

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Gabriel Renato Oliveira Alves

Implementação de controle preditivo para rastreamento de referências de posição de um bicóptero com empuxo vetorial

Uberlândia, Brasil

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Gabriel Renato Oliveira Alves

**Implementação de controle preditivo para rastreamento
de referências de posição de um bicóptero com empuxo
vetorial**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, como requisito exigido parcial à obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecatrônica.

Orientador: Dr. Pedro Augusto Queiroz de Assis

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Faculdade de Engenharia Mecânica

Bacharelado em Engenharia Mecatrônica

Uberlândia, Brasil

2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 Coordenação do Curso de Graduação em Engenharia Mecatrônica
 Rodovia BR 050, KM 78, Bloco 1D, 2º andar - Bairro Glória, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 2512-6771 - www.mecanica.ufu.br - mecanica@mecanica.ufu.br



ATA DE DEFESA - GRADUAÇÃO

Curso de Graduação em:	Engenharia Mecatrônica				
Defesa de:	FEMEC42100 - Projeto de Fim de Curso II				
Data:	22/02/2022	Hora de início:	14:08	Hora de encerramento:	16:07
Matrícula do Discente:	11621EMT007				
Nome do Discente:	Gabriel Renato Oliveira Alves				
Título do Trabalho:	Implementação de controle preditivo para rastreamento de trajetórias de um bicóptero com empuxo vetorial				
A carga horária curricular foi cumprida integralmente?		<input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não			

Reuniu-se de forma remota, através da Plataforma Online Microsoft Teams, a Banca Examinadora, designada pelo docente orientador, assim composta: Prof. Dr. Fran Sérgio Lobato - FEQUI/UFU; Prof. Dr. Tobias Souza Morais - FEMEC/UFU; Eng. Klayton Antônio Moreira Araújo - Cargill; e Prof. Dr. Pedro Augusto Queiroz de Assis - FEMEC/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Pedro Augusto Queiroz de Assis, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, e concedeu ao discente a palavra, para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do curso, exceto por uma violação no tempo de apresentação.

A seguir o(a) senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado sem nota.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Pedro Augusto Queiroz de Assis, Professor(a) do Magistério Superior**, em 22/02/2022, às 16:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fran Sergio Lobato, Professor(a) do Magistério Superior**, em 22/02/2022, às 16:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tobias Souza Morais, Professor(a) do Magistério Superior**, em 22/02/2022, às 16:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **KLAYTON ANTONIO MOREIRA ARAUJO, Usuário Externo**, em 23/02/2022, às 08:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3324544** e o código CRC **57163FB4**.

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

A474
2022 Alves, Gabriel Renato Oliveira, 1999-
Implementação de controle preditivo para rastreamento
de trajetórias de um bicóptero com empuxo vetorial
[recurso eletrônico] / Gabriel Renato Oliveira Alves. -
2022.

Orientador: Pedro Augusto Queiroz de Assis.
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Uberlândia, Graduação em
Engenharia Mecatrônica.

Modo de acesso: Internet.

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Mecatrônica. I. Assis, Pedro Augusto Queiroz de,
1989-, (Orient.). II. Universidade Federal de
Uberlândia. Graduação em Engenharia Mecatrônica. III.
Título.

CDU: 621.03

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

Dedico este trabalho à minha família e amigos que sempre estiveram presentes direta ou indiretamente em todos os momentos de minha formação. Ao professor Pedro Augusto, pela sua paciência e orientação essenciais para a conclusão desse trabalho. Dedico também à todos os que contribuíram de alguma maneira para a realização desde projeto de graduação.

Agradecimentos

À minha mãe, **Raquel Ferreira**, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

À minha irmã, **Gabriella Mariana**, que apesar de todas as dificuldades me fortaleceu e que para mim foi muito importante.

À minha família e aos meus amigos pelo apoio.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento desse trabalho.

Ao meu orientador, professor **Pedro Augusto**, que conduziu o trabalho com paciência e dedicação sempre disponível a compartilhar todo o seu vasto conhecimento.

Muito obrigado a todos.

“Não podemos resolver nossos problemas com o mesmo pensamento que tínhamos quando os criamos.”

– Albert Einstein –

Resumo

A vetorização da força de empuxo gerada pelos motores pode aumentar a manobrabilidade de veículos aéreos, possibilitando, por exemplo, pousos e decolagens verticais. Isso ocorre pois torna-se possível controlar separadamente as dinâmicas de atitude e posição, manipulando-se as magnitudes e as direções de tais forças. Então, adotando um sistema de controle adequado é possível rastrear referências de posição mantendo-se uma atitude constante ou alterar a atitude sem afetar a posição do veículo. Com esse propósito, pode-se adotar o controle preditivo baseado em modelo (*Model-based Predictive Control* – MPC), uma vez que essa técnica é aplicável a sistemas com múltiplas entradas e saídas. No MPC, a ação de controle é obtida resolvendo-se um Problema de Controle Ótimo (PCO), que pode incluir restrições do sistema. Consequentemente, tem-se uma ação de controle ótima que garante o respeito às restrições. Como desvantagem, a implementação de abordagens convencionais de MPC tem um elevado custo computacional envolvido na resolução numérica do PCO. Isso pode inviabilizar a implementação dessa abordagem, sobretudo em plantas de dinâmica rápida. Uma possibilidade para reduzir o custo computacional consiste em adotar estratégias de MPC explícito. Nesse tipo de estratégia divide-se o espaço de estados em regiões nas quais a ação de controle ótimo é afim por partes. Então, durante a operação, basta verificar em que região do espaço de estados o sistema se encontra e empregar a ação de controle correspondente. Neste contexto, o presente trabalho envolve o emprego de uma abordagem de MPC explícito no controle de um bicóptero dotado de vetorização da força de empuxo. Resultados de simulação e experimentais mostram que a estratégia de controle, tanto adotando a implementação convencional quanto a explícita, foi capaz de rastrear as referências com eliminação do erro em regime estacionário e respeito às restrições de entrada. Cabe salientar que, para eliminação de tal erro, foram adotadas diferentes técnicas. No caso particular do MPC considerou-se uma perturbação constante de saída, que foi estimada por um observador de estados. Essa técnica permite compensar eventuais descasamentos de modelo que, em regime permanente, se comportem como perturbação constante de saída. Para avaliar o custo computacional envolvido, mediu-se o tempo para calcular a ação de controle resolvendo-se o PCO numericamente e empregando a abordagem explícita. Observou-se que não houve uma redução no tempo médio para o MPC explícito. Por outro lado, tal abordagem proporcionou um tempo computacional mais uniforme ao longo da operação.

Palavras-chave: Controle preditivo, tratamento de restrições, programação multiparamétrica, bicóptero, vetorização da força de empuxo.

Abstract

Vectoring the thrust generated by engines can increase the maneuverability of aircrafts enabling, for example, vertical takeoffs and landings. By adopting such strategy, it becomes possible to control separately attitude and position dynamics by manipulating the magnitudes and directions of the thrust forces. Thus, with a proper control system, it is possible to track position references while maintaining a constant attitude or to change the vehicle's attitude without affecting its position. In particular, Model-based Predictive Control (MPC) can be used for this purpose, as this technique applies to systems with multiple inputs and outputs. In MPC, the control input is determined by solving an Optimal Control Problem (OCP), which often include system constraints. Consequently, it is obtained an optimal control input which enforce constraint satisfaction. As a drawback, conventional MPC strategies can require a high computational cost to solve the OCP. This can prevent the implementation of an MPC controller, especially for fast dynamic systems. An alternative to reduce the computational cost is employ an explicit MPC. In this technique, the state space is partitioned in regions in which the optimal control action is piecewise affine. Thus, during operation, the optimal control input is calculated determining which region contains the current state and then applying the associated control law. In this context, work presents the implementation of an explicit MPC approach to control a bi-copter equipped with a thrust vectoring mechanism. Simulations and experimental results show that the control strategy was able to track reference without steady state error with proper enforcement of input constraints in both conventional and explicit implementations. For this purpose, the MPC was designed considering a constant output disturbance, which was estimated by means of an observer. This technique allows compensating for model mismatches that acts similar to constant output disturbance in a steady-state. To evaluate the associated computational costs, the time to compute the control action by solving the OPC numerically and using the explicit approach was measured. It was found that the average time for the explicit MPC was not reduced. On the other hand, such approach provided a more uniform computation time throughout the operation.

KEYWORDS: *Predictive control, constraint handling, multiparametric programming, bi-copter, thrust force vectoring.*

Lista de ilustrações

Figura 1 – Equipamento de laboratório para validação de leis de controle em quadricóptero (MARQUES, 2018).	15
Figura 2 – Mecanismo de vetorização lateral da força de empuxo (RYLL; BÜLTHOFF; GIORDANO, 2012)	16
Figura 3 – Ilustração dos sinais de entrada e saída lidos e preditos em uma estratégia de controle preditivo.	18
Figura 4 – Estrutura fundamental de um controlador preditivo.	18
Figura 5 – Foto da bancada do bicóptero com identificação dos graus de liberdade.	20
Figura 6 – Detalhamento do eixo de rotação do bicóptero.	20
Figura 7 – Foto do conjunto propulsivo com identificação dos elementos que o constituem.	21
Figura 8 – Ilustração das variáveis de entrada F_1 , F_2 , α_1 e α_2	21
Figura 9 – Foto de um controlador eletrônico de velocidade utilizado no trabalho.	22
Figura 10 – Ilustração do mecanismo de inclinação dos conjuntos propulsivos (SILVA; ASSIS; MARQUES, 2021).	22
Figura 11 – Diagrama de blocos da estratégia de controle.	26
Figura 12 – Diagrama da implementação do controlador com observadores de estados.	32
Figura 13 – Comparativo entre Otimização <i>on-line</i> e <i>off-line</i>	34
Figura 14 – Referências de posição angular do braço robótico.	36
Figura 15 – Resultados de simulação. (a) Posições angulares de referência, reais e estimadas. (b) Velocidades angulares reais e estimadas.	37
Figura 16 – Resultados de simulação. (a) e (c) Parcelas de controles do LQR e preditivo. (b) e (d) Controles totais.	38
Figura 17 – Resultados de simulação. Incrementos de controle.	38
Figura 18 – Resultados de simulação. Perturbações de saída estimadas.	39
Figura 19 – Resultados de simulação no cenário com descasamento de modelo, ruído de medida e atraso de transporte. (a) Posições angulares de referência, reais e estimadas. (b) Velocidades angulares reais e estimadas.	40
Figura 20 – Resultados de simulação no cenário com descasamento de modelo, ruído de medida e atraso de transporte. (a) e (c) Parcelas de controles do LQR e preditivo. (b) e (d) Controles totais.	40
Figura 21 – Resultados de simulação no cenário com descasamento de modelo, ruído de medida e atraso de transporte. Incrementos de controle.	41
Figura 22 – Resultados de simulação no cenário com descasamento de modelo, ruído de medida e atraso de transporte. Perturbações de saída estimadas.	41
Figura 23 – SeeedStudio BeagleBone Green (BEAGLEBOARD.ORG, 2018).	42

Figura 24 – Resultados experimentais. (a) Posições angulares de referência, estimadas e medidas. (b) Velocidades angulares estimadas.	44
Figura 25 – Resultados experimentais. (a) e (c) Parcelas de controles do LQR e preditivo. (b) e (d) Controles totais.	44
Figura 26 – Resultados experimentais. Incrementos de controle	45
Figura 27 – Resultados experimentais. Perturbações de saída estimadas.	45
Figura 28 – Resultados experimentais. Tempo gasto para calcular a ação de controle utilizando a programação quadrática.	46
Figura 29 – Resultados experimentais. (a) Posições angulares de referência, estimadas e medidas. (b) Velocidades angulares estimadas.	47
Figura 30 – Resultados experimentais. (a) e (c) Parcelas de controles do LQR e preditivo. (b) e (d) Controles totais.	48
Figura 31 – Resultados experimentais. Incrementos de controle	48
Figura 32 – Resultados experimentais. Perturbações de saída estimadas.	49
Figura 33 – Resultados experimentais. Tempo gasto para calcular a ação de controle utilizando a programação multiparamétrica.	49

Lista de tabelas

Tabela 1 – Descrição dos parâmetros do modelo.	23
--	----

Lista de abreviaturas e siglas

ARM	<i>Advanced RISC Machine</i>
ESC	<i>Electronic Speed Controllers</i>
FEMEC	Faculdade de Engenharia Mecânica
GPIO	<i>General Purpose Input/Output</i>
I2C	<i>Inter-Integrated Circuit</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
MP	<i>Multi-parametric Programming</i>
MPC	<i>Model Based Predictive Control</i>
MPT	<i>Multi-parametric Toolbox</i>
OCP	<i>Optimal Control Problem</i>
PCO	Problema de Controle Ótimo
PPM	<i>Pulse Position Modulation</i>
PRU	<i>Programmable Real-time Unit</i>
RAM	<i>Random Access Memory</i>
UART	<i>Universal Asynchronous Receiver/Transmitter</i>
UFU	Universidade Federal de Uberlândia
USB	<i>Universal Serial Bus</i>
VANT	Veículo Aéreo Não Tripulado

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Estrutura do texto	18
2	DESCRIÇÃO DO SISTEMA	20
2.1	Modelagem do sistema	22
2.2	Comentários	24
3	DESCRIÇÃO DO SISTEMA DE CONTROLE	26
3.1	Projeto dos controladores	26
3.2	Inclusão de ação integral em controladores por realimentação de estados	29
3.3	Estimativa de perturbação de saída com observador de estados	30
3.3.1	Inclusão da estimativa de perturbação na formulação do MPC	32
3.4	Controle Preditivo utilizando Programação Multiparamétrica	32
3.5	Comentários	35
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	36
4.1	Resultados de simulação	36
4.2	Resultados experimentais	42
4.2.1	Resolução do problema de otimização por meio de programação quadrática	43
4.2.2	Resolução do problema de otimização por meio de programação multiparamétrica	46
5	CONCLUSÃO	50
	REFERÊNCIAS	52
	APÊNDICES	56
	APÊNDICE A – REFORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO PARA EMPREGO DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA	57
A.1	Problema de programação quadrática do controlador MPC ₁	57
A.1.1	Escrevendo a função de custo em termos das variáveis de decisão	57
A.1.2	Escrevendo as restrições em termos das variáveis de decisão	63
A.2	Problema de programação quadrática do controlador MPC ₂	64

A.2.1	Escrevendo a função de custo em termos das variáveis de decisão	64
A.2.2	Escrevendo as restrições em termos das variáveis de decisão	65

APÊNDICE B – REFORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO PARA EMPREGO DE PROGRAMAÇÃO MULTIPARAMÉTRICA POR MEIO DO MPT 68

1 Introdução

Nos últimos anos Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs) vem sendo cada vez mais utilizados devido sua versatilidade em executar diferentes tarefas, por exemplo, monitoramento de lavouras e linhas elétricas, patrulhamento de fronteiras e prevenção de incêndios (VALAVANIS, 2007). A instabilidade é característica da dinâmica em malha aberta deste tipo de veículo. A estabilização pode ser obtida ao implementar um controle em malha fechada (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1994). O projeto de controladores para VANTs é estudado com frequência na literatura especializada (LEE; KIM; SASTRY, 2009; ALEXIS; NIKOLAKOPOULOS; TZES, 2011; SRIDHAR et al., 2019). Concomitantemente foram desenvolvidos equipamentos de laboratório para validação desse tipo de controlador (BOUABDALLAH; NOTH; SIEGWART, 2004; MARQUES, 2018). Por exemplo, a bancada mostrada na Figura 1 foi desenvolvida em Marques (2018) no Laboratório de Aeronaves Autônomas da UFU/FEMEC. Nessa bancada, o braço mecânico ②–③ é empregado para limitar o movimento do quadricóptero ④ em torno da base ①. Mais ainda, a atitude do veículo pode variar livremente pois uma junta esférica é utilizada para fixação do VANT. Esse sistema foi empregado com sucesso para implementação de um controlador para manter a aeronave em voo pairado.

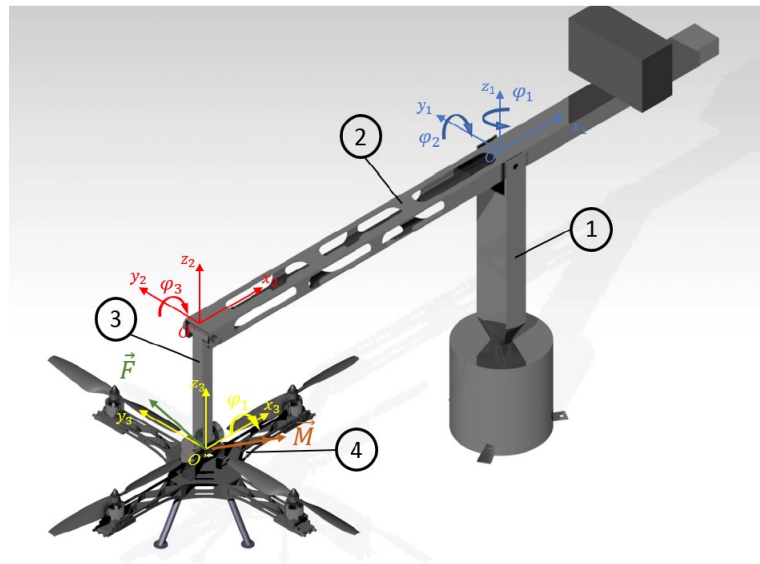


Figura 1 – Equipamento de laboratório para validação de leis de controle em quadricóptero (MARQUES, 2018).

O acoplamento entre as dinâmicas de atitude e posição de quadricópteros com rotores em fixos é um obstáculo no projeto de controladores. Devido essa característica não é possível controlar tais dinâmicas independentemente. Isso se deve ao fato de que há

menos variáveis de entrada do que graus de liberdade, tratando-se de um sistema subatuado (BADR; MEHREZ; KABEEL, 2016). A subatuação também é observada em VANTs como bicópteros, tricópteros e hexacópteros. Uma técnica para eliminar esse problema consiste em mudar o ângulo de inclinação das hélices, como é realizado em helicópteros convencionais (CUTLER et al., 2011). Alternativamente pode-se orientar a força de empuxo gerada pelos rotores (RYLL; BÜLTHOFF; GIORDANO, 2012). Isso é realizado por meio de um mecanismo de vetorização que rotaciona o rotor com respeito ao braço do VANT, como ilustrado na Figura 2 para rotação lateral do rotor. Como resultado, pode-se desacoplar as dinâmicas de atitude e posição. Então, torna-se possível rastrear referências de posição mantendo-se um atitude constante ou alterar a atitude sem afetar a posição do veículo. Essa estratégia de empuxo vetorial já foi empregada com sucesso em diferentes tipos de veículos (RYLL; BÜLTHOFF; GIORDANO, 2012; KENDOUL; FANTONI; LOZANO, 2006; SERVAIS; D'ANDRÉA-NOVEL; MOUNIER, 2015).

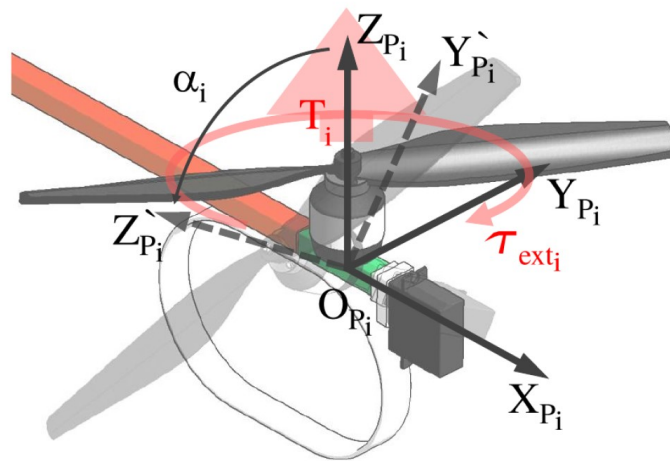


Figura 2 – Mecanismo de vetorização lateral da força de empuxo (RYLL; BÜLTHOFF; GIORDANO, 2012)

O desenvolvimento do mecanismo de vetorização pode se mostrar uma tarefa complexa. Deve-se projetar o conjunto mecânico de modo que não haja colisões da hélice com o corpo do VANT. Mais ainda, o movimento do rotor introduz não linearidades na dinâmica do veículo devido ao efeito giroscópico (ROSKAM, 1979). Uma complexidade adicional é a saturação da entrada da planta causada por uma excursão tipicamente pequena permitida para o ângulo do rotor. A presença de restrições e a existência de múltiplas entradas e saídas motiva o emprego de técnicas de controle mais avançadas para o controle de aeronaves com empuxo vetorial. Por exemplo, pode-se adotar o controle preditivo baseado em modelo (*Model-based Predictive Control* - MPC).

A estratégia de controle preditivo foi inicialmente empregada em problemas de controle ligados a processos químicos e de refino de petróleo (QIN; BADGWELL, 2003).

Os primeiros algoritmos de controle foram desenvolvidos por volta do fim da década de 70 (RICHALET et al., 1978) e início da década de 80 (CUTLER; RAMAKER, 1980). Atualmente, controladores preditivos e suas derivações podem ser encontrados nas mais diversas áreas, como, sistemas biomédicos (PERCIVAL et al., 2011; LI; HADDAD, 2013), aeronáuticos (CHAO et al., 2011), automotivos (FALCONE et al., 2008; DEL RE et al., 2010) e sistemas de irrigação (NEGENBORN et al., 2009).

Algumas características inerentes ao MPC contribuíram para a sua rápida difusão em aplicações de controle. Por exemplo, o MPC pode ser empregado em sistemas de ordem elevada, com atraso de transporte e sujeito a restrições (MACIEJOWSKI, 2002). Outra característica importante é a possibilidade de incluir de forma implícita diferentes tipos de restrições, sejam físicas ou operacionais, na formulação do problema de controle (MACIEJOWSKI, 2002).

Em um MPC, as ações de controle são calculadas minimizando-se uma função de custo ou índice de desempenho considerando as restrições do processo e uma predição do comportamento do sistema, obtida a partir de um modelo. Tal predição é realizada ao longo de um horizonte finito de tempo de N instantes de amostragem, denominado horizonte de predição. Já as ações de controle são calculadas para um intervalo de M instantes de amostragem, conhecido como horizonte de controle. A otimização é realizada a cada instante de amostragem a partir das informações provenientes dos sensores.

O comportamento geral de controladores preditivos pode ser caracterizado em função da evolução das grandezas de entrada e saída, conforme ilustrado na Figura 3.

