

**Universidade Federal de Uberlândia**  
**Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e**  
**Matemática**

---

**Anderson de Souza Santos**

**O GeoGebra *Classroom* e o estudo de funções: contribuições para  
o desenvolvimento do pensamento algébrico**

Uberlândia/MG

2021

Anderson de Souza Santos

O GeoGebra *Classroom* e o estudo de funções: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Linha de pesquisa: Ensino e aprendizagem em Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leandro de Oliveira Souza

Uberlândia/MG

2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S237 Santos, Anderson de Souza, 1985-  
2021 O GeoGebra Classroom e o estudo de funções: [recurso eletrônico] : contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico / Anderson de Souza Santos. - 2021.

Orientador: Leandro de Oliveira Souza.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.620>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Ciência - Estudo ensino. I. Souza, Leandro de Oliveira, 1980-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 50:37

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática  
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1A, Sala 207 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
 Telefone: (34) 3230-9419 - www.ppgecm.ufu.br - secretaria@ppgecm.ufu.br



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Ensino de Ciências e Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional PPGECM				
Data:	dez de dezembro de dois mil e vinte e um	Hora de início:	9:00	Hora de encerramento:	11h15
Matrícula do Discente:	11912ECM004				
Nome do Discente:	Anderson de Souza Santos				
Título do Trabalho:	O GeoGebra Classroom e o estudo de funções: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico.				
Área de concentração:	Ensino de Ciências e Matemática				
Linha de pesquisa:	Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	O conceito de função: da operacionalização da definição à aprendizagem significativa				

Reuniu-se na plataforma Microsoft Teams da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, assim composta: Professores Doutores: Leandro de Oliveira Souza - ICENP - UFU orientador do candidato, Fabiana Fiorezi de Marco - ICENP -UFU (membro da banca); Alex Andrade Alves - IFBA (Membro externo da banca) .

Iniciando os trabalhos o(a) presidente da mesa, Dr. Leandro de Oliveira Souza, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Leandro de Oliveira Souza, Professor(a) do Magistério Superior**, em 11/12/2021, às 16:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fabiana Fiorezi de Marco Matos, Professor(a) do Magistério Superior**, em 11/12/2021, às 16:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alex Andrade Alves, Usuário Externo**, em 13/12/2021, às 10:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3239468** e o código CRC **E02D5AA4**.

**Dedico** este trabalho.

Ao meu querido pai, Manoel Pereira Santos (*in memorian*), pelos ensinamentos e por todo esforço empenhado no sustento de nossa família.

À minha querida mãe, Valdice de Souza Santos (*in memorian*), pelo incentivo e pelas demonstrações de amor incondicional que só uma mãe pode dar.

E aos meus queridos irmãos, Ivaneide, Luciene, Eliane, Paulo e Isac, minha grande e fiel torcida.

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente à Deus, por ter me dado forças para superar os meus limites e por se fazer presente nos momentos mais difíceis da minha vida.

Ao Prof. Dr. Leandro de Oliveira Souza, pelas orientações, pelo incentivo e pela amizade construída dia após dia ao longo dessa caminhada, cujo mérito pela realização dessa pesquisa também pertence a ele. Agradeço também pela paciência e compreensão demonstrada em cada uma das mensagens trocadas ao longo do período de orientação.

Agradeço ao Prof. Dr. Alex Andrade Alves, por me apresentar a Educação Matemática e por me permitir desenvolver as habilidades que orientam os meus trabalhos com o uso do *software* GeoGebra. Conhecimentos importantes e que considero intrínsecos ao exercício da minha profissão.

Agradeço a Profa. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco, por aceitar o convite de participação em minha banca de mestrado e por contribuir com a sua experiência no enriquecimento conceitual e pedagógico da minha pesquisa.

Abro também um parêntese para agradecer a Profa. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira, a quem atribuo o incentivo pela minha entrada no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da UFU.

Agradeço a professora Talita Soares Martins, pela grande amizade e por me permitir realizar esta pesquisa com seus alunos.

Agradeço também a minha querida amiga, a quem carinhosamente adotei como irmã, Valesca Corrêa Pereira, pelo incentivo e pelo companheirismo que permearam a nossa caminhada ao longo do mestrado. Estendo meus agradecimentos também aos seus familiares.

Agradeço a todos que contribuíram de maneira direta ou indireta para a realização deste trabalho.

---

## Resumo

Nesta dissertação relata-se os resultados de um estudo sobre as potencialidades do ambiente virtual GeoGebra *Classroom* para aprendizagem do conceito de função e para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Nesse estudo considerou-se os conhecimentos prévios de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental acerca do tema em questão, tanto sobre o conceito de função como das principais funcionalidades do *software* GeoGebra. As ações concernentes a essa pesquisa foram formuladas com a intenção de responder a seguinte pergunta norteadora: como o *software* de geometria dinâmica GeoGebra pode favorecer o aprendizado do conceito de função e o desenvolvimento do pensamento algébrico? Para isso adotou-se uma abordagem pedagógica com situações problemas elaboradas a partir dos recursos *multimídia* da sua versão *Classroom*. A investigação foi conduzida de acordo com três vertentes: (a) uso do ambiente virtual GeoGebra *Classroom*; (b) apropriação de orientações curriculares específicas para aprendizagem do conceito de função, conforme proposto pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC); e (c) a contextualização das situações problemas a partir da realidade dos próprios alunos. Duas propostas didáticas foram produzidas e problematizadas a partir de diferentes temáticas: o consumo consciente de água e o tratamento de resíduos sólidos. Essas propostas didáticas integram o produto educacional elaborado como parte do trabalho de pesquisa, cujo título “Aplicações do GeoGebra *Classroom* no ensino e aprendizagem do conceito de função”, reflete a nossa intencionalidade de orientar a elaboração de propostas didáticas a partir dessa plataforma. A pesquisa foi realizada de forma totalmente remota, com onze alunos de uma escola particular do município de Monte Alegre de Minas. Foi adotado na investigação os mesmos recursos de ensino utilizados pela instituição coparticipante em que se deu a pesquisa, as plataformas *Meet* e *Classroom*, pertencentes, respectivamente, ao Google e ao GeoGebra *online*. Com base no conceito de função e no uso do *software* GeoGebra, a análise qualitativa dos dados produzidos para esta pesquisa nos forneceu indicativos sobre possíveis caminhos pedagógicos à serem adequados às orientações curriculares propostas pela BNCC. Discute-se as potencialidades do GeoGebra para aprendizagem contextualizada do conceito de função e para o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos, a partir do 9º ano do Ensino Fundamental.

**Palavras-chave:** Conceito de funções. GeoGebra *Classroom*. BNCC. Pensamento algébrico. Situações problemas. Educação Matemática crítica.



---

## Abstract

This dissertation reports results of a study on the potential of the GeoGebra Classroom virtual environment for learning the concept of function and for the development of algebraic thinking. In this study, the prior knowledge of students (14-15 years old) of elementary school about the topic in question was considered, both about the concept of function and about the main functionalities of the GeoGebra software. The actions concerning this research were formulated with the intention of answering the following guiding question: how could the GeoGebra dynamic geometry software favor the learning of the function concepts as develop of algebraic thinking? For that, a pedagogical approach was adopted using problem situations elaborated from the multimedia resources of Classroom version. The investigation was lead according to three aspects: (a) use of the GeoGebra Classroom virtual environment; (b) appropriation of specific curriculum guidelines for learning the concept of function, as proposed by the National Common Curriculum Base (BNCC); and (c) the contextualization of problem situations from the reality of the students themselves. Two didactic proposals were built and analyzed based on different themes: the conscientious consumption of water and the treatment of solid waste. These didactic proposals are part of the educational product developed as part of the research work, whose title “Applications of GeoGebra Classroom in teaching and learning the concept of functions.” reflects our intention to guide the preparation of didactic proposals from this platform. The research was carried out completely remotely, with eleven students from a private school in the municipality of Monte Alegre de Minas. The same teaching resources used by the co-participating institution where the research took place were adopted in the investigation, the Meet and Classroom platforms, belonging, respectively, to Google and GeoGebra online. Based on the concept of function and the use of GeoGebra software, the qualitative analysis of the data built for this research provided us with indications about possible pedagogical approaches to be adapted to the curricular guidelines proposed by the BNCC. The potential of GeoGebra for contextualized learning of the concept of function and for the development of algebraic thinking by students from the 9th grade of elementary school is discussed.

**Keywords:** Functions concept. GeoGebra Classroom. BNCC. Algebraic thinking. Problem situations. Critical Mathematics Education.

---

## Lista de Figuras

Figura 1 – Coleta de dados da pesquisa pela plataforma GeoGebra <i>Classroom</i> .....	37
Figura 2 – Página de <i>login</i> .....	38
Figura 3 – Contextualização do problema e descrição dos valores tarifários de água e esgoto .....	39
Figura 4 – Simulações de consumo faturado.....	40
Figura 5 – Análise de gráficos .....	40
Figura 6 – Análise de consumo per capita de água .....	45
Figura 7 – Planificações de um reservatório de chorume.....	48
Figura 8 – Representação gráfica 3D e da função correspondente.....	50

---

## Lista de Quadros

Quadro 1 – Síntese do pensamento algébrico nos documentos oficiais analisados .....	29
Quadro 2 – Fases da Tecnologias Digitais em Educação Matemática .....	32
Quadro 3 – Apresentação dos dados referentes as tarefas 1 e 5 .....	41
Quadro 4 – Justificativas apresentadas pelos alunos na Tarefa 5 .....	43
Quadro 5 – Respostas dos alunos na Tarefa 12 .....	47
Quadro 6 – Tabulação dos dados apresentados na Tarefa 5 .....	49

---

## Lista de Siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAAE	Certificado de Apresentação de Apreciação Ética
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
COVID-19	Corona Virus Disease – 19
GD	Geometria Dinâmica
IFBA	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
MEC	Ministério da Educação
ONU	Organização das Nações Unidas
PCI	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PET	Programa de Educação Tutorial
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PISA	Programme for International Student Assessment
PMSB	Plano Municipal de Saneamento Básico do Município de Monte Alegre de Minas
PPGECM	Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática
TBO	Tarifa Básica de Operação
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
UFU	Universidade Federal de Uberlândia

---

## Sumário

1 APRESENTAÇÃO.....	14
2 INTRODUÇÃO.....	17
2.1 Justificativa.....	19
2.2 Objetivos.....	21
3 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS .....	23
3.1 O conceito de função em face dos documentos de orientação curricular.....	23
3.2 O pensamento algébrico na perspectiva dos PCNs e da BNCC .....	29
3.3 Retrospecto histórico das TDIC no âmbito da Educação Matemática .....	30
4 TRILHA METODOLÓGICA .....	35
4.1 O contexto da pesquisa .....	35
4.2 Síntese do produto educacional .....	37
4.3 Produção e análise de dados .....	37
4.3.1 Problema 1: consumo consciente de água .....	38
4.3.2 Problema 2: tratamento de resíduos sólidos .....	47
4.4 Objetivos específicos de cada artigo .....	51
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	53
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	56
ARTIGO 1 .....	59
O GeoGebra <i>Classroom</i> e a abordagem de situações problemas: possibilidades para o ensino e aprendizagem do conceito de função.....	59
ARTIGO 2 .....	61
Contribuições do GeoGebra <i>Classroom</i> para o desenvolvimento do pensamento algébrico: aplicações do conceito de função .....	61
ANEXOS.....	63
APÊNDICE .....	67

---

## 1 APRESENTAÇÃO

Acredita-se que as temáticas de pesquisa educacional advêm das inquietações que emergem no exercício da profissão docente, fruto das nossas próprias vivências. Neste contexto, apresentarei nesta seção, uma breve descrição da minha trajetória acadêmica e profissional, elencando os fatos de maior importância que me motivaram a realizar esta pesquisa, a qual reflete as minhas intencionalidades com o uso do *software* GeoGebra no âmbito do ensino remoto.

A escrita de um trabalho de pesquisa em nível de Pós-graduação nos dá uma clara dimensão de como nós, enquanto professores, estamos nos constituindo como pesquisadores em meio a nossa própria prática docente, e isso sem dúvida nenhuma é um dos momentos mais importantes da nossa carreira profissional.

Por este motivo, cabe salientar os fatos mais relevantes da nossa trajetória acadêmica que nos permitiram ser quem realmente somos, seja pelos desafios e conquistas ou pelos anos de estudo e dedicação, que revestidos da abdicção da convivência familiar, serviram de aporte para nos tornar mais fortes na busca por aquilo que nos move enquanto educadores, o conhecimento.

Nesta perspectiva, destaco inicialmente a minha passagem pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA), Campus Eunápolis, no período de 2009 à 2013. Neste período tive a oportunidade de ingressar no Curso Superior de Licenciatura em Matemática, no qual tive o meu primeiro contato com a Educação Matemática por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID).

Esta foi uma experiência muito significativa para a minha formação, sobretudo pelos trabalhos realizados e pela participação em eventos regionais e nacionais na área de Educação Matemática. Isso me permitiu enxergar o ensino e a aprendizagem da Matemática sob uma nova perspectiva, em que as ações mediadas pelo professor a partir de metodologias de ensino como, Modelagem Matemática, Resolução de Problemas, História da Matemática e as

---

Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), podem contribuir significativamente para a promoção do conhecimento matemático no âmbito da educação básica.

Neste contexto, o uso pedagógico do *software* de geometria dinâmica GeoGebra sem dúvida nenhuma foi o que mais me encantou, sobretudo pelas suas potencialidades para o ensino e aprendizagem da Matemática. As manipulações gráficas desse software, quando orientadas de forma consciente a partir de objetivos bem definidos, nos permitem fazer generalizações, levantamento de conjecturas e a averiguação de hipóteses, dentre outras.

Embora tivesse permanecido no IFBA por tempo suficiente para minha formação, acabei abandonando o curso em 2013 sem ter concluído a graduação, uma vez que não tinha integralizado todos os créditos.

Esta foi uma decisão difícil, pois sabia dos impactos que isso acarretaria nos meus planos de me tornar professor. Hoje compreendo que esta decisão permitiu vislumbrar novos horizontes para a minha própria formação.

Após um ano de afastamento, transitei por outras possibilidades de carreira, porém tudo me levava para a Matemática, tanto que em 2015 ingressei novamente em um Curso de Licenciatura em Matemática, desta vez no Campus Pontal da Universidade Federal de Uberlândia, localizada na cidade de Ituiutaba/MG no pontal do triângulo mineiro, onde concluí minha graduação ao final do primeiro semestre de 2018.

Nesta instituição tive a oportunidade de ingressar novamente no PIBID e posteriormente no Programa de Educação Tutorial da Matemática (PET Matemática) em que desenvolvi diversos trabalhos na área de ensino, pesquisa e extensão, o que contribuiu consideravelmente para a minha formação.

Essa experiência no PET da Matemática me fez ter contato com diversos alunos ingressantes de turmas posteriores a minha, tanto por meio de monitorias como por meio de minicursos. As monitorias visavam sanar as dificuldades dos alunos ingressantes nas disciplinas mais básicas dos primeiros períodos como, por exemplo, Fundamentos de Matemática Elementar (I e II) e Geometria Analítica.

Esta foi uma das estratégias promovidas pelo grupo PET para conter a evasão dos alunos ingressantes, o que motivou a criação de um minicurso a ser realizado no início do primeiro semestre de cada ano, chamado Minicurso de Introdução às Funções. Este minicurso era voltado prioritariamente para os alunos da Matemática, mas abrangia também alunos de outros cursos.

---

A realização deste minicurso compreendia a organização de cinco encontros, realizados sempre aos sábados no período da tarde, com aproximadamente quatro horas de duração. Nestes encontros eram abordados os seguintes conteúdos: (a) Matemática elementar; (b) Funções polinomiais do 1º e do 2º grau; (c) Funções trigonométricas; (d) Funções exponenciais; e (e) Funções logarítmicas.

Conforme as aulas e monitorias se desenvolviam, percebíamos que os alunos participantes possuíam um baixo nível de conhecimento sobre conteúdos de funções, isso de certa forma justificava as dificuldades que estes alunos tinham em acompanhar a evolução destes conteúdos nas disciplinas que cursavam.

Por outro lado, isso poderia ser o reflexo de algumas falhas do ensino básico, em que uma grande parte dos alunos concluem o Ensino Médio sem compreender importantes conceitos Matemáticos. Neste contexto, ressalta-se a importância das pesquisas científicas que tenham por finalidade propor novas metodologias de ensino acerca do tema em questão.

Essa problemática despertou meu interesse em continuar a minha formação, desta vez pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM) da UFU, onde ingressei no primeiro semestre de 2019.

Hoje vejo a problemática que aqui se descreve como algo que me motivou a realizar um estudo acerca das potencialidades do *software* GeoGebra para a aprendizagem do conceito de função, não necessariamente partindo do zero, mas sim ressignificando sob a ótica das orientações curriculares propostas BNCC, as atividades que visam o desenvolvimento do pensamento algébrico. Em síntese, o estudo proveniente desta pesquisa também busca promover discussões e reflexões sobre aprendizagens em ambientes virtuais e sobre a promoção de competências e habilidades específicas sobre o tema em questão.



---

## 2 INTRODUÇÃO

O conceito de função tem desempenhado ao longo da história, um importante papel para a leitura e compreensão do mundo real. A sua peculiaridade, de poder transitar entre as diferentes áreas do conhecimento, torna essencial a sua aprendizagem desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, o que corrobora com as orientações curriculares propostas pela BNCC.

Entretanto, a abordagem estática desse conceito com ênfase na exploração das suas operações algébricas e representações gráficas, por muito tem permeado o ensino básico ao longo dos anos, o que nos chama a atenção para as possibilidades de ressignificação desse conceito por meio de recursos tecnológicos como o *software* GeoGebra.

Com base nestes preceitos, a presente pesquisa tem como foco principal a aprendizagem do conceito de função por meio da abordagem de situações problemas, considerando também as contribuições do GeoGebra *Classroom* para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nos convém ressaltar que as situações problemas abordadas nesta pesquisa fazem referência às situações reais do contexto social dos próprios alunos participantes, cuja referência encontra respaldo em Skovsmose (2000).

Neste sentido, a dissertação foi estruturada visando responder a seguinte pergunta de pesquisa: como o *software* de geometria dinâmica GeoGebra pode favorecer o aprendizado do conceito de função e o desenvolvimento do pensamento algébrico?

Com base nesta pergunta foram produzidas duas atividades de investigação na plataforma *online* do GeoGebra *Classroom*, as quais foram propostas para uma turma composta por onze alunos, com idades entre quatorze e quinze anos. Estes alunos residiam no município de Monte Alegre de Minas, e cursavam até então, o 9º ano do Ensino Fundamental em uma escola particular.

---

Nestas atividades abordando o conceito de função a partir de duas situações problemas: (a) consumo consciente de água; e (b) tratamento de resíduos sólidos. A sua realização se deu no âmbito do ensino remoto, o que se justifica em virtude das medidas restritivas de isolamento social adotadas no combate a pandemia de COVID-19, cujas consequências nos obrigaram a realizar adaptações do modelo de ensino presencial para o modelo de ensino remoto.

Essa pandemia, causada pelo vírus Sars-CoV-2, teve sua origem, no final do ano de 2019, na cidade chinesa de Wuhan. Considerado de fácil propagação, a disseminação desse vírus causou a morte de milhares de pessoas em todo o mundo, incluindo o Brasil, que até o mês de novembro de 2021 já havia contabilizado a morte de mais de 600 mil pessoas.

Neste contexto tão adverso, a utilização dos recursos tecnológicos de interação *online* foram de extrema importância para a manutenção do ensino básico em diferentes instituições de ensino espalhadas pelo país. Essas condições adversas de ensino também evidenciaram outras necessidades de caráter prático, sobretudo as relacionadas a produção de materiais didáticos voltados para ambientes virtuais de ensino e aprendizagem.

Em face disso, nos apoiamos nas potencialidades destas plataformas de ensino e aprendizagem para criar um ambiente de exploração e investigação com o GeoGebra *Classroom*, permitindo aos participantes da pesquisa interagir com este recurso, refletir sobre possíveis ações e conjecturar com base em padrões observáveis.

A análise dos dados referentes a esta pesquisa nos serviu como subsídio para a elaboração de dois artigos, os quais foram submetidos à revistas científicas e em parte compõem esta dissertação. Essa estrutura se baseia no formato *multipaper* de produção textual, caracterizado pela apresentação dos capítulos em formato de artigos científicos.

Segundo Mutti e Klüber (2018), o formato *multipaper* difere do modelo monográfico tradicional não apenas na sua estrutura, como também na sua finalidade, cuja publicação dos artigos em revistas científicas visa dar uma maior visibilidade aos resultados alcançados com a realização da pesquisa.

Neste formato de produção textual, cada um dos artigos que compõe o texto final de pesquisa possui características próprias e individualizadas, as quais se refletem, segundo Frank (2013), na revisão de literatura, nos objetivos, nos métodos de pesquisa e nos resultados, discussões e conclusões específicas de cada um dos artigos.

Com base nestes princípios, a elaboração dos artigos científicos que compõem este trabalho levou em consideração o estabelecimento de objetivos próprios e específicos para

---

cada uma das situações abordadas, o que será detalhado mais adiante no tópico referente a metodologia.

Assim, esperamos contribuir para a promoção de discussões sobre o papel que estes recursos tecnológicos de ensino desempenham na construção e consolidação do conhecimento dos nossos alunos, considerando, sobretudo, a exploração e a investigação das mais variadas situações problemas.

Assim, assumimos como hipótese a concepção de que as propostas de aprendizagem do conceito de função, quando contextualizadas e exploradas com auxílio do *software* GeoGebra, podem se tornar mais significativas para o aprendizado dos alunos, contribuindo para uma visão crítica e reflexiva das questões sociais abordadas em suas múltiplas dimensões.

## 2.1 Justificativa

Dentre os diversos conceitos matemáticos existentes cumpre-nos enfatizar um deles em específico, o conceito de função. Segundo Ponte (1990), o surgimento deste conceito sob uma perspectiva individualizada e como objeto de estudo corrente dentro da própria Matemática nos remonta ao final do Século XVII, confundindo-se com os primórdios do Cálculo Infinitesimal.

Segundo Caraça (1951), o conceito de função surgiu da necessidade de estudar quantitativamente os fenômenos naturais. Dentro deste contexto se estabeleceu a noção intuitiva de função como relações de dependência unívoca entre duas grandezas, sendo indispensável para a leitura matemática destes fenômenos, e irrestrito a temas próprios da Matemática, dado o seu amplo alcance.

Por outro lado, a noção intuitiva do conceito de função aplicado às situações e problemas do mundo real, evidenciava, dentro de um contexto prático, algumas limitações deste conceito, o que exigia dos matemáticos à época um estudo mais apurado e a explanação de definições mais precisas acerca do tema. “Esse processo de constante aperfeiçoamento culminou na definição de função como relação entre conjuntos quaisquer, a mais formal e mais utilizada para introduzir o tema” (SOUZA; SOUZA, 2018, p. 50).

Neste contexto, ao reconhecermos a importância do conceito de função, dada a sua variedade de aplicação em diferentes áreas do conhecimento, nos condicionamos a leitura e análise dos documentos oficiais que regem o nosso ensino básico, sobretudo no que diz respeito as orientações curriculares para a abordagem desse tema, o que será realizado mais adiante.

---

Segundo Ponte (1990, p. 6), “o papel curricular do conceito de função pode ser visto tendo em conta três aspectos essenciais: (a) a natureza mais algébrica ou mais funcional da abordagem; (b) a generalidade do conceito; e (c) a sua aplicação a problemas e situações da vida real e de outras ciências”.

Estes aspectos se constituem como fundamentos importantes e que podem se fazer presentes no processo de ressignificação do conceito de função em ambientes virtuais, conforme propomos neste trabalho.

Assim, com base nestes aspectos foi realizado um estudo acerca das potencialidades do GeoGebra *Classroom* para aprendizagem do conceito de função, contemplando também as orientações curriculares que a BNCC propõe para a aprendizagem desse conceito.

Neste contexto de práticas educativas em ambientes de geometria dinâmica, Bairral, Assis e Silva (2015), ressaltam o papel que o professor pode assumir na promoção de ações mediadoras do conhecimento, proporcionando aos alunos o contato com recursos desta natureza e que possam de fato contribuir para formação deles. Por esta perspectiva caberia ao professor a condução dos alunos por meio de questionamentos e não por meio de respostas prontas.

O uso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra pode contribuir com a construção do conhecimento matemático dos alunos a partir das suas interações com os recursos disponíveis no *software*. Infelizmente o uso destes recursos didáticos no ensino básico ainda é tratado como algo muito incipiente, mesmo após as primeiras discussões acerca deste tema terem sido realizadas em meados da década de 80.

Isso é algo que perpassa por uma mudança de postura dos professores, uma vez que a “sua utilização nem sempre é bem vista pelos docentes, pois significa a necessidade de assumir riscos durante a aula” (SILVA; PENTEADO, 2013, p. 281).

Por outro lado, ao vivenciarmos as condições adversas de ensino que requerem o domínio destes recursos tecnológicos, como as que foram evidenciadas em razão da pandemia de COVID-19, é que compreendemos a importância e necessidade de uma ampla discussão acerca deste tema, sobretudo as que abordam as possibilidades dos recursos de interação *online* como alternativa a manutenção do ensino básico.

Neste sentido, a realização da presente pesquisa se justifica em razão de três motivos bem específicos, a saber: (a) importância e centralidade que o conceito de função ocupa nas mais diversas áreas do conhecimento, sobretudo em situações problemas em que a compreensão de determinados fenômenos físicos, naturais e sociais está intrinsecamente ligada às relações de dependência entre duas variáveis; (b) aplicação do conceito de função

em situações problemas comuns da vida real; e (c) a promoção de discussões e reflexões acerca das potencialidades e limitações do uso do GeoGebra em propostas de caráter didático pedagógico.

Segundo Marco (2009, p. 62), “a utilização de recursos computacionais como mediadores da aprendizagem do aluno na atividade de ensino pode permitir ao professor uma maneira diferenciada de ministrar suas aulas, abandonando a repetição e a reprodução das aulas tradicionais”. Portanto, é de se esperar que a abordagem deste tema no ensino básico, dada as orientações didático pedagógicas previstas na BNCC, possa de fato superar o caráter puramente mecânico com que este tema vinha sendo tratado desde as primeiras noções iniciais apresentadas ao final do Ensino Fundamental.

Isso é algo que vai de encontro com aquilo que estamos propondo nesta pesquisa com o uso do *software* GeoGebra. Por esta perspectiva, a BNCC confere aos *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, um papel de destaque para a “compreensão e utilização das noções matemáticas”, promovendo assim o desenvolvimento de múltiplas habilidades (BRASIL, 2017, p. 276).

De modo geral, compreende-se que os *softwares* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, desempenham um importante papel no ensino de funções, o que será colocado em evidência por meio da análise dos dados da presente pesquisa.

## 2.2 Objetivos

Esta pesquisa foi estruturada visando compreender como a versão *online* do *software* de geometria dinâmica GeoGebra, pode favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico e o aprendizado do conceito de função por meio da abordagem de situações problemas. Por esta perspectiva foi realizado um estudo sobre as potencialidades de um produto educacional produzido para tal finalidade.

Neste produto educacional foram abordadas, conforme já mencionado, duas diferentes situações problemas, “consumo consciente de água” e “tratamento de resíduos sólidos”, as quais foram elaboradas de acordo com os seguintes objetivos específicos:

➤ **Situação problema 1 – Consumo consciente de água.**

Nesta atividade visamos analisar: (a) o processo de transição entre as diferentes formas de representação do conceito de função (planilha → gráfico → representação algébrica); (b) os elementos que embasam a definição que os alunos têm sobre o conceito de função (consistência ou fragilidade conceitual); e (c) os impactos da abordagem dada ao tema para a conscientização dos alunos quanto a adoção de hábitos de consumo sustentável de água.

➤ **Situação problema 2 – Tratamento de resíduos sólidos.**

Essa atividade é composta por um conjunto de dez tarefas, por meio das quais visamos: (a) analisar a viabilidade do *software* GeoGebra para a promoção do pensamento algébrico e para a generalização de padrões observáveis, considerando o estudo das relações entre Altura e Volume na construção simulada de um reservatório de chorume; (b) identificar os critérios utilizados pelos alunos na construção destes modelos (maximização de volume, aproveitamento de material e segurança); e (c) apontar possíveis contribuições da abordagem do tema para a conscientização dos alunos quanto a promoção de ações que visem atenuar os impactos que o descarte de resíduos sólidos geram ao meio ambiente.

Após análise dos dados produzidos, ratificamos o alcance dos objetivos propostos, o que nos permitiu avaliar as potencialidades das atividades desenvolvidas no GeoGebra *Classroom*, ressaltando vantagens em relação as atividades de caráter estático e propondo orientações específicas para a elaboração de atividades dentro destes ambientes virtuais.

---

### 3 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Nesta seção apresentaremos uma síntese das principais orientações curriculares para aprendizagem do conceito de função, desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1997 até a BNCC. Além disso, buscaremos estabelecer um paralelo entre a evolução das TDIC no âmbito da Educação Matemática e o papel que estes recursos desempenham na aprendizagem do conceito de função.

#### 3.1 O conceito de função em face dos documentos de orientação curricular

Com base em uma leitura prévia dos PCNs, percebe-se que as orientações curriculares para o ensino de funções já se encontravam presentes desde a sua primeira versão de 1997, que por sua vez delineava o ensino deste conceito a partir da ideia de proporcionalidade, numa perspectiva que muito enfatizava a sua noção intuitiva. De acordo com este documento

[...] além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 1997, p. 43-44)

Esta flexibilização que o aluno precisa adquirir para saber lidar com o conceito de função em situações diversas, não só na Matemática como também em outras áreas do conhecimento, sem dúvida nenhuma tem sido um grande desafio para o ensino de Matemática na educação básica.

