$ *tais que* $M = \bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k}$*.*

1.2 Noções de Topologia Geral

Nesta seção traremos alguns conceitos e resultados sobre espaços topológicos.

Definição 1.2.1. *Uma **topologia** em um conjunto* X *é uma coleção* τ *de subconjuntos de* X*, chamados **conjuntos abertos**, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(a) Qualquer união de elementos de τ *é um elemento de* τ*;*

(b) Qualquer interseção finita de elementos de τ *pertence a* τ*;*

(c) X *e* $\emptyset$ *pertencem a* τ*.*

Nesse caso, dizemos que (X, τ) *é um **espaço topológico**, que naturalmente abreviaremos para* X *quando não houver perigo de ambiguidade. Um subconjunto* F *de* X *é chamado de **conjunto fechado** se seu complementar for aberto, isto é, se* $X \setminus F \in \tau$*.*

Proposição 1.2.2. *Em um espaço topológico valem as seguintes propriedades:*

(a) Qualquer interseção de conjuntos fechados é um conjunto fechado;

(b) Qualquer união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado;

(c) X *e* $\emptyset$ *são conjuntos fechados.*

Demonstração. Veja [8, Proposição 3.6]. □

Definição 1.2.3. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subseteq X$. A coleção $\tau_A := \{B \cap A : B \in \tau\}$ é uma topologia em A, chamada **topologia relativa** ou **topologia em A induzida por τ**. Com esta topologia, dizemos que A é um **subespaço** de X.*

Definição 1.2.4. *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ entre espaços topológicos é **contínua** se $f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$ é aberto em X para todo aberto A em Y.*

Proposição 1.2.5. *Dados X e Y espaços topológicos e uma função $f : X \longrightarrow Y$, as seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) f é contínua.
(b) $f^{-1}(F)$ é fechado em X para todo fechado F em Y.
(c) $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X tal que $x_n \longrightarrow x \in X$.

Demonstração. Veja [8, Proposição 8.3 e Proposição 12.4]. □

Proposição 1.2.6. *(a) Se $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ são funções contínuas entre espaços topológicos, então a função composta $g \circ f : X \longrightarrow Z$ é contínua.*
(b) Se A é subespaço do espaço topológico X e a função $f : X \longrightarrow Y$ é contínua, então a restrição de f a A, $f|_A : A \longrightarrow Y$, é contínua.

Demonstração. Veja [8, Corolário 8.5 e Proposição 8.6]. □

Definição 1.2.7. *Um **homeomorfismo** entre os espaços topológicos X e Y é uma função $f : X \longrightarrow Y$ que é contínua, bijetora e tem inversa contínua.*

Definição 1.2.8. *Um subconjunto K do espaço topológico X é **compacto** se para toda coleção $(A_i)_{i \in I}$ de abertos em X tal que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $i_1, \ldots, i_n \in I$ tais que $K \subseteq (A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n})$. Ou seja, se toda cobertura aberta de K admite subcobertura finita.*

Proposição 1.2.9. *Sejam X, Y espaços topológicos e $K \subseteq X$. Se $f : X \longrightarrow Y$ é contínua e K é compacto em X, então $f(K)$ é compacto em Y.*

Demonstração. Veja [8, Proposição 21.8]. □

Definição 1.2.10. *Um espaço topológico X é um **espaço de Hausdorff** se, para todos $x, y \in X$, $x \neq y$, existem um aberto U que contém x e um aberto V que contém y tais que $U \cap Y = \emptyset$.*

Exemplo 1.2.11. *Não é difícil verificar que cada espaço métrico é um espaço de Hausdorff.*

Proposição 1.2.12. *Sejam X um espaço compacto, Y um espaço de Hausdorff e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Se f é bijetora, então f é um homeomorfismo.*

Demonstração. Veja [8, Corolário 21.9]. □

1.3 Noções de Análise Funcional

Por fim, apresentaremos nesta seção alguns resultados de Análise Funcional. Denotaremos por $\mathbb{K}$ o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ ou o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$.

Definição 1.3.1. *Um **espaço normado** é um par ordenado $(E, ||\cdot||)$ formado por um espaço vetorial E e uma função $||\cdot|| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, chamada **norma**, satisfazendo as seguintes condições:*

(a) $||x|| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

(b) $||ax|| = |a| \cdot ||x||$ para todo escalar a e todo $x \in E$;

(c) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ para quaisquer $x, y \in E$.

Um espaço normado é um espaço métrico com a métrica dada por

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

Nesse caso, dizemos que a métrica d é induzida pela norma $||\cdot||$.

Definição 1.3.2. *Um espaço normado E é chamado **espaço de Banach** quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.*

Exemplo 1.3.3. *Seja X um espaço topológico compacto. Denotaremos por $B(X)$ o conjunto de todas as funções limitadas $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$. Temos que esse conjunto é um espaço vetorial com as operações usuais de funções e se torna um espaço de Banach com a norma*

$$||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Veja [1, Exemplo 1.1.2].

Denotaremos por $C(X)$ o conjunto de todas as funções contínuas de X em $\mathbb{K}$. Note que $C(X)$ é um subespaço vetorial do espaço de Banach $B(X)$ e, portanto, é um espaço normado com a norma descrita acima. É possível mostrar que $C(X)$ é um subespaço fechado de $B(X)$ e, assim, será também um espaço de Banach. Veja [1, Proposição 1.1.1 e Exemplo 1.1.3].

Exemplo 1.3.4. *Para cada número real $p \geq 1$, definimos*

$$\ell_p = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}.$$

Em ℓ_p, consideremos a seguinte norma

$$||(a_n)_{n=1}^{\infty}||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

É possível mostrar que ℓ_p é um espaço normado e espaço de Banach com essa norma.

Observação 1.3.5. *A convergência de uma sequência em ℓ_p implica em convergência coordenada a coordenada. De fato, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência convergente para $x = (a_j)_{j=1}^{\infty}$ em ℓ_p. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $x_n = (a_n^{(j)})_{j=1}^{\infty}$. Temos que*

$$|a_n^{(j)} - a_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_n^{(k)} - a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = ||x_n - x||_p,$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Assim, a sequência $(a_n^{(j)})_{n=1}^{\infty}$ é convergente para a_j, para cada $j \in \mathbb{N}$.

Definição 1.3.6. *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Um **produto interno** em E é uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot, \cdot \rangle : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x, y) & \longmapsto & \langle x, y \rangle\,, \end{array}$$

tal que para quaisquer $x, x_1, x_2, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

(P1) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$;

(P2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

(P3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

(P4) Para todo $x \neq 0$, $\langle x, x \rangle$ é um número real estritamente positivo.

*O par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamado **espaço com produto interno**.*

Exemplo 1.3.7. *Dadas as sequências $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ e $y = (y_j)_{j=1}^{\infty}$, a expressão*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$$

define um produto interno em ℓ_2.

Proposição 1.3.8 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja E um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

para quaisquer $x, y \in E$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, os vetores x e y são linearmente dependentes.

Demonstração. Veja [1, Proposição 5.1.2]. □

Definição 1.3.9. *Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e τ uma topologia em E. Dizemos que o par (E, τ) é um **espaço vetorial topológico** se as operações algébricas*

$$\begin{array}{rccc} AD : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (x, y) & \longmapsto & AD(x, y) = x + y \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} ME: & \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ & (a,y) & \longmapsto & ME(a,y)=ay \end{array}$$

são contínuas quando consideramos em $E \times E$ e em $\mathbb{K} \times E$ as respectivas topologias produto (veja [8, Proposição 10.2]).

Exemplo 1.3.10. *Não é difícil verificar que espaços normados são espaços vetoriais topológicos.*

Capítulo 2

Lineabilidade em conjuntos de funções reais com domínios reais

Este capítulo tem como objetivo inicial apresentar as definições e notações sobre lineabilidade. Depois estaremos interessados estudar tais conceitos em conjuntos compostos por funções reais contínuas que atingem o máximo absoluto em um único ponto de seu domínio (a reta e seus intervalos). Este capítulo foi baseado no Capítulo 1 de [5].

2.1 Lineabilidade

Nesta seção apresentaremos o conceito de lineabilidade e algumas outras definições que serão usadas ao longo do trabalho.

Definição 2.1.1. *Seja X um espaço vetorial topológico. Um conjunto $M \subseteq X$ é dito:*

*a) n-**lineável** em X, se $M \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial Y, tal que* $\dim Y = n$*;*

*b) **lineável** em X, se $M \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial W, tal que* $\dim W = \infty$.

Definição 2.1.2. *Sejam X um espaço vetorial topológico e $M \subseteq X$ um conjunto. O número*

$$\lambda(M) = \max\{\dim Y : Y \subseteq M \cup \{0\} \text{ é subespaço de } X\}$$

*é chamado **lineabilidade** de M.*

Observação 2.1.3. *Notemos que $\lambda(M)$ pode não existir. Seja $\mathcal{P}$ o espaço vetorial dos polinômios de grau $n \in \mathbb{N}$. Considere os inteiros positivos*

$$j_1 \leq k_1 < j_2 \leq k_2 < \cdots \leq k_m < j_{m+1} \leq \cdots$$

de tal forma que $k_m - j_m = m$*,* $m \in \mathbb{N}$*, e o subconjunto de* $\mathcal{P}$ *dado por*

$$M = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=j_m}^{k_m} a_i x^i : a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Note que $\lambda(M) \geq n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. De fato, dado* $n \in \mathbb{N}$*, temos* $k_n - j_n = n$*. Assim, o conjunto*

$$M_n = \left\{ \sum_{i=j_n}^{k_n} a_i x^i : a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

tem dimensão n*. Logo,* M *contém um subespaço* n*-dimensional. Mas* $\lambda(M) \neq \dim(\mathbb{N})$*. Caso contrário, existiria um subespaço* Y *de* $\mathcal{P}$ *contido em* $M \cup \{0\}$ *com* $\dim Y = \dim(\mathbb{N})$*. Nesse caso, existiria um conjunto* $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de polinômios linearmente independentes contido em* Y*. Assim, dados* p_i *e* p_j *com* $i \neq j$*, teríamos que* $p_i + p_j \in Y$*, e portanto* $p_i + p_j \in M_k$ *para algum* $k \in \mathbb{N}$*. Como os subespaços* M_n *são disjuntos a menos do polinômio nulo, temos que existe um único* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $p_i \in M_k$ *independentemente de quem seja* i*. De fato, se* $p_i \in M_{k_i}$ *e* $p_j \in M_{k_j}$ *com* $k_i \neq k_j$*, não seria possível* $p_i + p_j$ *pertencer a nenhum dos* M_n*. Logo, temos que* $\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq M_k$*, o que é uma contradição já que* M_k *é finitamente gerado e o conjunto* $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ *é linearmente independente.*

Dessa forma, M *é* n*-lineável para todo* $n \in \mathbb{N}$*, mas não é lineável, ou seja,* $\lambda(M)$ *não existe.*

Definição 2.1.4. *Um conjunto* $M \subseteq X$ *é* ***totalmente não lineável****, ou simplesmente,* ***não lineável****, se* $\lambda(M) \leq 1$*.*

2.2 A lineabilidade de $\widehat{C}[0, 2\pi)$ e $\widehat{C}(\mathbb{R})$

No teorema a seguir mostraremos a 2-lineabilidade de $\widehat{C}[0, 2\pi)$, o conjunto das funções contínuas $f : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$, que atingem o máximo em um único ponto de seu domínio. Para isso, faremos a demonstração de maneira construtiva, apresentando uma base de um subespaço 2-dimensional de $\widehat{C}[0, 2\pi) \cup \{0\}$.

Teorema 2.2.1. $\widehat{C}[0, 2\pi)$ *é 2-lineável.*

Demonstração. Temos que as funções trigonométricas $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ pertecem a $\widehat{C}[0, 2\pi)$, uma vez que ambas são contínuas e atingem o máximo em um único ponto de $[0, 2\pi)$. Além disso, essas funções são linearmente independentes. Vamos mostrar que qualquer combinação não trivial dessas duas funções também atinge o máximo em um único ponto.

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, seja $\alpha \cos x + \beta \operatorname{sen} x$ uma combinação linear não trivial. Lembremos que, para $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$(\alpha, \beta) = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \theta, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{sen} \theta).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\alpha\cos x+\beta\operatorname{sen}x &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\theta\cos x+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}x\\ &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}(\cos\theta\cos x+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}x)\\ &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(\theta-x)\\ &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(x-\theta).\end{aligned}$$

Como a função cosseno admite um único ponto de máximo em $[-\theta, 2\pi-\theta)$ e $(x-\theta)\in[-\theta,2\pi-\theta)$, temos que $\alpha\cos x+\beta\operatorname{sen}x$ admite um único ponto de máximo em $[0,2\pi)$ para $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Assim, tomando $Y=[\operatorname{sen}x,\cos x]$, o subespaço gerado por $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$, temos $\dim Y=2$ e $Y\subset\widehat{C}[0,2\pi)\cup\{0\}$, e concluímos o que queríamos. $\square$

Do teorema acima segue a 2-lineabilidade de $\widehat{C}[a,b)$ para quaisquer que sejam $a,b\in\mathbb{R}$, com $a<b$. Basta compor cada $f\in\widehat{C}[0,2\pi)$ com a função $g:[a,b)\longrightarrow[0,2\pi)$, dada por $g(x)=\dfrac{2\pi(x-a)}{b-a}$. De fato, consideremos as funções $\operatorname{sen}\circ\, g$ e $\cos\circ\, g$. Note que elas são linearmente independentes, pois dados $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}\alpha\operatorname{sen}\circ\, g+\beta\cos\circ\, g=0 &\Longrightarrow \alpha\operatorname{sen}\circ\, g\circ g^{-1}+\beta\cos\circ\, g\circ g^{-1}=0\\ &\Longrightarrow \alpha\operatorname{sen}+\beta\cos=0\\ &\Longrightarrow \alpha=\beta=0.\end{aligned}$$

E essas funções têm um único ponto de máximo, uma vez que $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$ tem um único ponto de máximo e g é bijetora. Mostremos que $Y=[\operatorname{sen}\circ\, g,\cos\circ\, g]\subset\widehat{C}[a,b)\cup\{0\}$. Seja $f\in[\operatorname{sen}\circ\, g,\cos\circ\, g]$, então existem $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tais que

$$f=\alpha\operatorname{sen}\circ\, g+\beta\cos\circ\, g=(\alpha\operatorname{sen}+\beta\cos)\circ g.$$

Agora, $\alpha\operatorname{sen}+\beta\cos$ tem um único ponto de máximo e g é bijetora, logo $f\in\widehat{C}[a,b)$.