Supondo um sistema com entradas $u \in \mathbb{R}^p$ e saídas $y \in \mathbb{R}^q$, em resumo, três passos são realizados na implementação de um MPC. Mais precisamente,

1. No instante de amostragem k , as saídas futuras são estimadas, com base no modelo da planta ao longo de um horizonte de predição de N instantes de amostragem. As saídas preditas, representadas por $\hat{y}(k+i+1|k)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, dependem de valores futuros de controle, representados por $\hat{u}(k+i|k)$, $i = 0, 1, \dots, M-1$, sendo $M \leq N$ e também das saídas atuais $y(k)$, que são obtidas a partir dos sensores.
2. A sequência de valores futuros das entradas é determinada resolvendo-se um problema de otimização com restrições.
3. O primeiro elemento da sequência de controle ótima é aplicado à planta. No próximo instante de amostragem, $k+1$, retorna-se ao passo 1 utilizando novas informações provenientes dos sensores. Note que, em $k+1$, o horizonte de predição vai até $k+N+1$. Este procedimento é repetido em toda amostragem, caracterizando assim o procedimento conhecido como *horizonte retrocedente* (ROSSITER, 2003).

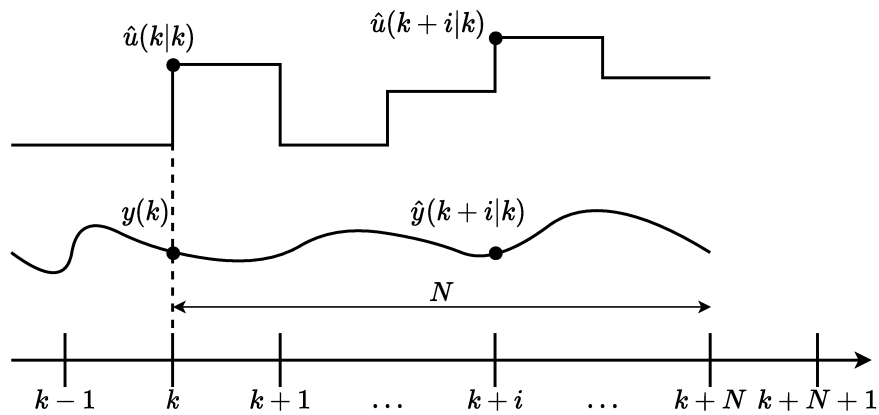


Figura 3 – Ilustração dos sinais de entrada e saída lidos e preditos em uma estratégia de controle preditivo.

A estrutura fundamental de um MPC é representada pelo diagrama de blocos da Figura 4. O projetista define o modelo de predição, as restrições e a função de custo. Então, a partir de uma referência, calcula-se a ação de controle ótima com base no modelo da planta utilizando o otimizador. O procedimento é repetido utilizando a realimentação das informações da saída.

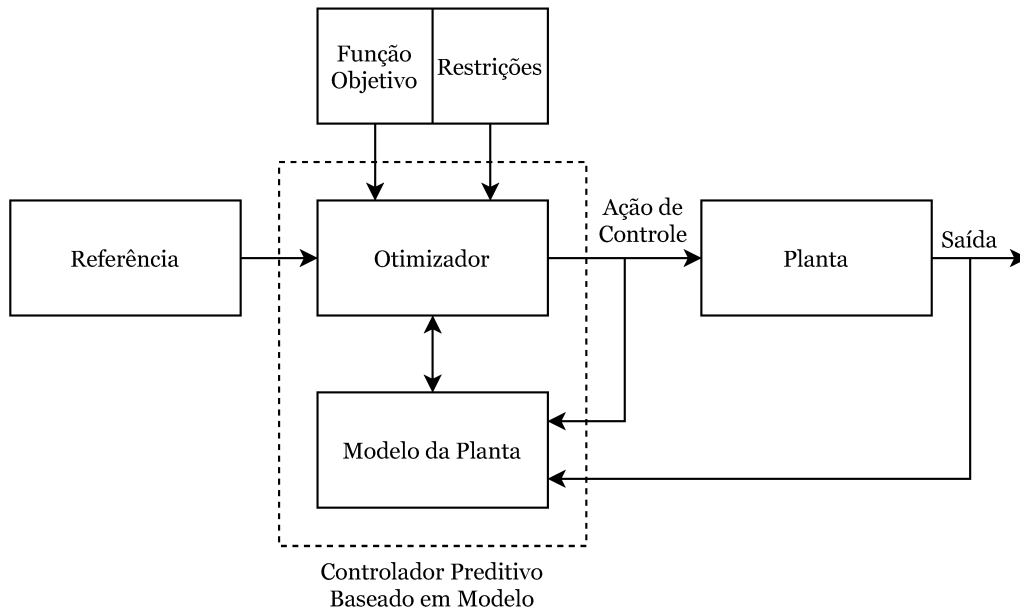


Figura 4 – Estrutura fundamental de um controlador preditivo.

1.1 Estrutura do texto

O restante do texto encontra-se organizado da maneira descrita a seguir.

-
- No Capítulo 2 apresentar-se-ão descrições sobre a bancada do bicóptero e do modelo adotado para projeto do controlador.
 - No Capítulo 3 descrever-se-á a formulação de controle preditivo adotada, técnicas para garantia de obtenção de erro de regime nulo e a reformulação do problema de controle utilizando programação multiparamétrica;
 - No Capítulo 4 expor-se-ão os resultados obtidos por meio de simulação computacional como também os resultados de implementação da estratégia proposta na bancada do bicóptero;
 - No Capítulo 5 apresentar-se-ão as conclusões do trabalho.

2 Descrição do sistema

O sistema a ser controlado neste trabalho é apresentado na Figura 5. O braço da bancada é constituído por quatro juntas rotacionais que podem realizar as rotações representadas pelos ângulos θ_1 , θ_2 , θ_3 e θ_4 . Em uma das extremidades do braço, é fixado um bicóptero que pode girar em torno do eixo Z_p , conforme detalhado na Figura 6. Essa rotação será considerada a atitude do veículo e é definida pelo ângulo θ_4 . Já as rotações definidas pelos ângulos θ_1 e θ_2 serão denominadas como a longitude e latitude do veículo, respectivamente.

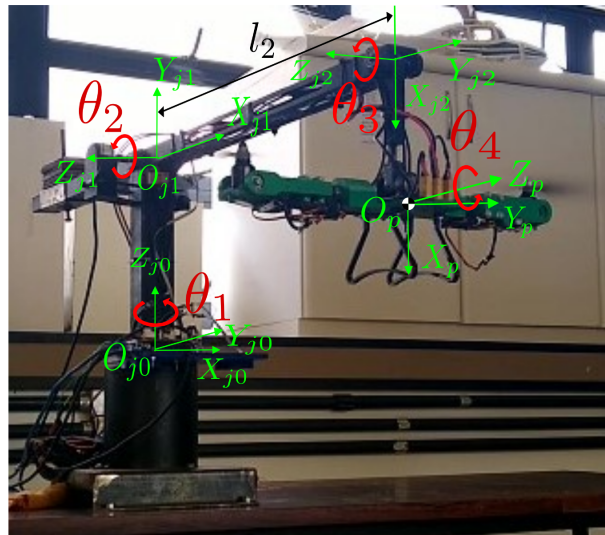


Figura 5 – Foto da bancada do bicóptero com identificação dos graus de liberdade.

Vale ressaltar que é possível definir uma relação algébrica entre θ_3 e θ_2 (SILVA, 2021). Conseqüentemente não há necessidade de mensurar e nem controlar tal junta. Por essa razão, doravante, desconsiderar-se-á a rotação θ_3 .

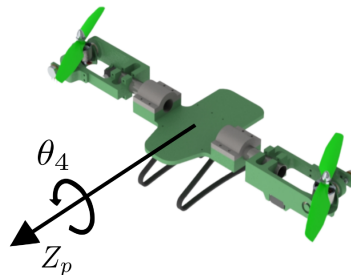


Figura 6 – Detalhamento do eixo de rotação do bicóptero.

A tarefa de controle consiste em rastrear referências para os ângulos θ_1 e θ_2 mantendo-se θ_4 constante. Com esse propósito, manipulam-se as forças de empuxo F_1

e F_2 geradas pelos conjuntos propulsivos (i.e. conjunto formado por controlador eletrônica de velocidade, motor sem escovas, servo motor e hélice, vide Figura 7) e os ângulos de inclinação α_1 e α_2 desses conjuntos com respeito ao braço do veículo. A tarefa de controle deve ser realizada respeitando restrições sobre F_1 , F_2 , α_1 e α_2 . As variáveis de entrada encontram-se apontadas na Figura 8.

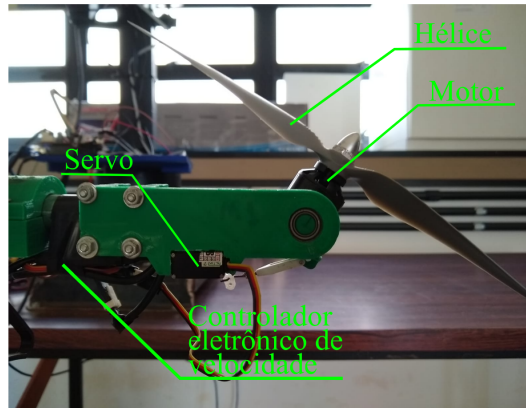


Figura 7 – Foto do conjunto propulsivo com identificação dos elementos que o constituem.

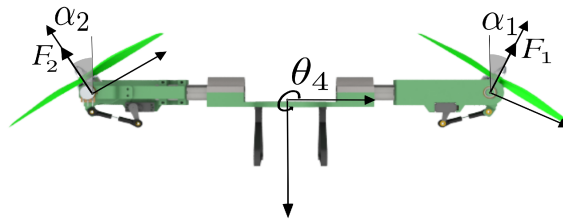


Figura 8 – Ilustração das variáveis de entrada F_1 , F_2 , α_1 e α_2 .

Cabe salientar que, na prática, controlam-se as velocidades de rotação dos motores por meio de um sinal de modulação de posição de pulso (*Pulse Position Modulation* – PPM) fornecidas a controladores eletrônicos de velocidade (*Electronic Speed Controllers* – ESC), como o mostrado na Figura 9. Além disso, os ângulos de inclinação dos conjuntos propulsivos são variados utilizando-se o mecanismo mostrado na Figura 10. Da mesma forma que as velocidades de rotação dos motores, as rotações dos mecanismos são controladas por um sinal PPM. As relações entre os comandos enviados aos ESCs e aos servomecanismos, e as variáveis controladas (i.e., F_1 , F_2 , α_1 e α_2) foram determinadas experimentalmente e podem ser encontradas em Silva, Assis e Marques (2021). Por brevidade, tais relações serão omitidas desse documento. Doravante considerar-se-á que manipulam-se diretamente F_1 , F_2 , α_1 e α_2 .



Figura 9 – Foto de um controlador eletrônico de velocidade utilizado no trabalho.

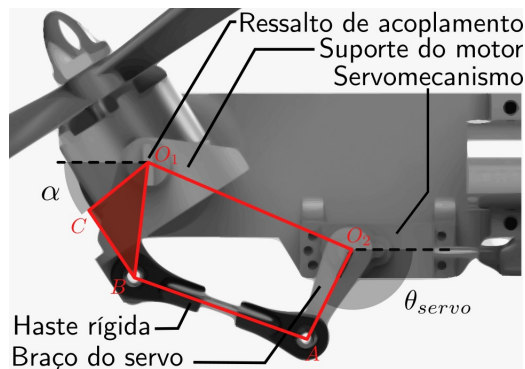


Figura 10 – Ilustração do mecanismo de inclinação dos conjuntos propulsivos (SILVA; ASSIS; MARQUES, 2021).

2.1 Modelagem do sistema

Para projetar um sistema de controle que atenda a tarefa descrita anteriormente, consideram-se os ângulos de equilíbrio $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_4 = 0$ rad, com as entradas de equilíbrio associadas $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = 0$ rad e $\bar{F} = \bar{F}_1 = \bar{F}_2 = (m_2 + m_3 + m_4 - m_{cp})g/2$, em que $m_2 = 0,15$ kg, $m_3 = 0,12$ kg, $m_4 = 0,56$ kg e $m_{cp} = 0,48$ kg são as massas dos elementos 2, 3, do bicóptero e do contra-peso, respectivamente, e $g = 9,81$ m/s² é a aceleração gravitacional. Então, modela-se a dinâmica do sistema com base em Marques (2018), considerando um bicóptero com vetorização longitudinal da força de empuxo. Mais precisamente, a dinâmica dos graus de liberdade θ_1 , θ_2 e θ_4 pode ser representada por meio do seguinte

conjunto de modelos no espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-\mu_1}{I_{Z_{j0}}} \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{l_2 \bar{F}_1}{I_{Z_{j0}}} & \frac{-l_2 \bar{F}_2}{I_{Z_{j0}}} \end{bmatrix} u_1(t) \\ y_1(t) &= [1 \ 0] x_1(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-\mu_2}{I_{Z_{j1}}} \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{l_2}{I_{Z_{j1}}} & \frac{l_2}{I_{Z_{j1}}} \end{bmatrix} u_2(t) \\ y_2(t) &= [1 \ 0] x_2(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-\gamma_4}{I_{Z_p}} & \frac{-\mu_4}{I_{Z_p}} \end{bmatrix} x_4(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{b_1}{I_{Z_p}} & \frac{-b_2}{I_{Z_p}} \end{bmatrix} u_4(t) \\ y_4(t) &= [1 \ 0] x_4(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

em que $x_1 = [\theta_1 \ \dot{\theta}_1]^T$, $x_2 = [\theta_2 \ \dot{\theta}_2]^T$, $x_4 = [\theta_4 \ \dot{\theta}_4]^T$ são os estados, $u_1 = [\alpha_1 \ \alpha_2]^T$ e $u_2 = u_4 = [\tilde{F}_1 \ \tilde{F}_2]^T$ são as entradas e $y_1 = \theta_1$, $y_2 = \theta_2$, $y_4 = \theta_4$ são as saídas. O símbolo “ \sim ” indica valores relativos aos valores de equilíbrio. Os valores e as descrições das constantes encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1 – Descrição dos parâmetros do modelo.

Constante	Significado	Valor
l_2	Comprimento do elemento 2	0,173 m
$I_{Z_{j0}}$	Momento de inércia total em relação a Z_{j0}	0,047 kg·m ²
$I_{Z_{j1}}$	Momento de inércia total em relação a Z_{j1}	0,307 kg·m ²
I_{Z_p}	Momento de inércia total em relação a Z_p	0,019 kg·m ²
μ_1	Coefficiente de atrito viscoso	0,047 kg·m ² /s
μ_2	Coefficiente de atrito viscoso	1,599 kg·m ² /s
μ_4	Coefficiente de atrito viscoso	0,049 kg·m ² /s
γ_4	Coefficiente atrelado ao desbalanceamento do bicóptero	0,692 kg·m ² /s ²
b_1	Comprimento do braço esquerdo do bicóptero	0,225 m
b_2	Comprimento do braço direito do bicóptero	0,225 m
\bar{F}_1	Força de equilíbrio para o conjunto propulsivo 1	1,7 N
\bar{F}_2	Força de equilíbrio para o conjunto propulsivo 2	1,7 N

Substituindo os valores das constantes da Tabela 1 nas equações (2.1), (2.2) e (2.3)

obtêm-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1,013 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6,312 & -6,312 \end{bmatrix} u_1(t) \\ y_1(t) &= [1 \ 0] x_1(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5,209 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,564 & 0,564 \end{bmatrix} u_2(t) \\ y_2(t) &= [1 \ 0] x_2(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -37,032 & -2,647 \end{bmatrix} x_4(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 12,032 & -12,032 \end{bmatrix} u_4(t) \\ y_4(t) &= [1 \ 0] x_4(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

O sistema de controle detalhado no Capítulo 3 é baseado em sistemas discretos. Portanto, faz-se necessário discretizar os sistemas (2.4)–(2.6). Neste trabalho, a discretização foi realizada empregando o método do segurador de ordem zero para um período de amostragem $T_s = 0,02$ s (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1998). Como resultado, obtêm-se os seguintes modelos lineares a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0,0198 \\ 0 & 0,9799 \end{bmatrix} x_1(k) + \begin{bmatrix} 0,0013 & -0,0013 \\ 0,1250 & -0,1250 \end{bmatrix} u_1(k) \\ y_1(k) &= [1 \ 0] x_1(k) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} x_2(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0,0190 \\ 0 & 0,9011 \end{bmatrix} x_2(k) + \begin{bmatrix} 0,0001 & 0,0001 \\ 0,0107 & 0,0107 \end{bmatrix} u_2(k) \\ y_2(k) &= [1 \ 0] x_2(k) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} x_4(k+1) &= \begin{bmatrix} 0,9927 & 0,0194 \\ -0,7196 & 0,9413 \end{bmatrix} x_4(k) + \begin{bmatrix} 0,0024 & -0,0024 \\ 0,2338 & -0,2338 \end{bmatrix} u_4(k) \\ y_4(k) &= [1 \ 0] x_4(k) \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2 Comentários

Neste capítulo, apresentaram-se a descrição da bancada do bicóptero, a tarefa de controle e o modelo adotado para o projeto do controlador. Na descrição, foi mostrado quais são os graus de liberdade da bancada, isto é as variáveis de saída (θ_1 , θ_2 e θ_4) como também as variáveis de entrada (F_1 , F_2 , α_1 e α_2). A tarefa de controle consiste em rastrear referências de longitude (θ_1) e latitude (θ_2) mantendo-se a atitude (θ_4) do bicóptero constante. Para tal, manipulam-se as forças de empuxo F_1 e F_2 e os ângulos de inclinação α_1 e α_2 associados aos conjuntos propulsivos. O modelo linear do sistema foi obtido particularizando o modelo desenvolvido em Marques (2018) para um bicóptero com empuxo

vetorial considerando um conjunto de valores de equilíbrio associados as variáveis manipuláveis e controláveis. Posteriormente discretizou-se tal modelo empregando o método do segurador de ordem zero para um período de amostragem $T_s = 0,02$ segundos, pois o sistema de controle apresentado no Capítulo 3 é baseado em sistemas discretos.

3 Descrição do sistema de controle

Com o objetivo de atender a tarefa de controle descrita anteriormente, adotar-se-ão três controladores diferentes. Mais precisamente, dois controladores preditivos para rastrear referências de posição de longitude (θ_1) e de latitude (θ_2), uma realimentação de estados para manutenção da atitude (θ_4) na posição de equilíbrio. Note que nessa estratégia de controle, estão sendo desconsiderados os acoplamentos entre as dinâmicas de acordo com a modelagem apresentada no Capítulo 2. Um diagrama de blocos de tal sistema de controle é mostrado na Figura 11.

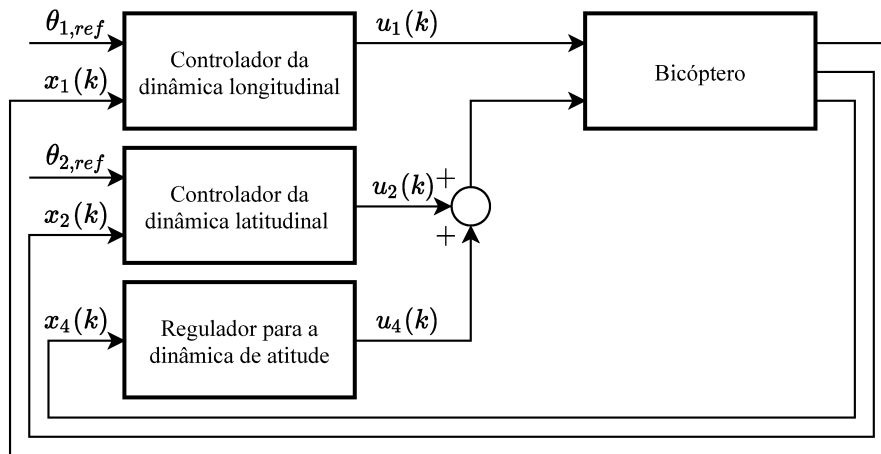


Figura 11 – Diagrama de blocos da estratégia de controle.

É válido mencionar que, como as dinâmicas de latitude e atitude (θ_2 e θ_4 , respectivamente) são controladas por meio das forças propulsivas as entradas aplicadas à planta será a somatória da ação de controle calculada pelos controladores individuais desses graus de liberdade com as forças de equilíbrio associadas.

Na sequência, detalham-se os projetos de cada controlador bem como elementos introduzidos para eliminação de erro em regime permanente e estimação de estados.

3.1 Projeto dos controladores

Considere que as dinâmicas em torno dos ângulos θ_1 , θ_2 e θ_4 do bicóptero são descritas respectivamente pelos seguintes sistemas discretos, lineares e invariantes no tempo:

$$x_1(k+1) = \Phi_1 x_1(k) + \Gamma_1 u_1(k), \quad y_1(k) = C_1 x_1(k) \quad (3.1)$$

$$x_2(k+1) = \Phi_2 x_2(k) + \Gamma_2 u_2(k), \quad y_2(k) = C_2 x_2(k) \quad (3.2)$$

$$x_4(k+1) = \Phi_4 x_4(k) + \Gamma_4 u_4(k), \quad y_4(k) = C_4 x_4(k) \quad (3.3)$$

em que $x_1 \in \mathbb{R}^2$, $x_2 \in \mathbb{R}^2$ e $x_4 \in \mathbb{R}^2$ são estados, $u_1 \in \mathbb{R}^2$, $u_2 \in \mathbb{R}^2$ e $u_4 \in \mathbb{R}^2$ são entradas e $y_1 \in \mathbb{R}$, $y_2 \in \mathbb{R}$ e $y_4 \in \mathbb{R}$ são saídas. As matrizes do modelo $\Phi_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\Phi_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\Phi_4 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\Gamma_4 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ e $C_4 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ são constantes e com elementos conhecidos, conforme apresentado no Capítulo 2.

Neste trabalho, as entradas de cada sistema são calculadas resolvendo-se

$$u_1(k) = u_{lqr,1}(k) + u_{mpc,1}(k) \quad (3.4)$$

$$u_2(k) = u_{lqr,2}(k) + u_{mpc,2}(k) \quad (3.5)$$

$$u_4(k) = u_{lqr,4}(k) \quad (3.6)$$

sendo

$$u_{lqr,1}(k) = -K_1 x_1(k) \quad (3.7)$$

$$u_{lqr,2}(k) = -K_2 x_2(k) \quad (3.8)$$

$$u_{lqr,4}(k) = -K_4 x_4(k) \quad (3.9)$$

em que K_i , com $i = \{1, 2, 4\}$, são vetores estabilizantes de realimentação de estados. Em particular, tais vetores são calculados considerando-se um regulador linear quadrático (*Linear Quadratic regulator* – LQR)(OGATA, 1994). Isto é, K_i , é calculado a partir da solução da equação de Riccati dada por

$$K_i = (\Gamma_i^T S_i \Gamma_i + R_{lqr,i})^{-1} (\Gamma_i^T S_i \Phi_i), \quad i = \{1, 2, 4\} \quad (3.10)$$

sendo S_i , com $i = \{1, 2, 4\}$, obtido a partir de

$$\Phi_i^T S_i \Phi_i - S_i - (\Phi_i^T S_i \Gamma_i) (\Gamma_i^T S_i \Gamma_i + R_{lqr,i})^{-1} (\Gamma_i^T S_i \Phi_i) + Q_{lqr,i} = 0, \quad i = \{1, 2, 4\} \quad (3.11)$$

em que $Q_{lqr,i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ e $R_{lqr,i} \in \mathbb{R}^{p_i \times p_i}$, com $Q_{lqr,i} \geq 0$, $R_{lqr,i} > 0$ e $i = \{1, 2, 4\}$, são matrizes de ajuste.