De acordo com a versão preliminar do Relatório Brasil de desempenho no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) de 2018, apenas 0,1% dos estudantes brasileiros avaliados se encontram no último nível de proficiência em Matemática, sendo que neste nível se avalia dentre outras habilidades a capacidade dos alunos de “conceituar”. Só

para se ter ideia, em média cerca de 2,4% dos estudantes dos outros países participantes se encontram neste mesmo nível.

No Nível 6, os estudantes são capazes de conceituar, generalizar e utilizar informações com base em suas investigações e na modelagem de problemas complexos, e são capazes de usar seu conhecimento em contextos relativamente não padronizados. [...]. Conseguem refletir sobre suas ações e formular e comunicar com precisão suas ações e reflexões relacionadas às constatações, interpretações e argumentações que elaboram; são ainda capazes de explicar por que razão estas são adequadas à situação original. (BRASIL, 2019, p.109)

É importante salientar que o caminho que conduz os nossos alunos a este nível tem início desde os primeiros anos do Ensino Fundamental<sup>1</sup>, em um processo que deve ser contínuo, progressivo e ao mesmo tempo capaz de provê-los com habilidades e competências necessárias a formação de seu conhecimento, o que também inclui o desenvolvimento da sua capacidade de conceituar e generalizar.

Neste sentido, ao analisarmos a abordagem dos PCN do Ensino Fundamental I, para o conceito de função podemos verificar algumas características de ensino baseadas pela intuição, como, por exemplo, nas relações entre direção e sentido, utilizadas para descrever a “movimentação de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência [...]” (BRASIL, 1997, p. 51).

No que diz respeito aos PCN do Ensino Fundamental II, recomenda-se neste documento a consolidação dos conceitos vistos no Ensino Fundamental I, por uma perspectiva que considera o desenvolvimento gradual do conhecimento a partir do estabelecimento de relações diretas com os conceitos construídos anteriormente.

Neste documento, a álgebra passa a ter uma abordagem mais abrangente, enfatizando, dentre outras coisas, o uso de variáveis para a representação de relações funcionais aplicada às diferentes situações problemas, conferindo ao aluno a capacidade de fazer generalizações de padrões aritméticos de modo a compreender o conceito de função a partir do estabelecimento de relações entre duas diferentes grandezas.

No que se refere as orientações curriculares dos PCN do Ensino Médio, instituídos em 1999, podemos perceber algumas indicações para a promoção do caráter integrador e interdisciplinar do conceito de função para leitura do mundo real, por meio da interpretação

---

<sup>1</sup> Ao usarmos a terminologia Ensino Fundamental I ou II estaremos recorrendo a indicação dos PCN para identificar os diferentes períodos de ensino daquela época, ou seja, Ensino Fundamental I (1º e 2º ciclo – 1ª à 4ª Série) e Ensino Fundamental II (3º e 4º ciclo - 5ª à 8ª Série).



---

do comportamento de fenômenos sociais relacionados ao cotidiano ou relacionado às outras áreas do conhecimento.

Isso de certa forma também requeria uma visão mais ampla acerca da aplicabilidade do conceito de função como, por exemplo, na geometria analítica, na trigonometria e no estudo de sequências relacionadas às progressões aritméticas e geométricas, dentre outros.

Entretanto, a organização do trabalho escolar no Ensino Médio ainda demandava orientações específicas para a articulação entre as competências gerais a serem desenvolvidas com os conhecimentos próprios de cada disciplina. Isso só foi possível com a publicação dos PCN+ do Ensino Médio, ao final de 2002, e das Orientações Curriculares para o Ensino Médio de 2006.

Nos PCN+ do Ensino Médio a organização do currículo de Matemática se deu por meio de três temas estruturadores: (a) álgebra: números e funções; (b) geometria e medidas; e (c) análise de dados. Para cada um destes temas foi estabelecido um conjunto de unidades temáticas, sendo que para o ensino de funções estas unidades versavam especificamente sobre variação de grandezas e trigonometria.

De acordo com este documento, estas unidades temáticas deveriam ser desenvolvidas concomitantemente nos três anos do Ensino Médio, e eram consideradas como “parcelas autônomas de conhecimentos específicos”, podendo “ser organizadas dentro do projeto pedagógico de cada professor ou escola, em função das características de seus alunos e dos tempos e espaços para sua realização” (BRASIL, 2002, p. 120).

Por outro lado, o documento enfatizava ainda que o ensino de funções deveria estar centrada em seu conceito e nas propriedades relativas às suas operações, o que sugeria a relativização do uso de linguagens excessivamente formais, incluía também o estudo de funções específicas, como as funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares. O uso de situações problemas e de exemplos práticos da vida cotidiana também foram colocados em evidência para a compreensão do conceito de função aplicado às diferentes situações.

Partindo dos mesmos pressupostos dos PCN+ do Ensino Médio, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio de 2006 também foram criadas e visavam contribuir com a organização curricular do ensino nas diferentes áreas do conhecimento. No caso específico da Matemática foram estabelecidas cinco orientações, as quais compreendiam: (a) a organização curricular e o projeto político pedagógico; (b) a escolha dos conteúdos; (c) a abordagem de temas complementares; e (d) a metodologia a ser adotada, incluindo também; (e) o uso de tecnologias.

É importante salientar que a abordagem dos conteúdos proposta por este documento enfatizava a promoção do pensamento matemático dos alunos, contribuindo assim para o desenvolvimento da sua capacidade de “formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva” (BRASIL, 2006, p. 70).

Para isso foram estabelecidos quatro diferentes blocos<sup>2</sup> de conteúdos: (a) números e operações; (b) funções; (c) geometria; e (d) análise de dados e probabilidade. Neste contexto, o ensino de funções passou a ter orientações ainda mais específicas, como as que se observa na citação descrita a seguir.

O estudo de Funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decréscimo (mais ou menos rápido) (BRASIL, 2006, p. 72).

Estas orientações evidenciavam não só a importância da contextualização para a compreensão do conceito de função aplicado às diferentes situações problemas, mas também das representações gráficas para o entendimento global de como as variáveis se relacionam, o que colocava em evidência a importância dos *softwares* de geometria dinâmica para o enriquecimento visual e conceitual das mais variadas funções.

Com a reformulação do currículo do ensino básico por meio da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em dezembro de 2017 pelo Ministério da Educação (MEC), houve uma reestruturação de todas as áreas do conhecimento, o que tornou mais claro aquilo que se espera que os alunos aprendam ano a ano, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até os anos finais do Ensino Médio.

Para isso foram estabelecidas competências específicas a serem alcançadas em função do desenvolvimento de determinadas habilidades. No Ensino Fundamental a aprendizagem da Matemática deve considerar não apenas o seu caráter hipotético dedutivo, mas também a perspectiva heurística das experimentações, que deve “garantir que os alunos relacionem

---

<sup>2</sup> De acordo com a análise preliminar do documento em questão, o uso da expressão “Bloco de conteúdos” possui o mesmo significado da expressão “Temas Estruturadores” utilizado nos PCN+ de 1999.

---

observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas” (BRASIL, 2017, p. 265).

Segundo Skovsmose (2000), o contexto das situações problemas compreende três diferentes tipos referência, as quais ele define como: (a) referência à matemática pura (exercícios do tipo calcule e resolva); (b) referência à semi-realidade (abordagem de situações reais por meio de dados fictícios); e (c) a referência às situações da vida real, baseada em dados reais. Neste sentido, ressaltamos que a abordagem dada a esta pesquisa foi estritamente pensada nessa última referência, que visa contribuir com a formação plena dos alunos, não apenas pelo caráter pedagógico como também pelo caráter sociocultural.

Por outro lado, a BNCC do Ensino Fundamental define outras cinco unidades temáticas cuja finalidade é a de orientar a formulação das habilidades propostas para esta etapa do ensino básico, as quais foram organizadas da seguinte forma: (a) números; (b) álgebra; (c) geometria; (d) grandezas e medidas; e (e) probabilidade e estatística.

Estas unidades temáticas foram estruturadas considerando o compromisso do Ensino Fundamental com o desenvolvimento do letramento matemático, que é definido pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) como sendo

[...] a capacidade de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma série de contextos, o que inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso ajuda os indivíduos a reconhecer o papel que a Matemática desempenha no mundo e faz com que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias (BRASIL, 2019, p. 98).

De acordo com a BNCC, nos anos iniciais do Ensino Fundamental o ensino de funções deve ter uma abordagem que enfatize o pensamento algébrico e não prioritariamente as operações algébricas. Isso pressupõe a compreensão dos conteúdos por meio do estabelecimento de propriedades e padrões, bem como pelas ideias de proporcionalidade e equivalência, nesta fase não se recomenda o uso de letras para a representação de regularidades.

Recomenda-se que ao final do Ensino Fundamental os alunos saibam compreender as relações entre variável e função e entre incógnita e equação, estabeleçam generalizações de propriedades e investiguem regularidades de sequências numéricas, a fim de “compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis”, podendo, “utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis” (BRASIL, 2017, p. 317).

---

No Ensino Médio a BNCC propõe para a área de Matemática e suas Tecnologias a promoção de competências específicas em função do desenvolvimento de determinadas habilidades, as quais devem contemplar os processos de investigação, construção de modelos e a resolução de problemas.

Com isso, espera-se que o letramento matemático iniciado na etapa anterior, possa de fato ser ampliado por meio de novos conhecimentos, o que também perpassa pelo desenvolvimento do pensamento computacional, que atrelado às exigências do mercado de trabalho e aos avanços tecnológicos presentes na vida cotidiana, pode contribuir para a promoção do conhecimento Matemático por meio da investigação.

A BNCC do Ensino Médio propõe o desenvolvimento de cinco competências específicas, as quais se articulam em conformidade com três unidades temáticas (números e álgebra; geometria e medidas; e probabilidade e estatística). No caso específico das funções, foram estabelecidas quinze habilidades, as quais foram definidas de acordo com ações que enfatizam, sobretudo, a capacidade dos alunos de: (a) converter representações algébricas de diferentes funções em representações geométricas no plano cartesiano; (b) investigar os dados numéricos apresentados em tabelas para posterior representação no plano cartesiano; e (c) analisar, com ou sem o auxílio de recursos tecnológicos, os campos de existência de cada função, bem como os aspectos de crescimento e decréscimo.

Desenvolver todas estas habilidades não é algo tão simples para um aluno que se encontra no Ensino Médio se considerarmos apenas o uso de recursos estáticos como as suas anotações no caderno ou as explicações do professor na lousa.

Segundo Ponte (1990, p. 7-8), “a noção de função, uma vez introduzida, deverá passar a aparecer ciclicamente no currículo, tratada de modo a permitir um progressivo enriquecimento e aprofundamento do conceito”. Neste sentido, ressaltamos a importância não só das questões contextualizadas, mas também dos *softwares* de geometria dinâmica para o desenvolvimento do pensamento algébrico, dentre os quais podemos destacar o *software* GeoGebra como recurso de aprendizagem.

Dentre os diversos recursos didáticos existentes, “os softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas”. Entretanto, se faz necessário a sua integração às “situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização” (BRASIL, 2017, p. 276).

Por outro lado, também consideramos viável se trabalhar com algumas das habilidades propostas para o Ensino Médio ainda no Ensino Fundamental, sobretudo àquelas relacionadas as funções polinomiais do 1º e do 2º grau, conforme proposto neste trabalho. Isso pode

contribuir para o ensino mais eficaz do conceito de função, uma vez que o número expressivo de quinze habilidades não estaria mais concentrado em apenas uma etapa do ensino básico.

### 3.2 O pensamento algébrico na perspectiva dos PCNs e da BNCC

Ao levarmos em consideração o desenvolvimento do pensamento algébrico proposto pelos PCN e pela BNCC, nos condicionamos a uma análise minuciosa dos principais aspectos que norteiam a construção deste conhecimento por um viés progressivo e contínuo, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o término do Ensino Médio.

No Quadro 1 descrito a seguir, apresentamos uma síntese das principais orientações pedagógicas expressas nos PCN e na BNCC, evidenciando assim a forma como o pensamento algébrico pode ser construído em cada etapa do ensino básico e como o conceito de função se apresenta em cada um deles.

**Quadro 1** – Síntese do pensamento algébrico nos documentos oficiais analisados

	PCN do Ensino Fundamental		BNCC do Ensino Fundamental	
	Fundamental I (1º e 2º ciclos)	Fundamental II (3º e 4º ciclos)	Anos iniciais (1º ao 5º ano)	Anos finais (6º ao 9º ano)
Ensino Fundamental	O conceito de função se apresenta de forma intuitiva, implícito em situações diversas como, por exemplo, nas relações entre direção e sentido, utilizadas para descrever a movimentação de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência.	Propõe a ampliação do conhecimento algébrico e a compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas. Abrange o estudo das relações funcionais para a exploração de padrões em sequências numéricas, a partir da generalização das suas propriedades operatórias.	O foco está no pensamento algébrico e não nas operações algébricas. Busca-se compreender nos conteúdos o estabelecimento de propriedades, padrões e as ideias de proporcionalidade, equivalência e regularidade, sendo que neste último caso não se propõe o uso de letras, até então.	Enfatiza-se o pensamento algébrico para a resolução de situações problemas. Os alunos devem compreender as relações entre variável e função e entre incógnita e equação, estabelecer generalizações de propriedades e investigar regularidades de sequências numéricas.
	PCN do Ensino Médio	PCN+ do Ensino Médio	Orientações Curriculares para o Ensino Médio	BNCC do Ensino Médio
Ensino Médio	Pressupõe a exploração do caráter integrador do conceito de função, porém, não de forma isolada, mas sim aplicado às diversas situações cotidianas e às diferentes áreas do conhecimento.	Sugere a relativização do uso de linguagens excessivamente formais e do estudo de funções específicas, como as funções injetoras e sobrejetoras, por exemplo. A ênfase se encontra no conceito de função e nas propriedades em relação às suas operações.	Evidencia o caráter interdisciplinar do conceito de função, concretizado por meio da contextualização do ensino. Ressalta as potencialidades dos recursos tecnológicos para o entendimento global de como as variáveis se relacionam.	Sugere o desenvolvimento de habilidades que contemplem os processos de investigação e interpretação da realidade por meio da construção de modelos e da resolução de problemas.

Fonte – Elaboração própria com base nos documentos oficiais analisados (2021)

A transição entre estes documentos nos mostra um percurso em que a ênfase no conceito de função passa gradativamente da sua noção intuitiva e das suas propriedades operatórias para o seu caráter integrador e interdisciplinar, aplicado às diferentes situações da realidade cotidiana.

Isso requer uma compreensão deste conceito para além da definição de relação de dependência unívoca entre duas variáveis, mas que, sobretudo, possa dar subsídios para a interpretação da realidade cotidiana.

Caraça (1989) ressalta que a realidade que o homem busca compreender, contempla duas características fundamentais:

- 1ª - Interdependência. Todas as coisas estão relacionadas umas com as outras; o Mundo, toda esta Realidade em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos comunicam e participam, todos, da vida uns dos outros. [...]
- 2ª - Fluência. O Mundo está em permanente evolução todas as coisas, a todo o momento, se transformam, tudo flue; tudo devém. (CARAÇA, 1951, p. 109-110, grifo nosso).

Assim, o movimento do conceito de funções está associado as variações de quantidade em um mundo formado de partes que se relacionam umas com as outras e que se modificam a todo instante.

Outro ponto a ser observado e que Caraça chama atenção é em relação à regularidade, a qual possibilita a repetição e a previsão, sob condições iniciais apropriadas, visto que “repetir e prever é fundamental para o homem na sua tarefa essencial de dominar a Natureza” (CARAÇA, 1951, p. 119).

Nesse contexto, ressaltamos a articulação entre as diferentes orientações curriculares para aprendizagem do conceito de função, conforme definido para cada etapa do ensino básico. Um conhecimento construído de forma significativa para o contexto social dos próprios alunos e que lhes permita assumir um papel de protagonismo para compreensão e atuação no mundo.

### 3.3 Retrospecto histórico das TDIC no âmbito da Educação Matemática

O uso das tecnologias digitais em propostas metodológicas voltadas para o ensino e a aprendizagem da Matemática é algo que vem sendo discutido desde meados dos anos de 1980 quando surgiram as primeiras propostas de utilização desses recursos no ensino de Matemática.

---

Portanto, não se trata mais de saber se estes recursos de ensino favorecem ou não a aprendizagem de um determinado conteúdo, mas sim de tentar compreender a melhor forma de utilizá-los em sala de aula, explorando ao máximo as suas potencialidades.

De acordo com Borba, Silva e Gadanidis (2014), a utilização dessas tecnologias, no contexto da Educação Matemática, se divide em quatro fases, que compreendem desde o uso de calculadoras simples e científicas em meados da década de 80 até o uso das tecnologias móveis nos dias atuais.

Segundo os autores a primeira fase (1985), foi caracterizada fundamentalmente pelo uso do *software* LOGO, cujo uso pedagógico era baseado nas relações entre a linguagem de programação e o pensamento matemático. Com ênfase na perspectiva construcionista de ensino, a construção de figuras geométricas se dava por meio de um conjunto ordenado de ações a serem executadas por uma tartaruga (virtual), que ao realizar movimentos de giros e passos possibilitava a construção de ângulos e segmentos de reta.

Outro acontecimento marcante desta fase diz respeito as primeiras discussões sobre a perspectiva de implantação de laboratórios de informática nas escolas. Tanto que em meados dos anos de 1980 e início dos anos de 1990 o Ministério da Educação (MEC) passou a promover a disseminação da informática no âmbito do sistema educacional brasileiro por meio de programas e projetos voltados para o desenvolvimento de pesquisas sobre o uso pedagógico do computador.

Na segunda fase (início dos anos 1990), o uso de *softwares* gráficos para a realização de múltiplas representações de funções permitiu a popularização dos *softwares* de geometria dinâmica, baseados em experimentações, visualizações e demonstrações. Nesta fase, destacamos alguns dos *softwares* que despontaram como inovações educacionais como, por exemplo, o Cabri Géomètre, o Winplot, e o Maple, dentre outros.

A terceira fase (1999) compreende a promoção de cursos *online* à distância para a formação continuada de professores. Também faz parte desta fase as comunidades de aprendizagem, interação e colaboração *online*, por meio de recursos como Teleduc, e-mail, *chats* e os fóruns de discussão.

A quarta fase (2004) compreende a promoção dos *softwares* de geometria dinâmica (GD), o compartilhamento *online* de vídeos na internet, a consolidação de práticas formativas em ambientes virtuais de aprendizagem e o uso de tecnologias móveis, como *tablets* e *smartphones*.

No Quadro 2 descrito a seguir, apresentamos a partir da perspectiva de Borba, Silva e Gadanidis (2014), uma síntese das principais características de cada fase e como elas se complementaram neste período que abrange as últimas quatro décadas.

**Quadro 2** – Fases da Tecnologias Digitais em Educação Matemática

	<b>Tecnologias</b>	<b>Natureza ou base tecnológica das atividades</b>	<b>Perspectivas ou noções teóricas</b>	<b>Terminologia</b>
<b>Primeira fase (1985)</b>	Computadores; calculadoras simples e científicas.	LOGO Programação	Construcionismo; micromundo	Tecnologias informáticas (TI)
<b>Segunda fase (início dos anos 1990)</b>	Computadores (popularização); calculadoras gráficas.	Geometria dinâmica (Cabri Géomètre; Geometriks); múltiplas representações de funções (Winplot, Fun, Mathematica); CAS (Maple); jogos.	Experimentação, visualização e demonstração; zona de risco; conectividade; ciclo de aprendizagem construcionista; seres-humanos-com-mídias.	TI; software educacional; tecnologia educativa
<b>Terceira fase (1999)</b>	Computadores, laptops e internet.	Teleduc; e-mail; chat; forum; google.	Educação à distância online; interação e colaboração online; comunidades de aprendizagem.	Tecnologias da informação e comunicação (TIC)
<b>Quarta fase (2004)</b>	Computadores; laptops; tablets; telefones celulares; internet rápida.	GeoGebra; objetos virtuais de aprendizagem; Applets; vídeos; YouTube; WolframAlpha; Wikipédia; Facebook; ICZ; Second Life; Moodle.	Multimodalidade; telepresença; interatividade; internet em sala de aula; produção e compartilhamento online de vídeos; performance matemática digital.	Tecnologias digitais (TD); tecnologias móveis ou portáteis.

Fonte – (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p. 39)

Conforme ressaltam Borba, Silva e Gadanidis (2014), a evolução dessas tecnologias ao longo dos anos se deu de forma integrada e em sobreposição, onde as características presentes em uma fase serviam como base para o surgimento de outras fases. Com isso, a quarta e atual fase torna-se a mais completa dentre todas elas, uma vez que agrega em si as principais características das fases anteriores.

Neste sentido, a utilização dos recursos da quarta fase tem favorecido a promoção de práticas educativas diferenciadas, contribuindo também para o enfrentamento de situações adversas, como as relacionadas as medidas de isolamento social causadas pela pandemia de COVID-19.

Trata-se, portanto, de trazer à tona discussões que nos levem a pensar sobre como agir em meio a este cenário e propor soluções criativas e adequadas a cada situação de ensino. No caso específico dos *softwares* de geometria dinâmica *online*, a exemplo do GeoGebra



*Classroom*, enxergamos um enorme potencial para a construção do conhecimento a partir da interação com diferentes objetos de estudo.

A interface interativa destes programas também favorece o espaço para exploração e para experimentos de pensamento. A manipulação direta de objetos na tela do computador, com análise imediata da construção, faz com que o aluno procure entender o resultado de suas ações e assim questione suas conjecturas. Os softwares de geometria dinâmica propiciam atividades de investigação que organizam o processo de aprendizagem na forma de espiral com as etapas de ação, de formulação e de validação. [...] (MEIER; GRAVINA, 2012, p. CCLI).

Segundo Silva (2012, p. 35), “o arrastar permite que o estudante crie e explore suas próprias conjecturas”, assim favorece o desenvolvimento das habilidades investigativas a partir da análise imediata das propriedades gráficas observadas, conforme proposto nos documentos de orientação curricular.

Por outro lado, ressaltamos como imprescindíveis o estabelecimento de objetivos específicos bem definidos e atrelados às metodologias de ensino adequadas a cada situação, uma vez que os *softwares* de geometria dinâmica aplicados ao ensino de funções, por si só não garantem um aprendizado significativo se não considerarmos estas indicações.

Em face disso, concebemos esta pesquisa segundo as concepções de Henrique e Bairral (2019, p. 203), em que as atividades de caráter exploratório investigativo quando aplicadas em ambientes de geometria dinâmica podem favorecer a “formulação e verificação de conjecturas; e a observação com diferentes formas de visualização e representação (não estáticas) do objeto matemático”.

Neste sentido, compreendemos que o *software* de geometria dinâmica GeoGebra pode desempenhar no ensino de funções três importantes papéis: (a) confere a otimização do tempo para a realização de determinadas tarefas, o que contribui para a formulação, testagem e validação de hipóteses acerca de duas variáveis que se relacionam de forma unívoca; (b) permite a compreensão de forma dinâmica das relações estabelecidas entre o comportamento de um gráfico e as variáveis nele envolvidas; (c) e supera os limites impostos pelas tarefas de caráter estático, estabelecendo assim um nível maior de confiabilidade dos modelos construídos.

Essas potencialidades do *software* GeoGebra tem fomentado diversas pesquisas científicas no âmbito dos programas de Pós-graduação *stricto sensu*, as quais apontam possíveis caminhos pedagógicos acerca do pensar-com-tecnologias.

De acordo com pesquisa realizada no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), no período de 2008 a 2021 foram publicados cerca de 1106 trabalhos com algum tipo de menção ao *software* GeoGebra, o que

corresponde, em média, a 85 produções científicas por ano, entre dissertações de mestrado e teses de doutorado.

Esses trabalhos evidenciam as potencialidades do *software* GeoGebra para o ensino e aprendizagem dos mais variados assuntos. Entretanto, não foi observado, até então, nenhuma menção explícita a plataforma *Classroom* do GeoGebra, o que pode ser explicado pelo fato dessa plataforma ter surgido em um período ainda recente.

Para finalizarmos, apresentaremos na próxima seção os percursos metodológicos que embasaram a pesquisa, descrevendo em detalhes os recursos utilizados e a análise resultante da sua aplicação.

---

## 4 TRILHA METODOLÓGICA

Neste capítulo apresentamos uma síntese de todas as etapas de realização da pesquisa, o que inclui: (a) o contexto em que se deu a pesquisa; (b) os materiais e métodos aplicados na sua realização – (produto educacional, descrição das atividades propostas, produção e análise de dados); e (c) a descrição dos objetivos de cada artigo produzido com a realização das atividades propostas.

### 4.1 O contexto da pesquisa

Antes de adentrarmos ao contexto da presente pesquisa, nos convém ressaltar as contribuições de um grupo formado por pesquisadores mestrandos do PPGECM/UFU e por alunos de iniciação científica do Curso de Licenciatura em Matemática do Campus Pontal da UFU. A criação deste grupo de pesquisa, cujo coordenador também orienta cada um dos seus integrantes, surgiu visando o aprendizado mútuo e compartilhado a partir das pesquisas em andamento de cada participante, aborda-se no grupo, mais especificamente, as experiências de cada pesquisador, os materiais produzidos e as metodologias de pesquisa aplicada em cada trabalho.

Isso permitiu a realização de adequações pontuais na pesquisa e também a possibilidade de efetivamente aplicá-la na prática, uma vez que não estava exercendo a docência no momento. Nesta ocasião, uma das professoras integrantes do grupo se prontificou a aplicar as atividades com seus alunos, o que contribuiu com o desenvolvimento da pesquisa de forma conjunta, na qual também assumi o papel de observador participante.

O “observador como participante” é um papel em que a identidade do observador e os objetivos do estudo são revelados ao grupo pesquisado desde o início. Nessa posição, o pesquisador pode ter acesso a uma gama variada de informações, até mesmo confidenciais, pedindo cooperação ao grupo. Contudo, terá em geral que aceitar o controle do grupo sobre o que será ou não tornado público pela pesquisa (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 29).

---

Ao todo participaram da pesquisa cerca de onze alunos de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular do município de Monte Alegre de Minas, situada no Triângulo Mineiro e distante cerca de 600 km da capital Belo Horizonte. Conforme descrito no início deste trabalho, essa turma era composta por apenas onze alunos, não havendo assim a necessidade de seleção de participantes ou a sua divisão em subgrupos.

Por medidas de precaução em virtude da pandemia de COVID-19, a realização da pesquisa ocorreu de forma totalmente remota, mediada pela plataforma de videoconferência Google *Meet*. Nesta ocasião, eu estava na capital do estado de Minas Gerais em Belo Horizonte, e mesmo assim pude interagir e acompanhar em tempo real a participação de cada um dos alunos em Monte Alegre de Minas. Desta forma se estabeleceu um ambiente de pesquisa o mais natural possível, mesmo à distância,

A realização da pesquisa se deu a partir da utilização de recursos dos próprios alunos, incluindo o acesso à internet e o uso de computadores pessoais e celulares *smartphones*. Assim, não houve a necessidade de custos ou despesas para nenhuma das partes, uma vez que o uso destes recursos pelos alunos era algo recorrente na dinâmica de ensino adotada pela escola.

A proposição das atividades foi realizada em dois dias consecutivos, sendo conduzida pela professora da turma e observada por mim, enquanto pesquisador. Nesta ocasião também ofereci o suporte necessário para sanar as dúvidas relativas a interpretação das questões e no manuseio dos recursos da plataforma GeoGebra. Essa interação foi importante para revisar o produto educacional que era também objeto de estudo nesta pesquisa.

No primeiro dia foram necessárias três aulas de cinquenta minutos para a realização da primeira atividade, cujo tema abordava o consumo consciente de água a partir da análise das contas de água dos próprios alunos. A organização de três aulas de matemática no mesmo dia advém do planejamento pedagógico da própria escola, no qual ficou definido que duas aulas consecutivas dessa disciplina seriam ministradas no início da manhã e a última aula no final da manhã.

Já no segundo dia foram necessárias duas aulas para a realização da segunda atividade, que abordou o tratamento de resíduos sólidos por meio de um estudo acerca da viabilidade de construção de reservatórios de chorume no aterro controlado do município.

Ao final das atividades cada um dos alunos respondeu a um questionário de avaliação, cujo objetivo consistia em evidenciar as suas percepções acerca de pontos positivos e negativos das atividades propostas bem como pelas contribuições que elas trouxeram para o

seu próprio aprendizado sobre funções e para a sua conscientização acerca das questões sociais abordadas.

#### 4.2 Síntese do produto educacional

O produto educacional que integra esta pesquisa foi estruturado a partir de três diferentes módulos: (a) Módulo I – GeoGebra *Classroom*: instruções de uso; (b) Módulo II – Consumo consciente de água: conhecer para preservar; e (c) Módulo III – Tratamento de resíduos sólidos: responsabilidade com a preservação do meio ambiente.

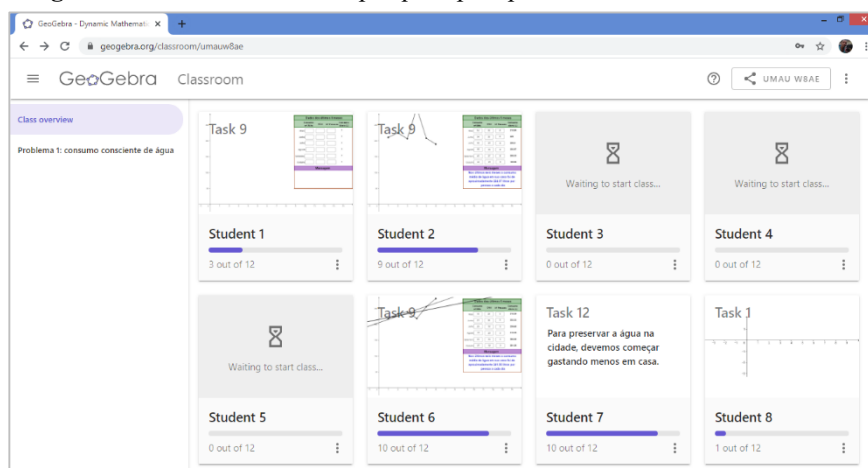
No primeiro módulo foram apresentadas todas as instruções de uso da plataforma GeoGebra *Classroom*, o que inclui: (a) as orientações básicas sobre como criar uma conta de usuário com perfil de acesso aos recursos da plataforma *Classroom*; (b) a descrição dos procedimentos necessário para produção de materiais didáticos; e (c) as orientações específicas sobre a disponibilização destes materiais dentro da própria plataforma *Classroom*.

