JOHN ALEXANDER MORA RODRÍGUEZ

APLICAÇÕES DO TEOREMA DE SINKHORN-KNOPP AO EMARANHAMENTO QUÂNTICO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

2022

JOHN ALEXANDER MORA RODRÍGUEZ

APLICAÇÕES DO TEOREMA DE SINKHORN-KNOPP AO EMARANHAMENTO QUÂNTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linhas de Pesquisa: Matemática aplicada (Física-matemática).

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Daniel Cariello.

UBERLÂNDIA - MG
2022

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

R696
2022

Rodriguez, John Alexander Mora, 1994-
Aplicações do Teorema de Sinkhorn-Knopp ao Emaranhamento Quântico [recurso eletrônico] / John Alexander Mora Rodriguez. - 2022.

Orientador: Daniel Cariello.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.16
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Cariello, Daniel,1984-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.posgrad.famat.ufu.br - pgmat@famat.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 99, PPMAT				
Data:	23 de fevereiro de 2022	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:00
Matrícula do Discente:	12012MAT006				
Nome do Discente:	John Alexander Mora Rodriguez				
Título do Trabalho:	Aplicações do teorema de Sinkhorn-Knopp ao emaranhamento quântico				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Matemática Aplicada				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Detecção e quantificação de emaranhamento quântico				

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Mconf-RNP, em conformidade com a PORTARIA Nº 36, DE 19 DE MARÇO DE 2020 da COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR - CAPES, pela Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Lucas Henrique Calixto - UFMG; Alonso Sepúlveda Castellanos - FAMAT/UFU e Daniel Cariello - FAMAT/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Daniel Cariello, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Daniel Cariello**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 23/02/2022, às 15:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Alonso Sepulveda Castellanos**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 23/02/2022, às 15:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Lucas Henrique Calixto**, **Usuário Externo**, em 23/02/2022, às 15:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3331686** e o código CRC **EF084321**.

Referência: Processo nº 23117.004972/2022-85 SEI nº 3331686

Dedicatória

Em memória de José Joaquin Rodrígez quem levo em meu coração e faz parte de cada passo em minha vida.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais José Octaviano Mora Puentes e Elisa Rodríguez Corredor por todo o amor e empenho em me dar uma vida feliz. Agradeço a meu irmão e toda minha família por seu apoio e carinho. Para minha enamorada Angie Puentes só tenho gratitude pela companhia, compreensão e tudo o amor que me da cada dia, ela me anima a continuar e encontra qualidades em mim que eu não vejo.

Agradeço a meu orientador o professor Daniel Cariello por toda a paciência e dedicação que teve para me ensinar um tema que desconhecia e que adorei estudar. Também agradeço a Giovanny Snaider Barrera Ramos e ao professor Alonso Sepúlveda por toda sua ajuda no inicio da minha vida em um novo país.

Finalmente agradeço à Universidade Federal de Uberlândia e à Coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior-CAPES pelo apoio financeiro no decorrer de meu curso de mestrado.

MORA, R. J. A. *Aplicações do Teorema de Sinkhorn-Knopp ao Emaranhamento Quântico.* 2022. 81 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O problema da separabilidade dos estados quânticos pede um critério determinístico para distinguir os estados quânticos emaranhados daqueles que não estão emaranhados (separáveis). Esse problema foi resolvido somente para estados $\gamma \in M_k \otimes M_m$ com $km \leq 6$. Para k, m arbitrários sabe-se que esse problema é NP-difícil.

Neste trabalho apresentamos a solução do problema para estados em $M_2 \otimes M_2$ como aplicação do Teorema de Sinkhorn-Knopp para mapas positivos. Além disso, mostramos que podemos reduzir o problema da separabilidade em $M_2 \otimes M_n$ para os estados que podem ser postos na forma normal de filtro.

Palavras-chave: Matrizes duplamente estocásticas, Teorema de Sinkhorn-Knopp, mapas positivos, forma normal de filtro, emaranhamento quântico.

MORA, R. J. A. *Applications of the Sinkhorn-Knopp Theorem to Quantum Entanglement.* 2022. 81 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The separability problem asks for a deterministic criterion for distinguishing those quantum states that are entangled from those that are not (separable states). This problem was solved just for states $\gamma \in M_k \otimes M_m$ with $km \leq 6$. For k, m arbitrary, it is already known that this problem is NP-hard.

In this work, we present the solution to the problem for states in $M_2 \otimes M_2$ as an application of the Sinkhorn-Knopp Theorem for positive maps. In addition, we show that the separability problem in $M_2 \otimes M_n$ can be reduced to states in the filter normal form.

Keywords: Doubly stochastic matrix, Sinkhorn-Knopp Theorem, positive maps, normal form of filter, quantum entanglement.

Lista de Símbolos

A próxima lista descreve vários símbolos que são usados no decorrer do trabalho.

Matrizes

$0_{s\times t}$ Matriz com s linhas, t colunas e entradas nulas. Pag. 5

$\|\cdot\|_2$ Norma espectral. Pag. 47

$\Delta_j(A)$ soma dos números da coluna j na matriz A. Pag. 23

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ Produto interno do traço. Pag. 34

$\mathbf{1}_{m\times k}$ Matriz com m linhas, k colunas e entradas iguais a 1. Pag. 12

$\sigma(A)$ $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$, onde $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ e $\sigma\in S_n$. Pag. 26

$A\odot B$ Produto de Hadamard ou produto por entradas das matrizes A e B. Pag. 11

$A\otimes B$ Produto de Kronecker das matrizes A e B. Pag. 12

A^* Transposta conjugada da matriz A $\left(\overline{A}^t\right)$ Pag. 34

A_{ij} Elemento da linha i e a coluna j da matriz A. Pag. 6

$diag(x_1,\ldots,x_n)$ Matriz diagonal com $x_1,\ldots,x_n$ como diagonal principal. Pag. 48

Id_k Matriz identidade em M_k. Pag. 34

$Im(A)$ Imagem da matriz A. Pag. 62

M_k Matriz de ordem k com entradas nos números complexos. Pag. 3

$M_k(\mathbb{R})$ Matriz de ordem k com entradas nos números reais. Pag. 3

$M_{m\times n}(\mathbb{F})$ Conjunto das matrizes com m linhas, n colunas e entradas no corpo $\mathbb{F}$. Pag. 3

$Nuc(A)$ Nucleo ou Kernel da matriz A. Pag. 62

P_n Conjunto das matrizes Hermitianas positivas semi-definidas em M_n. Pag. 35

P_σ Matriz permutação em $M_n(\mathbb{R})$, onde $\sigma\in S_n$. Pag. 6

$Q_{k,n}$ Conjunto das sequências crescentes de k números escolhidos em $\{1,2,...,n\}$. Pag. 3

$S_i(A)$ soma dos números da linha i na matriz A. Pag. 23

Conjuntos

Mapas positivos

Estados quânticos

Conteúdo

Introdução

O teorema de Sinkhorn-Knopp para matrizes foi apresentado inicialmente em [17] e diz quando uma matriz quadrada com entradas não negativas, B, pode ser modificada, multiplicando à esquerda e à direita por diagonais positivas D_1, D_2, a fim de obtermos uma matriz D_1BD_2 duplamente estocástica. A ideia inicial do Sinkhorn e Knopp foi dividir as colunas de B pelas suas respectivas somas e obter uma coluna estocástica: B_1. Depois divide-se as linhas de B_1 pelas suas respectivas somas para obter uma linha estocástica: B_2. Repetindo indefinidamente o processo constrói-se uma sequência infinita de matrizes, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ora coluna estocática, ora linha estocástica. O teorema de Sinkhorn-Knopp diz exatamente quais condições B deve possuir para garantir a convergência dessa sequência para uma matriz duplamente estocástica do tipo D_1BD_2.

Além disso, sempre que temos um resultado para matrizes com entradas não negativas podemos tentar estendê-lo para mapas positivos. Veremos no terceiro capítulo uma adaptação do Teorema de Sinkhorn-Knopp para mapas positivos. Essas adaptações são particularmente importantes em problemas oriundos da física como a detecção de emaranhamento quântico, que é o objeto de estudo neste trabalho.

Inicialmente, vamos seguir as ideias do teorema de Sinkhorn-Knopp para matrizes e a partir de um mapa positivo $T : M_k \to M_m$, construímos uma sequência de mapas positivos $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $T_n : M_k \to M_m$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $T_{2r}(Id_k/\sqrt{k}) = Id_m/\sqrt{m}$, $T^*_{2r+1}(Id_m/\sqrt{m}) = Id_k/\sqrt{k}$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Nós poderíamos pensar que estender o teorema de Sinkhorn-Knopp é encontrar as condições para a convergência dessa sequência, entretanto ao contrário do caso das matrizes, procuramos as condições para que cada ponto limite T_1 da subsequência par da sequência de mapas positivos $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja duplamente estocástico e ainda mais, existam matrizes invertíveis $X' \in M_k$ e $Y' \in M_m$ tais que $T_1(X) = Y'T(X'XX'^*)Y'^*$ para todo $X \in M_k$. Então no teorema de Sinkhorn-Knopp para mapas positivos apresentamos as condições que T deve possuir para garantir que T_1 seja duplamente estocástico e tenha a forma descrita acima. Essa adaptação foi feita por em [4].

Agora, desde o ponto de vista matemático um estado quântico bipartido é uma matriz $\gamma \in M_k \otimes M_m \simeq M_{km}$ Hermitiana positiva semi-definida de traço 1 (Identificamos $M_k \otimes M_m \simeq M_{km}$ utilizando o produto de Kronecker). Nesse trabalho não utilizaremos essa normalização do traço, ou seja, para nós um estado quântico é apenas uma matriz Hermitiana positiva semi-definida. O problema da separabilidade dos estados quânticos é um objeto de estudo bem conhecido na física quântica [7], e atualmente um problema trabalhado na matemática. Esse problema procura um critério determinístico para distinguir os estados separáveis, isto é, aqueles $\gamma \in M_k \otimes M_m$ que podem ser escritos como $\gamma = \sum_{i=1}^{k} A_i \otimes B_i$, onde $A_i \in M_k$, $B_i \in M_m$ são Hermitianas positivas semi-definidas, daqueles que não são separáveis, os emaranhados. Esse problema só foi resolvido em $M_2 \otimes M_2$, $M_2 \otimes M_3$ e $M_3 \otimes M_2$ [10]. Para k, m arbitrários sabemos que esse problema é NP-difícil [8].

O teorema de Sinkhorn-Knopp para mapas positivos fornece um resultado que será aplicado ao problema da separabilidade dos estados quânticos: estados $\gamma \in M_k \otimes M_m$ que não possuem tensores de posto 1 no núcleo podem ser postos na forma normal de filtro, ou seja, existem matrizes invertíveis $X^{'} \in M_k$ e $Y^{'} \in M_m$ tais que $(X^{'} \otimes Y^{'})\gamma(X^{'} \otimes Y^{'})^* = \sum_{j=1}^{n} C_j \otimes B_j$, onde $C_1 = Id_k/\sqrt{k}$, $D_1 = Id_m/\sqrt{m}$ e $\{C_1, \ldots, C_n\}$, $\{D_1, \ldots, D_n\}$ são conjuntos de matrizes Hermitianas ortogonais com respeito ao produto interno do traço.

No quarto capítulo, consideramos o problema da separabilidade em $\gamma \in M_2 \otimes M_n$ e mostramos que nesse caso o problema se reduz a estados sem vetores de posto um no núcleo. Com esse fato e com o teorema de Sinkhorn-Knopp para mapas positivos mencionado anteriormente, reduzimos o problema da separabilidade a estados que podem ser postos na forma normal de filtro. Utilizando esses resultados apresentamos a solução do problema da separabilidade em $M_2 \otimes M_2$ seguindo a abordagem realizada em [13].

John Alexander Mora Rodríguez
Uberlândia-MG, 23 de fevereiro de 2022.

Capítulo 1

Matrizes não negativas

Neste capítulo introduzimos notações, definições e resultados necessários para o desenvolvimento da teoria nos próximos capítulos. Se assume que o leitor já tem familiaridade com conceitos básicos de Álgebra linear e Análise. Nesse contexto são citados [15, 14] como principais referências.

1.1 Matrizes com suporte e teorema de Frobenius-König

Nesse seção seguiremos a notação do livro [15]. Denotamos o conjunto das matrizes com m linhas e n colunas complexas e reais, respectivamente, por $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Seja $M_n = M_{n\times n}(\mathbb{C})$ e $M_n(\mathbb{R}) = M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Definição 1.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$, se $1 \leq k \leq n$. Denotamos por $Q_{k,n}$, o conjunto de todas as sequências crescentes de k números escolhidos em $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

Exemplo 1.2.

$$Q_{n,n} = \{(1, 2, \ldots, n)\}$$

$$Q_{n-1,n} = \{(1, 2, \ldots, i, i+2, \ldots, n) : i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

$$Q_{2,n} = \{(i, j) : i < j \quad e \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}\}$$

$$Q_{1,n} = \{(i) : i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

Definição 1.3. *Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Sejam k, r inteiros positivos tais que $1 \leq k \leq m$ e $1 \leq r \leq n$. Sejam $\alpha = (i_1, \ldots, i_k) \in Q_{k,m}$ e $\beta = (j_1, \ldots, j_r) \in Q_{r,n}$.*

i. Definimos $A[\alpha, \beta]$ como sendo a submatriz de A que ocupa as linhas dadas por α, isto é, as linhas $i_1, \ldots, i_k$ e as colunas dadas por β, isto é, as colunas $j_1, \ldots, j_r$.

ii. Definimos $A[\alpha, \beta)$ como sendo a submatriz de A que ocupa as linhas dadas por α e as colunas dadas por $\{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$.

iii. Definimos $A(\alpha, \beta]$ como sendo a submatriz de A que ocupa as linhas dadas por $\{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ e as colunas dadas por β.

iv. Definimos $A(\alpha, \beta)$ como sendo a submatriz de A que ocupa as linhas dadas por $\{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ e as colunas dadas por $\{1, \ldots, m\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$.

Quando α e β contêm somente um elemento, i e j respectivamente, nós escrevemos simplesmente $A[i,j]$ no lugar de $A[\alpha,\beta]$. Analogamente, substituímos α, β por i, j nos outros itens da definição anterior.

Exemplo 1.4. *Sejam,* $\alpha = (2)$*,* $\beta = (2,4)$ *e*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

Então,

$$A[\alpha,\beta] = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \end{pmatrix}, \quad A[\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad A(\alpha,\beta] = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{pmatrix}, \quad A(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Definição 1.5. *Seja* $A \in M_n$*. Uma diagonal de* A *é uma sequência de elementos*

$$a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)},$$

onde $\sigma \in S_n$*, isto é,* σ *é uma permutação de* $\{1, 2, \ldots, n\}$*.*

Exemplo 1.6. *Seja* σ_0 *a permutação identidade. Então,*

$$(a_{1\sigma_0(1)}, a_{2\sigma_0(2)}, \ldots, a_{n\sigma_0(n)}) = (a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}),$$

é a diagonal principal de A*.*

Definição 1.7. *Seja* $A \in M_n$*, dizemos que* A *tem suporte se existir uma diagonal de* A *com todos os elementos distintos de zero.*

Definição 1.8. *Dizemos que uma matriz* $A \in M_n$ *tem suporte total se para cada* $a_{ij} \neq 0$ *existir uma permutação* $\sigma \in S_n$ *tal que,*

(1) $a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}$ *são diferentes de zero,*

(2) $j = \sigma(i)$*,*

ou seja, existe uma diagonal com termos não nulos contendo a_{ij}*.*

É claro que toda matriz que tem suporte total tem suporte, mas o recíproco não é verdade. Consideremos a matriz

$$(b_{ij})_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a diagonal principal da matriz é não nula, portanto a matriz tem suporte. Agora, para o elemento $b_{21} = 1$ não existe diagonal com termos não nulos contendo ele, logo, a matriz não tem suporte total.

Teorema 1.9 (Teorema de Frobenius - König [6, 11, 15]). *Toda diagonal de $A \in M_n$ contém um elemento nulo (i.e., A não possui suporte) se, e somente se, existem $\alpha \in Q_{s,n}$ e $\beta \in Q_{t,n}$ tais que $A[\alpha, \beta] = 0_{s\times t}$ e $s + t > n$.*

Demonstração. Suponha que existam $\alpha \in Q_{s,n}$ e $\beta \in Q_{t,n}$ tais que $A[\alpha, \beta] = 0_{s\times t}$ e $s + t > n$.

Se existir uma diagonal de A, $a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}$, sem termos nulos, então os termos de $a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}$ que ocupam as colunas β (que são t termos) não podem ocupar as linhas α pois $A[\alpha, \beta] = 0_{s\times t}$. Então esses t termos estão na submatriz $A(\alpha, \beta] \in M_{n-s\times t}(\mathbb{C})$, mas eles ocupam linhas diferentes (pois estão numa diagonal). Assim, $n - s \geq t$, ou seja, $n \geq s + t$. Absurdo. Portanto, toda diagonal de A contém um elemento nulo.

Reciprocamente, suponha que todas as diagonais de A tem termos nulos. Veremos que existem $\alpha \in Q_{s,n}$ e $\beta \in Q_{t,n}$ tais que, $A[\alpha, \beta] = 0_{s\times t}$ e $s + t > n$. Procedemos por indução sobre n (a ordem da matriz A).