As parcelas de controle preditivo $u_{mpc,1}$ e $u_{mpc,2}$ são determinadas minimizando-se, respectivamente, as seguintes funções de custo:

$$\begin{aligned} J_1(k) = & \sum_{i=0}^{N_1-1} ([\hat{y}_1(k+i+1|k) - \theta_{1,ref}]^T Q_1 [\hat{y}_1(k+i+1|k) - \theta_{1,ref}]) + \\ & + \sum_{i=0}^{M_1-1} ([\Delta \hat{u}_{mpc,1}(k+i|k)]^T R_{\Delta u,1} [\Delta \hat{u}_{mpc,1}(k+i|k)]) + \\ & + \sum_{i=0}^{N_1-1} ([\hat{u}_{mpc,1}(k+i|k)]^T R_{u,1} [\hat{u}_{mpc,1}(k+i|k)]) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} J_2(k) = & \sum_{i=0}^{N_2-1} ([\hat{y}_2(k+i+1|k) - \theta_{2,ref}]^T Q_2 [\hat{y}_2(k+i+1|k) - \theta_{2,ref}]) + \\ & + \sum_{i=0}^{M_2-1} ([\Delta \hat{u}_{mpc,2}(k+i|k)]^T R_{\Delta u,2} [\Delta \hat{u}_{mpc,2}(k+i|k)]) \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que $\theta_{1,ref}$ e $\theta_{2,ref}$ são referências para θ_1 e θ_2 , respectivamente, $N_1 \in \mathbb{R}$ e $N_2 \in \mathbb{R}$ são horizontes de predição, $M_1 \in \mathbb{R}$ e $M_2 \in \mathbb{R}$ são horizontes de controle, $Q_1 \in \mathbb{R}$, $Q_2 \in \mathbb{R}$, com $Q_1 > 0$ e $Q_2 > 0$, $R_{\Delta u,1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $R_{\Delta u,2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, com $R_{\Delta u,1} > 0$ e $R_{\Delta u,2} > 0$, e $R_{u,1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, com $R_{u,1} > 0$, são matrizes de ajuste. Mais ainda o símbolo “ $\hat{\cdot}$ ” aponta elementos preditos e a notação $(k+i|k)$ indica que a predição i passos à frente é realizada com base nas informações disponíveis em k .

Considerando a função de custo (3.12), o modelo (3.1) e o controle total (3.4), $u_{mpc,1}$ é calculada resolvendo-se

$$\min_{\substack{\Delta \hat{u}_{mpc,1}(k+i|k), \\ i=0, 1, \dots, M_1-1}} J_1(k) \quad (3.14)$$

sujeito a

$$\hat{x}_1(k+i+1|k) = \Phi_1 \hat{x}_1(k+i|k) + \Gamma_1 \hat{u}_1(k+i|k), \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - 1 \quad (3.15)$$

$$\hat{y}_1(k+i+1|k) = C_1 \hat{x}_1(k+i+1|k), \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - 1 \quad (3.16)$$

$$\hat{u}_1(k+i|k) = \hat{u}_{lqr,1}(k+i|k) + \hat{u}_{mpc,1}(k+i|k), \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - 1 \quad (3.17)$$

$$\hat{u}_{lqr,1}(k+i|k) = -K_1 \hat{x}_1(k+i|k), \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - 1 \quad (3.18)$$

$$\hat{u}_1(k+i|k) \in \mathcal{U}_1, \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - 1 \quad (3.19)$$

$$\Delta \hat{u}_{mpc,1}(k+i|k) = 0, \quad i = M_1, M_1 + 1, \dots, N_1 - 1 \quad (3.20)$$

em que \mathcal{U}_1 representa o conjunto admissível para as variáveis de controle, tal conjunto é formado por limitantes inferiores e superiores para controle denotados por $u_{min,1}$ e $u_{max,1}$, respectivamente. Além disso, assume-se que o estado atual da planta é conhecido, isto é, $\hat{x}_1(k|k) = x_1(k)$.

De modo similar, a partir de (3.2), (3.5), (3.8) e (3.13), $u_{mpc,2}$ é determinado a partir do seguinte problema de otimização:

$$\min_{\substack{\Delta \hat{u}_{mpc,2}(k+i|k), \\ i=0, 1, \dots, M_2-1}} J_2(k) \quad (3.21)$$

sujeito a

$$\hat{x}_2(k+i+1|k) = \Phi_2 \hat{x}_2(k+i|k) + \Gamma_2 \hat{u}_2(k+i|k), \quad i = 0, 1, \dots, N_2 - 1 \quad (3.22)$$

$$\hat{y}_2(k+i+1|k) = C_2 \hat{x}_2(k+i+1|k), \quad i = 0, 1, \dots, N_2 - 1 \quad (3.23)$$

$$\hat{u}_2(k+i|k) = \hat{u}_{lqr,2}(k+i|k) + \hat{u}_{mpc,2}(k+i|k), \quad i = 0, 1, \dots, N_2 - 1 \quad (3.24)$$

$$\hat{u}_{lqr,2}(k+i|k) = -K_2 \hat{x}_2(k+i|k), \quad i = 0, 1, \dots, N_2 - 1 \quad (3.25)$$

$$\hat{u}_4(k+i|k) = -K_4 \hat{x}_4(k+i|k), \quad i = 0, 1, \dots, N_2 - 1 \quad (3.26)$$

$$\hat{u}_2(k+i|k) + \hat{u}_4(k+i|k) \in \mathcal{U}_2, \quad i = 0, 1, \dots, N_2 - 1 \quad (3.27)$$

$$\Delta \hat{u}_{mpc,2}(k+i|k) = 0, \quad i = M_2, M_2 + 1, \dots, N_2 - 1 \quad (3.28)$$

em que \mathcal{U}_2 , similar a \mathcal{U}_1 é um conjunto formado por limitantes inferiores e superiores denotados por $u_{min,2}$ e $u_{max,2}$, respectivamente. Também, assume-se que $\hat{x}_2(k|k) = x_2(k)$.

Cabe destacar que os problemas de otimização foram definidos em termos das sequências de incrementos de controle $\{\Delta\hat{u}_{mpc,1}(k+i|k), i = 0, 1, \dots, M_1 - 1\}$ e $\{\Delta\hat{u}_{mpc,2}(k+i|k), i = 0, 1, \dots, M_2 - 1\}$ para obtenção de previsões não polarizadas. Isto é, para que a solução do problema de otimização seja uma sequência nula caso o erro de rastreamento seja nulo. Isso proporciona robustez contra incertezas de modelo à malha de controle (ROSSITER, 2003).

Resolvendo-se os problemas de otimização compostos por (3.14)–(3.20) e (3.21)–(3.28) determinam-se, respectivamente, as sequências ótimas $\{\Delta\hat{u}_{mpc,1}^*(k+i|k), i = 0, 1, \dots, M_1 - 1\}$ e $\{\Delta\hat{u}_{mpc,2}^*(k+i|k), i = 0, 1, \dots, M_2 - 1\}$. Como mencionado anteriormente, os primeiros elementos dessas sequências são usados para calcular as ações de controle preditivo aplicadas no instante atual, isto é,

$$u_{mpc,1}^*(k) = \Delta\hat{u}_{mpc,1}^*(k|k) + u_{mpc,1}(k-1) \quad (3.29)$$

$$u_{mpc,2}^*(k) = \Delta\hat{u}_{mpc,2}^*(k|k) + u_{mpc,2}(k-1) \quad (3.30)$$

No instante seguinte, $k+1$, o procedimento de otimização é repetido, seguindo a estratégia de horizonte retrocedente.

Uma possibilidade para implementação desses MPCs é reescrever os problemas de otimização (3.14)–(3.20) e (3.21)–(3.28) como problemas de programação quadrática. Isso permite o emprego de pacotes de otimização numérica. Esse procedimento é mostrado no Apêndice A e também pode ser encontrado na literatura de controle preditivo, como em ROSSITER (2003).

As técnicas de controle descritas até aqui não garantem a eliminação de erro em regime estacionário na presença de perturbações constantes de entrada/saída. Isso ocorre pois não há ação integral de controle. No caso da realimentação de estados para θ_4 , o erro de regime é eliminado introduzindo-se ação integral por meio de um estado adicional (vide Seção 3.2). Já no controle das dinâmicas de θ_1 e θ_2 , a ação integral é obtida por meio de observadores de estados com estimativa de perturbação de saída, como descrito em FRANKLIN, POWELL e EMAMI-NAEINI (1994). O projeto desse tipo de observador é mostrado na Seção 3.3.

3.2 Inclusão de ação integral em controladores por realimentação de estados

Assim como proposto em FRANKLIN, POWELL e EMAMI-NAEINI (1998), para a dinâmica em torno de θ_4 , optou-se por incluir a ação integral adicionando-se ao modelo

de projeto um estado $x_{4,i}$, que é a integral do erro de rastreamento dado por

$$e_4(k) = y_4(k) - \theta_{4,ref} \quad (3.31)$$

em que $\theta_{4,ref}$ é um sinal de referência para θ_4 .

Em particular, a integral é calculada utilizando a regra de Euler do avanço, logo

$$x_{4,i}(k+1) = x_{4,i}(k) + T_s e_4(k) = x_{4,i}(k) + T_s (C_4 x_4(k) - \theta_{4,ref}) \quad (3.32)$$

em que T_s é o período de amostragem, em segundos.

Empilhando as dinâmicas (3.32) e (3.3), segue que

$$\begin{bmatrix} x_{4,i}(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s C \\ 0 & \Phi_4 \end{bmatrix}}_{\Phi_{4,i}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{4,i}(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}}_{\delta_4(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_4 \end{bmatrix}}_{\Gamma_{4,i}} u_4(k) - \underbrace{\begin{bmatrix} T_s \\ 0 \end{bmatrix}}_{N_{4,i}} \theta_{4,ref} \quad (3.33)$$

Note que nesse novo modelo a matriz dinâmica $\Phi_{4,i}$ tem um autovalor no círculo unitário, ou seja, um integrador. Considerando o novo modelo, a lei de controle é dada por

$$u_{lqr,4}(k) = - \underbrace{\begin{bmatrix} K_{4,i} & K_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_4} \delta_4(k) + N_{4,i} \theta_{4,ref} \quad (3.34)$$

Ainda, levando em consideração que a referência é nula, a lei de controle é simplesmente

$$u_4(k) = u_{lqr,4}(k) = -\mathbf{K}_4 \delta_4(k) \quad (3.35)$$

O cálculo de \mathbf{K}_4 pode ser realizado considerando um regulador linear quadrático a partir das matrizes dinâmica e de entrada aumentadas, $\Phi_{4,i}$ e $\Gamma_{4,i}$, respectivamente, e com a matriz de ajuste $Q_{lqr,4}$ também ponderando a integral do erro de rastreamento.

3.3 Estimativa de perturbação de saída com observador de estados

Considerando que, na saída da planta, atua uma perturbação d constante, pode-se reescrever o observador de estados para estimar tal perturbação. Como resultado, é possível considerar essa estimativa na formulação do MPC e, conseqüentemente, eliminar o erro de regime permanente causado por esse tipo de perturbação ou por descasamentos de modelo que, em regime permanente, se comportem como uma perturbação constante de saída (ROSSITER, 2003).

Para isso, seja o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi_{\Gamma} x(k) + \Gamma u_{mpc}(k) \\ y(k) &= Cx(k) + d(k) \end{aligned} \quad (3.36)$$

com $d(k) \in \mathbb{R}$ constante, isto é, $d(k+1) = d(k)$ e Φ_Γ definido como no Apêndice A.

Considere ainda um estado aumentado dado por

$$\chi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Então, de (3.36) e (3.37), com d constante, é possível escrever

$$\begin{aligned} \chi(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ d(k+1) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_\Gamma & 0_n \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi_\chi} \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma \\ 0_p^T \end{bmatrix}}_{\Gamma_\chi} u_{mpc}(k) \\ y(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} C & 1 \end{bmatrix}}_{C_\chi} \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.38)$$

sendo $0_n \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $0_p \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ vetores nulos.

Assim, tem-se um novo modelo no espaço de estados dado por

$$\begin{aligned} \chi(k+1) &= \Phi_\chi \chi(k) + \Gamma_\chi u_{mpc}(k) \\ y(k) &= C_\chi \chi(k) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Supondo que o par (Φ_χ, C_χ) é, pelo menos, detectável, pode-se projetar um observador de estados para estimar χ do estado aumentado $\chi(k)$. As equações (3.40), (3.41) e (3.42) mostram como essa estimativa pode ser calculada em um certo instante k (MACIEJOWSKI, 2002):

$$y_e(k|k-1) = C_\chi \chi_e(k|k-1) \quad (3.40)$$

$$\chi_e(k|k) = \chi_e(k|k-1) + L'(y(k) - y_e(k|k-1)) \quad (3.41)$$

$$\chi_e(k+1|k) = \Phi_\chi \chi_e(k|k) + \Gamma_\chi u_{mpc}(k) \quad (3.42)$$

em que y_e e χ_e representam as saídas e os estados estimados, respectivamente. $L' \in \mathbb{R}^{n+1}$ é uma matriz de ganhos para correção do erro de estimativa. Essa matriz é ajustada de modo que o erro de estimativa convirja para zero assintoticamente. Isso é realizado alocando-se os autovalores de

$$\Phi_\chi - LC_\chi \quad (3.43)$$

dentro do círculo unitário (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1994). Posteriormente obtém-se a matriz de correção fazendo

$$L' = \Phi_\chi^{-1} L \quad (3.44)$$

Empregando-se o observador de estados dado por (3.40)–(3.42), obtém-se uma estimativa χ_e para χ . Tal vetor estimado é composto por estimativas não polarizadas para estado e perturbação, que serão incluídas na formulação do MPC, como detalhado a seguir.

3.3.1 Inclusão da estimativa de perturbação na formulação do MPC

Pode-se alterar as equações de predição de modo a incluir o efeito da perturbação de saída d . Isso é realizado a partir de um novo estado estendido $\xi(k)$ dado por

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} \chi(k) \\ u_{mpc}(k-1) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Então, basta usar $\chi(k)$ e $(\Phi_\chi, \Gamma_\chi, C_\chi)$ no lugar de $x(k)$ e (Φ_Γ, Γ, C) durante a formulação do controlador preditivo descrito na Seção 3.1. Mais precisamente, faz-se a substituição na determinação das matrizes de predição (vide Apêndice A).

A Figura 12 mostra o diagrama de blocos da estratégia de controle completa. Nessa estratégia os blocos MPC₁ e LQR₁ compõem o controle responsável pela dinâmica de θ_1 , o primeiro calcula a parcela de controle preditiva que rastreia o sinal de referência, e o segundo calcula a ação de controle estabilizante. Os blocos MPC₂ e LQR₂ são responsáveis pelo controle da dinâmica de θ_2 , similarmente ao caso de θ_1 . Por fim o bloco LQR₄ tem a função de regular a dinâmica de θ_4 . Os blocos Observador₁ e Observador₂ estimam os estados envolvidos nas dinâmicas de θ_1 e θ_2 , respectivamente, como também as respectivas perturbações de saída associadas.

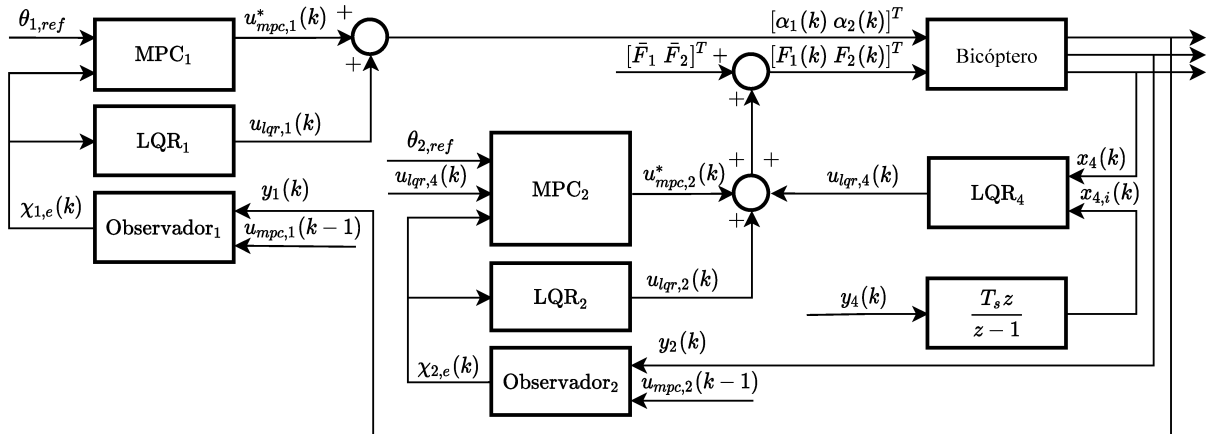


Figura 12 – Diagrama da implementação do controlador com observadores de estados.

3.4 Controle Preditivo utilizando Programação Multiparamétrica

Uma possível dificuldade na implementação dos MPCs descritos anteriormente é o tempo computacional necessário para resolução dos PCOs em cada instante de amostragem. Tal tempo representa um atraso na ação de controle podendo resultar em perda de desempenho e, até mesmo, instabilidade. Para mitigar esse problema, pode-se utilizar a programação multiparamétrica (*Multi-parametric Programming* – MP) para obter uma

formulação explícita do problema de controle (GILL; MURRAY; WRIGHT, 1981). Desse modo, obtêm-se regiões do espaço de estados nas quais a ação ótima de controle é dada por uma função conhecida. Então, durante a operação, basta verificar em que região o estado se encontra e aplicar a lei de controle associada. Uma vez que as regiões são caracterizadas antes da operação (i.e., *off-line*), tem-se um esforço computacional significativamente reduzido.

Ao se empregar MP para resolver o PCO do MPC₁, caracteriza-se um conjunto de m_1 regiões dadas por

$$\Omega_{1_j} = \{\psi_1 \in \mathbb{R}^6 | \mathbf{P}_{1_j} \psi_1 \leq \gamma_{1_j}\}, j = 1, 2, \dots, m_1 \quad (3.46)$$

em que $\psi_1(k) = [\xi_1(k) \ \theta_{1,ref}(k)]^T$ e com \mathbf{P}_{1_j} e γ_{1_j} de dimensões apropriadas. Dentro dessas regiões, o vetor ótimo de controle $\Delta \hat{U}_{mpc,1}^*$ é calculado resolvendo-se (BEMPORAD et al., 2002)

$$\Delta \hat{U}_{mpc,1}^* = \mathbf{K}_{1_j} \psi_1(k) + \mathbf{v}_{1_j}, \text{ se } \psi_1(k) \in \Omega_{1_j} \quad (3.47)$$

com $\mathbf{K}_{1_j} \in \mathbb{R}^{(M_1 \times 6)}$ e $\mathbf{v}_{1_j} \in \mathbb{R}^{M_1}$ também obtidos como resultado da MP. Então o primeiro elemento de $\Delta \hat{U}_{mpc,1}^*$ é utilizado para calcular a ação de controle, conforme (3.29).

Do mesmo modo, utilizando MP para resolver o PCO do MPC₂, determinam-se m_2 regiões da forma

$$\Omega_{2_j} = \{\psi_2 \in \mathbb{R}^9 | \mathbf{P}_{2_j} \psi_2 \leq \gamma_{2_j}\}, j = 1, 2, \dots, m_2 \quad (3.48)$$

em que $\psi_2(k) = [\xi_2(k) \ \delta_4(k) \ \theta_{2,ref}(k)]^T$ e com \mathbf{P}_{2_j} e γ_{2_j} de dimensões apropriadas nas quais o vetor ótimo de incremento de controle é

$$\Delta \hat{U}_{mpc,2}^* = \mathbf{K}_{2_j} \psi_2(k) + \mathbf{v}_{2_j}, \text{ se } \psi_2(k) \in \Omega_{2_j} \quad (3.49)$$

Então, $\Delta \hat{u}_{mpc,2}^*(k|k)$ é então aplicado em (3.30) para calcular a ação de controle a ser aplicado à planta.

Vale salientar que, como foram adicionadas as referências $\theta_{1,ref}$ e $\theta_{2,ref}$ aos vetores de parâmetros $\psi_1(k)$ e $\psi_2(k)$, respectivamente, é possível variar as referências sem que seja necessário recalculas as regiões.

Ressalta-se ainda que o conjunto de regiões Ω_{1_j} e Ω_{2_j} e os respectivos valores de \mathbf{K}_{1_j} , \mathbf{v}_{1_j} , \mathbf{K}_{2_j} e \mathbf{v}_{2_j} são calculados *off-line*. Isto é, antes da operação. Como resultado, o emprego de MP reduz o procedimento de otimização realizado a cada instante de amostragem a um processo de avaliação de funções simples para identificar quais as ações de controle ótimas que devem ser utilizadas (PISTIKOPOULOS; GEORGIADIS; DUA, 2007; KOURAMAS et al., 2013). A Figura 13 ilustra um comparativo entre os dois métodos.

Controlador Preditivo Baseado em Modelo

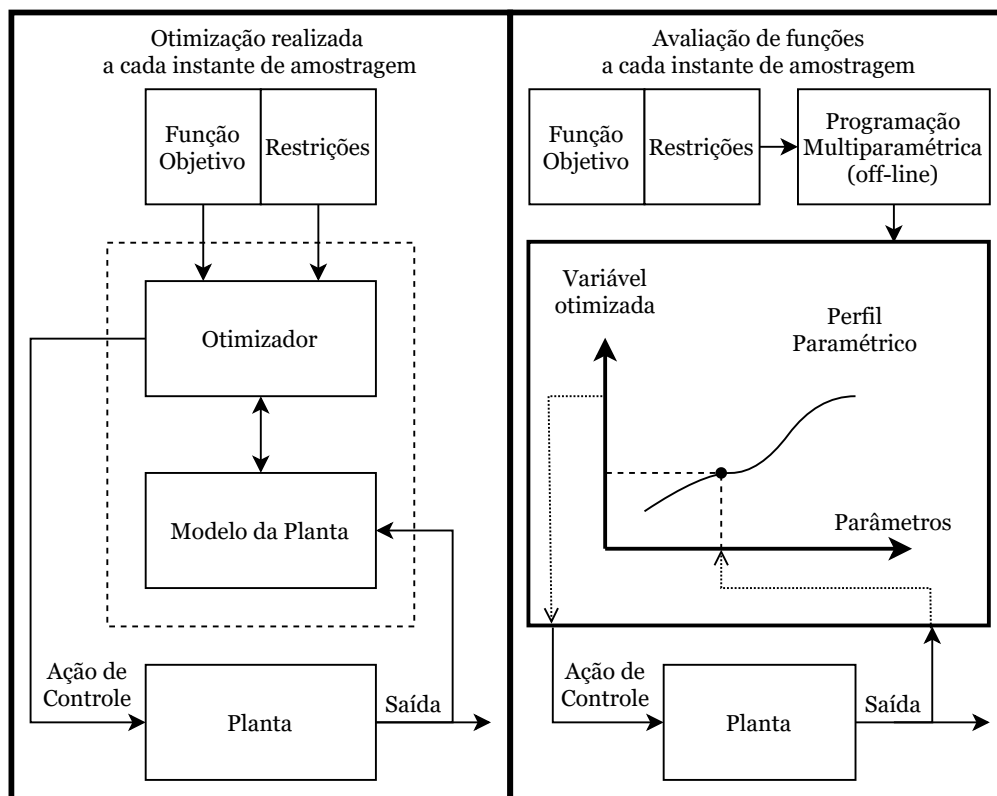


Figura 13 – Comparativo entre Otimização *on-line* e *off-line*.