Por outro lado, o segundo e terceiro módulo possuem características similares, nos quais foram apresentados os objetivos específicos de cada atividade, com orientações expressas acerca da sua aplicação. Essas orientações se constituem como suporte para a reprodução das atividades propostas, as quais poderão ser reformuladas e adaptadas para outros contextos, caso necessário.

#### 4.3 Produção e análise de dados

Os dados da pesquisa foram produzidos por meio da plataforma do GeoGebra *Classroom*, na medida em que as tarefas eram respondidas. Na Figura 1 é possível ter uma noção de como os dados produzidos pelos alunos foram organizados dentro da plataforma *Classroom*, o que inclui o progresso dos alunos em cada tarefa, acompanhado em tempo real.

**Figura 1** – Coleta de dados da pesquisa pela plataforma GeoGebra *Classroom*



Fonte – Arquivo pessoal do autor (2021)

De posse destas informações e das gravações em vídeo de toda aplicação da pesquisa, foi realizada a análise das respostas de cada aluno por meio da tabulação de dados e da criação de categorias específicas para cada situação abordada. Esta análise se deu a partir da metodologia de análise de conteúdo, definida por Bardin (1977) como:

um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 1977, p. 42).

Isso nos permitiu tomar conhecimento sobre possíveis consistências e fragilidades no processo de aprendizagem, não apenas de caráter conceitual mas também de caráter procedimental. A análise dos dados foi organizada de modo a preservar a identidade de cada um dos alunos participantes, o que foi assegurado por meio da utilização das expressões “Aluno n°” ou “Al. n°” (abreviatura da palavra “Aluno”, seguido de um número sequencial), em substituição aos seus respectivos nomes.

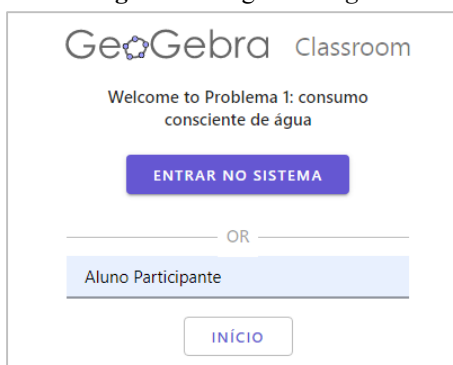
Essa medida visa assegurar os critérios de confidencialidade da pesquisa, em conformidade com o disposto no projeto submetido ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UFU, registrado na Plataforma Brasil de acordo com o número de Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE), Nº 39119520.0.0000.5152.

#### 4.3.1 Problema 1: consumo consciente de água

A realização desta atividade se deu de forma totalmente *online*, por meio da plataforma GeoGebra *Classroom*. Para isso foi disponibilizado aos alunos, por meio do *chat* do Google *Meet*, o *link* de acesso a atividade “Consumo Consciente de água”, disponível em: <https://www.geogebra.org/classroom/umauw8ae>.

Antes de acessá-la, cada um dos participantes da pesquisa precisou criar um nome de usuário na página de *login*, conforme podemos ver na Figura 2. Nesta mesma ocasião foi sugerida a utilização de nomes fictícios para a preservação da identidade de cada participante.

**Figura 2** – Página de *login*



Fonte – Arquivo pessoal do autor (2021)

Após a criação dos *logins* foi liberado o acesso dos participantes ao ambiente virtual da atividade, cujos objetivos e instruções específicas de como proceder na resolução de cada tarefa foram apresentados desde o início. Quanto ao uso da expressão “tarefa”, justificamos que a sua utilização faz parte do padrão criado pelo GeoGebra *Classroom* para se referir a qualquer tipo de “questão”, assim, manteremos esta expressão, mas apoiada em seu significado enquanto “questão”.

Conforme observado na Figura 3, apresentamos no início desta atividade uma contextualização do problema e uma planilha com os valores tarifários de água e esgoto cobrados na cidade de Monte Alegre de Minas, de acordo com cada faixa de consumo. Nesta planilha nós também apresentamos, como exemplo, uma simulação das tarifas cobradas pelo consumo de 41m<sup>3</sup>.

**Figura 3** – Contextualização do problema e descrição dos valores tarifários de água e esgoto

Aluno Participante

Problema 1: consumo consciente de água

Você já parou para analisar a conta de água da sua casa? Sabe como é calculado o valor referente a cada mês? Bom, estas perguntas podem nos ajudar a saber se estamos praticando o consumo consciente de água ou não. Nesta tarefa nós vamos te ajudar a pensar um pouco sobre estas questões, de modo que você possa utilizar o seu conhecimento e contribuir para o consumo consciente de água em sua própria casa. É importante lembrar que o valor cobrado pelo consumo de água é determinado pela legislação de cada município. Observe na planilha abaixo as tarifas de água e esgoto para consumo residencial em Monte Alegre de Minas/MG.

Planilha 1: Descrição das tarifas de água para consumo residencial em Monte Alegre de Minas/MG

Categoria residencial de consumo de água							
Faixas de consumo (m³)	Fator (m³)	Tarifa de água	Tarifa de esgoto	Tarifa Básica de Operação		m³	Valor cobrado em cada faixa
				TBO Água	TBO Esgoto		
1	0	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 18,44	R\$ 5,93	0	R\$ 24,37
2	1 a 5	R\$ 0,70	R\$ 0,23			5	R\$ 4,65
3	6 a 10	R\$ 0,73	R\$ 0,23			5	R\$ 4,80
4	11 a 15	R\$ 1,66	R\$ 0,53			5	R\$ 10,95
5	16 a 20	R\$ 2,29	R\$ 0,71			5	R\$ 15,00
6	21 a 25	R\$ 2,40	R\$ 0,77			5	R\$ 15,85
7	26 a 30	R\$ 2,88	R\$ 0,92			5	R\$ 19,00
8	31 a 40	R\$ 3,65	R\$ 1,17			10	R\$ 48,20
9	41 a 99999	R\$ 4,73	R\$ 1,52			1	R\$ 6,25
Simulação						Total	R\$ 149,07
Consumo em (m³)		41					

Fonte: Prefeitura Municipal de Monte Alegre de Minas/MG

Fonte – Arquivo pessoal do autor (2021)

De acordo com esta planilha, o valor cobrado em cada faixa de consumo é calculado da seguinte forma: (Tarifa de água + Tarifa de esgoto) \* Fator (m<sup>3</sup>). Entretanto, é importante ressaltar que, para efeito de cálculo, a quantidade total de m<sup>3</sup> consumidos durante um mês não é concentrada em apenas uma faixa de consumo, mas sim distribuída entre elas, em estilo cascata.

Se o consumo de água durante um determinado mês fosse de 13m<sup>3</sup>, por exemplo, procederíamos com os cálculos da seguinte forma:

$$13 \text{ m}^3 = (0 \text{ m}^3 \text{ na faixa 1}) + (5 \text{ m}^3 \text{ na faixa 2}) + (5 \text{ m}^3 \text{ na faixa 3}) + (3 \text{ m}^3 \text{ na faixa 4})$$

$$\text{Total} = \text{R\$ } 24,37 + \text{R\$ } 4,65 + \text{R\$ } 4,80 + \text{R\$ } 6,57 = \text{R\$ } 40,39$$

Neste exemplo, o valor correspondente a R\$ 24,37 refere-se a (TBO Água + TBO Esgoto), que é uma taxa fixa que será cobrada independentemente de consumo. Já o valor

correspondente a R\$ 6,57, referente ao consumo de 3m<sup>3</sup> na faixa 4, foi obtido a partir da soma das tarifas de água e esgoto (R\$ 1,66 + R\$ 0,53), multiplicado pelo fator 3.

Os cálculos referentes a este exemplo também foram integrados ao problema, e são apresentados como informações adicionais logo abaixo da Planilha 1. Isso permitiu uma melhor compreensão do algoritmo de cálculo utilizado nas contas de água.

Com base nestas informações os alunos precisaram preencher a planilha disponível na Tarefa 1 (Figura 4), e inserir na coluna B os valores cobrados por cada m<sup>3</sup> correspondente, conforme indicado na coluna A. Dentre os alunos participantes, apenas um deles (Aluno 9) não preencheu as informações constantes na referida planilha.

**Figura 4** – Simulações de consumo faturado

← Aluno Participante This is just

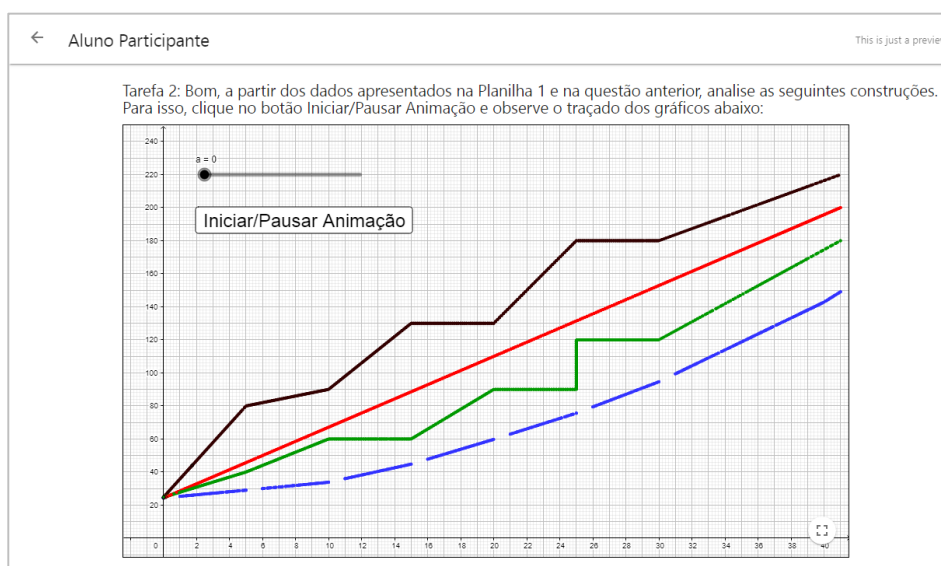
Tarefa 1: Com base nas informações da Planilha 1, preencha a coluna B com os valores cobrados por cada m<sup>3</sup> correspondente.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Consumo em (m <sup>3</sup> )	Valor cobrado						
2	0m <sup>3</sup>	24.37						
3	5m <sup>3</sup>							
4	10m <sup>3</sup>							
5	15m <sup>3</sup>							
6	23m <sup>3</sup>							
7	25m <sup>3</sup>							
8	31m <sup>3</sup>							
9	40m <sup>3</sup>							
10								
11								

Fonte – Arquivo pessoal do autor (2021)

A resolução desta tarefa teve duas finalidades: (a) permitir aos alunos a compreensão do algoritmo de cálculo da fatura de água, por meio de diferentes simulações; e (b) auxiliar na identificação do gráfico correspondente aos dados desta planilha (Figura 5), conforme quatro opções de resposta indicadas na Tarefa 2.

**Figura 5** – Análise de gráficos



Fonte – Arquivo pessoal do autor (2021)



Com base no conhecimento prévio sobre o conceito de função e na análise de cada um destes gráficos, a partir das simulações realizadas na Tarefa 1, os alunos tiveram que responder a quatro questões, sendo duas questões objetivas de múltipla escolha e duas questões discursivas.

Convém ressaltar, entretanto, que neste primeiro momento apresentaremos, aqui na dissertação, apenas duas destas questões, por meio das quais descreveremos como elas se relacionam com os dados da Tarefa 1. Posteriormente apresentaremos outras três questões, e as demais serão tratadas em maiores detalhes no artigo 1.

No Quadro 3 apresentado a seguir foram tabuladas as respostas dos alunos nas tarefas 1 e 5, cujo principal objetivo estava em relacionar duas diferentes formas de representar uma função, ou seja, a sua representação em forma de “tabela” ou “planilha” e a sua respectiva representação “gráfica”.

**Quadro 3** – Apresentação dos dados referentes as tarefas 1 e 5

Tarefa 1: relação entre m <sup>3</sup> consumidos e valor cobrado												
Gabarito		Respostas dos alunos										
Cons. m <sup>3</sup>	Valor	Al. 1	Al. 2	Al. 3	Est 4	Al. 5	Al. 6	Al. 7	Al. 8	Al. 9	Al. 10	Al. 11
0 m <sup>3</sup>	24.37	24.37	24.37	24.37	24.37	24.37	0.00	24.37	24.37		24.37	24.37
5 m <sup>3</sup>	29.02	29.02	29.02	29.02	29.02	29.02	29.02	29.38	29.02		29.02	29.02
10 m <sup>3</sup>	33.82	33.82	33.82	33.82	33.82	33.82	33.82	34.18	33.82		33.82	33.82
15 m <sup>3</sup>	44.77	44.77	44.77	44.77	44.77	44.77	44.77	45.15	44.77		44.77	44.77
23 m <sup>3</sup>	69.28	64.48	59.77	59.77	64.48	64.48	59.77	64.48	64.48		59.77	59.77
25 m <sup>3</sup>	75.62	75.62	73.64	75.62	75.62	75.62	75.62	15.85	75.62		75.62	75.62
31 m <sup>3</sup>	99.44	98.42	94.62	94.62	98.42	98.42	94.62	98.42	98.42		94.62	94.62
40 m <sup>3</sup>	142.82	142.82	142.82	48.20	142.82	142.82	142.82	142.82	142.82		142.82	142.82
% Acertos		75%	62.5%	62.5%	75%	75%	62.5%	25%	75%		75%	75%
% Erros		25%	37.5%	37.5%	25%	25%	37.5%	75%	25%		25%	25%

Tarefa 5: identificação do gráfico correspondente aos dados da Tarefa 1												
Gabarito		Respostas dos alunos										
	Gráfico	Al. 1	Al. 2	Al. 3	Est 4	Al. 5	Al. 6	Al. 7	Al. 8	Al. 9	Al. 10	Al. 11
A	Preto				X			X				
B	Vermelho						X				X	
C	Verde		X									
D	Azul	X		X		X			X	X		X

Fonte – Arquivo pessoal do autor (2021)

Conforme podemos observar nos dados da Tarefa 1, dos dez alunos que utilizaram o algoritmo para cálculo do consumo faturado de água, seis obtiveram um percentual de 75% de acerto, três alunos obtiveram outros 62,5% de acerto e apenas um aluno obteve 25% de acerto nesta tarefa. Embora as informações da Planilha 1 (Figura 3) favorecessem os cálculos para simulações de múltiplos de cinco, percebemos que o mesmo não ocorreu para as simulações de 23m<sup>3</sup> e de 31m<sup>3</sup>.

O valor correspondente a  $23\text{m}^3$  equivale a R\$ 69,28, o que pode ser obtido da seguinte forma:  $\text{R\$ } 59,77 + 3*(\text{R\$ } 2,40 + \text{R\$ } 0,77) = \text{R\$ } 69,28$ , ou seja, (valor cobrado por  $20\text{m}^3$  nas cinco primeiras faixas de consumo) +  $3*(\text{Tarifa de água} + \text{Tarifa de esgoto cobradas na sexta faixa de consumo})$ .

Entretanto, verificamos que o valor R\$ 59,77 foi apresentado como resposta cinco vezes e o valor R\$ 64,48 outras cinco vezes. No primeiro caso percebe-se claramente que o valor apresentado corresponde apenas a  $20\text{m}^3$ , ou seja, o somatório dos valores cobrados nas cinco primeiras faixas de consumo.

No segundo caso compreendemos que o valor de R\$ 64,48 foi obtido da seguinte forma:  $\text{R\$ } 59,77 + \text{R\$ } 2,40 + 3*(\text{R\$ } 0,77) = 64,48$ . Neste caso o erro se deu por não incluir o resultado do produto de R\$ 2,40 pelo fator 3.

Quanto ao consumo de  $31\text{m}^3$  são cobrados cerca de R\$ 99,44, obtido da seguinte forma:  $\text{R\$ } 94,62 + 1*(\text{R\$ } 3,65 + \text{R\$ } 1,17) = \text{R\$ } 99,44$ , ou seja, (valor cobrado por  $30\text{m}^3$  nas sete primeiras faixas de consumo) +  $1*(\text{Tarifa de água} + \text{Tarifa de esgoto cobradas na oitava faixa de consumo})$ .

Neste caso, o valor de R\$ 94,62 correspondente a  $30\text{m}^3$  pôde ser verificado cinco vezes como respostas dos alunos, já o valor referente a R\$ 98,42 aparece outras cinco vezes. Para chegar a esta resposta os alunos realizaram os seguintes cálculos:  $\text{R\$ } 94,62 + \text{R\$ } 2,88 + \text{R\$ } 0,92 = 98,42$ .

Estes cálculos estariam corretos se não fosse por um pequeno detalhe, os valores R\$ 2,88 e R\$ 0,92, utilizados pelos alunos correspondem, respectivamente, as tarifas de água e esgoto da sétima faixa de consumo, quando deveria ser da oitava faixa.

Ao analisarmos as relações estabelecidas pelos alunos entre os dados da Tarefa 1 com os gráficos da Tarefa 2, podemos verificar que dos nove alunos em que percentual de acerto na Tarefa 1 foi maior igual a 62,5%, apenas cinco conseguiram identificar corretamente o gráfico correspondente aos dados apresentados.

Conforme dito anteriormente, apenas o Aluno 9 não realizou os cálculos da Tarefa 1, em virtude disso resolvemos desconsiderar, para efeito de análise, as suas resoluções nas tarefas subsequentes, sobretudo as que mantinham relação direta com os dados apresentados na planilha da referida Tarefa.

Para compreendermos como os alunos organizaram o seu conhecimento para resolver esta questão, apresentamos no Quadro 4 descrito a seguir, as justificativas que cada um deles utilizou para embasar as suas respostas. Para isso utilizamos quatro categorias específicas, formuladas de acordo com os aspectos mais evidentes na justificativa de cada aluno.

**Quadro 4** – Justificativas apresentadas pelos alunos na Tarefa 5

Aluno	Categoria 1	Categoria 2	Categoria 3	Categoria 4
	Relacionou os dados da planilha com o gráfico de forma adequada e justificou de forma coerente	Relacionou os dados da planilha com o gráfico de forma adequada, mas justificou de forma incoerente	Relacionou os dados da planilha com o gráfico de forma inadequada, mas justificou de forma coerente	Relacionou os dados da planilha com o gráfico de forma inadequada e justificou de forma incoerente
Aluno 1	Porque é o gráfico que os números mais batem.			
Aluno 2			Pois não apresentou uma queda de valor. O gráfico que representa a tabela tem que apenas crescer.	
Auno. 3		Pois é utilizado uma reta crescente.		
Aluno 4			Porque ele segue os dados apresentados.	
Aluno 5	Pois mostra certinho os pontos.			
Aluno 6				Pois é o mais reto, assim mais fácil de visualizar e interpretar o gráfico.
Aluno 7				Pois os dados têm diferenças similares a reta preta.
Aluno 8	Pois é o que os números mais se assemelham.			
Aluno 9				
Aluno 10			Pois se eu traçar outra reta ela cruzara em apenas um ponto.	
Aluno 11	Pois os dados apresentados na atividade 1, foram bem colocados na 2, foram marcados exatamente no valor certo.			

Fonte – Arquivo pessoal do autor (2021)

Na primeira categoria podemos perceber que o propósito da Tarefa 1 foi devidamente cumprido, uma vez que a relação entre (Consumo ( $m^3$ )) X (Valor a pagar (R\$)), auxiliou os alunos 1, 5, 8 e 11 a identificar corretamente o gráfico correspondente. Isso se evidencia em suas próprias falas, quando ressaltam a exatidão pela forma como estas duas representações do conceito de função se relacionam.

Por outro lado, nas categorias 2, 3 e 4 pudemos verificar o peso que as palavras “reta” e “crescente” têm nas justificativas dos alunos 2, 3, 6, 7 e 10. Neste caso, compreendemos que a concepção que estes alunos têm sobre o conceito de função está atrelada a algumas características das funções polinomiais do primeiro grau, este foi um “parâmetro” utilizado por eles para julgar se um determinado gráfico representa ou não uma função.

De modo geral pretendíamos analisar nestas questões o desenvolvimento da habilidade (EM13MAT501), referente às orientações curriculares da BNCC para o Ensino Médio. Esta habilidade reflete a capacidade dos alunos em “investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, [...]” (BRASIL, 2017, p. 541).

Neste contexto, os processos de mediação realizados pelo professor podem contribuir para que os alunos mobilizem os seus conhecimentos prévios com vistas ao alcance desta ou de outras habilidades, conforme observado na resolução da Tarefa 7, em que os alunos foram instigados a generalizar por meio de uma lei de formação ou representação algébrica de uma função, o comportamento das variáveis na primeira faixa de consumo de água, referente ao intervalo de  $1 \text{ m}^3$  a  $5 \text{ m}^3$ . Apresentamos a seguir a transcrição da referida Tarefa e os diálogos entre a professora e um dos alunos participantes.

*Tarefa 7 – Vamos pensar um pouco? Diga qual seria a representação algébrica de uma função para o intervalo de consumo de  $1 \text{ m}^3$  a  $5 \text{ m}^3$ ?*

*Transcrição dos diálogos.*

*(Al. 6) O meu falta só a 7, que eu estou em dúvida. O resto eu fiz tudo.*

*(Professora) O que é uma expressão algébrica?*

*(Al.6) É a  $f(x)$ ?  $f(x) = ax + b$ .*

*(Professora) Beleza, você vai ter que fazer alguma coisa nesse sentido, entendeu? Algébrica é isso, é você escrever em função de  $x$ . E aí você vai tentar pensar em uma função. Você lembra quando mexe no “ $b$ ”, quando mexe no “ $a$ ”, o que é que acontece?*

*(Al. 6) Se eu não me engano o “ $a$ ” era a inclinação da reta, eu acho, não é?*

Esse processo de mediação realizado pela professora, baseado na formulação de pergunta sobre pergunta e não na indicação de respostas prontas, permitiu a este aluno mobilizar o seu próprio conhecimento prévio para responder a suas próprias indagações.

Conforme proposto pela BNCC, espera-se que nesta etapa do ensino básico os alunos saibam “compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis” (BRASIL, 2017, p. 317).

Isso perpassa pela superação de alguns empecilhos do processo de ensino e aprendizagem que dificultam a compreensão do conceito de função como, por exemplo:

1) a abordagem estática: quando o ensino do conceito privilegia aspectos estruturais e pouca ênfase é dada às suas aplicações; 2) ênfase quase exclusiva na representação analítica: um trabalho intensivo com fórmulas é realizado, ao ponto de o aprendiz conceber que função é uma fórmula e; 3) acréscimo de terminologias novas para identificar cada representação: dentro de cada representação criam-se macetes para saber identificar se uma tabela, gráfico ou diagrama representam o conceito de

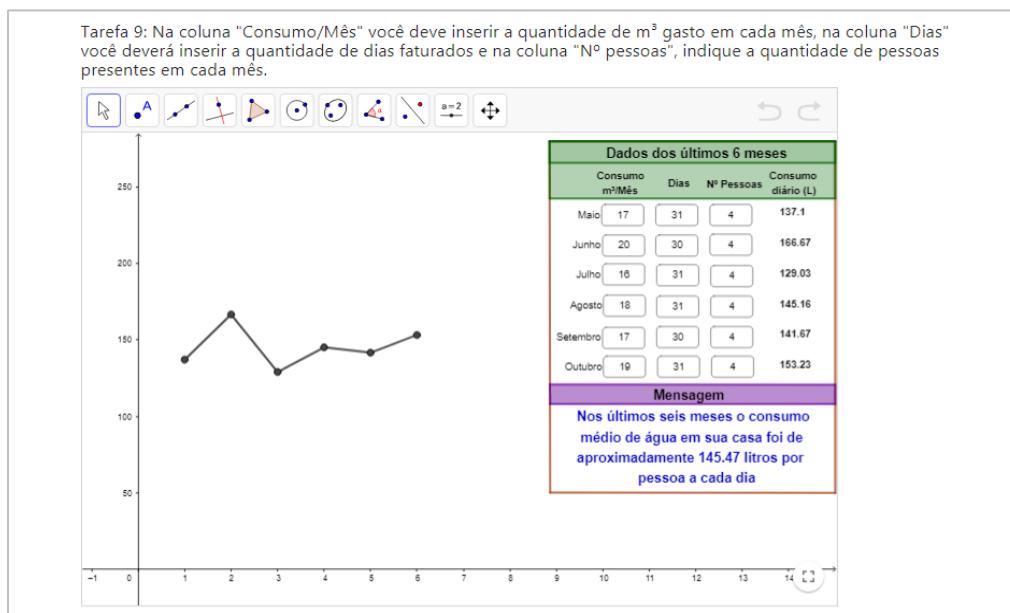
função, como se cada representação tivesse sua própria definição de função (SOUZA; SOUZA, 2018, p. 126).

Segundo os autores, para que o aprendizado dos alunos se torne significativo para eles é preciso “operacionalizar” o conceito de função por meio da “articulação” entre as suas diferentes formas de representação. Neste sentido, os alunos podem se apropriar do conceito de função para “identificar/explicar, baseando-se na definição dada, se determinada tabela, diagrama ou gráfico representa uma função, além de conseguir identificar relações funcionais entre variáveis” (SOUZA; SOUZA, 2018, p. 127).

Compreendemos, entretanto, que a abordagem do conceito de função a partir de situações problemas pode dar mais sentido as suas aplicações, provando a sua importância para a compreensão de fenômenos físicos, naturais e socioeconômicos. Neste último caso, ressalta-se a exploração de situações a partir da realidade em que vivem os próprios alunos, ou seja, aquilo que lhes é tangível no dia-a-dia.

Em face disso foi proposto na Tarefa 9 um estudo sobre o histórico de consumo per capita de água nas residências de cada aluno. Nesse estudo foram utilizadas informações reais obtidas por meio da leitura das suas próprias faturas de água, as quais foram posteriormente inseridas no formulário ilustrado na Figura 6.

**Figura 6** – Análise de consumo per capita de água

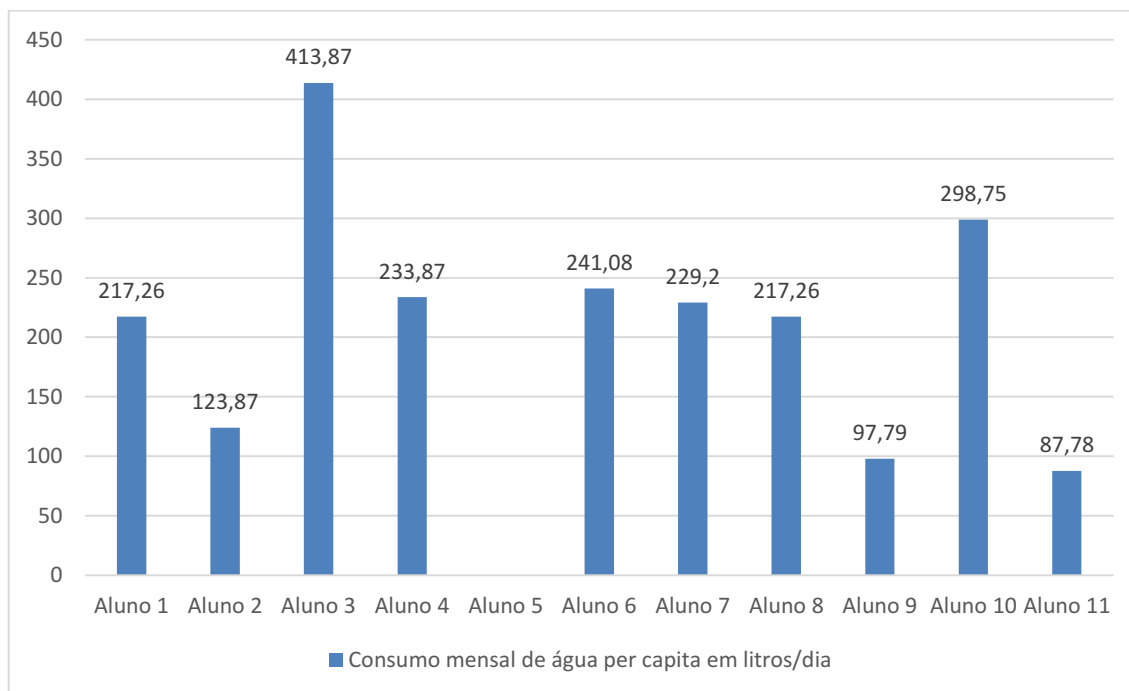


Fonte – Arquivo pessoal do autor (2021)

No preenchimento desse formulário foram solicitadas três diferentes informações: (a) o consumo de metros cúbicos de água dos últimos seis meses; (b) a quantidade de dias faturados; e (c) a quantidade de pessoas presentes na residência durante cada mês.

No Gráfico 1 apresentado a seguir foram tabuladas as informações referentes ao consumo médio per capita residencial de cada aluno durante o período analisado. Nesse gráfico excetua-se apenas as informações referentes ao Aluno 5, cuja resolução da Tarefa 9 não foi apresentada.

