



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**Faculdade de Engenharia Civil**



**DOUGLAS FERREIRA MARTINS**

**PROJETO DE UMA ESCADA HELICOIDAL EM CONCRETO ARMADO:  
COMPARAÇÃO ENTRE DOIS MÉTODOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL**

Uberlândia  
2022



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**Faculdade de Engenharia Civil**



**DOUGLAS FERREIRA MARTINS**

**PROJETO DE UMA ESCADA HELICOIDAL EM CONCRETO ARMADO:  
COMPARAÇÃO ENTRE DOIS MÉTODOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia Civil de Uberlândia como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Arquimedes Diógenes Ciloni

Uberlândia  
2022

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao professor Arquimedes e aos demais professores da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia; pelo auxílio no meu desenvolvimento profissional e científico, seja de forma direta ou indireta, por meio da atenção e ministração do conhecimento nas disciplinas ou mesmo por meio das incontáveis histórias compartilhadas, que buscarei não esquecer por toda a minha carreira profissional.

Agradeço à Deus; à minha família, Silas, Geralda e Victor; à minha companheira e namorada, Beatriz; e também à todos os outros que, amigos ou colegas, de forma ou outra participaram desta minha trajetória.

## RESUMO

No âmbito da Engenharia Civil, alguns elementos construtivos em concreto são presentes tão constantemente em projetos estruturais que, para estes, foram desenvolvidos inúmeros métodos de cálculo que são ensinados e estudados mundialmente. São estas vigas, pilares e lajes. O objetivo deste trabalho é estudar um elemento que é de um grau de complexidade maior que os elementos usuais, a viga helicoidal. Na situação proposta pelo trabalho, a viga serve de suporte para uma escada. Para a solução de um elemento mais sofisticado como a escada helicoidal, busca-se comparar os métodos empíricos e os métodos computacionais e seus resultados. Os métodos computacionais são de presença constante no cotidiano do projetista estrutural do século 21, que pode utilizar de diversos aplicativos para auxiliar no dimensionamento de estruturas, das mais simples até as mais complexas. Estes métodos trazem respostas para problemas de difícil solução, utilizando de matrizes e sistemas de equações. Os métodos empíricos, por outro lado, buscavam aproximar estes problemas complexos por meio de aproximações e simplificações físicas e matemáticas. Comparando a solução da viga helicoidal por meio de um método empírico e um método computacional, foi possível analisar brevemente a importância dos dois tipos de método de cálculo para a Engenharia Estrutural.

Palavras-chave: Vigas Helicoidais. Escadas em Concreto Armado. Ansys.

## **ABSTRACT**

In the field of Civil Engineering, a few building elements in concrete occur so often in structural projects that they ended up sparking the development of uncountable design methods that are taught and studied worldwide. These elements being beams, columns and slabs. The objective of this paper is to study an element that has a degree of complexity above these habitual members, the helical beam. The beam studied in the paper works as a support member for a staircase. In order to design such an intricate element as the helical beam, the paper intends to compare empirical and computational methods and their results. The computational methods are a constant presence in the daily life of the Structural Engineer of the 21th century, as they frequently need to resort to using software applications to design both simple and intricate structures. These methods develop solutions to problems of heightened difficulty by solving equation systems and matrices. The empirical methods, on the other hand, try to approach these problems by the way of physical and mathematical approximations and generalizations. Comparing the helical beam by both an empirical and a computational method, it was possible to briefly analyze the significance of both types of design to the area of Structural Engineering.

Key-words: Helical Beams. Reinforced Concrete Staircases. Ansys.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Escada Helicoidal do Monumento à Batalha de Dražgoše, na Eslovênia.....	1
Figura 2 - Projeção horizontal da viga helicoidal .....	4
Figura 3 – Corte longitudinal da escada.....	7
Figura 4 - Projeção da viga helicoidal de Guerrin e Lavaur .....	12
Figura 5 – Corte longitudinal ao longo do eixo da viga.....	15
Figura 6 – Dimensões da escada em planta.....	16
Figura 7 – Divisões para o Método de G. Prudon .....	18
Figura 8 – Diagrama do Momento Fletor $M_x$ segundo Prudon .....	20
Figura 9 – Diagrama do Momento Torçor $M_y$ segundo Prudon .....	20
Figura 10 – Geometria do elemento BEAM189.....	21
Figura 11 – Viga helicoidal modelada no software Ansys.....	21
Figura 12 – Viga helicoidal modelada no software Ansys, em planta.....	22
Figura 13 – Força normal na viga helicoidal pelo Ansys.....	23
Figura 14 – Momento $M_y$ na viga helicoidal pelo Ansys .....	23
Figura 16 – Momento $T_q$ na viga helicoidal pelo Ansys .....	24
Figura 17 – Esforço cortante $SF_z$ na viga helicoidal pelo Ansys .....	25
Figura 18 – Diagrama dos esforços normais .....	27
Figura 19 – Diagrama do momento fletor $M_y$ .....	28
Figura 20 - Diagrama do momento fletor $M_z$ .....	28
Figura 21 – Diagrama do momento torçor $T_q$ .....	29
Figura 22 – Diagrama do esforço cortante $SF_z$ .....	29
Figura 23 – Comparação do $M_x$ (kNm).....	30
Figura 24 – Comparação do $M_y$ (kNm).....	30
Figura 24 – Escada helicoidal em duas vigas .....	50

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Coeficientes de ponderação para cargas permanentes .....	9
Tabela 2 – Esforços obtidos pelo Método de G. Prudon.....	19
Tabela 3 – Esforços obtidos pelo Ansys (continua) .....	25
Tabela 4 – Capacidade mecânica para armaduras em aço CA-50 (kN).....	34
Tabela 5 – Valores de $\rho_{mín}$ , aço CA-50, seção retangular .....	35
Tabela 6 – Valores de $\rho_{wmín}$ , aço CA-50 .....	37
Tabela 7 – Área de seção de armadura $A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> /m) para estribos de dois ramos (continua)	43
Tabela 8 – Resumo das armaduras longitudinais para $Asl, M$ .....	47
Tabela 9 – Resumo das armaduras longitudinais para $Asl, T$ .....	47
Tabela 10 – Resumo das armaduras transversais .....	47
Tabela 11 – Taxa de armadura $\rho_s$ .....	48

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras minúsculas

$b$  – base da viga (m)

$d$  – altura útil da seção transversal da viga (m)

$f_{cd}$  – resistência de cálculo à compressão do concreto (MPa)

$f_{ck}$  – resistência característica à compressão do concreto (MPa)

$f_{yd}$  – resistência de cálculo ao escoamento do aço (MPa)

$f_{yk}$  – resistência característica ao escoamento do aço (MPa)

$h_d$  – altura do degrau (m)

$h'_d$  – altura do degrau pré-moldado (m)

$h_e$  – espessura da parede da seção vazada equivalente (cm)

$h_v$  – altura da viga (m)

$n'$  – número de degraus arredondado

$p_a$  – peso próprio dos apoios dos degraus (kN/m)

$p_d$  – peso próprio dos degraus (kN/m<sup>2</sup>)

$p'_d$  – peso próprio dos degraus, por metro da projeção longitudinal da viga (kN/m)

$p_{rev}$  – peso próprio dos apoios dos degraus (kN/m)

$q_d$  – carga acidental distribuída (kN/m)

$s$  – comprimento dos degraus na linha de rasto (m)

$s_v$  – comprimento médio do passo dos degraus (m)

$u_x$  – momento fletor de cálculo reduzido na direção x (adimensional)

$u_y$  – momento fletor de cálculo reduzido na direção y (adimensional)

$w$  – quantia mecânica total



### Letras maiúsculas

$A_c$  – área da seção de concreto (m<sup>2</sup>)

$A_c$  – área limitada pela linha média da parede da seção vazada equivalente (cm<sup>2</sup>)

$A_{sl,M}$  – área total de aço da armadura longitudinal de flexão (cm<sup>2</sup>)

$A_{sl,M,min}$  – área mínima de aço da armadura longitudinal de flexão (cm<sup>2</sup>)

$A_{sl,T}$  – área total de aço da armadura longitudinal de torção (cm<sup>2</sup>)

$A_{sl,T,min}$  – área mínima de aço da armadura longitudinal de torção (cm<sup>2</sup>)

$A_{sl,tot}$  – área total de aço da armadura longitudinal (cm<sup>2</sup>)

$A_{sw,T}$  – área total de aço da armadura transversal de torção (cm<sup>2</sup>/m)

$A_{sw,V}$  – área total de aço da armadura transversal de cisalhamento (cm<sup>2</sup>/m)

$A_{sw,min}$  – área mínima de aço da armadura transversal (cm<sup>2</sup>/m)

$A_{sw,tot}$  – área total de aço da armadura transversal (cm<sup>2</sup>/m)

$C_1$  – cobrimento da armadura longitudinal de flexão (cm)

$F_d$  – combinação última de ações, valor de cálculo (kN/m)

$F_{G,k}$  – valor característico das ações permanentes (kN/m)

$F_{Q1,k}$  – valor característico da ação variável considerada principal na combinação de ações (kN/m)

$F_{Q,k}$  – valor característico das ações variáveis que não são consideradas principais (kN/m)

$H$  – altura da escada (m)

$L$  – comprimento da viga de sustentação, em planta (m)

$L_{ext}$  – comprimento da borda externa da escada, em planta (m)

$L_{int}$  – comprimento da borda interna da escada, em planta (m)

$L_{LR}$  – comprimento da linha de rasto da escada, em planta (m)

$M_x$  – momento fletor na direção x, método de Prudon (kN.m)

$M_{xd}$  – momento fletor de cálculo na direção x (kN.m)

$M_y$  – momento torçor, método de G. Prudon (kN.m)

$M_y$  – momento fletor longitudinal, Ansys (kN.m)

$M_z$  – momento fletor lateral, Ansys (kN.m)

$M_{yd}$  – momento fletor de cálculo na direção y (kN.m)

$N$  – esforço normal (kN)

$N_d$  – esforço normal de cálculo (kN)

$R$  – raio da viga helicoidal (m)

$R_{ext}$  – raio da borda externa da escada (m)

$R_{int}$  – raio da borda interna da escada (m)

$R_{LR}$  – raio da linha de rasto da escada (m)

$Tq$  – momento torçor no Ansys (kN.m)

$T_d$  – esforço solicitante de cálculo à torção (kN.cm)

$U$  – capacidade mecânica da armadura, valor total (kN)

$V$  – esforço cortante máximo (kN)

### **Letras gregas**

$\alpha$  – ângulo de inclinação da escada (radianos)

$\beta$  – semi-ângulo de abertura da escada, em planta (radianos)

$\gamma_c$  – coeficiente de ponderação da resistência do concreto (adimensional)

$\gamma_g$  – coeficiente de ponderação das ações permanentes (adimensional)

$\gamma_q$  – coeficiente de ponderação das ações variáveis (adimensional)

$\gamma_s$  – coeficiente de ponderação da resistência do aço (adimensional)

$\theta$  – ângulo que define uma segmento da viga de sustentação, método de Prudon (radianos)

$\mu_c$  – perímetro da seção de concreto (cm)

$\mu_e$  – perímetro da seção vazada equivalente (cm)

$\nu$  – força normal reduzida (adimensional)

$\rho_{min}$  – taxa para o cálculo da armadura mínima longitudinal de flexão (%)

$\rho_s$  – taxa de armadura (%)

$\rho_{w,min}$  – taxa para o cálculo da armadura mínima longitudinal e transversal de torção (%)

$\tau_c$  – fator de redução, sendo zero caso se despreza a resistência à tração do concreto (adimensional)

$\tau_d$  – tensão de cálculo tangencial do cisalhamento (MPa)

$\tau_{td}$  – tensão tangencial de torção (MPa)

$\tau_{tu}$  – tensão tangencial limite de torção (MPa)

$\tau_{wd}$  – tensão tangencial de cisalhamento (MPa)

$\tau_{wu}$  – tensão tangencial limite de cisalhamento (MPa)

$\varphi$  – diâmetro das barras de aço (mm)

$\psi_0$  – coeficiente de minoração das ações variáveis secundárias (adimensional)

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1 Objetivo</b> .....	<b>2</b>
<b>1.2 Método</b> .....	<b>2</b>
<b>2 ESCADAS HELICOIDAIS</b> .....	<b>3</b>
<b>2.1 Terminologia</b> .....	<b>3</b>
<b>2.2 Dimensões</b> .....	<b>3</b>
<b>2.3 Cargas e combinações</b> .....	<b>5</b>
2.3.1 Cargas permanentes.....	5
2.3.1.1 Peso próprio da viga de sustentação e dos degraus .....	5
2.3.1.2 Peso próprio do revestimento .....	7
2.3.1.3 Peso próprio do guarda-corpo .....	7
2.3.2 Cargas acidentais.....	8
2.3.2.1 Carga acidental dos degraus .....	8
2.3.3 Combinações de ações.....	8
<b>3 MÉTODOS</b> .....	<b>11</b>
<b>3.1 Método de G. Prudon</b> .....	<b>11</b>
<b>3.2 Método dos Elementos Finitos (MEF)</b> .....	<b>13</b>
<b>4 PROJETO</b> .....	<b>14</b>
<b>4.1 GEOMETRIA</b> .....	<b>14</b>
<b>5 DIMENSIONAMENTO</b> .....	<b>18</b>
<b>5.1 Método de G. Prudon</b> .....	<b>18</b>
<b>5.2 Método dos Elementos Finitos</b> .....	<b>20</b>
<b>5.3 Armadura longitudinal</b> .....	<b>32</b>
5.3.1 Método de G. Prudon .....	37
5.3.1 Método dos Elementos Finitos .....	39
<b>5.4 Armadura transversal</b> .....	<b>40</b>
5.4.1 Método de G. Prudon .....	44
5.4.2 Método dos Elementos Finitos .....	45
<b>5.5 Taxa de armadura</b> .....	<b>47</b>
<b>5.6 Comparação dos métodos</b> .....	<b>29</b>
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>49</b>

6.1 Sugestões para trabalhos futuros .....	49
REFERÊNCIAS.....	52
ANEXO A – Ábacos em roseta para dimensionamento de flexão oblíqua em seções retangulares $da' = 0,10a$ e $db' = 0,10b$ .....	54

## 1 INTRODUÇÃO

No desenvolvimento histórico da arquitetura, as escadas são o elemento estrutural que tenta vencer distâncias verticais através da divisão desta distância em distâncias menores, os degraus. As escadas podem ser concebidas de diversas formas, tais como as escadas em L, em U, retas, vazadas, em espiral ou caracol, helicoidais, dependendo do espaço a ser utilizado e da estética buscada no projeto.

Dentre os tipos de escadas que apresentam contorno circular, as escadas helicoidais são as que se diferenciam por não possuírem um núcleo central onde os degraus se apoiam - a escada gira em torno de um eixo vertical fixo e mantendo um raio de curvatura, como pode ser observado na figura 1. Os degraus são dispostos igualmente distantes do eixo, que não serve de apoio à escada, como é o caso das casas denominadas escadas espirais. Na escada helicoidal, a estrutura se apoia somente no início e no fim do vão que se deseja alcançar.

Figura 1 - Escada Helicoidal do Monumento à Batalha de Dražgoše, na Eslovênia



Fonte: [http://architectuul.com/architecture/view\\_image/monument-to-the-battle-of-drazgose/32434](http://architectuul.com/architecture/view_image/monument-to-the-battle-of-drazgose/32434)

Essa escada se diferencia dos outros tipos por possuir uma concepção estrutural mais elaborada e também pelo seu distinto efeito visual, sendo que ela foi um elemento comum do movimento moderno da arquitetura, sendo utilizada em projetos como o Palácio do Itamaraty

em Brasília, de Oscar Niemeyer. Existem escadas helicoidais em concreto, madeira, aço e combinações destes materiais. Neste trabalho, foi estudada a solução em concreto armado.

Devido à sua estrutura curva e disposta no espaço, a escada helicoidal acaba por ter uma estrutura complexa. Para problemas complexos, uma forma de obtenção dos esforços é o Método dos Elementos Finitos (MEF), que, assim como Cook (1995) afirma, é um método cujo poder é a sua versatilidade, sendo que nele uma estrutura pode possuir forma, apoios e carregamentos arbitrários. Para a aplicação do MEF no trabalho, foi escolhido o software ANSYS Mechanical APDL.