Se $A = 0_{n\times n}$, então podemos escolher $\alpha, \beta = (1, 2, \ldots, n)$ e terminamos. Caso existam $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tais que $a_{ij} \neq 0$, então todas as diagonais de submatriz $A(i, j) \in M_{n-1\times n-1}(\mathbb{C})$ tem termos nulos, pois as diagonais de $A(i, j)$ junto com a_{ij} formam diagonais de A. Como $A(i, j)$ tem ordem $n-1$ e todas as suas diagonais tem termo nulo então, por hipótese de indução segue que existe uma submatriz nula de $A(i, j)$ de ordem $r \times s$ tal que $r + s > n - 1$.

Se $r + s > n$, essa submatriz de $A(i, j)$ nula é também submatriz de A de ordem $r \times s$ tal que $r + s > n$ e terminamos.

Se $r + s = n$ então $s = n - r$. Podemos então permutar as linhas e colunas de A tal que a matriz resultante B tenha o seguinte formato:

$$B = \begin{pmatrix} X_{r\times r} & 0_{r\times n-r} \\ Y_{n-r\times r} & Z_{n-r\times n-r} \end{pmatrix},$$

Uma diagonal de A consiste em uma sequência de n elementos de A onde cada elemento é escolhido em linhas e colunas diferentes, e como B resulta de permutar linhas e colunas em A, as diagonais de A também são diagonais de B e vice-versa. Portanto, todas as diagonais de B têm elementos nulos. Uma diagonal de X e uma de Z formam juntas uma diagonal de B, então temos dois casos.

CASO 1. Existe uma diagonal de Z sem zeros. Logo, todas as diagonais de X devem conter zeros, como X tem ordem $r \times r$ e $r < n$, então por hipótese de indução, existem $\alpha' \in Q_{p,r}$ e $\beta' \in Q_{q,r}$ tais que, $X[\alpha', \beta'] = 0_{p\times q}$ e $p + q > r$.

Defina $\alpha'' = \alpha'$ e $\beta'' = (\beta', n - r + 1, n - r + 2, \ldots, n)$, logo,

$$B[\alpha'', \beta''] = \begin{pmatrix} X[\alpha', \beta'] & 0_{p\times n-r} \end{pmatrix}.$$

Como $X[\alpha', \beta'] = 0_{p\times q}$, então encontramos uma submatriz de B tal que $B[\alpha'', \beta''] = 0_{p\times(q+n-r)}$, onde $p + q + n - r > n$, pois $p + q > r$.

CASO 2. Todas as diagonais de Z possuim elementos nulos. Como Z tem ordem $n-r\times n-r$ e $n - r < n$, segue da hipotese de indução que existem $\tilde{\alpha} \in Q_{a,n-r}$ e $\tilde{\beta} \in Q_{b,n-r}$ tais que, $Z[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] = 0_{a\times b}$ e $a + b > n - r$. Sejam $\tilde{\alpha} = (i_1, \ldots, i_a)$ e $\tilde{\beta} = (j_1, \ldots, j_b)$. Como

$$B = \begin{pmatrix} X & 0_{r\times n-r} \\ Y & Z_{n-r\times n-r} \end{pmatrix},$$

a $k-$ésima linha e a $l-$ésima coluna da matriz Z estão dentro da linha $r+k$ e a coluna $r+l$ da matriz B respectivamente, então definimos $\overline{\alpha} = (1, 2, \ldots, r, r+i_1, \ldots, r+i_a)$ e $\overline{\beta} = (r+j_1, \ldots, r+j_b)$. Assim,

$$B[\overline{\alpha}, \overline{\beta}] = \begin{pmatrix} 0_{r\times b} \\ Z[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \end{pmatrix}.$$

Já que $Z[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] = 0_{a\times b}$ então encontramos uma submatriz de B tal que $B[\overline{\alpha}, \overline{\beta}] = 0_{(r+a)\times b}$, onde $r+a+b > r+(n-r) = n$, completando a demonstração.

■

Seja $\alpha \in Q_{s,n}$, nós vamos denotar por $|\alpha|$ o comprimento de α.

Corolário 1.10. *A matriz $A = (a_{ij}) \in M_n$ não tem suporte total se, e somente se, existir uma sub-matriz identicamente nula $A[\alpha, \beta]$ tal que $|\alpha| + |\beta| > n$; ou $|\alpha| + |\beta| = n$ e $A(\alpha, \beta)$ não é identicamente nula.*

Demonstração. Suponha que A não tem suporte total. Se A é identicamente nula não temos nada que provar. Suponhamos então que A não é identicamente nula, logo, existe $a_{i_0j_0} \neq 0$ em A tal que $A(i_0, j_0)$ não possui suporte. Segue do Teorema de Frobenius - König que existe uma matriz identicamente nula $A(i_0, j_0)[\alpha', \beta']$ tal que $|\alpha'| + |\beta'| > n-1$. Isto é, existe uma submatriz identicamente nula $A[\alpha, \beta]$ tal que $a_{i_0j_0} \in A(\alpha, \beta)$ e $|\alpha| + |\beta| > n-1$.

Reciprocamente, suponha que existe uma matriz identicamente nula $A[\alpha, \beta]$ tal que já seja $|\alpha| + |\beta| > n$ ou $|\alpha| + |\beta| = n$ e $A(\alpha, \beta)$ não é identicamente nula. Se $|\alpha| + |\beta| > n$, segue do Teorema de Frobenius - König que A não tem suporte e, portanto, A não tem suporte total.

Agora, se $|\alpha| + |\beta| = n$ e $A(\alpha, \beta)$ não é identicamente nula, existe $a_{i_1j_1} \neq 0$ em A e uma submatriz identicamente nula $A(i_1, j_1)[\alpha'', \beta'']$ tal que $|\alpha''| + |\beta''| = n$. Assim, do Teorema de Frobenius - König segue que $A(i_1, j_1)$ não tem suporte. Dai, A não possui suporte total.

■

1.2 Matrizes Estocásticas e Teorema de Birkhoff

Definição 1.11. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz com entradas não negativas. Dizemos que A é linha estocástica se a soma dos elementos de cada linha é igual a 1. Dizemos que A é coluna estocástica se a soma dos elementos de cada coluna é igual a 1. Dizemos que A é duplamente estocástica se ela for linha e coluna estocástica.*

Definição 1.12. *Seja $\sigma \in S_n$. Definimos $P_\sigma \in M_n(\mathbb{R})$ valendo $(P_\sigma)_{i\sigma(i)} = 1$ e $(P_\sigma)_{ij} = 0$ se $j \neq \sigma(i)$. Essa P_σ é chamada de matriz permutação.*

Notemos que cada linha e cada coluna de uma matriz permutação contém somente um elemento igual a 1, portanto ela é duplamente estocástica. Além disso, existem $n!$ permutações em S_n, portanto existem $n!$ matrizes permutação de ordem n.

Exemplo 1.13. *As seguintes matrizes são exemplos de matriz permutação:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.14 (Teorema de Birkhoff [2, 15]). *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz duplamente estocástica. Existem $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in S_n$ e $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que,*

(1) $A = \sum_{i=1}^{k} a_i P_{\sigma_i}$,

(2) $a_i > 0$*, para todo* $i \in \{1, \ldots, k\}$,

(3) $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$.

Demonstração. A demonstração será uma indução sobre o número de entradas de A positivas, isto é, $\#\{a_{ij} \in A : a_{ij} > 0\}$.

Como A é duplamente estocástica, a soma dos elementos em cada linha e cada coluna é sempre 1, daí, existe pelo menos um elemento não nulo em cada linha e cada coluna. Se $\#\{a_{ij} \in A : a_{ij} > 0\} = n$, então existe exatamente um elemento não nulo em cada linha e cada coluna e esse elemento deve ser 1. Nesse caso, A é uma matriz permutação P_σ e $A = 1.P_\sigma$.

Suponhamos que A não seja uma matriz permutação e que o resultado vale para toda T duplamente estocástica tal que $\#\{t_{ij} \in T : t_{ij} > 0\} < \#\{a_{ij} \in A : a_{ij} > 0\}$.

Seja $A[\alpha, \beta]$ uma submatriz nula de A. Os elementos não nulos das linhas α de A estão em $A[\alpha, \beta)$. Assim, a soma das linhas de $A[\alpha, \beta)$ valem todas 1 ($A[\alpha, \beta)$ é linha estocástica), pois A é duplamente estocástica. Como $A[\alpha, \beta)$ tem $|\alpha|$ linhas, então a soma de todas as entradas de $A[\alpha, \beta)$ vale $|\alpha|$; pelo mesmo argumento, $A(\alpha, \beta]$ é coluna estocástica e a soma das entradas vale $|\beta|$.

Se $a_{ij} \in A[\alpha, \beta)$ então $i \in \alpha$ e $j \notin \beta$, segue que $a_{ij} \notin A(\alpha, \beta]$. Assim, a soma de todas as entradas de $A[\alpha, \beta)$ e de $A(\alpha, \beta]$ é menor ou igual à soma das entradas de A, portanto, $|\alpha| + |\beta| \leq n$ (isto se $A[\alpha, \beta]$ for nula). Pelo teorema de Frobenius - König (1.9), existe uma permutação $\sigma \in S_n$ tal que a diagonal $a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}$ não tem termos nulos.

Seja $a = \min\{a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}\}$ e P_σ a matriz permutação associada a σ. Se $a \geq 1$, temos

$$1 \leq a \leq a_{i,\sigma(i)} \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1,$$

então $a_{1\sigma(1)} = a_{2\sigma(2)} = \ldots = a_{n\sigma(n)} = 1$ e as outras entradas de A devem ser zero, daí $A = P_\sigma$ que não é mais o caso. Logo, $a < 1$.

Definimos $B = (A - aP_\sigma)(\frac{1}{1-a})$. Notemos que $b_{ij} = (a_{ij} - a(P_\sigma)_{ij})(\frac{1}{1-a})$. Como $a < 1$ então $\frac{1}{1-a} > 0$. Assim,

$$b_{ij} = \begin{cases} (a_{ij})(\frac{1}{1-a}), & \text{se } j \neq \sigma(i), \\ (a_{ij} - a)(\frac{1}{1-a}), & \text{se } j = \sigma(i). \end{cases}$$

Portanto B tem entradas não negativas. Além disso,

$$
\begin{aligned}
(1\ 1\ \ldots\ 1)B &= (1\ 1\ \ldots\ 1)\left[(A-aP_\sigma)\left(\frac{1}{1-a}\right)\right]\\
&= [(1\ 1\ \ldots\ 1)A-(1\ 1\ \ldots\ 1)aP_\sigma]\left(\frac{1}{1-a}\right)\\
&= [(1\ 1\ \ldots\ 1)A-a(1\ 1\ \ldots\ 1)P_\sigma]\left(\frac{1}{1-a}\right),
\end{aligned}
$$

mas A, P_σ são duplamente estocásticas. Assim $(1\ 1\ \ldots\ 1)A = (1\ 1\ \ldots\ 1)$ pois a $j-$ésima entrada da matriz resultante de $(1\ 1\ \ldots\ 1)A$ é a soma dos termos da $j-$ésima coluna de A. Analogamente, $(1\ 1\ \ldots\ 1)P_\sigma = (1\ 1\ \ldots\ 1)$. Daí,

$$
\begin{aligned}
(1\ 1\ \ldots\ 1)B &= [(1\ 1\ \ldots\ 1)-a(1\ 1\ \ldots\ 1)]\left(\frac{1}{1-a}\right)\\
&= (1-a\ 1-a\ \ldots\ 1-a)\left(\frac{1}{1-a}\right)\\
&= (1\ 1\ \ldots\ 1).
\end{aligned}
$$

Da mesma forma,

$$
\begin{aligned}
B(1\ 1\ \ldots\ 1)^t &= \left[(A-aP_\sigma)\left(\frac{1}{1-a}\right)\right](1\ 1\ \ldots\ 1)^t\\
&= \left[A(1\ 1\ \ldots\ 1)^t - aP_\sigma(1\ 1\ \ldots\ 1)^t\right]\left(\frac{1}{1-a}\right)\\
&= \left[(1\ 1\ \ldots\ 1)^t - a(1\ 1\ \ldots\ 1)^t\right]\left(\frac{1}{1-a}\right)\\
&= (1-a\ 1-a\ \ldots\ 1-a)^t\left(\frac{1}{1-a}\right)\\
&= (1\ 1\ \ldots\ 1)^t.
\end{aligned}
$$

Então B é duplamente estocástica. Notemos que se $a_{ij} = 0$ então $j \neq \sigma(i)$. Nesse caso, $b_{ij} = (a_{ij})(\frac{1}{1-a}) = 0$, ou seja, na posição ocupada por um zero em A agora há também um zero em B.

Como $a = a_{i_0\sigma(i_0)}$ para algum $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, segue que

$$
b_{i_0\sigma(i_0)} = (a_{i_0\sigma(i_0)} - aP_{i_0\sigma(i_0)})(\frac{1}{1-a}) = (a-a)(\frac{1}{1-a}) = 0,
$$

isto é, na posição ocupada por a em A agora há um zero. Portanto,

$$
\#\{b_{ij} \in B : b_{ij} > 0\} < \#\{a_{ij} \in A : a_{ij} > 0\}.
$$

Segue por hipótese de indução que existem $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in S_n$ e $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$
B = \sum_{i=1}^{k} a_i P_{\sigma_i},
$$

$a_i > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ e $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$. Então,

$$A = (1-a)B + aP_\sigma = \sum_{i=1}^{k} a_i(1-a)P_{\sigma_i} + aP_\sigma.$$

Como $1 - a > 0$, segue que $a_i(1-a) > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ e pela escolha de a, temos $a > 0$. Além disso,

$$\sum_{i=1}^{k} a_i(1-a) + a = (1-a)\sum_{i=1}^{k} a_i + a = (1-a)(1) + a = 1 - a + a = 1.$$

■

A importância do Teorema de Birkhoff para nós reside no seguinte resultado.

Corolário 1.15. *Toda matriz duplamente estocástica tem suporte total.*

Demonstração. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ duplamente estocástica. Pelo teorema de Birkhoff (1.14) segue que existem $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in S_n$ e $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$ tais que, $A = \sum_{r=1}^{k} b_r P_{\sigma_r}$, $b_r > 0$ para todo $r \in \{1, \ldots, k\}$ e $\sum_{r=1}^{k} b_r = 1$.

Seja $a_{ij} \in A$ tal que $a_{ij} \neq 0$, como $a_{ij} = \sum_{r=1}^{k} b_r (P_{\sigma_r})_{ij}$, existe $l \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $b_l(P_{\sigma_l})_{ij} \neq 0$, daí $\sigma_l(i) = j$ e

$$b_l(P_{\sigma_l})_{1\sigma_l(1)}, \ldots, b_l(P_{\sigma_l})_{i\sigma_l(i)}, \ldots, b_l(P_{\sigma_l})_{n\sigma_l(n)},$$

é uma diagonal sem termos nulos de $b_l P_{\sigma_l}$ contendo $b_l(P_{\sigma_l})_{ij}$. Logo,

$$(a_{1\sigma_l(1)}, \ldots, a_{i\sigma_l(i)}, \ldots, a_{n\sigma_l(n)}) = (a_{1\sigma_l(1)}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{n\sigma_l(n)}),$$

é uma diagonal de A contendo a_{ij} tal que

$$a_{t\sigma_l(t)} = \sum_{r=1}^{k} b_r (P_{\sigma_r})_{t\sigma_l(t)} \geq b_l (P_{\sigma_l})_{t\sigma_l(t)} > 0,$$

para todo $t \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, A tem suporte total.

■

É claro que a recíproca do corolário anterior não é verdade, mas no seguinte capítulo observamos que o fato de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ ter suporte total é necessário para garantir a existencia de matrizes $D_1, D_2 \in M_n(\mathbb{R})$ diagonais positivas, tais que $D_1 A D_2$ é duplamente estocástica.

Agora, vamos a introduzir as definições de matrizes decomponíveis e parcialmente decomponíveis. Elas são importantes no desenvolvimento dos resultados mais relevantes do próximo capítulo. Em especial na demonstração do lema chave do teorema de Sinkhorn-Knopp (2.2).

Definição 1.16. *Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vetores do $\mathbb{R}^n$. Definimos o subespaço gerado por $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (que denotamos por $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$) como sendo todas as combinações lineares de $v_1, v_2, \ldots, v_k$, isto é,*

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_k : a_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}.$$

Daqui por diante $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denotará a base canônica do $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$e_i = (0\ 0\ \ldots\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0)^t$$

(onde o 1 está na $i-$ésima posição), para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definição 1.17. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ com entradas não negativas. Dizemos que A é decomponível (ou redutível) se existir um subconjunto propio $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}$ de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tal que,*

$$\langle Ae_{i_1}, \ldots, Ae_{i_k}\rangle \subset \langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\rangle.$$

Se A não é decomponível então chamamos A de indecomponível (ou irredutível).

Exemplo 1.18. *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $Ae_1 = e_3$, $Ae_2 = e_1$ e $Ae_3 = e_2$. Assim, $\langle Ae_1\rangle \not\subseteq \langle e_1\rangle$, $\langle Ae_2\rangle \not\subseteq \langle e_2\rangle$, $\langle Ae_3\rangle \not\subseteq \langle e_3\rangle$, $\langle Ae_1, Ae_2\rangle \not\subseteq \langle e_1, e_2\rangle$, $\langle Ae_1, Ae_3\rangle \not\subseteq \langle e_1, e_3\rangle$ e $\langle Ae_2, Ae_3\rangle \not\subseteq \langle e_2, e_3\rangle$. Portanto, A é indecomponível.