A literatura especializada como Tondel (2003), Spjøtvold (2008), Lima (2013) citam vantagens e desvantagens de resolver o problema de otimização utilizando programação multiparamétrica. Algumas são listadas abaixo:

- Vantagens:
 - Não há necessidade de pacote computacional de otimização para implementação em tempo real;
 - A implementação pode ser feita em *hardware* de baixo custo;
- Desvantagens:
 - O espaço de armazenamento necessário para representar a solução pode exceder a memória disponível;
 - A obtenção de uma solução explícita pode ser computacionalmente intratável, dependendo das dimensões do problema;
 - Rápido crescimento da solução explícita com o crescimento do tamanho do problema de otimização.

3.5 Comentários

Neste capítulo, apresentou-se o sistema de controle que foi desenvolvido para rastrear referências de posição para o bicóptero descrito no Capítulo 2. No caso das dinâmicas em torno de θ_1 e θ_2 , a ação de controle total é composta por duas parcelas: o controle estabilizante, e o termo de controle preditivo. Já a dinâmica em torno de θ_4 é regulada por meio de uma realimentação de estados. Também foram descritas técnicas para introduzir ação integral no controlador por meio de inclusão de estado adicional (Seção 3.2) e por meio da estimativa de perturbação de saída (Seção 3.3). Por último descreveu-se como utilizar programação multiparamétrica para reduzir o custo computacional envolvido na implementação de um MPC.

4 Resultados e Discussão

Neste capítulo são apresentados resultados de simulação e de ensaios experimentais com o sistema de controle descrito no Capítulo 3. Mais ainda, uma comparação entre a programação quadrática e multiparamétrica é realizada.

Os resultados, foram obtidos considerando as referências apresentadas na Figura 14. Pode-se observar que degraus de referência para a longitude ($\theta_{1,ref}$) e a latitude ($\theta_{2,ref}$) serão implementados em instantes distintos, enquanto a referência para a atitude ($\theta_{4,ref}$) á mantida nula.

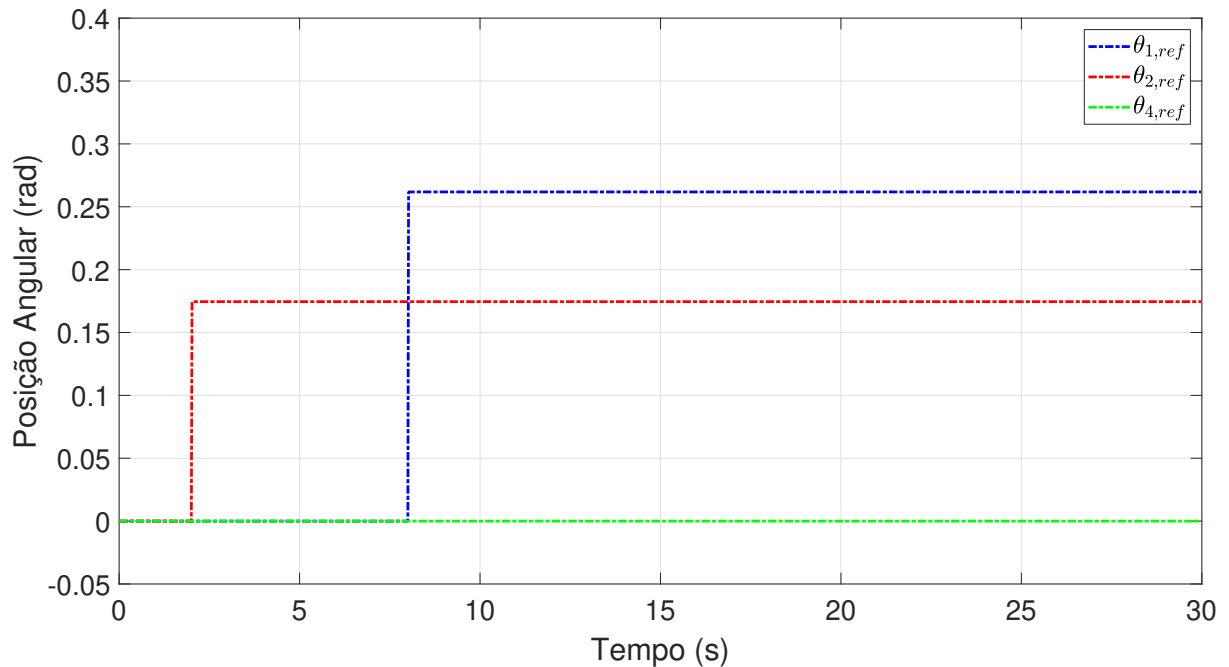


Figura 14 – Referências de posição angular do braço robótico.

4.1 Resultados de simulação

Nesta seção apresentar-se-ão resultados de simulação nos modelos lineares descritos por (2.4)-(2.6). Foram realizadas simulações em dois cenários: Em um caso ideal e outro incluindo descasamentos de modelo, ruídos de medida e atraso de transporte. Esse último cenário de simulação foi considerado para avaliar a robustez do controlador antes da implementação prática. As simulações foram realizadas em Matlab® e para a implementação do MPC que emprega a MP foi utilizado o pacote MPT 3.0 (*Multi-parametric Toolbox*) (HERCEG et al., 2013). A MPT 3.0 é uma ferramenta *open-source* baseada em

Matlab® para otimização paramétrica, geometria computacional e desenvolvimento de controle preditivo baseado em modelo.

Os controladores preditivos foram implementados com $N_1 = 5$, $N_2 = 5$, $M_1 = 1$, $M_2 = 1$, $Q_1 = \text{diag}([32])$, $Q_2 = \text{diag}([24])$, $R_{\Delta u,1} = \text{diag}([1 \ 1])$, $R_{\Delta u,2} = \text{diag}([0,5 \ 0,5])$ e $R_{u,1} = \text{diag}([0,1 \ 0,1])$. As restrições foram definidas como $u_{max,1} = [0,5236 \ 0,5236]^T$, $u_{min,1} = [0 \ 0]^T$, $u_{max,2} = [(1,9 - \bar{F}_1) \ (1,9 - \bar{F}_2)]^T$ e $u_{min,2} = [(1,6 - \bar{F}_1) \ (1,6 - \bar{F}_2)]^T$. Os ganhos de realimentação foram calculados com $Q_{lqr,1} = \text{diag}([1024 \ 1])$, $Q_{lqr,2} = \text{diag}([1024 \ 1])$, $Q_{lqr,4} = \text{diag}([0,01 \ 0,01 \ 0,001])$, $R_{lqr,1} = \text{diag}([1 \ 1])$, $R_{lqr,2} = \text{diag}([1 \ 1])$ e $R_{lqr,4} = \text{diag}([1 \ 1])$. Por fim a alocação dos autovalores de (3.43) foi feita considerando o problema do regulador quadrático com as matrizes de ponderação associadas como $Q_{ob,1} = \text{diag}([1 \ 1 \ 1])$, $Q_{ob,2} = \text{diag}([1 \ 1 \ 1])$, $R_{ob,1} = \text{diag}([1])$ e $R_{ob,2} = \text{diag}([1])$. Posteriormente a matriz de correção do erro de estimativa foi calculada conforme (3.44). Além disso as estimativas iniciais foram $\chi_1(0|-1) = [0 \ 0 \ 0]^T$ e $\chi_2(0|-1) = [0 \ 0 \ 0]^T$.

Na Figura 15 apresentam-se as posições e as velocidades angulares das juntas da bancada, tanto reais quanto estimadas, considerando o cenário ideal. As entradas aplicadas ao sistema durante essa simulação encontram-se na Figura 16. Verifica-se que as posições angulares foram guiadas para as referências sem erro de regime estacionário com o devido respeito às restrições de entrada. Nas Figuras 17 e 18, mostram-se os incrementos de controle e as perturbações de saída estimadas, respectivamente.

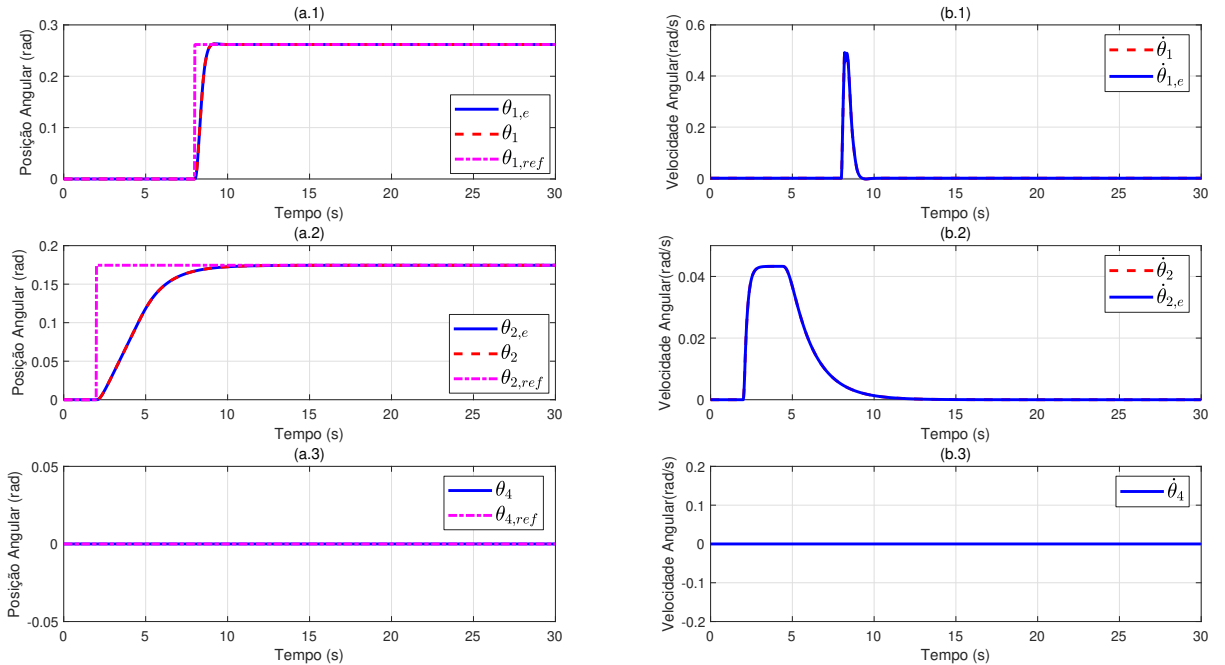


Figura 15 – Resultados de simulação. (a) Posições angulares de referência, reais e estimadas. (b) Velocidades angulares reais e estimadas.

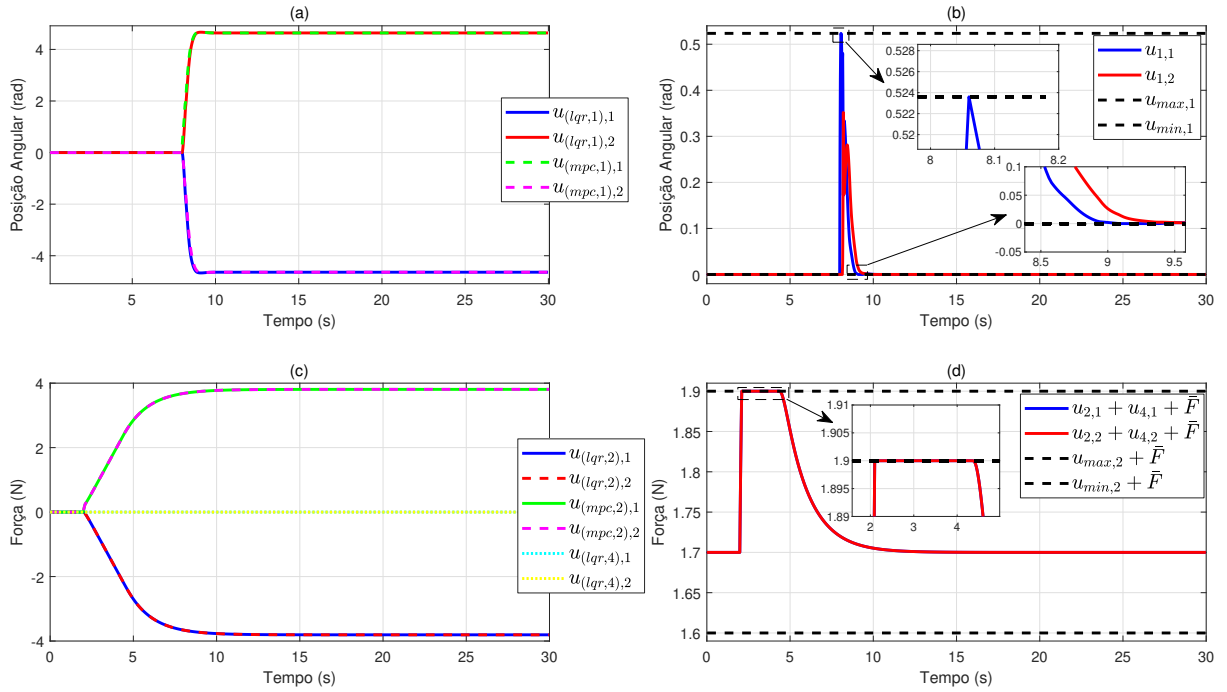


Figura 16 – Resultados de simulação. (a) e (c) Parcelas de controles do LQR e preditivo. (b) e (d) Controles totais.

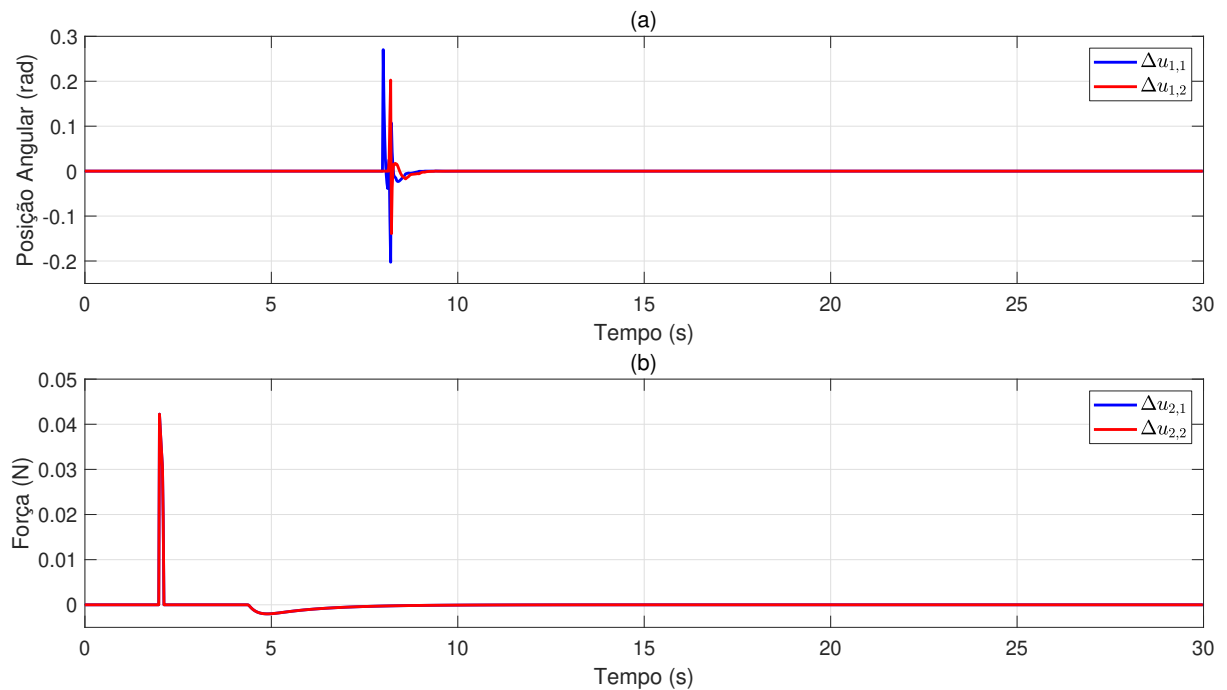


Figura 17 – Resultados de simulação. Incrementos de controle.

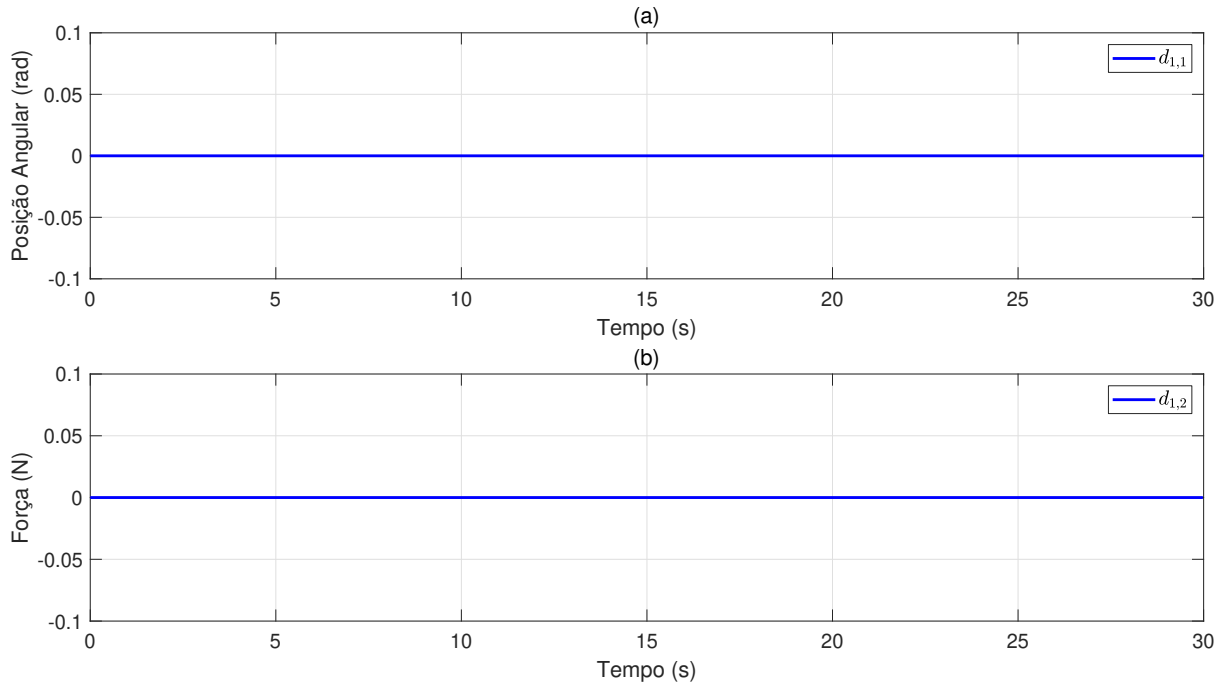


Figura 18 – Resultados de simulação. Perturbações de saída estimadas.

Vale lembrar que os controles totais apresentados nas Figuras 16b e 16d, bem como as próximas figuras que apresentem a totalidade das ações de controle, são resultantes da soma das parcelas de controle preditivo, do regulador linear quadrático e também os valores de equilíbrio.

Para avaliar a robustez do controlador, foi inserido um descasamento entre o modelo de simulação e o modelo utilizado no projeto. Mais precisamente, no modelo de simulação, adotaram-se $I_{Z_{j0}}$, $I_{Z_{j1}}$ e I_{Z_p} com o triplo dos valores considerados durante o projeto do controlador e do observador. Também adotou-se um valor cinco vezes menor para μ_2 . Foram incluídos ruídos brancos gaussianos de média zero e de desvios padrão 0,005 rad e 0,05 rad/s nas medidas de posição e velocidade angular, respectivamente. Mais ainda, adicionou-se um atraso de 15 ms na ação do controlador. Apesar das imperfeições do modelo e dos ruídos, as saídas foram conduzidas para as referências sem erro de regime permanente, como pode ser observado na Figura 19. Isso mostra a efetividade das abordagens adotadas para inclusão de ação integral. As entradas aplicadas ao processo são exibidas na Figura 20. Nas Figuras 21 e 22, apresentam-se os incrementos de controle e as perturbações de saída estimadas, respectivamente. Novamente, pode-se observar que as restrições de entrada foram atendidas ao longo da simulação.

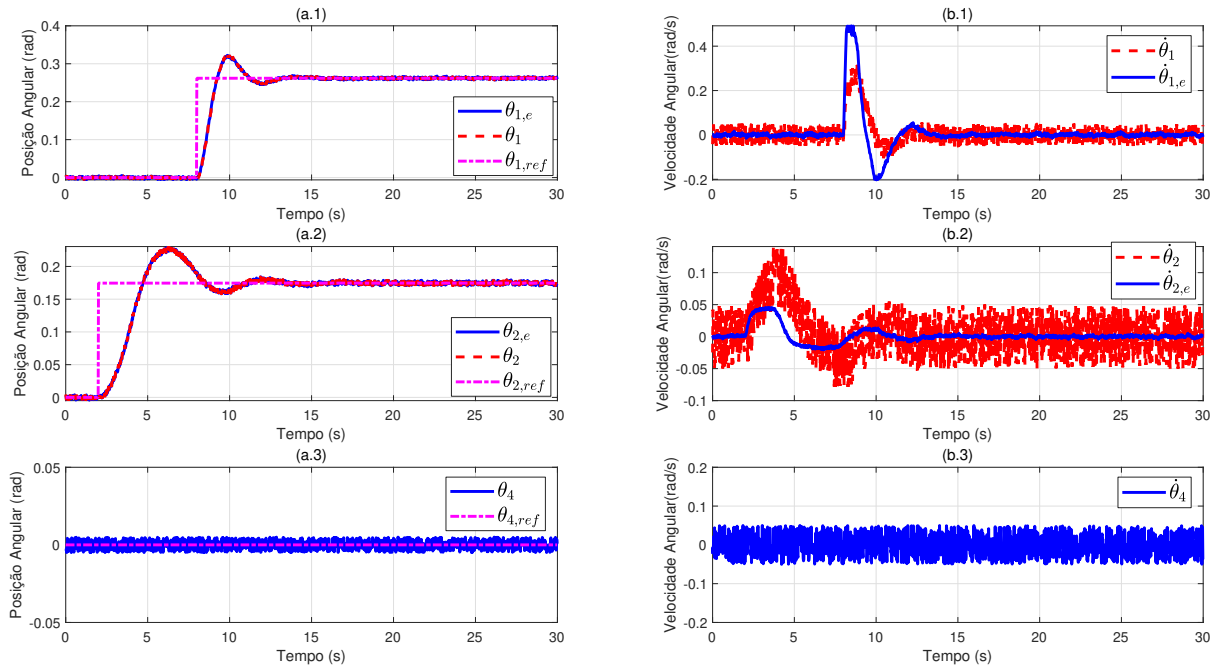


Figura 19 – Resultados de simulação no cenário com descasamento de modelo, ruído de medida e atraso de transporte. (a) Posições angulares de referência, reais e estimadas. (b) Velocidades angulares reais e estimadas.