**Gráfico 1** – Consumo médio per capita de cada aluno em litros/dia



Fonte – Arquivo pessoal do autor (2021)

De acordo com o Plano Municipal de Saneamento Básico (PMSB) do município de Monte Alegre de Minas, elaborado em 2015 pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU), o consumo médio de água por pessoa estimado para este ano de 2015 foi de 268 litros por dia, um valor muito acima dos 110 litros per capita recomendado pela Organização das Nações Unidas (ONU).

Ao analisarmos os dados deste gráfico, verificamos que o consumo médio de água na casa destes alunos é de aproximadamente 216 litros/dia por pessoa, um valor abaixo do registrado em 2015 no PMSB de Monte Alegre de Minas, mas acima do recomendável pela ONU.

Em virtude disso foi proposto na Tarefa 12 uma reflexão sobre como estes alunos interpretam o dever que eles e seus familiares têm na preservação dos recursos hídricos da sua própria cidade a partir da adoção de hábitos de consumo sustentável de água. No Quadro 4 apresentado a seguir foram organizadas as respostas de cada aluno de acordo com suas próprias reflexões.

**Quadro 5** – Respostas dos alunos na Tarefa 12

Alunos	Respostas dos alunos
Aluno 1	Economizar água para ajudar e preservar as gerações futuras
Aluno 2	Gastar apenas o necessário, sem gastar mais o que se necessita.
Aluno 3	Devemos começar a reduzir o consumo de água, pois o gasto da minha casa pode ser utilizado em até 3 casas
Aluno 4	Percebi que nós gastamos mais água do que deveríamos e devemos repensar sobre algumas atividades feitas em minha casa.
Aluno 5	
Aluno 6	Com a análise do gráfico, percebi que eu e meus familiares não tem hábitos de economizar água, pois deu mais que o dobro de consumo do recomendável pela ONU. A partir da análise do gráfico, percebi que eu e meus familiares não tem muitos hábitos de preservação de recursos hídricos.
Aluno 7	Não gastamos água atoa
Aluno 8	Para preservar a água na cidade, devemos começar gastando menos em casa.
Aluno 9	
Aluno 10	Por vivermos em uma cidade que não tem escassez de água, eu e minha família infelizmente meio que abusamos dessa "vantagem" o que devemos mudar para um consumo mais consciente.
Aluno 11	Acho importante não só pelo valor que é pago pelo tanto gasto mas também pelo fato de que se cada um contribuir com sua parte o mundo mudará muito e isso contribui para evolução do mundo e a água não irá acabar tão rápido se diminuirmos os gastos.

Fonte – Arquivo pessoal do autor (2021)

A análise crítica da realidade vivenciada em suas próprias casas, suscitou discussões sobre como estes alunos enxergam os dados por eles analisados, refletindo, sobretudo, em mudanças de hábitos nos casos em que fosse necessário.

Isso vai de encontro com o processo de alfabetização matemática ou “*matemacia*”, que segundo a Educação Matemática Crítica

[...] pode dar condições para que o sujeito consiga aplicar os conhecimentos em diferentes contextos, de forma a se reconhecer e agir como cidadão crítico. Para isso, propõe o conhecimento das habilidades matemáticas, o conhecimento das tecnologias e o conhecimento reflexivo, os quais são fundamentais para que a aplicação da matemática seja compreendida (SKOVSMOSE, 2008 *apud* PIZZOLATTO; PONTAROLO; BERNARTT, 2020, p. 310).

Neste sentido, esperamos que todo o estudo até aqui realizado possa de fato contribuir, não apenas para o aprendizado do conceito de função, mas também para a adoção de medidas de consumo sustentável de água e a conscientização acerca da responsabilidade de cada um na preservação dos recursos hídricos.

#### 4.3.2 Problema 2: tratamento de resíduos sólidos

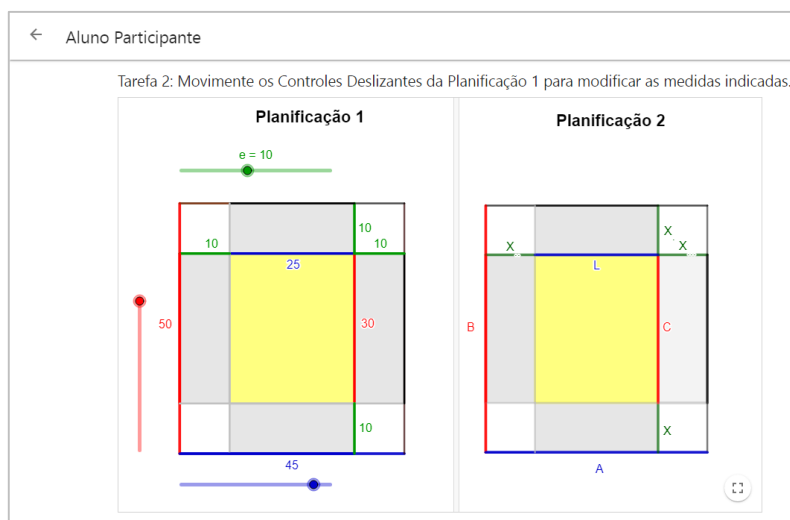
A aplicação dessa atividade se deu no segundo dia de realização da pesquisa, em duas aulas consecutivas de cinquenta minutos. Participaram da atividade apenas dez alunos, os quais receberam por meio do chat do Google *Meet* o link de acesso à atividade, disponível em: <https://www.geogebra.org/classroom/rgwym9v>.

Com vistas a contextualização dos problemas relacionados ao descarte inadequado de resíduos sólidos, foi inserido no início da atividade um vídeo com uma reportagem sobre as consequências do chorume para o meio ambiente, abordando também possíveis soluções tecnológicas para o seu tratamento. Esse líquido é altamente poluente e resulta da decomposição de matéria orgânica em contato com o solo, acarretando assim a contaminação dos lençóis freáticos.

A solução para este problema perpassa pela implantação de parques sanitários para tratamento de resíduos sólidos, o que compreende a instalação de biodigestores e a construção de reservatórios de coleta e tratamento de chorume. Com base nessas informações, foi incluído na atividade as diferentes representações geométricas de um reservatório de chorume, tanta na versão planejada como na sua versão 3D.

Essas representações foram exploradas pelos alunos com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico e a compreensão das relações funcionais envolvidas nos modelos geométricos construídos. Conforme apresentado na Figura 7 foram utilizadas duas planificações, a primeira com dimensões numéricas e a segunda com dimensões algébricas.

**Figura 7** – Planificações de um reservatório de chorume



Fonte – Arquivo pessoal do autor (2021)

À medida que os controles deslizantes da Planificação 1 eram modificados, automaticamente as dimensões da Planificação 2 também eram modificadas, de forma simultânea. Essas modificações facilitaram o entendimento de como a variável  $X$  se relacionava com as medidas de comprimento e largura da Planificação 2, tanto que nas resoluções das tarefas 3 e 4 houve um aproveitamento de 100% de acerto, o que corrobora com o entendimento de Silva (2012) sobre as implicações que o arrastar, tão comum nos *softwares* de geometria dinâmica, pode trazer para os processos de investigação.



Salientamos entretanto, que a simples utilização do *software* GeoGebra por si só não propicia o aprendizado com conseqüente desenvolvimento do pensamento algébrico. A organização que o professor propõe desse ensino, com os instrumentos devidamente escolhidos, com as mediações, as perguntas e as reflexões que ele pode provocar é que vão possibilitar as contribuições do *software* GeoGebra para o aprendizado dos alunos.

Nas referidas tarefas 3 e 4, os alunos foram instigados a relacionar, respectivamente, as medidas de largura e comprimento do reservatório com a variável X, as quais foram expressas por  $L = A - 2X$  e  $C = B - 2X$ . Com base nessas resoluções os alunos puderam esboçar uma fórmula geral para o volume do reservatório, conforme observado no Quadro 6 apresentado a seguir.

**Quadro 6** – Tabulação dos dados apresentados na Tarefa 5

Tarefa 5: Utilize as respostas das tarefas 3 e 4 com os devidos valores da largura (L) e do comprimento (C), e defina uma expressão algébrica para o volume de um reservatório com as mesmas dimensões, lembrando que a altura também será indicada por X.		
Gabarito	$V = (AB)X - 2AX^2 - 2BX^2 + 4X^3$ ou $V = (AB)X - 2(A + B)X^2 + 4X^3$ $V = 4X^3 - 2(A + B)X^2 + (AB)X$	
Aluno	Resolução dos alunos	Considerações preliminares
Al.4	Não apresentou nenhuma resolução referente a essa tarefa	
Al.7	$V = 31 \cdot 36 \cdot X \rightarrow V = 1116 \cdot X$	Apresentaram uma expressão baseada apenas em valores numéricos.
Al.10	$V = 1116 \cdot X$	
Al.1	$V = [(a - 2x) \cdot (b - 2x)] \cdot x$	
Al.2	$V = [(a - 2x) \cdot (b - 2x)] \cdot x$	Organizaram de forma adequada as informações obtidas nas tarefas 3 e 4, porém não apresentaram os cálculos algébricos.
Al.5	$V = [(a - 2x) \cdot (b - 2x)] \cdot x$	
Al.8	$V = [(a - 2x) \cdot (b - 2x)] \cdot x$	
Al.9	$V = L \cdot C \cdot X \rightarrow V = [(A - 2x) \cdot (B - 2x)] \cdot X$ $V = [AB + 2AX + 2BX - 4X^2] \cdot X$	Expressão algébrica parcialmente adequada (erro na inversão de sinais).
Al.3	$V = (A - 2x)(B - 2x)x \rightarrow V = (AB - 2Ax - 2Bx + 4x(2))x$ $V = ABx - 2Ax(2) - 2Bx(2) + 4x(3)$	Desenvolveram adequadamente a expressão algébrica para o volume do reservatório.
Al.6	$V = [L \cdot C] \cdot X \rightarrow V = [(A - 2X) \cdot (B - 2X)] \cdot X$ $V = [AB - 2AX - 2BX + 4X^2] \cdot X$	

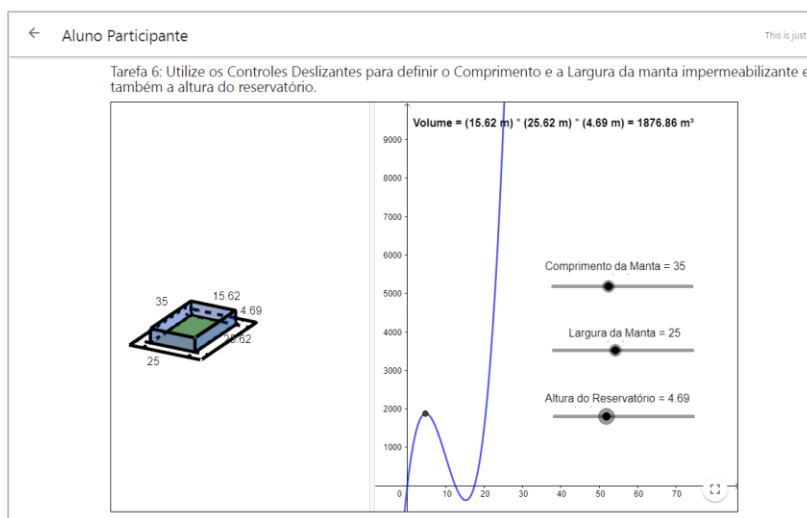
Fonte – Arquivo pessoal do autor (2021)

De acordo com Oliveira (2008, p. 299), o processo de generalização de padrões algébricos por meio das tecnologias “não ocorre sem intencionalidade, ou seja, a composição do uso de TICs nesse âmbito deve ocorrer através de uma estratégia que preveja o trabalho do professor em tarefas de transposição, nas quais as TICs podem ter importante papel”.

Conforme já mencionado, essas estratégias podem se concretizar por meio de métodos simples, como os que se observa na utilização de valores numéricos e algébricos nos dois modelos geométricos idênticos da Tarefa 2, cujas variáveis se relacionavam de forma simultânea, o que favoreceu a transposição dos aspectos geométricos para o algébrico.

Segundo Henrique e Bairral (2019, p. 203), outro ponto importante neste processo de investigação diz respeito “a observação com diferentes formas de visualização e representação (não estáticas) do objeto matemático”, conforme observado na Figura 8.

**Figura 8** – Representação gráfica 3D e da função correspondente



Fonte – Arquivo pessoal do autor (2021)

Nessa tarefa os alunos realizaram diversas simulações sobre as possíveis dimensões que um reservatório de chorume poderia ter, o que por si só já evidencia as potencialidades do GeoGebra em relação às atividades de caráter estático, as quais “podem ser otimizadas, viabilizando a realização de simulações e previsões” (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011, p. 116),

Com base nestas simulações, os alunos puderam justificar nas tarefas 7 e 8 os critérios que embasaram as suas escolhas para as dimensões do reservatório de chorume. Um aspecto recorrente observado nas suas resoluções diz respeito a priorização da maximização do volume do reservatório em detrimento das questões de segurança, com a justificativa de que quanto maior a capacidade de armazenamento melhor seria para o meio ambiente.

Apenas um dos alunos (Al. 6) se atentou para esse detalhe, conforme observado na reprodução das suas respostas.

*Tarefa 7 – Quais foram as medidas do Comprimento e da Largura que você escolheu para a manta que irá revestir este reservatório? Por que você escolheu estas medidas?*

*R: Eu escolhi 24 metros de largura e 34 metros de comprimento. Porque achei que seria um tamanho bom e caberia muitos resíduos.*

*Tarefa 8 – Considerando as medidas que você escolheu na tarefa 7, diga qual deve ser a medida da altura deste reservatório para que ele tenha o maior volume possível? Justifique se esta medida da altura do reservatório é adequada ou não.*

*R: 8 metros de altura. Acho que não seria muito adequado porque seria muito alto.*

Ao observarmos a ausência de criticidade pelos demais alunos quanto aos modelos matemáticos construídos, reforçamos a necessidade da Educação Matemática crítica de se fazer presente nas propostas didáticas baseadas na abordagem de situações problemas, sobretudo, nas que efetivamente possam contribuir para a sua participação ativa na sociedade.

Por fim, ao questionarmos sobre possíveis ações que poderiam ser adotadas no tratamento correto dos resíduos sólidos, obtivemos como resposta algumas proposições que apontam para um mesmo sentido, cujas responsabilidades recaem não apenas no poder público, por meio de coletas seletivas e reciclagem, mas também sobre cada um de nós a partir de atitudes simples, como a separação dos resíduos sólidos de acordo com as diferentes classificações (papel, vidro, metal, plástico e matéria orgânica).

#### 4.4 Objetivos específicos de cada artigo

O primeiro artigo tem como título, *“O GeoGebra Classroom e a abordagem de situações problemas: possibilidades para o ensino e aprendizagem do conceito de função”*, cujo principal objetivo visa: *analisar a viabilidade de uma proposta didática elaborada a partir do ambiente virtual GeoGebra Classroom, tendo por finalidade à aprendizagem do conceito de função no contexto de situações problemas.*

Essa proposta didática integra o produto educacional produzido a partir desta pesquisa, cujo tema em questão é: *“Consumo consciente de água: conhecer para preservar”*. Os objetivos específicos que visam ratificar a sua viabilidade para aprendizagem do conceito de função foram definidos de acordo com as seguintes intenções: (a) analisar o processo de transição realizado pelos alunos entre as diferentes formas de representação do conceito de função (planilha → gráfico → representação algébrica); (b) identificar os elementos que embasam a definição que os alunos têm sobre o conceito de função (consistência ou fragilidade conceitual); e (c) descrever como a análise das contas de água dos próprios alunos pode influenciar na mudança de hábitos e na sua conscientização sobre as questões socioambientais a partir da adoção de medidas sustentáveis de consumo de água.

O segundo artigo, por sua vez, tem como título, *“Contribuições do GeoGebra Classroom para o desenvolvimento do pensamento algébrico: aplicações do conceito de função”*, cujo principal objetivo busca: *analisar as potencialidades do GeoGebra Classroom para o desenvolvimento do pensamento algébrico, considerando a exploração de relações funcionais aplicadas no contexto de situações problemas.*

A proposta didática em questão aborda a temática *“Tratamento de resíduos sólidos: responsabilidade com a preservação do meio ambiente”*. As potencialidades que buscamos evidenciar emergiram dos seguintes objetivos: (a) análise da eficácia do *software* GeoGebra na promoção do pensamento algébrico e na generalização de padrões observáveis, considerando o estudo das relações entre Altura e Volume na construção simulada de um reservatório de chorume; (b) identificação dos critérios utilizados pelos alunos na construção

destes modelos (maximização de volume, aproveitamento de material e segurança); e (c) a síntese das possíveis contribuições da abordagem do tema para a conscientização dos alunos quanto a promoção de ações que visem atenuar os impactos que o descarte de resíduos sólidos geram ao meio ambiente.

Nos subitens descritos após as referências há um breve resumo que detalha os dois problemas abordados. Compõe o trabalho desta pesquisa a dissertação, um produto educacional com orientações aos professores (manual com instruções didático pedagógicas) e dois artigos científicos que descrevem de forma mais profunda como os dados foram coletados e a forma como eles foram analisados. Os artigos científicos e o produto educacional serão tornados públicos posteriormente em plataformas que tenham a finalidade de divulgar esses materiais.

---

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao refletirmos sobre o contexto em que se deu esta pesquisa, compreendemos que os desafios que nos constituem como professores pesquisadores, por vezes requer de nós a reinvenção das nossas próprias práticas pedagógicas, sobretudo quando elas se constituem sob condições adversas, como as que vivenciamos em virtude da pandemia de COVID-19.

A realização desta pesquisa em um ambiente completamente remoto se constituiu para mim como um verdadeiro desafio, dada a carência de materiais de orientação didático pedagógica voltados para a elaboração de propostas didáticas em ambientes virtuais. Neste contexto, destaco as contribuições do produto educacional que integra a pesquisa, cujo principal objetivo visa dar subsídios para o desenvolvimento de práticas educativas a partir dos recursos e funcionalidades da plataforma *online* do GeoGebra, o que pode auxiliar na proposição de novas pesquisas e formas de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, acreditamos que a utilização do *software* GeoGebra e dos recursos *multimídia* da sua plataforma *Classroom* contribuíram não apenas para a realização desta pesquisa, mas também para reacender as discussões sobre o papel que estes recursos tecnológicos podem desempenhar nos diferentes processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Dentre essas contribuições podemos destacar: (a) a otimização do tempo para a realização das atividades propostas; (b) a variedade dos processos de investigação e exploração dos mais diversos objetos matemáticos; e (c) a possibilidade de interação síncrona por meio de diferentes dispositivos (computadores, notebooks, tablets e celulares *smartphones*).

Compreendemos que essas contribuições do *software* GeoGebra ocorrem, porém, não de forma isolada, mas sim de forma inerente às ações desempenhadas pelo próprio professor. Neste processo, é de fundamental importância que o professor tenha uma intencionalidade, que organize essas propostas de forma muito consciente e que saiba quais perguntas irá fazer

e quais reflexões irá provocar, uma vez que o referido *software* por si só não propicia essas contribuições.

A articulação entre os recursos disponíveis na plataforma *Classroom* tornou viável a constituição de um ambiente de aprendizagem dinâmico, cujo protagonismo foi dado aos próprios alunos participantes. Sem dúvida nenhuma, a resposta para a nossa pergunta de pesquisa, na qual buscávamos compreender como o *software* GeoGebra pode favorecer o aprendizado do conceito de função e o desenvolvimento do pensamento algébrico, também perpassa pela compreensão de como estes recursos se articulam para a construção do conhecimento, conforme descrito em nossas análises.

A constituição desses ambientes de aprendizagem corrobora com as orientações curriculares propostas pela BNCC, sobretudo no que diz respeito a perspectiva heurística das experimentações, que deve “garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas” (BRASIL, 2017, p. 265).

Esse papel de protagonismo dado aos alunos se constitui como elemento essencial nas propostas didáticas que envolvem a construção do conhecimento por meio de tecnologias digitais, o que contrapõe os discursos contrários a essa forma de aprendizagem, como os que surgiram durante a primeira fase das TDIC, nos quais se acreditava “que o aluno iria só apertar teclas e obedecer à orientação dada pela máquina” o que “contribuiria ainda mais para torná-lo um mero repetidor de tarefas” (BORBA; PENTEADO, 2010, p. 11).

Entretanto ressaltamos que este protagonismo exercido pelos alunos não ocorre de forma isolada. Para tanto, “é importante que o professor tenha uma intencionalidade com a atividade proposta e faça a mediação do trabalho sempre” (MARCO, 2009, p. 38). Este, sem dúvida nenhuma é um dos pontos cruciais que justificam a incorporação dessas tecnologias nas *práxis* pedagógicas, sem o qual não se pode assegurar a aprendizagem por meio delas.

Outra questão importante, também evidenciada por esta pesquisa diz respeito a necessidade de contextualização das propostas didáticas, sobretudo quando elas partem de situações inerentes ao contexto social dos próprios alunos. A abordagem do conceito de função, no contexto de situações problemas, não apenas atribuiu significado a este conceito como também despertou a conscientização dos alunos para as questões de preservação dos recursos naturais e para o exercício da cidadania.

Neste contexto, a compreensão do conceito de função para além da definição de relação de dependência unívoca entre duas variáveis, também pressupõe a interpretação da

---

realidade cotidiana por meio das relações de interdependência (“todas as coisas estão relacionadas umas com as outras; [...]”) e fluência (“o mundo está em permanente evolução [...]”), conforme descrito por Caraça (1951, p. 109-110).

No que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento algébrico, ratificamos as potencialidades do *software* GeoGebra para a transição das noções intuitivas de padrão para as manipulações algébricas, conforme observado na segunda atividade. De acordo com Oliveira (2008), essas estratégias se constituem como um verdadeiro desafio, porém necessário ao processo de ensino e aprendizagem.

Embora alguns dos alunos tenham apresentado dificuldades no processo de formalização algébrica da Tarefa 5, acreditamos que este pode ser um caminho viável para o desenvolvimento do pensamento algébrico, um aprendizado que não ocorre de forma imediata, mas que pode se fazer presente de forma gradativa e constante desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, conforme propõe a BNCC.

Em síntese, ressaltamos que os objetivos inicialmente propostos para esta pesquisa foram devidamente alcançados, dentro das nossas próprias limitações. A análise crítica dos materiais e métodos utilizados na pesquisa se constitui como um elemento importante e que poderão nortear a reprodução das atividades propostas para outros contextos, sobretudo para aquelas que visam corroborar com o aprendizado dos alunos, não apenas pelo caráter pedagógico, mas também pelo caráter sociocultural.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAIRRAL, Marcelo Almeida; ASSIS, Alexandre Rodrigues de; SILVA, Bárbara C. C. da. Uma matemática na ponta dos dedos com dispositivos touchscreen. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Ponta Grossa, v. 8, n. 4, p. 39 - 74, set-dez. 2015.  
<https://doi.org/10.3895/rbect.v8n4.1754>

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática (1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental). Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

\_\_\_\_\_. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental). Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

\_\_\_\_\_. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ensino Médio. Brasília, DF: MEC/SEF, 1999.

\_\_\_\_\_. **PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, DF: MEC/SEMTEC, 2002.

\_\_\_\_\_. **Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. v. 2. Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

\_\_\_\_\_. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

\_\_\_\_\_. **Relatório Brasil no PISA 2018**, versão preliminar. Ministério da Educação. Diretoria de Avaliação da Educação Básica (DAEB), Poder Executivo, Brasília, 2019. Disponível em:  
[http://download.inep.gov.br/acoes\\_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio\\_PISA\\_2018\\_preliminar.pdf](http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf). Acesso em: jun. 2020.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia R. da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. Coleção Tendências em Educação Matemática. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.



BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. 4ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática** (1ª edição conjunta das partes I, II e III). Lisboa: Sá da Costa, 1951.

FRANK, Alejandro G. **Ciência prática**. Formatos alternativos de teses e dissertações. 2013. Disponível em: <https://cienciapratica.wordpress.com/2013/04/15/formatos-alterativos-de-teses-e-dissertacoes/>. Acesso em: 03 nov. 2021.

HENRIQUE, Marcos Paulo; BAIRRAL, Marcelo Almeida. Retas que se cortam e dedos que se movem com dispositivos de geometria dinâmica. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 21, n. 1, p. 197 - 216, abr. 2019.

<https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i1p197-216>

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MARCO, Fabiana Fiorezi de. **Atividades computacionais de ensino na formação inicial do professor de Matemática**. 2009. 223 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, 2009.

MEIER, Melissa; GRAVINA, Maria Alice. Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, São Paulo, v. 1, n. 1, p. CCL - CCLXIV, mai. 2012.

MEYER, João Frederico da Costa de A.; CALDEIRA, Ademir Donizeti; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011

MUTTI, Gabrieli de Sousa Lins; Tiago Emanuel, Klüber. **Formato multipaper nos programas de pós-graduação *Stricto sensu* brasileiros das áreas de educação e ensino**: um panorama. In: V Seminário Internacional de Pesquisa e Estudos Qualitativos, Foz do Iguaçu, 2018.

OLIVEIRA, Gerson Pastre de. Generalização de padrões, pensamento algébrico e notações: o papel das estratégias didáticas com interfaces computacionais. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 295-312, 2008.

PIZZOLATTO, Cristiane; PONTAROLO, Edilson; BERNARTT, Maria de Lourdes. A educação matemática crítica na formação do cidadão para sua emancipação social. *Revista de Educação, Ciência e Cultura*, Canoas, v. 25, n. 1, 2020.

<https://doi.org/10.18316/recc.v25i1.5678>

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Coleção tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

---

PONTE, João Pedro. O conceito de função no currículo de Matemática. *Revista Educação e Matemática*, APM, Portugal, n.15, p. 3-9, 1990.

PREFEITURA MUNICIPAL DE MONTE ALEGRE DE MINAS. **Plano Municipal de Saneamento Básico do Município de Monte Alegre de Minas**. Disponível em: <<http://cides.com.br/wp-content/uploads/2016/04/PMSB-Monte-Alegre-de-Minas-FINAL.compressed.pdf>>. Acesso em: out. 2020.

SILVA, Guilherme Henrique Gomes da. Ambientes de Geometria Dinâmica: Potencialidades e Imprevistos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Ponta Grossa, v. 5, n. 1, p. 16 - 38, jan./abr. 2012.

<https://doi.org/10.3895/S1982-873X2012000100002>

SILVA, Guilherme Henrique Gomes da; PENTEADO, Miriam Godoy. Geometria dinâmica na sala de aula: o desenvolvimento do futuro professor de matemática diante da imprevisibilidade. *Ciência e educação*. (Bauru), Bauru, v. 19, n. 2, p. 279 - 292, 2013.

<https://doi.org/10.1590/S1516-73132013000200004>

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. Tradução: Jonei Cerqueira Barbosa. *Bolema*, Rio Claro – SP, v. 13, n. 14, 2000. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635/7022>. Acesso em 04 ago. 2021.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Campinas, SP: Papirus, 2008.

SOUZA, Jerson Sandro Santos de; SOUZA, Leandro de Oliveira. A Definição de Função: Operacionalizar para Articular e Articular para Compreender. *Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, Florianópolis, v. 11, n. 1, p. 125-148, maio. 2018.

<https://doi.org/10.5007/1982-5153.2018v11n1p125>

SOUZA, Jerson Sandro Santos de; SOUZA, Leandro de Oliveira. O desenvolvimento do pensamento funcional nos anos iniciais: algumas atividades para serem exploradas a partir do estudo de sequências. In: CARNEIRO, Reginaldo Fernando; SOUZA, Antonio Carlos de; BERTINI, Luciane de Fatima (Orgs.). **A Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: práticas de sala de aula e de formação de professores**. [Livro eletrônico]. Coleção SBEM, v. 11. Brasília: SBEM, 2018.

---

## ARTIGO 1

---

### **O GeoGebra *Classroom* e a abordagem de situações problemas: possibilidades para o ensino e aprendizagem do conceito de função**

Este artigo foi submetido para a Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional São Paulo (REMAT). Em síntese, o texto do artigo traz a análise dos dados produzidos com a realização da atividade “*Consumo consciente de água: conhecer para preservar*”, cujo referencial teórico aborda: (a) a evolução das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), com especial atenção ao *software* de geometria dinâmica GeoGebra; (b) a abordagem do GeoGebra enquanto fonte de pesquisa nos Programas de Pós-graduação *Stricto Sensu*; (c) os princípios norteadores da BNCC para a aprendizagem do conceito de função; (d) as contribuições de diferentes matemáticos para o desenvolvimento do conceito de função; (e) aspectos gerais da Educação Matemática crítica aplicada no contexto de situações problemas; (f) os percursos metodológicos da pesquisa; e (g) a análise dos seus resultados e conclusões.

Para ilustrarmos a síntese do texto produzido, apresentamos a seguir o resumo que acompanha o texto do referido artigo.

## Resumo

O estabelecimento de medidas restritivas de isolamento social decretadas em função da pandemia de COVID-19, exigiu do sistema educacional brasileiro e de outros países, adaptações do ensino presencial para a modalidade remota. Isso colocou em evidência a necessidade de se discutir os métodos mais adequados para a elaboração de propostas didáticas em ambientes virtuais de ensino e aprendizagem. Partindo desse pressuposto, o presente artigo tem como principal objetivo analisar a viabilidade de uma proposta didática voltada para aprendizagem do conceito de função no contexto de situações problemas, elaborada a partir do ambiente virtual GeoGebra Classroom. Neste material abordamos o ensino do conceito de função para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, em conformidade com as orientações curriculares propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Esta proposta didática integra o produto educacional elaborado pelo primeiro autor, como parte do trabalho de pesquisa. Como elemento motivador para a aprendizagem, foi elaborada uma proposta didática sobre o tema “Consumo consciente de água”, considerando o consumo residencial de água dos próprios alunos participantes desta pesquisa, além das tarifas de água e esgoto aplicadas no município de Monte Alegre de Minas, localizado no interior do estado de Minas Gerais. A análise de conteúdo dos dados produzidos e a descrição detalhada da metodologia empregada na pesquisa, nos dão indicativos sobre possíveis caminhos pedagógicos para a abordagem contextualizada do conceito de função por meio do GeoGebra Classroom.