Usualmente não é um trabalho fácil decidir se uma matriz é decomponível ou indecomponível, mas nós temos interesse em propriedades importantes desse tipo de matriz, a seguinte é uma delas.

Lema 1.19. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ com entradas não negativas. Se A é decomponível então existe uma matriz permutação P tal que,*

$$PAP^t = \begin{pmatrix} B_{k\times k} & C_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & D_{n-k\times n-k} \end{pmatrix},$$

Demonstração. Como A é decomponível, existem $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k} \in \{e_1, \ldots, e_k\}$ tais que $\langle Ae_{i_1}, \ldots, Ae_{i_k}\rangle \subset \langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\rangle$. Agora como Ae_j é a coluna j de A então

$$A((i_1, \ldots, i_k), (i_1, \ldots, i_k)] = 0_{n-k\times k}.$$

Seja P uma matriz permutação que permuta as linhas $i_1, \ldots, i_k$ com as linhas $1, \ldots, k$ ao ser multiplicada à direita por A. Além disso, P^t permuta as colunas $i_1, \ldots, i_k$ com as colunas $1, \ldots, k$ ao ser multiplicada à esquerda por A. Segue que $PAP^t((1, \ldots, k), (1, \ldots, k)] = 0_{n-k\times k}$. Portanto,

$$PAP^t = \begin{pmatrix} B_{k\times k} & C_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & D_{n-k\times n-k} \end{pmatrix}.$$

■

Definição 1.20. *Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ com entradas não negativas é dita parcialmente decomponível se existir uma submatriz $A[\alpha, \beta] = 0$ tal que $|\alpha| + |\beta| = n$.*

Se não existir uma submatriz $A[\alpha, \beta] = 0$ tal que $|\alpha|+|\beta| = n$, então A é chamada de totalmente indecomponível.

Exemplo 1.21. *Consideremos as matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que A é parcialmente decomponível pois $A[(2,3),(1)] = 0_{2\times 1}$ e $|(2,3)| + |(1)| = 3$, e B é totalmente indecomponível pois tem só duas entradas nulas em linhas e colunas distintas.

Lema 1.22. *Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é parcialmente decomponível, então existem matrizes permutação P e Q tais que*

$$PAQ = \begin{pmatrix} B_{k\times k} & C_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & D_{n-k\times n-k} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Como A é parcialmente decomponível, então existe uma submatriz $A[\alpha, \beta] = 0$ tal que $|\alpha| + |\beta| = n$, logo $\beta = (j_1, \ldots, j_k)$ e $\alpha = (i_1, \ldots, i_{n-k})$.

Sejam P e Q, respectivamente, matrizes permutações que permutam as linhas $i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}$ com as linhas $k+1, k+2, \ldots, n$ ao ser multiplicada à direita por A e as colunas $j_1, j_2, \ldots, j_k$ com as colunas $1, 2, \ldots, k$ ao ser multiplicada à esquerda por A.

Então $PAQ[(k+1, \ldots, n),(1, \ldots, k)] = 0_{n-k\times k}$, pois

$$0_{n-k\times k} = A[\alpha, \beta] = A[(i_1, \ldots, i_{n-k}),(j_1, \ldots, j_k)].$$

Portanto,

$$PAQ = \begin{pmatrix} B_{k\times k} & C_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & D_{n-k\times n-k} \end{pmatrix}.$$

■

1.3 Matrizes retangulares com suporte e suporte total

Para apresentar o resultado que desejamos no terceiro capítulo, precisamos estender as definições de suporte e suporte total para matrizes retangulares. Utilizaremos as definições do caso quadrado (Definições (1.7) e (1.8)) para definir o caso retangular. Denotamos por M_k o conjunto das matrizes de ordem k com entradas complexas.

Definição 1.23. *Sejam $A = (a_{ij}) \in M_{k\times m}(\mathbb{C})$ e $B = (b_{ij}) \in M_{r\times s}(\mathbb{C})$.*

(1) *Se $k = r$ e $m = s$ então definimos o produto de Hadamard de A e B como sendo a matriz $C = (c_{ij}) \in M_{k\times m}(\mathbb{C})$ tal que $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. Denotamos essa matriz C por $A \odot B$.*

(2) *Definimos o produto de Kronecker de A e B, que denotamos por $A \otimes B$, como:*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}B & \cdots & a_{km}B \end{pmatrix} \in M_{kr \times ms}(\mathbb{C}).$$

Exemplo 1.24. *Seja $\mathbf{1}_{m\times k} \in M_{m\times k}(\mathbb{C})$ a matriz que com todas as entradas iguais a 1. Seja $A = (a_{ij}) \in M_{k\times m}(\mathbb{C})$. Portanto*

$$A \otimes \mathbf{1}_{m\times k} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{1}_{m\times k} & \cdots & a_{1m}\mathbf{1}_{m\times k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}\mathbf{1}_{m\times k} & \cdots & a_{km}\mathbf{1}_{m\times k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11})_{m\times k} & \cdots & (a_{1m})_{m\times k} \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{k1})_{m\times k} & \cdots & (a_{km})_{m\times k} \end{pmatrix},$$

onde

$$(a_{ij})_{m\times k} = \begin{pmatrix} a_{ij} & \cdots & a_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ij} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} \in M_{m\times k}(\mathbb{C}),$$

para todos $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq m$.

Observação 1.25. O produto de Kronecker é a representação em coordenadas do produto tensorial de transformações lineares. Ele nos permite identificar o espaço tensorial $M_k \otimes M_m$ com o espaço de matrizes M_{km}. Além disso, ele possui diversas propriedades que nos serão úteis a seguir. Entretanto não as demonstraremos. Recomendamos a leitura de [9] para as suas demonstrações.

(1) O produto de Kronecker é bilinear, ou seja, $(A_1 + cA_2) \otimes B = A_1 \otimes B + c(A_2 \otimes B)$ e $A \otimes (B_1 + cB_2) = A \otimes B_1 + c(A \otimes B_2)$, onde $A, A_1, A_2 \in M_k$, $B, B_1, B_2 \in M_m$ e c é um escalar;

(2) Se A, B, C, D são matrizes tais que os produtos AC e BD está bem definido, então

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD);$$

(3) para matrizes A e B de qualquer tamanho, segue $(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t$, ou seja, $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$;

(4) sejam $A \in M_k$ e $B \in M_m$ e sejam $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ e $\{\mu_1, ..., \mu_m\}$ os autovalores de A e B respectivamente, então, $\{\lambda_i \mu_j : 1 \leq i \leq k \ e \ 1 \leq i \leq k\}$ é o conjunto dos autovalores de $A \otimes B$;

(5) sejam $A \in M_k$ e $B \in M_m$, então $tr(A \otimes B) = tr(A)tr(B)$ e $\det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^k$. Além disso, se A e B são invertíveis, temos que $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

Exemplo 1.26. *Sejam $f^+ : M_k \times M_m \to M_k$ e $f^- : M_k \times M_m \to M_m$ as aplicações dadas por $f^+(A, B) = A(tr(B))$ e $f^-(A, B) = (tr(A))B$, respectivamente, para toda $A \in M_k$ e toda $B \in M_m$. É claro que f^+ e f^- são bilineares pois o traço é uma função linear. Então pela propriedade universal do produto tensorial $M_k \otimes M_m$, existem aplicações lineares $L_{f^+} : M_k \otimes M_m \to M_k$ e $L_{f^-} : M_k \otimes M_m \to M_m$, dadas por*

$$L_{f^+}\left(\sum_{i=1}^{r} A_i \otimes B_i\right) = \sum_{i=1}^{r} f^+(A_i, B_i) = \sum_{i=1}^{r} A_i(tr(B_i))$$

e

$$L_{f^-}\left(\sum_{i=1}^{r} A_i \otimes B_i\right) = \sum_{i=1}^{r} f^-(A_i, B_i) = \sum_{i=1}^{r} (tr(A_i))B_i,$$

respectivamente, para todo $\sum_{i=1}^{r} A_i \otimes B_i \in M_k \otimes M_m$. Chamamos a aplicação L_{f^+} de traço parcial a direita e chamamos a aplicação L_{f^-} de traço parcial a esquerda.

Definição 1.27. *Seja $A \in M_{k\times m}(\mathbb{C})$. Dizemos que A tem suporte, se a matriz $A\otimes \mathbf{1}_{m\times k} \in M_{km}$ tem suporte de acordo com a Definição (1.7). Analogamente, dizemos que A tem suporte total, se a matriz $A \otimes \mathbf{1}_{m\times k} \in M_{km}$ tem suporte total de acordo com a Definição (1.8).*

Exemplo 1.28. *Toda matriz $A \in M_{k\times m}(\mathbb{C})$ que não tem entradas nulas tem suporte total.*

Observação 1.29. Sejam $A = (a_{ij}) \in M_{k\times m}(\mathbb{C})$ e $C = A\otimes \mathbf{1}_{m\times k}$. Seja $C[\alpha', \beta']$ uma submatriz identicamente nula de C. Notemos que se $i \in \alpha'$ e $j \in \beta'$ então $C_{ij} = 0$ mas o elemento na i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz C é exatamente o elemento da matriz A da linha $\lceil i/m \rceil$ e a coluna $\lceil j/k \rceil$. Logo, existe uma submatriz nula $A[\alpha, \beta]$ de A tal que $C[\alpha', \beta']$ é submatriz de $A[\alpha, \beta] \otimes \mathbf{1}_{m\times k}$. De fato, $\alpha = (\lceil i/m \rceil)_{i\in\alpha'}$ e $\beta = (\lceil j/k \rceil)_{j\in\beta'}$.

Além disso, para cada submatriz $A[\alpha, \beta]$ de A temos que, $A[\alpha, \beta] \otimes \mathbf{1}_{m\times k} = C[\alpha', \beta']$, onde $\alpha' = (((i-1)m + t)_{1\leq t\leq m})_{i\in\alpha}$ e $\beta' = (((i-1)k + t)_{1\leq t\leq k})_{j\in\beta}$. Portanto, as submatrizes $C[\alpha', \beta']$ identicamente nulas de C de dimensão máxima ($|\alpha'| + |\beta'|$ máximo), são as matrizes identicamente nulas $A[\alpha, \beta] \otimes \mathbf{1}_{m\times k}$ de dimensão máxima ($|\alpha|m + |\beta|k$ máximo).

O Teorema de Frobenius-König (1.9) e o seu Corolário (1.10) também podem ser adaptados para o caso retangular da seguinte maneira.

Lema 1.30. *Seja $A = (a_{ij}) \in M_{k\times m}(\mathbb{C})$. Então*

(1) *A não tem suporte se, e somente se existe uma submatriz identicamente nula $A[\alpha, \beta]$ tal que $|\alpha|m + |\beta|k > km$;*

(2) *A não tem suporte total se, e somente se existe uma submatriz identicamente nula $A[\alpha, \beta]$ tal que $|\alpha|m + |\beta|k > km$; ou $|\alpha|m + |\beta|k = km$ e $A(\alpha, \beta)$ não é identicamente nula;*

(3) *Se $k = m$ então A tem suporte (resp. suporte total) se, e somente se $A\otimes \mathbf{1}_{k\times k}$ tem suporte (resp. suporte total);*

(4) *Se k e m são coprimos então A tem suporte se, e somente se A tem suporte total;*

(5) *Se $k \neq m$ e o cardinal do conjunto $I = \{(i,j) : a_{ij} = 0\}$ é menor que $\min\{k,m\}$ então A tem suporte total;*

(6) *Se $k = m$ e o cardinal do conjunto $I = \{(i,j) : a_{ij} = 0\}$ é menor que $k-1$ então A tem suporte total;*

(7) *Se A não tem coluna nem linha identicamente nula e a cardinalidade do conjunto $I = \{(i,j) : a_{ij} = 0\}$ é menor que $\max\{k,m\}/\min\{k,m\}$ então A tem suporte total;*

Demonstração. Seja $C = A \otimes \mathbf{1}_{m\times k} \in M_{km}$.

(1) Suponhamos que A não tem suporte. Pela Definição (1.27) segue que C não tem suporte. Logo pelo Teorema de Frobenius - König (1.9), existe uma submatriz identicamente nula $C[\alpha', \beta']$ tal que $|\alpha'| + |\beta'| > km$, mas da Observação (1.29) temos que existe uma submatriz identicamente nula $A[\alpha, \beta]$ tal que $A[\alpha, \beta] \otimes \mathbf{1}_{m\times k}$ contem $C[\alpha', \beta']$, de onde $|\alpha|m + |\beta|k \geq |\alpha'| + |\beta'| > km$.

Reciprocamente, se existir uma submatriz identicamente nula $A[\alpha, \beta]$ tal que $|\alpha|m+|\beta|k > km$. Consideremos a submatriz identicamente nula $C[\alpha', \beta'] = A[\alpha, \beta] \otimes \mathbf{1}_{m\times k}$ de C. Então $|\alpha'| + |\beta'| > km$, de onde, do Teorema de Frobenius - König (1.9) segue que C não tem suporte. Portanto A não tem suporte.

(2) Pelo Corolário (1.10) temos que C não tem suporte total se, e somente se existe uma submatriz identicamente nula $C[\alpha', \beta']$ tal que já seja $|\alpha'| + |\beta'| > km$ ou $|\alpha'| + |\beta'| = km$ e $C(\alpha', \beta')$ não é identicamente nula. Analogamente ao item anterior segue que C não tem suporte total se, e somente se existe uma submatriz identicamente nula $C[\alpha'', \beta''] = A[\alpha, \beta] \otimes \mathbf{1}_{m\times k}$ tal que $|\alpha''|+|\beta''| > km$ ou $|\alpha''|+|\beta''| = km$ e $C(\alpha'', \beta'')$ não é identicamente nula, ou seja, existe uma submatriz identicamente nula $= A[\alpha, \beta]$ tal que $|\alpha|m+|\beta|k > km$ ou $|\alpha|m + |\beta|k = km$ e $A(\alpha, \beta)$ não é identicamente nula.

(3) Pelo item (1) temos que $A \otimes \mathbf{1}_{k\times k}$ não tem suporte se, e somente se existe uma submatriz identicamente nula $A[\alpha, \beta]$ tal que $|\alpha|k + |\beta|k > k^2$, ou seja, $|\alpha| + |\beta| > k$. Segue do Teorema de Frobenius - König (1.9) que $A \otimes \mathbf{1}_{k\times k}$ não tem suporte se, e somente se A não tem suporte.

Agora, pelo item (2) temos que $A \otimes \mathbf{1}_{k\times k}$ não tem suporte total se, e somente se existe uma submatriz identicamente nula $A[\alpha, \beta]$ tal que já seja $|\alpha|k + |\beta|k > k^2$ ou $|\alpha|k + |\beta|k = k^2$ e $A(\alpha, \beta)$ não é identicamente nula. Isto é, $A \otimes \mathbf{1}_{k\times k}$ não tem suporte total se, e somente se existe uma submatriz identicamente nula $A[\alpha, \beta]$ tal que já seja $|\alpha| + |\beta| > k$ ou $|\alpha| + |\beta| = k$ e $A(\alpha, \beta)$ não é identicamente nula. Portanto, segue do Corolário (1.10) que $A \otimes \mathbf{1}_{k\times k}$ não tem suporte total se, e somente se A não tem suporte total.

(4) Suponhamos que k e m são coprimos. Pelo item (2) temos que A não tem suporte total se, e somente se existe uma submatriz identicamente nula $A[\alpha, \beta]$ tal que já seja $|\alpha|m+|\beta|k > km$ ou $|\alpha|m + |\beta|k = km$ e $A(\alpha, \beta)$ não é identicamente nula, mas $|\alpha|m + |\beta|k = km$ não pode ser pois $|\alpha|$ e $|\beta|$ são inteiros positivos e por hipótese k e m são coprimos. Logo, A não tem suporte total se, e somente se existe uma submatriz identicamente nula $A[\alpha, \beta]$ tal que $|\alpha|m + |\beta|k > km$. Assim, do item (1) segue que A não tem suporte total se, e somente se A não tem suporte.

(5) Se $|I| = 0$ então A não tem elementos nulos, segue que A tem suporte total. Suponhamos que $|I| \neq 0$; seja $A[\alpha, \beta]$ uma submatriz identicamente nula com $|\alpha|m + |\beta|k$ máximo. Como, $|\alpha|, |\beta| \geq 1$ temos

$$|\alpha|m+|\beta|k=\frac{|\alpha|m+|\beta|k}{|\alpha|+|\beta|}(|\alpha|+|\beta|),$$

além disso, $|\alpha|+|\beta|\leq|\alpha||\beta|+1$. Dai,

$$|\alpha|m+|\beta|k\leq\frac{|\alpha|m+|\beta|k}{|\alpha|+|\beta|}(|\alpha||\beta|+1). \tag{1.1}$$

Já que $A[\alpha,\beta]$ é identicamente nula, segue da hipótese que $|\alpha||\beta|<\min\{k,m\}$, ou seja, $|\alpha||\beta|+1\leq\min\{k,m\}$, de onde,

$$\begin{aligned}\frac{|\alpha|m+|\beta|k}{|\alpha|+|\beta|}(|\alpha||\beta|+1) &\leq \frac{|\alpha|m+|\beta|k}{|\alpha|+|\beta|}(\min\{k,m\})\\ &< \frac{\max\{k,m\}(|\alpha|+|\beta|)}{|\alpha|+|\beta|}(\min\{k,m\})\\ &= (\max\{k,m\})(\min\{k,m\}).\end{aligned}$$

Portanto, $|\alpha|m+|\beta|k<km$. Do item (2) concluímos que A tem suporte total.