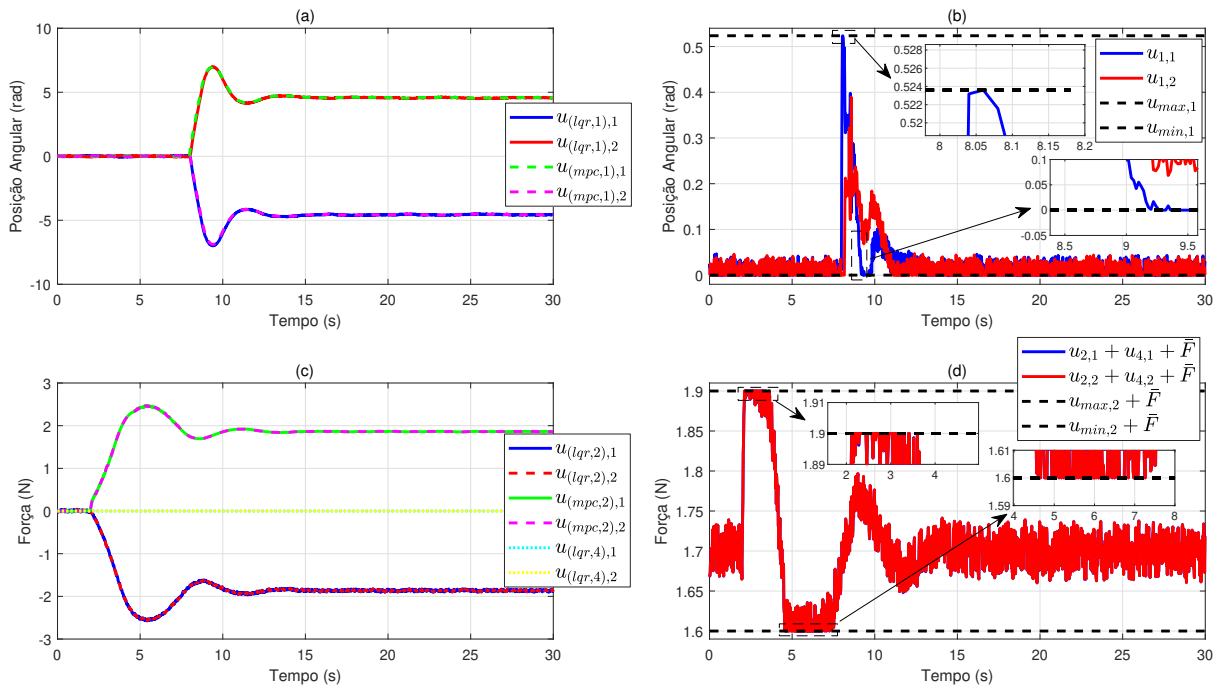


Figura 20 – Resultados de simulação no cenário com descasamento de modelo, ruído de medida e atraso de transporte. (a) e (c) Parcelas de controles do LQR e preditivo. (b) e (d) Controles totais.

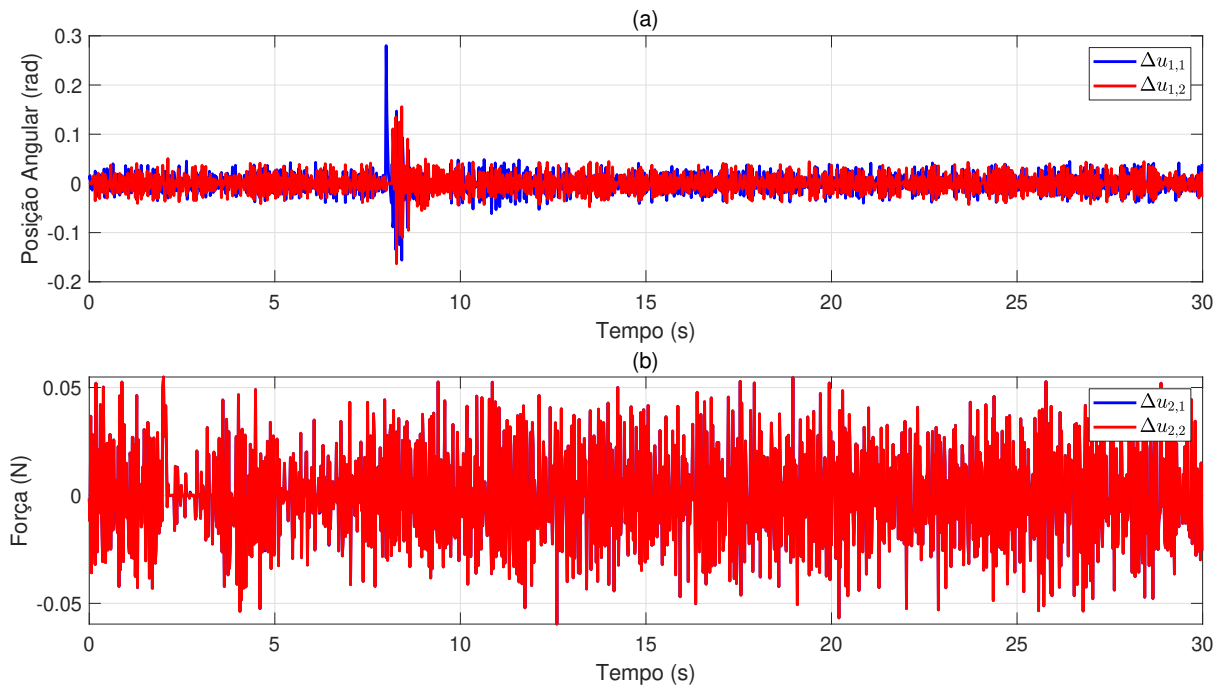


Figura 21 – Resultados de simulação no cenário com descasamento de modelo, ruído de medida e atraso de transporte. Incrementos de controle.

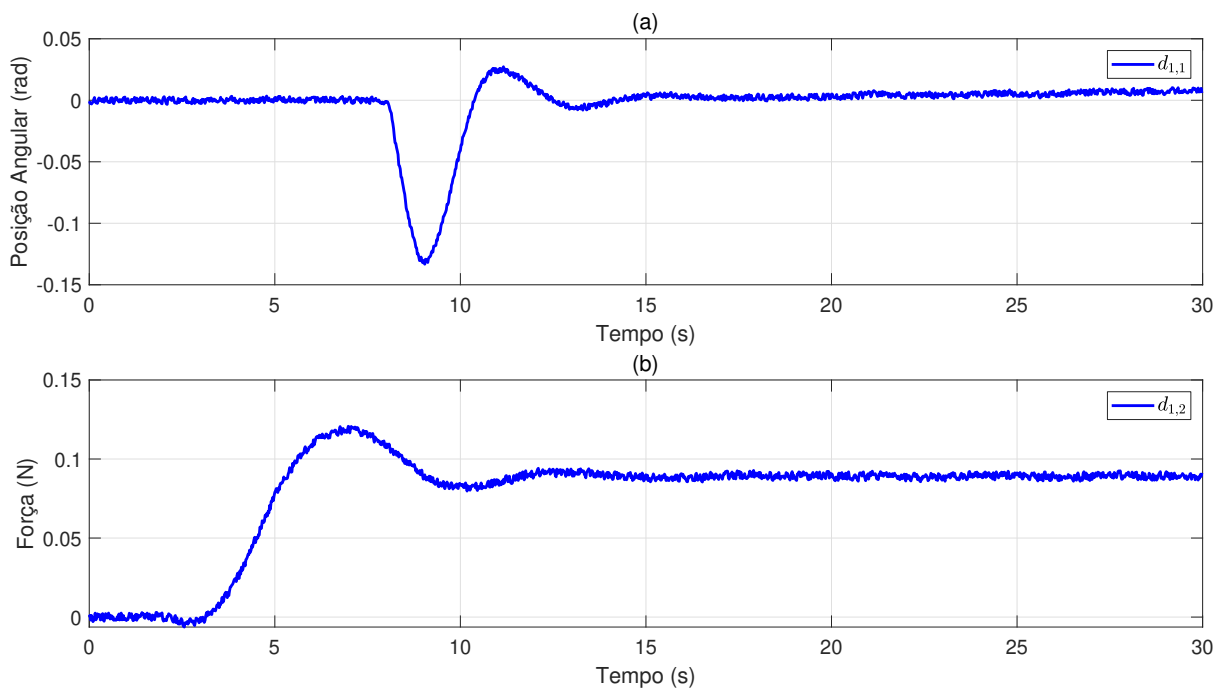


Figura 22 – Resultados de simulação no cenário com descasamento de modelo, ruído de medida e atraso de transporte. Perturbações de saída estimadas.

Como esperado, os resultados de simulação considerando a MP apresentaram re-

sultados idênticos aos resultados considerando a programação quadrática. Então, por brevidade, tais resultados de simulação serão omitidos. A comparação entre as abordagens será realizada ao longo dos ensaios experimentais da próxima seção.

4.2 Resultados experimentais

Foram realizados ensaios no equipamento real utilizando as programações quadrática e multiparamétrica. O período de amostragem e os parâmetros de controlador/observador apresentados anteriormente foram mantidos, bem como o mesmo perfil de referências da Figura 14. A SeeedStudio BeagleBone Green (vide Figura 23) foi utilizada para embarcar o sistema de controle. Tal equipamento é uma placa *open-source*, que pode ser adotada para embarcar sistemas de controle.



Figura 23 – SeeedStudio BeagleBone Green (BEAGLEBOARD.ORG, 2018).

A placa é dotada de GPIO dupla de 46 pinos possibilitando a utilização de módulos comuns como *bluetooth*, *displays*, sensores, e outros dispositivos. Mais ainda, possui suporte para sistemas operacionais como Debian, Android e Ubuntu.

O *hardware* da SeeedStudio BeagleBone Green é detalhado a seguir.

- Processador AM3358 1 GHz ARM Cortex-A8;
- Memória RAM DDR3 de 512 MB;
- Armazenamento de 4 GB 8-bit eMMC *on-board flash storage*;
- Acelerador gráfico 3D;

- Acelerador NEON *floating-point*;
- Dois microcontroladores PRU 32-bit;
- Conector micro-USB para alimentação e transferência de dados;
- Porta USB host;
- Porta Ethernet;
- Dois GPIO de 46 pinos;
- Dois conectores Grove (I2C e UART).

Por fim, vale comentar que o sistema de controle foi implementado na linguagem C/C++.

4.2.1 Resolução do problema de otimização por meio de programação quadrática

Para construção e resolução implícita dos problemas de otimização dados por (3.14)-(3.20) e (3.21)-(3.28) foram utilizadas as bibliotecas Armadillo e qpOASES, respectivamente. A Armadillo é uma biblioteca de álgebra linear de alta qualidade (matemática matricial) para a linguagem C++ (SANDERSON; CURTIN, 2016). Já a qpOASES é uma implementação em C++ *open-source* do método do conjunto ativo, que pode ser empregado para resolver problemas de programação quadrática paramétrica. A qpOASES possui vários recursos teóricos que a tornam particularmente adequada para aplicações MPC tais como suporte para resolução de problemas quadráticos com matrizes constantes e variáveis como também para resolução de problemas quadráticos com funções não-convexas (FERREAU; POTSCHKA; KIRCHES, 2007–2017).

Ao longo de ensaios experimentais notaram-se efeitos indesejados que não foram considerados em simulação, como o atrito seco e vibrações. Mesmo assim, como pode ser verificado na Figura 24, a tarefa de controle foi realizada com sucesso (i.e. as referências de ângulo foram rastreadas) com o devido atendimento às restrições sobre os canais de entrada (vide Figura 25). Os incrementos de controle e as estimativas de perturbação são mostrados nas Figuras 26 e 27, respectivamente.

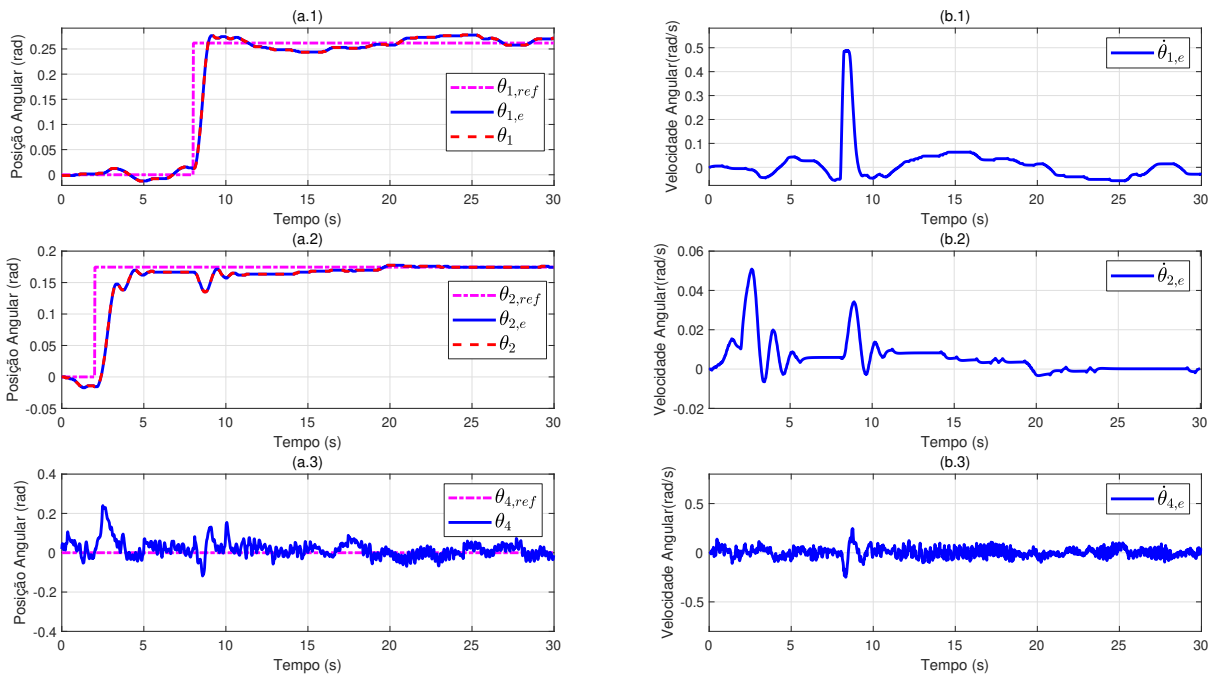


Figura 24 – Resultados experimentais. (a) Posições angulares de referência, estimadas e medidas. (b) Velocidades angulares estimadas.

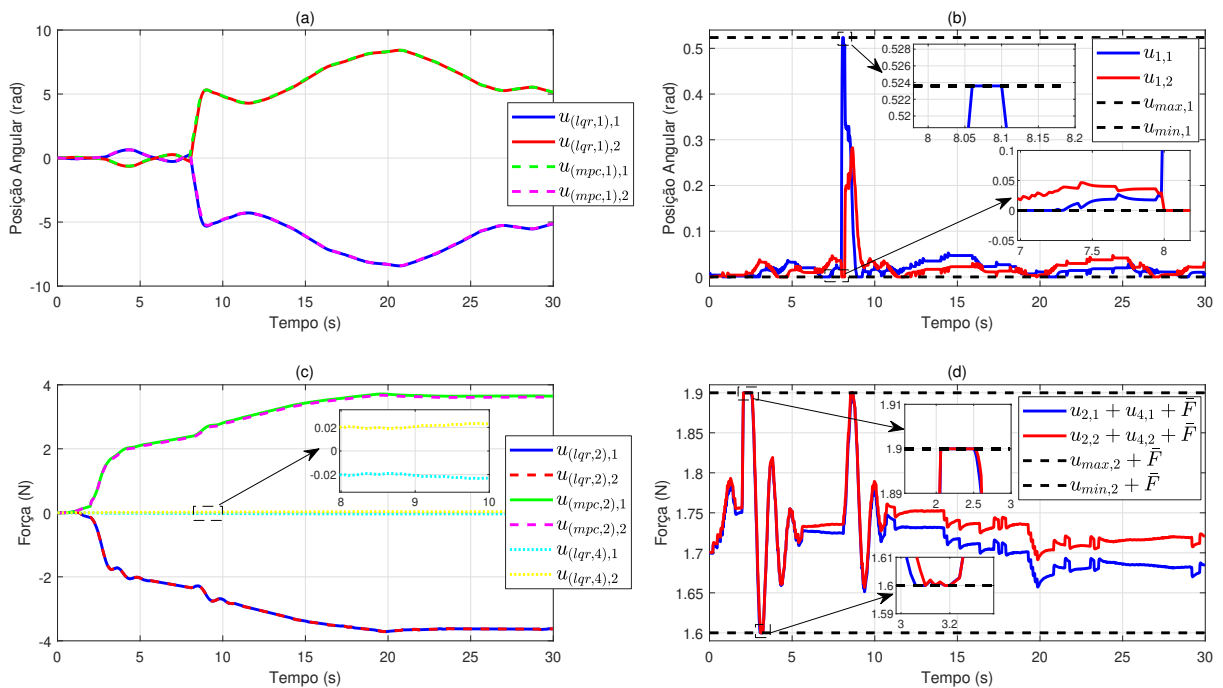


Figura 25 – Resultados experimentais. (a) e (c) Parcelas de controles do LQR e preditivo. (b) e (d) Controles totais.

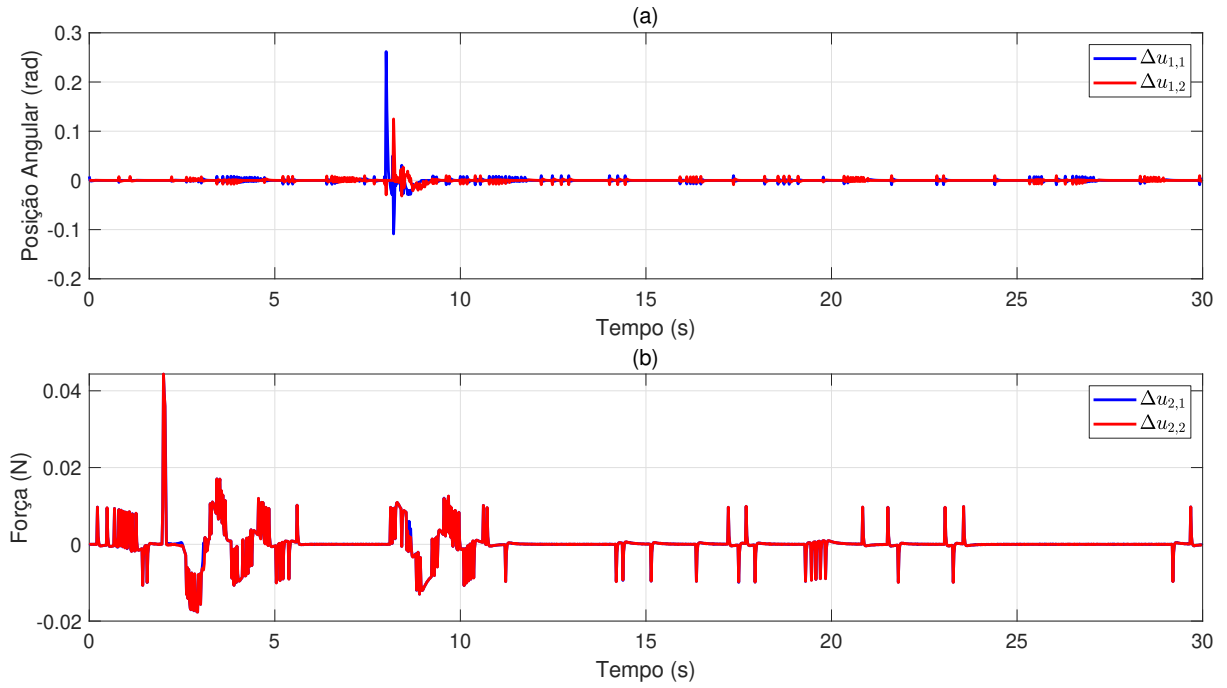


Figura 26 – Resultados experimentais. Incrementos de controle

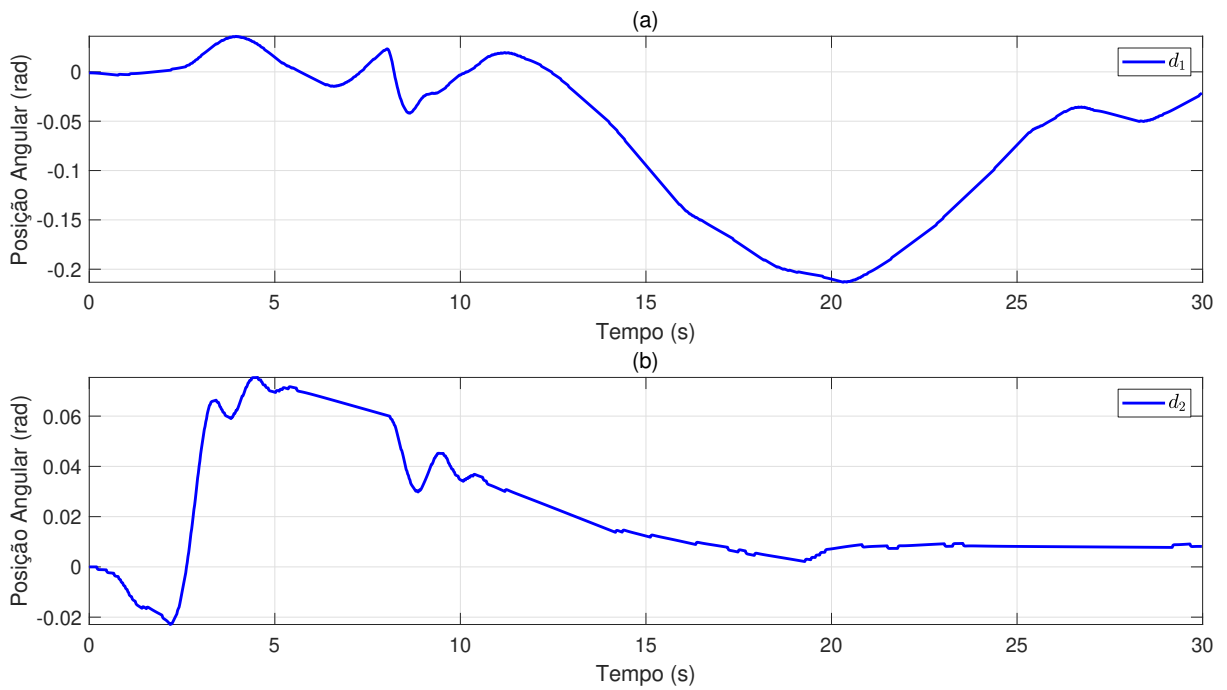


Figura 27 – Resultados experimentais. Perturbações de saída estimadas.