**Palavras-chave:** GeoGebra Classroom; Funções; Situações problema; Educação Matemática crítica.

## ARTIGO 2

---

### **Contribuições do GeoGebra *Classroom* para o desenvolvimento do pensamento algébrico: aplicações do conceito de função**

O texto deste artigo foi submetido para o periódico Educação Matemática em Revista, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Neste trabalho, apresentamos os resultados provenientes da aplicação da atividade didática “*Tratamento de resíduos sólidos: responsabilidade com a preservação do meio ambiente*”, cujo referencial teórico aborda: (a) as potencialidades do *software* GeoGebra para aprendizagem do conceito de função; (b) as possibilidades de adaptação das atividades estáticas para o ambiente virtual GeoGebra *Classroom*; (c) as orientações curriculares da BNCC para o desenvolvimento do pensamento algébrico; (d) o desenvolvimento da criticidade dos alunos por meio da Educação Matemática Crítica; (e) o percurso metodológico que embasou a pesquisa; e (f) os resultados e conclusões provenientes de sua aplicação.

Em síntese, apresentamos a seguir o resumo que acompanha o texto submetido a referida revista, com uma visão panorâmica sobre os principais pontos abordados.

**Resumo**

As adaptações do ensino presencial para o ensino remoto, em decorrência das ações preventivas de combate a pandemia de COVID-19, se constituíram como um desafio para os professores da educação básica, sobretudo quanto a elaboração de propostas didáticas para ambientes virtuais. Partindo desse pressuposto, o presente artigo tem por objetivo analisar o potencial do GeoGebra Classroom para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Considerou-se a exploração de relações funcionais aplicadas no contexto de situações problemas, nas quais abordamos possíveis soluções para o tratamento de resíduos sólidos no município de Monte Alegre de Minas/MG. Para a pesquisa elaboramos uma sequência de atividades online, realizadas com dez alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Os dados foram produzidos por meio da plataforma Classroom do GeoGebra e analisados juntamente com a vídeo-gravação da pesquisa. A análise indica possíveis contribuições do GeoGebra e da abordagem contextualizada de situações problemas para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

**Palavras-chave:** GeoGebra *Classroom*. Pensamento algébrico. Situações problemas. Funções. Educação Matemática crítica.

## ANEXOS

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) a participar da pesquisa intitulada “O GeoGebra e o conceito de função: uma análise das potencialidades dos softwares de geometria dinâmica em face das orientações curriculares propostas pela BNCC”, sob a responsabilidade dos pesquisadores Anderson de Souza Santos e Leandro de Oliveira Souza. Nesta pesquisa nós estamos buscando compreender como os recursos tecnológicos podem te ajudar a entender o conceito de função a partir de situações problemas. O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido será obtido pelo pesquisador Anderson de Souza Santos, até a última semana do mês de novembro deste ano, por meio de preenchimento de formulário *online* a ser disponibilizado através de link aos participantes da pesquisa. Após o conhecimento das informações descritas neste documento, você poderá decidir, dentro do prazo de uma semana, se quer participar ou não desta pesquisa. Você terá o direito de desistir a qualquer momento de participar da pesquisa, sem qualquer prejuízo, bastando apenas informar aos pesquisadores a tomada de sua decisão.

Na sua participação, você deverá responder a três tarefas, cada uma contendo de cinco a doze questões sobre funções. Estas tarefas serão realizadas de forma *online* diretamente no navegador de internet, sem precisar baixar ou salvar arquivos. A análise das suas respostas e soluções será feita depois de finalizada cada uma das tarefas, e a devolutiva do que você acertou ou errou será entregue a professora de matemática da sua turma, para que ela possa lhe dar um retorno sobre o seu desempenho. O tempo para realização de cada tarefa será de 75 minutos, podendo ser realizada em até dois dias não consecutivos. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. Também nos comprometemos a divulgar os resultados da pesquisa, em formato acessível ao grupo ou população que foi pesquisada (Resolução CNS nº 510 de 2016, Artigo 3º, Inciso IV).

Você não terá nenhum gasto nem ganho financeiro por participar na pesquisa. Em razão do isolamento social causado pela pandemia de COVID – 19, a realização da pesquisa será feita de forma *online*, da sua própria residência, não havendo custos com deslocamentos de qualquer natureza.

Havendo algum dano decorrente da pesquisa, você terá direito a solicitar indenização através das vias judiciais (Código Civil, Lei 10.406/2002, Artigos 927 a 954 e Resolução CNS nº 510 de 2016, Artigo 19).

Os riscos consistem apenas na sua identificação, o que não é desejável, porém, caso isso ocorra, nos comprometemos a manter o sigilo absoluto de não revelar a sua identidade. Os benefícios que estas tarefas podem trazer são muitos, ela envolve a promoção de habilidades e competências que compreendem a formação de uma visão crítica da realidade cotidiana a partir do conceito de função, tanto das ciências humanas como das ciências sociais. Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem qualquer prejuízo ou coação. Até o momento da divulgação dos resultados, você também é livre para solicitar a retirada dos seus dados da pesquisa.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você. Em caso de qualquer dúvida ou reclamação a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: Leandro de Oliveira Souza pelo telefone (34) 98721 – 2759 ou pelo endereço Rua 20, Nº 1600, Bairro Tupã, Ituiutaba/MG (Universidade Federal de Uberlândia – Campus Pontal da UFU). Para obter orientações quanto aos direitos dos participantes de pesquisa acesse a cartilha no link: [https://conselho.saude.gov.br/images/comissoes/conep/documentos/Cartilha\\_Direitos\\_Eticos\\_2020.pdf](https://conselho.saude.gov.br/images/comissoes/conep/documentos/Cartilha_Direitos_Eticos_2020.pdf).

Você poderá também entrar em contato com o CEP - Comitê de Ética na Pesquisa com Seres Humanos na Universidade Federal de Uberlândia, localizado na Av. João Naves de Ávila, nº 2121, bloco A, sala 224, campus Santa Mônica – Uberlândia/MG, 38408-100; telefone: 34-3239-4131. O CEP é um colegiado independente criado para defender os interesses dos participantes das pesquisas em sua integridade e dignidade e para

contribuir para o desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos conforme resoluções do Conselho Nacional de Saúde.

Monte Alegre de Minas, ..... de ..... de 20.....

---

Assinatura do(s) pesquisador(es)

Eu aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

---

Assinatura do participante da pesquisa

### **TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA RESPONSÁVEL LEGAL POR MENOR DE 18 ANOS**

Considerando a sua condição de responsável legal pelo(a) menor, apresentamos este convite e solicitamos o seu consentimento para que ele(a) participe da pesquisa intitulada “O GeoGebra e o conceito de função: uma análise das potencialidades dos softwares de geometria dinâmica em face das orientações curriculares propostas pela BNCC”, sob a responsabilidade dos pesquisadores Anderson de Souza Santos e Leandro de Oliveira Souza.

Nesta pesquisa nós estamos buscando compreender como os recursos tecnológicos podem ajudar o(a) menor sob sua responsabilidade a entender o conceito de função a partir de situações problemas. O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido será obtido pelo pesquisador Anderson de Souza Santos, até a última semana do mês de novembro deste ano, por meio de preenchimento de formulário *online* a ser disponibilizado através de link aos participantes da pesquisa. Após o conhecimento das informações descritas neste documento, você poderá decidir, dentro do prazo de uma semana, se autoriza ou não a participação, nesta pesquisa, do menor sob sua responsabilidade. Você terá o direito de desistir a qualquer momento desta sua autorização, sem qualquer prejuízo ao seu dependente, bastando apenas informar aos pesquisadores a tomada de sua decisão.

Na participação do(a) menor sob sua responsabilidade, ele(a) deverá responder a três tarefas, cada uma contendo de cinco a doze questões sobre funções. Estas tarefas serão realizadas de forma *online* diretamente no navegador de internet, sem precisar baixar ou salvar arquivos. A análise das respostas e soluções dele será feita depois de finalizada cada uma das tarefas, e a devolutiva do que ele acertou ou errou será entregue a professora de matemática da turma em que seu filho(a) estuda, para que ela possa dar um retorno sobre o desempenho dele(a). O tempo para realização de cada tarefa será de 75 minutos, podendo ser realizada em até dois dias não consecutivos. Em nenhum momento, nem o(a) menor nem você serão identificados. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a identidade dele(a) e a sua serão preservadas.

Nem ele(a) nem você terão gastos nem ganhos financeiros por participar na pesquisa. Em razão do isolamento social causado pela pandemia de COVID – 19, a realização da pesquisa será feita de forma *online*, da sua própria residência, não havendo custos com deslocamentos de qualquer natureza.

Havendo algum dano decorrente da pesquisa, você terá direito a solicitar indenização através das vias judiciais (Código Civil, Lei 10.406/2002, Artigos 927 a 954 e Resolução CNS nº 510 de 2016, Artigo 19).

Os riscos consistem apenas na identificação involuntária do(a) menor sob sua responsabilidade, o que não é desejável, porém, caso isso ocorra, nos comprometemos a manter o sigilo absoluto de não revelar a identidade dele(a). Os benefícios que estas tarefas podem trazer são muitos, ela envolve a promoção de habilidades e competências que compreendem a formação de uma visão crítica da realidade cotidiana a partir do conceito de função, tanto das ciências humanas como das ciências sociais. A qualquer momento, você poderá retirar o seu consentimento para que o(a) menor sob sua responsabilidade participe da pesquisa. Garantimos que não haverá coação para que o consentimento seja mantido nem que haverá prejuízo ao(a) menor sob sua responsabilidade. Até o momento da divulgação dos resultados, você também é livre para solicitar a retirada dos dados do(a) menor sob sua responsabilidade da pesquisa. O(A) menor sob sua responsabilidade também poderá retirar seu assentimento sem qualquer prejuízo ou coação. Até o momento da divulgação dos resultados, ele(a) também é livre para solicitar a retirada dos seus dados da pesquisa.

Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com você.

Em caso de qualquer dúvida a respeito desta pesquisa, você poderá entrar em contato com: Leandro de Oliveira Souza pelo telefone (34) 98721 – 2759 ou pelo endereço Rua 20, Nº 1600, Bairro Tupã, Ituiutaba/MG (Universidade Federal de Uberlândia – Campus Pontal da UFU). Você poderá também entrar em contato com o CEP - Comitê de Ética na Pesquisa com Seres Humanos na Universidade Federal de Uberlândia, localizado na



Av. João Naves de Ávila, nº 2121, bloco A, sala 224, campus Santa Mônica – Uberlândia/MG, 38408-100; telefone: 34-3239-4131. O CEP é um colegiado independente criado para defender os interesses dos participantes das pesquisas em sua integridade e dignidade e para contribuir para o desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos conforme resoluções do Conselho Nacional de Saúde.

Monte Alegre de Minas, ..... de ..... de 20.....

---

Assinatura dos pesquisadores

Eu, responsável legal pelo(a) menor (nome do(a) menor) \_\_\_\_\_  
consinto na sua participação na pesquisa citada acima, após ter sido devidamente esclarecido.

---

Assinatura do responsável pelo(a) participante da pesquisa

### **TERMO DE ASSENTIMENTO PARA O MENOR ENTRE 12 E 18 ANOS INCOMPLETOS**

Você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa intitulada “O GeoGebra e o conceito de função: uma análise das potencialidades dos softwares de geometria dinâmica em face das orientações curriculares propostas pela BNCC”, sob a responsabilidade dos pesquisadores Anderson de Souza Santos e Leandro de Oliveira Souza. Nesta pesquisa nós estamos buscando compreender como os recursos tecnológicos podem te ajudar a entender o conceito de função a partir de situações problemas. O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido será obtido pelo pesquisador Anderson de Souza Santos, até a última semana do mês de novembro deste ano, por meio de preenchimento de formulário *online* a ser disponibilizado através de link aos participantes da pesquisa. Após o conhecimento das informações descritas neste documento, você poderá decidir, dentro do prazo de uma semana, se quer participar ou não desta pesquisa. Você terá o direito de desistir a qualquer momento de participar da pesquisa, sem qualquer prejuízo, bastando apenas informar aos pesquisadores a tomada de sua decisão.

Na sua participação, você deverá responder a três tarefas, cada uma contendo de cinco a doze questões sobre funções. Estas tarefas serão realizadas de forma *online* diretamente no navegador de internet, sem precisar baixar ou salvar arquivos. A análise das suas respostas e soluções será feita depois de finalizada cada uma das tarefas, e a devolutiva do que você acertou ou errou será entregue a professora de matemática da sua turma, para que ela possa lhe dar um retorno sobre o seu desempenho. O tempo para realização de cada tarefa será de 75 minutos, podendo ser realizada em até dois dias não consecutivos. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada.

Você não terá nenhum gasto nem ganho financeiro por participar na pesquisa. Em razão do isolamento social causado pela pandemia de COVID – 19, a realização da pesquisa será feita de forma *online*, da sua própria residência, não havendo custos com deslocamento de qualquer natureza.

Havendo algum dano decorrente da pesquisa, você terá direito a solicitar indenização através das vias judiciais (Código Civil, Lei 10.406/2002, Artigos 927 a 954 e Resolução CNS nº 510 de 2016, Artigo 19).

Os riscos consistem apenas na sua identificação, o que não é desejável, porém, caso isso ocorra, nos comprometemos a manter o sigilo absoluto de não revelar a sua identidade. Os benefícios que estas tarefas podem trazer são muitos, ela envolve a promoção de habilidades e competências que compreendem a formação de uma visão crítica da realidade cotidiana a partir do conceito de função, tanto das ciências humanas como das ciências sociais.

Você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem qualquer prejuízo ou coação. Até o momento da divulgação dos resultados, você também é livre para solicitar a retirada dos seus dados da pesquisa. Mesmo seu responsável legal tendo consentido, você não é obrigado a participar da pesquisa se não quiser.

Uma via original deste Termo de Assentimento ficará com você. Em caso de qualquer dúvida ou reclamação a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: Leandro de Oliveira Souza pelo telefone (34) 98721 – 2759 ou pelo endereço Rua 20, Nº 1600, Bairro Tupã, Ituiutaba/MG (Universidade Federal de Uberlândia – Campus Pontal da UFU). Você poderá também entrar em contato com o CEP - Comitê de Ética na Pesquisa com Seres Humanos na Universidade Federal de Uberlândia, localizado na Av. João Naves de Ávila, nº 2121, bloco A, sala 224, campus Santa Mônica – Uberlândia/MG, 38408-100; telefone: 34-3239-4131. O CEP é um colegiado independente criado para defender os interesses dos participantes das pesquisas em sua integridade e dignidade e para contribuir para o desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos conforme resoluções do Conselho Nacional de Saúde.

---

Monte Alegre de Minas, ..... de ..... de 20.....

---

Assinatura do(s) pesquisador(es)

Eu aceito participar do projeto citado acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

---

Assinatura do participante da pesquisa

### **TERMO DE COMPROMISSO CONFIDENCIALIDADE DA EQUIPE EXECUTORA**

Nós, abaixo assinados, nos comprometemos a desenvolver o projeto de pesquisa intitulado “O GeoGebra e o conceito de função: uma análise das potencialidades dos softwares de geometria dinâmica em face das orientações curriculares propostas pela BNCC” de acordo com a Resolução CNS 466/12 e/ou 510/16 e normas complementares. Declaro cumprir com todas as implicações abaixo:

- a) Que o acesso aos dados registrados no ambiente virtual de aprendizagem GeoGebra Classroom ou em bases de dados para fins da pesquisa científica será feito somente após aprovação do projeto de pesquisa pelo Comitê de Ética;
- b) Que o acesso aos dados será feito por um membro da equipe de pesquisa, abaixo assinado, que está plenamente informado sobre as exigências de confidencialidade;
- c) Meu compromisso com a privacidade e a confidencialidade dos dados utilizados preservando integralmente o anonimato e a imagem do participante, bem como a sua não estigmatização;
- d) Não utilizar as informações em prejuízo das pessoas e/ou das comunidades, inclusive em termos de autoestima, de prestígio e/ou econômico-financeiro;
- e) Que o pesquisador responsável estabeleceu salvaguardar e assegurar a confidencialidade dos dados de pesquisa;
- f) Que os dados obtidos na pesquisa serão usados exclusivamente para finalidade prevista no protocolo;

Declaramos ainda que os itens Objetivos, Riscos e Benefícios, Critérios de inclusão e exclusão e Metodologia, bem como Cronograma de execução e Orçamento do Projeto de Pesquisa (detalhado) anexado por nós, pesquisadores, na Plataforma Brasil possui conteúdo idêntico ao que foi preenchido nos campos disponíveis na própria Plataforma Brasil (Informações básicas).

Portanto, para fins de análise pelo Comitê de Ética, a versão do Projeto que será gerada automaticamente pela Plataforma Brasil no formato “.pdf” terá, nos itens acima mencionados, o conteúdo idêntico à versão do Projeto anexada por nós, os pesquisadores.

Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Nomes e Assinaturas:

---

---

---

---

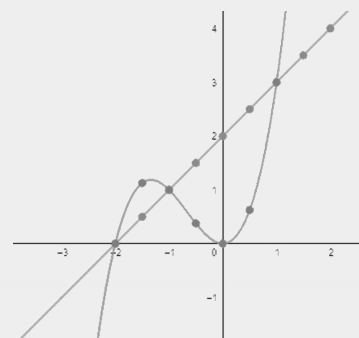
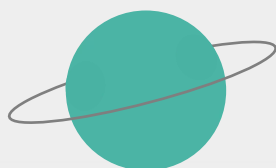
Rubrica do pesquisador principal

## **APÊNDICE**

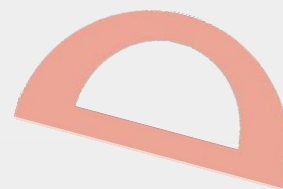
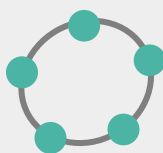
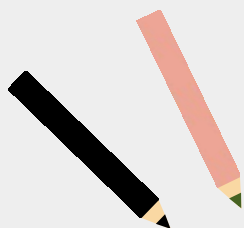
**Produto educacional que integra a pesquisa**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

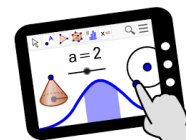
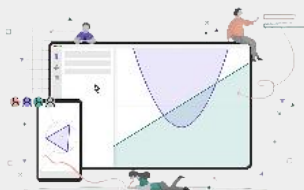
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE  
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA



APLICAÇÕES DO GEOGEBRA CLASSROOM NO ENSINO E  
APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO



ANDERSON DE SOUZA SANTOS



## **AUTOR**

**Anderson de Souza Santos**

Professor de Educação Básica e Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia PPGECM/UFU

## **ORIENTADOR**

**Doutor Leandro de Oliveira Souza**

Professor Adjunto do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal e do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia – ICENP/PPGECM/UFU

## **COLABORADORES INSTITUCIONAIS**



Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática



## **RECURSOS MULTIMÍDIA**



O trabalho Aplicações do GeoGebra *Classroom* no ensino e aprendizagem do conceito de função de Anderson de Souza Santos está licenciado com uma Licença [Creative Commons - Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

## **APRESENTAÇÃO**

Prezados professores, este produto educacional foi elaborado visando lhes dar subsídios para o desenvolvimento de práticas educativas diferenciadas, tomando como referência as funcionalidades e recursos disponíveis na plataforma *online* do GeoGebra.

Por meio desta plataforma foi possível a elaboração de duas propostas didáticas, as quais abordam o conceito de função aplicado em diferentes situações problemas. Dentre as situações abordadas, ressaltamos a importância do debate sobre a adoção de hábitos de consumo sustentável de água e das medidas destinadas ao tratamento correto de resíduos sólidos.

Com intuito de facilitar a reprodução e edição das propostas didáticas descritas neste material, apresentamos em três diferentes módulos todas as orientações necessárias a sua utilização, as quais foram divididas da seguinte forma: (a) Módulo I – GeoGebra *Classroom*: instruções de uso; (b) Módulo II – Consumo consciente de água: conhecer para preservar; e (c) Módulo III – Tratamento de resíduos sólidos: responsabilidade com a preservação do meio ambiente.

Ressaltamos que a aplicação deste produto educacional destina-se a alunos que já tenham o conhecimento prévio do conceito de função, sendo recomendado a partir do 9º ano do Ensino Fundamental. Por outro lado, a utilização dos recursos do GeoGebra *Classroom* não requer nenhum conhecimento complexo acerca das suas funcionalidades, podendo ser executado por qualquer pessoa com conhecimentos básicos sobre informática.

De modo geral, a aplicação das atividades propostas se baseia não apenas no desenvolvimento de habilidades e competências específicas para o ensino funções, mas também para a conscientização dos alunos para as questões ambientais e de preservação dos recursos naturais, contribuindo assim para a sua formação enquanto cidadão ciente dos seus direitos e de suas responsabilidades.

***O autor.***

**Uberlândia**

**2021**

## Sumário

### **Módulo I – GeoGebra *Classroom*: instruções de uso**

<b>Orientações de uso da plataforma GeoGebra <i>Classroom</i> .....</b>	<b>6</b>
1.1 Criação de uma conta para acesso a plataforma GeoGebra <i>online</i> .....	6
1.2 Produção de materiais didáticos no GeoGebra online .....	8
1.3 Criação de ambientes virtuais de ensino e aprendizagem no GeoGebra <i>Classroom</i> .....	15

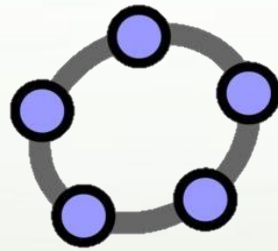
### **Módulo II - Consumo consciente de água: conhecer para preservar**

<b>Problema 1: consumo consciente de água .....</b>	<b>21</b>
2.1 Descrição da Tarefa 1.....	22
2.2 Descrição das Tarefas de 2 a 7.....	24
2.3 Descrição das Tarefas de 8 a 10.....	26

### **Módulo III - Tratamento de resíduos sólidos: responsabilidade com a preservação do meio ambiente**

<b>Problema 2: tratamento de resíduos sólidos .....</b>	<b>30</b>
3.1 Descrição das Tarefas de 1 a 5.....	31
3.2 Descrição das Tarefas de 6 a 8.....	35
3.3 Descrição das Tarefas 9 e 10.....	37
3.4 Considerações finais .....	37

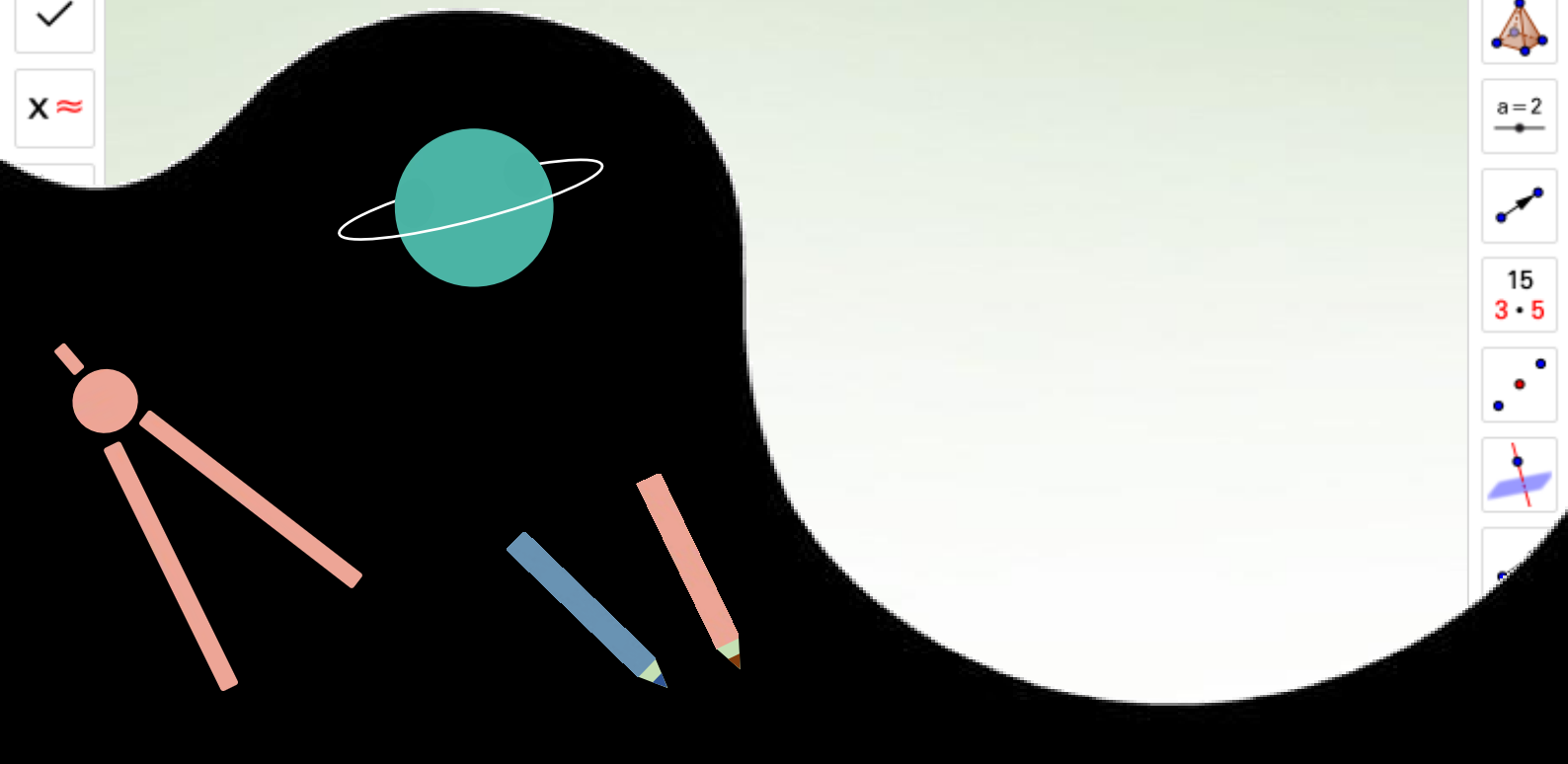
<b>Referências .....</b>	<b>38</b>
--------------------------	-----------



# MÓDULO I

## GEOGEBRA CLASSROOM

INSTRUÇÕES DE USO





## Orientações de uso da plataforma GeoGebra Classroom

O GeoGebra *Classroom* se constitui como um dos recursos mais importantes da plataforma GeoGebra *online*, cuja finalidade está relacionada a criação de ambientes virtuais de ensino e aprendizagem a partir da exploração de materiais didáticos criados dentro da própria plataforma.

Neste módulo, apresentaremos todas as informações necessárias para a utilização destes dois ambientes, abordando desde a criação de uma conta com perfil de acesso à plataforma GeoGebra *online* até a elaboração de materiais didáticos integrados ao GeoGebra *Classroom*.

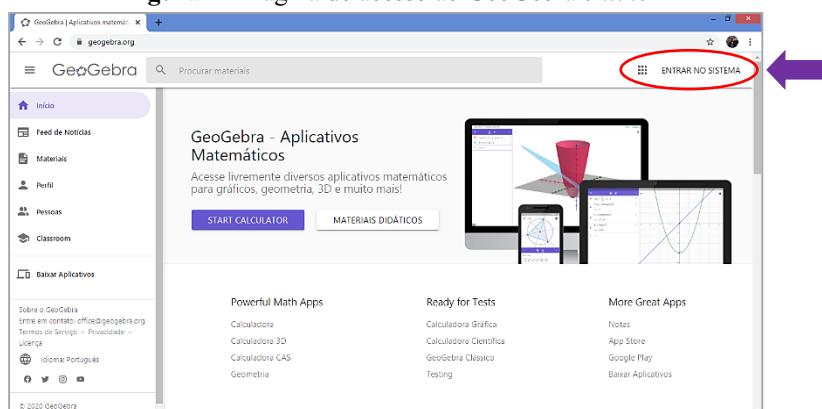
Para isso serão disponibilizados os *links* de acesso a duas propostas de ensino e aprendizagem que abordam as aplicações do conceito de função em situações problemas relacionadas ao consumo consciente de água e ao tratamento de resíduos sólidos. Estes materiais poderão ser alterados de acordo com as necessidades de cada professor.

Salientamos que as orientações indicadas nas seções 1, 2 e 3 são primordiais para a exploração destes dois ambientes, as quais deverão ser seguidas de forma integral. Para isso, utilize os *links* indicados para acesso à plataforma GeoGebra *Classroom* e aos questionários específicos de cada um dos problemas abordados.

### 1.1 Criação de uma conta para acesso a plataforma GeoGebra *online*<sup>1</sup>

Inicialmente se faz necessário acessar o site oficial do GeoGebra, disponível por meio do link <https://www.geogebra.org/>. Em seguida, clique em ENTRAR NO SISTEMA, conforme indicado na Figura 1.

Figura 1 – Página de acesso ao GeoGebra *online*



Fonte – Arquivo pessoal do autor

<sup>1</sup> As orientações descritas nesta seção são específicas para usuários que ainda não tenham conta com acesso a plataforma GeoGebra online, caso contrário, considere apenas as orientações da seção 1.2.

No formulário de acesso ao sistema (Figura 2), clique em CRIAR UMA CONTA. É importante destacar que, posteriormente, o acesso a sua conta será sempre realizado por meio deste mesmo formulário, bastando apenas inserir o seu NOME DE USUÁRIO e SENHA.