(6) Analogamente ao item (5) temos que se $|I|=0$ então A tem suporte total. Suponhamos que $|I|\neq 0$; seja $A[\alpha,\beta]$ uma submatriz identicamente nula com $|\alpha|+|\beta|$ máximo. Por hipótese temos $|\alpha||\beta|<k-1$, logo, $|\alpha|+|\beta|\leq|\alpha||\beta|+1\leq k-1$, pois $|\alpha|,|\beta|\geq 1$. Portanto, do Corolário (1.10) segue que A tem suporte total.

(7) Se A não tem entradas nulas então A tem suporte total. Suponhamos que A tem entradas nulas. Seja $A[\alpha,\beta]$ uma submatriz identicamente nula. Como A não tem linhas ou colunas identicamente nulas segue que $|\alpha|\leq k-1$ e $|\beta|\leq m-1$. Suponhamos que $|\alpha|m+|\beta|k\geq km$, então $|\alpha|m+(m-1)k\geq km$ e $(k-1)m+|\beta|k\geq km$, de onde $|\alpha|\geq k/m$ e $|\beta|\geq m/k$. Dai,

$$|\alpha|\geq\frac{\max\{k,m\}}{\min\{k,m\}}\quad\text{ou}\quad|\beta|\geq\frac{\max\{k,m\}}{\min\{k,m\}}.$$

Portanto, $|\alpha||\beta|\geq\max\{k,m\}/\min\{k,m\}$, o que contradiz a hipótese de que $|I|<\max\{k,m\}/\min\{k,m\}$. Assim, $|\alpha|m+|\beta|k<km$ e do item (2) segue que A tem suporte total.

■

Capítulo 2

Teorema de Sinkhorn-Knopp para matrizes

O teorema de Sinkhorn-Knopp para matrizes nos diz quando uma matriz quadrada com entradas não negativas, A, pode ser modificada, multiplicando à esquerda e à direita por diagonais positivas D_1, D_2, a fim de obtermos uma matriz D_1AD_2 duplamente estocástica.

Nesse capítulo apresentaremos todas as noções necessárias para a demonstração do teorema de Sinkhorn-Knopp. Essas noções serão adaptadas no próximo capítulo para obtermos uma extensão desse teorema para mapas positivos. Essa extensão será utilizada no último capítulo no estudo do emaranhamento quântico.

Os resultados desse capítulo foram obtidos no artigo clássico [17]. Antes de apresentar o teorema de Sinkhorn-Knopp precisamos dos seguintes resultados preliminares.

2.1 Preliminares

Lema 2.1. *Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ linha estocástica e $\beta_1, \ldots, \beta_n$ as somas de cada uma das colunas de A, isto é, $\beta_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Então $\prod_{j=1}^n \beta_j \leq 1$ e só ocorre a igualdade quando $\beta_j = 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demonstração. Como A é linha estocástica, então a soma dos termos de cada uma das linhas é 1, portanto a soma dos termos da matriz A é $n.1 = n$, adicionalmente, A não tem termos negativos. Dai, $\beta_j \geq 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ e $\sum_{j=1}^n \beta_j = n$. A desigualdade entre a média geométrica e a média aritmética dá,

$$\sqrt[n]{\beta_1 \ldots \beta_n} \leq \frac{\beta_1 + \cdots + \beta_2}{n} = \frac{n}{n} = 1,$$

e a igualdade só ocorre quando $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n$, de onde, $\beta_1 \ldots \beta_n \leq 1$ e a igualdade só ocorre quando $\beta_j = 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ pois $\sum_{j=1}^n \beta_j = n$.

$\blacksquare$

É claro que se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é coluna estocástica então temos um resultado análogo ao anterior para o produto da soma das linhas em A, isto é, se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são as somas de cada uma das linhas de A, então $\prod_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$ e só ocorre a igualdade quando $\alpha_i = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

O seguinte lema é muito importante na demonstração do Teorema de Sinkhorn-Knopp.

Lema 2.2 (Lema Chave do Teorema de Sinkhorn-Knopp)**.** *Seja $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz com entradas não negativas e com suporte total. Dadas sequências positivas $(x_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(y_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ para $1 \le i, j \le n$ tais que $(x_{i,k}y_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para um limite positivo sempre que $a_{ij} > 0$. Então, existem sequências positivas $(x'_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(y'_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ que convergem para limites positivos para cada $1 \le i, j \le n$ e além disso $x'_{i,k}y'_{j,k} = x_{i,k}y_{j,k}$ para todo $1 \le i, j \le n$ e $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Nós dividimos a prova em dois casos.

CASO 1. (A **é totalmente indecomponível**) Seja $E^{(1)} = \{1\}$ e $F^{(1)} = \{j : a_{1j} > 0\}$. Suponhamos definidos $E^{(1)}, \dots, E^{(s-1)}$ e $F^{(1)}, \dots, F^{(s-1)}$. Definimos

$$E^{(s)} = \left\{ i \notin \bigcup_{r=1}^{s-1} E^{(r)} : \ \ \textit{existe } j \in F^{(s-1)} \ \textit{tal que } a_{ij} > 0 \right\},$$

$$F^{(s)} = \left\{ j \notin \bigcup_{r=1}^{s-1} F^{(r)} : \ \ \textit{existe } i \in E^{(s)} \ \textit{tal que } a_{ij} > 0 \right\},$$

Observemos que para $s > n$ temos que $E^{(s)}$ e $F^{(s)}$ são vazios. Com efeito, se $E^{(r)} = \emptyset$ para algum $r \le n$ então $F^{(r)} = \emptyset$, logo $E^{(r+1)} = \emptyset$ e $F^{(r+1)} = \emptyset$, isto é, $E^{(s)} = \emptyset$ e $F^{(s)} = \emptyset$ para $s > n$.

Suponhamos que $E^{(r)} \ne \emptyset$ para todo $r \le n$. Sejam $s_1, s_2 \le n$ com $s_1 \ne s_2$. Assumimos sem perda de generalidade que $s_1 < s_2$, então para cada $i \in E^{(s_2)}$, segue pela definição de $E^{(s_2)}$ que $i \notin \bigcup_{r=1}^{s_2-1} E^{(r)}$, de onde $i \notin E^{(s_1)}$, dai $E^{(s_1)} \cap E^{(s_2)} = \emptyset$. Como $E^{(r)} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ para todo r, seque que $E^{(n+1)} = \emptyset$ e portanto, $E^{(s)} = \emptyset$ e $F^{(s)} = \emptyset$ sempre que $s > n$.

Definimos $E = \bigcup_{r=1}^{n} E^{(r)}$ e $F = \bigcup_{r=1}^{n} F^{(r)}$. Como A tem suporte total então na primeira linha de A existe um elemento não nulo, portanto $F^{(1)} \ne \emptyset$, ou seja $F \ne \emptyset$ pois $F^{(1)} \subseteq F$. Além disso, $1 \in E^{(1)} \subseteq E$, segue $E \ne \emptyset$.

Suponhamos que E é um subconjunto próprio de $\{1, 2, \dots, n\}$. Seja $i \notin E$ e $j \in F$, então $j \in F^{(s)}$ para algum $s \in \{1, 2, \dots, n\}$. Se $a_{ij} > 0$ temos que $i \in E^{(s+1)}$, mas $E^{(s+1)} \subseteq E$ ou $E^{(s+1)} = \emptyset$. Portanto, se $i \notin E$ e $j \in F$ temos $a_{ij} = 0$, isso implica que $A(E, F] = 0$. Analogamente, temos que se $F \ne \{1, 2, \dots, n\}$ então $A[E, F) = 0$.

Seja τ o número de diagonais positivas de A. Como A tem suporte total, se $a_{ij} > 0$ então a_{ij} pertence a algum diagonal positiva. Definimos a matriz $H = (h_{ij})$ da seguinte forma.

$$H_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } a_{ij} = 0 \\ t/\tau, & \text{se } a_{ij} \text{ pertence a } t \text{ diagonais positivas de } A \end{cases}$$

Dessa maneira temos que $h_{ij} \ne 0$ se e só se $a_{ij} \ne 0$, então A e H têm as mesmas diagonais positivas (definidas pelas mesmas permutações).

Agora consideremos a linha i de H. Cada diagonal positiva de H contém um único elemento da linha i. Podemos contar o número de diagonais positivas de H contando o número de diagonais positivas que pertence cada elemento da linha i. Pela definição de h_{ij} temos que $h_{ij}\tau$ é o número de diagonais positivas que contém h_{ij}, logo, $\tau = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\tau$. Então,

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij} = \frac{\tau}{\tau} = 1,$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Isto é, H é linha estocástica. Analogamente temos que H é coluna estocástica

Suponhamos que $|E| = u$ e $|F| = v$, onde $|E|$ e $|F|$ representam as cardinalidades do conjunto E e do conjunto F respectivamente. Vimos acima que se E é um subconjunto próprio de $\{1, 2, \ldots, n\}$ temos $A(E, F] = 0$. Isso implica que $H(E, F] = 0$. Se $F = \{1, \ldots, n\}$, como $A(E, F] = 0$, então A teria uma linha nula, contrariando o fato que A tem suporte total. Então F também é um subconjunto próprio se E for próprio. Mas vimos acima que isso também implica que $A[E, F) = 0$. Portanto $H[E, F) = 0$. Como H é coluna estocástica,

$$u = \sum_{i \in E} 1 = \sum_{j \in F} \sum_{i \in E} h_{ij} = \sum_{j \in F} 1 = v.$$

Portanto, se E é um subconjunto próprio de $\{1, 2, \ldots, n\}$ então $H[E, F]$ seria uma matriz quadrada de ordem u. Daí segue que H não seria totalmente indecomponível, isto é, A não seria totalmente indecomponível. Logo E não é próprio, ou seja, $E = \{1, 2, \ldots, n\}$. Repetindo o argumento para F obtemos $F = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$x'_{i,k} = x_{1,k}^{-1}\, x_{i,k} > 0, \qquad y'_{j,k} = x_{1,k} y_{j,k} > 0.$$

Notemos que $x'_{i,k} y'_{j,k} = x_{i,k} y_{j,k}$ para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $k \in \mathbb{N}$.

Agora para mostrar que $(x'_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $(y'_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergem para limites positivos para cada $1 \leq i, j \leq n$ procedemos por indução sobre os conjuntos $E^{(s)}$ e $F^{(s)}$. Como $x'_{1,k} = x_{1,k}^{-1} x_{1,k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que a sequência $(x'_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a 1. Para todo $j \in F^{(1)}$, $a_{1j} > 0$, logo por hipótese temos $(y'_{j,k})_{k \in \mathbb{N}} = (x_{1,k} y_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge para um limite positivo.

Suponhamos que $(x'_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $(y'_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergem para limites positivos quando $i \in \bigcup_{r=1}^{s-1} E^{(r)}$ e $j \in \bigcup_{r=1}^{s-1} F^{(r)}$. Seja $i \in E^{(s)}$. Pela definição de $E^{(s)}$, existe $j_{s-1} \in F^{(s-1)}$ tal que $a_{ij_{s-1}} > 0$. Podemos escrever

$$x'_{i,k} = \frac{x'_{i,k} y'_{j_{s-1},k}}{y'_{j_{s-1},k}} = \frac{x_{i,k} y_{j_{s-1},k}}{y'_{j_{s-1},k}}. \tag{2.1}$$

Como $a_{ij_{s-1}} > 0$, segue por hipótese que $(x_{i,k} y_{j_{s-1},k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge para um número positivo. Além disso, $j_{s-1} \in F^{(s-1)}$, então por hipótese de indução $(y'_{j_{s-1},k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a um número positivo. Pela equação (2.1), para todo $i \in E^{(s)}$, temos que $(x'_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a um limite positivo.

Seja $j \in F^{(s)}$, então pela definição de $F^{(s)}$ existe $i_s \in E^{(s)}$ tal que $a_{i_s j} > 0$. Podemos escrever

$$y'_{j,k} = \frac{x'_{i_s,k} y'_{j,k}}{x'_{i_s,k}} = \frac{x_{i_s,k} y_{j,k}}{x'_{i_s,k}}. \tag{2.2}$$

Por hipótese $(x_{i_s,k} y_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a um número positivo pois $a_{i_s j} > 0$. Como $i_s \in E^{(s)}$ então $(x'_{i_s,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a um número positivo, pelo que acabamos de provar. Portanto $(y'_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a um número positivo se $j \in F^{(s)}$. Isso completa a indução.

Provamos que para todo $i \in E = \{1, 2, \ldots, n\}$ e todo $j \in F = \{1, 2, \ldots, n\}$ temos, $(x'_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $(y'_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergem para limites positivos quando A é totalmente indecomponível.

CASO 2. (*A* **não é totalmente indecomponível (é parcialmente decomponível)**) Consideremos H como no primeiro caso. Como $h_{ij} \neq 0$, se e só se, $a_{ij} \neq 0$ então H também não é totalmente indecomponível, isto é, existem matrizes permutações $P_1, Q_1 \in M_n(\mathbb{R})$ tais que

$$P_1 H Q_1 = \begin{pmatrix} E_{s\times s} & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Como H é coluna estocástica e a operação P_1HQ_1 só permuta as linhas e colunas em H então E é coluna estocástica e a somas de seus elementos dá s. Também, P_1HQ_1 é linha estocástica e a soma dos elementos das s primeiras linhas dão s. Logo, $C = 0$ e D é duplamente estocástica. Se E ou D não são totalmente indecomponíveis repetimos o argumento para E e D até obter matrizes permutação P e Q tais que

$$PHQ = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_j \end{pmatrix},$$

onde H_i é totalmente indecomponível para todo $i \in \{1, 2, \ldots, j\}$. Então,

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_j \end{pmatrix},$$

onde A_i também é totalmente indecomponível para todo $i \in \{1, 2, \ldots, j\}$. Basta repetir o argumento do primeiro caso para cada A_i e temos o resultado para A.

■

A seguir provamos um lema que não apenas mostra a unicidade da matriz duplamente estocástica obtida a partir de uma matriz não negativa, mas que também será útil na demonstração do teorema que garante a convergência do processo de normalização (Teorema (2.8)).

Lema 2.3. *Seja $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ com entradas não negativas. Suponhamos que existe uma matriz duplamente estocástica B da forma D_1AD_2, onde D_1 e D_2 são matrizes diagonais positivas, então B é única, e se A é totalmente indecomponível então D_1 e D_2 acima são únicas a menos de multiplicação por escalar.*

Demonstração. Suponhamos que $B = D_1AD_2$ e $B' = D_1'AD_2'$ são matrizes duplamente estocásticas, onde D_1, D_2, D_1', D_2' matrizes diagonais positivas. Sejam

$$D_1 = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_n \end{pmatrix}, \quad D_1' = \begin{pmatrix} x_1' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_n' \end{pmatrix}, \quad D_2' = \begin{pmatrix} y_1' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_n' \end{pmatrix},$$

$p_i = x_i'/x_i$ e $q_i = y_i'/y_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Como $B = D_1AD_2$ é duplamente estocástica então,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = 1, \tag{2.3}$$

para cada $1 \leq j \leq n$ e

$$\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = 1, \tag{2.4}$$

para cada $1 \leq i \leq n$. Como $B' = D_1'AD_2'$ também é duplamente estocástica, então,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i a_{ij} y_j q_j &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^{'}}{x_i}\right) x_i a_{ij} y_j \left(\frac{y_j^{'}}{y_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^{'} a_{ij} y_j^{'} \\ &= 1, \end{aligned} \tag{2.5}$$

para todo $1 \leq j \leq n$ e

$$\sum_{j=1}^{n} p_i x_i a_{ij} y_j q_j = \sum_{j=1}^{n} x_i^{'} a_{ij} y_j^{'} = 1, \tag{2.6}$$

para todo $1 \leq i \leq n$.

Sejam $E_j = \{i : a_{ij} > 0\}$ (o conjunto das linhas com termos positivos na coluna j) e $F_i = \{j : a_{ij} > 0\}$ (o conjunto das colunas com termos positivos na linha i). Definimos $\underline{p} = \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} p_i$, $\overline{q} = \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} q_j$,

$$m = \left\{k : p_k = \underline{p}\right\} \text{ e } M = \{l : q_l = \overline{q}\}.$$

Fixemos $i_0 \in m$ e $j_0 \in M$. Segue da equação (2.5) que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i a_{ij_0} y_{j_0} q_{j_0} = 1.$$

Portanto

$$q_{j_0} = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i a_{ij_0} y_{j_0}\right)^{-1}.$$

Por outro lado, da equação (2.3) obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i x_i a_{ij_0} y_{j_0} &\geq \left(\min_{i\in\{1,\ldots,n\}} p_i\right) \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij_0} y_{j_0} \\
&= p_{i_0} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij_0} y_{j_0} \\
&= p_{i_0},
\end{aligned}$$

logo, $q_{j_0} \leq p_{i_0}^{-1}$. De maneira análoga usando es equações (2.6) e (2.4), obtemos $p_{i_0} \geq q_{j_0}^{-1}$. Isso implica que $q_{j_0} = p_{i_0}^{-1} = \underline{p}^{-1}$. Mas a igualdade

$$q_{j_0}^{-1} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i a_{ij_0} y_{j_0} = \underline{p},$$

só é possível se todos os p_i forem $\underline{p}$ quando $a_{ij_0} > 0$, isto é, quando $i \in E_{j_0}$ (ver equação (2.3)). Portanto $p_i = \underline{p}$ quando $i \in E_j$ e $j \in M$. Assim, $\bigcup_{j\in M} E_j \subseteq m$. Isso implica que as linhas com os termos positivos das colunas j de M estão dentro de m, ou seja, $A(m, M] = 0_{n-|m|\times|M|}$.