A Figura 28 mostra o tempo computacional gasto para implementação da ação de controle por iteração. Isto é, o tempo necessário para ler os sensores do processo, realizar a

estimativa dos estados e cálculo das ações de controle, o que inclui o tempo para resolução dos problemas de otimização dos controladores preditivos.

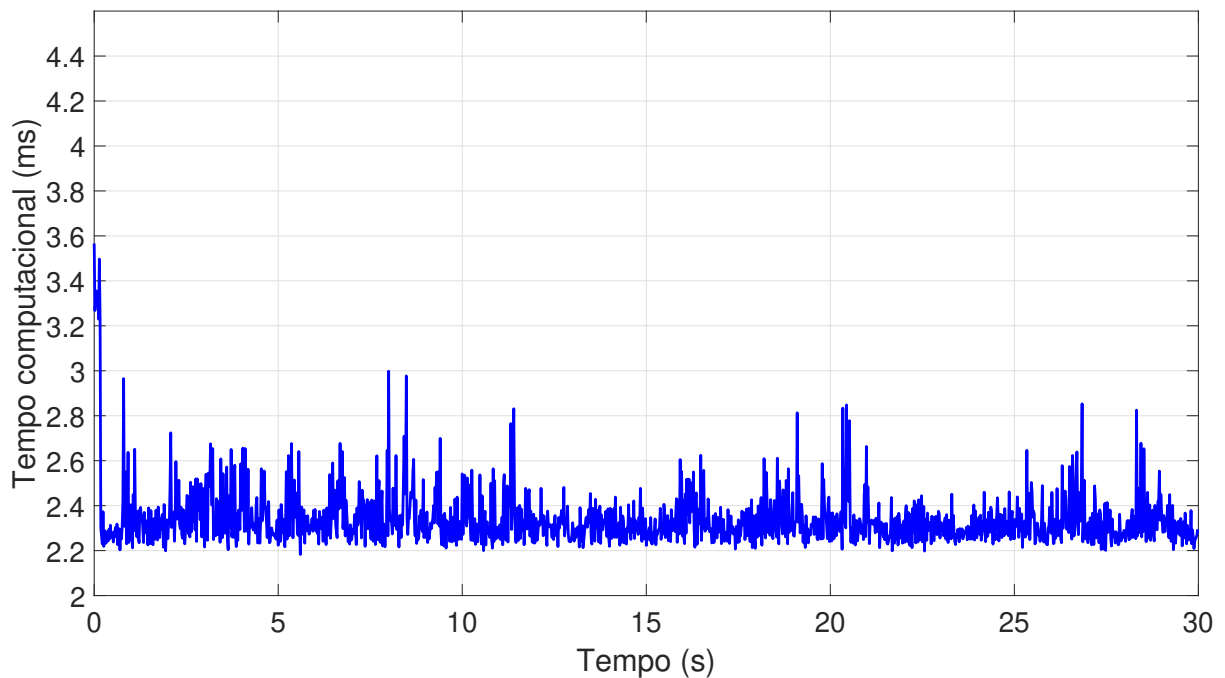


Figura 28 – Resultados experimentais. Tempo gasto para calcular a ação de controle utilizando a programação quadrática.

Observando os resultados experimentais, constata-se que o controlador atingiu resultados satisfatórios, isto é, a estabilização do sistema e o rastreamento das referências.

4.2.2 Resolução do problema de otimização por meio de programação multi-paramétrica

Para implementação da lei de controle empregando a abordagem MP, utilizou-se o pacote MPT 3.0 (HERCEG et al., 2013). Vale mencionar que continuou-se a utilizar a biblioteca Armadillo para auxiliar na álgebra matricial. Além disso, o MPT 3.0 possui recursos que permitem exportar a solução explícita para a linguagem C, que foram adotados no presente trabalho.

Para aplicação do MP aos PCOs foi necessário reescrevê-los como mostrado no Apêndice B. Como resultado da aplicação do MP em (B.1) e (B.2), para $\Delta u_{mpc,1}$ e (B.9) e (B.10) para $\Delta u_{mpc,2}$ obtiveram-se hiper-regiões constituídas por 109 e 186 partições, respectivamente.

As Figuras 29–32 mostram os resultados experimentais obtidos resolvendo-se os PCOs por meio de MP. Novamente, é possível observar que as referências foram rastreadas

com o devido atendimento às restrições. O tempo computacional necessário para calcular a ação de controle em cada instante de amostragem é apresentado na Figura 33.

Comparando-se os tempos das Figuras 28 e 33, nota-se que não houve uma redução significativa ao se adotar a MP. Mais precisamente, as médias dos tempos computacionais empregando-se programação quadrática e multiparamétrica foram 2,3407 ms e 2.5176 ms, respectivamente. Contudo, empregando-se a MP obtém-se uma maior uniformidade no tempo computacional, excetuando um valor mais elevado no início do ensaio.

A similaridade entre os tempos computacionais pode ser justificada por alguns fatores, como eficiência da biblioteca de otimização quadrática adotada (qpOASES para C/C++), pequeno número de variáveis de otimização nos PCOs (horizontes de controle unitários) e número relativamente alto de regiões compondo a solução *off-line*.

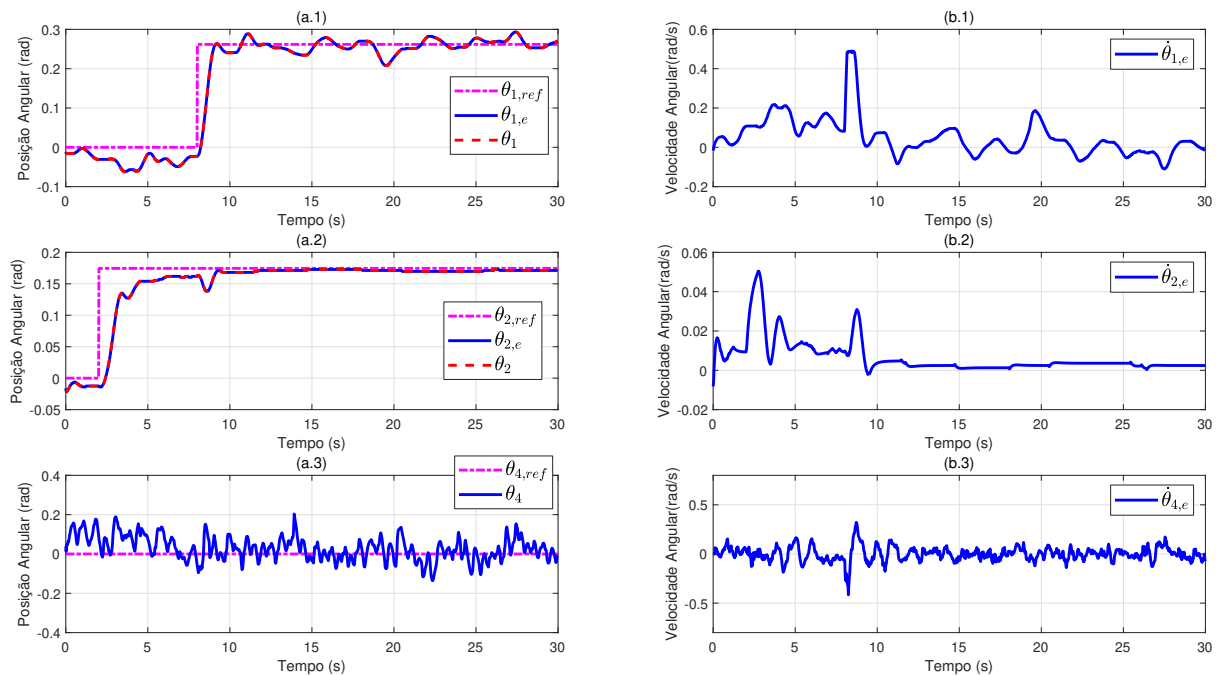


Figura 29 – Resultados experimentais. (a) Posições angulares de referência, estimadas e medidas. (b) Velocidades angulares estimadas.

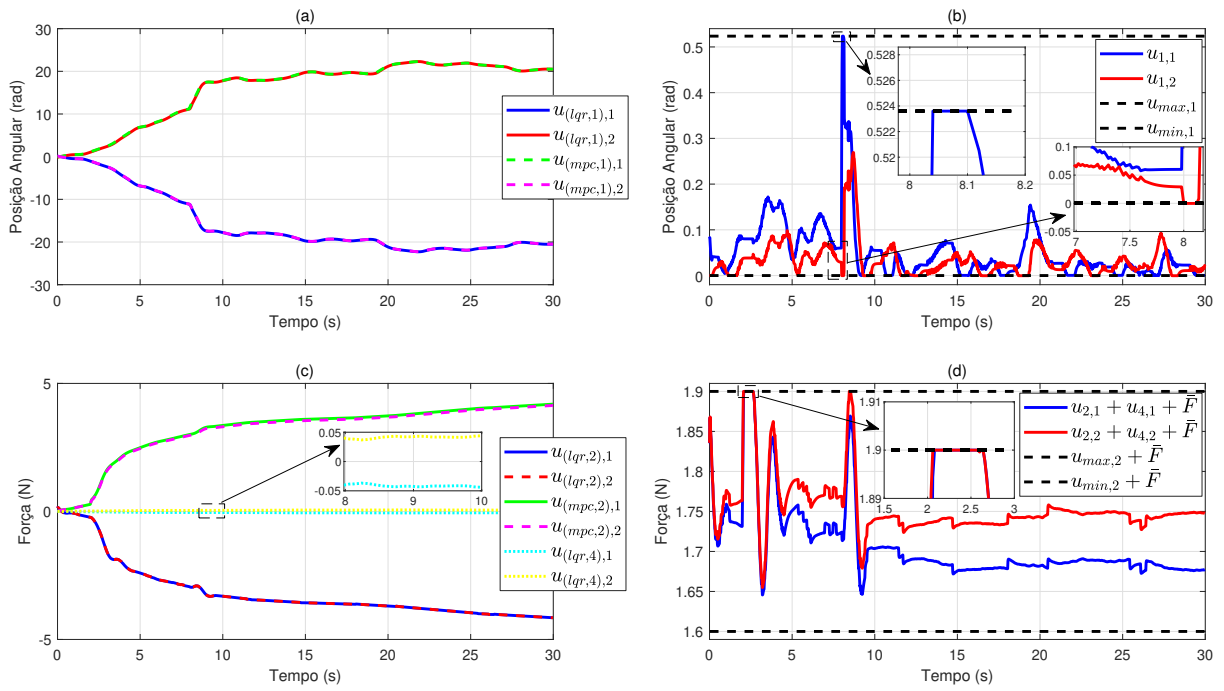


Figura 30 – Resultados experimentais. (a) e (c) Parcelas de controles do LQR e preditivo. (b) e (d) Controles totais.

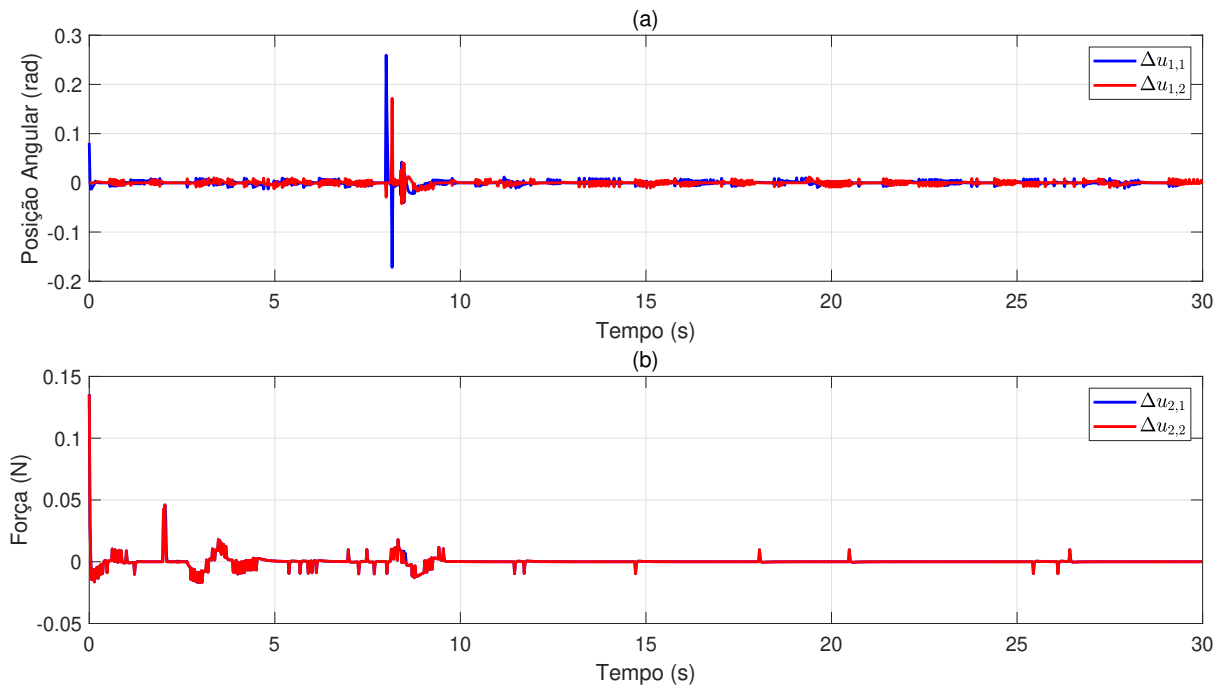


Figura 31 – Resultados experimentais. Incrementos de controle

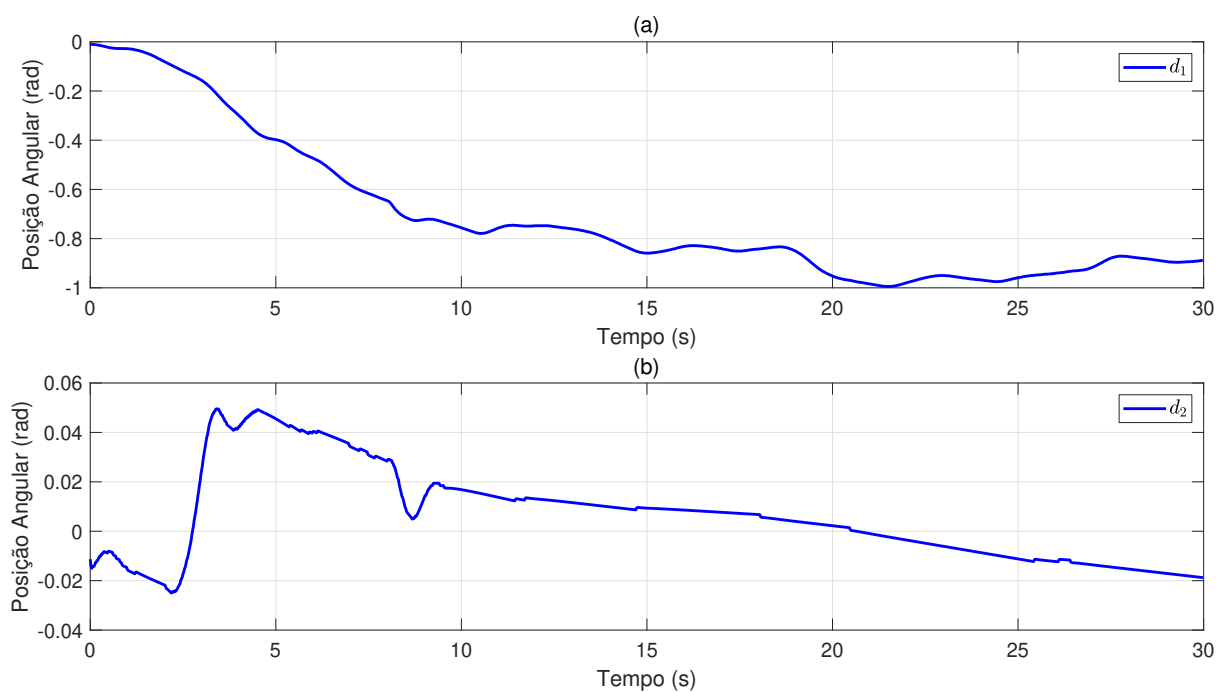


Figura 32 – Resultados experimentais. Perturbações de saída estimadas.

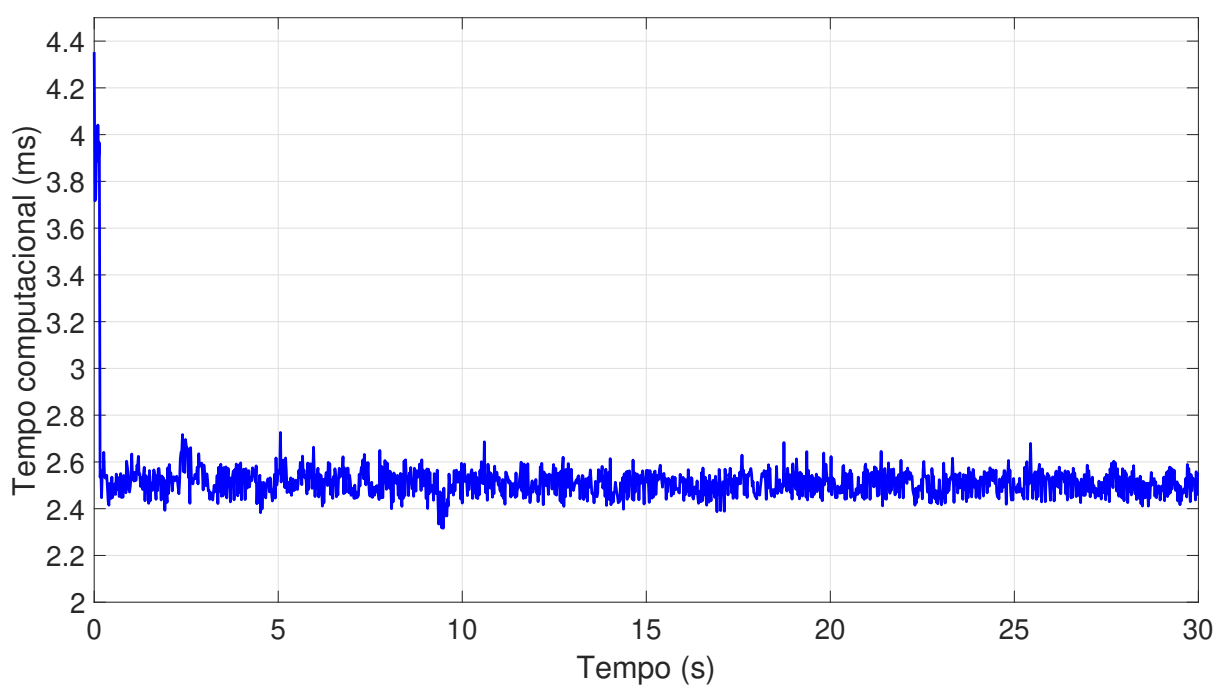


Figura 33 – Resultados experimentais. Tempo gasto para calcular a ação de controle utilizando a programação multiparamétrica.

5 Conclusões

Nesse trabalho investigou-se o emprego de controle preditivo baseado em modelo (MPC) para rastreamento de referências para a posição de um bicóptero de bancada dotado de mecanismo de vetorização da força de empuxo. Para fins de comparação, adotaram-se dois métodos para resolução do problema de controle ótimo do controlador preditivo. O primeiro consiste em escrever o problema de otimização como um problema de programação quadrática. Então, resolver o problema resultante por meio de ferramentas computacionais disponíveis. Já o segundo consiste em obter a solução do problema de otimização a partir da utilização de programação multiparamétrica. Como resultado, caracterizam-se *off-line* um conjunto de regiões dentro das quais a lei de controle é conhecida. Então, para resolução do PCO basta verificar em que região o estado se encontra e aplicar a lei de controle associada.

O sistema de controle foi projetado considerando três modelos lineares desacoplados para as dinâmicas de latitude, longitude e atitude do veículo. Em particular, para as dinâmicas de longitude e latitude, projetaram-se controladores preditivos com o objetivo de rastreamento de referências constantes considerando restrições de entrada. Já a dinâmica de atitude foi mantida nula por meio de um LQR.

Para eliminação de erro de regime estacionário no rastreamento de referências, foram adotadas diferentes técnicas. No caso da dinâmica de atitude, adicionou-se ação integral considerando um estado adicional no modelo de projeto. Já no caso do MPC, a eliminação de tal erro foi gerada incluindo-se no modelo de predição uma perturbação constante de saída, que foi estimada por meio de um observador de estado.

Simulações e ensaios foram realizados considerando referências que impõem um movimento de subida do bicóptero seguido de um movimento lateral. Ao longo desse movimento, a atitude é mantida nula. Nas simulações, constatou-se que o sistema de controle foi capaz de fazer com que o veículo seguisse as referências com o devido atendimento às restrições, mesmo na presença de descasamentos de modelo, atraso e ruído de medida. Mais ainda, como esperado, verificou-se que as soluções dos PCOs obtidas por meio de programação quadrática e de programação multiparamétrica são iguais.

Comprovada a robustez do sistema de controle considerando ambos os métodos para resolução de problemas de otimização, passou-se para a implementação no sistema real. Com esse propósito, o sistema de controle foi embarcado em uma BeagleBone Green. Os resultados experimentais, para ambos métodos de resolução de PCOs, se mostraram satisfatórios. A priori esperava-se que o tempo computacional gasto para obtenção da ação de controle utilizando a programação multiparamétrica fosse menor do o tempo

necessário empregando-se programação quadrática. Contudo, isso não foi observado experimentalmente. Em particular, obtiveram-se tempos computacionais similares. Isso pode ser justificado devido a fatores como eficiência da biblioteca de otimização numérica adotada, número de regiões compondo a solução *off-line* e parâmetros adotados para projeto do sistema de controle. Destaca-se, porém, que o tempo computacional da MP se manteve mais uniforme ao longo do ensaio.

Sugere-se, para trabalhos futuros, adotar técnicas de controle preditivo com garantia de estabilidade, algo que não foi realizado no presente trabalho. Mais ainda, poder-se-ia incluir na formulação do sistema de controle restrições de saída, que tipicamente estão presentes em aplicações reais.