Para efeito de comparação, o problema também será aproximado por meio de um método tradicional. Alguns dos métodos pesquisados foram o método de Telêmaco Van Langendonck, o método de Prudon, o método de José Milton Araújo, o método de Cohen e o método de Holmes. Dentre estes, foi adotado o método de Prudon, por possuir maior abrangência na bibliografia. A analogia utilizada no método de Prudon é a da viga balcão, onde a estrutura da escada será aproximada por meio de uma viga de eixo curvo bi-engastada em balanço no espaço. O escopo do trabalho abrange o estado limite último de ruptura da flexão com torção e cisalhamento.

## **1.1 Objetivo**

O objetivo do trabalho é desenvolver o projeto de uma escada helicoidal em viga de concreto armado, realizando a comparação entre dois métodos de obtenção dos esforços, por meio de revisão bibliográfica e uso de software. Espera-se que, ao fim do trabalho, um dos métodos seja julgado mais econômico para o dimensionamento da peça.

## **1.2 Método**

Uma revisão da bibliografia acerca das escadas helicoidais e dos métodos de análise estrutural foi feita. Em seguida, foram determinados os parâmetros de projeto da escada helicoidal. Com estes definidos, foram aplicados o Método dos Elementos Finitos, pelo software Ansys, e o Método de Prudon. Em seguida, foi realizada a comparação entre os resultados obtidos. Em seguida, foi realizado o detalhamento da estrutura da escada. Por fim, foram realizadas as considerações finais.

## 2 ESCADAS HELICOIDAIS

Ao fim deste capítulo, espera-se que, após analisar e revisar a bibliografia relacionada às escadas helicoidais, sejam determinados os parâmetros iniciais do projeto, obtendo-se uma escada que satisfaça as normas vigentes e seja adequada ao uso, conferindo conforto e segurança.

### 2.1 Terminologia

Guerrin e Lavour (2002) definem como **caixa da escada** a margem externa que contém o volume inteiro da escada e **gola** como sendo a margem interna, que limita a escada com relação ao **vão**, que é o espaço vazio no interior da escada, que varia dependendo do projeto. Acerca da estrutura que sustenta a escada, Guerrin e Lavour (2002) afirmam ainda que é denominada **viga de sustentação** a viga helicoidal que sustenta os degraus.

Os degraus são definidos por seu comprimento e altura. Comprimento e altura podem seguir uma das diversas relações disponíveis para seu cálculo, dependendo do que se busca, como é o caso da fórmula de Blondel. Uma sequência ininterrupta de degraus é denominada **lance**. Por último Guerrin e Lavour (2002) definem como **linha de rasto** o percurso definido por uma pessoa subindo a escada a uma distância de 0,5 metro da gola.

### 2.2 Dimensões

Guerrin e Lavour(2002) afirmam que as dimensões da escada tendem a variar segundo o uso ao qual se destina a escada. A largura usual das escadas seria de 1 metro, sendo que essa largura pode ser encurtada para escadas de serviço (até 0,7 metro de largura) ou alargada para grandes escadas (até 2 metros de largura).

Melges et al. (1997) recomendam que se verifique a variação da fórmula de Blondel, listada como fórmula 1 abaixo:

$$s + 2e = 60 \text{ a } 64 \text{ cm} \quad (1)$$

Onde:

s = passo da escada (m);



$e$  = espelho ou altura do degrau (m).

Alguns códigos e autores apresentam valores mais abrangentes que os listados acima, como é o caso do Código Municipal de Obras de Uberlândia (Uberlândia, 2011), que sugere uma variação entre 60 e 65 cm. Valores maiores ou menores podem gerar escadas desconfortáveis e que só são aconselháveis em casos extremos, como as escadas de serviço.

O valor do número de degraus pode ser obtido considerando a altura  $H$  a ser vencida pela escada e a altura  $h_d$  do degrau e utilizando a relação  $n = H/h_d$ . Deverá ser adotado um valor inteiro imediatamente superior ou inferior ao valor obtido. (GUERRIN E LAVAUUR, 2002).

Araújo (2010c) sugere, para o cálculo da inclinação da escada a fórmula a seguir, ilustrada pela figura 2:

$$\tan \alpha = \frac{H}{2R\beta} \quad (2)$$

Onde:

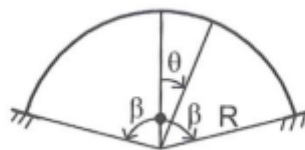
$\alpha$  = inclinação da escada (radianos);

$H$  = altura da escada (m);

$R$  = raio da viga helicoidal (m);

$2\beta$  = ângulo total de abertura (rad), considerando a projeção da viga helicoidal no plano horizontal.

Figura 2 - Projeção horizontal da viga helicoidal



Fonte: Araújo (2010c).

Para o cálculo da linha de rasto, Guerrin e Lavour(2002) sugerem a seguinte expressão, adaptada segundo a terminologia deste trabalho:

$$L_{LR} = s(n - 1) \quad (3)$$

Onde:

$L_{LR}$  = comprimento da linha de rasto (m);

s = comprimento dos degraus na linha de rasto (m);

n = número de degraus.

## 2.3 Cargas e combinações

A norma NBR 6120 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2019) afirma que as cargas que atuam em uma edificação podem ser divididas em duas categorias: permanentes e acidentais. A norma define que as cargas permanentes são aquelas relacionadas com o peso próprio da estrutura, o peso de todos os elementos construtivos e instalações permanentes e que as cargas acidentais são aquelas que atuam no edifício e estão relacionadas com o seu uso. Araújo (2010c) menciona que, para escadas, podem ser definidas ações permanentes do revestimento, peso próprio e peso dos parapeitos, e que as acidentais devem estar distribuídas ao longo de sua superfície, exigindo também a consideração das cargas atuantes nos parapeitos.

### 2.3.1 Cargas permanentes

#### 2.3.1.1 Peso próprio da viga de sustentação e dos degraus

A NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014) indica que, para casos onde a massa específica do concreto não for conhecida, pode ser adotado, para efeito de cálculo, um valor de 2400 kg/m<sup>3</sup> para o concreto simples e de 2500 kg/m<sup>3</sup> para o concreto armado. Não obstante, é importante mencionar que a massa específica do concreto depende de diversos fatores determinados experimentalmente, principalmente de seu adensamento, como afirma Oliveira (2000), sendo os valores da norma os mais próximos aos do concreto vibrado.

Os degraus geralmente não são armados em escadas sustentadas sobre vigas helicoidais, o que geraria uma diferença no peso específico. No entanto, os degraus geralmente são revestidos com materiais que possuem elevado peso específico, de acordo com Guerrin e Lavour (2002), o que causaria uma aproximação dos valores. Logo, para efeito de projeto, foi considerado o valor de 25 kN/m<sup>3</sup> como peso específico da viga e dos degraus.

O peso próprio da viga de sustentação pode ser calculado por metro linear da projeção horizontal da viga, obtido segundo Noal (2014 apud Rocha, 1985) utilizando a fórmula 4 a seguir:

$$p_v = 25 \frac{h_v}{\cos \alpha} b \quad (4)$$

Onde:

$p_v$  = peso próprio da viga de sustentação (kN/m<sup>2</sup>);

$h_v$  = altura da viga (m);

$\alpha$  = inclinação da escada (rad);

$b$  = base da viga (m).

Além disso, devem ser adicionados ainda os valores do peso próprio dos degraus apoiados sobre a viga de sustentação, que podem ser obtidos considerando a equação abaixo:

$$p_a = 25 \frac{h_d}{2} b \quad (5)$$

Onde:

$p_a$  = peso próprio do apoio do degrau (kN/m<sup>2</sup>);

$h_d$  = altura do degrau(m);

$b$  = base da viga (m).

Para o cálculo do peso dos degraus isolados, desconsiderando os apoios, Araújo (2010c) sugere a fórmula 6 abaixo:

$$p_d = 25h_d' \quad (6)$$

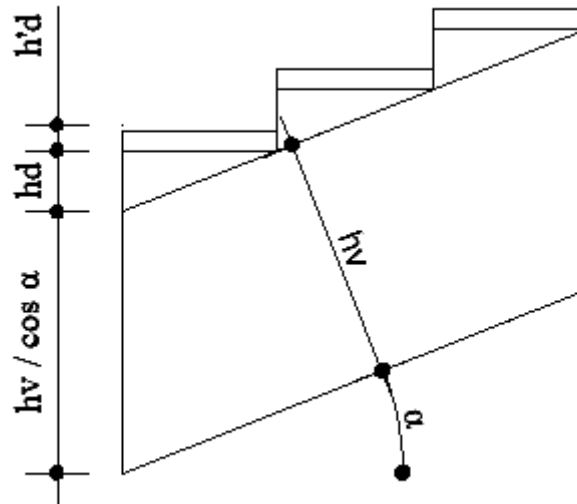
Onde:

$p_d$  = peso próprio do degrau (kN/m<sup>2</sup>);

$h_d'$  = altura da peça pré-moldada (m).

As diferentes dimensões descritas acima podem ser observadas de forma detalhada na figura 3 a seguir:

Figura 3 – Corte longitudinal da escada



Fonte: Autor.

### 2.3.1.2 Peso próprio do revestimento

Araújo (2010c) afirma que o valor do revestimento dependerá do material escolhido como piso, sendo considerado como uma carga vertical disposta por metro quadrado na projeção horizontal da escada. O autor afirma também que, caso não exista um projeto detalhado da escada, deve ser adotado um valor de 1 kN/m<sup>2</sup> como peso do revestimento.

### 2.3.1.3 Peso próprio do guarda-corpo

O guarda-corpo ou corrimão é um elemento que garante à escada a segurança e o conforto dos usuários, sendo um elemento necessário para a acessibilidade segundo a NBR 9020 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2020). Para fins de projeto, a escada dimensionada foi inspirada nas escadas utilizadas frequentemente na arquitetura moderna, que por motivos estéticos, geralmente não possuíam os guarda-corpos em seus lados livres. Salienta-se que, segundo Guerrin e Lavoura (2002), considerando um parapeito em metal ou madeira, o peso próprio a ser considerado geralmente seria de aproximadamente 0,1 kN/m.

### 2.3.2 Cargas acidentais

A NBR 8681 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003) considera as cargas acidentais aquelas relacionadas com as ações variáveis, sendo estas cargas que variam significativamente em relação ao seu valor médio ao longo da vida útil da estrutura.

#### 2.3.2.1 Carga acidental dos degraus

Os valores mínimos para cargas acidentais verticais, dispostas uniformemente ao longo dos degraus, segundo a NBR 6120 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2019) são de 3 kN/m<sup>2</sup> para escadas com acesso ao público e de 2 kN/m<sup>2</sup> para escadas sem acesso ao público. Noal (2014 apud Rocha 1985) informa ainda que é importante considerar também a carga acidental em função do uso da estrutura, conferindo os valores abaixo para diferentes usos:

- a) 2 a 2,5 kN/m<sup>2</sup> para escadas secundárias;
- b) 2,5 a 3 kN/m<sup>2</sup> para escadas de edifícios residenciais;
- c) 4 a 5 kN/m<sup>2</sup> para escadas de edifícios públicos.

A NBR 6120 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2019) acrescenta ainda que, no caso de degraus isolados, estes devem ser dimensionados afim de suportar uma carga concentrada de 2,5 kN aplicada em sua região mais desfavorável. Este carregamento será considerado no cálculo dos degraus.

### 2.3.3 Combinações de ações

A NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014) informa que “Um carregamento é definido pela combinação de ações que têm probabilidades não desprezíveis de atuarem simultaneamente sobre a estrutura, durante um período preestabelecido.” Para o caso do projeto de uma escada comercial interna, é sugerido que ela seja verificada somente quanto ao Estado Limite Último (ELU), utilizando sua combinação última normal. A combinação de ações será formada pelas ações permanentes e uma ação variável principal tomadas por seus valores característicos, enquanto as ações variáveis secundárias devem ter seus valores reduzidos por coeficientes de combinação.

A fórmula 7, da NBR 8681 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003), é a expressão usada para as combinações últimas normais.

$$F_d = \sum_{i=1}^m \gamma_{igi} F_{Gi,k} + \gamma_q [F_{Q1,k} + \sum_{j=2}^n \Psi_{0j} F_{Qj,k}] \quad (7)$$

Onde:

$F_d$  = valor de cálculo das ações na combinação última (kN/m);

$\gamma_{igi}$  = coeficiente de ponderação das cargas permanentes;

$F_{Gi,k}$  = valor característico das ações permanentes (kN/m);

$\gamma_q$  = coeficiente de ponderação das cargas acidentais;

$F_{Q1,k}$  = valor característico da ação variável principal (kN/m);

$\Psi_{0j}$  = coeficiente de minoração das ações variáveis secundárias;

$F_{Qj,k}$  = valor característico das ações variáveis secundárias (kN/m).

Os procedimentos da NBR 8681 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003) levam a uma majoração do valor característico de ações desfavoráveis e uma minoração do valor característica de ações favoráveis à estrutura. Essa alteração dos valores se realiza por meio dos coeficientes de ponderação das ações.

A norma afirma ainda que o coeficiente de ponderação está relacionado com o tipo de construção e o seu material. Os coeficientes usados no trabalho foram listados na tabela 1 abaixo. Na escada helicoidal estudada no trabalho, todas as ações permanentes foram consideradas desfavoráveis.

Tabela 1 - Coeficientes de ponderação para cargas permanentes

Tipo de ação	$\gamma_g$
Peso próprio de estruturas pré-moldadas	1,30
Peso próprio de estruturas moldadas in-loco	1,35
Peso próprio de elementos construtivos em geral	1,50

Fonte: adaptada de ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003.

A ABNT NBR 8681 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003) destaca ainda que, para ações variáveis, os coeficientes  $\gamma_q$  majoram as ações

desfavoráveis para a estrutura, e que as ações favoráveis não são consideradas. Para as ações desfavoráveis à estrutura, será considerando um  $\gamma_q$  de 1,50, assim como informa a norma.

Para o  $\psi_0$ , coeficiente de minoração das ações variáveis secundárias, a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014) sugere que, seguindo a proposição de ser improvável a ocorrência de mais de uma ação variável secundária simultaneamente, as ações sejam reduzidas. A norma define ainda que, para as cargas acidentais em locais onde não há permanência de equipamentos fixos por longos períodos de tempo, poderá ser adotado o valor de 0,5.

### 3 MÉTODOS

Por meio deste capítulo, foi realizada a revisão bibliográfica dos métodos utilizados no projeto da escada em viga helicoidal. Os métodos são utilizados para a obtenção dos esforços solicitantes. Para efeito de comparação, o dimensionamento das armaduras foi realizado com o uso de ábacos (Montoya et. al, 2011) em ambos os métodos.

#### 3.1 Método de G. Prudon

O método de G. Prudon, segundo Guerrin e Lavaur (2002), o cálculo da flexão em vigas curvas se faz sobre o comprimento desenvolvido em planta. Os autores analisam ainda que, mesmo ocorrendo um efeito de torção na escada, dirigido para o centro de sua curvatura, ele pode ser ignorado, pois ele é muito pequeno e o engaste da viga nas lajes superior e inferior forma um conjunto de grande resistência à torção.

O método de G. Prudon consiste no uso das fórmulas 8 e 9 abaixo. Para obtenção destes valores, faz-se necessário também o uso da fórmula 10, listada em seguida.

$$M_x = F_d R^2 (1 - (1 + K') \cos \theta) \quad (8)$$

$$M_y = F_d R^2 (\theta - (1 + K') \sin \theta) \cos \alpha \quad (9)$$

Onde:

$M_x$  = momento fletor na direção x (kNm);

$M_y$  = momento torçor na direção y (kNm);

$F_d$  = valor de cálculo das ações para a combinação última (kN/m);

$R$  = raio da viga helicoidal (m) no plano horizontal

$\theta$  = ângulo que define uma seção qualquer da viga de sustentação (rad);

$(1 + K')$  = coeficiente calculado pela fórmula 10.



$$(1 + K') = \frac{\frac{\sin \beta}{\beta} (2 + \tan^2 \alpha) - \cos \beta}{1 + \frac{\tan^2 \alpha}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\beta}{\beta}\right)} \quad (10)$$

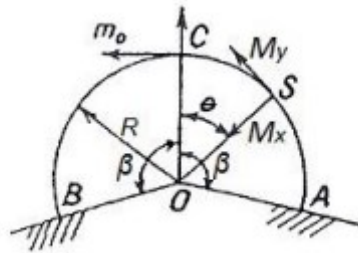
Onde:

$\beta$  = metade do ângulo total de abertura (rad);

$\alpha$  = inclinação da escada (rad).