**Figura 2 - Formulário de acesso ao sistema**

Entrar no sistema

com uma conta já existente do

Google Facebook Outras

Com a conta do GeoGebra

Nome do usuário

senha

[Esqueceu a Senha?](#) [Criar uma Conta](#)

CANCEL ENTRAR NO SISTEMA

Fonte – Arquivo pessoal do autor

Ao clicar em CRIAR UMA CONTA, você será direcionado(a) para a página CADASTRE-SE, (Figura 3), onde você deverá escolher entre duas opções de cadastro. Na primeira opção você poderá vincular uma conta de e-mail ou rede social que você já utiliza, como Gmail, Office 365, Hotmail ou Outlook, Facebook e Twitter, bastando apenas clicar no ícone a ele correspondente, preenchendo em seguida algumas informações complementares.

**Figura 3 – Página de cadastro**

Cadastre-se

Cadastra-se usando um login do ...

Google Office 365 Microsoft Facebook Twitter

1ª Opção de cadastro

Cadastra-se usando o seu login GeoGebra

E-mail Um endereço de e-mail válido (necessário, mas que nunca será exibido)

Nome do usuário Seu nome público

senha Uma senha forte com pelo menos 6 caracteres

Confirmação da senha

Consent Por favor, selecione apenas uma das opções a seguir

I acknowledge that I am over 14 years old, I have read the [Termos de Serviço](#) and the [Privacy Policy](#), and consent to their contents

On behalf of my child, I acknowledge that I have read the [Termos de Serviço](#) and the [Privacy Policy](#), and consent to their contents

2ª Opção de cadastro

Criar uma Conta

Fonte – Arquivo pessoal do autor

Caso não utilize nenhuma destas plataformas de mensagens, utilize a segunda opção de cadastro, para isso basta inserir um e-mail válido, um nome de usuário e uma senha de acesso. Depois de inserida todas estas informações, selecione a opção “*I acknowledge that I am over 14 years old, I have read the Termos de Serviço and the Privacy Policy and consent to their contents*”, e clique em CRIAR UMA CONTA.

Você receberá em sua caixa de e-mail uma mensagem de autenticação contendo um link para ativação da sua conta no GeoGebra online, basta clicar neste *link* que a sua conta estará criada e autenticada. Ressaltamos que esta opção de cadastro é mais indicada para que utiliza e-mail institucional ou outros provedores de e-mail não listados na primeira opção, como Yahoo e Bol, dentre outros.

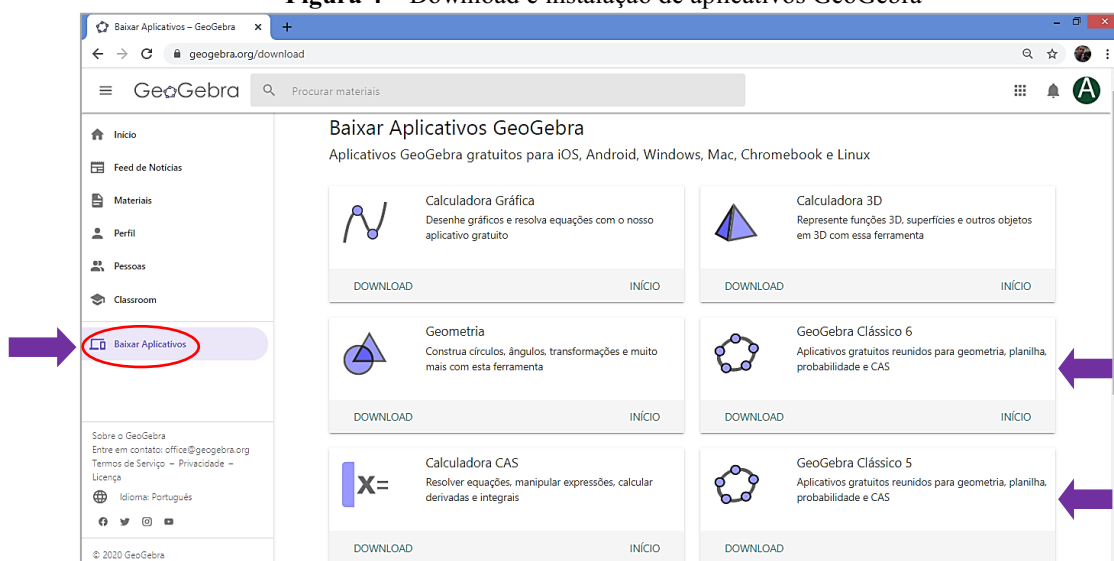
Com isso você terá acesso a todos os recursos do GeoGebra online, o que inclui a utilização da Calculadora Gráfica, o acesso a diversos materiais didáticos, o download de arquivos e programas e a criação de salas virtuais no GeoGebra *Classroom*.

## 1.2 Produção de materiais didáticos no GeoGebra online

A criação de materiais didáticos na plataforma GeoGebra online não requer o download e a instalação de nenhuma versão do aplicativo GeoGebra, ficando a critério dos seus usuários fazer a instalação ou simplesmente utilizar a sua versão online.

Para fazer o download e instalação deste aplicativo, basta clicar em BAIXAR APLICATIVOS e escolher a versão mais adequada às suas necessidades. Ao todo estão disponíveis seis opções de aplicativos GeoGebra, dentre as quais sugerimos a instalação das versões 5 ou 6 do GeoGebra Clássico.

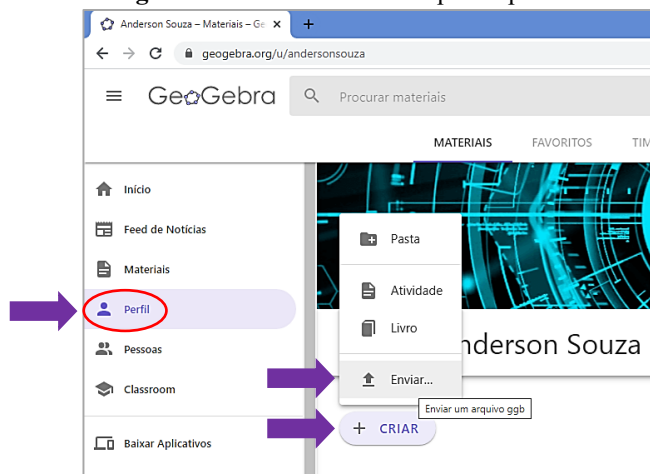
Figura 4 – Download e instalação de aplicativos GeoGebra



Fonte – Arquivo pessoal do autor

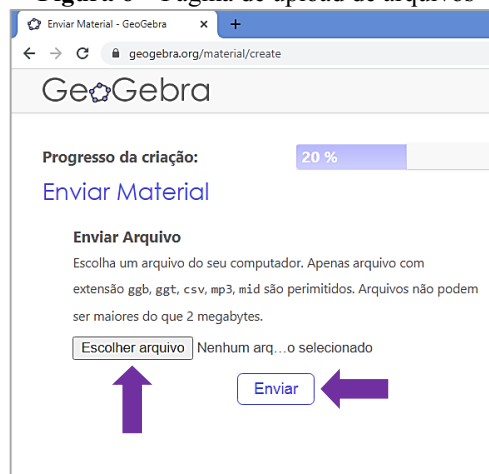
Entretanto, nos cabe ressaltar que os materiais didáticos produzidos por estes aplicativos só estarão disponíveis de forma online por meio de upload de arquivos. Para isso, clique em PERFIL e no menu + CRIAR selecione a opção ENVIAR, conforme indicado na Figura 5, em seguida, clique em ESCOLHER ARQUIVO na Figura 6, selecione o arquivo desejado dentro do seu computador e depois clique em ENVIAR.

**Figura 5 - Envio de materiais para a plataforma**



Fonte – Arquivo pessoal do autor

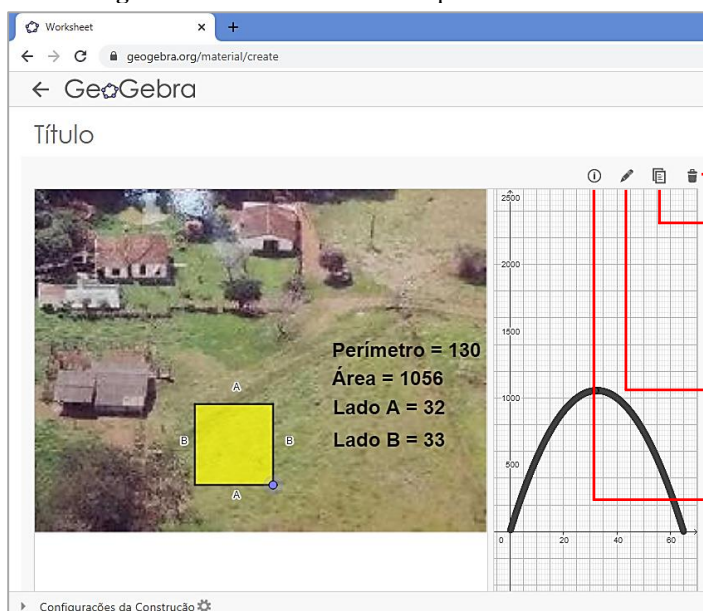
**Figura 6 – Página de upload de arquivos**



Fonte – Arquivo pessoal do autor

Na Figura 7 nós temos um exemplo de material didático que foi inserido na plataforma online, por meio do qual se aborda o ensino de funções quadráticas a partir do conceito de área. Inicialmente este arquivo se apresenta na versão editável, sendo possível inserir um título ou outras informações complementares.

**Figura 7 – Material inserido na plataforma online**



**Apagar:** exclui o arquivo.

**Copiar:** realiza cópias do arquivo dentro da mesma página.

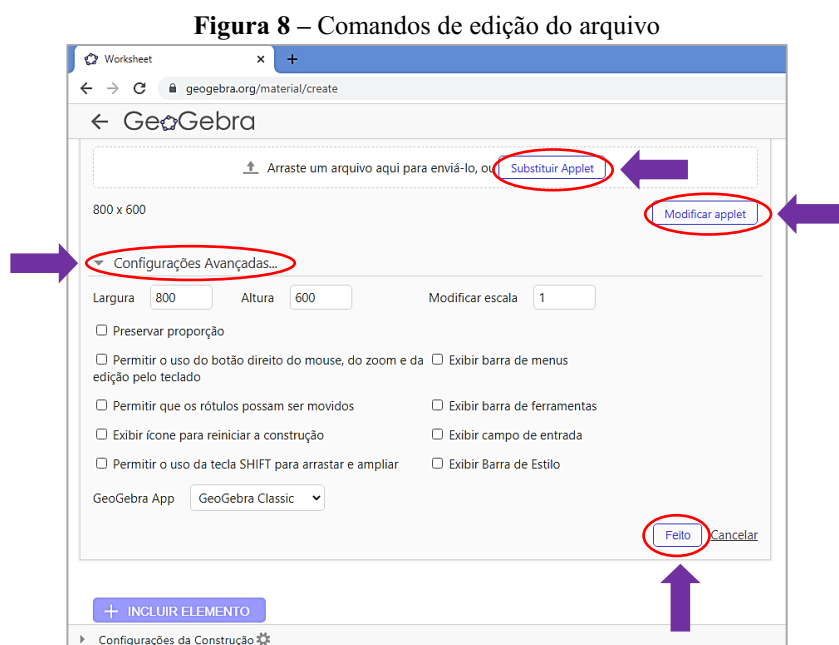
**Editar:** permite a edição completa do arquivo.

**Acrescentar informação:** permite o acréscimo de informações complementares.

Fonte – Arquivo pessoal do autor

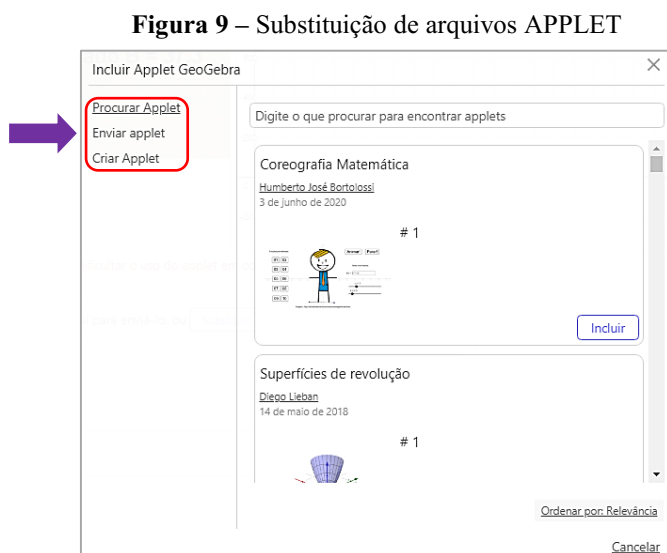
Ao clicar em EDITAR serão habilitados três comandos, SUBSTITUIR APPLET, MODIFICAR APPLET e CONFIGURAÇÕES AVANÇADAS, conforme

podemos ver na Figura 8. Ressaltamos que a palavra APPLET será sempre utilizada para se referir aos materiais didáticos produzidos por meio do aplicativo GeoGebra.



Fonte – Arquivo pessoal do autor

Estes comandos permitem a realização de diversas alterações no material didático, que vão desde a inclusão das barras de ferramentas e estilo até a substituição total do arquivo. Esta substituição pode ser realizada com o comando SUBSTITUIR APPLET a partir de três fontes, PROCURAR APPLET, ENVIAR APPLET e CRIAR APPLET.



Fonte – Arquivo pessoal do autor

As fontes indicadas na Figura 9 possuem as seguintes funcionalidades: (a) PROCURAR APPLET – permite o acesso a diversos materiais disponíveis na plataforma GeoGebra online, os quais poderão ser incluídos e alterados de acordos com

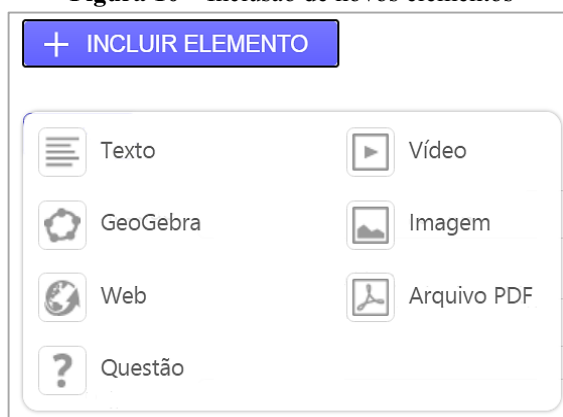
as suas devidas necessidades; (b) ENVIAR APPLET – ao clicar nesta opção você poderá substituir o seu material didático por outro de sua própria autoria; (c) CRIAR APPLET – permite o acesso a versão online do aplicativo GeoGebra, por meio do qual será possível criar um novo material didático em substituição a versão anterior do seu material.

O comando MODIFICAR APPLET coloca o seu material didático em modo de edição, podendo ser excluídos ou inseridos novos elementos. Já o comando CONFIGURAÇÕES AVANÇADAS lhe dá acesso a instrumentos de ordem mais técnica, como a determinação das escalas de Largura X Altura<sup>2</sup> e a habilitação das barras de ferramentas, dentre outros.

Após a realização das devidas alterações, não se esqueça de clicar em FEITO, conforme indicado na Figura 8, isso lhe permite salvar todas as alterações realizadas logo após sair do modo de edição.

É importante destacar que outros elementos complementares também podem ser inseridos neste mesmo ambiente virtual de ensino e aprendizagem como, por exemplo, textos, arquivos GeoGebra (APPLET), links para acesso a outros sites, questões, vídeos, imagens e arquivos PDF, conforme indicado na Figura 10.

**Figura 10** – Inclusão de novos elementos




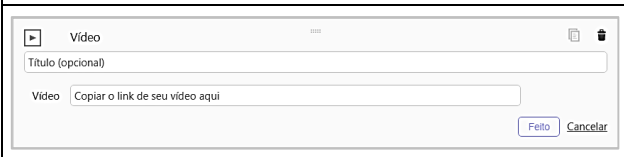
Fonte – Arquivo pessoal do autor

Para isso, basta clicar em + INCLUIR ELEMENTO e escolher dentre as sete opções disponíveis aquela que for mais conveniente e adequada aos objetivos propostos para o material didático em construção.

Cada um destes elementos possui uma funcionalidade específica, sendo apresentados de forma auto instrutiva e de fácil compreensão. No Quadro 1 estes elementos foram organizados de acordo com as suas principais funcionalidades.

<sup>2</sup> Para uma melhor visualização dos APPLETS, tanto em computadores como em celulares smartphones, sugerimos a utilização das escalas (800 X 600) ou (600 X 800) para a largura e altura do arquivo.

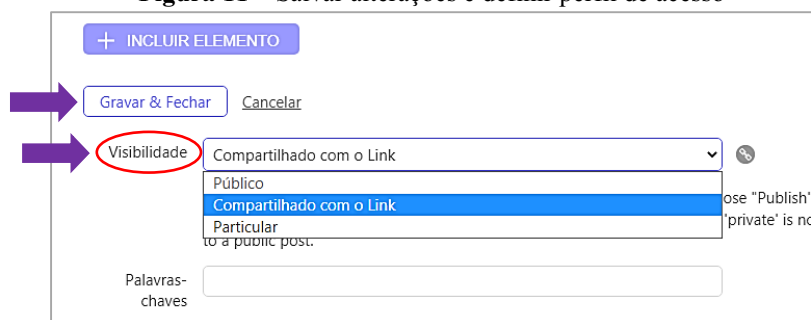
**Quadro 1 – Descrição das principais funcionalidades de cada elemento**

Elemento	Funcionalidade
	<p><b>Texto</b></p> <p>Inserção de textos de formatação simples como, por exemplo, textos explicativos e informativos, dentre outros.</p>
	<p><b>Incluir <i>Applet</i> GeoGebra</b></p> <p>Permite a inserção de materiais produzidos no próprio GeoGebra. As orientações descritas para este elemento são as mesmas que foram indicadas na Figura 9.</p>
	<p><b>Web</b></p> <p>Inclusão de <i>links</i> para acesso a outros sites.</p>
	<p><b>Questão</b></p> <p>Permite a inserção de questões abertas ou de múltipla escolha.</p>
	<p><b>Vídeo</b></p> <p>Indicado para a inserção de vídeos disponíveis na internet</p>
	<p><b>Imagem</b></p> <p>Indicado para a inserção de imagens nos formatos PNG, JPG ou JPEG.</p>
	<p><b>Arquivo PDF</b></p> <p>Inserção de arquivos PDF, os quais poderão ser acessados por meio de <i>link</i>.</p>

Fonte – Arquivo pessoal do autor

Depois de inseridos, estes elementos poderão ser reposicionados na tela do computador, bastando para isso clicar com o botão esquerdo do mouse na sua parte superior e depois arrastá-lo para o lugar mais conveniente. Em seguida, defina o perfil de acesso ao seu material didático por meio do menu VISIBILIDADE e clique em GRAVAR & FECHAR.

**Figura 11** – Salvar alterações e definir perfil de acesso

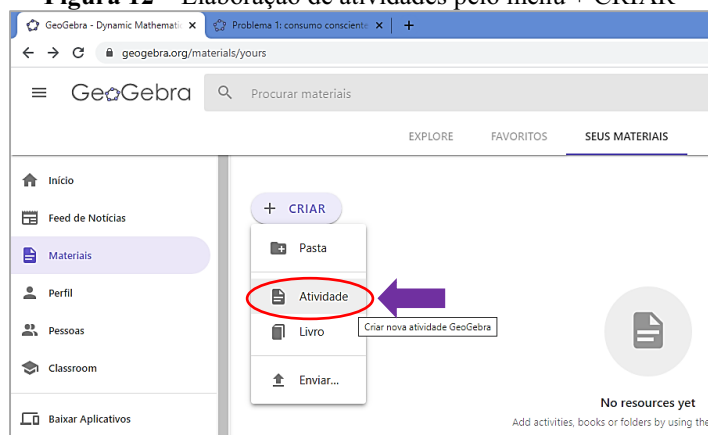


Fonte – Arquivo pessoal do autor

No menu VISIBILIDADE você poderá escolher entre três possibilidades de acesso: (a) PÚBLICO – acessível a todos; (b) COMPARTILHADO COM O LINK – somente usuários que receberam o link poderão visualizar este material; e (c) PARTICULAR – somente você pode encontrar e visualizar este material.

É importante salientar que esta não é a única forma de elaboração de materiais didáticos no GeoGebra online. Conforme apresentado na Figura 12, no menu + CRIAR existe a opção ATIVIDADE, que permite a criação de um material didático partindo do zero, cuja as orientações são as mesmas que foram indicadas anteriormente.

**Figura 12** – Elaboração de atividades pelo menu + CRIAR



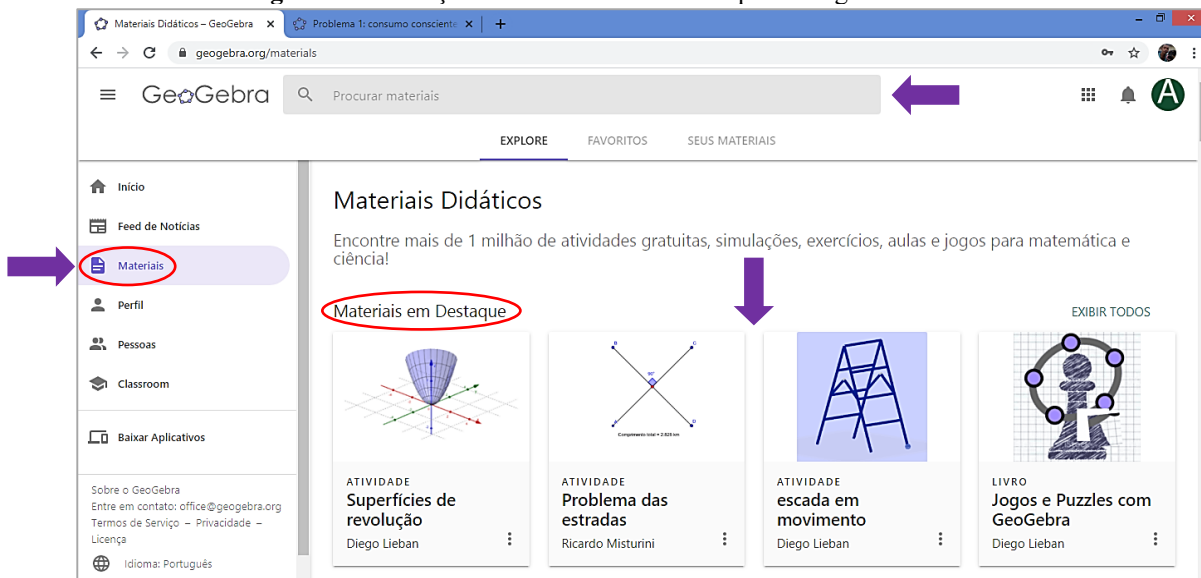
Fonte – Arquivo pessoal do autor

Neste menu, o item PASTA possui a funcionalidade de organização de arquivos, de forma similar ao que ocorre com o Microsoft Windows. Já o item LIVRO possui a mesma funcionalidade do item PASTA, com a única diferença de que os materiais didáticos produzidos são organizados em um mesmo arquivo, como se fossem capítulos de um livro digital.



Por outro lado, há também a possibilidade de se elaborar um material didático a partir de outros já existentes. Para isso, basta clicar em MATERIAIS e escolher um dentre as diversas opções disponíveis na galeria MATERIAIS EM DESTAQUE ou utilizar o recurso PROCURAR MATERIAIS na barra de pesquisa.

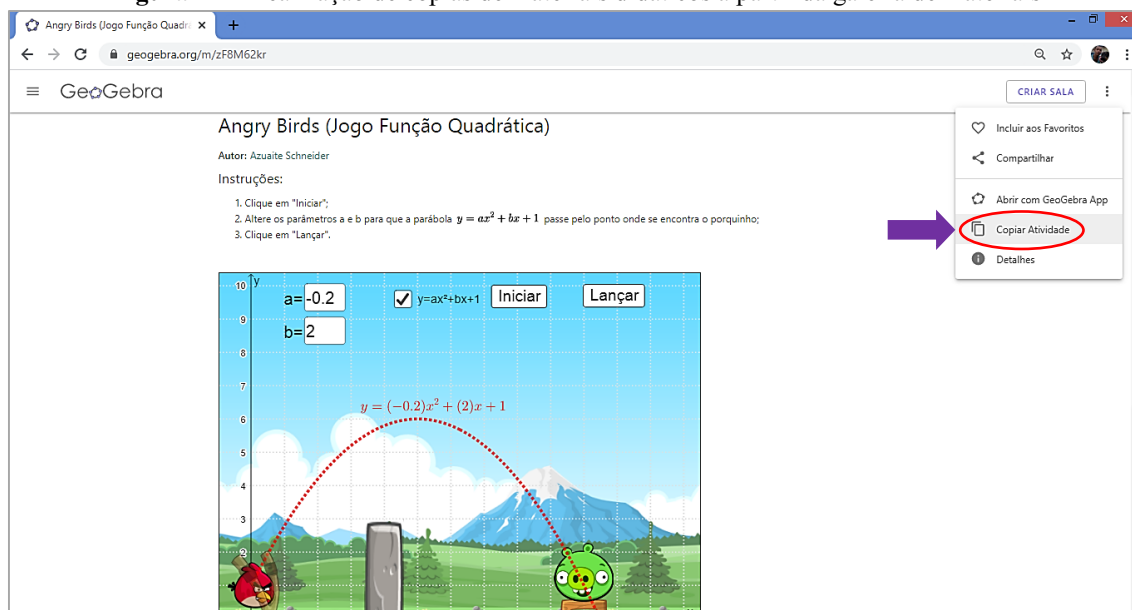
**Figura 13** – Inserção de materiais didáticos a partir da galeria de materiais



Fonte – Arquivo pessoal do autor

Após a escolha do material didático, clique no menu dos três pontinhos do canto superior direito da tela e selecione a opção COPIAR ATIVIDADE, conforme indicado na Figura 14. Isso fará com que este material didático entre no modo de edição, podendo ser modificado de acordo com as suas necessidades e ao mesmo tempo integrado à sua lista de materiais, sendo preservada a autoria de quem inicialmente os produziu.

**Figura 14** – Realização de cópias de materiais didáticos a partir da galeria de materiais



Fonte – Arquivo pessoal do autor

Na seção 3 descrita a seguir apresentaremos todas as informações necessárias para a utilização de dois materiais didáticos produzidos especificamente para o ensino de funções, abordando duas situações problemas relacionadas ao consumo consciente de água e ao tratamento de resíduos sólidos. Neste caso, disponibilizamos os *links* para acesso direto a estes dois materiais e as instruções necessárias para a sua utilização no GeoGebra Classroom.

### 1.3 Criação de ambientes virtuais de ensino e aprendizagem no GeoGebra Classroom

Para acessar o primeiro material didático referente ao “Consumo consciente de água”, segure a tecla CTRL do seu teclado e em seguida clique no link <https://www.geogebra.org/m/vrx5yx65>. Caso haja algum problema com esta forma de acesso basta copiar este link e colar na barra de endereço de qualquer navegador de internet.

Com isso você terá acesso ao material apresentado na Figura 15, o qual deverá ser copiado para a sua lista de materiais, conforme indicado na própria figura.

**Figura 15** – Acesso ao primeiro material didático “Consumo consciente de água”

Problema 1: consumo consciente de água

Autor: Anderson Souza

Você já parou para analisar a conta de água da sua casa? Sabe como é calculado o valor referente a cada mês? Bom, estas perguntas podem nos ajudar se estamos praticando o consumo consciente de água ou não. Nesta tarefa nós vamos te ajudar a pensar um pouco sobre estas questões, de modo que possa utilizar o seu conhecimento e contribuir para o consumo consciente de água em sua própria casa. É importante lembrar que o valor cobrado pelo consumo de água é determinado pela legislação de cada município. Observe na planilha abaixo as tarifas de água e esgoto para consumo residencial em Monte Alegre de Minas/MG.

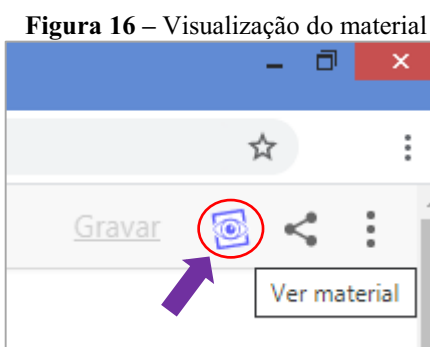
Planilha 1: Descrição das tarifas de água para consumo residencial em Monte Alegre de Minas/MG

Categoria residencial de consumo de água									
Faixas de consumo (m³)	Fator (m³)	Tarifa de água	Tarifa de esgoto	Tarifa Básica de Operação		m³	Valor cobrado em cada faixa		
				TBO Água	TBO Esgoto				
1 0	0	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 18,44	R\$ 5,93	0	R\$ 24,37		
2 1 a 5	5	R\$ 0,70	R\$ 0,23			5	R\$ 4,65		
3 6 a 10	5	R\$ 0,73	R\$ 0,23			5	R\$ 4,80		
4 11 a 15	5	R\$ 1,66	R\$ 0,53			5	R\$ 10,95		
5 16 a 20	5	R\$ 2,29	R\$ 0,71			5	R\$ 15,00		
6 21 a 25	5	R\$ 2,40	R\$ 0,77			5	R\$ 15,85		
7 26 a 30	5	R\$ 2,88	R\$ 0,92			5	R\$ 19,00		
8 31 a 40	10	R\$ 3,65	R\$ 1,17			10	R\$ 48,20		
9 41 a 99999	99959	R\$ 4,73	R\$ 1,52			1	R\$ 6,25		
Simulação							Total	R\$ 149,07	
Consumo em (m³)	41								

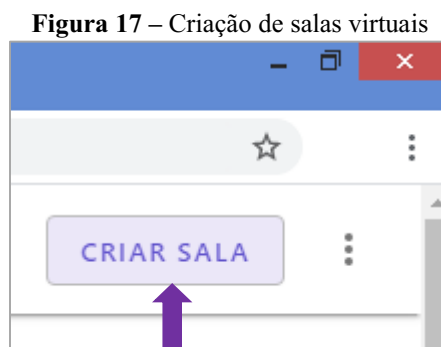
Fonte – Arquivo pessoal do autor

O seu arquivo receberá o nome de “Cópia de Problema 1: consumo consciente de água”, neste caso sugerimos a retirada das palavras “Cópia de”. Após a visualização completa do material, realize as alterações que achar pertinente e em seguida clique em GRAVAR no canto superior direito da tela ou em GRAVAR & FECHAR, conforme indicado anteriormente na Figura 11.