No próximo teorema veremos que $\widehat{C}(\mathbb{R})$, o conjunto das funções contínuas $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ que atingem o máximo apenas uma vez, é 2-lineável.

Teorema 2.2.2. *$\widehat{C}(\mathbb{R})$ é 2-lineável.*

Demonstração. Considere as funções contínuas

$$x(t):=\mu(t)\cos(4\operatorname{arctg}|t|)$$

e

$$y(t):=\mu(t)\operatorname{sen}(4\operatorname{arctg}|t|),$$

com tg definida em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(t) = \begin{cases} e^t, \text{ se } t \leq 0 \\ 1, \text{ se } t \geq 0 \end{cases}.$$

Podemos verificar que $x(t)$ e $y(t)$ são funções linearmente independentes. De fato, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha x(t) + \beta y(t) = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \alpha\mu(t)\cos(4\operatorname{arctg}|t|) + \beta\mu(t)\operatorname{sen}(4\operatorname{arctg}|t|) = 0 &\Longrightarrow \mu(t)[\alpha\cos(4\operatorname{arctg}|t|) + \beta\operatorname{sen}(4\operatorname{arctg}|t|)] = 0 \\ &\Longrightarrow \alpha\cos(4\operatorname{arctg}|t|) + \beta\operatorname{sen}(4\operatorname{arctg}|t|) = 0, \end{aligned}$$

uma vez que $\mu(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Nessa combinação mostremos que $\alpha = \beta = 0$. Para $t = 0$, temos

$$0 = \alpha\cos(4\operatorname{arctg} 0) + \beta\operatorname{sen}(4\operatorname{arctg} 0) = \alpha\cos 0 + \beta\operatorname{sen} 0 = \alpha.$$

Para $t = \sqrt{3}$, temos

$$0 = \beta\operatorname{sen}(4\operatorname{arctg}\sqrt{3}) = \beta\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}.$$

Logo, $\beta = 0$, pois $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} \neq 0$. Assim, $x(t)$ e $y(t)$ são linearmente independentes.

Como $\cos(4\operatorname{arctg}|t|) \leq 1$, $\operatorname{sen}(4\operatorname{arctg}|t|) \leq 1$ e $\mu(t) \geq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que

$$x(t) = \mu(t)\cos(4\operatorname{arctg}|t|) \leq \mu(t) \cdot 1 = \mu(t)$$

e

$$y(t) = \mu(t)\operatorname{sen}(4\operatorname{arctg}|t|) \leq \mu(t) \cdot 1 = \mu(t).$$

Pela definição, $\mu(t) \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Disso segue que $x(t) \leq 1$ e $y(t) \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Com isso, vemos que 1 é um limitante superior de $x(t)$ e $y(t)$. Vejamos que essas funções atingem o valor 1 em apenas um ponto.

Tomando $t = 0$,

$$x(0) = \mu(0)\cos(4\operatorname{arctg} 0) = 1 \cdot \cos 0 = 1.$$

Assim, vemos que $t = 0$ é um ponto de máximo de x. Se $t \neq 0$, $4\operatorname{arctg}|t| \in (0, 2\pi)$, então $\cos(4\operatorname{arctg}|t|) < 1$. Daí,

$$x(t) = \mu(t)\cos(4\operatorname{arctg}|t|) < 1 \cdot 1 = 1,$$

para todo $t \neq 0$. Com isso, concluímos que $t = 0$ é o único ponto de máximo de x. Logo $x(t) \in \widehat{C}(\mathbb{R})$.

Tomando $t = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$, temos

$$y\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right) = \mu\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)\operatorname{sen}\left(4\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)\right) = 1 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Assim, $t = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$ é ponto de máximo de y. Para $t < 0$, $\operatorname{sen}(4\operatorname{arctg}|t|) \leq 1$ e $\mu(t) = e^t < 1$, logo

$$y(t) = \mu(t)\operatorname{sen}(4\operatorname{arctg}|t|) < 1 \cdot 1 = 1.$$

Para $t \geq 0$, temos $\mu(t) = 1$ e $4\operatorname{arctg} t \in [0, 2\pi)$. Em $[0, 2\pi)$, temos $\operatorname{sen} x = 1$ apenas em $x = \dfrac{\pi}{2}$, daí $y(t) = \operatorname{sen}(4\operatorname{arctg} t) = 1$ somente quando $4\operatorname{arctg} t = \dfrac{\pi}{2}$. Portanto, pela injetividade da função $\operatorname{arctg} t$, temos que $t = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$ é o único ponto de máximo de y, fazendo com que $y(t) \in \widehat{C}(\mathbb{R})$.

Vamos mostrar que qualquer combinação linear não trivial dessas duas funções possui um único ponto de máximo. Seja $\alpha x(t) + \beta y(t)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, essa combinação. Como vimos no teorema anterior, para qualquer par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$(\alpha, \beta) = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\cos\theta, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\operatorname{sen}\theta).$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\alpha x(t) + \beta y(t) &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\cos\theta x(t) + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\operatorname{sen}\theta y(t) \\
&= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\cos\theta\mu(t)\cos(4\operatorname{arctg}|t|) + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\operatorname{sen}\theta\mu(t)\operatorname{sen}(4\operatorname{arctg}|t|) \\
&= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\mu(t)[\cos\theta\cos(4\operatorname{arctg}|t|) + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(4\operatorname{arctg}|t|)] \\
&= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\mu(t)\cos(\theta - 4\operatorname{arctg}|t|) \\
&= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\mu(t)\cos(4\operatorname{arctg}|t| - \theta).
\end{aligned}$$

Quando $t \geq 0$, $\mu(t) = 1$ e $4\operatorname{arctg} t \in [0, 2\pi)$. Como a função $\cos x$ admite um único ponto de máximo em $[-\theta, 2\pi - \theta)$ e $(4\operatorname{arctg} t - \theta)$ é bijetora de $\mathbb{R}_+$ em $[-\theta, 2\pi - \theta)$, segue que $\alpha x(t) + \beta y(t)$ atinge um único ponto de máximo para $t \geq 0$. Se $t < 0$, $\mu(t) = e^t < 1$, então

$$\begin{aligned}
\alpha x(t) + \beta y(t) &= \mu(t) \cdot [\alpha\cos(4\operatorname{arctg}|t|) + \beta\operatorname{sen}(4\operatorname{arctg}|t|)] \\
&< \alpha\cos(4\operatorname{arctg}|t|) + \beta\operatorname{sen}(4\operatorname{arctg}|t|) \\
&= \alpha x(-t) + \beta y(-t),
\end{aligned}$$

uma vez que $\mu(-t) = 1$, quando $t < 0$. Da desigualdade acima, temos que o máximo de $\alpha x(t) + \beta y(t)$ é atingido apenas para um único valor $t \geq 0$.

Logo, qualquer combinação não trivial $\alpha x(t) + \beta y(t)$ pertence a $\widehat{C}(\mathbb{R})$. Tomando $Y = [x(t), y(t)]$, o subespaço gerado por $x(t)$ e $y(t)$, temos $\dim Y = 2$ e $Y \subset \widehat{C}(\mathbb{R}) \cup \{0\}$, concluindo a demonstração. $\square$

2.3 A não lineabilidade de $\widehat{C}[0, 1]$

Em [4], Gurariy e Quarta introduziram as noções de um ponto ser ignorável e um ponto ser de barreira. Usando esses conceitos, nesta seção, mostraremos que o conjunto das funções contínuas

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, que atingem o máximo em um único ponto, é não lineável. Para isso, vamos, inicialmente, fixar algumas notações.

Dados um espaço topológico compacto X e $f \in C(X)$, denotaremos:

- $M(f) := \sup_{t \in X} f(t)$;
- $m(f) := \inf_{t \in X} f(t)$;
- $M_f := \{t \in X : f(t) = M(f)\}$;
- $m_f := \{t \in X : f(t) = m(f)\}$.

Vamos considerar, para cada $f \in C(X)$, a norma

$$||f|| := \sup_{t \in X} |f(t)|,$$

caso não seja explicitada a norma a ser utilizada. Note que $||f|| = M(|f|)$.

Definição 2.3.1. *Sejam $f_1, \ldots, f_n \in C[0,1]$. Um ponto $t \in [0,1]$ é dito **ignorável para** $f_1, \ldots, f_n$ se, para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$, $t \notin M_{\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i}$.*

Definição 2.3.2. *Para $f_1, \ldots, f_n \in C[0,1]$, um ponto $t \in [0,1]$ é dito **de barreira entre** t_1 **e** t_2 **em** $[0,1]$, se $t \in (t_1, t_2)$ e t é ignorável para $f_1, \ldots, f_n$.*

Definição 2.3.3. *Um par de funções $\{f, g\}$ em $C[0,1]$ é dito **canônico**, se existem $t_f \in M_f$, $t_g \in M_g$ e $\bar{t} \in (t_f, t_g)$ ou $\bar{t} \in (t_g, t_f)$ tais que $m_f = \{\bar{t}\}$ ou $m_g = \{\bar{t}\}$.*

Lema 2.3.4. *Nas condições da definição anterior, temos que $\bar{t} \in (t_f, t_g)$ é ponto de barreira para as funções f e g.*

Demonstração. Suponhamos que $m_f = \{\bar{t}\}$. Então, $f(\bar{t}) < f(t)$ para todo $t \in [0,1] \backslash \{\bar{t}\}$, em particular, $f(\bar{t}) < f(t_g)$. Como $t_g \in M_g$, temos

$$g(t_g) = M(g) = \sup_{t \in [0,1]} g(t),$$

e daí

$$g(\bar{t}) \leq g(t_g).$$

Assim, pelas desigualdades anteriores e para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, temos

$$\alpha f(\bar{t}) + \beta g(\bar{t}) < \alpha f(t_g) + \beta g(t_g).$$

Logo, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, $\bar{t} \notin M_{\alpha f + \beta g}$, ou seja, temos que $\bar{t} \in (t_f, t_g)$ e $\bar{t}$ é ignorável para f e g. Se $m_g = \bar{t}$, o resultado é análogo. $\square$

Dado um subespaço vetorial 2-dimensional V tal que $V \subseteq \widehat{C}[0,1] \cup 0$, vamos provar que um par canônico de funções não pode ser base de V. Para isso, vamos precisar do próximo lema.

Dada uma aplicação $\phi : [0,1] \longrightarrow C[0,1]$, vamos denotar $\phi(x)$ apenas por ϕ_x.

Lema 2.3.5. *Se ϕ é uma aplicação contínua de $[0,1]$ em $C[0,1]$ tal que, para todo $x \in [0,1]$, M_{ϕ_x} é unitário e igual a $\{t_x\}$, então a função $\mu : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, dada por $\mu(x) = t_x$, é contínua.*

Demonstração. Suponhamos que existe $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq [0,1]$ tal que $x_n \to x_0$, mas $\mu(x_n) = t_{x_n} \nrightarrow t_{x_0} = \mu(x_0)$. Então, existem $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ tais que $|t_{x_{n_j}} - t_{x_0}| > \varepsilon$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Isso garante que nenhuma subsequência de $(t_{x_{n_j}})_{j=1}^{\infty}$ converge para t_{x_0}. Como $[0,1]$ é compacto, existe uma subsequência de $(t_{x_{n_j}})_{j=1}^{\infty}$ que converge para um $\bar{t} \in [0,1]$, que denotaremos pela própria sequência. Observe que

$$\begin{aligned}
|\phi_{x_{n_j}}(t_{x_{n_j}}) - \phi_{x_0}(\bar{t})| &= |\phi_{x_{n_j}}(t_{x_{n_j}}) - \phi_{x_0}(t_{x_{n_j}}) + \phi_{x_0}(t_{x_{n_j}}) - \phi_{x_0}(\bar{t})| \\
&\leq |\phi_{x_{n_j}}(t_{x_{n_j}}) - \phi_{x_0}(t_{x_{n_j}})| + |\phi_{x_0}(t_{x_{n_j}}) - \phi_{x_0}(\bar{t})| \\
&\leq \sup_{y \in [0,1]} |\phi_{x_{n_j}}(y) - \phi_{x_0}(y)| + |\phi_{x_0}(t_{x_{n_j}}) - \phi_{x_0}(\bar{t})| \\
&= ||\phi_{x_{n_j}} - \phi_{x_0}|| + |\phi_{x_0}(t_{x_{n_j}}) - \phi_{x_0}(\bar{t})| \to 0
\end{aligned}$$

para $n_j \to \infty$, já que $x_{n_j} \to x_0$, $t_{x_{n_j}} \to \bar{t}$ e ϕ, ϕ_{x_0} são contínuas. Logo,

$$\phi_{x_{n_j}}(t_{x_{n_j}}) \to \phi_{x_0}(\bar{t})$$

quando $x_{n_j} \to x_0$. Ainda pela continuidade de ϕ, quando $x_{n_j} \to x_0$, temos

$$\phi_{x_{n_j}}(t_{x_{n_j}}) = M(\phi_{x_{n_j}}) \longrightarrow M(\phi_{x_0}) = \phi_{x_0}(t_{x_0}).$$

Pela unicidade do limite, segue que

$$\phi_{x_0}(\bar{t}) = \phi_{x_0}(t_{x_0}) = M(\phi_{x_0}),$$

e como $M_{\phi_{x_0}} = \{t_{x_0}\}$, temos $\bar{t} = t_{x_0}$, o que é uma contradição. Portanto, μ é contínua. $\square$

Proposição 2.3.6. *Para qualquer par canônico de funções $\{f, g\} \in C[0,1]$, existem dois reais positivos α e β tais que a função $\alpha f + \beta g$ tem pelo menos dois pontos de máximo.*

Demonstração. Suponhamos que existe um par canônico de funções $\{f, g\}$ tal que $M_{\alpha f + \beta g}$ é unitário, para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$. Consideremos as seguintes aplicações

$$\begin{aligned}
\phi : \quad [0,1] &\longrightarrow C[0,1] \\
x &\longmapsto \phi(x) = (1-x)f + xg
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mu : \quad [0,1] &\longrightarrow [0,1] \\
x &\longmapsto \mu(x) = t_x,
\end{aligned}$$

onde $\{t_x\} = M_{\phi_x}$. Como vimos no lema anterior, μ é contínua. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, assume todos os valores entre $\mu(0) = t_0$ e $\mu(1) = t_1$. Note que $\{t_0\} = M_f$ e $\{t_1\} = M_g$, uma vez que $\{t_0\} = M_{\phi_0}$, pois $\phi(0) = (1-0)f + 0 \cdot g = f$, e $\{t_1\} = M_{\phi_1}$, pois $\phi(1) = (1-1)f + 1 \cdot g = g$. Pelo Lema 2.3.4, existe um ponto de barreira entre t_0 e t_1, isto é, um ponto $\bar{t}$ pertencente a (t_0, t_1) ou (t_1, t_0) tal que $\bar{t} \notin M_{\alpha f + \beta g}$ para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$. Logo, $\bar{t}$ é um ponto entre t_0 e t_1 que não é assumido pela função μ, o que é uma contradição. □

Depois desses resultados, vamos analisar a lineabilidade de $\widehat{C}[0,1]$.