Outro elemento do método de G. Prudon, que pode ser observado na figura 4, é o momento  $m_0$ , posicionado no centro C, onde o momento de torção é nulo.

Figura 4 - Projeção da viga helicoidal de Guerrin e Lavaur



Fonte: Guerrin e Lavaur (2002).

Guerrin e Lavaur (2002) sugerem que, para estimar o esforço cortante máximo, não seja considerada a inclinação da viga. O esforço cortante é considerado então metade da carga total em cada engaste, seguindo a fórmula 11.

$$V = \frac{F_d L}{2} \quad (11)$$

Onde:

$V$  = esforço cortante máximo (kN);

$F_d$  = valor de cálculo das ações para a combinação última (kN/m);

$L$  = comprimento da viga de sustentação em projeção (m);

### 3.2 Método dos Elementos Finitos (MEF)

O Método dos Elementos Finitos é um método numérico que é mais geral e poderoso em sua aplicação em problemas da física, geometria e problemas de condições de contorno. (REDDY, 2005).

Cook(1995) afirma que a teoria do MEF inclui operações matriciais, integração numérica, resolução de equações e outros procedimentos complexos que são realizados automaticamente pelos softwares disponíveis no mercado. Afirma ainda que, o usuário, ao utilizar um software de MEF, observa apenas indícios desses procedimentos se realizando, sendo o usuário responsável principalmente pelas etapas de pré-processamento e pós-processamento do software.

A etapa de pré-processamento é aquela onde o usuário insere os parâmetros iniciais, como geometria, materiais, apoios, carregamentos e gera a malha de elementos que constitui o elemento a ser calculado. A etapa de pós-processamento envolve a composição, análise e plotagem dos resultados. É importante salientar que o usuário deve ter conhecimento o suficiente da disciplina na qual ele está aplicando o Método dos Elementos Finitos, como afirma Cook(1995), pois é importante que ele possa administrar corretamente os parâmetros a serem inseridos no pré-processamento e verificar se há ou não coerência nos resultados obtidos no pós-processamento.

## 4 PROJETO

Este capítulo tem como objetivo determinar uma geometria para a estrutura em viga helicoidal. Com as dimensões do projeto, será possível realizar o cálculo da combinação de ações, necessário para a aplicação dos métodos revisados anteriormente.

### 4.1 GEOMETRIA

Os parâmetros iniciais da estrutura são:

- a) Desenvolvimento em planta de  $360^\circ$  ( $\beta = 2\pi$ );
- b) Largura de 2 metros;
- c) Altura do degrau de 0,15 metros e espelho do degrau de 0,3 metros (garantindo um valor pela equação de Blondel de 0,6 metros);
- d) Altura total da escada de 6 metros;
- e) Escada rotaciona no sentido horário.

Os primeiros elementos da geometria da escada a serem calculados são os relativos à linha de rasto. A quantidade de degraus da escada, para uma escada com a altura de  $H = 6$  m e uma altura do degrau de 0,15 metros, resulta em  $n = n' = 6/0,15 = 40$  degraus. A fórmula 3 determina o comprimento da linha de rasto,  $L_{LR}$ , que é igual a  $e(n'+1)$ , resultando em uma linha de rasto de 11,70 metros. O raio da escada na linha de rasto pode ser determinado dividindo o comprimento da linha de rasto por seu desenvolvimento em planta, resultando em  $R_{LR} = 11,70/2\pi = 1,86$  metros.

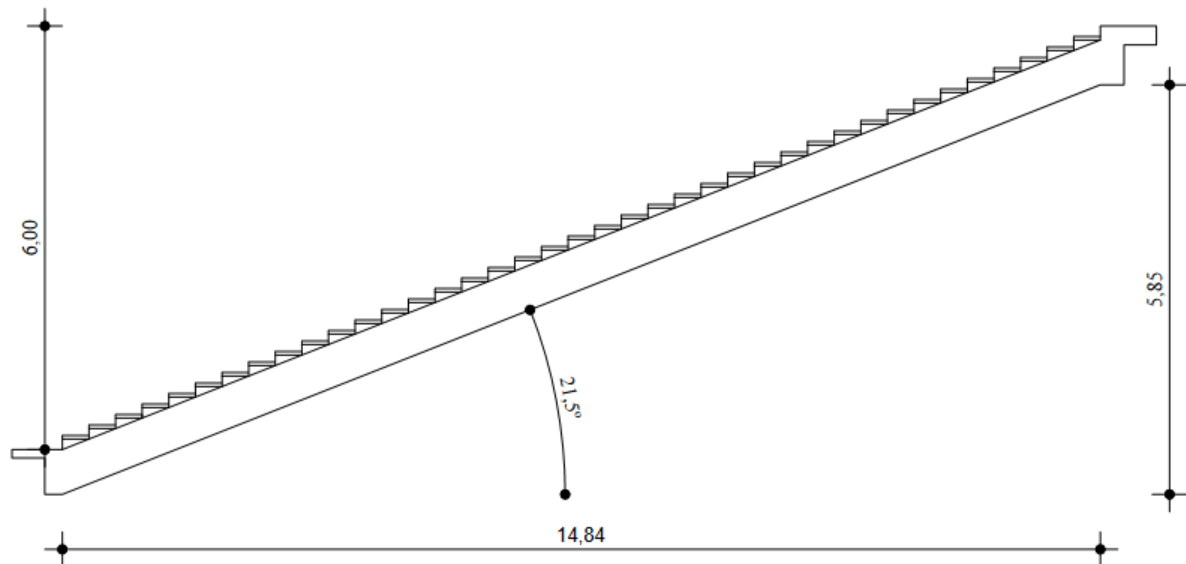
Usando a fórmula 2,  $\tan \alpha = \frac{H}{2R\beta}$ , foi possível determinar a inclinação da escada, que resultou em um valor de  $\alpha$  igual a  $22,03^\circ$ . No entanto, a altura que a viga de sustentação toma deverá ser um pouco menor, pois o último degrau da escada pertence ao patamar de chegada, e não à viga. Com a nova altura  $H$  de 5,85, o cálculo de  $\alpha$  resultará em  $21,53^\circ$ .

O raio da linha de rasto  $R_{LR}$  é localizado a uma distância de 0,5 metros da gola da escada. Considerando a largura da escada de 2 metros, o raio da viga helicoidal pode ser obtido considerando  $R = R_{LR} + 0,5 = 2,36$  metros, pois a viga está situada no eixo de simetria da escada. Com a medida do raio, é possível calcular o comprimento da viga helicoidal, que resulta num valor de  $L = 2\pi R = 14,84$  metros. O raio interno da escada pode ser tomado por meio da expressão  $R_{int} = R_{LR} - 1 = 1,36$  metros. Conseqüentemente, o raio externo da escada

será  $R_{ext} = R_{Lr} + 1 = 3,36 \text{ metros}$ . As dimensões obtidas estão dispostas nas figuras 5 e 6 a seguir.

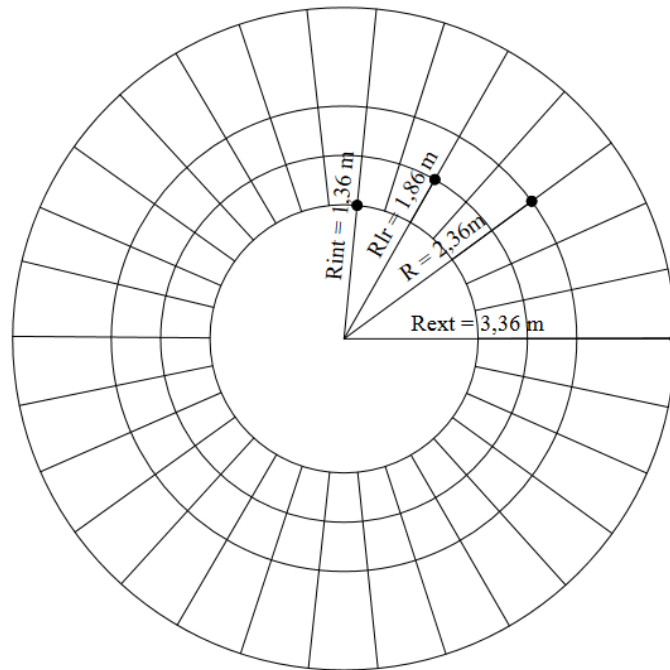
Para a seção da viga, determinou-se uma altura  $h_v = 1,40m$ , que é um pouco menor que o valor de  $\frac{L}{10}$  de 14,84, resultando em um valor da altura projetada  $\frac{h_v}{\cos \alpha} = 1,51 \approx 1,50 m$ . A base da viga foi tomada como sendo  $\frac{1}{3}$  de sua altura, o que resultou num valor de 0,5 m. A espessura do degrau pré-moldado foi definida como sendo de 10 cm, justificando-se por ser uma dimensão usual de placas pré-moldadas.

Figura 5 – Corte longitudinal ao longo do eixo da viga



Fonte: Autor

Figura 6 – Dimensões da escada em planta



Fonte: Autor

Assim como pode ser observado na figura 6, o passo  $s$  de cada degrau é variável. Por meio de equações básicas da geometria, foi possível obter os valores de todas as dimensões. No entanto, o valor que será importante para os cálculos das cargas é o valor do passo sobre a viga, que resultou em  $s_v = 0,38 \text{ m}$ , pois este representa um valor médio sobre toda a largura do degrau.

#### 4.2 CARREGAMENTOS

Primeiramente, foram calculadas as cargas permanentes da estrutura. Com a fórmula 4, calcula-se o peso próprio da viga,  $p_v$ , que resulta num valor de  $p_v = 25 \frac{1,4}{\cos 21,53} 0,5 = 25 \frac{hd}{\cos \alpha} b = 18,81 \text{ kN/m}$ .

A carga dos apoios dos degraus é aplicada. Seu valor é obtido com a fórmula 5, que resulta em  $p_a = 25 \frac{0,15}{2} 0,5 = 0,94 \text{ kN/m}$ . O peso próprio dos degraus pré-moldados, por  $\text{m}^2$  de projeção longitudinal é calculado pela fórmula 6,  $p_d = 25h'_d = 25 * 0,1 = 2,5 \text{ kN/m}^2$ . Para a obtenção do valor por metro longitudinal da viga, é possível calcular o peso próprio das peças pré-moldadas considerando sua forma. Com o valor médio do passo  $s_v = 0,38 \text{ m}$  e a largura dos degraus, de 2 metros, foi possível calcular o peso próprio dos degraus pré-moldados, para cada metro da projeção longitudinal da viga. Assim,  $p'_d = 2,5 \frac{(2*0,38)}{0,38} = 5 \text{ kN/m}$ .

Para o cálculo do  $p'_r$ , o peso próprio do revestimento distribuído, foi utilizado o valor determinado anteriormente de  $p'_r = 1 \text{ kN/m}^2$  e aplicado sobre a área do degrau pré-moldado, resultando num valor de  $p'_r = 1 \frac{(2*0,38)}{0,38} = 2 \text{ kN/m}$ , distribuído ao longo da projeção longitudinal da viga.

Além destes, foi considerado o valor para a carga acidental de  $q_d = 2,5 \text{ kN/m}^2$ . Distribuindo esta carga sobre a projeção do eixo da viga, obtém-se  $q'_d = 2,5 \frac{(2*0,38)}{0,38} = 5 \text{ kN/m}$ . Como não foi considerado parapeito no projeto, não ocorre mais nenhuma carga acidental. Logo, haverá apenas uma combinação de ações.

Por meio da fórmula 7, aplicando os valores calculados, obteve-se o valor da combinação última de ações a seguir:

$$F_d = \sum_{i=1}^m \gamma_{igi} F_{Gi,k} + \gamma_q \left[ F_{Q1,k} + \sum_{j=2}^n \Psi_{0j} F_{Qj,k} \right]$$

$$F_d = 1,35(p_v + p_a + p'_d + p'_r) + 1,5(q'_d)$$

$$F_d = 1,35(18,81 + 0,94 + 5 + 2) + 1,5(5)$$

$$F_d = 43,61 \text{ kN/m}$$

## 5 ESFORÇOS

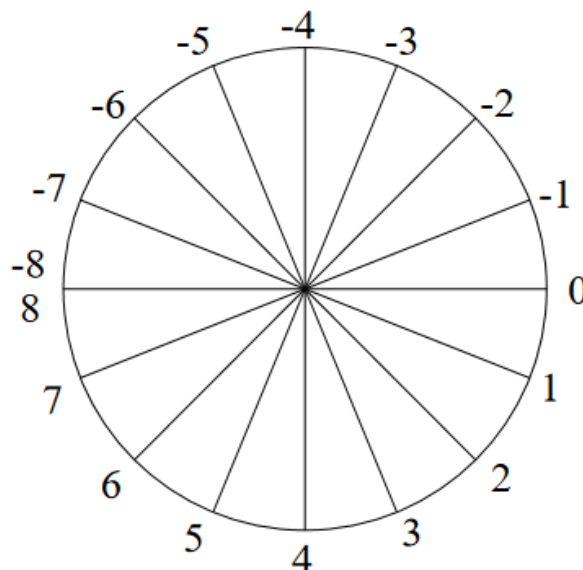
Com a combinação última calculada, foram aplicados os métodos enunciados anteriormente. Algumas convenções foram consideradas na elaboração do trabalho, que tornaram necessários pequenos ajustes nos valores obtidos nos métodos, sendo estas convenções as seguintes:

- O momento fletor positivo no eixo longitudinal é aquele que traciona as fibras inferiores das barras, e o negativo aquele que traciona as fibras superiores;
- O diagrama do momento fletor é desenhado no lado onde as fibras são tracionadas;
- Quanto à flexão lateral, seus valores são negativos quando tracionam a borda externa da estrutura e positivos quando tracionam a borda interna.

### 5.1 Método de G. Prudon

Para o dimensionamento pelo Método de G. Prudon, é necessário dividir a projeção da escada em planta em diversos segmentos, afim de poder considerar uma medida de diversos segmentos de ângulo  $\theta$ . Os segmentos possuem todos o mesmo tamanho, com o ângulo de abertura no valor de  $\pi/8$ , sendo equidistantes. Como a escada gira no sentido horário, os pontos medidos se iniciam no ponto -8, no valor de  $\pi$  e terminam no ponto 8, no valor de  $-\pi$ , subtraindo-se  $\pi/8$  a cada segmento.

Figura 7 – Divisões para o Método de G. Prudon



Fonte: Autor.

Os parâmetros necessários para a aplicação das fórmulas 8 ,9, 10 e 11 são:  $F_d = 43,61$  kN/m,  $\beta = \pi$  rad,  $R = 2,36$  m,  $\alpha = 0,38$  rad e  $L = 14,84$ .

Os valores obtidos na tabela 2 a seguir foram ajustados segundo a convenção adotada no trabalho. É importante observar que o valor da força cortante  $V$  obtida pelo método é apenas o cortante máximo em toda a estrutura. A força cortante máxima será considerada em módulo. A força  $My$  em Prudon se refere ao que é obtido em outros métodos como sendo o momento torçor.