Após a realização de todas as modificações necessárias, clique em VER MATERIAL na Figura 16 e depois em CRIAR SALA na Figura 17.



Fonte – Arquivo pessoal do autor



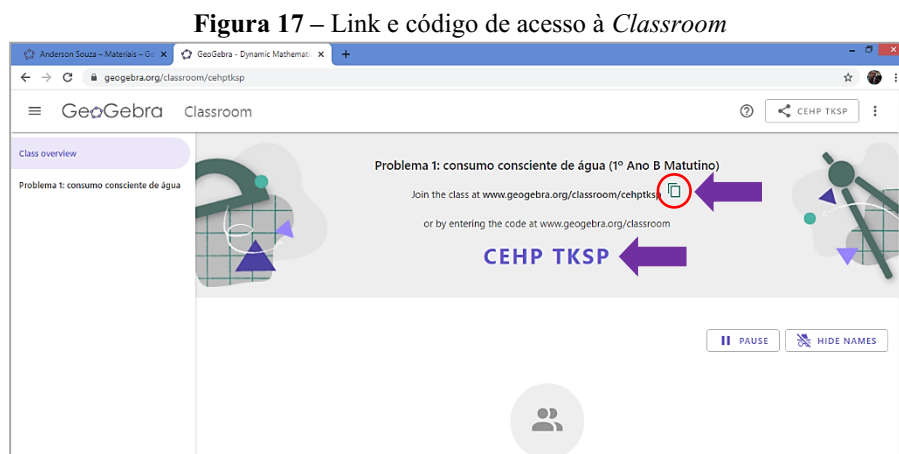
Fonte – Arquivo pessoal do autor

Ao clicar em CRIAR SALA, automaticamente irá aparecer em sua tela um pequeno formulário, o mesmo indicado na Figura 18. Neste formulário você poderá inserir um nome de acordo com a turma a qual ele se destina como, por exemplo, “Problema 1: consumo consciente de água (1º Ano B Matutino)”, em seguida basta clicar em CRIAR.



Fonte – Arquivo pessoal do autor

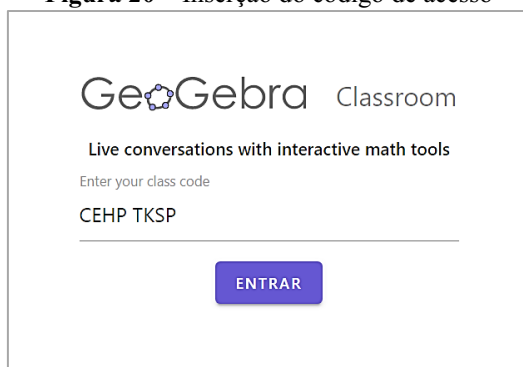
Com isso serão gerados automaticamente um código e um link de acesso à *Classroom* do GeoGebra, conforme indicado na Figura 19. Obviamente, ao realizar todos estes procedimentos o seu código e link serão diferentes, mas o acesso à *Classroom* será realizado da mesma forma, independentemente da opção escolhida.



Fonte: arquivo pessoal do autor

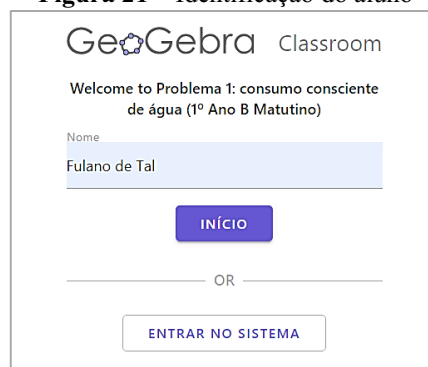
Na primeira opção de acesso, os seus alunos deverão acessar a página <https://www.geogebra.org/classroom> e digitar o código gerado para a sua *Classroom*, em seguida basta inserir um nome de identificação e clicar no botão de INÍCIO.

**Figura 20** – Inserção do código de acesso



Fonte – Arquivo pessoal do autor

**Figura 21** – Identificação do aluno

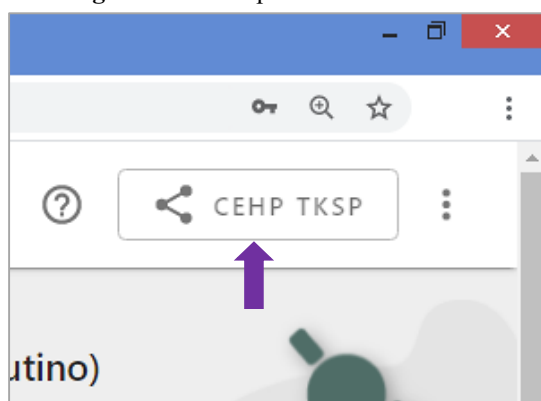


Fonte – Arquivo pessoal do autor

A segunda forma de acesso é considerada mais prática, uma vez que não é necessário a utilização de códigos, com isso, o acesso dos seus alunos à *Classroom* poderá ser realizado de forma direta, bastando clicar no link.

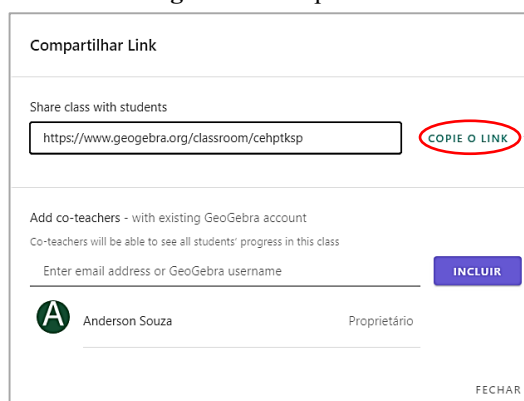
Para isso será necessário que você clique no botão de compartilhamento, conforme indicado na Figura 22, e depois no botão COPIE O LINK da Figura 23. O seu link será copiado para a área de transferência do seu computador podendo ser disponibilizado a seus alunos por qualquer aplicativo de mensagens ou redes sociais, o que inclui, E-mail, Facebook, Twitter, Instagram ou WhatsApp.

**Figura 22** – Compartilhamento de link



Fonte – Arquivo pessoal do autor

**Figura 23** – Copiar link



Fonte – Arquivo pessoal do autor

Salientamos que o acesso dos alunos à *Classroom* não requer deles a criação de nenhuma conta no GeoGebra, ou seja, qualquer pessoa pode ter acesso a *Classroom* por meio do link disponibilizado, sem necessariamente ter uma conta com perfil de acesso ao GeoGebra online.

Quanto as interações dos alunos no *Classroom*, isso poderá ser acompanhado por você em tempo real, na medida em que eles forem respondendo a cada uma das

tarefas propostas. Convém ressaltar que as palavras “Tarefa” ou “Task” são utilizadas no GeoGebra como padrão, para se referir tanto a questões discursivas ou de múltipla escolha bem como arquivos Applet criados com o aplicativo GeoGebra.

Outra questão que também merece destaque diz respeito ao acompanhamento dos alunos na realização de cada tarefa. Por meio do comando CLASS OVERVIEW você terá acesso ao desempenho individual de cada um deles, bastando clicar sobre o arquivo que leva seus respectivos nomes.

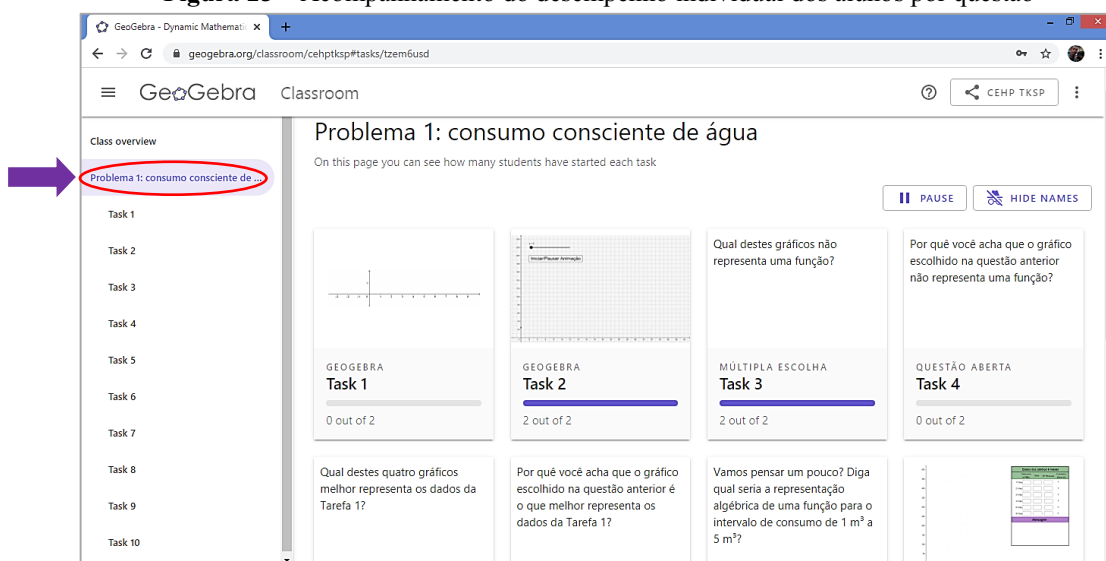
**Figura 24** – Acompanhamento do desempenho individual dos alunos



Fonte – Arquivo pessoal do autor

Por outro lado, há também a possibilidade de acompanhar o desempenho dos alunos de acordo com cada questão, neste caso basta clicar no comando com o nome da *Classroom*, escolher uma *task* (questão ou tarefa) e verificar as respostas de todos os alunos que responderam a esta mesma questão.

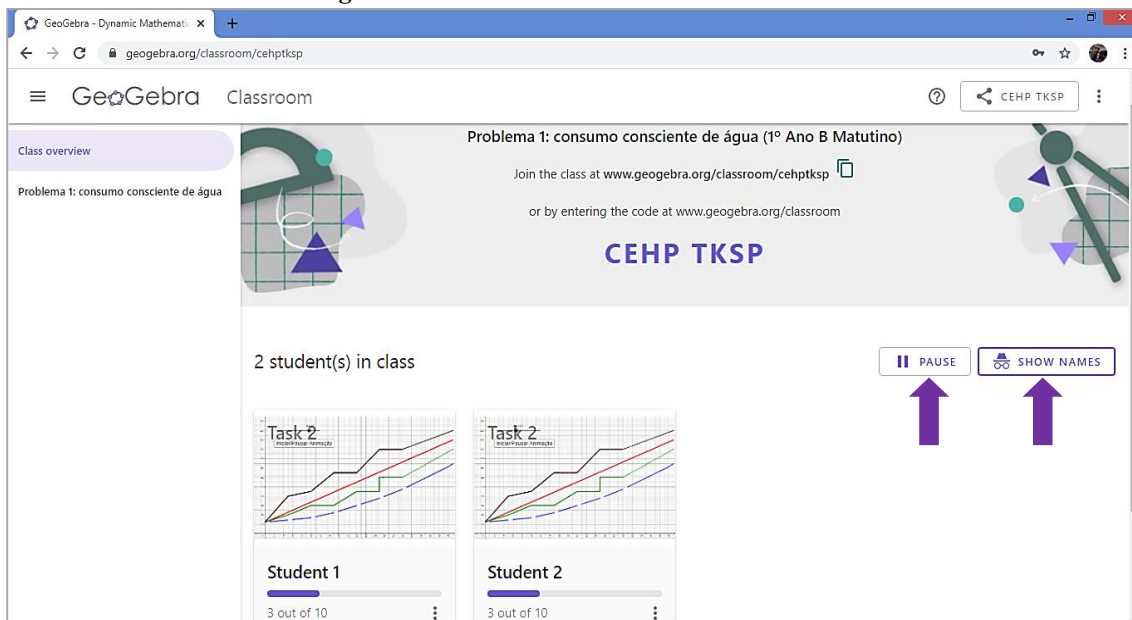
**Figura 25** – Acompanhamento do desempenho individual dos alunos por questão



Fonte – Arquivo pessoal do autor

Dentro do ambiente *Classroom* ainda há outros dois comandos, *PAUSE*, cuja finalidade é a de pausar a resolução das tarefas, não sendo possível aos alunos modificar ou inserir novas respostas, e o comando *HIDE NAMES* que tem a finalidade de ocultar o nome verdadeiro dos alunos, os quais passam a ser chamados de *STUDENT 1*, *STUDENT 2*, e assim por diante.

**Figura 26** – Comandos *PAUSE* e *HIDE NAMES*



Fonte – Arquivo pessoal do autor

Conforme são ativados cada um destes comandos muda de rótulo, neste caso, *PAUSE* passa a ser definido como *RESUME* e *HIDE NAMES* passa a ser definido como *SHOW NAMES*.

Nos próximos módulos apresentaremos todas as instruções necessárias para a realização da atividade 1 “Consumo consciente de água” e da atividade 2 “Tratamento de resíduos sólidos”.



## MÓDULO II

# CONSUMO CONSCIENTE DE ÁGUA

CONHECER PARA PRESERVAR



## Problema 1: consumo consciente de água

Nos últimos anos, a incidência de problemas relacionados a escassez de água em diferentes regiões do Brasil acendeu o alerta sobre os cuidados que devemos tomar para a preservação dos nossos recursos hídricos.

Embora a causa deste problema esteja diretamente ligada às questões climáticas, o desperdício de água nas categorias residencial, comercial e industrial também contribui consideravelmente para o agravamento dessa situação.

De acordo com a Organização das Nações Unidas (ONU), uma pessoa deveria gastar em média 110 litros de água por dia para atender todas as suas necessidades básicas, tanto de consumo como de higiene pessoal. No Brasil, estima-se que o gasto diário de água por pessoa pode chegar a mais de 200 litros, e mais da metade deste consumo é gasto no banheiro, com descargas, banhos ou outras utilizações.

Por outro lado, as consequências deste problema evidenciam cada vez mais a necessidade de conscientizar as pessoas para a adoção de hábitos de consumo sustentável de água, o que também perpassa pelo ensino básico, sobretudo pelo papel que ele pode desempenhar na formação de cidadãos críticos e engajados com as políticas de preservação dos recursos naturais.

Partindo desse pressuposto, abordaremos neste módulo a temática “Consumo consciente de água”, considerando informações reais sobre as tarifas de água e esgoto aplicadas no município de Monte Alegre de Minas, situado no interior do estado de Minas Gerais.

Com base nos conhecimentos sobre o conceito de função, realizamos um estudo detalhado sobre o algoritmo de cálculo utilizado nas faturas de água do município, incluindo também a análise do consumo médio per capita de cada um dos participantes da pesquisa.

Para isso estabelecemos três objetivos específicos, os quais visam analisar: (a) o processo de transição entre as diferentes formas de representação do conceito de função (planilha → gráfico → representação algébrica); (b) os elementos que embasam a definição que os alunos têm sobre o conceito de função (consistência ou fragilidade conceitual); e (c) os impactos da abordagem dada ao tema para a conscientização dos alunos quanto a adoção de hábitos de consumo sustentável de água.

Esta atividade, disponibilizada por meio do link <https://www.geogebra.org/m/vrx5yx65>, integra um conjunto de dez tarefas, as quais



foram organizadas da seguinte forma: (a) Tarefa 1 – utilização do algoritmo para o consumo faturado de água; (b) Tarefas de 2 a 7 – aplicação do conceito de função; e (c) Tarefas de 8 a 10 – promoção de análise crítica e reflexiva sobre o consumo de água per capita. Nos subitens descritos a seguir descreveremos em detalhes cada uma dessas tarefas, considerando orientações específicas de como proceder em cada uma delas.

## 2.1 Descrição da Tarefa 1

Antes de descrevermos a Tarefa 1, nos convém ressaltar algumas informações que foram incluídas no início da atividade, as quais são de fundamental importância para a resolução desta tarefa. Conforme apresentado na Figura 27, no município de Monte Alegre de Minas a categoria residencial de consumo de água é dividida em nove faixas de consumo, as quais compõem um consumo faturado baseado em um valor fixo (TBO Água + TBO Esgoto) e um valor variável (Tarifa de água + Tarifa de esgoto).

**Figura 27** – Tarifas de água e esgoto aplicadas no município de Monte Alegre de Minas

Categoria residencial de consumo de água							
Faixas de consumo (m³)	Fator (m³)	Tarifa de água	Tarifa de esgoto	Tarifa Básica de Operação		m³	Valor cobrado em cada faixa
				TBO Água	TBO Esgoto		
1	0	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 18,44	R\$ 5,93	0	R\$ 24,37
2	1 a 5	R\$ 0,70	R\$ 0,23			5	R\$ 4,65
3	6 a 10	R\$ 0,73	R\$ 0,23			5	R\$ 4,80
4	11 a 15	R\$ 1,66	R\$ 0,53			5	R\$ 10,95
5	16 a 20	R\$ 2,29	R\$ 0,71			5	R\$ 15,00
6	21 a 25	R\$ 2,40	R\$ 0,77			5	R\$ 15,85
7	26 a 30	R\$ 2,88	R\$ 0,92			5	R\$ 19,00
8	31 a 40	R\$ 3,65	R\$ 1,17			10	R\$ 48,20
9	41 a 99999	R\$ 4,73	R\$ 1,52			1	R\$ 6,25
Simulação						Total	R\$ 149,07
Consumo em (m³)		41					

Fonte – Adaptado de Prefeitura Municipal de Monte Alegre de Minas

De acordo com esta planilha, a Tarifa Básica Operacional (TBO) de água e esgoto será cobrada INDEPENDENTEMENTE de consumo, ou seja, mesmo que não haja consumo de água em um determinado mês, o valor mínimo cobrado será a soma (TBO Água + TBO Esgoto = R\$ 24,37). Este valor refere-se a primeira faixa de consumo, conforme mostrado na planilha da figura anterior.

Para um consumo diferente de 0, deve-se proceder com a distribuição da quantidade de m³ consumidos por entre as faixas de consumo, em estilo cascata, considerando o limite do fator de cada uma delas. É importante destacar que os valores correspondentes a estas faixas de consumo são calculados da seguinte forma:

$$(\text{Tarifa de água} + \text{Tarifa de esgoto}) * \text{Fator}$$

O valor total da conta de água será a soma dos valores cobrados em cada faixa. Observe no exemplo abaixo os cálculos referentes ao consumo de 13 m<sup>3</sup>.

$$13 \text{ m}^3 = (0 \text{ m}^3 \text{ na faixa 1}) + (5 \text{ m}^3 \text{ na faixa 2}) + (5 \text{ m}^3 \text{ na faixa 3}) + (3 \text{ m}^3 \text{ na faixa 4})$$

$$\text{Total} = \text{R\$ } 24,37 + \text{R\$ } 4,65 + \text{R\$ } 4,80 + \text{R\$ } 6,57 = \text{R\$ } 40,39$$

Ressaltamos que o valor correspondente a R\$ 24,37 refere-se a (TBO Água + TBO Esgoto), que é uma taxa fixa que será cobrada independentemente de consumo. Já o valor correspondente a R\$ 6,57, referente ao consumo de 3 m<sup>3</sup> na faixa 4, foi obtido a partir da soma da Tarifa de água com a Tarifa de esgoto, multiplicado pelo fator 3, o que foi obtido da seguinte forma.

$$(\text{R\$ } 1,66 + \text{R\$ } 0,53) * 3 = \text{R\$ } 6,57$$

Com base nestas orientações, os alunos deverão utilizar os mesmos procedimentos para calcular o valor a ser pago em três diferentes simulações de consumo, 5 m<sup>3</sup>, 20 m<sup>3</sup> e 31 m<sup>3</sup>, conforme mostrado na Figura 28.

**Figura 28** – Simulações de consumo faturado de água na Tarefa 1

Tarefa 1: Com base nas informações da Planilha 1, preencha a coluna B com os valores cobrados por cada m<sup>3</sup> correspondente.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Consumo em (m <sup>3</sup> )	Valor cobrado						
2	0m <sup>3</sup>	24.37						
3	5m <sup>3</sup>							
4	20m <sup>3</sup>							
5	31m <sup>3</sup>							
6								
7								
8								
9								
10								
11								

Fonte – Arquivo pessoal do autor

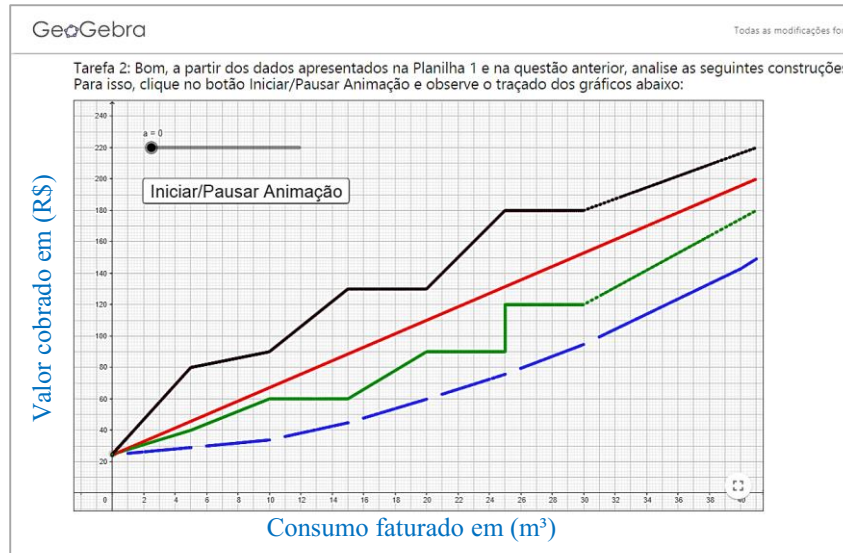
Espera-se que os valores encontrados correspondam a: (a) [5 m<sup>3</sup> → R\$ 29,02]; (b) [20 m<sup>3</sup> → R\$ 59,77]; e (c) [31 m<sup>3</sup> → R\$ 99,44].

A resolução dessa tarefa além de permitir ao aluno a compreensão de como é cobrado o valor pelo consumo de água, visa também lhes dar subsídios para que ele possa identificar na Tarefa 2 o gráfico que abrange todas as faixas de consumo, dentre quatro possibilidades. Assim, ele estará relacionando duas diferentes representações do conceito de função (planilha → gráfico).

## 2.2 Descrição das Tarefas de 2 a 7

Conforme apresentado anteriormente, a Tarefa 2 está diretamente relacionada a resolução da Tarefa 1, em que os alunos deverão analisar quatro diferentes gráficos, conforme apresentado na Figura 29, descrita a seguir.

**Figura 29** – Descrição dos gráficos apresentados na Tarefa 2



Fonte – Arquivo pessoal do autor

A malha quadriculada utilizada no plano cartesiano foi inserida com intuito de favorecer a identificação do gráfico correspondente as informações inseridas na Tarefa 1, relacionando assim o consumo faturado com o respectivo valor a ser pago.

Com base na análise preliminar destes gráficos, os alunos deverão responder as tarefas de 3 a 6, sendo que na Tarefa 3 eles deverão identificar qual gráfico não representa uma função (gráfico verde), justificando na Tarefa 4 os motivos que embasam a sua escolha (ver Figura 30).

**Figura 30** – Descrição das tarefas 3 e 4

GeoGebra

Tarefa 3: .  
Qual destes gráficos não representa uma função?

Assinale a sua resposta aqui

a) Gráfico preto  
 b) Gráfico vermelho  
 c) Gráfico verde  
 d) Gráfico azul

Tarefa 4: .  
Por quê você acha que o gráfico escolhido na questão anterior não representa uma função?

Digite sua resposta aqui...

Fonte – Arquivo pessoal do autor

Na resolução da Tarefa 4 os alunos poderão inclusive citar a inclinação vertical do gráfico verde em “ $x = 25$ ” como o principal motivo deste gráfico não representar uma função, uma vez que isso indicaria a relação de uma mesma variável independente “ $x$ ” com mais de um valor correspondente a variável dependente “ $y$ ”, o que vai contra a definição que temos sobre o conceito função.

Por outro lado, as tarefas 5 e 6 (ver Figura 31) visam relacionar os dados apresentados na Tarefa 1 com o respectivo gráfico apresentado na Tarefa 2. Neste caso, ao identificarem o gráfico azul como sendo a resposta correta da Tarefa 5, os alunos poderão justificar a sua escolha na Tarefa 6 alegando que o gráfico azul é o único que atende a todos os critérios, tanto da abrangência de todos os pontos que relacionam (Consumo em ( $m^3$ ), Valor cobrado) da planilha como da própria definição de função.

**Figura 31** – Descrição das tarefas 5 e 6

GeoGebra

Tarefa 5: .  
Qual destes gráficos melhor representa os dados da Tarefa 1?

Assinale a sua resposta aqui

a) Gráfico preto  
 b) Gráfico vermelho  
 c) Gráfico verde  
 d) Azul

Tarefa 6: .  
Por quê você acha que o gráfico escolhido na questão anterior é o que melhor representa os dados da Tarefa 1?

Digite sua resposta aqui...

Fonte – Arquivo pessoal do autor

As resoluções destas tarefas poderão auxiliar o professor na identificação de possíveis consistências ou fragilidades conceituais, incluindo neste último caso ocorrência de interpretações equivocadas sobre o conceito de função.

Na Tarefa 7 pretendemos instigar os alunos a pensarem em uma expressão algébrica que defina uma função específica para o intervalo de consumo de  $1 m^3$  a  $5 m^3$ , conforme descrito na Figura 32.

**Figura 32** – Descrição da Tarefa 7

GeoGebra

Tarefa 7: .  
Vamos pensar um pouco? Diga qual seria a representação algébrica de uma função para o intervalo de consumo de  $1 m^3$  a  $5 m^3$ ?

Digite sua resposta aqui...

Fonte – Arquivo pessoal do autor

Considerando as informações apresentadas na descrição da Tarefa 1, poderíamos chegar a seguinte resolução:

$$(Tarifa de \acute{a}gua + Tarifa de esgoto) * Fator + (TBO \acute{A}gua + TBO Esgoto)$$

$$(0,70 + 0,23) * Fator + (18,44 + 5,93) = (0,93) * Fator + 24,37$$

Em termos de “x” e “y” esta express\o poderia ser generalizada por:

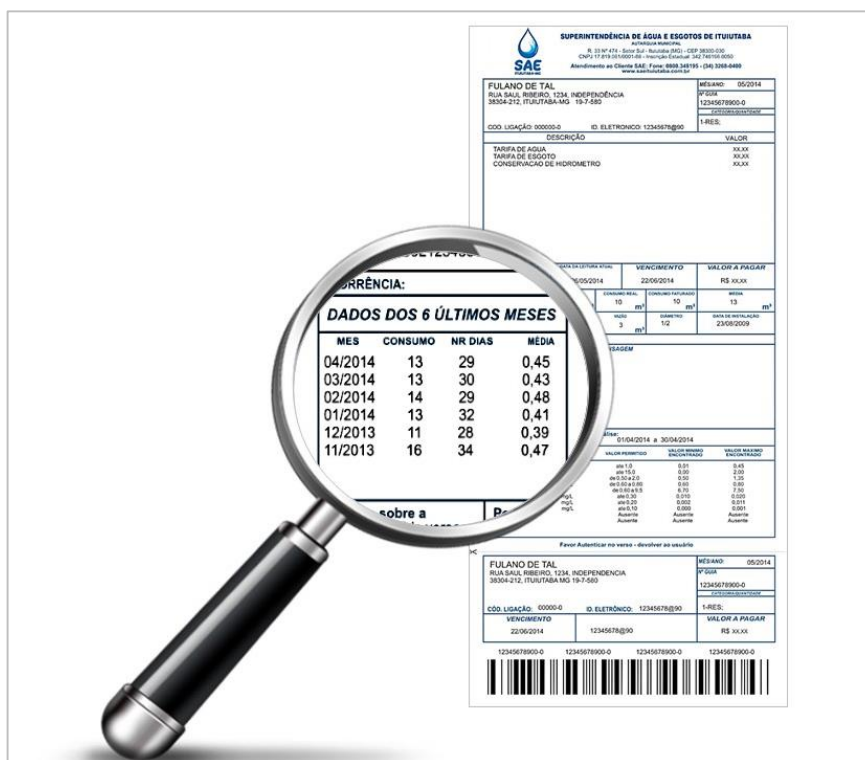
$$F(x) = 0,93x + 24,37 \text{ ou } y = 0,93x + 24,37$$

A resolu\c\o desta tarefa pode auxiliar os alunos a desenvolver a habilidade de identificar padr\oes, “criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generaliza\c\o”, conforme proposto pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017, p. 541).

### 2.3 Descri\c\o das Tarefas de 8 a 10

A Tarefa 8 consiste na an\lise do consumo per capita de \c\gua de cada um dos alunos participantes, considerando o consumo residencial de m<sup>3</sup> registrados nos \c\ltimos seis meses. Neste caso, se faz necess\rio a utiliza\c\o de apenas uma conta de \c\gua, de prefer\ncia a mais recente, cujo hist\rico de consumo destes meses j\ se encontra dispon\vel na pr\pria fatura, conforme indicado na Figura 33.

**Figura 33** – Consumo residencial dos \c\ltimos seis meses



Fonte – Adaptado de Superint\nd\ncia de \c\gua e Esgoto – SAE Ituiutaba/MG

Com base nestas informações, os alunos deverão preencher o formulário apresentado na Figura 34 com informações referentes: (a) ao consumo de m<sup>3</sup> em cada mês; (b) a quantidade de dias faturados; e (c) ao número de membros que compõem o núcleo familiar.