Teorema 2.3.7. $\lambda(\widehat{C}[0,1]) = 1$.

Demonstração. Vamos mostrar que para todo par de funções linearmente independentes $\{f, g\} \subset C[0,1]$, existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que a função $\alpha f + \beta g$ admite pelo menos dois pontos de máximo. Para isso, suponhamos que existem $f, g \in C[0,1]$ tais que para todo par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $M_{\alpha f + \beta g}$ é unitário. Como $[0,1]$ é compacto e a função $\alpha f + \beta g$ é contínua, $M_{\alpha f + \beta g}$ e $m_{\alpha f + \beta g}$ são não vazios, e mais ainda, são unitários, uma vez que, $M_{\alpha f + \beta g}$ é unitário por hipótese e

$$\begin{aligned} m_{\alpha f + \beta g} &= \{x \in X : (\alpha f + \beta g)(x) = m(\alpha f + \beta g)\} \\ &= \{x \in X : -(\alpha f + \beta g)(x) = M(-(\alpha f + \beta g))\} \\ &= M_{-(\alpha f + \beta g)}, \end{aligned}$$

que é unitário. Seja

$$\varepsilon(f, g) := M_f \cup M_g \cup m_f \cup m_g.$$

Note que $\#\varepsilon(f, g) \leq 4$, pois $\#M_f = \#M_g = \#m_f = \#m_g = 1$. Consideremos duas situações:

(1) Se $\#\varepsilon(f, g) \geq 3$, então pelo menos um dos quatro pares de funções $\{f, g\}$, $\{f, -g\}$, $\{-f, g\}$ ou $\{-f, -g\}$ é canônico. Para provar isso, suponha sem perda de generalidade que $\{f, g\}$ não seja canônico. Vamos utilizar o fato de que $M_f = m_{-f}$, $M_g = m_{-g}$, $M_{-f} = m_f$ e $M_{-g} = m_g$. Tendo em mente que

$$\#M_f = \#m_f = \#M_g = \#m_g = 1,$$

vamos denotar por M_h e m_h o único ponto de $[0,1]$ onde h assume o valor máximo e o valor mínimo, respectivamente, para $h = f, g, -f, -g$.

(i) Como $\{f, g\}$ não é par canônico, uma possibilidade é $M_f = M_g$. Já que $\#\varepsilon \geq 3$, temos então $M_f \neq m_f \neq m_g \neq M_f$. Suponha sem perda de generalidade $m_f < m_g$. Então, temos três possibilidades:

$$M_f < m_f < m_g, \;\; m_f < M_f < m_g \;\; \text{ou} \;\; m_f < m_g < M_f.$$

Caso 1) $M_f < m_f < m_g$. Nesse caso, $M_f < m_f < M_{-g}$. Logo, $\{f, -g\}$ é par canônico.

Caso 2) $m_f < M_f < m_g$. Nesse caso, $M_{-f} < m_{-f} < M_{-g}$. Logo, $\{-f, -g\}$ é par canônico.

Caso 3) $m_f < m_g < M_f$. Nesse caso, $M_{-f} < m_g < M_f = M_g$. Logo, $\{-f, g\}$ é par canônico.

(ii) Vamos agora analisar a possibilidade $M_f \neq M_g$. Suponha sem perda de generalidade $M_f < M_g$. Como $\{f, g\}$ não é par canônico, temos que $m_f \notin (M_f, M_g)$ e $m_g \notin (M_f, M_g)$. Daí, olhando para a posição de m_f em relação à M_f e M_g, temos três possibilidades:

$$m_f < M_f < M_g, \; m_f = M_g \text{ ou } M_f < M_g < m_f.$$

Note que $m_f \neq M_f$, caso contrário f seria uma função constante e não teria apenas um ponto de máximo.

Caso 1) $m_f < M_f < M_g$. Nesse caso, $M_{-f} < m_{-f} < M_g$. Logo, $\{-f, g\}$ é par canônico.

Caso 2) $m_f = M_g$. Como $\#\varepsilon(f, g) \geq 3$, temos que $M_f \neq m_g$. Daí, temos duas possibilidades:

a) $m_g < M_f < M_g$. Nesse caso, $M_{-g} = m_g < m_{-f} < M_g = m_f = M_{-f}$. Logo, $\{-f, -g\}$ é par canônico.

b) $M_f < M_g < m_g$. Nesse caso, $M_f < m_{-g} < M_{-g}$. Logo, $\{f, -g\}$ é par canônico.

Caso 3) $M_f < M_g < m_f$. Nesse caso, temos duas possibilidades:

a) $m_g \leq M_f < M_g < m_f$. Temos $M_{-g} = m_g < m_{-g} < M_{-f}$. Logo, $\{-f-, g\}$ é par canônico.

b) $M_f < M_g < m_g$. Temos $M_f < m_{-g} < M_{-g}$. Logo, $\{f, -g\}$ é par canônico.

Assim, esgotamos todas as possibilidades em que $\{f, g\}$ não é par canônico, mostrando que sempre um dos pares $\{f, -g\}, \{-f, g\}$ ou $\{-f, -g\}$ será canônico. Logo, se por exemplo $\{f, g\}$ é canônico, pela Proposição 2.3.6, existem $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $M_{\alpha_1 f + \beta_1 g}$ tem pelo menos dois pontos e isso contradiz o que supusemos.

(2) Se $\#\varepsilon(f, g) = 2$, temos dois casos:

$$M_f = m_g \text{ e } m_f = M_g \quad \text{ou} \quad M_f = M_g \text{ e } m_f = m_g.$$

Note que $M_f \neq m_f$ e $M_g \neq m_g$ uma vez que $f, g \in \widehat{C}[0,1]$. Vamos supor $M_f = m_g$, $m_f = M_g$ e considerar ϕ e μ as mesmas funções usadas na demonstração da Proposição 2.3.6. Observe que $M_f = t_0 = m_g$ e $M_g = t_1 = m_f$. Sem perda de generalidade, suponhamos $t_0 < t_1$. Como μ é contínua, ela assume todos os valores entre t_0 e t_1. Assim, existe $t_\alpha \in (t_0, t_1) = (M_f, M_g)$ tal que $\alpha \in (0, 1)$ e

$$t_\alpha = M_{\phi_\alpha} = M_{(1-\alpha)f + \alpha g} \in (M_f, M_g) = (M_f, m_f).$$

Daí, $M_{(1-\alpha)f+\alpha g}$ é diferente de M_f e de $m_f = M_g$. Logo, $\#\varepsilon(f, (1-\alpha)f + \alpha g) \geq 3$ e, pela situação **(1)**, temos uma contradição. Para o caso $M_f = M_g$ e $m_f = m_g$, basta considerarmos $-g$ ao invés de g no caso anterior e chegamos novamente a uma contradição.

Portanto, só nos resta $\#\varepsilon(f,g) = 1$. Daí, $M_f = M_g = m_f = m_g$, fazendo de f e g funções constantes, portanto, linearmente dependentes, o que é uma contradição.

$\square$

Assim como na seção anterior, segue do teorema acima a não lineabilidade de $\widehat{C}[a,b]$, para quaisquer $a,b \in \mathbb{R}$. De fato, suponhamos $\lambda(\widehat{C}[a,b]) \geq 2$. Então existem funções $f,g \in \widehat{C}[a,b]$ tais que f e g são linearmente independentes. Seja $h : [a,b] \longrightarrow [0,1]$, dada por $h(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$. Uma vez que h é bijetora, temos que $f \circ h^{-1}$ e $g \circ h^{-1}$ têm um único ponto de máximo. Além disso, elas são linearmente independentes, pois dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}\alpha f \circ h^{-1} + \beta g \circ h^{-1} = 0 &\Longrightarrow \alpha f \circ h^{-1} \circ h + \beta g \circ h^{-1} \circ h = 0\\ &\Longrightarrow \alpha f + \beta g = 0\\ &\Longrightarrow \alpha = \beta = 0.\end{aligned}$$

Assim, $[f \circ h^{-1}, g \circ h^{-1}] \subset \widehat{C}[0,1] \cup \{0\}$, com $f \circ h^{-1}$ e $g \circ h^{-1}$ linearmente independentes, ou seja, $\lambda(\widehat{C}[0,1]) \geq 2$, o que é uma contradição. Logo, $\lambda(\widehat{C}[a,b]) = 1$, para quaisquer $a,b \in \mathbb{R}$.

2.4 A lineabilidade de $\widehat{C}_0(\mathbb{R})$

Agora, mostraremos que o conjunto das funções contínuas que se anulam no infinito e que atingem o máximo em um único ponto é 2-lineável. Para isso, antes do resultado principal, vamos ver alguns resultados envolvendo funções e matrizes.

Definição 2.4.1. *Denotamos por $C_0(\mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. E denotamos por $\widehat{C}_0(\mathbb{R})$ o subconjunto de $C_0(\mathbb{R})$ das funções que atingem o máximo em um único ponto.*

A seguir mostraremos que existe um subespaço vetorial 2-dimensional, $F \subset C_0(\mathbb{R})$, tal que $F \subset \widehat{C}_0(\mathbb{R}) \cup \{0\}$. Vamos mostrar, ainda, que para $n > 2$ é impossível construir um subespaço de dimensão n com tal propriedade. Vejamos, primeiramente, algumas definições.

Definição 2.4.2. *Sejam P e Q dois subespaços fechados de um espaço de Banach real $(X, ||.||_X)$. A inclinação de P em Q é definida por*

$$(\widehat{P,Q}) := \inf\{d(x,Q) : x \in P, ||x||_X = 1\},$$

onde $d(x,Q) := \inf\{||x-q||_X : q \in Q\}$.

Observação 2.4.3. *Note que, se $P = [x]$ e $Q = [y]$, com x e y linearmente independentes em X, temos $(\widehat{P,Q})$ e $(\widehat{Q,P})$ estritamente positivos. Além disso, dado $z = \alpha x + \beta y$ com $x \in P$, $y \in Q$ e*

$||x||_X = ||y||_X = 1$, se $(\widehat{P,Q}) = \delta_1 > 0$, então $|\alpha| \leq \dfrac{||z||_X}{\delta_1}$. De fato, para $\alpha = 0$ é trivial, então suponhamos $\alpha \neq 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
||z||_X = ||\alpha x + \beta y||_X &= |\alpha| \cdot \left\| \frac{\alpha}{|\alpha|} x + \frac{\beta}{|\alpha|} y \right\|_X \\
&= |\alpha| \cdot \left\| \frac{\alpha}{|\alpha|} x - \left(\frac{-\beta}{|\alpha|} y \right) \right\|_X \\
&\geq |\alpha| \cdot \inf \left\{ \left\| \frac{\alpha}{|\alpha|} x - \overline{y} \right\|_X : \overline{y} \in Q \right\} \\
&= |\alpha| \cdot d\left(\frac{\alpha}{|\alpha|} x, Q \right) \\
&\geq |\alpha| \cdot \inf \{ d(\overline{x}, Q) : \overline{x} \in P, ||\overline{x}||_X = 1 \} \\
&= |\alpha| \cdot (\widehat{P,Q}) \\
&= |\alpha| \cdot \delta_1.
\end{aligned}$$

Logo, $|\alpha| \leq \dfrac{||z||_X}{\delta_1}$. Nas mesmas condições, se $(\widehat{Q,P}) = \delta_2 > 0$, temos $|\beta| \leq \dfrac{||z||_X}{\delta_2}$.

Definição 2.4.4. *Seja K um conjunto. Uma função $f : K \to \mathbb{R}$ é dita **alternada** se existem $t_1, t_2 \in K$ tais que $f(t_1) < 0$ e $f(t_2) > 0$. Um conjunto de funções é dito **alternado** se cada função não nula é alternada.*

Proposição 2.4.5. *Não existe subespaço vetorial 2-dimensional alternado, $A \subset C_0(\mathbb{R})$, tal que $A \subset \widehat{C}_0(\mathbb{R}) \cup \{0\}$.*

Demonstração. Suponhamos que existem funções $f, g \in C_0(\mathbb{R})$, linearmente independentes, tais que $A = [f, g] \subset \widehat{C}_0(\mathbb{R}) \cup \{0\}$ e A é alternado. Sem perda de generalidade, vamos supor que $||f|| = ||g|| = 1$. Consideremos o conjunto

$$Z := \{z = \alpha f + \beta g : ||z|| = 1\}.$$

Tomando $P = [f]$ e $Q = [g]$, pela Observação 2.4.3, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in Z$ então $\alpha, \beta \in \left[-\dfrac{1}{\delta}, \dfrac{1}{\delta} \right]$. De fato, como $(\widehat{P,Q}) = \delta_1 > 0$ e $(\widehat{Q,P}) = \delta_2 > 0$, segue que $|\alpha| \leq \dfrac{||z||}{\delta_1}$ e $|\beta| \leq \dfrac{||z||}{\delta_2}$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, como $||z|| = 1$, temos $|\alpha| \leq \dfrac{1}{\delta_1}$ e $|\beta| \leq \dfrac{1}{\delta_2}$, ou seja, $\alpha, \beta \in \left[-\dfrac{1}{\delta}, \dfrac{1}{\delta} \right]$.