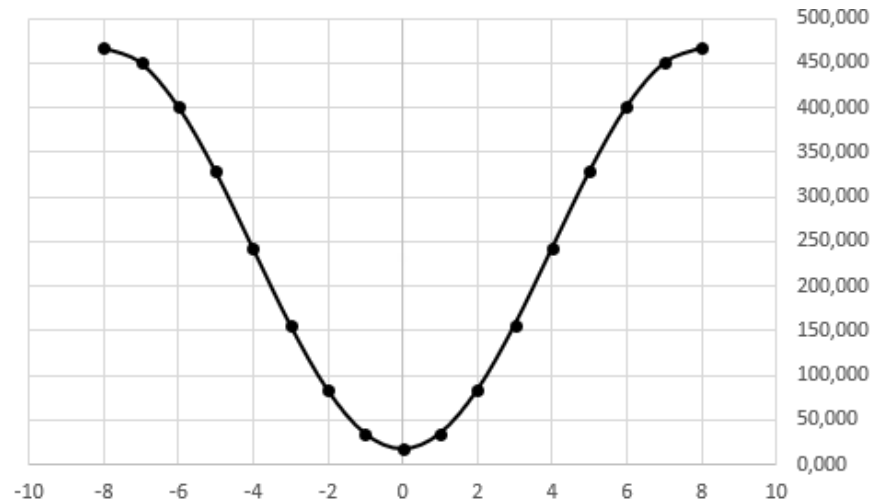
Tabela 2 – Esforços obtidos pelo Método de G. Prudon

Ponto	$\theta$ (rad)	$My$ (kN.m)	$Mx$ (kN.m)	$ V $ (kN)
8	3,142	-709,864	-468,272	323,3514
7	2,749	-540,904	-451,117	-
6	2,356	-384,159	-402,264	-
5	1,963	-249,981	-329,149	-
4	1,571	-145,290	-242,905	-
3	1,178	-72,515	-156,661	-
2	0,785	-29,227	-83,547	-
1	0,393	-8,506	-34,693	-
0	0,000	0,000	-17,538	-
-1	-0,393	8,506	-34,693	-
-2	-0,785	29,227	-83,547	-
-3	-1,178	72,515	-156,661	-
-4	-1,571	145,290	-242,905	-
-5	-1,963	249,981	-329,149	-
-6	-2,356	384,159	-402,264	-
-7	-2,749	540,904	-451,117	-
-8	-3,142	709,864	-468,272	-

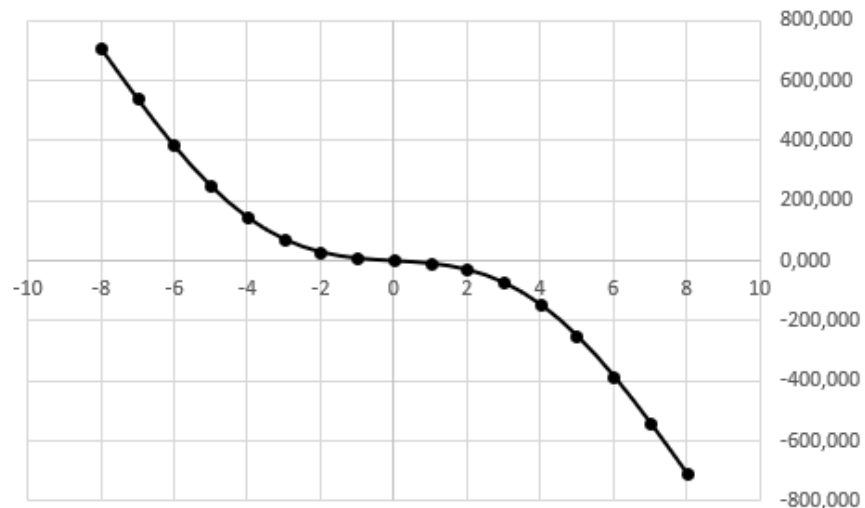
Fonte: Autor.

As curvas dos diagramas dos esforços calculados podem ser vistas nas figuras 8 e 9, ilustrando o desenvolvimento dos esforços pela estrutura:



Figura 8 – Diagrama do Momento Fletor  $M_x$  segundo Prudon

Fonte: Autor.

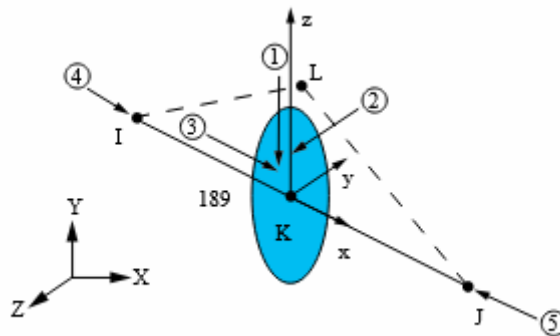
Figura 9 – Diagrama do Momento Torçor  $M_y$  segundo Prudon

Fonte: Autor.

## 5.2 Método dos Elementos Finitos

No software Ansys Mechanical APDL, iniciou-se a etapa do pré-processamento pela escolha do elemento. O elemento adotado para a determinação dos esforços da viga helicoidal foi o elemento de viga BEAM189. O elemento é, segundo Ansys (2022), baseado na teoria de vigas de Timoshenko, e é um elemento adequado para diversos tipos de vigas. A disposição dos eixos nos elementos do tipo BEAM189 pode ser visualizada na figura 10, assim como a disposição dos seus 3 nós.

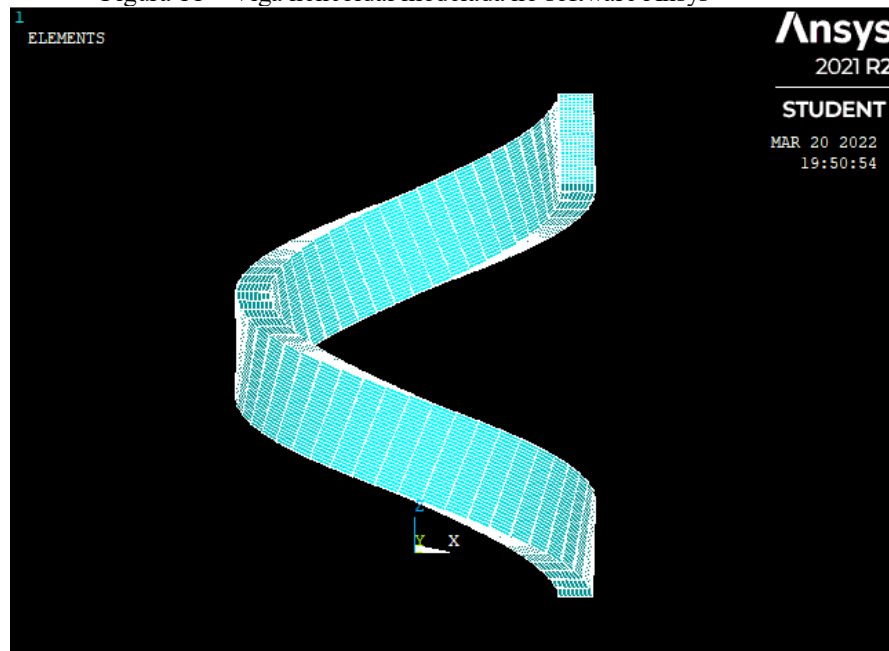
Figura 10 – Geometria do elemento BEAM189



Fonte: Ansys (2022).

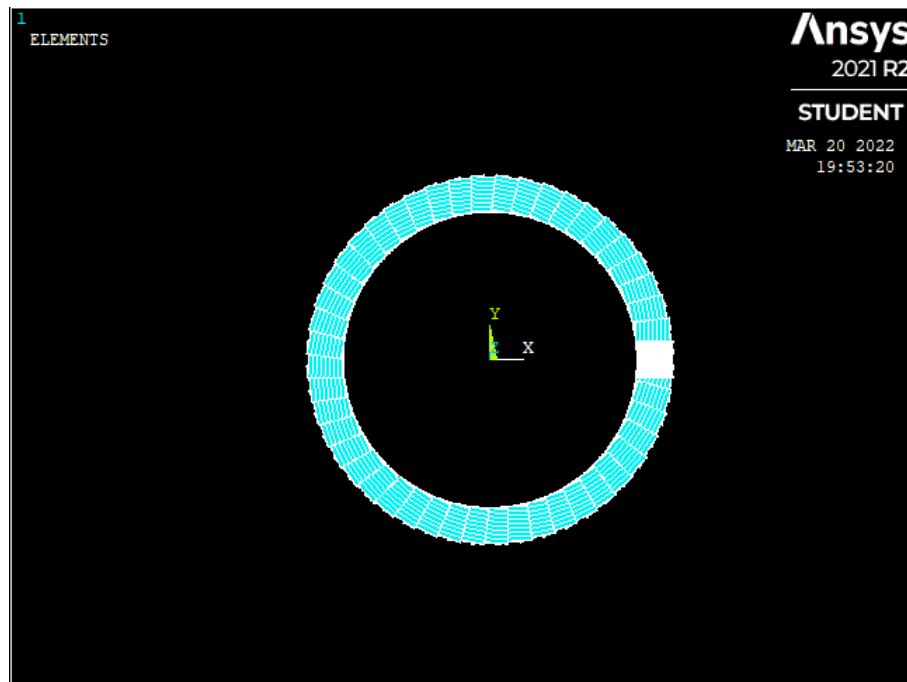
Em seguida, foram selecionadas as propriedades do material e da seção transversal da estrutura. Com estes determinados, foram selecionados pontos no espaço que representassem a estrutura, e por meio do sistema de coordenadas cilíndricas, gerou-se o eixo da estrutura. Dado o eixo, por meio da aplicação dos parâmetros determinados anteriormente, gerou-se a malha. Com a extrusão dos elementos, pode-se observar as figuras 11 e 12. A figura 11 mostra a estrutura por inteiro e a figura 12 a vista em planta da viga.

Figura 11 – Viga helicoidal modelada no software Ansys



Fonte: Autor.

Figura 12 – Viga helicoidal modelada no software Ansys, em planta

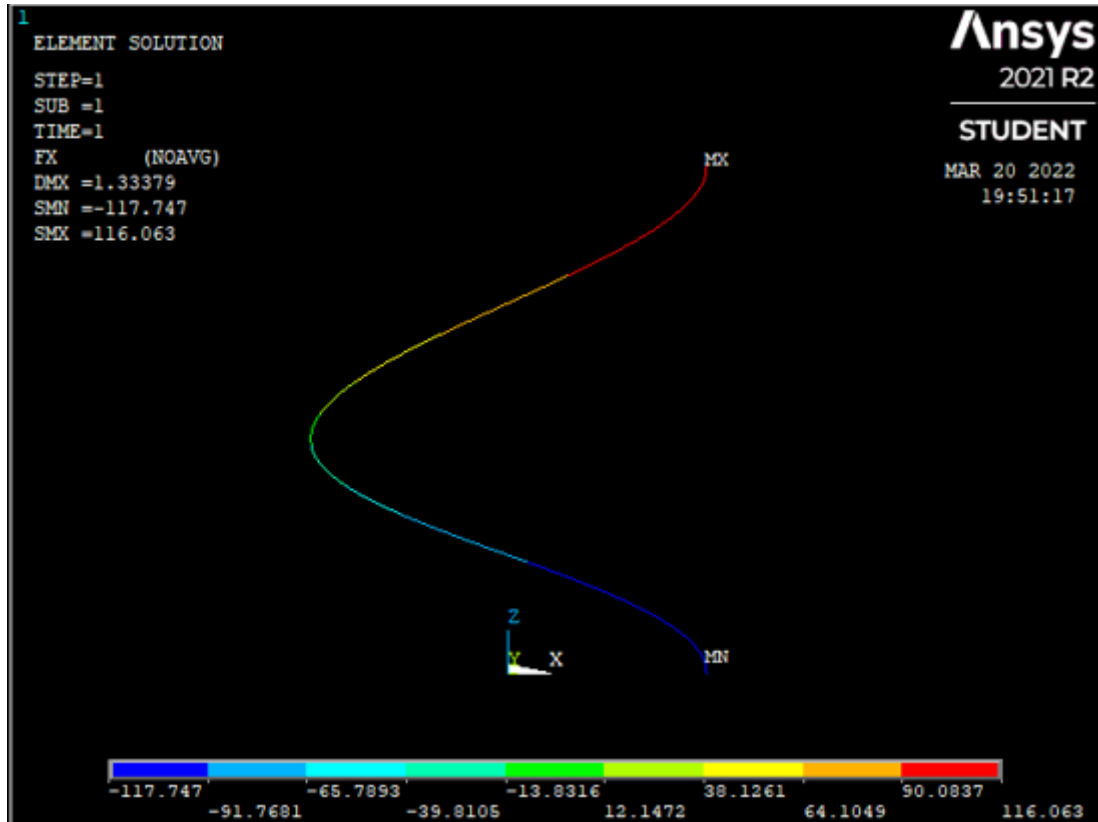


Fonte: Autor.

Em seguida, para que se encerre a etapa de pré-processamento, foram aplicadas as cargas na estrutura. No Ansys, o termo carga se refere tanto às cargas aplicadas quanto à questão dos apoios da estrutura. Assim como determinado inicialmente, ambos início e fim da estrutura foram considerados engastados. Por último, foi aplicada a carga nos elementos. A carga considerada foi de  $F_d = 43,61 \text{ kN/m}$ .

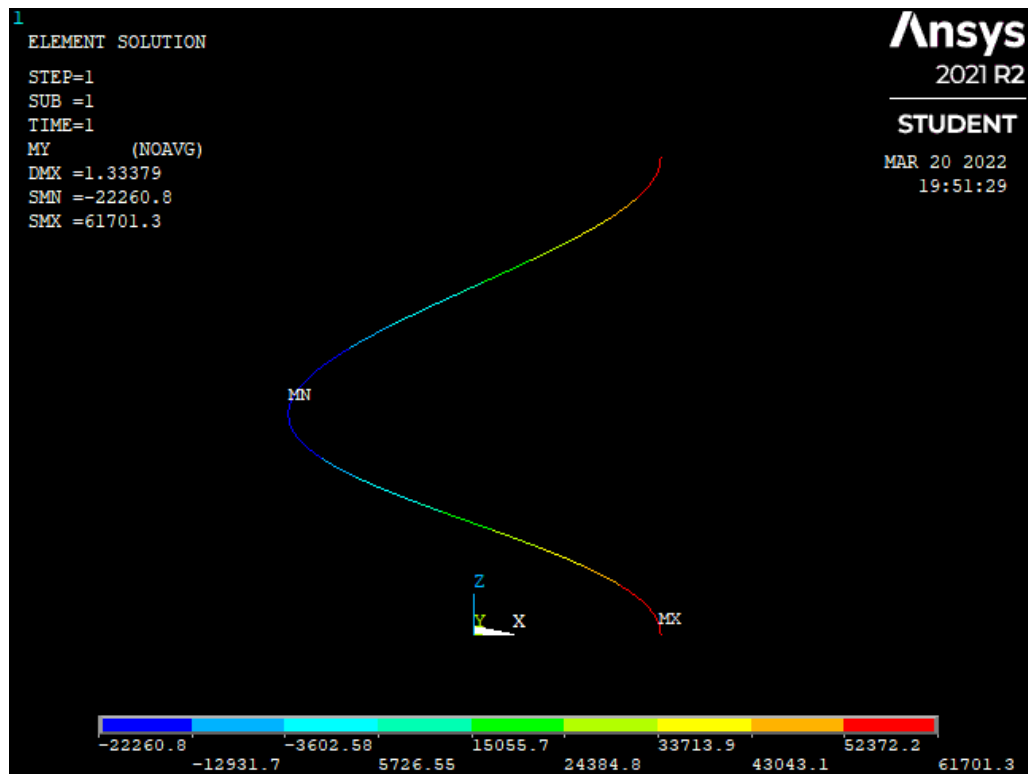
A estrutura foi então processada. As figuras 13, 14, 15 e 16 mostram a visualização gráfica no pós-processamento dos resultados.