Como $p_{i_0}^{-1} = q_{j_0} = \overline{q}$ e $p_{i_0}^{-1} = \sum_{j=1}^{n} x_{i_0} a_{i_0 j} y_j q_j$ então

$$\overline{q} = \sum_{j=1}^{n} x_{i_0} a_{i_0 j} y_j q_j.$$

Essa igualdade só é possível se $q_j = \overline{q}$ para todo $j \in F_{i_0}$ (ver equação (2.4)). Isso implica que $q_j = \overline{q}$ quando $j \in F_i$ e $i \in m$. Assim, $\bigcup_{i\in m} F_i \subseteq M$. Isso implica que as colunas com os termos positivos das linhas i de m estão dentro de M, ou seja, $A[m, M) = 0_{|m|\times n-|M|}$.

Acabamos de ver que se $i_0 \in m$ e $j_0 \in M$ então $q_{j_0} = p_{i_0}^{-1}$. Portanto, se $(i, j) \in m \times M$ então $\underline{p}\overline{q} = p_i q_j = p_i p_i^{-1} = 1$. Seja

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

como $B' = D_1' D_1^{-1} B D_2^{-1} D_2'$, temos

$$\begin{aligned}
B' &= \begin{pmatrix} x_1' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{y_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_n' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_1 b_{11} q_1 & \cdots & p_1 b_{1n} q_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n b_{n1} q_1 & \cdots & p_n b_{nn} q_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Daí, se $(i,j) \in m \times M$ segue $p_i b_{ij} q_j = b_{ij}$ pois $p_i q_j = 1$, isto é, os elementos nas linhas m e colunas M da matriz B' são os mesmos elementos das linhas m e as colunas M da matriz B, ou seja,

$$B'[m,M] = B[m,M].$$

Como $A[m,M) = 0_{|m| \times n-|M|}$, $A(m,M] = 0_{n-|m| \times |M|}$ e $B = D_1 A D_2$ é duplamente estocástica então $B[m,M) = 0_{|m| \times n-|M|}$, $B(m,M] = 0_{n-|m| \times |M|}$ e $B[m,M]$ é duplamente estocástica. Já que toda matriz duplamente estocástica é quadrada (pois a soma de todos seus elementos é igual ao número de filas e ao numero de colunas) temos $|m| = |M|$.

Agora, a soma do número de linhas e do número do colunas das matrizes $A[m,M) = 0_{|m| \times n-|M|}$ e $A(m,M] = 0_{n-|m| \times |M|}$ é $|m| + (n - |M|) = n$ e $(n - |M|) + |M| = n$, respectivamente. Logo, se A é totalmente indecomponível, $A[m,M)$ e $A(m,M]$ não poderiam existir pela Definição (1.20). Isso implica que $|m| = |M| = n$. Nesse caso $B = B[m,M] = B'[m,M] = B'$, isso mostra a unicidade de B, se A é totalmente indecomponível.

Além disso, se A é totalmente indecomponível temos $m \times M = \{1, \ldots n\} \times \{1, \ldots n\}$ e $p_i q_j = 1$ para todos $1 \leq i, j \leq n$. Portanto

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \lambda \text{ e } q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 1/\lambda.$$

Assim, $D_1' D_1^{-1} = \lambda Id$ e $D_2' D_2^{-1} = (1/\lambda) Id$, então $D_1' = \lambda D_1$ e $D_2' = (1/\lambda) D_2$.

Suponhamos que $|m| \neq |M| \neq n$ (as submatrizes nulas $A[m,M)$ e $A(m,M]$ existem), isto é, A é parcialmente decomponível. Então $B(m,M)$ e $B'(m,M)$ também existem e são duplamente estocásticas de ordem menor que n, pois $B(m,M], B'(m,M], B[m,M), B'[m,M)$ existem e

$$B'(m,M] = B(m,M] = 0_{n-|m| \times |M|} \quad \text{e} \quad B[m,M) = B'[m,M) = 0_{|m| \times n-|M|}.$$

Também, $B(m,M) = D_1'' A(m,M) D_2''$ e $B'(m,M) = D_1''' A(m,M) D_2'''$ onde $D_1'', D_2'', D_1''', D_2'''$ são diagonais positivas. De fato, $D_1'' = D_1(m,M)$, $D_2'' = D_2(m,M)$, $D_1''' = D_1'(m,M)$ e $D_2''' = D_2'(m,M)$, pois

$$B(m,M) = D_1 A D_2(m,M) = (x_i a_{ij} y_j)_{n \times n}(m,M) \text{ e}$$

$$B'(m,M) = D_1' A D_2'(m,M) = (x_i' a_{ij} y_j')_{n \times n}(m,M).$$

Procedemos por indução sobre a ordem de A. É claro que o lema é valido para matrizes de ordem 1. Suponhamos que é valido para matrizes de ordem menor que n. Portanto, por indução na ordem de $A(m,M)$ (ordem menor que a ordem de A) temos que $B(m,M) = B'(m,M)$. Como $B[m,M] = B'[m,M]$, $B[m,M) = B'[m,M)$ e $B(m,M] = B'(m,M]$, então $B = B'$. Isso completa a prova da unicidade de B.

$\blacksquare$

2.2 Processo de Normalização de Linhas e Colunas

Seja A uma matriz real quadrada com entradas não negativas. A ideia inicial do teorema de Sinkhorn-Knopp é dividir as colunas de A pela suas somas respectivas para obter uma matriz coluna estocástica A_1. Depois fazemos o mesmo com as linhas de A_1 para obter uma matriz linha estocástica A_2. Entretanto essa A_2 não precisa ser coluna estocástica. Por isso precisamos voltar a normalizar as colunas.

Esse processo constrói uma sequência de matrizes ora coluna estocástica, ora linha estocástica a partir da A. Se essa sequência convergir então obviamente convergirá para uma duplamente estocástica. Veremos que sob certas condições esse limite existe e terá o formato D_1AD_2 explicado no início do capítulo.

Chamamos esse processo de processo de normalização de linhas e colunas. Nessa seção definiremos o processo rigorosamente e daremos um exemplo. Na seção seguinte estudaremos as condições corretas para a convergência desse processo.

Definição 2.4 (Processo de normalização)**.** *Seja $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ com entradas não negativas tal que A não têm linhas ou colunas nulas. Para todos $1 \leq i, j \leq n$ definimos $x_{i,0} = 1$ e $y_{j,0} = \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\right)^{-1}$, suponhamos definidos $x_{i,m}$ e $y_{j,m}$ e definimos*

$$x_{i,m+1} = \alpha_{i,m}^{-1} x_{i,m} \quad \text{e} \quad y_{j,m+1} = \beta_{j,m}^{-1} y_{j,m},$$

onde $\alpha_{i,m} = \sum_{j=1}^n x_{i,m} a_{ij} y_{j,m}$, e $\beta_{j,m} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,m}^{-1} x_{i,m} a_{ij} y_{j,m}$. Logo, definimos a sequência $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M_n(\mathbb{R})$ dada por,

$$A_{2m+1} = (x_{i,m} a_{ij} y_{j,m}) \in M_n(\mathbb{R}) \quad e \quad A_{2m+2} = (x_{i,m+1} a_{ij} y_{j,m}) \in M_n(\mathbb{R}),$$

*para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Chamamos o processo de construção da sequência $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de **processo de normalização de linhas e colunas** da matriz A.*

Aparentemente, a sequência $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ do processo de normalização é complicada de construir, mas não é difícil perceber que é a mesma sequência descrita na introdução da seção. Com efeito, para cada $1 \leq i, j \leq n$ sejam

$$S_i(A) := \text{soma dos números da linha i de A},$$

$$\Delta_j(A) := \text{soma dos números da coluna j de A},$$

ou seja, $S_i(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ e $\Delta_j(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}$. Agora,

$$A_1 = (x_{i,0} a_{ij} y_{j,0}) = (a_{ij} \Delta_j(A)^{-1}) = A.\text{diag}(\Delta_1(A)^{-1}, \ldots, \Delta_n(A)^{-1}).$$

Dai, $\alpha_{i,0} = S_i(A_1)$. Portanto,

$$A_2 = (x_{i,1} a_{ij} y_{j,0}) = (\alpha_{i,0}^{-1} a_{ij} \Delta_j(A)^{-1}) = (S_i(A_1)^{-1} a_{ij} \Delta_j(A)^{-1}) = \text{diag}(S_1(A)^{-1}, \ldots, S_n(A)^{-1}) A_1,$$

e $\beta_{j,0} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,0}^{-1} x_{i,0} a_{ij} y_{j,0} = \sum_{i=1}^n x_{i,1} a_{ij} y_{j,0} = \Delta_j(A_2)$. Em resumo, continuando por indução, podemos verificar que $\alpha_{i,m} = S_i(A_{2m+1})$ e $\beta_{j,m} = \Delta_j(A_{2m+2})$, para todo $1 \leq i, j \leq n$. Além disso,

$$A_{2m+1} = A_{2m} \begin{pmatrix} \Delta_1(A_{2m})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta_2(A_{2m})^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta_n(A_{2m})^{-1} \end{pmatrix},$$

$$A_{2m+2} = \begin{pmatrix} S_1(A_{2m+1})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2(A_{2m+1})^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_n(A_{2m+1})^{-1} \end{pmatrix} A_{2m+1}.$$

Observação 2.5. Para cada $k \in \mathbb{N}$ denotamos por $a_{ij(k)}$ o elemento na linha i e a coluna j da matriz A_k. Então, para todo m inteiro não negativo,

$$A_{2m+1} = \begin{pmatrix} a_{11(2m)}\Delta_1(A_{2m})^{-1} & \cdots & a_{1n(2m)}\Delta_n(A_{2m})^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1(2m)}\Delta_1(A_{2m})^{-1} & \cdots & a_{nn(2m)}\Delta_n(A_{2m})^{-1} \end{pmatrix}$$

e

$$A_{2m+2} = \begin{pmatrix} S_1(A_{2m+1})^{-1}a_{11(2m+1)} & \cdots & S_1(A_{2m+1})^{-1}a_{1n(2m+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_n(A_{2m+1})^{-1}a_{n1(2m+1)} & \cdots & S_n(A_{2m+1})^{-1}a_{n1(2m+1)} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta_j(A_{2m+1}) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij(2m)}\Delta_j(A_{2m})^{-1} \\ &= \Delta_j(A_{2m})^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ij(2m)} \\ &= \Delta_j(A_{2m})^{-1}\Delta_j(A_{2m}) \\ &= 1, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq j \leq n$, e

$$\begin{aligned} S_i(A_{2m+2}) &= \sum_{j=1}^{n} S_i(A_{2m+1})^{-1}a_{ij(2m+1)} \\ &= S_i(A_{2m+1})^{-1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij(2m+1)} \\ &= S_i(A_{2m+1})^{-1}S_i(A_{2m+1}) \\ &= 1, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Isto é, A_{2m+1} é coluna estocástica e A_{2m+2} é linha estocástica, para todo inteiro positivo m.

Exemplo 2.6. *Consideremos a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

então, $\Delta_1(A) = 2$, $\Delta_2(A) = 1$ *de onde,*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$S_1(A_1) = 1/2$, $S_2(A_1) = 3/2$, *logo*

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

$\Delta_1(A_2) = 4/3$, $\Delta_2(A_2) = 2/3$, *então*

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix},$$

$S_1(A_3) = 3/4$, $S_2(A_3) = 5/4$, *segue*

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Continuando do mesmo jeito obtemos que para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$$A_{2m+1} = \begin{pmatrix} \frac{2m+1}{2m+2} & 0 \\ \\ \frac{1}{2m+2} & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$A_{2m+2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ \frac{1}{2m+3} & \frac{2m+2}{2m+3} \end{pmatrix},$$

onde,

$$\Delta_1(A_{2m+1}) = \frac{2m+1}{2m+2} + \frac{1}{2m+2} = \frac{2m+2}{2m+2} = 1,$$

e $\Delta_2(A_{2m+1}) = 0 + 1 = 1$. *Também* $S_1(A_{2m+2}) = 1 + 0 = 1$ *e*

$$S_2(A_{2m+2}) = \frac{1}{2m+3} + \frac{2m+2}{2m+3} = \frac{2m+3}{2m+3} = 1.$$

2.3 Quando converge o processo de normalização de linhas e colunas?

Vamos agora estudar as condições para a convergência da sequência resultante do processo de normalização de linhas e colunas de uma matriz real quadrada não negativa.

Definição 2.7. *Seja $\sigma \in S_n$ e $A \in M_n(\mathbb{R})$. Definimos $\sigma(A) := \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$, ou seja, é o produto dos termos da diagonal $a_{1\sigma(1)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}$.*

Teorema 2.8. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ com entradas não negativas. Uma condição necessária e suficiente para que a sequência $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ obtida no processo de normalização da matriz A convirja é A ter suporte.*

Demonstração. Suponha que A tenha suporte. Para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ sejam

$$A_{2m+1} = (x_{i,m} a_{ij} y_{j,m})_{n\times n} \quad \text{e} \quad A_{2m+2} = (x_{i,m+1} a_{ij} y_{j,m})_{n\times n}$$

matrizes definidas no processo de normalização da matriz A.

Pela Observação (2.5) nós garantimos que para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ a matriz A_{2m+1} é coluna estocástica e a matriz A_{2m+2} é linha estocástica. Logo, para cada $1 \leq j \leq n$ temos

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,m} a_{ij} y_{j,m} = 1.$$

Portanto para cada $1 \leq j \leq n$

$$y_{j,m} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,m} a_{ij} \right)^{-1} \leq \left(x_{i_0,m} a_{i_0 j} \right)^{-1},$$

onde $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ é tal que $a_{i_0 j} > 0$ (i_0 existe pois A tem suporte). Seja

$$a = \min\{a_{ij} : a_{ij} > 0 \ e \ 1 \leq i, j \leq n\},$$

então, $a \leq a_{i_0 j}$, de onde $a_{i_0 j}^{-1} \leq a^{-1}$. Daí

$$y_{j,m} \leq \left(x_{i_0,m} a_{i_0 j} \right)^{-1} \leq x_{i_0,m}^{-1} a_{i_0 j}^{-1} \leq x_{i_0,m}^{-1} a^{-1},$$

para cada $1 \leq j \leq n$. Logo, $x_{i,m} y_{j,m} \leq a^{-1}$ sempre que $a_{ij} > 0$.

Como A tem suporte, existe uma diagonal positiva. Seja ela $a_{1\sigma(1)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}$ onde $\sigma \in S_n$. Defina para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\xi_k = \prod_{i=1}^{n} x_{i,k-1} y_{\sigma(i),k-1} \qquad \text{e} \qquad \xi'_k = \prod_{i=1}^{n} x_{i,k} y_{\sigma(i),k-1}.$$

Notemos que $\xi_1, \xi'_1 > 0$. Agora, do fato que $(x_{i,k-1} a_{ij} y_{j,k-1})_n$ é coluna estocástica para todo $k \in \mathbb{N}$, segue,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k-1} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{i,k-1}a_{ij}y_{j,k-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i,k-1}a_{ij}y_{j,k-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} 1 = n.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k-1}}{n} = \frac{n}{n} = 1,
$$

como

$$
\left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_{i,k-1}\right)^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k-1}}{n} = 1,
$$

temos,

$$
\begin{aligned}
1 \geq \prod_{i=1}^{n} \alpha_{i,k-1} &= \prod_{i=1}^{n} \frac{x_{i,k-1}}{x_{i,k}} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{x_{i,k-1}y_{\sigma(i),k-1}}{x_{i,k}y_{\sigma(i),k-1}} \\
&= \frac{\xi_k}{\xi'_k}.
\end{aligned}
$$

Assim, $\xi'_k \geq \xi_k$. Analogamente, do fato que $(x_{i,k}a_{ij}y_{j,k-1})_n$ é linha estocástica para todo $k \in \mathbb{N}$, segue,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \beta_{j,k-1} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k-1}^{-1} x_{i,k-1}a_{ij}y_{j,k-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i,k}a_{ij}y_{j,k-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{i,k}a_{ij}y_{j,k-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1 = n.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\left(\prod_{j=1}^{n} \beta_{j,k-1}\right)^{1/n} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_{j,k-1}}{n} = 1,
$$

ou seja,

$$1 \geq \prod_{j=1}^{n} \beta_{j,k-1} = \prod_{j=1}^{n} \frac{y_{j,k-1}}{y_{j,k}}.$$

Como $\sigma \in S_n$, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ existe um único $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $j = \sigma(i)$, logo,

$$\begin{aligned}
1 \geq \prod_{j=1}^{n} \frac{y_{j,k-1}}{y_{j,k}} &= \prod_{i=1}^{n} \frac{y_{\sigma(i),k-1}}{y_{\sigma(i),k}} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{x_{i,k} y_{\sigma(i),k-1}}{x_{i,k} y_{\sigma(i),k}} \\
&= \frac{\xi_k'}{\xi_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Daí, $\xi_{k+1} \geq \xi_k'$. Lembremos que $x_{i,k-1} y_{j,k-1} \leq a^{-1}$ sempre que $a_{ij} > 0$. Já que $a_{i\sigma(i)} > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ segue, $x_{i,k} y_{\sigma(i),k} \leq a^{-1}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, então

$$0 < \xi_k \leq \xi_k' \leq \xi_{k+1} \leq \left(a^{-1}\right)^n.$$

Portanto, $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(\xi_k')_{k \in \mathbb{N}}$ são sequências positivas crescentes e limitadas, então $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(\xi_k')_{k \in \mathbb{N}}$ são convergentes. Além disso, como $\xi_k \leq \xi_k' \leq \xi_{k+1}$ segue que $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(\xi_k')_{k \in \mathbb{N}}$ convergem para o mesmo L tal que $0 < L \leq \left(a^{-1}\right)^n$.