Para cada $z = \alpha f + \beta g \in Z$, definamos

$$m_{\alpha\beta} := \inf\{(\alpha f + \beta g)(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

e

$$M_{\alpha\beta} := \sup\{(\alpha f + \beta g)(t) : t \in \mathbb{R}\},$$

que existem, pois $z = \alpha f + \beta g \in C_0(\mathbb{R})$. Afirmamos que

$$\sup\{m_{\alpha\beta} : z = \alpha f + \beta g \in Z\} < 0.$$

De fato, como cada $m_{\alpha\beta}$ com $z = \alpha f + \beta g \in Z$ é menor que 0, uma vez que z é alternada, temos que $\sup\{m_{\alpha\beta} : z = \alpha f + \beta g \in Z\} \leq 0$. Se esse supremo fosse igual a 0, existiriam sequências $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}, (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \subset \left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]$, de modo que para qualquer $\varepsilon > 0$, existiria $n_0 \geq 1$ tal que $-\varepsilon < m_{\alpha_n\beta_n} \leq 0$, sempre que $n \geq n_0$. Como $\left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]$ é compacto, existem $(\alpha_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, $(\beta_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ em $\left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]$ tais que $\alpha_{n_j} \longrightarrow \overline{\alpha}$ e $\beta_{n_j} \longrightarrow \overline{\beta}$. Assim, $\alpha_{n_j} f + \beta_{n_j} g \longrightarrow \overline{\alpha} f + \overline{\beta} g$, e daí, $m_{\alpha_{n_j}\beta_{n_j}} \longrightarrow m_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}$. Como, para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $-\varepsilon < m_{\alpha_n\beta_n} \leq 0$ quando $n \geq n_0$, temos $m_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = 0$. Já que $m_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = \inf\{(\overline{\alpha} f + \overline{\beta} g)(t) : t \in \mathbb{R}\}$, segue que $\overline{z} = \overline{\alpha} f + \overline{\beta} g$ é não negativa, o que contraria o fato de $\overline{z}$ ser alternada. Analogamente, concluímos que

$$\inf\{M_{\alpha\beta} : z = \alpha f + \beta g \in Z\} > 0.$$

Agora, seja $N > 0$ tal que, para todo $z \in Z$,

$$m(z) < -N < 0 < N < M(z).$$

Esse N existe devido às desigualdades que vimos acima. Como $f, g \in C_0(\mathbb{R})$, temos que existem $T_f, T_g > 0$ tais que

$$|t| > T_f \Longrightarrow f(t) \in \left[-\frac{\delta N}{2}, \frac{\delta N}{2}\right]$$

e

$$|t| > T_g \Longrightarrow g(t) \in \left[-\frac{\delta N}{2}, \frac{\delta N}{2}\right].$$

Tomando $T = \max\{T_f, T_g\}$, temos

$$|t| > T \Longrightarrow f(t), g(t) \in \left[-\frac{\delta N}{2}, \frac{\delta N}{2}\right].$$

Para $z = \alpha f + \beta g \in Z$, temos $\alpha, \beta \in \left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]$ e

$$|t| > T \Longrightarrow |\alpha f(t) + \beta g(t)| \leq |\alpha| \cdot |f(t)| + |\beta| \cdot |g(t)| \leq \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\delta N}{2} + \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\delta N}{2} = N.$$

Assim, $z(t) \in [-N, N]$ para $|t| > T$. Daí, vemos que, para cada $t \in \mathbb{R}$ tal que $|t| > T$, $z(t) \neq M(z)$ e $z(t) \neq m(z)$, logo t é ignorável para $z \in Z$. Portanto, $\alpha f + \beta g$ tem um único ponto de máximo em $[-T, T]$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, não ambos nulos. Com isso, $\left[f|_{[-T,T]}, g|_{[-T,T]}\right] \subseteq \widehat{C}[-T, T] \cup \{0\}$, o que é uma contradição, pois anteriormente vimos que $\lambda(\widehat{C}[-T, T]) \leq 1$.

□

O lema a seguir será útil para provarmos a próxima proposição.

Lema 2.4.6. *Sejam K um conjunto e V um espaço vetorial n-dimensional ($n \geq 2$) formado por funções $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$. Existem n pontos $t_1, \ldots, t_n$ em K tais que, para toda matriz $(y_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, existem n funções $f_1, \ldots, f_n$ em V, tais que para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $f_i(t_j) = y_{ij}$.*

Demonstração. Primeiramente, note que, se $\dim V = n$, K tem pelo menos n pontos. Provaremos por indução que se $\{X_1, \ldots, X_n\}$ é uma base de V, então existem n pontos $t_1, \ldots, t_n \in K$ tais que os n vetores $(X_1(t_j))_{j=1}^n, \ldots, (X_n(t_j))_{j=1}^n$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$.

Para $n = 2$, suponhamos por contradição que, para cada $t_1, t_2 \in K$, os vetores $(X_1(t_1), X_1(t_2))$ e $(X_2(t_1), X_2(t_2))$ são linearmente dependentes em $\mathbb{R}^2$. Então, podemos supor que existem $t_0 \in K$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$X_2(t_0) = \alpha X_1(t_0) \neq 0, \tag{2.1}$$

pois, caso contrário, teríamos $X_2 \equiv 0$ ou $X_1 \equiv 0$, o que contradiz $\{X_1, X_2\}$ ser base de V. Sabemos que dois vetores v_1 e v_2 não nulos são linearmente dependentes se, e só se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 = \lambda v_2$. Assim, para todo $t \in K$, existe $\beta_t \in \mathbb{R}$ tal que

$$(\beta_t X_1(t_0), \beta_t X_1(t)) = (X_2(t_0), X_2(t)).$$

Disso, segue que $\beta_t X_1(t_0) = X_2(t_0)$. Daí, da Equação (2.1), temos que para cada $t \in K$, $\beta_t = \alpha$. Então

$$X_2(t) = \alpha X_1(t),$$

para todo $t \in K$, o que contradiz o fato de $\{X_1, X_2\}$ ser uma base de V.

Por indução, suponhamos que a afirmação vale para $n = p \geq 2$. Provemos que também vale para $n = p+1$. Novamente, por contradição, suponhamos que, para todos $t_1, \ldots, t_{p+1} \in K$, os vetores $(X_1(t_j))_{j=1}^{p+1}, \ldots, (X_{p+1}(t_j))_{j=1}^{p+1}$ são linearmente dependentes. Como a afirmação é válida para $n = p$, então existem $t_1, \ldots, t_p \in K$ tais que

$$[(X_1(t_j))_{j=1}^p, \ldots, (X_p(t_j))_{j=1}^p] = \mathbb{R}^p.$$

Então, existe uma única sequência $(\alpha_i)_{i=1}^p \in \mathbb{R}^p$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i X_i(t_j) \right)_{j=1}^p = (X_{p+1}(t_j))_{j=1}^p. \tag{2.2}$$

De fato, como o posto da matriz $(X_i(t_j))_{i,j=1}^p$ é igual a p, pois suas linhas $(X_1(t_j))_{j=1}^p, \ldots, (X_p(t_j))_{j=1}^p$ são linearmente independentes, segue que

$$\begin{pmatrix} X_1(t_1) & \cdots & X_1(t_p) \\ \vdots & & \vdots \\ X_p(t_1) & \cdots & X_p(t_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{p+1}(t_1) \\ \vdots \\ X_{p+1}(t_p) \end{pmatrix}$$

possui solução única e $(\alpha_i)_{i=1}^p$ é a única solução do sistema

$$\begin{cases} \beta_1 X_1(t_1) + \cdots + \beta_p X_p(t_1) = X_{p+1}(t_1) \\ \qquad\qquad\vdots \\ \beta_1 X_1(t_p) + \cdots + \beta_p X_p(t_p) = X_{p+1}(t_p) \end{cases}.$$

Note que, para todos $t_1, \ldots, t_k, t \in K$, os $p+1$ vetores

$$((X_1(t_j))_{j=1}^p, X_1(t)), \ldots, ((X_{p+1}(t_j))_{j=1}^p, X_{p+1}(t))$$

são linearmente dependentes. Então, para todo $t \in K$, existem $\gamma_{1t}, \ldots, \gamma_{pt} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\left(\left(\sum_{i=1}^p \gamma_{it} X_i(t_j)\right)_{j=1}^p, \sum_{i=1}^p \gamma_{it} X_i(t)\right) = ((X_{p+1}(t_j))_{j=1}^p, X_{p+1}(t)).$$

Da igualdade das primeiras p coordenadas e da Equação (2.2), temos que $\gamma_{it} = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, p$. Então, para todo $t \in K$,

$$X_{p+1}(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_i(t),$$

o que contradiz o fato de $\{X_1, \ldots, X_p, X_{p+1}\}$ ser uma base de V. Logo, a afirmação vale para $n = p+1$, concluindo a indução.

Agora, suponhamos que $\dim V = n$ e seja $\{X_1, \ldots, X_n\}$ uma base de V. Pelo que acabamos de mostrar, existem n pontos $t_1, \ldots, t_n \in K$ tais que os vetores $(X_1(t_j))_{j=1}^n, \ldots, (X_n(t_j))_{j=1}^n$ são linearmente independentes. Consideremos uma matriz $(y_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então, para cada $i \in 1, \ldots, n$, existem $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{l=1}^n \alpha_{il} (X_l(t_j))_{j=1}^n = (y_{ij})_{j=1}^n.$$

Com isso, as funções $Y_1, \ldots, Y_n \in V$, definidas por $Y_i = \sum_{l=1}^n \alpha_{il} X_l$, são tais que $Y_i(t_j) = y_{ij}$, para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. $\square$

Observação 2.4.7. *Note que, dada uma matriz $(y_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $m \leq n$, pelo lema anterior, existem n pontos $t_1, \ldots, t_n \in K$ e m funções $f_1, \ldots, f_m \in V$ tais que para todos $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$, $f_i(t_j) = y_{ij}$. Basta olharmos $(y_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ como submatriz de $(x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, considerando $x_{ij} = y_{ij}$ para $i \leq m$ e $x_{ij} = 0$, caso contrário.*

Proposição 2.4.8. *Seja K um conjunto. Todo espaço vetorial de funções $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ n-dimensional, $n > 2$, contém um subespaço alternado $(n-1)$-dimensional.*

Demonstração. Seja V um espaço vetorial n-dimensional, $n > 2$, formado por funções $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^n$

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}.$$

Note que esse subespaço tem dimensão $n-1$, uma vez que $x_n = -x_1 - \cdots - x_{n-1}$. Além disso, é um subespaço alternado, uma vez que seus vetores não nulos têm coordenadas positivas e negativas, já que $x_1 + \cdots + x_n = 0$ para todo $(x_1, \ldots, x_n)$ no subespaço.

Seja $\{(y_{1j})_{j=1}^n, \ldots, (y_{(n-1)j})_{j=1}^n\}$ uma base desse subespaço de $\mathbb{R}^n$. Pelo Lema 2.4.6 e pela Observação 2.4.7, existem n pontos $t_1, \ldots, t_n \in K$ e $n-1$ funções $Y_1, \ldots, Y_{n-1} \in V$ tais que $Y_i(t_j) = y_{ij}$. Observe que $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ são linearmente independentes, pois se

$$\alpha_1 Y_1(t) + \cdots + \alpha_{n-1} Y_{n-1}(t) = 0$$

para todo $t \in K$, tomamos $t = t_1, \ldots, t_n$ e do sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11} + \cdots + \alpha_{n-1} y_{(n-1)1} = 0 \\ \alpha_1 y_{12} + \cdots + \alpha_{n-1} y_{(n-1)2} = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_1 y_{1n} + \cdots + \alpha_{n-1} y_{(n-1)n} = 0 \end{cases},$$

obtemos

$$\alpha_1 (y_{1j})_{j=1}^n + \cdots + \alpha_{n-1} (y_{(n-1)j})_{j=1}^n = 0,$$

donde segue que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$, pois $(y_{1j})_{j=1}^n, \ldots, (y_{(n-1)j})_{j=1}^n$ são linearmente independentes. Assim, $F = [Y_1, \ldots, Y_n]$ é um subespaço $(n-1)$-dimensional de V, que é alternado, pois como $\alpha_1 (y_{1j})_{j=1}^n + \cdots + \alpha_{n-1} (y_{(n-1)j})_{j=1}^n$ é alternado, existem $t_i, t_k \in K$ tais que $f(t_i) = \alpha_1 y_{1i} + \cdots + \alpha_{n-1} y_{(n-1)i} < 0$ e $f(t_k) = \alpha_1 y_{1k} + \cdots + \alpha_{n-1} y_{(n-1)k} > 0$. □

Com esse último resultado demonstrado, temos todas as ferramentas para provarmos o próximo teorema.

Teorema 2.4.9. $\lambda(\widehat{C}_0(\mathbb{R})) = 2$.

Demonstração. Primeiramente, note que $[\operatorname{sen} x, 1 - \cos x] \subset \widehat{C}[0, 2\pi) \cup \{0\}$. De fato, $\operatorname{sen} x$ e $1 - \cos x$ atingem o seu máximo em um único ponto de $[0, 2\pi)$, $\operatorname{sen} x$ em $x = \dfrac{\pi}{2}$ e $1 - \cos x$ em $x = \pi$. Sejam $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \operatorname{sen} x + \beta(1 - \cos x)$ uma combinação não trivial. Lembremos que, para $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$(\alpha, \beta) = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \theta, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{sen} \theta).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha \operatorname{sen} x + \beta(1 - \cos x) &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \theta \operatorname{sen} x + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{sen} \theta (1 - \cos x) \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (\cos \theta \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \theta \cos x) + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{sen} \theta \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (\operatorname{sen}(x - \theta) + \operatorname{sen} \theta). \end{aligned}$$

Temos que $\operatorname{sen}(x - \theta)$ atinge o máximo em um único ponto de $[-\theta, 2\pi - \theta)$ e $\operatorname{sen} \theta$ é constante, logo $\alpha \operatorname{sen} x + \beta(1 - \cos x)$ atinge o máximo em um único ponto de $[0, 2\pi)$. Além disso, $\operatorname{sen} x$ e $1 - \cos x$ são linearmente independentes. De fato, suponhamos $\alpha \operatorname{sen} x + \beta(1 - \cos x) = 0$. Quando $x = \dfrac{\pi}{2}$, temos $\alpha + \beta = 0$, e quando $x = \pi$, temos $2\beta = 0$. Assim, $\alpha = \beta = 0$.