Figura 13 – Força normal na viga helicoidal pelo Ansys



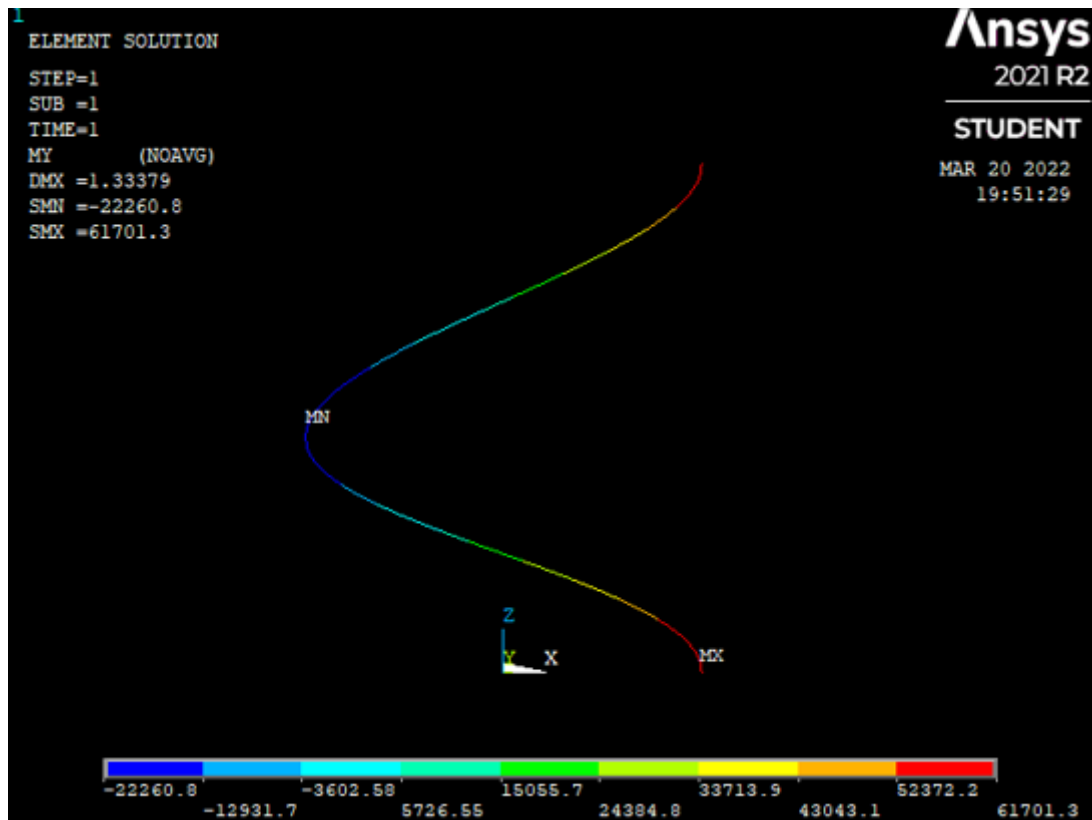
Fonte: Autor.

Figura 14 – Momento My na viga helicoidal pelo Ansys



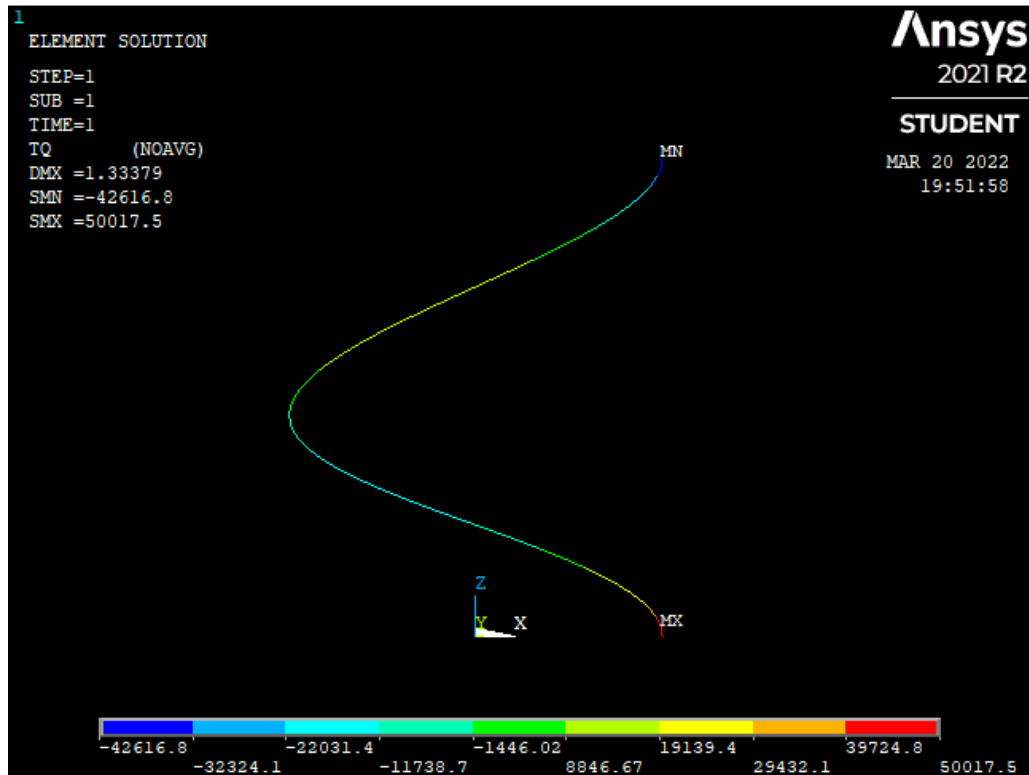
Fonte: Autor.

Figura 15 – Momento Mz na viga helicoidal pelo Ansys



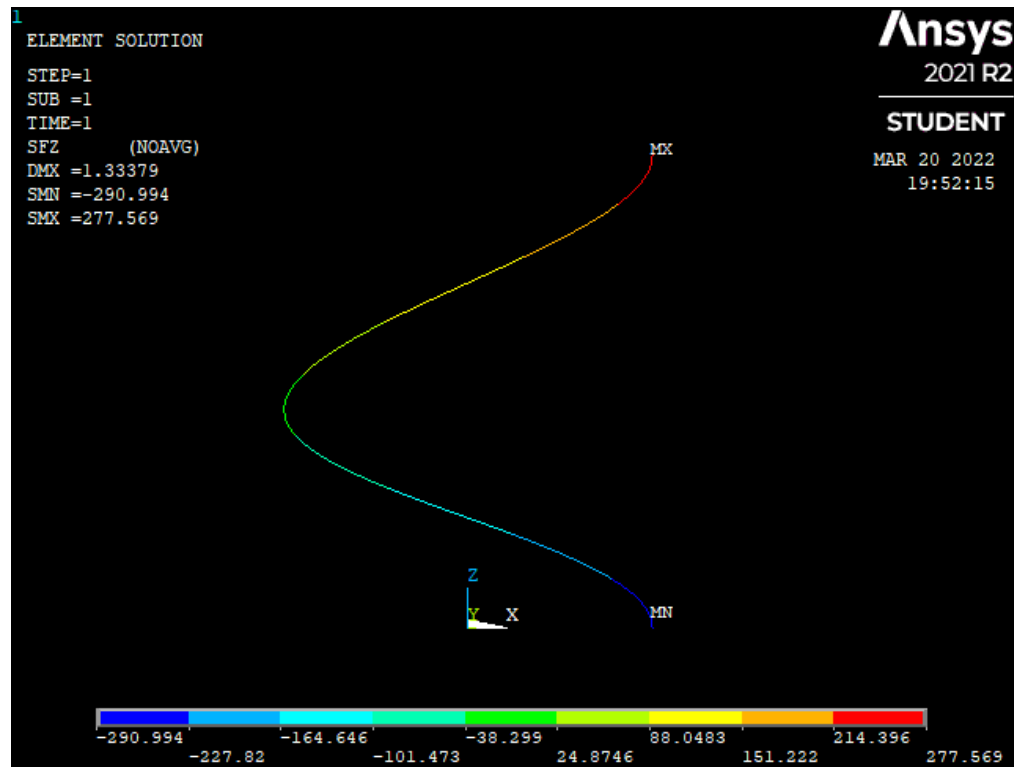
Fonte: Autor.

Figura 16 – Momento Tq na viga helicoidal pelo Ansys



Fonte: Autor.

Figura 17 – Esforço cortante SFz na viga helicoidal pelo Ansys



Fonte: Autor.

Ainda na etapa do pós-processamento, foi obtida a lista de solicitações por elemento. Assim como no caso de Prudon, os valores na tabela 3 a seguir foram adaptados para as convenções definidas no trabalho. Os valores na tabela foram adaptados para que fossem padronizados em relação aos valores de G. Prudon.

Tabela 3 – Esforços obtidos pelo Ansys (continua)

Elemento	Fx (kN)	Mx (kN.m)	Mz(kN.m)	My (kN.m)	SFz (kN)
1	-117,75	-617,01	525,77	-500,17	-290,99
2	-116,06	-603,41	491,17	-426,08	-277,56
3	-114,33	-583,73	457,23	-353,99	-264,16
4	-112,48	-558,28	424,09	-284,64	-240,8
5	-110,47	-527,45	391,9	-218,71	-237,5
6	-108,25	-491,72	360,76	-156,84	-224,29
7	-105,77	-451,64	330,78	-99,56	-211,18
8	-103	-407,83	302,04	-47,374	-198,19
9	-99,88	-360,94	274,61	-0,70177	-185,34
10	-96,407	-311,68	248,54	40,124	-172,64
11	-92,539	-260,8	223,85	74,871	-160,09

Tabela 3 – Esforços obtidos pelo Ansys (continua)

Elemento	Fx (kN)	Mx (kN.m)	Mz(kN.m)	My (kN.m)	SFz (kN)
12	-88,262	-209,05	200,57	103,39	-147,71
13	-83,567	-157,21	178,69	125,61	-135,5
14	-78,45	-106,06	158,17	141,57	-123,46
15	-72,914	-56,357	138,99	151,4	-111,59
16	-66,968	-8,8336	121,07	155,34	-99,89
17	-60,633	35,798	104,35	153,67	-88,344
18	-53,933	76,876	88,724	146,79	-76,945
19	-46,897	113,8	74,099	135,18	-65,682
20	-39,562	146,01	60,353	119,37	-54,54
21	-31,969	173,04	47,357	99,955	-43,502
22	-24,167	194,49	34,971	77,601	-32,549
23	-16,202	210,03	23,051	52,998	-21,662
24	-8,1259	219,46	11,447	26,871	-10,82
25	0,0034	222,61	-0,001134	-0,01283	0,0006
26	8,1314	219,45	-11,451	-26,892	10,822
27	16,205	210,02	-23,058	-53,01	21,665
28	24,171	194,46	-34,977	-77,615	32,552
29	31,974	173,01	-47,362	-99,969	43,504
30	39,565	145,97	-60,359	-119,38	54,543
31	46,9	113,76	-74,106	-135,18	65,685
32	53,936	76,829	-88,731	-146,79	76,948
33	60,637	35,744	-104,35	-153,66	88,346
34	66,971	-8,8905	-121,08	-155,33	99,894
35	72,915	-56,416	-139	-151,39	111,6
36	78,452	-106,13	-158,18	-141,55	123,47
37	83,569	-157,28	-178,7	-125,57	135,51
38	88,263	-209,12	-200,58	-103,35	147,72
39	92,538	-260,87	-223,86	-74,836	160,1
40	96,406	-311,75	-248,55	-40,079	172,64

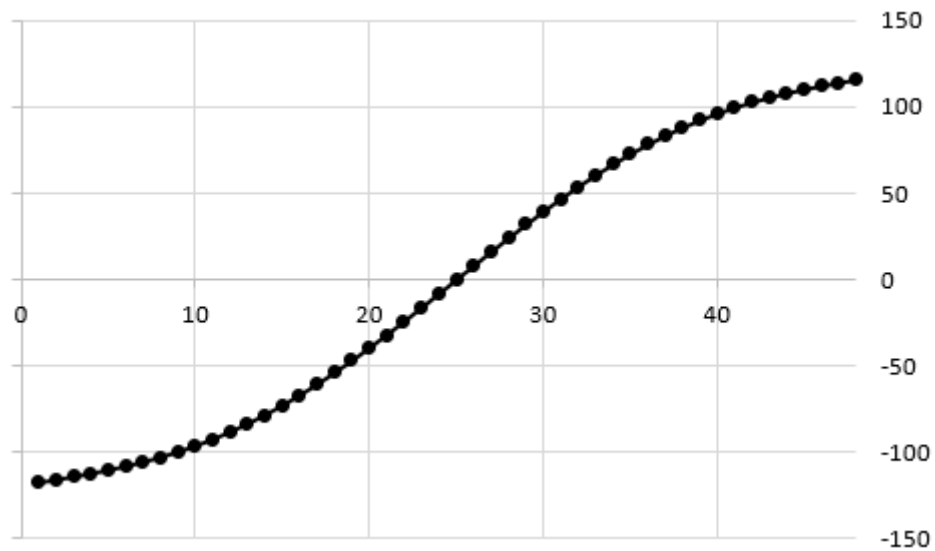
Tabela 3 – Esforços obtidos pelo Ansys (conclusão)

Elemento	Fx (kN)	Mx (kN.m)	Mz(kN.m)	My (kN.m)	SFz (kN)
41	99,883	-361,01	-274,62	0,75802	185,35
42	102,99	-407,9	-302,05	47,431	198,2
43	105,77	-451,71	-330,79	99,616	211,18
44	108,25	-491,79	-360,78	156,9	224,29
45	110,47	-527,51	-391,92	218,79	237,5
46	112,48	-558,34	-424,11	284,72	250,8
47	114,32	-583,79	-457,24	354,06	264,16
48	116,06	-603,45	-491,19	426,17	277,57

Fonte: Autor.

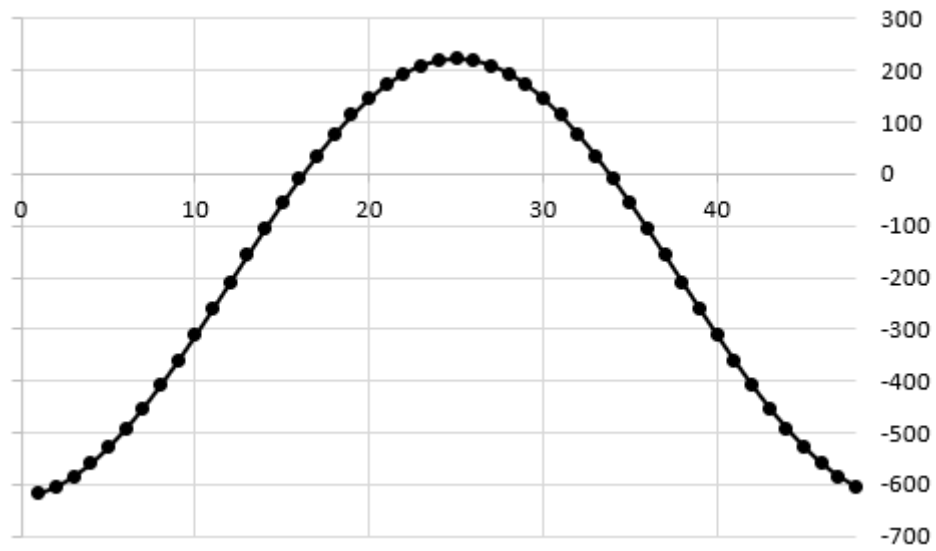
Os diagramas representando os esforços ao longo do comprimento longitudinal da viga podem ser vistos nas figuras 18, 19, 20, 21 e 22.

Figura 18 – Diagrama dos esforços normais

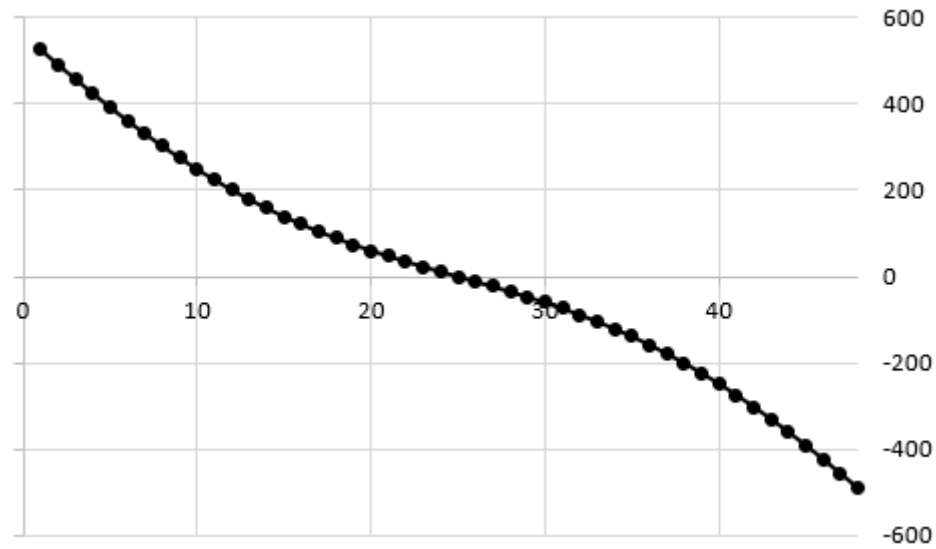


Fonte: Autor.