Nós temos que

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_{i,k-1} = \frac{\xi_k}{\xi_k'}.$$

Segue

$$\lim_{k \to \infty} \prod_{i=1}^{n} \alpha_{i,k-1} = \lim_{k \to \infty} \frac{\xi_k}{\xi_k'} = 1,$$

Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k-1}}{n} = 1$. Isso implica que $\lim_{k \to \infty} \alpha_{i,k-1} = 1$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Analogamente,

$$\lim_{k \to \infty} \prod_{j=1}^{n} \beta_{j,k-1} = \lim_{k \to \infty} \frac{\xi_k'}{\xi_{k+1}} = 1,$$

e para cada $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_{j,k-1}}{n} = 1$, de onde $\lim_{k \to \infty} \beta_{j,k-1} = 1$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$.

Seja $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a sequência obtida no processo de normalização da matriz A e seja $(A_{k_r})_{r \in \mathbb{N}}$ uma subsequência de $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $(A_{k_r})_{r \in \mathbb{N}}$ converge para $B \in M_n(\mathbb{R})$ (note que a subsequência $(A_{k_r})_{r \in \mathbb{N}}$ existe pois a sequencia $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada já que A_k é linha ou coluna estocástica para todo $k \in \mathbb{N}$). Da subsequência $(A_{k_r})_{r \in \mathbb{N}}$ podemos extrair uma subsequência $(A_{k_{r_s}})_{s \in \mathbb{N}}$ tal que k_{r_s} é ímpar para todo $s \in \mathbb{N}$ ou k_{r_s} é par para todo $s \in \mathbb{N}$. É claro que $(A_{k_{r_s}})_{s \in \mathbb{N}}$ converge para B.

Se k_{r_s} é ímpar para todo $s \in \mathbb{N}$, então $A_{k_{r_s}}$ é coluna estocástica para todo $s \in \mathbb{N}$, dai, B é coluna estocástica; além disso, B é linha estocástica, pois $\alpha_{i,k-1} \to 1$ quando $k \to \infty$, de onde B é duplamente estocástica.

Se k_{r_s} é par para todo $s \in \mathbb{N}$, então $A_{k_{r_s}}$ é linha estocástica para todo $s \in \mathbb{N}$, dai, B é linha estocástica; além disso, B é coluna estocástica, pois $\beta_{j,k-1} \to 1$ quando $k \to \infty$, então B é duplamente estocástica. Portanto, qualquer subsequência convergente de $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tem que convergir para uma matriz duplamente estocástica.

Se conseguimos provar que as subsequências convergentes de $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergem todas para o mesmo limite, então a sequência inteira $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para uma matriz duplamente estocástica.

Suponhamos que $(A_{k_r})_{r\in\mathbb{N}}$ e $(A_{k'_r})_{r\in\mathbb{N}}$ são subsequências convergentes de $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Sejam

$$B = (b_{ij})_{n\times n} = \lim_{r\to\infty} A_{k_r} \quad e \quad C = (c_{ij})_{n\times n} = \lim_{r\to\infty} A_{k'_r},$$

portanto B e C são duplamente estocásticas. Lembremos que para todo $r \in \mathbb{N}$, A_{k_r} e $A_{k'_r}$ são matrizes obtidas de A multiplicando à esquerda e à direita por matrizes diagonais. Vejamos que $b_{ij} \neq 0$ se, e só se $c_{ij} \neq 0$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Seja $\sigma \in S_n$ e consideremos a notação da Definição (2.7). Notemos que

$$\sigma(A) = 0 \text{ se, e só se } \sigma(A_{k_r}) = \sigma(A_{k'_r}) = 0 \text{ para cada } r \in \mathbb{N},$$

pois as diagonais positivas de A_{k_r} e $A_{k'_r}$ são as mesmas de A. Suponhamos que $\sigma(A) \neq 0$, então, se k_r é ímpar temos, $A_{k_r} = (x_{i,\frac{k_r-1}{2}} a_{ij} y_{j,\frac{k_r-1}{2}})$. Portanto

$$\begin{aligned}
\sigma(A_{k_r}) &= \prod_{i=1}^{n} x_{i,\frac{k_r-1}{2}} a_{i\sigma(i)} y_{\sigma(i),\frac{k_r-1}{2}} \\
&= \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} x_{i,\frac{k_r-1}{2}} y_{\sigma(i),\frac{k_r-1}{2}} \\
&= \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \prod_{i=1}^{n} x_{i,\frac{k_r-1}{2}} y_{\sigma(i),\frac{k_r-1}{2}} \\
&= \sigma(A).\xi_{\frac{k_r-1}{2}},
\end{aligned}$$

Se k_r é par temos

$$\begin{aligned}
\sigma(A_{k_r}) &= \prod_{i=1}^{n} x_{i,\frac{k_r-2}{2}+1} a_{i\sigma(i)} y_{\sigma(i),\frac{k_r-2}{2}} \\
&= \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} x_{i,\frac{k_r-2}{2}+1} y_{\sigma(i),\frac{k_r-2}{2}} \\
&= \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \prod_{i=1}^{n} x_{i,\frac{k_r-2}{2}+1} y_{\sigma(i),\frac{k_r-2}{2}} \\
&= \sigma(A).\xi'_{\frac{k_r-2}{2}}.
\end{aligned}$$

Como $\xi_{(k_r-1)/2} \to L$ e $\xi_{(k_r-2)/2} \to L$ quando $r \to \infty$ então, fazendo $r \to \infty$ em $\sigma(A_{k_r})$ obtemos $\sigma(B) = \sigma(A)L$. Análogamente, fazendo a mesmo análise para $(A_{k'_r})_{r\in\mathbb{N}}$ temos $\sigma(C) = \sigma(A)L$.

Já que B é duplamente estocástica segue do Corolário (1.15) que B tem suporte total; logo, se $b_{i_0j_0} \neq 0$ então existe uma diagonal positiva de B contendo ele. Dai, existe uma permutação $\psi \in S_n$ tal que $\psi(B) \neq 0$ e $\psi(i_0) = j_0$.

Se $\psi(A) = 0$ então $\psi(A_{k_r}) = 0$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Segue $\psi(B) = \lim_{r\to\infty} \psi(A_{k_r}) = 0$, assim, $\psi(A) \neq 0$. Isso implica que $\psi(B) = \psi(A)L = \psi(C)$, isto é, $\psi(C) \neq 0$, portanto $c_{i_0j_0} \neq 0$ pois ele faz parte do produto que forma $\psi(C)$.

Da mesma forma provamos que se $c_{i_0j_0} \neq 0$ então $b_{i_0j_0} \neq 0$. Portanto, $b_{ij} \neq 0$ se, e só se $c_{ij} \neq 0$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Agora, como para cada $r \in \mathbb{N}$, A_{k_r} e $A_{k'_r}$ são matrizes obtidas no processo de normalização de A, existem matrizes diagonais positivas

$$\tilde{D}_{1,r} = \begin{pmatrix} w_{1,r} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_{n,r} \end{pmatrix} \quad e \quad \tilde{D}_{2,r} = \begin{pmatrix} z_{1,r} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z_{n,r} \end{pmatrix},$$

tais que $A_{k'_r} = \tilde{D}_{1,r} A_{k_r} \tilde{D}_{2,r}$, isto para cada $r \in \mathbb{N}$. Como $A_{k'_r} \to C$, $A_{k_r} \to B$ e $(A_{k'_r})_{ij} = w_{i,r}(A_{k_r})_{ij} z_{j,r} = a_{ij(k_r)} w_{i,r} z_{j,r}$, então para $b_{ij} > 0$,

$$\lim_{r\to\infty} w_{i,r} z_{j,r} = c_{ij} b_{ij}^{-1}.$$

Pelo Lema (2.2), existem novas sequências $(w'_{i,r})_{r\in\mathbb{N}}$ e $(z'_{j,r})_{r\in\mathbb{N}}$, para todos $1 \leq i, j \leq n$, convergindo para limites positivos tais que $w_{i,r} z_{j,r} = w'_{i,r} z'_{j,r}$ para todo $r \in \mathbb{N}$ e todos $1 \leq i, j \leq n$. Sejam

$$D_1 = \lim_{r\to\infty} \begin{pmatrix} w'_{1,r} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w'_{n,r} \end{pmatrix} \quad e \quad D_2 = \lim_{r\to\infty} \begin{pmatrix} z'_{1,r} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z'_{n,r} \end{pmatrix},$$

logo,

$$D_1 B D_2 = \lim_{r\to\infty} \begin{pmatrix} w'_{1,r} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w'_{n,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \lim_{r\to\infty} \begin{pmatrix} z'_{1,r} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z'_{n,r} \end{pmatrix},$$

isto é, o termo na linha i_0 e a coluna j_0 da matriz $D_1 B D_2$ é

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} w'_{i_0,r} b_{i_0j_0} z'_{j_0,r} &= b_{i_0j_0} \lim_{r\to\infty} w'_{i_0,r} z'_{j_0,r} \\ &= b_{i_0j_0} \lim_{r\to\infty} w_{i_0,r} z_{j_0,r} \\ &= b_{i_0j_0} \left(c_{i_0j_0} b_{i_0j_0}^{-1} \right) \\ &= c_{i_0j_0}, \end{aligned}$$

se $b_{i_0j_0} > 0$. Se $b_{ij} = 0$, então $(D_1 B D_2)_{ij} = 0$ e já mostramos que $c_{ij} = 0$. Então, $C = D_1 B D_2$.

Pelo fato de C e B serem duplamente estocásticas, segue da unicidade provada no Lema (2.3) que $B = C$. Então qualquer subsequência da sequência $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge, deve convergir para o mesmo limite (uma matriz duplamente estocástica). Então $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para uma matriz duplamente estocástica.

Reciprocamente, observe que o fato de A ter suporte é também condição necessária para que o processo de normalização convirja. Suponha que $\lim_{k\to\infty} A_k = B$, então B é duplamente estocástica pois para cada $r \in \mathbb{N}$, A_{2r-1} é coluna estocástica e A_{2r} é linha estocástica, além disso, $A_{2r-1} \to B$ e $A_{2r} \to B$. Portanto B tem suporte total, logo tem suporte, então existe uma permutação $\phi \in S_n$ tal que $\phi(B) \neq 0$, como

$$\lim_{k\to\infty} \phi(A_k) = \phi(B) > 0,$$

temos que $\phi(A) > 0$, pois se $\phi(A) = 0$, segue que $\phi(A_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, consequentemente $\phi(B) = 0$, absurdo. Isto implica que A tem suporte.

■

Observação 2.9. Vimos no teorema anterior que se A tem suporte então $A_m \to B$, onde $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é a sequência obtida do processo de normalização da matriz A e B é duplamente estocástica. Observe que se $b_{ij} > 0$ então $a_{ij} > 0$, pois $b_{ij} = \lim_{m\to\infty} x_{i,m} a_{ij} y_{j,m}$.

Agora se A tiver suporte total então o contrário também vale. De fato, se $a_{ij} > 0$ então existe $\psi \in S_n$ tal que $j = \psi(i)$ e $\psi(A) > 0$. Vimos na demonstração anterior que $\psi(A_m) \to \psi(A)L > 0$. Mas $\psi(A_m) \to \psi(B)$. Assim $\psi(B) > 0$, isso implica que $b_{i\psi(i)} = b_{ij} > 0$.

Conclusão: Se A tem suporte total então $a_{ij} > 0$ se e só se $b_{ij} > 0$.

Notemos que isso não precisa ocorrer se A só tiver suporte. No exemplo (2.6), vimos que $a_{21} = 1$, mas $A_k \to B = Id$. Portanto $b_{21} = 0$.

2.4 Resultado Principal: Teorema de Sinkhorn-Knopp

Na seção anterior vimos que a condição para que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, a sequência obtida no processo de normalização de $A \in M_n(\mathbb{R})$, convirja é A ter suporte. Mas não temos informação sobre o limite. Nessa seção apresentaremos o teorema de Sinkhorn-Knopp para matrizes, onde obtemos uma condição para ter como limite da convergência de $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma matriz D_1AD_2, com $D_1, D_2 \in M_n(\mathbb{R})$ são diagonais positivas.

Teorema 2.10 (Teorema de Sinkhorn-Knopp)**.** *Seja A como no Lema (2.3). Uma condição necessária e suficiente para existir uma matriz duplamente estocástica B da forma D_1AD_2, onde D_1 e D_2 são matrizes diagonais positivas é A ter suporte total. Além disso, se A tem suporte total então o limite da sequência $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ obtida no processo de normalização da matriz A é a matriz D_1AD_2 descrita acima.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que A tem suporte total. Então A tem suporte e pelo Teorema (2.8), a sequência $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ obtida do processo de normalização da matriz A converge para uma matriz duplamente estocástica $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Vamos mostrar que existem matrizes diagonais positivas $D_1, D_2 \in M_n(\mathbb{R})$ tais que $B = \lim_{k\to\infty} A_k = D_1AD_2$.

Sabemos que $A_k = D_{1,k}AD_{2,k}$, onde

$$D_{1,k} = \begin{pmatrix} \eta_{1,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \eta_{n,k} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D_{2,k} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{n,k} \end{pmatrix}.$$

Então $B = \lim_{k\to\infty} D_{1,k}AD_{2,k}$. Pela Observação (2.9) temos que $b_{ij} \neq 0$ se e só se $a_{ij} \neq 0$, pois A tem suporte total.

Portanto, se $a_{ij} > 0$ então $\eta_{i,k}\lambda_{j,k} \to b_{ij}a_{ij}^{-1}$ quando $k \to \infty$. Segue do Lema (2.2) que existem sequências convergentes $(\eta'_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(\lambda'_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$, para todos $1 \leq i, j \leq n$, tais que $\eta_{i,k}\lambda_{j,k} = \eta'_{i,k}\lambda'_{j,k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Definimos

$$D'_{1,k} = \begin{pmatrix} \eta'_{1,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \eta'_{n,k} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D'_{2,k} = \begin{pmatrix} \lambda'_{1,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda'_{n,k} \end{pmatrix}.$$

Notemos que $D_{1,k}AD_{2,k} = D'_{1,k}AD'_{2,k}$ pois,

$$(D_{1,k}AD_{2,k})_{ij} = \eta_{i,k}a_{ij}\lambda_{j,k} = a_{ij}\eta_{i,k}\lambda_{j,k} = a_{ij}\eta'_{i,k}\lambda'_{j,k} = \eta'_{i,k}a_{ij}\lambda'_{j,k} = (D'_{1,k}AD'_{2,k})_{ij}.$$

Seja $D_1 = \lim_{k\to\infty} D'_{1,k}$ e $D_2 = \lim_{k\to\infty} D'_{2,k}$, logo,

$$\begin{aligned} D_1AD_2 &= \lim_{k\to\infty} D'_{1,k}AD'_{2,k} \\ &= \lim_{k\to\infty} D_{1,k}AD_{2,k} \\ &= B. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se existem diagonais positivas D_1 e D_2 tais que D_1AD_2 é duplamente estocástica, segue do Corolário (1.15) que D_1AD_2 tem suporte total o que implica que A tem suporte total.

■

Corolário 2.11. *Se A tiver suporte, mas não tiver suporte total então o limite da sequência $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ obtida no processo de normalização da matriz A não pode ser a matriz D_1AD_2.*

Demonstração. Suponhamos que A tenha suporte mas não tenha suporte total. Pelo teorema (2.8) temos que a sequência $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ obtida do processo de normalização da matriz A, converge para uma matriz B duplamente estocástica. Suponhamos que

$$B = \lim_{k\in\to\infty} A_k = D_1AD_2,$$

pelo teorema (2.10) segue que A tem suporte total, absurdo. Portanto, $B \neq D_1AD_2$.

■

Exemplo 2.12. *Lembremos o Exemplo (2.6). Para a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

obtemos do processo de normalização a sequência $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dada por*

$$A_{2k-1} = \begin{pmatrix} \frac{2k-1}{2k} & 0 \\ & \\ \frac{1}{2k} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ \frac{1}{2k+1} & \frac{2k}{2k+1} \end{pmatrix}.$$

Como A *tem suporte pois a diagonal principal é positiva, segue do teorema (2.8) que a sequência* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para uma matriz duplamente estocástica. De fato, fazendo* $k \to \infty$ *observamos que* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para a matriz identidade.*

Além disso, A *não possui suporte total, logo, pelo teorema (2.10) não existem matrizes diagonais positivas* D_1 *e* D_2 *tais que* $D_1AD_2 = Id$.

Capítulo 3

Teorema de Sinkhorn-Knopp para Mapas positivos

No capítulo anterior desmonstramos o Teorema de Sinkhorn-Knopp para matrizes. Agora, vamos generalizar esse teorema para mapas positivos (Teorema (3.26)) como feito na referência [4].