Referências

- ALEXIS, K.; NIKOLAKOPOULOS, G.; TZES, A. Switching model predictive attitude control for a quadrotor helicopter subject to atmospheric disturbances. *Control Engineering Practice*, Elsevier Limited, v. 19, n. 10, p. 1195–1207, out. 2011. ISSN 0967-0661. DOI:<<https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2011.06.010>>. Citado na página 15.
- BADR, S.; MEHREZ, O.; KABEEL, A. E. A novel modification for a quadrotor design. In: *2016 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. Arlington, VA, USA: IEEE, 2016. p. 702–710. DOI:<<https://doi.org/10.1109/ICUAS.2016.7502536>>. Citado na página 16.
- BEAGLEBOARD.ORG. *SeedStudio BeagleBone Green*. 2018. Disponível em: <<https://beagleboard.org/green>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 42.
- BEMPORAD, A.; MORARI, M.; DUA, V.; PISTIKOPOULOS, E. N. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, v. 38, n. 1, p. 3–20, 2002. ISSN 0005-1098. DOI:<[https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(01\)00174-1](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(01)00174-1)>. Citado na página 33.
- BOUABDALLAH, S.; NOTH, A.; SIEGWART, R. PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. In: *IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS (IROS)*. Sendai, Japan: IEEE, 2004. p. 2451–2456. DOI:<<https://doi.org/10.1109/IROS.2004.1389776>>. Citado na página 15.
- CHAO, Z.; MING, L.; SHAOLEI, Z.; WENGUANG, Z. Collision-free uav formation flight control based on nonlinear mpc. In: *2011 International Conference on Electronics, Communications and Control (ICECC)*. Ningbo, China: IEEE, 2011. p. 1951–1956. DOI:<<https://doi.org/10.1109/ICECC.2011.6066578>>. Citado na página 17.
- CUTLER, C. R.; RAMAKER, B. L. Dynamic matrix control - a computer control algorithm. *IEEE Joint Automatic Control Conference*, v. 17, p. 72, 1980. DOI:<<https://doi.org/10.1109/JACC.1980.4232009>>. Citado na página 17.
- CUTLER, M.; URE, N.-K.; MICHINI, B.; HOW, J. Comparison of fixed and variable pitch actuators for agile quadrotors. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. Portland, Oregon: AIAA, 2011. DOI:<<https://doi.org/10.2514/6.2011-6406>>. Citado na página 16.
- DEL RE, L.; ALLGÖWER, F.; GLIELMO, L.; GUARDIOLA, C.; KOLMANOVSKY, I. *Automotive Model Predictive Control*. New York: Springer - Verlag, 2010. DOI:<<https://doi.org/10.1007/978-1-84996-071-7>>. Citado na página 17.
- FALCONE, P.; TSENG, E.; BORRELLI, F.; ASGARI, J.; HROVAT, D. Mpc-based yaw and lateral stabilisation via active front steering and braking. *Vehicle System Dynamics*, v. 46, p. 611–628, 09 2008. DOI:<<https://doi.org/10.1080/00423110802018297>>. Citado na página 17.

- FERREAU, H.; POTSCSKA, A.; KIRCHES, C. *qpOASES webpage*. 2007–2017. Disponível em: <<http://www.qpOASES.org/>>. Citado na página 43.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback control of dynamic systems*. 3. ed. Reading: Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0201527476. Citado 3 vezes nas páginas 15, 29 e 31.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Digital Control of Dynamic Systems*. 3. ed. Menlo Park: Addison-Wesley, 1998. ISBN 978-0201820546. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 29.
- GILL, P. E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M. H. *Practical optimization*. New York, USA: Academic Press, 1981. ISBN 978-0122839528. Citado na página 33.
- HERCEG, M.; KVASNICA, M.; JONES, C.; MORARI, M. Multi-Parametric Toolbox 3.0. In: *Proc. of the European Control Conference*. Zürich, Switzerland: IEEE, 2013. p. 502–510. DOI:<<https://doi.org/10.23919/ECC.2013.6669862>>. Citado 3 vezes nas páginas 36, 46 e 68.
- KENDOUL, F.; FANTONI, I.; LOZANO, R. Modeling and control of a small autonomous aircraft having two tilting rotors. *IEEE Transactions on Robotics*, v. 22, n. 6, p. 1297–1302, 2006. DOI:<<https://doi.org/10.1109/TRO.2006.882956>>. Citado na página 16.
- KOURAMAS, K.; PANOS, C.; FAÍSCA, N.; PISTIKOPOULOS, E. An algorithm for robust explicit/multi-parametric model predictive control. *Automatica*, v. 49, n. 2, p. 381–389, 2013. ISSN 0005-1098. DOI:<<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.11.035>>. Citado na página 33.
- LEE, D.; KIM, H. J.; SASTRY, S. Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Springer, v. 7, n. 3, p. 419–428, 2009. ISSN 1598-6446. DOI:<<https://doi.org/10.1007/s12555-009-0311-8>>. Citado na página 15.
- LI, H.; HADDAD, W. M. Model predictive control for a multicompartment respiratory system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 21, n. 5, p. 1988–1995, 2013. DOI:<<https://doi.org/10.1109/TCST.2012.2210956>>. Citado na página 17.
- LIMA, D. de S. *Controle preditivo explícito com múltiplos modelos para acomodação de falhas*. Dissertação (Mestrado em Ciências no Programa de Engenharia Eletrônica e Computação, Área de Sistemas e Controle) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2013. Citado na página 34.
- MACIEJOWSKI, J. M. *Predictive control with constraints*. Harlow: Prentice Hall, 2002. ISBN 0201398230. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 31.
- MARQUES, F. M. M. *Modeling, Simulation and Control of a Generic Tilting Rotor Multi-Copter*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2018. DOI:<<http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.1135>>. Citado 4 vezes nas páginas 9, 15, 22 e 24.
- NEGENBORN, R.; OVERLOOP, P.; KEVICZKY, T.; SCHUTTER, B. D. Distributed model predictive control of irrigation canals. *NHM*, v. 4, p. 359–380, 06 2009. DOI:<<https://doi.org/10.3934/nhm.2009.4.359>>. Citado na página 17.

OGATA, K. *Discrete-time Control Systems*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1994. ISBN 978-0130342812. Citado na página 27.

PERCIVAL, M.; WANG, Y.; GROSMAN, B.; DASSAU, E.; ZISSER, H.; JOVANOVIČ, L.; DOYLE, F. Development of a multi-parametric model predictive control algorithm for insulin delivery in type 1 diabetes mellitus using clinical parameters. *Journal of process control*, v. 21, p. 391–404, 03 2011. DOI:<<https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2010.10.003>>. Citado na página 17.

PISTIKOPOULOS, E. N.; GEORGIADIS, M. C.; DUA, V. *MultiParametric Model Based Control 2: theory and applications*. Weinheim: Wiley-VCH, 2007. DOI:<<https://doi.org/10.1002/9783527631230>>. Citado na página 33.

QIN, S.; BADGWELL, T. A. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, v. 11, n. 7, p. 733–764, 2003. ISSN 0967-0661. DOI:<[https://doi.org/10.1016/S0967-0661\(02\)00186-7](https://doi.org/10.1016/S0967-0661(02)00186-7)>. Citado na página 16.

RICHALET, J.; RAULT, A.; TESTUD, J.; PAPON, J. Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. *Automatica*, v. 14, n. 5, p. 413–428, 1978. ISSN 0005-1098. DOI:<[https://doi.org/10.1016/0005-1098\(78\)90001-8](https://doi.org/10.1016/0005-1098(78)90001-8)>. Citado na página 17.

ROSKAM, J. *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls*. Lawrence: DARCorportation, 1979. ISBN 978-1884885174. Citado na página 16.

ROSSITER, J. *Model-Based Predictive Control: A Practical Approach*. Boca Raton: CRC Press, 2003. DOI:<<https://doi.org/10.1201/9781315272610>>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 29 e 30.

RYLL, M.; BÜLTHOFF, H. H.; GIORDANO, P. R. Modeling and control of a quadrotor uav with tilting propellers. In: *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Saint Paul, MN, USA: IEEE, 2012. DOI:<<https://doi.org/10.1109/ICRA.2012.6225129>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 16.

SANDERSON, C.; CURTIN, R. Armadillo: a template-based c++ library for linear algebra. *The Journal of Open Source Software*, The Open Journal, v. 1, n. 2, p. 26, Jun 2016. DOI:<<http://dx.doi.org/10.21105/joss.00026>>. Citado na página 43.

SERVAIS, E.; D'ANDRÉA-NOVEL, B.; MOUNIER, H. Ground control of a hybrid tricopter. In: *2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. Denver, CO, USA: IEEE, 2015. p. 945–950. DOI:<<https://doi.org/10.1109/ICUAS.2015.7152382>>. Citado na página 16.

SILVA, G. H. C. e. *Iniciação Científica Voluntária: Desenvolvimento de bancada de laboratório para controle de um bicóptero com empuxo vetorial*. Uberlândia, MG, Brasil, 2021. SEI: 23117.029704/2021-95. Citado na página 20.

SILVA, G. H. C. e.; ASSIS, P. A. Q. d.; MARQUES, F. M. M. Desenvolvimento do mecanismo de vetorização para um bicóptero de bancada. *POSMEC*, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 9, 21 e 22.

SPJOTVOLD, J. *Parametric Programming in Control Theory Programming*. Tese (Doutorado) — Department of Engineering Cybernetics, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2008. DOI:<<https://doi.org/11250/249751>>. Citado na página 34.

SRIDHAR, S.; Gupta, G.; Kumar, R.; Kumar, M.; Cohen, K. Tilt-rotor quadcopter explored: Hardware based dynamics, smart sliding mode controller, attitude hold wind disturbance scenarios. In: *2019 American Control Conference (ACC)*. Philadelphia, PA, USA: IEEE, 2019. p. 2005–2010. DOI:<<https://doi.org/10.23919/ACC.2019.8815013>>. Citado na página 15.

TONDEL, P. *Constrained Optimal Control via Multiparametric Quadratic Programming*. Tese (Doutorado) — Department of Engineering Cybernetics, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2003. ISBN 82-47156083. Citado na página 34.

VALAVANIS, K. P. *Advances in unmanned aerial vehicles*. Dordrecht: Springer, 2007. DOI:<<https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6114-1>>. Citado na página 15.

Apêndices

APÊNDICE A – Reformulação dos problemas de otimização para emprego de programação quadrática

Para reescrever os problemas de otimização (3.14)–(3.20) e (3.21)–(3.28) como problemas de programação quadrática, as funções de custo (3.12) e (3.13) e as restrições sobre os controles (3.19) e (3.27) devem ser escritas em função das seqüências de incrementos de controle $\{\Delta\hat{u}_{mpc,1}(k+i|k), i = 0, 1, \dots, M-1\}$ e $\{\Delta\hat{u}_{mpc,2}(k+i|k), i = 0, 1, \dots, M-1\}$, respectivamente. Esse procedimento é detalhado a seguir.

A.1 Problema de programação quadrática do controlador MPC₁

A.1.1 Escrevendo a função de custo em termos das variáveis de decisão

- Equações de predição

Primeiramente, escrever-se-ão as N_1 predições para os estados em termos das ações de controle preditivo. Para isso, de (3.7), (3.4) e (3.15) pode-se chegar a

$$x_1(k+1) = \underbrace{(\Phi_1 - \Gamma_1 K_1)}_{\Phi_{\Gamma,1}} x_1(k) + \Gamma_1 u_{mpc,1}(k) \quad (\text{A.1})$$

Ou seja,

$$x_1(k+1) = \Phi_{\Gamma,1} x_1(k) + \Gamma_1 u_{mpc,1}(k) \quad (\text{A.2})$$

Reescrevendo (A.2) na notação de variáveis preditas, tem-se que

$$\hat{x}_1(k+1|k) = \Phi_{\Gamma,1} x_1(k) + \Gamma_1 \hat{u}_{mpc,1}(k|k) \quad (\text{A.3})$$

em que o símbolo “ $\hat{\cdot}$ ” aponta variáveis preditas e a notação $(\bullet|k)$ indica que a predição é realizada com base nas informações disponíveis no instante k .

Para dois passos à frente tem-se

$$\hat{x}_1(k+2|k) = \Phi_{\Gamma,1} \hat{x}_1(k+1|k) + \Gamma_1 \hat{u}_{mpc,1}(k+1|k) \quad (\text{A.4})$$

Substituindo (A.3) em (A.4), obtém-se

$$\hat{x}_1(k+2|k) = \Phi_{\Gamma,1}^2 x_1(k) + \Phi_{\Gamma,1} \Gamma_1 \hat{u}_{mpc,1}(k|k) + \Gamma_1 \hat{u}_{mpc,1}(k+1|k) \quad (\text{A.5})$$

De maneira semelhante, para i passos à frente:

$$\hat{x}_1(k+i+1|k) = \Phi_{\Gamma,1}^i x_1(k) + \Phi_{\Gamma,1}^{i-1} \Gamma_1 \hat{u}_{mpc,1}(k|k) + \Phi_{\Gamma,1}^{i-2} \Gamma_1 \hat{u}_{mpc,1}(k+1|k) + \dots + \Gamma_1 \hat{u}_{mpc,1}(k+i|k) \quad (\text{A.6})$$

Empilhando as predições para N_1 passos na forma matricial, tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1|k) \\ \hat{x}_1(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{x}_1(k+N_1|k) \end{bmatrix}}_{\hat{X}_1, 2N_1 \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{\Gamma,1} \\ \Phi_{\Gamma,1}^2 \\ \vdots \\ \Phi_{\Gamma,1}^{N_1} \end{bmatrix}}_{P_{x_1}, 2N_1 \times 2} x_1(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0_{2 \times 2} & \dots & 0_{2 \times 2} \\ \Phi_{\Gamma,1} \Gamma_1 & \Gamma_1 & \dots & 0_{2 \times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{\Gamma,1}^{N_1-1} \Gamma_1 & \Phi_{\Gamma,1}^{N_1-2} \Gamma_1 & \dots & \Gamma \end{bmatrix}}_{H_{x_1}, 2N_1 \times 2N_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_{mpc,1}(k|k) \\ \hat{u}_{mpc,1}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}_{mpc,1}(k+N_1-1|k) \end{bmatrix}}_{\hat{U}_{mpc,1}, 2N_1 \times 1} \quad (\text{A.7})$$

em que $0_{2 \times 2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é uma matriz de zeros.

Resumidamente,

$$\hat{X}_1 = P_{x_1} x_1(k) + H_{x_1} \hat{U}_{mpc,1} \quad (\text{A.8})$$

Um procedimento similar pode ser realizado para escrever a relação futura entre ações de controle e saídas. Para tanto, primeiramente reescreve-se (3.16) na notação de variáveis preditas, isto é,

$$\hat{y}_1(k+1|k) = C_1 \hat{x}_1(k+1|k) \quad (\text{A.9})$$

Substituindo (A.2) em (A.9), chega-se a

$$\hat{y}_1(k+1|k) = C_1 \Phi_{\Gamma,1} x_1(k) + C_1 \Gamma_1 \hat{u}_{mpc,1}(k|k) \quad (\text{A.10})$$

Seguindo um procedimento similar para 2 e i passos a frente, é possível obter

$$\hat{y}_1(k+2|k) = C_1 \Phi_{\Gamma,1}^2 x_1(k) + C_1 \Phi_{\Gamma,1} \Gamma_1 \hat{u}_{mpc,1}(k|k) + C_1 \Gamma_1 \hat{u}_{mpc,1}(k+1|k) \quad (\text{A.11})$$

$$\hat{y}_1(k+i+1|k) = C_1 \Phi_{\Gamma,1}^i x_1(k) + C_1 \Phi_{\Gamma,1}^{i-1} \Gamma_1 \hat{u}_{mpc,1}(k|k) + C_1 \Phi_{\Gamma,1}^{i-2} \Gamma_1 \hat{u}_{mpc,1}(k+1|k) + \dots + C_1 \Gamma_1 \hat{u}_{mpc,1}(k+i|k) \quad (\text{A.12})$$

Escrevendo as predições para N_1 passos na forma matricial, tem-se

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}_1(k+1|k) \\ \hat{y}_1(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{y}_1(k+N_1|k) \end{bmatrix}}_{\hat{Y}_1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \Phi_{\Gamma,1} \\ C_1 \Phi_{\Gamma,1}^2 \\ \vdots \\ C_1 \Phi_{\Gamma,1}^{N_1} \end{bmatrix}}_{f_{y_1}} x_1(k) + \\
 + \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \Gamma_1 & 0_{1 \times 2} & \dots & 0_{1 \times 2} \\ C_1 \Phi_{\Gamma,1} \Gamma_1 & C_1 \Gamma_1 & \dots & 0_{1 \times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 \Phi_{\Gamma,1}^{N_1-1} \Gamma_1 & C_1 \Phi_{\Gamma,1}^{N_1-2} \Gamma_1 & \dots & C_1 \Gamma_1 \end{bmatrix}}_{H_{y_1}} &\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_{mpc,1}(k|k) \\ \hat{u}_{mpc,1}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}_{mpc,1}(k+N_1-1|k) \end{bmatrix}}_{\hat{U}_{mpc,1}}
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

em que $0_{1 \times 2} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ é um vetor de zeros.

Resumidamente,

$$\hat{Y}_1 = f_{y_1} + H_{y_1} \hat{U}_{mpc,1} \tag{A.14}$$

Por fim, também pelos mesmos métodos, é possível escrever a relação futura entre o controle total e as parcelas de controle LQR e MPC. Reescrevendo (3.4) na notação de variáveis preditas, tem-se

$$\hat{u}_1(k+i|k) = \hat{u}_{lqr,1}(k+i|k) + \hat{u}_{mpc,1}(k+i|k), \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - 1 \tag{A.15}$$

As N_1 parcelas de controle podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_1(k|k) \\ \hat{u}_1(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}_1(k+N_1-1|k) \end{bmatrix}}_{\hat{U}_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_{lqr,1}(k|k) \\ \hat{u}_{lqr,1}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}_{lqr,1}(k+N_1-1|k) \end{bmatrix}}_{\hat{U}_{lqr,1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_{mpc,1}(k|k) \\ \hat{u}_{mpc,1}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}_{mpc,1}(k+N_1-1|k) \end{bmatrix}}_{\hat{U}_{mpc,1}}
 \tag{A.16}$$

Logo,

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_{lqr,1} + \hat{U}_{mpc,1} \tag{A.17}$$

A predição do regulador quadrático é obtida de maneira similar. Reescrevendo (3.7) na notação de variáveis preditas, tem-se

$$\hat{u}_{lqr,1}(k+i|k) = -K_1 \hat{x}_1(k+i|k), \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - 1 \tag{A.18}$$

No formato matricial,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_{lqr,1}(k|k) \\ \hat{u}_{lqr,1}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}_{lqr,1}(k+N_1-1|k) \end{bmatrix}}_{\hat{U}_{lqr,1}}_{2N_1 \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -K_1 \\ 0_{2 \times 2} \\ \vdots \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}}_{P_{lqr,1}}_{2N_1 \times 2} x_1(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & \cdots & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ -K_1 & \cdots & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{2 \times 2} & \cdots & -K_1 & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}}_{H_{lqr,1}}_{2N_1 \times 2N_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1|k) \\ \hat{x}_1(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{x}_1(k+N_1|k) \end{bmatrix}}_{\hat{X}_1}_{2N_1 \times 1} \quad (\text{A.19})$$

em que $x_1(k)$ é um estado conhecido, enquanto que $\hat{x}_1(k+i|k)$, $i = 1, 2, \dots, N_1$ são preditos.

Seguindo o mesmo desenvolvimento, pode-se escrever

$$\hat{U}_{lqr,1} = P_{lqr,1}x_1(k) + H_{lqr,1}\hat{X}_1 \quad (\text{A.20})$$

Então, de (A.8) e (A.20), segue que

$$\hat{U}_{lqr,1} = (P_{lqr,1} + H_{lqr,1}P_{x_1})x_1(k) + H_{lqr,1}H_{x_1}\hat{U}_{mpc,1} \quad (\text{A.21})$$

Substituindo (A.21) em (A.17), obtém-se

$$\hat{U}_1 = \underbrace{(P_{lqr,1} + H_{lqr,1}P_{x_1})}_{P_{u_1}}x_1(k) + \underbrace{(H_{lqr,1}H_{x_1} + I_{2N_1})}_{H_{u_1}}\hat{U}_{mpc,1} \quad (\text{A.22})$$

em que $I_{2N_1} \in \mathbb{R}^{2N_1 \times 2N_1}$ é a matriz identidade.

Resumidamente,

$$\hat{U}_1 = P_{u_1}x_1(k) + H_{u_1}\hat{U}_{mpc,1} \quad (\text{A.23})$$

- Formulação em termos do incremento de controle

Existem diferentes formas de se reformular as equações de predição em termos de $\Delta u_{mpc,1}$. Uma possibilidade consiste em utilizar um vetor de estado artificial definido por

$$\xi_1(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ u_{mpc,1}(k-1) \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad (\text{A.24})$$

Seja ainda o incrementos de controle $\Delta u_{mpc,1}$ dado por

$$\Delta u_{mpc,1}(k) = u_{mpc,1}(k) - u_{mpc,1}(k-1) \quad (\text{A.25})$$

Desta forma, a partir de (A.25), (A.2) e (A.24) pode-se definir um modelo artificial em termos do incremento de controle

$$\begin{aligned} \xi_1(k+1) &= \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ u_{mpc,1}(k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{\Gamma,1} & \Gamma \\ 0_{2 \times 2} & I_2 \end{bmatrix}}_{\Phi_{\xi,1}} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ u_{mpc,1}(k-1) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma \\ I_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma_{\xi,1}} \Delta u_{mpc,1}(k) \\ y_1(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & 0_{1 \times 2} \end{bmatrix}}_{C_{\xi,1}} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ u_{mpc,1}(k-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

em que $I_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é a matriz identidade.

Resumidamente,

$$\begin{aligned} \xi_1(k+1) &= \Phi_{\xi,1} \xi_1(k) + \Gamma_{\xi,1} \Delta u_{mpc,1}(k) \\ y_1(k) &= C_{\xi,1} \xi_1(k) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Por fim, reformulando (A.14) a partir do modelo artificial (A.27), segue que

$$\hat{Y}_1 = f_1 + G_1 \Delta \hat{U}_{mpc,1} \quad (\text{A.28})$$

em que

$$\begin{aligned} G_1 &= \begin{bmatrix} C_{\xi,1} \Gamma_{\xi,1} & 0_{1 \times 2} & \cdots & 0_{1 \times 2} \\ C_{\xi,1} \Phi_{\xi,1} \Gamma_{\xi,1} & C_{\xi,1} \Gamma_{\xi,1} & \cdots & 0_{1 \times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{\xi,1} \Phi_{\xi,1}^{N_1-1} \Gamma_{\xi,1} & C_{\xi,1} \Phi_{\xi,1}^{N_1-2} \Gamma_{\xi,1} & \cdots & C_{\xi,1} \Phi_{\xi,1}^{N_1-M_1} \Gamma_{\xi,1} \end{bmatrix}_{N_1 \times 2M_1} \\ f_1 &= \phi_1 \xi_1(k), \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} C_{\xi,1} \Phi_{\xi,1} \\ C_{\xi,1} \Phi_{\xi,1}^2 \\ \vdots \\ C_{\xi,1} \Phi_{\xi,1}^{N_1} \end{bmatrix}_{N_1 \times 2} \end{aligned}$$

Vale comentar que, devido a (3.20), suprimem-se as últimas $(N_1 - M_1)2$ colunas de G_1 .