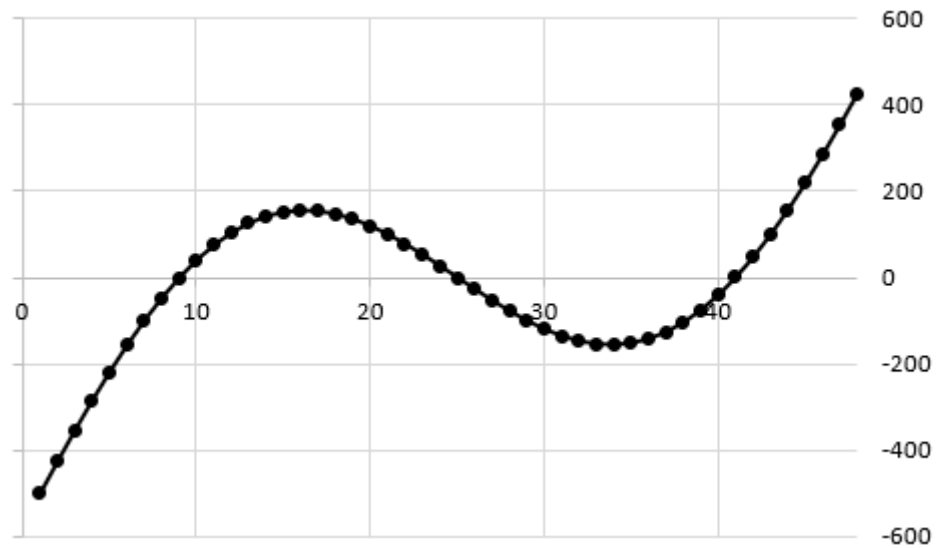
Figura 19 – Diagrama do momento fletor  $M_x$ 

Fonte: Autor.

Figura 20 - Diagrama do momento fletor  $M_z$ 

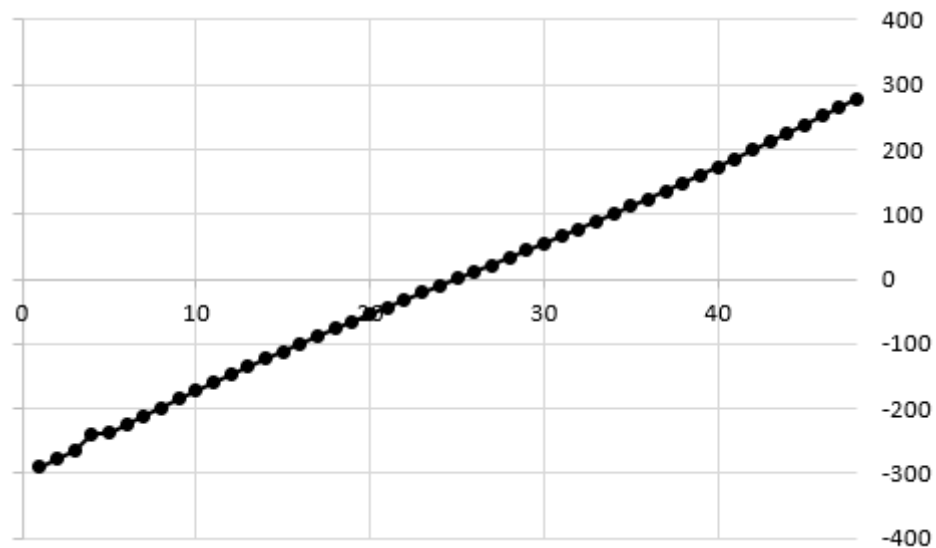
Fonte: Autor.

Figura 21 – Diagrama do momento torçor  $M_y$



Fonte: Autor.

Figura 22 – Diagrama do esforço cortante  $SF_z$



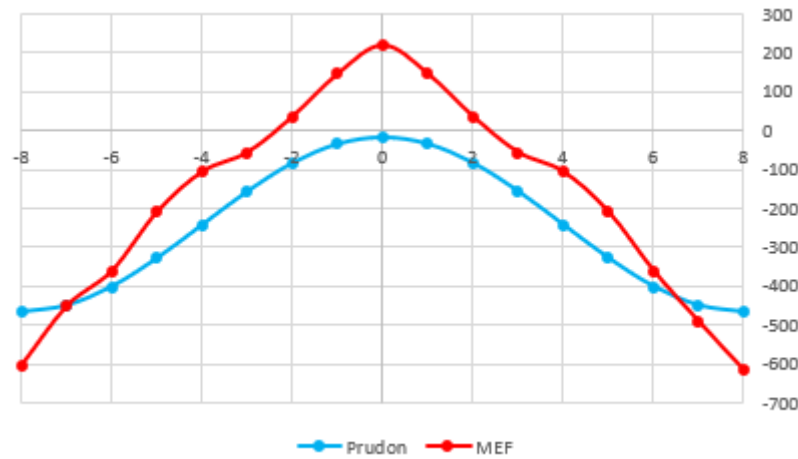
Fonte: Autor.

### 5.3 Comparação dos métodos

Na figura 22 a seguir, é possível observar uma comparação entre os gráficos de momento  $M_x$  obtidos pelos dois métodos. Observa-se que o Método dos Elementos Finitos

apresentou uma amplitude maior de valores de momento  $M_x$ . Avaliando quanto ao momento máximo, o  $M_x$  do MEF é 31% maior que o do Método de Prudon.

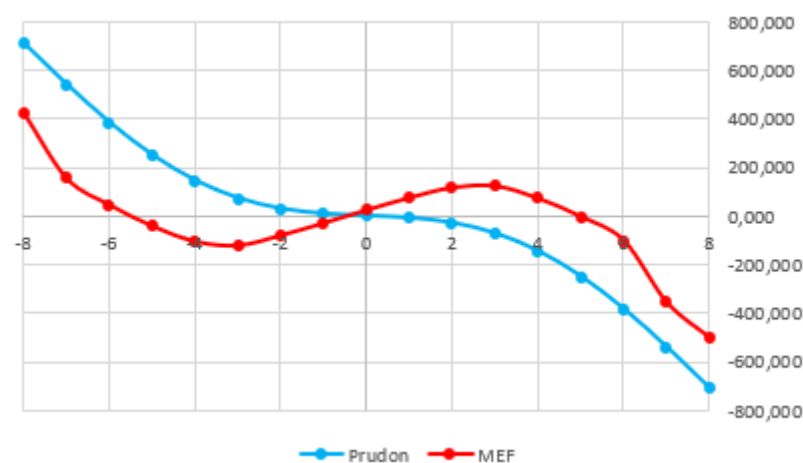
Figura 23 – Comparação do  $M_x$  (kNm)



Fonte: Autor.

Analisando o momento torçor  $M_y$ , obteve-se o gráfico disposto na figura 23. Aqui nota-se que os valores do Método de Prudon são consideravelmente maiores, alcançando um valor de 41% a mais para o torçor máximo. Observa-se também que o MEF demonstrou melhor o desenvolvimento do torçor, que trocou de sinal duas vezes durante o percurso da viga helicoidal, enquanto o Método de Prudon simplifica o que ocorre na peça.

Figura 24 – Comparação do  $M_y$  (kNm)



Fonte: Autor.

Quanto ao momento denominado pelo Ansys de  $M_z$ , que é o momento fletor lateral, o Método de Prudon não conduz ao seu dimensionamento. Observa-se na tabela 11 que a taxa de armadura nos dois métodos foi bem semelhante, logo, o Método dos Elementos Finitos

claramente é mais eficiente, pois mesmo dimensionando todos os esforços, ele ainda trouxe à mesma taxa de armadura que o Método de Prudon, que a desconsiderou.

É importante também notar que o método de Prudon conduz à valores de esforços em apenas um sentido, desconsiderando que em uma estrutura como a viga helicoidal ocorreria o surgimento de um momento no sentido oposto, como foi possível de se observar nos esforços obtidos pelo Ansys.

## 6 DIMENSIONAMENTO

### 6.1 Armadura longitudinal

Os ábacos de Montoya são ábacos utilizados para seções retangulares com disposição da armadura conhecida e submetidas à esforços de flexão oblíqua. Por meio deles, pode-se obter uma  $A_{sl,M}$ , armadura total longitudinal de flexão, que será disposta simetricamente.

Para o uso dos ábacos, é necessário obter os esforços reduzidos  $\nu$ ,  $u_x$  e  $u_y$  (MONTROYA et al., 2011), através do uso das fórmulas 12, 13 e 14 abaixo.

$$\nu = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} \quad (12)$$

$$u_x = \frac{M_{xd}}{A_c h_v f_{cd}} \quad (13)$$

$$u_y = \frac{M_{yd}}{A_c b f_{cd}} \quad (14)$$

Onde:

$\nu$  = solicitação normal de cálculo reduzida (adim.);

$N_d$  = solicitação normal de cálculo (kN);

$h_v$  = altura da viga (m);

$b$  = base da viga (m);

$A_c = h_v * b$  = área da seção de concreto (m<sup>2</sup>);

$f_{cd}$  = resistência à compressão do concreto, valor de projeto (kN/m<sup>2</sup>);

$u_x$  = momento fletor reduzido na direção x (adim.);

$M_{xd}$  = momento fletor na direção x, valor de projeto (kN.m)

$u_y$  = momento fletor reduzido na direção y (adim.);

$M_{yd}$  = momento fletor na direção y, valor de projeto (kN.m).

Os esforços atuantes não necessitarão ser majorados, pois já estão majorados pela combinação de ações (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003). A

resistência de cálculo à compressão do concreto pode ser obtida por meio da fórmula 15 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014).

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (15)$$

Onde:

$f_{cd}$  = resistência de cálculo à compressão do concreto (MPa);

$f_{ck}$  = resistência característica à compressão do concreto (MPa);

$\gamma_c$  = coeficiente de ponderação da resistência do concreto (1,4 para condições normais).

Por meio dos ábacos encontrados no anexo A, considerando a seção retangular, com disposição de barras pré-determinada, cobrimento de 10% e aço de escoamento entre 400 e 500 MPa, pode-se obter o valor de  $w$ , quantia mecânica total. Com  $w$  pode-se calcular a fórmula 16, capacidade mecânica total de armadura longitudinal,  $U$ , cujo valor será usado para verificar a tabela 4, onde poderá se obter o número de barras de determinado diâmetro necessário.

$$U = A_{sl,M} f_{yd} = w A_c f_{cd} \quad (16)$$

Onde:

$U$  = capacidade mecânica total da armadura longitudinal (kN);

$A_{sl,M}$  = área total da armadura longitudinal de flexão (cm<sup>2</sup>);

$f_{yd}$  = resistência de escoamento do aço, valor de cálculo (kN/cm<sup>2</sup>);

$w$  = quantia mecânica total;

$A_c = h_v * b$  = área da seção de concreto (m<sup>2</sup>);

$f_{cd}$  = resistência de cálculo à compressão do concreto (MPa).

Tabela 4 – Capacidade mecânica para armaduras em aço CA-50 (kN)

$\phi$ (mm)	Número de barras									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	12,3	24,6	36,9	49,2	61,5	73,8	86,1	98,3	110,6	122,9
8	21,9	43,7	65,6	87,4	109,3	131,1	153,0	174,8	196,7	218,5
10	34,1	68,3	102,4	136,6	170,7	204,9	239,0	273,2	307,3	341,5
12	49,2	98,3	147,5	192,7	245,9	295,0	344,2	393,4	442,6	491,7
14	66,9	133,9	200,8	267,7	334,6	401,6	468,5	535,4	602,4	669,3
16	87,4	174,8	262,3	349,7	437,1	524,5	611,9	699,3	786,8	874,2
20	136,6	273,2	409,8	546,4	683,0	819,5	956,1	1092,7	1229,3	1365,9
25	213,4	426,8	640,3	853,7	1067,1	1280,5	1494,0	1707,4	1920,8	2134,2
32	349,7	699,3	1049,0	1398,7	1748,4	2098,0	2447,7	2797,4	3147,1	3496,7
40	546,4	1092,7	1639,1	2185,5	2731,8	3278,2	3824,5	4370,9	4917,3	5463,6

Fonte: Autor.

A fórmula 17, determinada pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (2014) realiza o cálculo da armadura mínima longitudinal de flexão para vigas de seção retangular, aço CA-50, considerando  $\gamma_c$  de 1,4 e  $\gamma_s$  de 1,15:

$$A_{sl,M,min} = \rho_{min} A_c \quad (17)$$

Onde:

$A_{sl,M,min}$  = área mínima de aço de armadura longitudinal de flexão (cm<sup>2</sup>);

$A_c = h_v * b$  = área da seção de concreto (m<sup>2</sup>);

$\rho_{min}$  = dado pela tabela 5, abaixo.

Tabela 5 – Valores de  $\rho_{min}$ , aço CA-50, seção retangular

fck(MPa)	20	25	30	35	40	45	50
$\rho_{min}$ (%)	0,150	0,150	0,173	0,201	0,230	0,259	0,288

Fonte: adaptada de ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014.

A Associação Brasileira de Normas Técnicas (2014) determina que as verificações para a flexão simples e a torção podem ser feitas separadamente, sendo que a armadura final será a soma da armadura de torção com a armadura necessária para os esforços normais, considerando que, em cada seção, os esforços agem simultaneamente.

Para Araújo (2010c) a armadura de resistência à torção, considerando a analogia de uma viga em uma treliça espacial, resultaria em uma armadura em hélice. Considerando a tamanha complexidade da execução de uma armadura em hélice, o conjunto adotado será um arranjo misto de barras longitudinais e estribos verticais. O autor afirma ainda que apenas a face externa da seção transversal colabora na resistência à torção, o que torna necessário o cálculo de uma seção vazada equivalente. A fórmula 18 mostra a expressão que pode ser usada para uma seção retangular de lados  $b$  e  $h_v$ .

$$h_e = \frac{A_c}{\mu_c} \geq 2C_1 \quad (18)$$

Onde:

$h_e$  = espessura da seção vazada equivalente à uma seção cheia (cm);

$\mu_c = 2 * [b + h_v]$  = perímetro da seção cheia (cm);

$A_c = h_v * b$  = área da seção de concreto (m<sup>2</sup>);

$C_1$  = cobrimento, distância entre a face lateral da viga e o centro da armadura longitudinal de flexão (cm).

Para esta estrutura foi considerado um cobrimento  $C_{1,h_v} = 0,10 h_v$  e  $C_{1,b} = 0,10 b$ , ou seja, de 10% em relação aos lados da peça, sendo coerente com a aplicação dos ábacos em roseta do anexo A. As duas dimensões da parede fictícia  $h_e$  são  $h_{e,b} = 18,75 \text{ cm}$  e  $h_{e,h_v} = 30 \text{ cm}$ .

Ainda segundo Araújo (2010c), para o dimensionamento à torção, a primeira etapa é garantir a segurança das bielas do concreto. Logo, deve ser verificada a desigualdade da fórmula 19:



$$\tau_{td} = \frac{T_d}{2A_e h_e} \leq \tau_{tu} \quad (19)$$

Onde:

$\tau_{td}$  = tensão tangencial de torção (kN/cm<sup>2</sup>);

$T_d$  = esforço solicitante de torção, valor de cálculo (kN.cm);

$A_e$  = área limitada pela linha média da parede da seção vazada equivalente;

$h_e$  = menor espessura da parede da seção vazada equivalente à seção cheia (cm).

$\tau_{tu}$  = tensão tangencial limite de torção, obtida pela fórmula 20:

$$\tau_{tu} = 0,25\alpha_v f_{cd} \quad (20)$$

Onde:

$f_{cd}$  = resistência de cálculo à compressão do concreto (MPa);

$\alpha_v$  = coeficiente, dado pela fórmula 21:

$$\alpha_v = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (21)$$

Onde:

$f_{ck}$  = resistência característica à compressão do concreto (MPa).

Para barras de armadura em aço CA-50, a seção da armadura longitudinal, distribuída ao longo da seção média da parede fictícia, assim como informa Araújo (2010c), pode ser obtida através da fórmula 22:

$$A_{sl,T} = \frac{T_d \mu_e}{2A_e f_{yd}} \quad (22)$$

Onde:

$A_{sl,T}$  = área total de aço de armadura longitudinal de torção (cm<sup>2</sup>);

$T_d$  = esforço solicitante de torção, valor de cálculo (kN.cm);

$A_e$  = área limitada pela linha média da parede da seção vazada equivalente;

$f_{yd}$  = resistência ao escoamento do aço, valor de cálculo. Para CA-50,  $f_{yd} = 434,78 \text{ MPa}$ .