Essa não foi a primeira adaptação do teorema de Sinkhorn-Knopp para mapas positivos, a primeira foi obtida em [8]. Entretanto a abordagem feita em [4] tem a vantagem de utilizar as ideias originais de Sinkhorn e Knopp discutidas no capítulo anterior.

Precisaremos dessa extensão no último capítulo para aplicá-la ao problema da separabilidade dos estados quânticos.

3.1 Preliminares

Primeiro vamos relembrar alguns conceitos e introduzir alguns outros com relação as matrizes Hermitianas e os mapas positivos. Para essa parte recomendamos a referência [1].

Denotamos por Id_k a matriz identidade em M_k (ou simplesmente Id no caso em que a ordem da matriz é evidente). Além disso, para cada $r \in \mathbb{N}$ a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_r \times M_r \to \mathbb{C}$ é o produto interno do traço, ou seja, $\langle X, Y \rangle = tr(XY^*)$ para todos $X, Y \in M_r$.

Definição 3.1. *Seja $A \in M_n$, dizemos que A é Hermitiana se $A = \overline{A}^t = A^*$.*

Observação 3.2. O Teorema Espectral diz que se $A \in M_n$ é Hermitiana então existe uma matriz unitária $R \in M_n$ (isto é, $R^* = R^{-1}$) e uma matriz diagonal $D \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A = RDR^*$. De fato os elementos da diagonal da matriz D são autovalores de A e os autovetores associados são as colunas de R. Note que estes formam uma base ortonormal de $\mathbb{C}^n$. Além disso, note que $A = RDR^* = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} r_i r_i^*$, onde r_i é a coluna i de R e d_{ii} é a i-ésima entrada da diagonal de D.

Definição 3.3. *Seja $A \in M_n$. Dizemos que A é uma matriz Hermitiana positiva definida (positiva semi-definida) se as seguintes condições equivalentes são satisfeitas:*

(1) *Para cada $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ temos que $w^*Aw > 0$ ($w^*Aw \geq 0$, respectivamente).*

(2) *A é Hermitiana e possui autovalores positivos (não negativos, respectivamente).*

Denotamos por P_n o conjunto das matrizes Hermitianas positivas semi-definidas em M_n.

Observação 3.4. Pela Observação (3.2) nós temos que as matrizes Hermitianas positivas definidas são diagonalizáveis. Além disso para cada matriz A Hermitiana positiva definida existem a raiz quadrada e a inversa de A, que denotamos por $A^{\frac{1}{2}}$ e A^{-1} respectivamente. Também, $A^{\frac{1}{2}}$ é Hermitiana positiva definida, logo existe sua inversa e é denotada por $A^{-\frac{1}{2}}$

Exemplo 3.5. *Dos itens (3) e (4) na Observação (1.25), segue que o produto de Kronecker de duas matrizes Hermitianas positivas definidas (resp. semi-definidas) dá uma matriz Hermitiana positiva definida (resp. semi-definida).*

Observação 3.6. Não é difícil ver que

(1) $A \in P_k$ se e só se $tr(AB) \geq 0$ para toda matriz $B \in P_k$.

(2) Se $A_1, A_2 \in P_k$ então $tr(A_1A_2) = 0$ se, e somente se $A_1A_2 = 0$.

Essas informações serão muito úteis adiante.

Definição 3.7. *Seja $T : M_k \to M_m$ uma transformação linear. Dizemos que T é um mapa positivo se $T(A) \in P_m$, para toda $A \in P_k$.*

Exemplo 3.8.

(1) *Seja $T : M_k \to M_m$ a transformação linear dada por $T(B) = tr(B)Id_m$. Seja $A \in P_k$, então todos os autovalores de A são não negativos, de onde $tr(A) \geq 0$. Daí, para toda $A \in P_k$ temos que $T(A) \in P_m$, isto é, T é um mapa positivo.*

(2) *Sejam $C \in M_k$ e $T : M_k \to M_k$ a transformação linear dada por $T(B) = CBC^*$. Seja $A \in P_k$. Note que*

$$w^*(T(A))w = w^*(CAC^*)w = (w^*C)A(C^*w) = (C^*w)^*A(C^*w) \geq 0,$$

para todo $w \in \mathbb{C}^k$. Portanto $T(A) \in P_k$, ou seja, T é um mapa positivo.

Observação 3.9. Uma propriedade importante dos mapas positivos que utilizamos neste capítulo é a seguinte: Se $T : M_k \to M_m$ é um mapa positivo tal que $T(Id_k)$ é Hermitiana positiva definida, então $T(A)$ é Hermitiana positiva definida sempre que $A \in M_k$ seja Hermitiana positiva definida. Veja sua demonstração em [5, Proposition 3.2].

Definição 3.10. *Seja $T : M_k \to M_m$ uma transformação linear, então definimos a adjunta de T como sendo a transformação linear $T^* : M_m \to M_k$ tal que $\langle T^*(B), A\rangle = \langle B, T(A)\rangle$, para todos $A \in M_k$ e $B \in M_m$.*

Observação 3.11. Observemos que se $T : M_k \to M_m$ é um mapa positivo então sua adjunta $T^* : M_m \to M_k$ é também um mapa positivo. De fato, para cada $A \in P_k$ temos que $T(A) \in P_m$. Logo, para cada $A \in P_k$ e cada $B \in P_m$ segue da definição do produto interno do traço e da Observação (3.6) que,

$$tr(T^*(B)A) = tr(T^*(B)A^*) = \langle T^*(B), A\rangle = \langle B, T(A)\rangle = tr(BT(A)^*).$$

Portanto $tr(T^*(B)A) = tr(BT(A)) \geq 0$. Pela Observação (3.6), $T^*(B) \in P_m$.

Exemplo 3.12.

(1) *Seja $T : M_k \to M_m$ como no item (1) Exemplo (3.8). Então, $T^* : M_m \to M_k$ está dada por $T^*(B) = tr(B)Id_k$. Em efeito, para cada $A \in M_k$ e $B \in M_m$ temos*

$$\langle B, T(A)\rangle = tr(BT(A)^*) = tr(B(tr(A^*)Id_m)) = tr(tr(B)Id_kA^*) = \langle tr(B)Id_k, A\rangle.$$

Assim

$$\langle T^*(B), A\rangle = \langle tr(B)Id_k, A\rangle, \text{ isto é, } \quad T^*(B) = tr(B)Id_k.$$

(2) *Seja $T : M_k \to M_k$ como no item (2) Exemplo (3.8). Então, $T^* : M_k \to M_k$ está dada por $T^*(B) = C^*BC$. Para cada $A \in M_k$ e $B \in M_k$ temos*

$$\langle B, T(A)\rangle = \langle B, CAC^*\rangle = tr(BCA^*C^*) = tr(C^*BCA^*) = \langle C^*BC, A\rangle.$$

Assim

$$\langle T^*(B), A\rangle = \langle C^*BC, A\rangle, \text{ isto é, } \quad T^*(B) = C^*BC.$$

O Lema (2.2) foi o lema chave para provar o teorema de Sinkhorn-Knopp para matrizes quadradas, mas na generalização desse teorema para mapas positivos precisamos de uma adaptação desse lema para matrizes retangulares. Ela está feita no seguinte lema.

Lema 3.13. *Sejam $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de vetores positivos de $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Seja $A = (a_{ij}) \in M_{k\times m}(\mathbb{C})$ uma matriz com suporte total. Se para cada $a_{ij} \neq 0$ as correspondentes entradas de $v_n w_n^t$ (i.e. $(v_n w_n^t)_{ij} = v_{i,n}w_{j,n}$) convergem a um limite positivo, então existem duas sequências de vetores positivos $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^k$ e $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^m$ convergindo a vetores positivos v e w, respectivamente, tal que $v_n w_n^t = v'_n(w'_n)^t$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (i.e. $v_{i,n}w_{j,n} = v'_{i,n}w'_{j,n}$, para todos $1 \leq i \leq k, 1 \leq i \leq k$ e $n \in \mathbb{N}$).*

Demonstração. Se $k = m$ o resultado segue do Lema (2.2). Suponhamos que $k \neq m$ então pela Definição (1.27) temos que a matriz quadrada $A \otimes \mathbf{1}_{m\times k}$ tem suporte total. Agora, por hipótese segue que para cada entrada não nula da matriz $A\otimes\mathbf{1}_{m\times k}$ a correspondente entrada na matriz $v_n w_n^t \otimes \mathbf{1}_{m\times k} = (v_n \otimes \mathbf{1}_{m\times 1})(w_n^t \otimes \mathbf{1}_{1\times k}) = (v_n \otimes \mathbf{1}_{m\times 1})(w_n \otimes \mathbf{1}_{k\times 1})^t$ converge a um número positivo.

Como $A \otimes \mathbf{1}_{m\times k} \in M_{km}$ tem suporte total e $v_n \otimes \mathbf{1}_{m\times 1}, w_n \otimes \mathbf{1}_{k\times 1} \in \mathbb{R}^{km}$ são vetores positivos (pois v_n e w_n são vetores positivos), então, segue da do Lema (2.2) que existem duas sequências $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores positivos de $\mathbb{R}^{km}$ convergindo para vetores positivos v e w respectivamente, tais que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$(v_n \otimes \mathbf{1}_{m\times 1})(w_n^t \otimes \mathbf{1}_{1\times k}) = v'_n (w'_n)^t, \tag{3.1}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos os vetores $v''_n \in \mathbb{R}^k$ dado pelas primeiras k componentes do vetor v'_n e $w''_n \in \mathbb{R}^m$ dado pelas primeiras m componentes do vetor w'_n. Então as sequências $(v''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(w''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores positivos convergem para os vetores positivos $v'' \in \mathbb{R}^k$ e $w'' \in \mathbb{R}^m$, onde v'' está dado pelas primeiras k entradas do vetor v e w'' está dado pelas primeiras m entradas do vetor w. Além disso, da equação (3.1) segue que $v_n w_n^t = v''_n (w''_n)^t$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

■

Precisamos ainda de um último Lema antes de seguir para a generalização do teorema de Sinkhorn-Knopp para mapas positivos.

Lema 3.14. *Sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_k$; $v = (v_i)_{i=1}^k, w = (w_i)_{i=1}^k \in \mathbb{C}^k$ e $r = (r_i)_{i=1}^m \in \mathbb{C}^m$. Então,*

(1) *$\sigma(A \odot B) = \sigma(A)\sigma(B)$, para todo $\sigma \in S_k$;*

(2) *para cada $\sigma \in S_k$ segue*

$$\sigma(vw^t) = \prod_{i=1}^k v_i w_i;$$

(3) *para cada $\sigma \in S_{km}$ segue*

$$\sigma(vr^t \otimes \mathbf{1}_{m\times k}) = \left(\prod_{i=1}^k v_i\right)^m \left(\prod_{i=1}^m r_i\right)^k.$$

Demonstração.

(1) Sejam $\sigma \in S_k$ e $C = (c_{ij}) \in M_k$ tal que $C = A \odot B$, então

$$\sigma(A \odot B) = \sigma(C) = \prod_{i=1}^k c_{i\sigma(i)} = \prod_{i=1}^k a_{i\sigma(i)} b_{i\sigma(i)} = \left(\prod_{i=1}^k a_{i\sigma(i)}\right)\left(\prod_{i=1}^k b_{i\sigma(i)}\right) = \sigma(A)\sigma(B)$$

(2) Observemos que $(vw^t)_{ij} = v_i w_j$, para todos $1 \leq i, j \leq k$. Assim, para cada $\sigma \in S_k$ temos

$$\sigma(vw^t) = \prod_{i=1}^{k} (vw^t)_{i\sigma(i)} = \prod_{i=1}^{k} v_i w_{\sigma(i)} = \left(\prod_{i=1}^{k} v_i\right)\left(\prod_{i=1}^{k} w_{\sigma(i)}\right).$$

Como $\sigma \in S_k$, segue $\prod_{i=1}^{k} w_{\sigma(i)} = \prod_{i=1}^{k} w_i$. Portanto,

$$\sigma(vw^t) = \left(\prod_{i=1}^{k} v_i\right)\left(\prod_{i=1}^{k} w_i\right) = \prod_{i=1}^{k} v_i w_i.$$

(3) Nos temos $vr^t \otimes \mathbf{1}_{m\times k} = (v \otimes \mathbf{1}_{m\times 1})(r^t \otimes \mathbf{1}_{1\times k}) = (v \otimes \mathbf{1}_{m\times 1})(r \otimes \mathbf{1}_{k\times 1})^t$. Logo, pelo item (2) temos que para cada $\sigma \in S_k$ segue

$$\sigma(vr^t \otimes \mathbf{1}_{m\times k}) = \sigma((v \otimes \mathbf{1}_{m\times 1})(r \otimes \mathbf{1}_{k\times 1})^t) = \left(\prod_{i=1}^{km} (v \otimes \mathbf{1}_{m\times 1})_i\right)\left(\prod_{i=1}^{km} (r \otimes \mathbf{1}_{k\times 1})_i\right),$$

mas $v \otimes \mathbf{1}_{m\times 1} = (v_1, ..., v_k, v_1, ..., v_k, ..., v_1, ..., v_k)^t$, onde cada v_i aparece m vezes para cada $1 \leq i \leq k$. Assim,

$$\prod_{i=1}^{km} (v \otimes \mathbf{1}_{m\times 1})_i = \left(\prod_{i=1}^{k} v_i\right)^m;$$

analogamente,

$$\prod_{i=1}^{km} (r \otimes \mathbf{1}_{k\times 1})_i = \left(\prod_{i=1}^{m} r_i\right)^k.$$

Portanto,

$$\sigma(vr^t \otimes \mathbf{1}_{m\times k}) = \left(\prod_{i=1}^{k} v_i\right)^m \left(\prod_{i=1}^{m} r_i\right)^k.$$

■

3.2 Processo de Normalização para Mapas Positivos

Nesta seção introduzimos os conceitos de mapa positivo duplamente estocástico e mapa positivo com suporte (suporte total). Além disso apresentamos o processo de normalização (3.20) para mapas positivos que vai substituir o processo de normalização para matrizes.

Definição 3.15. *Seja $T : M_k \to M_m$ um mapa positivo. Dizemos que T é duplamente estocástica se $T(Id_k/\sqrt{k}) = Id_m/\sqrt{m}$ e $T^*(Id_m/\sqrt{m}) = Id_k/\sqrt{k}$.*

Exemplo 3.16. *Sejam $R \in M_k$ uma matriz unitária e $T : M_k \to M_k$ dado por $T(A) = RAR^*$, para toda $A \in M_k$. Pelo Exemplo (3.8) temos que T é um mapa positivo. Além disso,*

$$T(Id) = R(Id)R^* = RR^* = Id.$$

e

$$T^*(Id) = R^*(Id)R = R^*R = Id.$$

Portanto, T é duplamente estocástico.

Agora vamos para a definição de mapa positivo com suporte e suporte total, com ela se torna clara a necessidade de generalizar as definições de suporte e suporte total para matrizes retangulares feitas no primeiro capítulo.

Definição 3.17. *Seja $T : M_k \to M_m$ um mapa positivo. Dizemos que T tem suporte (resp. suporte total) se para cada base ortonormal $\{v_1, ..., v_k\}$ de $\mathbb{C}^k$ e cada base ortonormal $\{w_1, ..., w_m\}$ de $\mathbb{C}^m$, a matriz $(tr(T(v_i v_i^*)w_j w_j^*))_{k\times m} \in M_{k\times m}(\mathbb{C})$ tem suporte (resp. suporte total).*

Exemplo 3.18. *Seja $T : M_k \to M_m$ como no item (1) do Exemplo (3.8) e sejam $\{v_1, ..., v_k\}$ e $\{w_1, ..., w_m\}$ bases ortonormais de $\mathbb{C}^k$ e $\mathbb{C}^m$ respectivamente. Para cada $1 \leq i \leq k$ e cada $1 \leq j \leq m$ temos*

$$tr(T(v_i v_i^*)w_j w_j^*) = tr(tr(v_i v_i^*)Id_m(w_j w_j^*)) = tr(v_i v_i^*)tr(w_j w_j^*) = (v_i^* v_i)(w_j^* w_j) = 1,$$

ou seja, $(tr(T(v_i v_i^*)w_j w_j^*))_{k\times m} = \mathbf{1}_{k\times m}$. Portanto, $(tr(T(v_i v_i^*)w_j w_j^*))_{k\times m}$ tem suporte total.