Agora, considere as funções $p, q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$p(t) := \mu(t)\,\mathrm{sen}(4\,\mathrm{arctg}\,|t|)$$

e

$$q(t) := \mu(t)(1 - \cos(4\,\mathrm{arctg}\,|t|)),$$

onde

$$\mu(t) = \begin{cases} e^t, & \text{se } t \leq 0 \\ 1, & \text{se } t \geq 0 \end{cases}.$$

Considere o subespaço $F = [p, q]$. Afirmamos que F é 2-dimensional e $F \subset \widehat{C}_0(\mathbb{R}) \cup \{0\}$. De fato, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha\mu(t)\,\mathrm{sen}(4\,\mathrm{arctg}\,|t|) + \beta\mu(t)(1 - \cos(4\,\mathrm{arctg}\,|t|)) = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Tomando $t = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha\mu(1)\,\mathrm{sen}(4\,\mathrm{arctg}(1)) + \beta\mu(1)(1 - \cos(4\,\mathrm{arctg}(1))) = 0 &\Longrightarrow \alpha\,\mathrm{sen}(\pi) + \beta(1 - \cos(\pi)) = 0 \\ &\Longrightarrow 2\beta = 0 \\ &\Longrightarrow \beta = 0. \end{aligned}$$

E para $t = \sqrt{3}$, temos

$$\alpha\mu\left(\sqrt{3}\right)\mathrm{sen}\left(4\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\right)\right) = 0 \Longrightarrow \alpha\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0.$$

Assim, $\alpha = \beta = 0$, isto é, p e q são linearmente independentes. Note que, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} \alpha p(t) + \beta q(t) &= \lim_{t\to+\infty} \alpha\,\mathrm{sen}(4\,\mathrm{arctg}\,|t|) + \beta(1 - \cos(4\,\mathrm{arctg}\,|t|)) \\ &= \alpha\,\mathrm{sen}\left(4 \lim_{t\to+\infty} \mathrm{arctg}\,|t|\right) + \beta\left(1 - \cos\left(4 \lim_{t\to+\infty} \mathrm{arctg}\,|t|\right)\right) \\ &= \alpha\,\mathrm{sen}\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \beta\left(1 - \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \alpha\,\mathrm{sen}(2\pi) + \beta\,(1 - \cos(2\pi)) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\lim_{t\to-\infty} \alpha p(t) + \beta q(t) = \lim_{t\to-\infty} e^t(\alpha\,\mathrm{sen}(4\,\mathrm{arctg}\,|t|) + \beta(1 - \cos(4\,\mathrm{arctg}\,|t|))) = 0.$$

Então, $\alpha p + \beta q \in C_0(\mathbb{R})$.

Falta mostrarmos que essa combinação atinge o máximo em um único ponto. Como já vimos na demonstração do Teorema 2.2.2, $p(t) = \mu(t)\,\mathrm{sen}(4\,\mathrm{arctg}\,|t|)$ atinge o máximo uma única vez em $t = \mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{8}$. Para q, temos que $-1 \leq \cos(4\,\mathrm{arctg}\,|t|) \leq 1$, assim, $q(t) \leq 2$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Vejamos que q atinge o valor 2 em apenas um ponto. Tomando $t = 1$, temos

$$q(1) = \mu(1) \cdot (1 - \cos(4\,\mathrm{arctg}(1))) = 1 \cdot \left(1 - \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 - (-1) = 2.$$

Então, $t = 1$ é ponto de máximo de q. Se $t \neq 1$, temos que $4 \operatorname{arctg} |t| \in [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, e daí, $\cos(4 \operatorname{arctg} |t|) > -1$. Logo, $1 - \cos(4 \operatorname{arctg} |t|) < 1 + 1 = 2$, concluindo que $t = 1$ é o único ponto de máximo de q. Agora, vamos mostrar que qualquer combinação linear não trivial dessas duas funções possui um único ponto de máximo. Seja $\alpha p(t) + \beta q(t)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, essa combinação. Como já vimos, para qualquer par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$(\alpha, \beta) = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \theta, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{sen} \theta).$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\alpha p(t) + \beta q(t) &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \theta p(t) + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{sen} \theta q(t) \\
&= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos \theta \mu(t) \operatorname{sen}(4 \operatorname{arctg} |t|) + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{sen} \theta \mu(t)(1 - \cos(4 \operatorname{arctg} |t|)) \\
&= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \mu(t)[\cos \theta \operatorname{sen}(4 \operatorname{arctg} |t|) - \operatorname{sen} \theta \cos(4 \operatorname{arctg} |t|) + \operatorname{sen} \theta] \\
&= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \mu(t)[\operatorname{sen}(4 \operatorname{arctg} |t| - \theta) + \operatorname{sen} \theta].
\end{aligned}$$

Para $t \geq 0$, $\mu(t) = 1$ e $4 \operatorname{arctg} |t| \in [0, 2\pi)$. Daí, temos

$$\alpha p(t) + \beta q(t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}[\operatorname{sen}(4 \operatorname{arctg} |t| - \theta) + \operatorname{sen} \theta],$$

que atinge o máximo em um único ponto, pois $\operatorname{sen}(4 \operatorname{arctg} |t| - \theta)$ atinge o máximo em um único ponto de $[-\theta, 2\pi - \theta)$ e $(4 \operatorname{arctg} |t| - \theta)$ é bijetora. Se $t < 0$, $\mu(t) = e^t < 1$, então

$$\begin{aligned}
\alpha p(t) + \beta q(t) &= \mu(t) \cdot [\alpha \operatorname{sen}(4 \operatorname{arctg} |t|) + \beta(1 - \cos(4 \operatorname{arctg} |t|))] \\
&< [\alpha \operatorname{sen}(4 \operatorname{arctg} |t|) + \beta(1 - \cos(4 \operatorname{arctg} |t|))] \\
&= \alpha p(-t) + \beta q(-t),
\end{aligned}$$

uma vez que $\mu(-t) = 1$, quando $t < 0$. Da desigualdade acima, temos que o máximo de $\alpha p(t) + \beta q(t)$ é atingido apenas para um único valor $t \geq 0$. Logo, qualquer combinação não trivial $\alpha p(t) + \beta q(t)$ pertence a $\widehat{C}_0(\mathbb{R})$.

Por fim, vamos provar que $\widehat{C}_0(\mathbb{R})$ não é n-lineável para $n > 2$. Suponha por contradição que exista um subespaço W de dimensão 3 tal que $W \subset \widehat{C}_0(\mathbb{R}) \cup \{0\}$. Pela Proposição 2.4.8, W possui um subespaço alternado W_0 de dimensão 2. E daí, temos que $W_0 \subset W \subset \widehat{C}_0(\mathbb{R}) \cup \{0\}$, o que é uma contradição devido a Proposição 2.4.5.

$\square$

Agora que investigamos a lineabilidade de $\widehat{C}_0(\mathbb{R})$, vamos olhar para o conjunto $\widehat{c}_0$ das sequências que convergem para 0 e atingem o máximo em um único ponto. A próxima proposição nos garante que esse conjunto é não lineável.

Proposição 2.4.10. $\lambda(\widehat{c}_0) = 1$.

Demonstração. Suponhamos por contradição que existam $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}, b = (b_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\widehat{c}_0$, linearmente independentes, tais que para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$, a combinação $\alpha a + \beta b$ admite um e apenas um valor de máximo. Considere A o conjunto dessas combinações. Como a e $-a$ pertencem a A, existe um único $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{i_0} = \max_{n\in\mathbb{N}} a_n \neq 0$ ou $-a_{i_0} = \max_{n\in\mathbb{N}} -a_n \neq 0$. Tome $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} = \dfrac{a}{a_{i_0}}$. Então

$$\max_{i\in\mathbb{N}} x_i = x_{i_0} = 1.$$

Podemos escolher $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in A$ tal que $y_{i_0} = 0$ e $y_{j_0} > 0$, para algum $j_0 \neq i_0$. De fato, se $b_{i_0} = 0$ e existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_{j_0} > 0$, não temos nada a fazer. Se $b_{i_0} = 0$ e $b_j < 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $j \neq i_0$, basta considerarmos $y = -b$. Agora, se $b_{i_0} \neq 0$, considere $y = b - b_{i_0} \cdot x$. Note que $y_{i_0} = 0$ e existe $y_{j_0} \neq 0$, pois caso contrário, b e x seriam linearmente dependentes e, como x é múltiplo de a, teríamos uma contradição. Daí, se algum $y_{j_0} > 0$, temos o desejado; caso contrário, consideramos $y = -(b - b_{i_0} \cdot x)$.

Seja $\lambda_{j_0} \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $x_{j_0} + \lambda_{j_0} y_{j_0} = 1$. Tal λ_{j_0} existe pois $x_{j_0} < 1$ e $y_{j_0} > 0$. Considere $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{1 + \lambda_{j_0}}.$$

Como as sequências x e y convergem para 0, existe $N > j_0$ tal que, para todo $i \geq N$,

$$\max\{|x_i|, |y_i|\} < \varepsilon.$$

Tomemos

$$\{y_{i_k}\}_{k=1}^{m} \subset \{y_i\}_{i=1}^{N-1}$$

tais que, para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$, $y_{i_k} > 0$, e sejam $\{\lambda_k\}_{k=1}^{m} \in \mathbb{R}_+$ tais que $x_{i_k} + \lambda_k y_{i_k} = 1$. Assim,

$$\lambda_0 := \min\{\lambda_k\}_{k=1}^{m} > 0,$$

pois

$$\lambda_k = \frac{1 - x_{i_k}}{y_{i_k}} > 0$$

para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$. Definamos a sequência

$$z := x + \lambda_0 y.$$

Observe que z é tal que

$$\max_{i\in\mathbb{N}} z_i = \max_{i\in\mathbb{N}}\{x_i + \lambda_0 y_i\} = 1.$$

De fato, para todo $i \geq N$, temos

$$\max\{|x_i|, |y_i|\} < \varepsilon < \frac{1}{1 + \lambda_{j_0}}.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $\max\{|x_i|, |y_i|\} = |y_i|$. Assim, $|y_i| < \dfrac{1}{1+\lambda_{j_0}}$. Daí,

$$\begin{aligned} 1 &> |y_i| + \lambda_{j_0}|y_i| \\ &\geq |x_i| + \lambda_{j_0}|y_i| \\ &\geq |x_i| + \lambda_0|y_i| \\ &\geq |x_i + \lambda_0 y_i| \\ &\geq x_i + \lambda_0 y_i. \end{aligned}$$

Logo, para todo $i \geq N$, $z_i < 1$. Para $i \in \{1, \dots, N-1\}$, se $i \in \{i_1, \dots, i_m\}$, onde i_k é tal que $x_{i_k} + \lambda_k y_{i_k} = 1$, segue que $x_{i_k} + \lambda_0 y_{i_k} \leq 1$ uma vez que, como vimos anteriormente, $\lambda_0 = \min\{\lambda_k\}_{k=1}^m$. Nos outros casos, temos necessariamente $y_i \leq 0$ e, como $x_i \leq 1$ para todo i, segue que

$$1 \geq x_i \geq x_i + \lambda_0 y_i = z_i.$$

Agora, note que

$$z_{i_0} = x_{i_0} + \lambda_0 y_{i_0} = x_{i_0} = 1$$

e, para todo $k \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\lambda_k = \lambda_0$, temos

$$z_{i_k} = x_{i_k} + \lambda_0 y_{i_k} = x_{i_k} + \lambda_k y_{i_k} = 1.$$

Então, z tem pelo menos dois pontos de máximo, o que é uma contradição. $\square$

O próximo resultado será útil para estudarmos a lineabilidade de $||\widehat{c_0}||$, o conjunto das sequências que convergem para zero e atingem a norma em um único ponto. Denotaremos por c_0 o espaço vetorial das sequências reais que convergem para zero, munido da norma $||(x_n)_{n=1}^{\infty}|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

Proposição 2.4.11. *Seja $L \subset c_0$ um subespaço tal que $\dim L = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Então existe $x \in L$ tal que $||x|| = 1$ e $\#\{i \in \mathbb{N} : |x_i| = 1\} \geq n$.*

Demonstração. Se $\dim L = 1$, consideremos $x \in L$ tal que $||x|| = 1$. Como $||x|| = \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\} = 1$, temos pelo menos um $i \in \mathbb{N}$ tal que $|x_i| = 1$, e daí $\#\{i \in \mathbb{N} : |x_i| = 1\} \geq 1$.

Para o caso $n = 2$, consideremos $\{a, b\}$ uma base de L e suponhamos por contradição que, para cada $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\alpha a + \beta b$ atinge a sua norma em um único ponto. Podemos considerar $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ de tal forma que $||x^{(1)}|| = x^{(1)}_{i_0} = 1$, $x^{(2)}_{i_0} = 0$ e $x^{(2)}_{j_0} \neq 0$, para algum $j_0 \neq i_0$. De fato, sendo $||x^{(1)}|| = x^{(1)}_{i_0} = 1$ (é sempre possível ser construído como um múltiplo de a), temos que:

i) Se $b_{i_0} = 0$, então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_{j_0} \neq 0$, pois caso contrário $b = 0$, o que é uma contradição. Nesse caso, tome $x^{(2)} = b$.

ii) Se $b_{i_0} \neq 0$, consideramos $x^{(2)} = (b - b_{i_0} x^{(1)})$. Então $x^{(2)}_{i_0} = 0$ e existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x^2_{j_0} \neq 0$, pois caso contrário teríamos b e $x^{(1)}$ linearmente dependentes e $x^{(1)}$ é múltiplo de a, o que é uma contradição.

Tome $\lambda_{j_0} \in \mathbb{R}^*_+$ tal que $x^{(1)}_{j_0} + \lambda_{j_0} x^{(2)}_{j_0} = \operatorname{sgn} x^{(2)}_{j_0}$, ou seja, é igual a 1 se $x^{(2)}_{j_0} > 0$ ou igual a -1 se $x^{(2)}_{j_0} < 0$. Note que isso sempre é possível, pois

$$\lambda_{j_0} = \frac{\operatorname{sgn} x^{(2)}_{j_0} - x^{(1)}_{j_0}}{x^{(2)}_{j_0}},$$

$\operatorname{sgn} x^{(2)}_{j_0} - x^{(1)}_{j_0} = 1 - x^{(1)}_{j_0} > 0$ se $x^{(2)}_{j_0} > 0$ e $\operatorname{sgn} x^{(2)}_{j_0} - x^{(1)}_{j_0} = -1 - x^{(1)}_{j_0} < 0$ se $x^{(2)}_{j_0} < 0$, já que $|x^{(1)}_{j_0}| < 1$, pois $x^{(1)}$ assume o máximo em um único ponto e já foi assumido em $x^{(1)}_{i_0}$. Considere $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{1 + \lambda_{j_0}}.$$

Como as sequências $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ convergem para 0, existe $N > j_0$ tal que, para todo $i \geq N$,

$$\max\{|x^{(1)}_i|, |x^{(2)}_i|\} < \varepsilon.$$

Para $i \in \{1, \dots, N-1\}$ tal que $x^{(2)}_i \neq 0$, definamos $\lambda_i \in \mathbb{R}^*_+$ de modo que $x^{(1)}_i + \lambda_i x^{(2)}_i = \operatorname{sgn} x^{(2)}_i$. Consideremos $\Lambda_0 = \min\{\lambda_i\} > 0$ e a sequência $w^{(0)} = x^{(1)} + \Lambda_0 x^{(2)}$. Note que

$$||w^{(0)}|| = \sup\{|x^{(1)}_i + \Lambda_0 x^{(2)}_i|\} = 1.$$

De fato, para todo $i \geq N$, sabemos que

$$\max\{|x^{(1)}_i|, |x^{(2)}_i|\} < \varepsilon < \frac{1}{1 + \lambda_{j_0}}.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $\max\{|x^{(1)}_i|, |x^{(2)}_i|\} = |x^{(2)}_i|$. Assim, $|x^{(2)}_i| < \dfrac{1}{1 + \lambda_{j_0}}$. Daí,

$$\begin{aligned} 1 &> |x^{(2)}_i| + \lambda_{j_0} |x^{(2)}_i| \\ &\geq |x^{(1)}_i| + \lambda_{j_0} |x^{(2)}_i| \\ &\geq |x^{(1)}_i| + \Lambda_0 |x^{(2)}_i| \\ &\geq |x^{(1)}_i + \Lambda_0 x^{(2)}_i|. \end{aligned}$$