Para o cálculo da armadura mínima de torção, Araújo (2010c) sugere a expressão dada pela fórmula 23:

$$A_{sl,T,min} = \rho_{w,min} \mu_e b \quad (23)$$

Onde:

$A_{sl,T,min}$  = área mínima de aço de armadura longitudinal de torção (cm<sup>2</sup>);

$\mu_e$  = perímetro da linha média da seção vazada equivalente;

$b$  = base da viga (cm);

$\rho_{w,min}$  = dado pela tabela 6, abaixo.

Tabela 6 – Valores de  $\rho_{w,min}$ , aço CA-50

fck(MPa)	20	25	30	35	40	45	50
$\rho_{w,min}$ (%)	0,09	0,10	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16

Fonte: adaptada de Araújo, 2010c.

### 6.1.1 Método de G. Prudon

Como o Método de G. Prudon é um método que fornece apenas o valor da flexão simples como único esforço normal atuante sobre a viga helicoidal, considerou-se, para o cálculo da armadura longitudinal  $A_{sl,M}$ , a flexão reta simples  $M_x$  como um caso particular de flexão composta oblíqua, onde os outros esforços normais são nulos. Assim, foi possível dimensionar a armadura longitudinal por meio dos ábacos em roseta no anexo A. Considerando um fck de 45 MPa, de acordo com as fórmulas 12 a 14:

$$v = 0;$$

$$uy = 0;$$

$$u_x = \frac{M_{xd}}{A_c h_v f_{cd}} = \frac{468,27}{(1,4 * 0,5) * 1,4 * \frac{45000}{1,4}} = 0,01486 = 0,015$$

Verificando o ábaco em roseta do anexo A, como  $u_x > u_y$ , no ábaco,  $u_1 = 0,015$  e  $u_2 = 0$ , resulta na quantia mecânica de  $w = 0,034$ . A capacidade mecânica U foi então calculada, segundo a fórmula 16.

$$U_M = w A_c f_{cd} = 0,034 * (1,4 * 0,5) * \frac{45000}{1,4} = 765 \text{ kN}$$

$$A_{sl,M} = \frac{U_M}{f_{yd}} = \frac{765}{43,48} = 17,59 \text{ cm}^2$$

A armadura mínima longitudinal foi calculada por meio da fórmula 17:

$$A_{sl,M,min} = \rho_{min} A_c = \frac{0,259}{100} * (1,4 * 0,5) = 0,01813 = 18,13 \text{ cm}^2$$

Para o cálculo da armadura de torção, parte-se da verificação das bielas por meio da fórmula 19:

$$\tau_{td} = \frac{T_d}{2A_e h_e} = \frac{709,86}{2 * (31,25 * 120) * 18,75} \leq \tau_{tu} = 0,25 \left(1 - \frac{45}{250}\right) \frac{45}{1,4}$$

$$\tau_{td} = 0,05 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 0,5 \text{ MPa} \leq \tau_{tu} = 6,59 \text{ MPa (OK)}$$

Seguindo a fórmula 22, calcula-se a área de aço da armadura longitudinal de torção na seção:

$$A_{sl,T} = \frac{T_d \mu_e}{2A_e f_{yd}} = \frac{70986 * 2 * (31,25 * 120)}{2 * (31,25 * 120) * 43,48} = 65,84 \text{ cm}^2$$

A área mínima longitudinal de torção resulta da aplicação da fórmula 23:

$$A_{sl,T,min} = \rho_{w,min} \mu_e b = \frac{0,15}{100} * 2 * (31,25 + 120) * 50 = 22,69 \text{ cm}^2$$

Logo, o cálculo da armadura longitudinal total pode ser obtido pela soma das armaduras longitudinais determinadas:

$$A_{sl,tot} = A_{sl,T} + A_{sl,M,min} = 65,84 + 18,13 = 83,97 \text{ cm}^2$$

### 6.1.2 Método dos Elementos Finitos

No caso do MEF, foi possível dimensionar a viga à flexão composta oblíqua normalmente, visto que existe uma solicitação normal. Foram calculados os valores dos esforços adimensionais reduzidos  $v$ ,  $u_x$  e  $u_y$ , admitindo como valores de  $N_d$ ,  $M_x$  e  $M_y$  os valores máximos tabelados de  $F_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$ , respectivamente. Usando as fórmulas 12, 13 e 14, para um  $f_{ck}$  de 45 MPa, os valores resultam em:

$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} = \frac{117,75}{(1,4 * 0,5) * \frac{45000}{1,4}} = 0,005;$$

$$u_x = \frac{M_{xd}}{A_c h_v f_{cd}} = \frac{617,01}{(1,4 * 0,5) * 1,4 * \frac{45000}{1,4}} = 0,01956 = 0,020;$$

$$u_y = \frac{M_{yd}}{A_c b f_{cd}} = \frac{525,77}{(1,4 * 0,5) * 0,5 * \frac{45000}{1,4}} = 0,047.$$

Com estes valores, consulta-se o ábaco de rosetas do anexo A, considerando que  $\mu_a = u_y$  e  $\mu_b = u_x$ , pois  $u_y > u_x$ . Como  $v = 0,005$  se localiza entre dois valores do ábaco, 0 e 0,2, foi realizada a interpolação do valor encontrado no ábaco:

$$\text{quando } v = 0,0; w = 0,12$$

$$\text{quando } v = 0,2; w = 0$$

Interpolando os dois valores pra 0,005, tem-se  $w = 0,09$ . Segundo a fórmula 16, a capacidade mecânica resultou em:

$$U_M = w A_c f_{cd} = 0,09 * (1,4 * 0,5) * \frac{45000}{1,4} = 2025 \text{ kN}$$

$$A_{sl,M} = \frac{U_M}{f_{yd}} = \frac{2025}{43,48} = 46,57 \text{ cm}^2$$

A armadura mínima longitudinal, pela fórmula 17, resultou no valor abaixo:

$$A_{sl,M,min} = \rho_{min} A_c = \frac{0,259}{100} * (1,4 * 0,5) = 0,01813 = 18,13 \text{ cm}^2$$

Deve ser calculado ainda o valor da armadura de torção, que será somado. O cálculo inicia pela verificação das bielas, através do uso da fórmula 19:

$$\tau_{td} = \frac{T_d}{2A_e h_e} = \frac{500,17}{2 * (31,25 * 120) * 18,75} \leq \tau_{tu} = 0,25 \left(1 - \frac{45}{250}\right) \frac{45}{1,4}$$

$$\tau_{td} = 0,035 \frac{kN}{cm^2} = 0,35 MPa \leq \tau_{tu} = 6,59 MPa (OK)$$

Seguindo a fórmula 22, calcula-se a área de aço da armadura longitudinal de torção na seção:

$$A_{sl,T} = \frac{T_d \mu_e}{2A_e f_{yd}} = \frac{50017 * 2 * (31,25 * 120)}{2 * (31,25 * 120) * 43,48} = 46,39 cm^2$$

A área mínima longitudinal de torção resulta da aplicação da fórmula 23:

$$A_{sl,T,min} = \rho_{w,min} \mu_e b = \frac{0,15}{100} * 2 * (31,25 + 120) * 50 = 22,69 cm^2$$

Assim, o cálculo da armadura longitudinal total pode ser obtido pela soma das armaduras longitudinais determinadas:

$$A_{sl,tot} = A_{sl,T} + A_{sl,M} = 46,39 + 46,57 = 92,96 cm^2$$

## 6.2 Armadura transversal

Segundo Araújo(2010c), a  $A_{sw,T}$  é a área de aço que compõe a seção transversal de torção por metro de comprimento da viga helicoidal, dada pela fórmula 24.

$$A_{sw,T} = \frac{100T_d}{2A_e f_{yd}} \quad (24)$$

Onde:

$A_{sw,T}$  = área total de aço de armadura transversal de torção (cm<sup>2</sup>);

$T_d$  = esforço solicitante de torção, valor de cálculo (kN.cm);

$A_e$  = área limitada pela linha média da parede da seção vazada equivalente;  
 $f_{yd}$  = resistência ao escoamento do aço, valor de cálculo. Para CA-50,  $f_{yd} = 434,78 \text{ MPa}$ .

Araújo (2010a) informa que no caso de torção, os estribos devem ser obrigatoriamente fechados, pois só se pode contar com um ramo dos estribos, já que todos os ramos estão submetidos à força de tração. Além disso, ao se empregar a tabela 7 para o cálculo dos estribos, deve-se multiplicar a  $A_{sw,T}$  por 2.

A Associação Brasileira de Normas Técnicas (2014) sugere algumas especificações acerca do dimensionamento de armadura transversal de cisalhamento  $A_{sw,V}$ , para peças onde  $b \leq 5d$ , deve-se, inicialmente impor a restrição da fórmula 25, a fim de evitar o esmagamento da biela de compressão.

$$\tau_{wd} \leq \tau_{wu} \quad (25)$$

Onde:

$$\tau_{wd} = \frac{V_d}{b * d} \quad (26)$$

$$\tau_{wu} = 0,27\alpha_v f_{cd} \quad (27)$$

Onde:

$\tau_{wd}$  = tensão tangencial de cisalhamento (kN/cm<sup>2</sup>);

$\tau_{wu}$  = tensão tangencial limite de cisalhamento (kN/cm<sup>2</sup>);

$V_d$  = esforço de cisalhamento, valor de cálculo (kN);

$\alpha_v$  = dado pela fórmula 21;

$b$  = base da viga (cm);

$d = h_v - C_1 h_v$ , altura útil da seção transversal (cm);

$f_{cd}$  = resistência de cálculo à compressão do concreto (MPa).

Além disso, para casos em que ocorre esforço de torção com flexão, Araújo (2010c) define ainda uma inequação que deve ser verificada, que pode ser observada na fórmula 28.

$$\frac{\tau_{td}}{\tau_{tu}} + \frac{\tau_{wd}}{\tau_{wu}} \leq 1 \quad (28)$$

Onde:

$\tau_{wd}$  = tensão tangencial de cisalhamento (kN/cm<sup>2</sup>);

$\tau_{wu}$  = tensão tangencial limite de cisalhamento (kN/cm<sup>2</sup>);

$\tau_{td}$  = tensão tangencial de torção (kN/cm<sup>2</sup>);

$\tau_{tu}$  = tensão tangencial limite de torção (kN/cm<sup>2</sup>).

Caso ambas as desigualdades nas fórmulas 25 e 28 sejam atendidas, poderá ser dimensionada a armadura transversal de cisalhamento,  $A_{sw,v}$  necessária, através das fórmulas 28 e 29 (ARAÚJO, 2010a):

$$A_{sw,v} = 100b \frac{\tau_d}{f_{yd}} \quad (29)$$

$$\tau_d = 1,11(\tau_{wd} - \tau_c) \quad (30)$$

Onde:

$A_{sw,v}$  = área total de aço da armadura transversal de cisalhamento;

$b$  = base da viga (cm);

$\tau_d$  = tensão tangencial de cisalhamento, valor de cálculo (kN/cm<sup>2</sup>);

$f_{yd}$  = resistência ao escoamento do aço, valor de cálculo. Para CA-50,  $f_{yd} = 434,78 \text{ MPa}$ ;

$\tau_{wd}$  = tensão tangencial de cisalhamento (kN/cm<sup>2</sup>);

$\tau_{wd}$  = fator tangencial de redução, sendo zero caso seja desprezada a resistência à tração do concreto.

A área total de estribos deve ser maior ou igual a área mínima  $A_{sw,mín}$  para estribos verticais dada pela fórmula 31 (ARAÚJO, 2010c):

$$A_{sw,mín} = \rho_{w,mín} 100b \quad (31)$$

Onde:

$A_{sw,min}$  = área mínima de aço da armadura transversal (cm<sup>2</sup>/m);

$\rho_{w,min}$  = taxa dada pela tabela 6;

$b$  = base da viga (cm).

A tabela 7 é utilizada para a adoção do diâmetro de barras de aço dos estribos assim como o seu espaçamento.

Tabela 7 – Área de seção de armadura  $A_{sw}$  (cm<sup>2</sup>/m) para estribos de dois ramos (continua)

Espaçamento (cm)	Diâmetro $\phi$ (mm)					
	5	6,3	8	10	12,5	16
7	5,61	8,91	14,36	22,44	35,06	57,45
7,5	5,24	8,31	13,40	20,94	32,72	53,62
8,0	4,91	7,79	12,57	19,63	30,68	50,27
8,5	4,62	7,33	11,83	18,48	28,87	47,31
9,0	4,36	6,93	11,17	17,45	27,27	44,68
9,5	4,13	6,56	10,58	16,53	25,84	42,33
10	3,93	6,23	10,05	15,71	24,54	40,21
11	3,57	5,67	9,14	14,28	22,31	36,56
12	3,27	5,20	8,38	13,09	20,45	33,51
13	3,02	4,80	7,73	12,08	18,88	30,93
14	2,80	4,45	7,18	11,22	17,53	28,72
15	2,62	4,16	6,70	10,47	16,36	26,81
16	2,45	3,90	6,28	9,82	15,34	25,13
17	2,31	3,67	5,91	9,24	14,44	23,65



Tabela 7 – Área de seção de armadura  $A_{sw}$  (cm<sup>2</sup>/m) para estribos de dois ramos (conclusão)

Espaçamento (cm)	Diâmetro $\phi$ (mm)					
	5	6,3	8	10	12,5	16
18	2,18	3,46	5,59	8,73	13,64	22,34
19	2,07	3,28	5,29	8,27	12,92	21,16
20	1,96	3,12	5,03	7,85	12,27	20,11
21	1,87	2,97	4,79	7,48	11,69	19,15
22	1,78	2,83	4,57	7,14	11,16	18,28
23	1,71	2,71	4,37	6,83	10,67	17,48
24	1,64	2,60	4,19	6,54	10,23	16,76
25	1,57	2,49	4,02	6,28	9,82	16,08
26	1,51	2,40	3,87	6,04	9,44	15,47
27	1,45	2,31	3,72	5,82	9,09	14,89
28	1,40	2,23	3,59	5,61	8,77	14,36
29	1,35	2,15	3,47	5,42	8,46	13,87
30	1,31	2,08	3,35	5,24	8,18	13,40

Fonte: Araújo (2010c)

### 6.2.1 Método de G. Prudon

Para o cálculo da armadura transversal de torção, parte-se da fórmula 24:

$$A_{sw,T} = \frac{100T_d}{2A_e f_{yd}} = \frac{100 * 70986}{2 * (31,25 * 120) * 43,48} = 21,76 \text{ cm}$$

Para o dimensionamento da armadura transversal de cisalhamento, verificam-se as bielas de compressão por meio da fórmula 25:

$$\tau_{wd} = \frac{V_d}{b * d} \leq \tau_{wu} = 0,27\alpha_v f_{cd}$$

$$\tau_{wd} = \frac{323,35}{50 * 126} \leq \tau_{wu} = 0,27 \left(1 - \frac{45}{250}\right) \frac{45}{1,4}$$

$$\tau_{wd} = 0,051 \frac{kN}{cm^2} = 0,51 MPa \leq \tau_{wu} = 7,12 MPa (OK)$$

Deve ser satisfeita também a inequação da fórmula 28:

$$\frac{\tau_{td}}{\tau_{tu}} + \frac{\tau_{wd}}{\tau_{wu}} \leq 1$$

$$\frac{0,5}{6,59} + \frac{0,51}{7,12} \leq 1$$

$$0,15 \leq 1 (OK)$$

Para a obtenção da armadura transversal de cisalhamento, consulta-se a fórmula 29:

$$A_{sw,v} = 100b \frac{\tau_d}{f_{yd}} = 100 * 50 * \frac{1,11 * (0,51 - 0)}{434,78} = 6,51 cm^2/m$$

$$A_{sw,tot} = A_{sw,v} + 2A_{sw,T} = 6,51 + 2 * 21,76 = 50,03 \frac{cm^2}{m}$$

A área mínima de armadura transversal é dada pela fórmula 31:

$$A_{sw,min} = \rho_{w,min} 100b = \frac{0,15}{100} * 100 * 50 = 7,5 \frac{cm^2}{m}$$

Como a armadura total é bem maior que a armadura mínima, adota-se a armadura total.