Figura 34 – Formulário da Tarefa 8

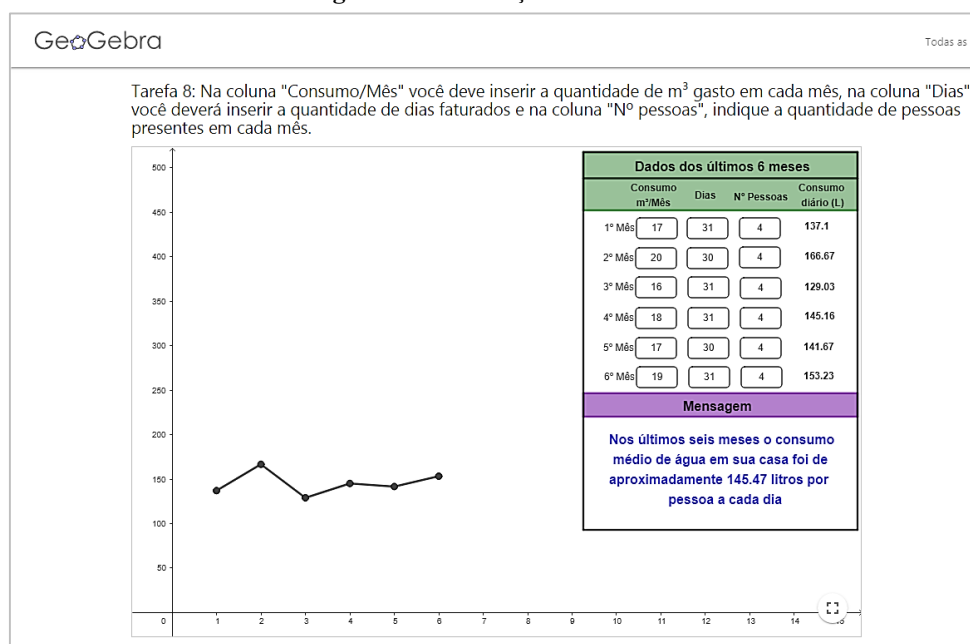
Dados dos últimos 6 meses				
	Consumo m <sup>3</sup> /Mês	Dias	Nº Pessoas	Consumo diário (L)
1º Mês	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	?
2º Mês	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	?
3º Mês	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	?
4º Mês	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	?
5º Mês	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	?
6º Mês	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	?

**Mensagem**

Fonte – Arquivo pessoal do autor

A inserção destas informações no formulário nos remete uma mensagem com o valor do consumo médio per capita de água dos últimos seis meses analisados. Além disso, os alunos poderão analisar o seu consumo residencial por meio de um gráfico de linhas, conforme indicado no plano cartesiano da Figura 35.

Figura 35 – Descrição da Tarefa 8



Fonte – Arquivo pessoal do autor

Nessa tarefa, a exploração dos aspectos de aplicabilidade do conceito de função não possui um “fim em si mesma”, mas visa também dar subsídios para que os alunos reflitam sobre os seus próprios hábitos de consumo de água. Segundo o Plano Municipal de Saneamento Básico de Monte Alegre de Minas, elaborado em 2015 pela Universidade Federal de Uberlândia, o consumo médio de água por pessoa estimado para este ano foi de 268 litros por dia, o que é considerado alto para cidades com até 50.000 habitantes.

Neste sentido, na resolução das tarefas 9 e 10 (Figura 36) os alunos poderão expressar algumas medidas que podem ser tomadas para a utilização da água de forma sustentável.

**Figura 36** – Descrição das tarefas 9 e 10

	Todas as modificações foram gravadas
<b>Tarefa 9:</b> . Se o consumo de água em sua casa estiver dentro do recomendável pela ONU (110 L/hab/dia), diga o que vocês fazem para consumir a água de forma consciente. Caso o consumo de água em sua casa esteja acima do recomendável pela ONU, diga que medidas vocês podem adotar de agora em diante para contribuir com o consumo sustentável de água.  Digite sua resposta aqui...	
<b>Tarefa 10:</b> . A partir da análise do consumo de água em sua própria casa, diga como você interpreta o dever que você e seus familiares têm na preservação dos recursos hídricos em sua cidade.  Digite sua resposta aqui...	

Fonte – Arquivo pessoal do autor

Isso implica na construção de uma aprendizagem que também contemple o desenvolvimento da habilidade de “interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas” (BRASIL, 2017, p. 533).

Assim, esperamos contribuir não apenas com os conhecimentos pedagógicos sobre o conceito de função, mas também com a formação de cidadãos críticos, reflexivos e cientes dos seus direitos e das suas responsabilidades quanto a adoção de hábitos de consumo sustentável de água.



## MÓDULO III

# TRATAMENTO DE RESÍDUOS SÓLIDOS

RESPONSABILIDADE COM A PRESERVAÇÃO DO  
MEIO AMBIENTE



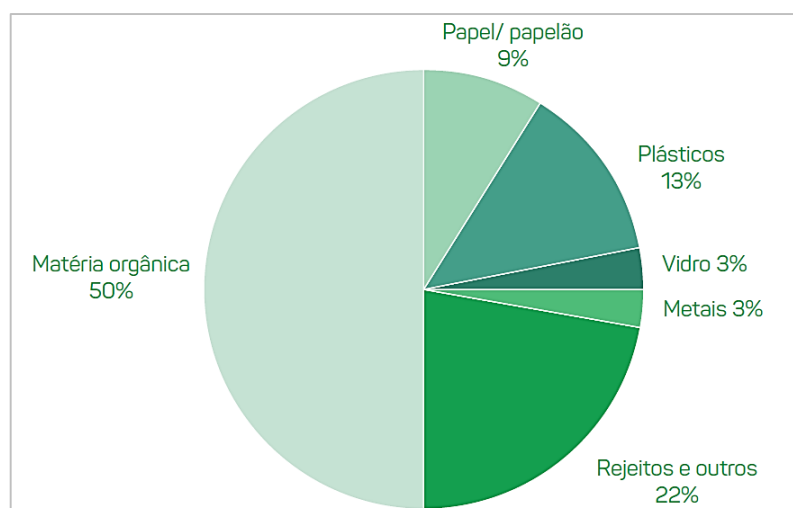


## Problema 2: tratamento de resíduos sólidos

O descarte inadequado de resíduos sólidos tem se constituído como um problema preocupante de graves consequências para o meio ambiente. De acordo com a Associação Brasileira das Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais (ABRELPE), o Brasil produziu em 2019 cerca de 79,1 milhões de toneladas de resíduos sólidos, o que representa um aumento de 12,4 milhões de toneladas a mais do que foi registrado em 2010.

É importante ressaltar que a maior parte destes resíduos sólidos é composta por matéria orgânica, cerca de 50% do valor total. No Gráfico 1 apresentado a seguir, o Ministério do Meio Ambiente (MMA) descreve a composição dos resíduos sólidos em seis diferentes categorias: (a) papel/papelão; (b) plásticos; (c) vidro; (d) metais; (e) matéria orgânica; e (f) rejeitos e outros.

**Gráfico 1** - Composição dos resíduos sólidos urbanos



Fonte – BRASIL, 2019, p. 19

A produção de matéria orgânica em larga escala requer do poder público uma maior atenção quanto ao tratamento destes resíduos, uma vez que o descarte inadequado pode acarretar a contaminação dos lençóis freáticos.

A disposição de resíduos orgânicos, seja em lixões, seja em aterros controlados ou sanitários, gera chorume (líquido de cor escura e elevada carga orgânica), que pode contaminar o solo e as águas subterrâneas, emite biogás com importante conteúdo de gás metano (importante contribuinte antrópico de emissões de gases do efeito estufa), ocasiona maus odores e favorece a proliferação de vetores de doenças (BRASIL, 2019, p. 31).

No município de Monte Alegre de Minas os resíduos sólidos têm como destino final o aterro controlado, que funciona sem dispersores de gases e muito menos coleta e

tratamento de chorume. Entretanto, está em estudo a implantação de um parque sanitário para tratamento de resíduos sólidos, conforme definido no Plano Municipal de Saneamento Básico (PMSB) do município.

Com base nestas informações buscamos chamar a atenção dos alunos para este problema, despertando a sua capacidade de investigação por meio da exploração de um modelo geométrico de um reservatório de chorume. Neste modelo os alunos poderão simular as dimensões e o volume que este reservatório pode ter, levando-se em consideração a largura e o comprimento da manta impermeabilizante que o reveste.

Também faz parte desta investigação a análise do gráfico correspondente a função que relaciona as variáveis envolvidas na construção deste reservatório. Para isso estabelecemos três objetivos específicos, os quais visam: (a) analisar a viabilidade do software GeoGebra para a promoção do pensamento algébrico e para a generalização de padrões observáveis, considerando o estudo das relações entre Altura e Volume na construção simulada de um reservatório de chorume; (b) identificar os critérios utilizados pelos alunos na construção destes modelos (maximização de volume, aproveitamento de material e segurança); e (c) apontar possíveis contribuições da abordagem do tema para a conscientização dos alunos quanto a promoção de ações que visem atenuar os impactos que o descarte de resíduos sólidos geram ao meio ambiente.

Esta atividade integra um conjunto de dez tarefas, disponíveis por meio do link <https://www.geogebra.org/m/bbcshtpk>. A organização dessas tarefas segue uma estrutura similar ao que foi apresentado no Módulo II, sendo definida da seguinte forma: (a) Tarefas de 1 a 5 – identificação de padrões e criação de conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização; (b) Tarefas de 6 a 8 – análise da função empregada; e (c) Tarefas 9 e 10 – discussão sobre possíveis ações a serem tomadas para o correto tratamento e destinação de resíduos sólidos. Consideramos nos subitens descritos a seguir orientações específicas sobre como proceder em cada uma dessas tarefas.

### 3.1 Descrição das Tarefas de 1 a 5

Conforme apresentado no início desse módulo, a disposição de resíduos orgânicos em lixões e aterros sanitários produz o chorume, um líquido altamente poluente que pode contaminar as águas subterrâneas por meio da sua infiltração no solo.

Para contextualizar o assunto (Figura 37), apresentamos no início dessa atividade um vídeo informativo que descreve as etapas de produção, coleta e tratamento de chorume no aterro sanitário de Cariacica, localizado no estado do Espírito Santo, e no município de São Gonçalo, na região metropolitana do Rio de Janeiro.

**Figura 37** – Contextualização do Problema 2



Fonte – Arquivo pessoal do autor

Na reportagem veiculada pelo Jornal Nacional, disponível por meio do [link<sup>3</sup>](https://www.youtube.com/watch?v=KArpebSSaL4) <https://www.youtube.com/watch?v=KArpebSSaL4>, são apresentadas três importantes informações, as quais descrevem: (a) como o chorume é produzido; (b) os impactos que ele pode acarretar para o meio ambiente; e (c) as possíveis formas de tratamento de chorume por meio de tecnologias avançadas de proteção e recuperação do meio ambiente.

Também faz parte desse tratamento a construção de reservatórios de chorume, os quais devem ser revestidos por manta impermeabilizante, também conhecida como geomembrana de Polietileno de Alta Densidade (PEAD), conforme apresentado na Figura 38.

**Figura 38** – Aplicação de manta impermeabilizante em reservatórios de chorume

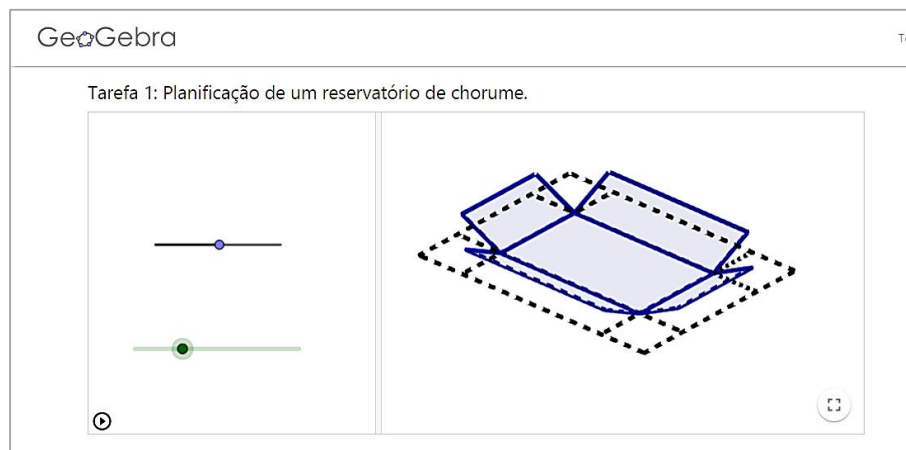


Fonte - <https://www.aviserra.com.br/produtos/6>

<sup>3</sup> Acesso em: nov. 2020.

Estas informações visam dar subsídios para que os alunos compreendam a fase inicial de coleta de chorume nos aterros sanitários, podendo simular, a partir disso, a construção de reservatório de chorume por meio de um modelo geométrico planificado. Na Tarefa 1, descrita na Figura 39, foi inserida uma animação na qual os alunos poderão observar e simular as dimensões do modelo planificado.

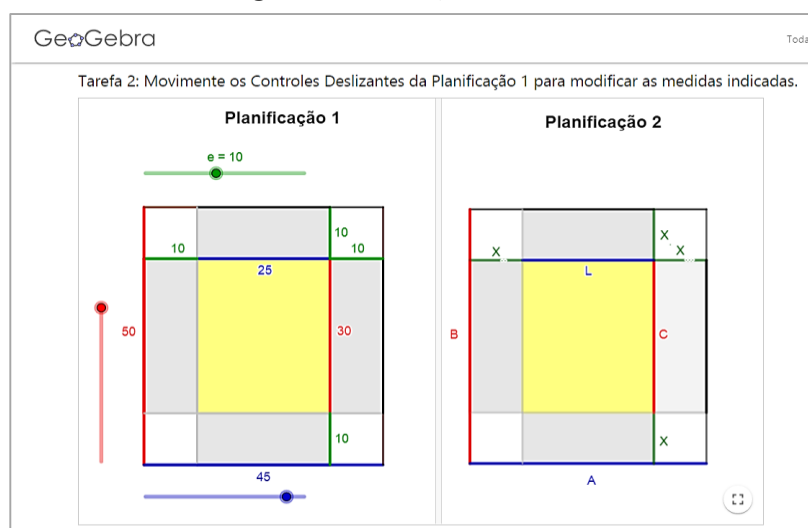
**Figura 39** – Descrição da Tarefa 1



Fonte – Arquivo pessoal do autor

Essa tarefa é apenas ilustrativa, não sendo necessária a realização de nenhum tipo de resolução. Por outro lado a Tarefa 2, descrita na Figura 40, possui um conjunto de elementos que poderão auxiliar os alunos a chegar na expressão algébrica que generaliza o volume de um reservatório de chorume em função das suas medidas de comprimento, largura e altura.

**Figura 40** – Descrição da Tarefa 2



Fonte – Arquivo pessoal do autor

Nessa tarefa são utilizadas duas planificações, sendo que na primeira planificação as dimensões estão indicadas com valores numéricos e na segunda com valores algébricos. Isso foi acrescentado com intuito de facilitar a compreensão de como

as variáveis envolvidas se relacionam, uma vez que a alteração das dimensões da Planificação 1 também produz as mesmas alterações nas dimensões da Planificação 2.

A partir disso os alunos poderão responder as tarefas 3 e 4 (Figura 41), considerando as dimensões da Planificação 2. Para isso deverão colocar as variáveis L (largura) e C (comprimento) em função da variável X (altura), lembrando que L e C representam as dimensões do fundo do reservatório.

**Figura 41** – Descrição das tarefas 3 e 4

GeoGebra Todas as modificações foram salvas

**Tarefa 3:**  
Como podemos representar a largura (L) deste reservatório em função da medida da largura (A) da manta e da altura (X) do reservatório?

Assinale a sua resposta aqui:

- a)  $L = A + 2X$
- b)  $L = A + X$
- c)  $L = A - 2X$
- d)  $L = A - X$

**Tarefa 4:**  
Como podemos representar o comprimento (C) deste reservatório em função do comprimento (B) da manta e da altura (X) do reservatório?

Assinale a sua resposta aqui:

- a)  $C = B - 2X$
- b)  $C = B + X$
- c)  $C = B + 2X$
- d)  $C = B - X$

Fonte – Arquivo pessoal do autor

É importante destacar que as variáveis A e B representam respectivamente a largura e o comprimento da manta de impermeabilização, as quais são de fundamental importância para o dimensionamento do reservatório de chorume. Assim, ao considerarmos primeiro as dimensões da manta garantimos o melhor aproveitamento desse material, com o menor desperdício possível.

De acordo com a análise da Tarefa 2 podemos concluir que a largura e o comprimento do fundo do reservatório serão dados por  $L = A - 2X$  e por  $C = B - 2X$ . Estas informações são extremamente importantes para a resolução da Tarefa 5 (Figura 42), onde os alunos poderão descrever uma expressão algébrica geral para o volume do reservatório, obtida por meio de manipulações algébrica na fórmula  $V = L * C * X$ .

**Figura 42** – Descrição da Tarefa 5

GeoGebra Todas as modificações foram salvas

**Tarefa 5:**  
Utilize as respostas das tarefas 3 e 4 com os devidos valores da largura (L) e do comprimento (C), e defina uma expressão algébrica para o volume de um reservatório com as mesmas dimensões, lembrando que a altura também será indicada por X.

Dica: observe o exemplo anterior e realize os mesmos cálculos.

Digite sua resposta aqui...

Fonte – Arquivo pessoal do autor

Para auxiliar os alunos na resolução dessa tarefa foi incluído em sua descrição um exemplo que descreve passo a passo todas as etapas e procedimentos algébricos pertinentes a esta resolução, a qual admite como resposta qualquer uma das seguintes expressões:

$$V = (AB)X - 2AX^2 - 2BX^2 + 4X^3 \quad \rightarrow \quad V = (AB)X - 2(A + B)X^2 + 4X^3$$

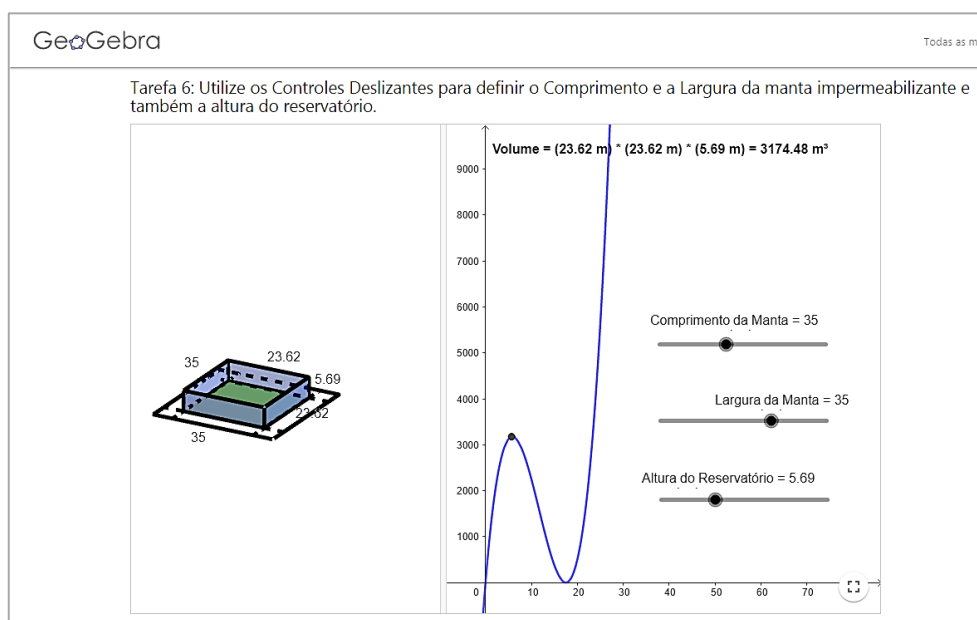
$$V = 4X^3 - 2(A + B)X^2 + (AB)X$$

Espera-se que a partir disso os alunos consigam desenvolver o pensamento algébrico e as habilidades referentes a identificação de padrões para a realização de generalizações, conforme proposto pela BNCC.

### 3.2 Descrição das Tarefas de 6 a 8

A Tarefa 6, ilustrada na Figura 43, consiste na apresentação de um modelo geométrico que permite simular as dimensões de um reservatório de chorume em função das medidas do comprimento e largura da manta de impermeabilização que irá revesti-lo.

**Figura 43** – Descrição da Tarefa 6



Fonte – Arquivo pessoal do autor

É importante ressaltar que essas mantas de impermeabilização possuem algumas medidas padronizadas como, por exemplo, a largura igual a 5 metros e o comprimento mínimo de 25 metros. A sua comercialização se dá por meio de enormes carretéis, cuja instalação requer a soldagem das mantas utilizadas, conforme apresentado na Figura 44.

**Figura 44** – Manta ou geomembrana impermeabilizante de PEAD



Fonte – Adaptado de: <https://cscambiental.com.br/geomembrana-pead-o-que-e/>

É justamente em virtude dessas especificações que decidimos priorizar as dimensões da manta de impermeabilização como fator preponderante para a determinação das medidas de comprimento, largura e profundidade do reservatório de chorume a ser construído, aliando assim o menor desperdício com o melhor aproveitamento possível do material utilizado.

Neste sentido, ao determinarem as medidas indicadas na Tarefa 6 os alunos poderão embasar as suas escolhas em critérios que priorizem: (a) o mínimo de desperdício dos materiais utilizados; (b) o maior volume possível de armazenamento de chorume; (c) a segurança do modelo projetado; ou (d) qualquer outro critério que preze pela eficiência desse mesmo modelo. Esses critérios poderão ser justificados nas tarefas 7 e 8, conforme ilustrado na Figura 45.

**Figura 45** – Descrição das tarefas 7 e 8

GeoGebra Todas as modificações foram g

---

**Tarefa 7:** .  
Quais foram as medidas do Comprimento e da Largura que você escolheu para a manta que irá revestir este reservatório? Por que você escolheu estas medidas?  
Digite sua resposta aqui...

---

**Tarefa 8:** .  
Considerando as medidas que você escolheu na tarefa 7, diga qual deve ser a medida da altura deste reservatório para que ele tenha o maior volume possível? Justifique se esta medida da altura do reservatório é adequada ou não.  
Digite sua resposta aqui...

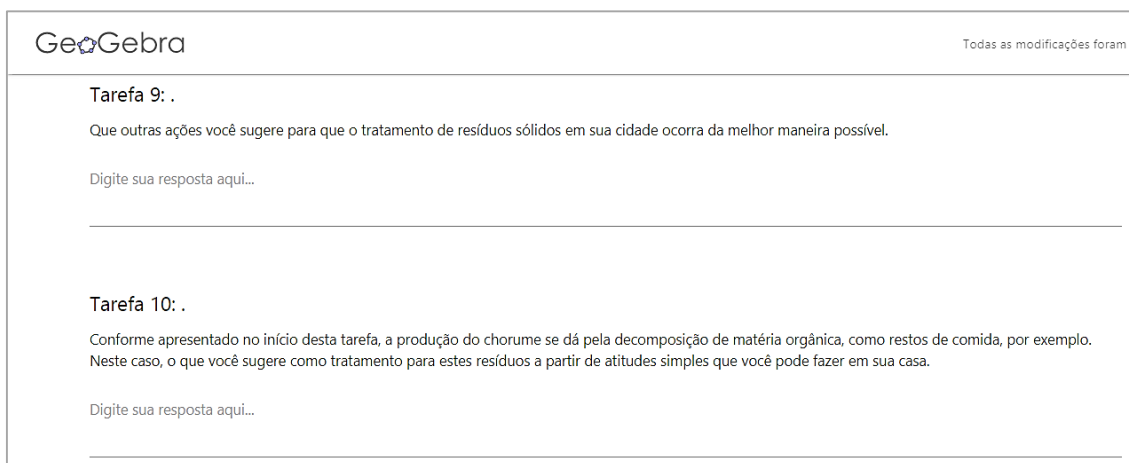
Fonte – Arquivo pessoal do autor

No que diz respeito à análise da função empregada, os alunos poderão observar o comportamento do gráfico quando modificados os seus parâmetros e a relação entre o ponto de máximo da função com o maior volume de armazenamento do reservatório.

### 3.3 Descrição das Tarefas 9 e 10

A resolução das tarefas 9 e 10 (Figura 46) se baseia no princípio da autorreflexão, onde os alunos poderão argumentar sobre possíveis ações a serem tomadas para que o tratamento de resíduos sólidos ocorra de forma sustentável e com especial atenção a preservação do meio ambiente em todas as suas etapas.

**Figura 46** – Descrição das tarefas 9 e 10



GeoGebra Todas as modificações foram g

**Tarefa 9:** .  
Que outras ações você sugere para que o tratamento de resíduos sólidos em sua cidade ocorra da melhor maneira possível.

Digite sua resposta aqui...

---

**Tarefa 10:** .  
Conforme apresentado no início desta tarefa, a produção do chorume se dá pela decomposição de matéria orgânica, como restos de comida, por exemplo. Neste caso, o que você sugere como tratamento para estes resíduos a partir de atitudes simples que você pode fazer em sua casa.

Digite sua resposta aqui...

Fonte – Arquivo pessoal do autor

Espera-se que a partir disso, os alunos se conscientizem quanto a adoção de medidas simples no tratamento de resíduos sólidos, as quais ele mesmo pode ajudar a implementar em sua própria casa como, por exemplo, a separação dos resíduos sólidos de acordo com a sua composição, tendo em vista a sua correta destinação. Também consideramos pertinente uma discussão sobre o reaproveitamento de matéria orgânica em composteiras para a produção de adubo orgânico, considerando, evidentemente, as situações em que isso for possível.

### 3.4 Considerações finais

A adoção de hábitos de consumo sustentável e o respeito a preservação do meio ambiente são fatores de extrema importância para a manutenção da vida em nosso planeta, e elas podem começar com atitudes simples que todos nós podemos assumir em nossas atividades cotidianas. Neste sentido, a realização das atividades propostas neste material visa não apenas o aprofundamento dos conhecimentos sobre funções polinomiais, mas também a formação dos nossos alunos enquanto cidadãos cientes das suas responsabilidades e do papel que eles ocupam no mundo.



## Referências

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Agenda Nacional de Qualidade Ambiental Urbana**: Programa Nacional Lixão Zero [recurso eletrônico] / Ministério do Meio Ambiente, Secretaria de Qualidade Ambiental, Departamento de Qualidade Ambiental e Gestão de Resíduos, Coordenação-Geral de Qualidade Ambiental e Gestão de Resíduos. – Brasília, DF: MMA, 2019.

PREFEITURA MUNICIPAL DE MONTE ALEGRE DE MINAS. **Plano Municipal de Saneamento Básico do Município de Monte Alegre de Minas**. Disponível em: <http://cides.com.br/wp-content/uploads/2016/04/PMSB-Monte-Alegre-de-Minas-FINAL.compressed.pdf>. Acesso em: out. 2020.

TELLES, Dirceu D'Alkmin. **Brasil ainda não sabe lidar com o lixo, após uma década de Política Nacional**. Disponível em: <https://www.ecodebate.com.br/2021/07/16/brasil-ainda-nao-sabe-lidar-com-o-lixo-apos-uma-decada-de-politica-nacional/>. Acesso em: jul. 2021.

Compilações do autor - As ilustrações que compõem a capa desse produto educacional bem como as apresentações dos módulos I, II e III foram retiradas das seguintes fontes:

Capa

<https://www.geogebra.org>

<https://www.geogebra.org/groups>

<https://valijas.ceibal.edu.uy/storage/app/media/Fichas/geogebra.png>

<http://www.ime.unicamp.br/~apmat/projetos-em-sala-de-aula/>

<https://www.facebook.com/geogebra/photos/10158590364428232>

<https://www.pngegg.com/pt/png-ylylm>

<https://wiki.geogebra.org/s/en/index.php?title=File:Download-icons-device-tablet.png>

<https://i.pinimg.com/564x/2b/18/ef/2b18efdcd1f791b79442737f884cf2.jpg>

Sumário

<https://thumbs.dreamstime.com/z/dark-blue-yellow-shiny-triangle-abstract-background-vector-presentation-design-modern-futuristic-corporate-concept-dark-206533881.jpg>

Módulo I

[https://www.editoracrv.com.br/img\\_produtos/f2bef96e809c178e54b94d1132dd551c.jpg](https://www.editoracrv.com.br/img_produtos/f2bef96e809c178e54b94d1132dd551c.jpg)

<https://i.ytimg.com/vi/m9XHArStSCs/hqdefault.jpg>

Módulo II

<https://s1.static.brasescola.uol.com.br/be/conteudo/images/gua.jpg>

<https://previews.123rf.com/images/yupiramos/yupiramos1205/yupiramos120500250/13599976-abstract-water-with-waves-and-bubbles-background-vector-illustration.jpg>

### Módulo III

[https://static.mundoeducacao.uol.com.br/mundoeducacao/conteudo\\_legenda/48e10d00672cc3b4cadf5efc6ed1ffcb.jpg](https://static.mundoeducacao.uol.com.br/mundoeducacao/conteudo_legenda/48e10d00672cc3b4cadf5efc6ed1ffcb.jpg)

[https://miro.medium.com/max/1358/1\\*VDfKmQmJg3Fn6iXTLYXVDw.gif](https://miro.medium.com/max/1358/1*VDfKmQmJg3Fn6iXTLYXVDw.gif)

[https://image.freepik.com/fotos-gratis/linhas-abstratas-onda-suave-azul\\_1017-24862.jpg](https://image.freepik.com/fotos-gratis/linhas-abstratas-onda-suave-azul_1017-24862.jpg)