Para reformular a equação de predição de controle total em termos de $\Delta u_{mpc,1}$ optou-se por obter a predição do controle preditivo. A predição do controle preditivo é obtida reordenando (A.25) e a escrevendo em termos de variáveis preditas, conforme segue

$$\begin{aligned} \hat{u}_{mpc,1}(k+i|k) &= u_{mpc,1}(k-1) + \Delta \hat{u}_{mpc,1}(k|k) + \Delta \hat{u}_{mpc,1}(k+1|k) + \\ &+ \cdots + \Delta \hat{u}_{mpc,1}(k+i|k), \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - 1 \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Reescrevendo no formato matricial para N_1 predições, obtém-se

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_{mpc,1}(k|k) \\ \hat{u}_{mpc,1}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}_{mpc,1}(k+N_1-1|k) \end{bmatrix}}_{\hat{U}_{mpc,1}}_{2N_1 \times 1} = \begin{bmatrix} u_{mpc,1}(k-1) \\ u_{mpc,1}(k-1) \\ \vdots \\ u_{mpc,1}(k-1) \end{bmatrix}_{2N_1 \times 1} + \\
 & + \underbrace{\begin{bmatrix} I_2 & 0_2 & \dots & 0_2 \\ I_2 & I_2 & \dots & 0_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_2 & I_2 & \dots & I_2 \end{bmatrix}}_{T_{N_1 \times M_1}^{I_2}}_{2N_1 \times 2M_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \hat{u}_{mpc,1}(k|k) \\ \Delta \hat{u}_{mpc,1}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}_{mpc,1}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}_{\Delta \hat{U}_{mpc,1}}_{2M_1 \times 1} \quad (A.30)
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\hat{U}_{mpc,1} = [u_{mpc,1}(k-1)]_{N_1} + T_{N_1 \times M_1}^{I_2} \Delta \hat{U}_{mpc,1} \quad (A.31)$$

Cabe lembrar que, devido a (3.20), suprimem-se as últimas $(N_1 - M_1)2$ colunas de $T_{N_1 \times M_1}^{I_2}$.

A predição do controle em termos do incremento de controle preditivo é obtida substituindo (A.31) em (A.23) como mostrado a seguir.

$$\hat{U}_1 = \underbrace{P_{u_1} x_1(k) + H_{u_1} [u_{mpc,1}(k-1)]_{N_1}}_{f_{u_1}} + \underbrace{H_{u_1} T_{N_1 \times M_1}^{I_2}}_{H_{T,1}} \Delta \hat{U}_{mpc,1} \quad (A.32)$$

$$\hat{U}_1 = f_{u_1} + H_{T,1} \Delta \hat{U}_{mpc,1} \quad (A.33)$$

A função de custo (3.12) pode ser escrita na seguinte forma matricial do seguinte modo:

$$J_1(k) = (\hat{Y}_1 - r_1)^T Q_{N_1} (\hat{Y}_1 - r_1) + \Delta \hat{U}_{mpc,1}^T R_{M_1} \Delta \hat{U}_{mpc,1} + \hat{U}_{mpc,1}^T R_{N_1} \hat{U}_{mpc,1} \quad (A.34)$$

em que

$$r_1 = [\theta_{1,ref}]_{N_1}, \quad Q_{N_1} = \text{diag}([Q_1]_{N_1}), \quad R_{M_1} = \text{diag}([R_{\Delta u,1}]_{M_1}), \quad R_{N_1} = \text{diag}([R_{u,1}]_{N_1})$$

sendo que $[\bullet]_i$ representa o empilhamento vertical de i cópias do vetor \bullet .

Substituindo (A.28) e (A.33) em (A.34), pode-se escrever

$$\begin{aligned}
 J_1(k) = & (f_1 + G_1 \Delta \hat{U}_{mpc,1} - r_1)^T Q_{N_1} (f_1 + G_1 \Delta \hat{U}_{mpc,1} - r_1) + \\
 & + \Delta \hat{U}_{mpc,1}^T R_{M_1} \Delta \hat{U}_{mpc,1} + \\
 & + (f_{u_1} + H_{T,1} \Delta \hat{U}_{mpc,1})^T R_{N_1} (f_{u_1} + H_{T,1} \Delta \hat{U}_{mpc,1}) \quad (A.35)
 \end{aligned}$$

Reescrevendo (A.35), tem-se

$$\begin{aligned}
 J_1(k) = & \Delta\hat{U}_{mpc,1}^T (G_1^T Q_{N_1} G_1 + R_{M_1} + H_{T,1}^T R_{N_1} H_{T,1}) \Delta\hat{U}_{mpc,1} + \\
 & + 2((f_1 - r_1)^T Q_{N_1} G_1 + f_{u_1}^T R_{N_1} H_{T,1}) \Delta\hat{U}_{mpc,1} + \\
 & + (f_1 - r_1)^T Q_{N_1} (f_1 - r_1) + f_{u_1}^T R_{N_1} f_{u_1}
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

$$J_1(k) = \frac{1}{2} \Delta\hat{U}_{mpc,1}^T H_{qp,1} \Delta\hat{U}_{mpc,1} + f_{qp,1}^T \Delta\hat{U}_{mpc,1} + cte \tag{A.37}$$

com

$$\begin{aligned}
 H_{qp,1} &= 2(G_1^T Q_{N_1} G_1 + R_{M_1} + H_{T,1}^T R_{N_1} H_{T,1}) \\
 f_{qp,1} &= 2(G_1^T Q_{N_1} (f_1 - r_1) + H_{T,1}^T R_{N_1} f_{u_1}) \\
 cte &= (f_1 - r_1)^T Q_{N_1} (f_1 - r_1) + f_{u_1}^T R_{N_1} f_{u_1}
 \end{aligned}$$

Portanto, tem-se o custo dependendo somente do vetor de variáveis de decisão $\Delta\hat{U}_{mpc,1}$. Essas matrizes devem ser fornecidas à ferramenta de otimização numérica adotada. Tal ferramenta retorna a solução do problema de otimização, que é o vetor ótimo de controle.

A.1.2 Escrevendo as restrições em termos das variáveis de decisão

As restrições sobre as ações de controle (3.19) podem ser escritas da seguinte maneira:

$$u_{min,1} \leq \hat{u}_1(k+i|k) \leq u_{max,1}, \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - 1$$

No formato matricial,

$$\begin{bmatrix} u_{min,1} \\ u_{min,1} \\ \vdots \\ u_{min,1} \end{bmatrix}_{2N_1 \times 1} \leq \begin{bmatrix} \hat{u}_1(k|k) \\ \hat{u}_1(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}_1(k+N_1-1|k) \end{bmatrix}_{2N_1 \times 1} \leq \begin{bmatrix} u_{max,1} \\ u_{max,1} \\ \vdots \\ u_{max,1} \end{bmatrix}_{2N_1 \times 1}$$

De forma resumida,

$$[u_{min,1}]_{N_1} \leq \hat{U}_1 \leq [u_{max,1}]_{N_1} \tag{A.38}$$

Portanto substituindo (A.33) em (A.38),

$$[u_{min,1}]_{N_1} \leq f_{u_1} + H_{T,1} \Delta\hat{U}_{mpc,1} \leq [u_{max,1}]_{N_1}$$

Reescrevendo,

$$\begin{cases} H_{T,1} \Delta\hat{U}_{mpc,1} \leq [u_{max,1}]_{N_1} - f_{u_1} \\ -H_{T,1} \Delta\hat{U}_{mpc,1} \leq f_{u_1} - [u_{min,1}]_{N_1} \end{cases}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} H_{T,1} \\ -H_{T,1} \end{bmatrix}_{4N_1 \times 2M_1} \Delta \hat{U}_{mpc,1} \leq \begin{bmatrix} [u_{max,1}]_{N_1} - f_{u_1} \\ f_{u_1} - [u_{min,1}]_{N_1} \end{bmatrix}_{4N_1 \times 1} \quad (\text{A.39})$$

Simplificando (A.39), tem-se

$$A_{qp,1} \Delta \hat{U}_{mpc,1} \leq b_{qp,1} \quad (\text{A.40})$$

em que

$$A_{qp,1} = \begin{bmatrix} H_{T,1} \\ -H_{T,1} \end{bmatrix}_{4N_1 \times 2M_1}, \quad b_{qp,1} = \begin{bmatrix} [u_{max,1}]_{N_1} - f_{u_1} \\ f_{u_1} - [u_{min,1}]_{N_1} \end{bmatrix}_{4N_1 \times 1}$$

Então encontrou-se uma forma de representar as restrições dependendo somente do vetor de variáveis de decisão $\Delta \hat{U}_{mpc,1}$.

Como resultado de (A.37) e (A.40), tem-se o seguinte problema de programação quadrática a ser resolvido em cada instante de amostragem:

$$\min_{\Delta \hat{U}_{mpc,1}} J_1(k) = \frac{1}{2} \Delta \hat{U}_{mpc,1}^T H_{qp,1} \Delta \hat{U}_{mpc,1} + f_{qp,1}^T \Delta \hat{U}_{mpc,1} + cte$$

sujeito a

$$A_{qp,1} \Delta \hat{U}_{mpc,1} \leq b_{qp,1}$$

em que *cte* representa os termos que independem de $\Delta \hat{U}_{mpc,1}$ e, portanto, não afetam a solução do problema de otimização.

A.2 Problema de programação quadrática do controlador MPC₂

A.2.1 Escrevendo a função de custo em termos das variáveis de decisão

- Equações de predição

Similarmente ao desenvolvimento feito na Seção A.1, é possível chegar nas seguintes equações de predição para os estados e as saídas, respectivamente:

$$\hat{X}_2 = P_{x_2} x_2(k) + H_{x_2} \hat{U}_{mpc,2} \quad (\text{A.41})$$

$$\hat{Y}_2 = f_{y_2} + H_{y_2} \hat{U}_{mpc,2} \quad (\text{A.42})$$

- Formulação em termos do incremento de controle

Para reescrever as equações de predição em termos de $\Delta u_{mpc,2}$ adota-se a mesma estratégia proposta na Seção A.1.

Então, (A.42) é reformulado para,

$$\hat{Y}_2 = f_2 + G_2 \Delta \hat{U}_{mpc,2} \quad (\text{A.43})$$

A função de custo (3.13) pode ser escrita na seguinte forma matricial do seguinte modo:

$$J_2(k) = (\hat{Y}_2 - r_2)^T Q_{N_2} (\hat{Y}_2 - r_2) + \Delta \hat{U}_{mpc,2}^T R_{M_2} \Delta \hat{U}_{mpc,2} \quad (\text{A.44})$$

em que

$$r_2 = [\theta_{2,ref}]_{N_2}, \quad Q_{N_2} = \text{diag}([Q_2]_{N_2}), \quad R_{M_2} = \text{diag}([R_{\Delta u,2}]_{M_2})$$

sendo que $[\bullet]_i$ representa o empilhamento vertical de i cópias do vetor \bullet .

Substituindo (A.43) em (A.44), pode-se escrever

$$J_2(k) = (f_2 + G_2 \Delta \hat{U}_{mpc,2} - r_2)^T Q_{N_2} (f_2 + G_2 \Delta \hat{U}_{mpc,2} - r_2) + \Delta \hat{U}_{mpc,2}^T R_{M_2} \Delta \hat{U}_{mpc,2} \quad (\text{A.45})$$

Reescrevendo (A.45), tem-se

$$J_2(k) = \Delta \hat{U}_{mpc,2}^T (G_2^T Q_{N_2} G_2 + R_{M_2}) \Delta \hat{U}_{mpc,2} + 2((f_2 - r_2)^T Q_{N_2} G_2) \Delta \hat{U}_{mpc,2} + (f_2 - r_2)^T Q_{N_2} (f_2 - r_2) \quad (\text{A.46})$$

$$J_2(k) = \frac{1}{2} \Delta \hat{U}_{mpc,2}^T H_{qp,2} \Delta \hat{U}_{mpc,2} + f_{qp,2}^T \Delta \hat{U}_{mpc,2} + cte \quad (\text{A.47})$$

com

$$\begin{aligned} H_{qp,2} &= 2(G_2^T Q_{N_2} G_2 + R_{M_2}) \\ f_{qp,2} &= 2(G_2^T Q_{N_2} (f_2 - r_2)) \\ cte &= (f_2 - r_2)^T Q_{N_2} (f_2 - r_2) \end{aligned}$$

Portanto, tem-se o custo dependendo somente do vetor de variáveis de decisão $\Delta \hat{U}_{mpc,2}$. Como mencionado anteriormente, essas matrizes devem ser fornecidas à ferramenta de otimização numérica adotada para obter o vetor ótimo de controle.

A.2.2 Escrevendo as restrições em termos das variáveis de decisão

As restrições sobre as ações de controle (3.27) podem ser escritas da seguinte maneira:

$$u_{min,2} \leq \hat{u}_2(k+i|k) + \hat{u}_4(k+i|k) \leq u_{max,2}, \quad i = 0, 1, \dots, N_2 - 2$$

No formato matricial,

$$\begin{bmatrix} u_{min,2} \\ u_{min,2} \\ \vdots \\ u_{min,2} \end{bmatrix}_{2N_2 \times 1} \leq \begin{bmatrix} \hat{u}_2(k|k) \\ \hat{u}_2(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}_2(k+N_2-1|k) \end{bmatrix}_{2N_2 \times 1} + \begin{bmatrix} \hat{u}_4(k|k) \\ \hat{u}_4(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}_4(k+N_2-1|k) \end{bmatrix}_{2N_2 \times 1} \leq \begin{bmatrix} u_{max,2} \\ u_{max,2} \\ \vdots \\ u_{max,2} \end{bmatrix}_{2N_2 \times 1}$$

De forma resumida,

$$[u_{min,2}]_{N_2} \leq \hat{U}_2 + \hat{U}_4 \leq [u_{max,2}]_{N_2} \quad (\text{A.48})$$

Define-se as equações de predição para \hat{u}_2 e \hat{u}_4 de maneira semelhante ao descrito na Seção A.1, então obtêm-se,

$$\hat{U}_2 = f_{u_2} + H_{T,2} \Delta \hat{U}_{mpc,2} \quad (\text{A.49})$$

$$\hat{U}_4 = \hat{U}_{lqr,4} = P_{lqr,4} \delta_4(k) + H_{lqr,4} \hat{X}_4 \quad (\text{A.50})$$

Obtém-se a equação de predição para os estados de δ_4 substituindo (3.35) em (3.33),

$$\delta_4(k+1) = \underbrace{(\Phi_{4,i} - \Gamma_{4,i} \mathbf{K}_4)}_{\Phi_{\Gamma,4}} \delta_4(k) \quad (\text{A.51})$$

então empilhando as predições para N_2 passos,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\delta}_4(k+1|k) \\ \hat{\delta}_4(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{\delta}_4(k+N_2|k) \end{bmatrix}}_{\hat{X}_4, 2N_2 \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{\Gamma,4} \\ \Phi_{\Gamma,4}^2 \\ \vdots \\ \Phi_{\Gamma,4}^{N_2} \end{bmatrix}}_{P_{\delta_4}, 2N_2 \times 2} \delta_4(k) \quad (\text{A.52})$$

Resumidamente,

$$\hat{X}_4 = P_{\delta_4} \delta_4(k) \quad (\text{A.53})$$

Por fim substituindo em (A.50)

$$\hat{U}_4 = \underbrace{(P_{lqr,4} + H_{lqr,4} P_{x_4})}_{f_{u_4}} x_4(k) \quad (\text{A.54})$$

Portanto substituindo (A.49) e (A.54) em (A.48),

$$[u_{min,2}]_{N_2} \leq f_{u_2} + f_{u_4} + H_{T,2} \Delta \hat{U}_{mpc,2} \leq [u_{max,2}]_{N_2}$$

Reescrevendo,

$$\begin{cases} H_{T,2} \Delta \hat{U}_{mpc,2} \leq [u_{max,2}]_{N_2} - f_{u_2} - f_{u_4} \\ -H_{T,2} \Delta \hat{U}_{mpc,2} \leq f_{u_2} + f_{u_4} - [u_{min,2}]_{N_2} \end{cases}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} H_{T,2} \\ -H_{T,2} \end{bmatrix}_{4N_2 \times 2M_2} \Delta \hat{U}_{mpc,2} \leq \begin{bmatrix} [u_{max,2}]_{N_2} - f_{u_2} - f_{u_4} \\ f_{u_2} + f_{u_4} - [u_{min,2}]_{N_2} \end{bmatrix}_{4N_2 \times 1} \quad (\text{A.55})$$

Simplificando (A.55), tem-se

$$A_{qp,2} \Delta \hat{U}_{mpc,2} \leq b_{qp,2} \quad (\text{A.56})$$

em que

$$A_{qp,2} = \begin{bmatrix} H_{T,2} \\ -H_{T,2} \end{bmatrix}_{4N_2 \times 2M_2}, \quad b_{qp,2} = \begin{bmatrix} [u_{max,2}]_{N_2} - f_{u_2} - f_{u_4} \\ f_{u_2} + f_{u_4} - [u_{min,2}]_{N_2} \end{bmatrix}_{4N_2 \times 1}$$

Então encontrou-se uma forma de representar as restrições dependendo somente do vetor de variáveis de decisão $\Delta \hat{U}_{mpc,2}$.

Como resultado de (A.47) e (A.56), tem-se o seguinte problema de programação quadrática a ser resolvido em cada instante de amostragem:

$$\min_{\Delta \hat{U}_{mpc,2}} J_2(k) = \frac{1}{2} \Delta \hat{U}_{mpc,2}^T H_{qp,2} \Delta \hat{U}_{mpc,2} + f_{qp,2}^T \Delta \hat{U}_{mpc,2} + cte$$

sujeito a

$$A_{qp,2} \Delta \hat{U}_{mpc,2} \leq b_{qp,2}$$

em que cte representa os termos que independem de $\Delta \hat{U}_{mpc,2}$ e, portanto, não afetam a solução do problema de otimização.

APÊNDICE B – Reformulação dos problemas de otimização para emprego de programação multiparamétrica por meio do MPT

O emprego do MPT (HERCEG et al., 2013) para implementação da MP para resolução dos PCOs do MPC₁ e do MPC₂ faz necessário que as funções de custo e as restrições, reformuladas no Apêndice A estejam em um formato específico. Em particular, devem ser separados os elementos que dependem das variáveis de otimização, das variáveis do processo e de termos constantes. Por brevidade, o procedimento envolvido na reformulação dos problemas de otimização nessa forma específica será omitido. Tal procedimento é puramente algébrico.

No caso particular do MPC₁, a forma final do problema de otimização para emprego de MP é dada por

$$\min_{\Delta\hat{U}_{mpc,1}} \frac{1}{2} \Delta\hat{U}_{mpc,1}^T H_{mp,1} \Delta\hat{U}_{mpc,1} + (F_{mp,1} \psi_1(k))^T \Delta\hat{U}_{mpc,1} \quad (\text{B.1})$$

sujeito a

$$A_{mp,1} \Delta\hat{U}_{mpc,1} \leq b_{mp,1} + B_{mp,1} \psi_1(k) \quad (\text{B.2})$$

em que

$$\psi_1(k) = [\xi_1(k) \quad \theta_{1,ref}(k)]^T \quad (\text{B.3})$$

$$H_{mp,1} = H_{qp,1} \quad (\text{B.4})$$

$$F_{mp,1} = \begin{bmatrix} 2G_1^T Q_{N_1} \phi_1 + [H_{T,1}^T R_{N_1} [P_{u_1} \quad [0_2]_{N_1}] \quad H_{T,1}^T R_{N_1} H_{u_1} [I_2]_{N_1}] \\ -2G_1^T Q_{N_1} [I_2]_{N_1} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.5})$$

$$A_{mp,1} = A_{qp,1} \quad (\text{B.6})$$

$$b_{mp,1} = \begin{bmatrix} [u_{max,1}]_{N_1} \\ -[u_{min,1}]_{N_1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$B_{mp,1} = \begin{bmatrix} - \left[\begin{array}{cc|cc} P_{u_1} & [0_2]_{N_1} & H_{u_1} [I_2]_{N_1} & [0_2]_{N_1} \\ \hline P_{u_1} & [0_2]_{N_1} & H_{u_1} [I_2]_{N_1} & [0_2]_{N_1} \end{array} \right] \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

sendo $I_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ a matriz identidade e $0_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ um vetor de zeros.

Já no caso do MPC₂, tem-se que

$$\min_{\Delta\hat{U}_{mpc,2}} \frac{1}{2} \Delta\hat{U}_{mpc,2}^T H_{mp,2} \Delta\hat{U}_{mpc,2} + (F_{mp,2} \psi_2(k))^T \Delta\hat{U}_{mpc,2} \quad (\text{B.9})$$

sujeito a

$$A_{mp,2} \Delta\hat{U}_{mpc,2} \leq b_{mp,2} + B_{mp,2} \psi_2(k) \quad (\text{B.10})$$

em que

$$\psi_2(k) = [\xi_2(k) \quad \delta_4(k) \quad \theta_{2,ref}(k)]^T \quad (\text{B.11})$$

$$H_{mp,2} = H_{qp,2} \quad (\text{B.12})$$

$$F_{mp,2} = \begin{bmatrix} 2G_2^T Q_{N_2} \phi_2 \\ [0_{2 \times 2}]_{M_2} \\ -2G_2^T Q_{N_2} [I_2]_{N_2} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.13})$$

$$A_{mp,2} = A_{qp,2} \quad (\text{B.14})$$

$$b_{mp,2} = \begin{bmatrix} [u_{max,2}]_{N_2} \\ -[u_{min,2}]_{N_2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$$B_{mp,2} = \begin{bmatrix} - \begin{bmatrix} [P_{u_2} & [0_2]_{N_2}] \\ [P_{u_2} & [0_2]_{N_2}] \end{bmatrix} & H_{u_2} [I_2]_{N_2} & P_{lqr,4} + H_{lqr,4} P_{x_4} & [0_2]_{N_2} \\ \begin{bmatrix} [P_{u_2} & [0_2]_{N_2}] \\ [P_{u_2} & [0_2]_{N_2}] \end{bmatrix} & H_{u_2} [I_2]_{N_2} & P_{lqr,4} + H_{lqr,4} P_{x_4} & [0_2]_{N_2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

sendo $0_{2 \times 2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ uma matriz de zeros.