## 6.2.2 Método dos Elementos Finitos

Para o cálculo da armadura transversal de torção, parte-se da fórmula 24:

$$A_{sw,T} = \frac{100T_d}{2A_e f_{yd}} = \frac{100 * 50017}{2 * (31,25 * 120) * 43,48} = 15,34 \text{ cm}$$

Para o dimensionamento da armadura transversal de cisalhamento, verificam-se as bielas de compressão por meio da fórmula 25:

$$\tau_{wd} = \frac{V_d}{b * d} \leq \tau_{wu} = 0,27 \alpha_v f_{cd}$$

$$\tau_{wd} = \frac{290,99}{50 * 126} \leq \tau_{wu} = 0,27 \left(1 - \frac{45}{250}\right) \frac{45}{1,4}$$

$$\tau_{wd} = 0,046 \frac{kN}{cm^2} = 0,46 \text{ MPa} \leq \tau_{wu} = 7,12 \text{ MPa (OK)}$$

Deve ser satisfeita também a inequação da fórmula 28:

$$\frac{\tau_{td}}{\tau_{tu}} + \frac{\tau_{wd}}{\tau_{wu}} \leq 1$$

$$\frac{0,35}{6,59} + \frac{0,46}{7,12} \leq 1$$

$$0,12 \leq 1 \text{ (OK)}$$

Para a obtenção da armadura transversal de cisalhamento, consulta-se a fórmula 29:

$$A_{sw,V} = 100b \frac{\tau_d}{f_{yd}} = 100 * 50 * \frac{1,11 * (0,35 - 0)}{434,78} = 4,47 \text{ cm}^2/m$$

$$A_{sw,tot} = A_{sw,V} + 2A_{sw,T} = 4,47 + 2 * 15,34 = 35,15 \frac{cm^2}{m}$$

A área mínima de armadura transversal é dada pela fórmula 31:

$$A_{sw,min} = \rho_{w,min} 100b = \frac{0,15}{100} * 100 * 50 = 7,5 \frac{cm^2}{m}$$

Como a armadura total é bem maior que a armadura mínima, adota-se a armadura total.

### 6.3 Taxa de armadura

Em seguida, calculou-se a área de aço necessária para as seções mais solicitadas segundo cada método, buscando encontrar a configuração de armadura mais eficiente para cada um dos métodos propostos. Logo, busca-se que a seção resista às solicitações ao longo de toda a viga helicoidal com a menor quantidade de aço possível.

As tabelas 8, 9 e 10 trazem o resumo das armaduras calculadas anteriormente, assim como a quantidade de barras adotada para cada método. Por meio da quantidade de barras, encontra-se a área efetiva da armadura. Foram utilizadas as tabelas 4 e 7 para a verificação da quantidade de barras a ser adotada para cada caso.

Tabela 8 – Resumo das armaduras longitudinais para  $A_{sl,M}$

Método	Área (cm <sup>2</sup> )	Barras adotadas	Área efetiva (cm <sup>2</sup> )
G. Prudon	18,13	8φ20	25,13
Elementos Finitos	46,57	8φ32	64,34

Fonte: Autor.

Tabela 9 – Resumo das armaduras longitudinais para  $A_{sl,T}$

Método	Área (cm <sup>2</sup> )	Barras adotadas	Área efetiva (cm <sup>2</sup> )
G. Prudon	65,84	9φ32	72,38
Elementos Finitos	46,39	10φ25	49,09

Fonte: Autor.

Tabela 10 – Resumo das armaduras transversais

Método	Área (cm <sup>2</sup> /m)	Barras adotadas	Área efetiva
G. Prudon	50,03	φ16 c/ s = 8 cm	50,27
Elementos Finitos	35,15	φ16 c/ s = 11 cm	36,56

Fonte: Autor.

Com os valores encontrados de armaduras longitudinais e transversais, calculou-se a taxa de armadura pelo volume de aço dividido pelo volume de concreto armado. Considerando o volume de concreto por metro de  $V_{conc} = 50 * 140 * 100 = 7 * 10^5 \text{ cm}^3$ , observa-se o

cálculo da taxa de armadura nos dois métodos pela tabela 11 abaixo. Os volumes de aço são obtidos multiplicando as áreas por 1 metro de comprimento da viga.

Tabela 11 – Taxa de armadura  $\rho_s$

Método	Volume de aço		Soma (cm <sup>3</sup> )	$\rho_s$
	longitudinal (cm <sup>3</sup> )	transversal (cm <sup>3</sup> )		
G. Prudon	975,1	502,7	1477,8	2,11%
Elementos Finitos	1134,3	365,6	1499,9	2,14%

Fonte: Autor.

## **7 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

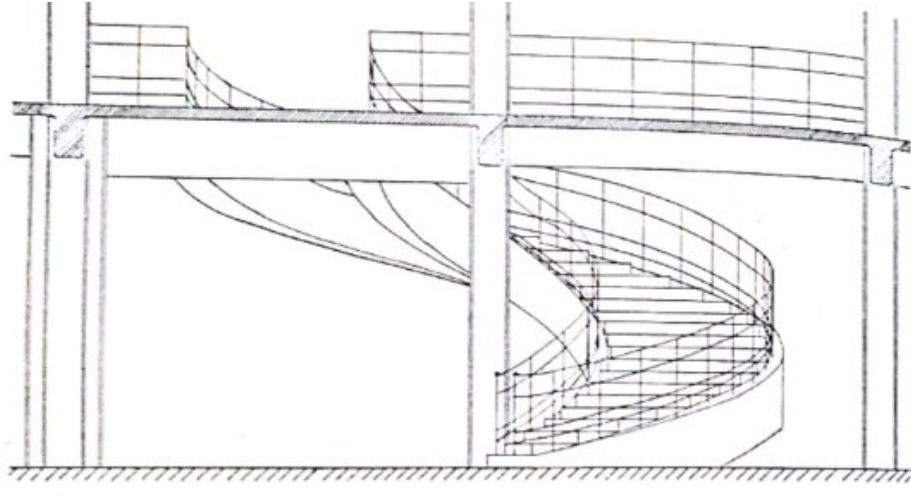
Na comparação final, observa-se que o Método dos Elementos Finitos, quando aplicado pelos softwares de engenharia estrutural, tende a gerar resultados mais refinados que métodos empíricos. A razão disto se deve à elevada complexidade de suas equações e sistemas de soluções. No entanto, ressalta-se que o usuário do software deve ser cauteloso em seu manuseio, sendo que, sem o conhecimento de Teoria das Estruturas e Resistência dos Materiais, a solução emitida pelo programa será de confiabilidade reduzida.

Ainda assim, observa-se que o desenvolvimento pelo Método de Prudon, mostrou como a abordagem por um método tradicional pode obter resultados semelhantes aos de um método computacional, mesmo que apenas em sua conclusão. Destaca-se ainda que o Método de Prudon alcança estes resultados por meio de equações extremamente simples, o que justifica sua relevância na bibliografia estudada.

### **7.1 Sugestões para trabalhos futuros**

Por meio do desenvolvimento deste trabalho, pode-se também contemplar possíveis trabalhos futuros que podem ser estudados em temas correlatos ao deste projeto. A revisão bibliográfica dos tipos de escada helicoidal mostrou que diversos tipos de escada helicoidal existem, como a escada em duas vigas exibida na figura 24. Sugere-se o desenvolvimento de projetos de escadas helicoidais em laje, duas vigas ou caracol, que levarão a problemas e soluções distintos aos desenvolvidos neste trabalho.

Figura 24 – Escada helicoidal em duas vigas



Fonte: Company (1973).

O estudo da aplicação dos métodos computacionais também é de muita revelância, sendo que um trabalho possível seria de analisar as diferenças dos esforços gerados em diferentes softwares de MEF como Ansys, Robot, SAP2000, ETABS entre outros.





## REFERÊNCIAS

- ANSYS. **BEAM189 Element Description**. Ansys.com, 2022. Disponível em:<  
[https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v221/en/ans\\_elem/Hlp\\_E\\_BEAM189.html?q=beam189](https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v221/en/ans_elem/Hlp_E_BEAM189.html?q=beam189)>. Acesso em: 27 de mar. de 2022.
- ARAÚJO, J.M. de. **Curso de concreto armado**. 3. Ed. Rio Grande: Dunas, 2010a. v.1.
- ARAÚJO, J.M. de. **Curso de concreto armado**. 3. Ed. Rio Grande: Dunas, 2010b. v.2.
- ARAÚJO, J.M. de. **Curso de concreto armado**. 3. Ed. Rio Grande: Dunas, 2010c. v.4.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro. 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120**: Ações para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro. 2019.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas – Procedimento. Rio de Janeiro. 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9020**: Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. Rio de Janeiro. 2020.
- COMPANY, Manuel. **Cálculos de construcción**: proutuário para el cálculo de anteproyectos con numerosos ejemplos resueltos. 7. ed. Barcelona: Gustavo Gili, 1973.
- COOK, R.D. **Finite element modeling for stress analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- GUERRIN, A.; LAVAUUR, Roger-Claude. **Tratado de concreto armado**. São Paulo: Hemus, 2002. v. 3.
- MELGES, J. L. P.; PINHEIRO, L. M.; GIONGO, J. S. **Concreto armado**: escadas. São Carlos, 1997. Apostila da disciplina EC-802 – UNICAMP. Disponível em:<  
<http://www.fec.unicamp.br/~almeida/ec802/Escada/19%20Escadas.pdf>> . Acesso em 27 de mar. de 2022.
- NOAL, T. **Escadas helicoidais em concreto armado**: comparação entre métodos de dimensionamento. Rio Grande do Sul: UFRGS, 2014.
- OLIVEIRA, Hélio M. Propriedades do Concreto Endurecido. In: **Materiais de construção**. Ed. L. A. Falcão Bauer. 5.ed. rev. Rio de Janeiro, LTC, 2012.
- UBERLÂNDIA (MG). **Lei Complementar N° 524, de 08 de abril de 2011**. Disponível em:<  
<https://leismunicipais.com.br/a/mg/u/uberlandia/lei-complementar/2011/52/524/lei-complementar-n-524-2011-institui-o-codigo-municipal-de-obras-do-municipio-de-uberlandia-e-de-seus-distritos>>. Acesso em 27 de mar. de 2022.

MONTOYA, J. MESEGUER, Á.G.; CABRÉ, F.M.; PORTERO, J. C. A. **Hormigón armado**. 15. Ed. Barcelona, Editorial Gustavo Gili, 2011.

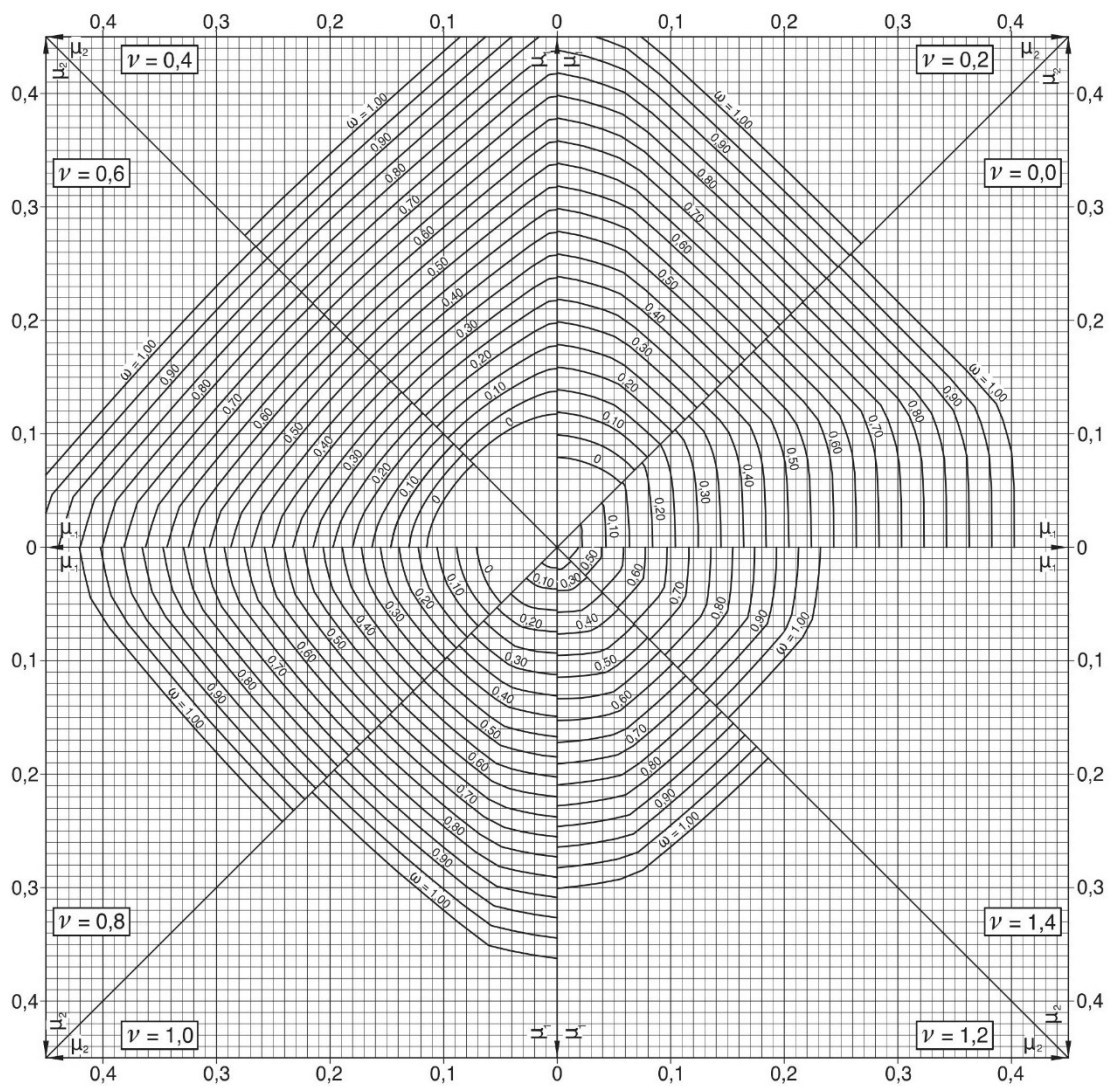
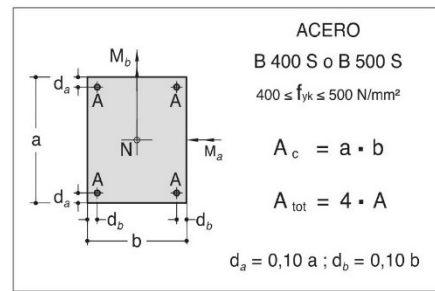
REDDY, J.N. **An Introduction to the Finite Element Method**, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1993.

**ANEXO A – Ábacos em roseta para dimensionamento de flexão oblíqua em seções  
retangulares  $d'_a = 0,10a$  e  $d'_b = 0,10b$   
(MONTROYA et al., 2011)**

$$\mu_a = \frac{M_{ad}}{A_c \cdot a \cdot f_{cd}} \quad \mu_b = \frac{M_{bd}}{A_c \cdot b \cdot f_{cd}}$$

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} \quad \omega = \frac{A_{tot} \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}}$$

si  $\mu_a > \mu_b \Rightarrow \mu_1 = \mu_a : \mu_2 = \mu_b$   
 si  $\mu_a < \mu_b \Rightarrow \mu_1 = \mu_b : \mu_2 = \mu_a$



$$\mu_a = \frac{M_{a,d}}{A_c \cdot a \cdot f_{c,d}} \quad \mu_b = \frac{M_{b,d}}{A_c \cdot b \cdot f_{c,d}}$$

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{c,d}} \quad \omega = \frac{A_{tot} \cdot f_{y,d}}{A_c \cdot f_{c,d}}$$

si  $\mu_a > \mu_b \Rightarrow \mu_1 = \mu_a : \mu_2 = \mu_b$   
 si  $\mu_a < \mu_b \Rightarrow \mu_1 = \mu_b : \mu_2 = \mu_a$