Logo, para todo $i \geq N$, $|w^{(0)}_i| < 1$. Para $i \in \{1, \dots, N-1\}$, se $x^{(2)}_i \neq 0$, temos $x^{(1)}_i + \lambda_i x^{(2)}_i = \operatorname{sgn} x^{(2)}_i$. Para $x^{(2)}_i > 0$, então

$$x^{(1)}_i + \Lambda_0 x^{(2)}_i \leq x^{(1)}_i + \lambda_i x^{(2)}_i = 1 \Rightarrow |x^{(1)}_i + \Lambda_0 x^{(2)}_i| \leq 1,$$

pois

$$x^{(1)}_i + \Lambda_0 x^{(2)}_i < -1 \Rightarrow -1 - x^{(1)}_i > \Lambda_0 x^{(2)}_i > 0 \Rightarrow x^{(1)}_i < -1,$$

o que é uma contradição, já que $||x^{(1)}|| = 1$. Para $x_i^{(2)} < 0$, ocorre que

$$x_i^{(1)} + \Lambda_0 x_i^{(2)} \geq x_i^{(1)} + \lambda_i x_i^{(2)} = -1 \Rightarrow |x_i^{(1)} + \Lambda_0 x_i^{(2)}| \leq 1,$$

pois

$$x_i^{(1)} + \Lambda_0 x_i^{(2)} > 1 \Rightarrow 1 - x_i^{(1)} < \Lambda_0 x_i^{(2)} < 0 \Rightarrow x_i^{(1)} > 1,$$

o que é uma contradição já que $||x^{(1)}|| = 1$. Logo, $|x_i^{(1)} + \Lambda_0 x_i^{(2)}| \leq 1$. Nos demais casos, temos $x_i^{(2)} = 0$, e como $|x_i^{(1)}| \leq 1$ para todo i, segue que

$$1 \geq |x_i^{(1)}| = |x_i^{(1)} + \Lambda_0 x_i^{(2)}| = |w_i^{(0)}|.$$

Agora, note que

$$w_{i_0}^{(0)} = x_{i_0}^{(1)} + \Lambda_0 x_{i_0}^{(2)} = x_{i_0}^{(1)} = 1$$

e, para todo $i \in \{1, \ldots, N-1\}$ tal que $\lambda_i = \Lambda_0$, temos

$$w_i^{(0)} = x_i^{(1)} + \Lambda_0 x_i^{(2)} = x_i^{(1)} + \lambda_i x_i^{(2)} = \operatorname{sgn} x_i^{(2)},$$

de onde segue que $|w_i^{(0)}| = 1$. Então, $w^{(0)}$ atinge a norma em pelo menos dois pontos distintos, o que é uma contradição.

Para $n = 3$, considere $\{a, b, c\}$ uma base de L e suponha por contradição que a proposição é falsa. Note que, assim como no caso $n = 2$, podemos considerar $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ de tal forma que $||x^{(1)}|| = x_{i_0}^{(1)} = 1$, $x_{i_0}^{(2)} = 0$ e $x_{j_0}^{(2)} \neq 0$, para algum $j_0 \neq i_0$. Assim, para o $w^{(0)}$ definido no caso anterior, existe somente um $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_{i_1} = \Lambda_0$, pois caso contrário, dada a existência de $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \Lambda_0$, teríamos $w^{(0)}$ atingindo a norma em três pontos e chegaríamos a uma contradição. Vejamos que existe $x^{(3)} \in L$ tal que $x_{i_0}^{(3)} = x_{i_1}^{(3)} = 0$ e $x_{j_1}^{(3)} \neq 0$ para algum $j_1 \notin \{i_0, i_1\}$. Se $c_{i_0} = c_{i_1} = 0$, basta tomar $x^{(3)} = c$. Note que, como c é não nulo, existe $j_1 \notin \{i_0, i_1\}$ tal que $x_{j_1}^{(3)} = c_{j_1} \neq 0$. Se $c_{i_0} \neq 0$ ou $c_{i_1} \neq 0$, considere

$$x^{(3)} = c - \left(\frac{c_{i_1} - c_{i_0} x_{i_1}^{(1)}}{x_{i_1}^{(2)}} \right) x^{(2)} - c_{i_0} x^{(1)}.$$

Então

$$x_{i_0}^{(3)} = c_{i_0} - \left(\frac{c_{i_1} - c_{i_0} x_{i_1}^{(1)}}{x_{i_1}^{(2)}} \right) x_{i_0}^{(2)} - c_{i_0} x_{i_0}^{(1)} = 0$$

e

$$x_{i_1}^{(3)} = c_{i_1} - \left(\frac{c_{i_1} - c_{i_0} x_{i_1}^{(1)}}{x_{i_1}^{(2)}} \right) x_{i_1}^{(2)} - c_{i_0} x_{i_1}^{(1)} = 0.$$

Além disso, existe $x_{j_1}^{(3)} \neq 0$ para algum $j_1 \notin \{i_0, i_1\}$, caso contrário, teríamos $x^{(3)}$ nulo, o que é uma contradição, já que $\{a, b, c\}$ é linearmente independente.

Defina $\lambda_{j_1} \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $w_{j_1}^{(0)} + \lambda_{j_1} x_{j_1}^{(3)} = \operatorname{sgn} x_{j_1}^{(3)}$ e considere $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{1 + \lambda_{j_1}}.$$

Como as sequências $w^{(0)}$ e $x^{(3)}$ convergem para 0, existe $N > j_1$, tal que, para todo $i \geq N$,

$$\max\{|w_i^{(0)}|, |x_i^{(3)}|\} < \varepsilon.$$

Para $i \in \{1, \ldots, N-1\}$ tal que $x_i^{(3)} \neq 0$, definamos $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ de modo que $w_i^{(0)} + \lambda_i x_i^{(3)} = \operatorname{sgn} x_i^{(3)}$. Consideremos $\Lambda_1 = \min\{\lambda_i\} > 0$ e a nova sequência $w^{(1)} = w^{(0)} + \Lambda_1 x^{(3)}$. Procedendo de maneira análoga ao caso $n = 2$, temos $||w^{(1)}|| = 1$. Temos ainda,

$$w_{i_0}^{(1)} = w_{i_0}^{(0)} + \Lambda_1 x_{i_0}^{(3)} = w_{i_0}^{(0)} = 1$$

e

$$w_{i_1}^{(1)} = w_{i_1}^{(0)} + \Lambda_1 x_{i_1}^{(3)} = w_{i_1}^{(0)} = x_{i_1}^{(1)} + \Lambda_0 x_{i_1}^{(2)} = \operatorname{sgn} x_{i_1}^{(2)}.$$

Para todo $i \in \{1, \ldots, N-1\}$ tal que $\lambda_i = \Lambda_1$, temos

$$w_i^{(1)} = w_i^{(0)} + \Lambda_1 x_i^{(3)} = w_i^{(0)} + \lambda_i x_i^{(3)} = \operatorname{sgn} x_i^{(3)}.$$

Assim, vemos que em pelo menos três pontos distintos, $||w^{(1)}|| = 1$, o que é uma contradição.

Prosseguindo da mesma forma para $n \geq 4$, temos o resultado. □

Corolário 2.4.12. $\lambda(||\widehat{c}_0||) = 1$.

Demonstração. Se $\lambda(||\widehat{c}_0||) \geq 2$, pela proposição anterior, existe $x \in ||\widehat{c}_0||$ com $||x|| = 1$ e $\#\{i \in \mathbb{N} : |x_i| = 1\} \geq 2$, o que é uma contradição. □

Capítulo 3

Lineabilidade em conjuntos de funções reais definidas em espaços topológicos

No capítulo anterior, vimos que $\widehat{C}[0, 2\pi)$ é 2-lineável, $\widehat{C}(\mathbb{R})$ é 2-lineável e $\widehat{C}[0, 1]$ não é lineável. Agora, nosso objetivo é estudar tais resultados considerando domínios mais gerais, vendo que os resultados que provamos no capítulo anterior são apenas casos particulares do que provaremos neste terceiro capítulo. Este capítulo foi baseado no Capítulo 2 de [5].

3.1 Generalizando a 2-lineabilidade de $\widehat{C}[0, 2\pi)$

Denotaremos por D um espaço topológico que tem uma bijeção contínua com a esfera unitária $(n-1)$-dimensional de $\mathbb{R}^n$. No primeiro teorema mostraremos que para todo espaço D com essa característica, temos $\widehat{C}(D)$ n-lineável.

Teorema 3.1.1. *Sejam $n \geq 2$ um inteiro e D um espaço topológico tal que exista uma bijeção contínua de D para S^{n-1}. Então $\widehat{C}(D)$ é n-lineável.*

Demonstração. Sejam $G : D \longrightarrow S^{n-1}$ uma bijeção contínua e $\pi_i : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ a projeção sobre a i-ésima coordenada, para $i = 1, \ldots, n$. Primeiramente, mostremos que as funções $\pi_i, i = 1, \ldots, n$, são linearmente independentes. Seja uma combinação linear qualquer

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i.$$

Se essa combinação linear é não trivial, isto é, $a_i \neq 0$ para algum i, segue que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0.$$

Logo, tomamos

$$z = \frac{(a_1, \ldots, a_n)}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \in S^{n-1}$$

e então

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i(z) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \neq 0.$$

Agora, mostremos que cada combinação linear não trivial das funções $\pi_i, i = 1, \ldots, n$, possui apenas um ponto de máximo. Tomemos $\sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i$, com $a_i \neq 0$ para algum $i = 1, \ldots, n$, e $y \in S^{n-1}$. Dessa forma,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i(y) = \langle a, y \rangle ,$$

onde $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Considere a função

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \langle a, y \rangle . \end{aligned}$$

Afirmamos que $f|_{S^{n-1}}$ atinge seu máximo em $z \in S^{n-1}$ se, e somente se,

$$z = \frac{(a_1, \ldots, a_n)}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Inicialmente, note que $f(S^{n-1})$ atinge um valor máximo, pois f é contínua e S^{n-1} é compacta. Considere a função

$$\begin{aligned} \varphi: \ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ||x||_2^2, \end{aligned}$$

onde $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Lembremos que dada $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, chamamos de vetor gradiente de f em x o vetor $\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)$. Dizemos que o número real c é um valor regular de g quando não existem pontos críticos de g no nível c, ou seja, $g(x) = c$ implica em $\nabla g(x) \neq 0$. Olhemos para S^{n-1} como imagem inversa do valor regular 1 por φ. Assim, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (veja [9], Seção 14.8), $x \in S^{n-1}$ é ponto crítico de $f|_{S^{n-1}}$ se, e somente se, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x) = \mu \cdot \nabla \varphi(x)$. Como $\nabla f = a$ e $\nabla \varphi = 2x$, fazendo $\lambda = 2\mu$, segue que

$$a = \frac{\lambda}{2} \cdot 2x = \lambda x.$$

Como $||x||_2^2 = 1$, temos

$$||a||_2^2 = ||\lambda x||_2^2 = |\lambda|^2 \cdot ||x||_2^2 = \lambda^2,$$

e assim,

$$\lambda = \pm ||a||_2.$$

Desse modo, os pontos críticos de $f|_{S^{n-1}}$ são $x = \pm \frac{a}{||a||_2}$. Podemos ver que $z = \frac{a}{||a||_2}$ é ponto de máximo de $f|_{S^{n-1}}$, pois

$$f\left(\frac{a}{||a||_2}\right) = \left\langle a, \frac{a}{||a||_2} \right\rangle = ||a||_2^2 \cdot \frac{1}{||a||_2} = ||a||_2$$

e

$$f\left(-\frac{a}{||a||_2}\right) = -||a||_2,$$

e, portanto, $f\left(-\frac{a}{||a||_2}\right) < f\left(\frac{a}{||a||_2}\right)$.

Agora, considere as composições $\pi_i \circ G : D \longrightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, \ldots, n$. Observe que o conjunto $\{\pi_i \circ G : i = 1, \ldots, n\}$ é linearmente independente. De fato, seja $\sum_{i=1}^n b_i(\pi_i \circ G) = 0$, com $b_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, n$. Sabemos que G é uma bijeção e fazendo a composta com G^{-1} em ambos os lados da igualdade acima, temos $\sum_{i=1}^n b_i\pi_i = 0$. Como já vimos, as projeções $\pi_i, i = 1, \ldots, n$, são linearmente independentes, logo, $b_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Já que $\sum_{i=1}^n b_i\pi_i$ atinge o seu máximo em um único ponto $x_0 \in S^{n-1}$ e G é uma bijeção, tomando $h = \sum_{i=1}^n b_i(\pi_i \circ G)$, temos que h atinge o seu máximo em um único ponto, $G^{-1}(x_0)$. Portanto, considerando o subespaço $[\pi_i \circ G : i = 1, \ldots, n]$, temos que $\widehat{C}(D)$ é n-lineável. □

Corolário 3.1.2. *$\widehat{C}[0, 2\pi)$ é 2-lineável.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, basta mostrarmos que existe uma bijeção contínua de $[0, 2\pi)$ para S^1, a esfera unitária de $\mathbb{R}^2$. Considere a função

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,2\pi) & \longrightarrow & S^1 \\ & \theta & \longmapsto & (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta). \end{array}$$

Note que f é contínua e bijetora, logo temos o desejado. □

3.2 Generalizando a 2-lineabilidade de $\widehat{C}(\mathbb{R})$

Agora, ao invés de olharmos para a reta, vamos considerar espaços topológicos D com algumas propriedades especiais, como veremos no próximo teorema. Continuaremos usando a esfera unitária para determinar a $n-$lineabilidade de $\widehat{C}(D)$. Lembremos que, dados X, Y espaços topológicos e $A \subset X$, uma função contínua $G : X \longrightarrow Y$ é uma extensão contínua da aplicação $F : A \longrightarrow Y$, se $G|_A = F$.

Teorema 3.2.1. *Sejam $n \geq 2$ um inteiro e D um espaço topológico contendo um fechado Y tal que exista uma bijeção contínua $F : Y \longrightarrow S^{n-1}$ e uma extensão contínua de F, $G : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $||G(x)||_2 < 1$ para todo $x \notin Y$. Então $\widehat{C}(D)$ é n-lineável.*

Demonstração. Primeiramente, note que $S^{n-1} \subset G(D)$, pois

$$S^{n-1} = F(Y) = G(Y) \subset G(D).$$

Além disso, $G(D) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_2 \leq 1\}$. Sendo π_i a projeção sobre a $i-$ésima coordenada de $\mathbb{R}^n$, vejamos que qualquer combinação não trivial

$$f := \sum_{i=1}^n b_i\pi_i : G(D) \longrightarrow \mathbb{R}$$

atinge o máximo em um único ponto $x_0 \in G(D)$ e que esse ponto pertence a S^{n-1}. Restringindo f a $S^{n-1} \subset G(D)$, como já mostramos na demonstração do Teorema 3.1.1, temos que $f|_{S^{n-1}}$ atinge o máximo em um único ponto $x_0 \in S^{n-1}$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i(x) \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i(x_0), \tag{3.1}$$

para todo $x \in S^{n-1}$. Como, para qualquer $x \in S^{n-1}$, temos $-x \in S^{n-1}$, segue que

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i(-x) \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i(x_0),$$

e daí,

$$-\sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i(x) \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i(x_0). \tag{3.2}$$

Das equações (3.1) e (3.2), temos

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i(x)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i(x_0) \tag{3.3}$$

para todo $x \in S^{n-1}$. Falta apenas mostrar que se $y \in G(D) \setminus S^{n-1}$, então

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i(y) < \sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i(x_0).$$

O caso $y = 0$ é trivial, uma vez que $\sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i(0) = 0$. Consideremos $y \neq 0$. Como $||y||_2 < 1$, usando a Equação (3.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i(y) &\leq \left|\sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i(y)\right| \\
&= ||y||_2 \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i\left(\frac{y}{||y||_2}\right)\right| \\
&< \left|\sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i\left(\frac{y}{||y||_2}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i(x_0).
\end{aligned}$$

Assim, provamos que qualquer combinação não trivial $f = \sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i$ atinge seu máximo em um único ponto $x_0 \in G(D)$ e $x_0 \in S^{n-1}$.

Agora, note que qualquer combinação linear não trivial

$$h := \sum_{i=1}^{n} b_i (\pi_i \circ G) : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

atinge o máximo no ponto $F^{-1}(x_0) \in D$ e apenas nesse ponto. De fato, observe que h atinge o máximo num ponto $z \in D$ se, e somente se, f atinge o máximo em $G(z)$. Como f atinge seu máximo apenas no ponto $x_0 \in G(D)$, temos que o único ponto de máximo de h é $G^{-1}(x_0) = F^{-1}(x_0)$. Por fim, note que, como $S^{n-1} \subset G(D)$ e as funções π_i, $i = 1, \ldots, n$, são linearmente independentes em S^{n-1}, segue que $\pi_i \circ G$, $i = 1, \ldots, n$, são linearmente independentes em D. Portanto, o subespaço $[\pi_i \circ G : i = 1, \ldots, n]$, nos dá a $n-$lineabilidade de $\widehat{C}(D)$. $\square$

Corolário 3.2.2. *O conjunto $\widehat{C}(\mathbb{R})$ é 2-lineável em $C(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Dados $a, b \in \mathbb{R}^2$, denotaremos por $|a, b|$ o segmento de reta aberto em $\mathbb{R}^2$ de a até b. Tomemos $Y = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, F a função de $[0, +\infty)$ em S^1, dada por

$$\begin{array}{rccl} F: & [0,+\infty) & \longrightarrow & S^1 \\ & t & \longmapsto & F(t) = \left(\cos\left(2\pi - \dfrac{1}{\left(t + \dfrac{1}{2\pi}\right)}\right), \operatorname{sen}\left(2\pi - \dfrac{1}{\left(t + \dfrac{1}{2\pi}\right)}\right)\right) \end{array}$$

e o homeomorfismo

$$\begin{array}{rccl} g: & (-\infty, 0) & \longrightarrow & |F(0), (0,0)| \subset \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & g(x) = (e^x, 0), \end{array}$$

onde $\lim_{x \to 0} g(x) = F(0) = (1, 0)$. Note que F é contínua, uma vez que cos e sen são funções contínuas, e claramente é injetora. Afirmamos que F também é sobrejetora. De fato, dado $(x, y) \in S^1$, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $(x, y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Note que, tomando $t \in [0, +\infty)$ tal que $t = \dfrac{1}{2\pi - \theta} - \dfrac{1}{2\pi}$, temos que

$$\begin{aligned} F(t) &= \left(\cos\left(2\pi - \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2\pi-\theta} - \dfrac{1}{2\pi} + \dfrac{1}{2\pi}\right)}\right), \operatorname{sen}\left(2\pi - \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2\pi-\theta} - \dfrac{1}{2\pi} + \dfrac{1}{2\pi}\right)}\right)\right) \\ &= \left(\cos\left(2\pi - \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2\pi-\theta}\right)}\right), \operatorname{sen}\left(2\pi - \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2\pi-\theta}\right)}\right)\right) \\ &= (\cos(2\pi - (2\pi - \theta)), \operatorname{sen}(2\pi - (2\pi - \theta))) \\ &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

Defina a seguinte extensão contínua de F:

$$\begin{array}{rccl} G: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & G(x) = \begin{cases} F(x), & \text{se } x \geq 0 \\ g(x), & \text{se } x < 0 \end{cases} . \end{array}$$

Note que $||G(x)||_2 < 1$ para todo $x \notin Y$. De fato, se $x \notin Y$, temos $x \in (-\infty, 0)$, e daí,

$$G(x) = g(x) \in |F(0), (0,0)| \subset \mathbb{R}^2.$$

Como $F(0) = (1,0)$, temos $||G(x)||_2 < 1$. Logo, pelo teorema anterior, concluímos que $\widehat{C}(\mathbb{R})$ é 2-lineável. $\square$

3.3 Generalizando a não lineabilidade de $\widehat{C}[0,1]$

Nesta seção, ao invés de olharmos para o compacto $[0,1]$ da reta, olharemos para compactos K de $\mathbb{R}^m$. Antes de provar o resultado principal, provaremos alguns lemas que serão necessários.

Lema 3.3.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e D um espaço métrico tal que exista um espaço vetorial V de funções contínuas de D em $\mathbb{R}$ satisfazendo:*

(a) $\dim(V) = n$, $n \in \mathbb{N}$*;*

(b) Cada $0 \neq f \in V$ possui um único ponto de máximo.

Seja $D' \subset D$ o conjunto dos pontos de máximo das funções que pertencem a V. Então o espaço vetorial

$$V' := \{f|_{D'} : f \in V\}$$

também satisfaz as propriedades (a) e (b).

Demonstração. Notemos, inicialmente, que os elementos de V' satisfazem (b). De fato, cada função não nula $f|_{D'} \in V'$ possui um único ponto de máximo, uma vez que $f \in V$ possui um único ponto de máximo e tal ponto de máximo pertence a D'. Agora, mostremos que $\dim(V') = n$. Seja $\{f_1, \ldots, f_n\}$ uma base de V. Se $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i|_{D'} = 0,$$

então

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i f_i|_{D'} = 0.$$

Considere a função g dada por

$$g := \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \neq 0,$$

e note que $-g \neq 0$ também. Como os pontos de máximo de g e $-g$ pertencem a D', as imagens desses pontos de máximo têm que ser 0, uma vez que

$$g|_{D'} = -g|_{D'} = 0.$$

Assim, $|g|\ |_{D'} = 0$ e concluímos que $g \equiv 0$, pois, se existisse x tal que $g(x) \neq 0$, teríamos que g ou $-g$ assumiria um ponto de máximo não nulo. Como o conjunto $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é linearmente independente, temos $a_1 = \cdots = a_n = 0$ e, daí, $\{f_1|_{D'}, \ldots, f_n|_{D'}\}$ também é linearmente independente. Por fim, note que a função

$$\begin{array}{rccc} \phi: & V & \longrightarrow & V' \\ & f & \longmapsto & f|_{D'} \end{array}$$

é sobrejetora. Logo, $\dim V' \leq \dim V$. Portanto, $\dim(V') = n$. $\square$

Lema 3.3.2. *Usando os mesmos termos e notações do Lema 3.3.1 e de sua demonstração, considere a função contínua*

$$\begin{array}{rccc} F: & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & y & \longmapsto & (f_1(y), \ldots, f_n(y)). \end{array}$$

Seja $X := F(D')$. Então :

(a) Para cada $v \in S^{n-1}$, a função

$$\begin{array}{rccc} g_v: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \langle x, v \rangle . \end{array}$$

possui um único ponto de máximo;

(b) Para cada $x \in X$, existe $v \in S^{n-1}$ tal que x é o único ponto de máximo da função g_v;

(c) Se considerarmos em D' a métrica induzida de D e em X a métrica euclidiana do $\mathbb{R}^n$, então $F|_{D'} : D' \longrightarrow X$ é uma função bijetora e contínua.

Demonstração. (a) Dado $v = (a_1, \ldots, a_n) \in S^{n-1}$, considere a função $g_v \circ F$. Para cada $y \in D'$,

$$g_v \circ F(y) = \langle F(y), v \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i|_{D'}(y).$$

Assim, $g_v \circ F \in V'$. Do Lema 3.3.1, essa função possui um único ponto de máximo, $d \in D'$. Portanto,

$$\langle F(y), v \rangle \leq \langle F(d), v \rangle ,$$

para todo $y \in D'$, onde a igualdade é válida apenas quando $y = d$. Com isso,

$$\langle x, v \rangle \leq \langle F(d), v \rangle ,$$

para todo $x \in X$. Assim, $F(d) \in X$ é um ponto de máximo de g_v. Para vermos que $F(d)$ é o único ponto de máximo, suponhamos que g_v tenha outro ponto de máximo $x' \in X$. Nesse caso, $x' = F(d')$ para algum $d' \neq d$ e a função $g_v \circ F$ teria dois pontos de máximo, o que é uma contradição.

(b) Para cada $x \in X$, existe $d \in D'$ tal que $x = F(d)$. Mas esse d é o ponto de máximo de alguma função não nula

$$h := \sum_{i=1}^{n} a_i f_i|_{D'} : D' \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $||(a_1, \ldots, a_n)||_2 = 1$. Isso é possível pois, se d é ponto de máximo de h e $(a_1, \ldots, a_n)$ não é necessariamente unitário, então d também será ponto de máximo da função $\dfrac{h}{||(a_1, \ldots, a_n)||_2}$. Considerando $v := (a_1, \ldots, a_n) \in S^{n-1}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i f_i|_{D'}(y) &= \langle F(y), v\rangle \\
&\leq \langle F(d), v\rangle \\
&= \langle x, v\rangle
\end{aligned}$$

para todo $y \in D'$. Logo, $\langle z, v\rangle \leq \langle x, v\rangle$, para todo $z \in X$. Do item (a), segue que x é o único ponto de máximo de g_v.

(c) Como $X = F(D')$ e cada função coordenada $f_i|_{D'}$ é contínua, só precisamos provar a injetividade de $F|_{D'}$. Suponha por absurdo que $F|_{D'}$ não é injetora. Assim, se $d_1' \neq d_2' \in D'$ são tais que $F(d_1') = F(d_2')$, então

$$\begin{aligned}
g_v \circ F(d_1') &= \left\langle v, F(d_1')\right\rangle \\
&= \left\langle v, F(d_2')\right\rangle \\
&= g_v \circ F(d_2')
\end{aligned}$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Portanto, nenhum desses dois pontos podem ser pontos de máximo de $g_v \circ F \in V'$, para qualquer v, pois $g_v \circ F$ possui um único ponto de máximo. Porém, isso contraria o fato de D' ser o conjunto dos pontos de máximo das funções que pertencem a V. $\square$

Definição 3.3.3. *Seja $n \geq 2$ e seja $X \subset \mathbb{R}^n$ com $\#X > 1$ satisfazendo as seguintes condições:*

(a) Para cada $v \in S^{n-1}$, a função

$$\begin{array}{rccl}
g_v: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & g_v(x) = \langle x, v\rangle
\end{array}$$

possui um único ponto de máximo, o qual denotaremos por x_v;

(b) Para cada $x \in X$, existe $v_x \in S^{n-1}$ tal que x é o único ponto de máximo da função g_{v_x}.

Defina a função

$$\begin{array}{rccl}
f: & S^{n-1} & \longrightarrow & X \\
 & v & \longmapsto & f(v) = x_v,
\end{array}$$

onde x_v é descrito em (a). Da condição (b), temos que f é sobrejetora.

Lema 3.3.4. *Sejam X e f como descritos na definição anterior. Seja $K \subset X$ um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$. Então $f^{-1}(K) \subset S^{n-1}$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Como $f^{-1}(K) \subset S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, basta mostrarmos que $f^{-1}(K)$ é fechado. Consideremos $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $f^{-1}(K) \subset S^{n-1}$, convergindo para $v \in S^{n-1}$. Como S^{n-1} é compacto e $f^{-1}(K) \subset S^{n-1}$, temos que existe uma subsequência convergente

$$v_{n_j} \longrightarrow v \in S^{n-1}.$$

Para cada j, seja $x_j = f(v_{n_j}) \in K$. Já que K é compacto, existe uma subsequência $(x_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que $x_{j_k} \longrightarrow x \in K$. Agora, como x_{j_k} é o único ponto de máximo da função $g_{v_{n_{j_k}}}$ em X, temos

$$\left\langle f(v), v_{n_{j_k}} \right\rangle \leq \left\langle x_{j_k}, v_{n_{j_k}} \right\rangle.$$

Fazendo $k \longrightarrow \infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$\langle f(v), v \rangle \leq \langle x, v \rangle.$$

Porém, $f(v) = x_v$ é o único ponto de máximo de g_v, então $f(v) = x$ e $v \in f^{-1}(K)$. Assim, $f^{-1}(K) \subset S^{n-1}$ é fechado e, logo, compacto. □

Lema 3.3.5. *A função f da Definição 3.3.3 é contínua se, e somente se, X é compacto.*

Demonstração. Suponhamos que f é contínua. Como f é sobrejetora e S^{n-1} é compacto, segue que $X = f(S^{n-1})$ é compacto. Agora, suponhamos que X é compacto. Seja B um subconjunto fechado de X. Já que X é compacto, segue que B também é compacto em $\mathbb{R}^n$. Do Lema 3.3.4, temos que $f^{-1}(B)$ é um subconjunto compacto de S^{n-1}, logo, fechado. Assim, f é contínua. □

Teorema 3.3.6. *Sejam $n \geq 2$ e $m \geq 1$ inteiros. Então $m < n$ se, e somente se, para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^m$, $\widehat{C}(K)$ não é n-lineável.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $m < n$ e que existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\widehat{C}(K)$ é n-lineável, em outras palavras, que existe um conjunto $V \subset \widehat{C}(K)$, de modo que $V \cup \{0\}$ é um subespaço vetorial n-dimensional de $C(K)$.

Sejam $\{f_1, \ldots, f_n\}$ uma base de $V \cup \{0\}$ e $D = K$. Defina

$$\begin{array}{rccl} F: & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & y & \longmapsto & (f_1(y), \ldots, f_n(y)), \end{array}$$

como já apresentamos no Lema 3.3.2. Tomemos, também como já visto, $D' \subset D$ o conjunto dos pontos de máximo das funções pertencentes a V e seja $X := F(D')$. Como temos por hipótese que $n \geq 2$, segue que $\dim(V \cup \{0\}) \geq 2$. Com isso, V contém funções não constantes. Sendo $g \in V$ uma função não constante, temos que g e $-g$ possuem diferentes pontos de máximo, fazendo D' não unitário. Pelo

Lema 3.3.2, a restrição $F|_{D'} : D' \longrightarrow X$ é bijetora. Logo, X como imagem dessa função também não é unitário. Dessa forma, X satisfaz as condições da Definição 3.3.3. Considere a função

$$f : S^{n-1} \longrightarrow X$$

que apresentamos na Definição 3.3.3.

Vamos provar que D' é fechado em D e, logo, compacto em $\mathbb{R}^m$. Seja $(d_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em D' convergindo para d. Como D é compacto, segue que $d \in D$. Da Definição 3.3.3, para cada k, $F(d_k) = f(v_k)$, para algum $v_k \in S^{n-1}$, e com isso $F(d_k)$ é o único ponto de máximo em X da função

$$\begin{aligned} g_{v_k} : \quad X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g_{v_k}(x) = \langle x, v_k \rangle . \end{aligned}$$

Como S^{n-1} é compacto, $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente

$$v_{k_j} \longrightarrow v \in S^{n-1}.$$

Observe que

$$\left\langle F(d_{k_j}), v_{k_j} \right\rangle \geq \left\langle F(y), v_{k_j} \right\rangle$$

para todo $y \in D'$. Como os pontos $y \in D'$ são pontos de máximo das funções $g_v \circ F : D \longrightarrow \mathbb{R}$, a desigualdade

$$\left\langle F(d_{k_j}), v_{k_j} \right\rangle \geq \left\langle F(z), v_{k_j} \right\rangle$$

vale para todo $z \in D$. Pela continuidade de F, temos

$$\begin{aligned} \langle F(d), v \rangle &= \lim_{j \longrightarrow \infty} \left\langle F(d_{k_j}), v_{k_j} \right\rangle \\ &\geq \lim_{j \longrightarrow \infty} \left\langle F(z), v_{k_j} \right\rangle \\ &= \langle F(z), v \rangle , \end{aligned}$$

para todo $z \in D$. Assim, d é ponto de máximo de $g_v \circ F$. Portanto, $d \in D'$ e D' é fechado em D.

Pelo item (c) do Lema 3.3.2, sabemos que $F : D' \longrightarrow X$ é uma bijeção contínua entre o compacto D' e X, onde X é Hausdorff, uma vez que é espaço métrico com a métrica euclidiana. Assim, pela Proposição 1.2.12, F é um homeomorfismo. Como D' é compacto, segue que $X = F(D')$ é compacto e, pelo Lema 3.3.5, a função $f : S^{n-1} \longrightarrow X$ é contínua. Considerando $\mathbb{R}^m$ contido em $\mathbb{R}^{n-1}$, pois $m < n$, a função

$$F^{-1} \circ f : S^{n-1} \longrightarrow D' \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n,$$

é contínua, por se tratar de uma composta de contínuas. Pelo Teorema de Borsuk-Ulam (veja [3, Corolário 2B.7]), podemos afirmar que existe um par $v, -v \in S^{n-1}$ tal que

$$F^{-1} \circ f(v) = F^{-1} \circ f(-v).$$

Como F^{-1} é injetora, temos $f(v) = f(-v) =: x$. Sabemos que $f : S^{n-1} \longrightarrow X$ é definida por $f(v) = x_v$, onde x_v é o único ponto de máximo de $g_v : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Daí, segue que g_v e g_{-v} têm x como ponto de máximo. Por outro lado, $g_{-v} = -g_v$, pois

$$\begin{aligned} g_{-v}(z) &= \langle z, -v \rangle \\ &= -\langle z, v \rangle \\ &= -g_v(z), \end{aligned}$$

para todo $z \in X$. Logo, $-g_v$ e g_v atingem o máximo no mesmo ponto e, com isso, g_v é constante, o que é uma contradição, pois X tem mais de um ponto e g_v atinge o máximo apenas uma vez em X.

A recíproca é obtida por contradição. Suponha que $m \geq n$ e considere o compacto $K = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$. Tomando a bijeção $Id : K \longrightarrow S^{n-1}$ segue, pelo Teorema 3.1.1, que $\widehat{C}(K)$ é n-lineável, o que é uma contradição. Logo, $m < n$. □

Corolário 3.3.7. *O conjunto $\widehat{C}[a, b]$ não é 2-lineável.*

Demonstração. De fato, $[a, b]$ é um compacto de $\mathbb{R}^m$ com $m = 1$. Assim, pelo teorema anterior, para $n > 1$, $\widehat{C}[a, b]$ não é n-lineável. □

Exemplo 3.3.8. *No espaço de sequências ℓ_2, consideremos o subconjunto K dado por:*

$$K = \left\{ \left(\frac{a_n}{n} \right)_{n=1}^{\infty} : (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \text{ e } ||(a_n)_{n=1}^{\infty}||_2 \leq 1 \right\}.$$

Afirmamos que K é um subconjunto do cubo de Hilbert

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 : |a_n| \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

De fato, dada $\left(\frac{a_n}{n} \right)_{n=1}^{\infty} \in K$, temos

$$\left| \frac{a_n}{n} \right| = \frac{|a_n|}{n} \leq \frac{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Como o cubo de Hilbert é compacto (é possível verificar isto a partir de uma pequena adaptação de [6, Proposição 9, página 229]), se mostrarmos que K é fechado, teremos que K é compacto. Seja então

$$(v_j)_{j=1}^{\infty} = \left(\left(\frac{v_n^j}{n} \right)_{n=1}^{\infty} \right)_{j=1}^{\infty}$$

uma sequência em K convergindo para $w = (w_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$. Pela Observação 1.3.5, para cada n, temos

$$w_n = \lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{v_n^j}{n},$$

o que implica

$$nw_n = \lim_{j \longrightarrow \infty} v_n^j.$$

Usando a igualdade anterior e o fato das sequências em K *serem limitadas superiormente, temos que, para cada* k*,*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} n^2 |w_n|^2 &= \sum_{n=1}^{k} \lim_{j \longrightarrow \infty} |v_n^j|^2 \\
&= \lim_{j \longrightarrow \infty} \sum_{n=1}^{k} |v_n^j|^2 \\
&\leq \limsup_{j \longrightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |v_n^j|^2 \\
&= \limsup_{j \longrightarrow \infty} ||(v_n^j)_{n=1}^{\infty}||_2^2 \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $||(nw_n)_{n=1}^{\infty}||_2 \leq 1$*, fazendo com que* $w \in K$*, como queríamos mostrar.*

Agora, mostremos que $\widehat{C}(K) \cup \{0\}$ *contém um subespaço de dimensão infinita, ou seja, que* $\widehat{C}(K)$ *é lineável. Considere a função*

$$\begin{array}{rccl}
F: & K & \longrightarrow & B_{\ell_2} \\
 & \left(\dfrac{a_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty} & \longmapsto & F\left(\left(\dfrac{a_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}\right) = (a_n)_{n=1}^{\infty},
\end{array}$$

sendo $B_{\ell_2} = \{x \in \ell_2 : ||x||_2 \leq 1\}$*. Note que* F *está bem definida, pois* $||(a_n)_{n=1}^{\infty}||_2 \leq 1$*, já que* $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \in K$*. Para cada* $j \in \mathbb{N}$*, seja* $\pi_j : \ell_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *a projeção sobre a* j*-ésima coordenada. Note que a composta* $\pi_j \circ F : K \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua para cada* $j \in \mathbb{N}$*, pois podemos escrever essa composta como* $j \cdot \pi_j$*. De fato, sendo* $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \in K$*,*

$$\begin{aligned}
\pi_j \circ F\left(\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}\right) &= \pi_j((a_n)_{n=1}^{\infty}) \\
&= a_j \\
&= j \cdot \frac{a_j}{j} \\
&= j \cdot \pi_j\left(\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}\right).
\end{aligned}$$

Temos também que as funções $\pi_j \circ F, j \in \mathbb{N}$*, são linearmente independentes. Com efeito, tomemos uma combinação linear não trivial qualquer*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\pi_j \circ F), \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

Considere a sequência $(c_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2$*, tal que* $c_j = \dfrac{1}{\alpha_j}$ *se* $\alpha_j \neq 0$*,* $c_j = 1$ *se* $\alpha_j = 0$ *e* $c_j = 0$ *se* $j > n$*. Seja* $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $\alpha_{j_0} \neq 0$*. Observe que* $\left(\dfrac{c_j}{j||(c_j)_{j=1}^{\infty}||_2^2}\right)_{j=1}^{\infty} \in K$*, pois* $\left(\dfrac{c_j}{j||(c_j)_{j=1}^{\infty}||_2^2}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2$ *e*

$\left\|\left(\frac{c_j}{||(c_j)_{j=1}^{\infty}||_2^2}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_2 \leq 1$. *Daí,*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\left(\pi_j \circ F\left(\left(\frac{c_j}{j||(c_j)_{j=1}^{\infty}||_2^2}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right) &= \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j \cdot j \cdot \frac{c_j}{j||(c_j)_{j=1}^{\infty}||_2^2} \\
&= \alpha_{j_0} \cdot j_0 \cdot \frac{c_{j_0}}{j_0||(c_j)_{j=1}^{\infty}||_2^2} + \sum_{j\neq j_0}\alpha_j \cdot j \cdot \frac{c_j}{j||(c_j)_{j=1}^{\infty}||_2^2} \\
&= \alpha_{j_0} \cdot j_0 \cdot \frac{1}{\alpha_{j_0}} \cdot \frac{1}{j_0||(c_j)_{j=1}^{\infty}||_2^2} + \sum_{j\neq j_0}\alpha_j \cdot \frac{c_j}{||(c_j)_{j=1}^{\infty}||_2^2} \\
&= \frac{1}{||(c_j)_{j=1}^{\infty}||_2^2} + \sum_{j\neq j_0}\alpha_j \cdot \frac{c_j}{||(c_j)_{j=1}^{\infty}||_2^2} \\
&\geq \frac{1}{||(c_j)_{j=1}^{\infty}||_2^2} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Seja

$$f := \sum_{j=1}^{n} b_j(\pi_j \circ F)$$

uma combinação linear não trivial dessas funções contínuas. Tomando $b = (b_1, \ldots, b_k, 0, 0, \ldots) \in \ell_2$, *temos, para todo* $x = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\right) \in K$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot (\pi_j \circ F(x)) \\
&= \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot x_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot x_j \\
&= \langle b, F(x)\rangle .
\end{aligned}$$

Como $b \in \ell_2^k := \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 : a_n = 0 \text{ para todo } n > k\}$ *e* $||F(x)||_2 \leq 1$ *para todo* $x \in K$, *temos*

$$\begin{aligned}
f(x) = \langle b, F(x)\rangle &\leq |\langle b, F(x)\rangle| \\
&\leq ||b||_2 \cdot ||F(x)||_2 \\
&\leq ||b||_2 \\
&= \frac{1}{||b||_2} \cdot \langle b, b\rangle \\
&= \left\langle b, \frac{b}{||b||_2}\right\rangle .
\end{aligned}$$

Logo, $f(x) = \langle b, F(x)\rangle < \left\langle b, \dfrac{b}{||b||_2}\right\rangle$*, sempre que* $F(x) \neq \dfrac{b}{||b||_2}$*, pois, como foi visto na demonstração do Teorema 3.1.1, a função* $h : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $h(x) = \langle b, x\rangle$*, atinge seu máximo apenas em* $x = \dfrac{b}{||b||_2}$*. Não é difícil verificar que* F *é bijetora. Assim, existe um único ponto* $y \in K$ *tal que* $F(y) = \dfrac{b}{||b||_2}$ *e, com isso,* f *atinge seu máximo em* y*. Como* F *é bijetora e*

$$g := \sum_{j=1}^{k} b_j \pi_j : F(K) \longrightarrow \mathbb{R}$$

atinge o máximo apenas no ponto $\dfrac{b}{||b||_2}$*, como já vimos na demonstração do Teorema 3.1.1, segue que* $f = g \circ F$ *atinge seu máximo apenas em* $F^{-1}\left(\dfrac{b}{||b||_2}\right) = y$*. Assim, o subespaço* $[\pi_j \circ F : j \in \mathbb{N}]$*, está contido em* $\widehat{C}(K) \cup \{0\}$ *e tem dimensão infinita, ou seja,* $\widehat{C}(K)$ *é lineável.*

Referências Bibliográficas

[1] Botelho, G.; Pellegrino, D.; Teixeira, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. SBM, 2012.

[2] Botelho, G.; Cariello, D.; Fávaro, V. V.; Pellegrino, D.; Seoane-Sepúlveda, J. B. *On very non-linear subsets of continuous functions*. Q. J. Math. **65**, n. 3, 841-850, 2014.

[3] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[4] Gurariy, V. I.; Quarta, L. *On lineability of sets of continuous functions*. J. Math. Anal. Appl. **294**, n. 1, 62-72, 2004.

[5] Nogueira, T. K. *Lineabilidade em conjuntos de funções reais que atingem o máximo em um único ponto*. Dissertação de Mestrado, UFPB, 2014.

[6] Lima, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. SBM, 2009.

[7] Aron, R. M.; Bernal-Gonzalez, L.; Pellegrino, D.; Seoane-Sepúlveda, J. B. *Lineability: the search for linearity in mathematics*. CRC Press, 2016.

[8] Mujica, J. *Notas de Topologia Geral*. IMECC-UNICAMP, 2005.

[9] Stewart, J. *Cálculo*. Volume 2, 5a edição. Ed. Thomson, 1983.