Exemplo 3.19. *Seja $T : M_k \to M_m$ um mapa positivo duplamente estocástico e sejam $\{v_1, ..., v_k\}$ e $\{w_1, ..., w_m\}$ bases ortonormais de $\mathbb{C}^k$ e $\mathbb{C}^m$ respectivamente. Consideremos a matriz $(tr(T(v_i v_i^*)w_j w_j^*))_{k\times m} \otimes \mathbf{1}_{m\times k} \in M_{km}$. Então, para cada $1 \leq i \leq k$ temos*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} k\left(tr\left(T(v_i v_i^*)w_j w_j^*\right)\right) &= k\sum_{j=1}^{m} tr\left(T(v_i v_i^*)w_j w_j^*\right) \\
&= k\sum_{j=1}^{m} tr\left(v_i v_i^* T^*(w_j w_j^*)\right) \\
&= k.tr\left(v_i v_i^* T^*\left(\sum_{j=1}^{m} w_j w_j^*\right)\right) \\
&= k.tr\left(v_i v_i^* T^*\left(Id_m\right)\right) \\
&= k.tr\left(v_i v_i^*\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k}} Id_k\right)\right) \\
&= \left(k\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k}}\right) tr\left(v_i v_i^*\right) = \sqrt{km}.
\end{aligned}$$

Também, para cada $1 \leq j \leq m$ temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} m\left(tr\left(T(v_iv_i^*)w_jw_j^*\right)\right) &= m\sum_{i=1}^{k} tr\left(T(v_iv_i^*)w_jw_j^*\right) \\
&= m.tr\left(T\left(\sum_{i=1}^{k} v_iv_i^*\right)w_jw_j^*\right) \\
&= m.tr\left(T(Id_k)w_jw_j^*\right) \\
&= m.tr\left(\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}Id_m\right)w_jw_j^*\right) \\
&= \left(m\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\right) tr\left(w_jw_j^*\right) = \sqrt{km}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a matriz

$$
\left(\left(\frac{1}{\sqrt{km}}\right) tr(T(v_iv_i^*)w_jw_j^*)\right)_{k\times m} \otimes \mathbf{1}_{m\times k} \in M_{km}
$$

é duplamente estocástica. Segue do Corolário (1.15) que ela possui suporte total. Daí, a matriz $(tr(T(v_iv_i^*)w_jw_j^*))_{k\times m} \otimes \mathbf{1}_{m\times k} \in M_{km}$ *possui suporte total, ou seja,* $T : M_k \to M_m$ *tem suporte total.*

Definição 3.20 (Processo de normalização para mapas positivos)**.** *Seja* $T : M_k \to M_m$ *um mapa positivo tal que* $T(Id_k)$ *e* $T^*(Id_m)$ *são matrizes Hermitianas positivas definidas. Definimos*

$$
\begin{aligned}
X_0 &= Id_k, \\
Y_0 &= \left(\frac{1}{\sqrt[4]{m}}\right) T\left(X_0\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_0^*\right)^{-\frac{1}{2}}, \\
A_0 &= X_0^*T^*\left(Y_0^*\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right)Y_0\right)X_0, \\
X_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt[4]{k}}\right)X_0(A_0)^{-\frac{1}{2}}, \\
B_0 &= Y_0T\left(X_1\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_1^*\right)Y_0^*.
\end{aligned}
$$

Assim, definimos as sequências $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_m$ *e* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_k$ *como segue, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *temos*

$$Y_n = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{m}}\right)(B_{n-1})^{-\frac{1}{2}}Y_{n-1},$$

$$A_n = X_n^* T^*\left(Y_n^*\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right)Y_n\right)X_n,$$

$$X_{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{k}}\right)X_n(A_n)^{-\frac{1}{2}},$$

$$B_n = Y_n T\left(X_{n+1}\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_{n+1}^*\right)Y_n^*.$$

Daí, obtemos a sequência de mapas positivos $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $T_n : M_k \to M_m$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde:

$$T_{2r}(X) = Y_r T(X_r X X_r^*)Y_r^* \quad e \quad T_{2r+1}(X) = Y_r T(X_{r+1} X X_{r+1}^*)Y_r^*,$$

para todo $r \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Observação 3.21. A sequência de matrizes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estão bem definidas porque as matrizes A_n, B_n são Hermitianas positivas definidas e as matrizes X_n, Y_n são invertíveis para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso pode ser observado a partir da Observação (3.9).

Exemplo 3.22. *Consideremos $T : M_2 \to M_2$ como no Exemplo (3.8), ou seja, $T(A) = tr(A)Id$, para toda $A \in M_2$. Além disso, pelo Exemplo (3.12) temos $T^*(A) = T(A)$, para toda $A \in M_2$. Assim, $T(Id) = tr(Id)Id = 2.Id$ é Hermitiana positiva definida. Agora,*

$$X_0 = Id,$$

$$Y_0 = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)T\left(X_0\left(\frac{Id}{\sqrt{2}}\right)X_0^*\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}Id = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)Id,$$

$$A_0 = X_0^* T^*\left(Y_0^*\left(\frac{Id}{\sqrt{2}}\right)Y_0\right)X_0 = T^*\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)Id\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)Id,$$

$$X_1 = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)X_0(A_0)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)Id\right)^{-\frac{1}{2}} = Id,$$

$$B_0 = Y_0 T\left(X_1\left(\frac{Id}{\sqrt{2}}\right)X_1^*\right)Y_0^* = \left(\frac{1}{2}\right)T\left(\frac{Id}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)Id.$$

Dai,

$$Y_1 = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)(B_0)^{-\frac{1}{2}}\, Y_0 = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) Id\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) Id = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) Id,$$

$$A_1 = X_1^* T^* \left(Y_1^* \left(\frac{Id}{\sqrt{2}}\right) Y_1\right) X_1 = T^* \left(\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) Id\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) Id,$$

$$X_2 = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) X_1 (A_1)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) Id\right)^{-\frac{1}{2}} = Id,$$

$$B_1 = Y_1 T \left(X_2 \left(\frac{Id}{\sqrt{2}}\right) X_2^*\right) Y_1^* = \left(\frac{1}{2}\right) T \left(\frac{Id}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) Id.$$

Portanto, o processo de normalização para o mapa positivo T gera sequências constantes $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((1/\sqrt{2})Id)_{n\in\mathbb{N}}$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((1/\sqrt{2})Id)_{n\in\mathbb{N}}$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = (Id)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((1/\sqrt{2})Id)_{n\in\mathbb{N}}$.

No processo de normalização de linhas e colunas para matrizes obtemos uma sequência de matrizes ora coluna estocástica ora linha estocástica. Portanto, se essa sequência de matrizes converge, terá como limite uma matriz duplamente estocástica.

No teorema de Sinkhorn-Knopp para mapas positivos não estaremos procurando por uma condição para que a sequência de mapas positivos $(T_n)_{n\mathbb{N}}$ do processo de normalização de $T : M_k \to M_m$ convirja para um mapa positivo duplamente estocástico, mas estaremos interessados nas condições sobre T para que os pontos limites da subsequência par da sequência de mapas positivos do processo de normalização (i.e., $(Y_n T\,(X_n\,(\cdot)\,X_n^*)\,Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$) sejam duplamente estocásticos. No próximo lema olhamos uma condição para que esses pontos limites sejam mapas positivos duplamente estocásticos.

Lema 3.23. *Seja $T : M_k \to M_m$ um mapa positivo tal que $T(Id_k)$ e $T^*(Id_m)$ são matrizes Hermitianas positivas definidas. Sejam $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_m$ e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_m$ as sequências definidas no Processo de normalização para T (3.20). Então,*

(1) *para cada $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$Y_n T \left(X_n \left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right) X_n^*\right) Y_n^* = \frac{Id_m}{\sqrt{m}} \qquad e \qquad X_{n+1}^* T^* \left(Y_n^* \left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right) Y_n\right) X_{n+1} = \frac{Id_k}{\sqrt{k}}$$

(2) *para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $tr(A_n) = \sqrt{k}$ e $tr(B_n) = \sqrt{m}$;*

(3) *para cada $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$0 < \det(X_n \otimes Y_n) \leq \det(X_{n+1} \otimes Y_{n+1});$$

(4) *se $(\det(X_n \otimes Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, então cada ponto limite da sequência $(Y_n T\,(X_n\,(\cdot)\,X_n^*)\,Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ é um mapa duplamente estocástico.*

Demonstração.

(1) Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
Y_nT\left(X_n\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_n^*\right)Y_n^* &= \left(\left(\frac{1}{\sqrt[4]{m}}\right)(B_{n-1})^{-\frac{1}{2}}Y_{n-1}\right)C\left(\left(\frac{1}{\sqrt[4]{m}}\right)(B_{n-1})^{-\frac{1}{2}}Y_{n-1}\right)^* \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt[4]{m}}\right)(B_{n-1})^{-\frac{1}{2}}Y_{n-1}C\left(\frac{1}{\sqrt[4]{m}}\right)Y_{n-1}^*\left((B_{n-1})^{-\frac{1}{2}}\right)^* \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)(B_{n-1})^{-\frac{1}{2}}Y_{n-1}CY_{n-1}^*\left((B_{n-1})^{-\frac{1}{2}}\right)^*,
\end{aligned}$$

onde $C = T\left(X_n\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_n^*\right)$. Logo,

$$Y_{n-1}CY_{n-1}^* = Y_{n-1}T\left(X_n\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_n^*\right)Y_{n-1}^* = B_{n-1}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
Y_nT\left(X_n\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_n^*\right)Y_n^* &= \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)(B_{n-1})^{-\frac{1}{2}}B_{n-1}\left((B_{n-1})^{-\frac{1}{2}}\right)^* \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)(B_{n-1})^{-\frac{1}{2}}B_{n-1}(B_{n-1})^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)Id_m.
\end{aligned}$$

Analogamente, como $X_{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{k}}\right)X_n(A_n)^{-\frac{1}{2}}$ e $(A_n)^{-\frac{1}{2}}$ é Hermitiana, temos

$$\begin{aligned}
X_{n+1}^*T^*\left(Y_n^*\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right)Y_n\right)X_{n+1} &= \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)(A_n)^{-\frac{1}{2}}X_n^*T^*\left(Y_n^*\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right)Y_n\right)X_n(A_n)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)(A_n)^{-\frac{1}{2}}X_n^*T^*\left(Y_n^*\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right)Y_n\right)X_n(A_n)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)(A_n)^{-\frac{1}{2}}A_n(A_n)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)Id_k.
\end{aligned}$$

(2) para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
tr(A_n) &= tr\left(X_n^*T^*\left(Y_n^*\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right)Y_n\right)X_n\right)\\
&= tr\left(X_n^*T^*\left(Y_n^*\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right)Y_n\right)X_nId_k\right)\\
&= \left\langle X_n^*T^*\left(Y_n^*\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right)Y_n\right)X_n, Id_k\right\rangle\\
&= \sqrt{k}\left\langle X_n^*T^*\left(Y_n^*\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right)Y_n\right)X_n, \frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Da Definição (3.10) e do Exemplo (3.12) segue

$$\begin{aligned}
\left\langle X_n^*T^*\left(Y_n^*\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right)Y_n\right)X_n, \frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right\rangle &= \left\langle T^*\left(Y_n^*\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right)Y_n\right), X_n\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_n^*\right\rangle\\
&= \left\langle Y_n^*\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right)Y_n, T\left(X_n\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_n^*\right)\right\rangle\\
&= \left\langle \frac{Id_m}{\sqrt{m}}, Y_nT\left(X_n\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_n^*\right)Y_n^*\right\rangle.
\end{aligned}$$

Então

$$tr(A_n) = \sqrt{k}\left\langle \frac{Id_m}{\sqrt{m}}, Y_nT\left(X_n\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_n^*\right)Y_n^*\right\rangle = \sqrt{k}\left\langle \frac{Id_m}{\sqrt{m}}, \frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right\rangle = \sqrt{k}.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
tr(B_n) &= tr\left(Y_nT\left(X_{n+1}\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_{n+1}^*\right)Y_n^*\right)\\
&= tr\left(Y_nT\left(X_{n+1}\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_{n+1}^*\right)Y_n^*Id_m\right)\\
&= \sqrt{m}\left\langle Y_nT\left(X_{n+1}\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_{n+1}^*\right)Y_n^*, \frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right\rangle\\
&= \sqrt{m}\left\langle \frac{Id_k}{\sqrt{k}}, X_{n+1}^*T^*\left(Y_n^*\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right)Y_n\right)X_{n+1}\right\rangle\\
&= \sqrt{m}\left\langle \frac{Id_k}{\sqrt{k}}, \frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right\rangle = \sqrt{m}.
\end{aligned}$$

(3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, segue da Observação (1.25)

$$
\begin{aligned}
\frac{\det(X_n \otimes Y_n)}{\det(X_{n+1} \otimes Y_{n+1})} &= \det\left((X_{n+1} \otimes Y_{n+1})^{-1}(X_n \otimes Y_n)\right) \\
&= \det\left((X_{n+1}^{-1} \otimes Y_{n+1}^{-1})(X_n \otimes Y_n)\right) \\
&= \det\left(X_{n+1}^{-1}X_n \otimes Y_{n+1}^{-1}Y_n\right).
\end{aligned}
$$

Agora, da Definição (3.20) temos $X_{n+1}^{-1}X_n = \sqrt[4]{k}A_n^{1/2}$ e $Y_nY_{n+1}^{-1} = \sqrt[4]{m}B_n^{1/2}$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{\det(X_n \otimes Y_n)}{\det(X_{n+1} \otimes Y_{n+1})} &= \det\left((\sqrt{k}A_n)^{\frac{1}{2}} \otimes (\sqrt{m}B_n)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \det\left((\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \det\left(\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Como A_n e B_n são matrizes Hermitianas positivas definidas segue que $\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n$ é Hermitiana positiva definida. Assim,

$$
\begin{aligned}
\det\left(\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n\right) &\leq \left(\frac{tr\left(\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n\right)}{km}\right)^{km} \\
&= \left(\frac{tr(\sqrt{k}A_n)tr(\sqrt{m}B_n)}{km}\right)^{km} \\
&= \left(\frac{\sqrt{k}tr(A_n)\sqrt{m}tr(B_n)}{km}\right)^{km} \\
&= \left(\frac{\sqrt{k}\sqrt{k}\sqrt{m}\sqrt{m}}{km}\right)^{km} = 1.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\det(X_n \otimes Y_n) \leq \det(X_{n+1} \otimes Y_{n+1})$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\det(X_1 \otimes Y_1) &= \det\left(\left(\frac{1}{\sqrt[4]{k}}\right)A_0^{-1/2} \otimes \left(\frac{1}{\sqrt[4]{m}}\right)B_0^{-1/2}Y_0\right) \\
&= \det\left(\left(\frac{1}{\sqrt[4]{k}}\right)A_0^{-1/2}\right)^m \det\left(\left(\frac{1}{\sqrt[4]{m}}\right)B_0^{-1/2}Y_0\right)^k \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt[4]{k}}\right)^{km} \det\left(A_0^{-1/2}\right)^m \left(\frac{1}{\sqrt[4]{m}}\right)^{mk} \det\left(B_0^{-1/2}Y_0\right)^k \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt[4]{k}}\right)^{km} \det\left(A_0^{-1/2}\right)^m \left(\frac{1}{\sqrt[4]{m}}\right)^{mk} \det\left(B_0^{-1/2}\right)^k \det\left(Y_0\right)^k > 0,
\end{aligned}
$$

pois $A_0^{-1/2}, B_0^{-1/2}$ e Y_0 são matrizes Hermitianas positivas definidas. Daí

$$0 < \det(X_1 \otimes Y_1) \leq \det(X_n \otimes Y_n) \leq \det(X_{n+1} \otimes Y_{n+1}),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(4) Pelo item (2) temos $tr(\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n) = tr(\sqrt{k}A_n)tr(\sqrt{m}B_n) = km$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n$ é uma matriz Hermitiana positiva definida para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, existe uma matriz unitária $U \in M_{km}$ e uma matriz diagonal positiva $D \in M_{km}$ tal que $\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n = UDU^*$. Logo, considerando a norma induzida pelo produto interno do traço temos,

$$\begin{aligned}
\| \sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n \|^2 &= \left\langle \sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n, \left(\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n\right)^* \right\rangle \\
&= tr\left(UDU^*UDU^*\right) \\
&= tr\left(D^2\right) \\
&\leq tr\left(D\right)^2 = tr\left(\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n\right)^2 = (km)^2.
\end{aligned}$$

Assim, a sequência $(\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, portanto (en virtude do teorema de Bolzano - Weierstrass) possui pontos limites. Seja C um ponto limite de $(\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então existe uma subsequência $(\sqrt{k}A_{n_j} \otimes \sqrt{m}B_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$C = \lim_{j\to\infty} \sqrt{k}A_{n_j} \otimes \sqrt{m}B_{n_j}.$$

Agora, para cada $E \in P_{km}$ temos

$$tr\left(CE\right) = tr\left(\lim_{j\to\infty} \sqrt{k}A_{n_j} \otimes \sqrt{m}B_{n_j}E\right) = \lim_{j\to\infty} tr\left(\sqrt{k}A_{n_j} \otimes \sqrt{m}B_{n_j}E\right) \geq 0,$$

segue da Observação (3.6) que C é uma matriz Hermitiana positiva semi-definida. Por hipótese $(\det(X_n \otimes Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada e pelo item (3) ela é monótona crescente positiva. Logo, existe $L > 0$ tal que $L = \lim_{n\to\infty} \det(X_n \otimes Y_n)$. Daí e da equação (3.2) temos

$$1 = \frac{L}{L} = \lim_{n\to\infty} \frac{\det(X_n \otimes Y_n)}{\det(X_{n+1} \otimes Y_{n+1})} = \lim_{n\to\infty} \det\left(\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Então, $\lim_{n\to\infty} \det\left(\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n\right) = 1$. Logo,

$$\det(C) = \lim_{j\to\infty} \det\left(\sqrt{k}A_{n_j} \otimes \sqrt{m}B_{n_j}\right) = 1$$

e

$$tr(C) = \lim_{j\to\infty} tr\left(\sqrt{k}A_{n_j} \otimes \sqrt{m}B_{n_j}\right) = \lim_{j\to\infty} km = km.$$

Do fato de C ser Hermitiana positiva semi-definida segue $C = U_1 D_1 U_1^*$, onde $U_1 \in M_{km}$ é unitária e $D_1 = diag(d_{1,1}, d_{1,2}, ..., d_{1,km})$ onde $d_{1,i} \geq 0$, para todo $1 \leq i \leq km$. Assim

$$km = tr(C) = tr(U_1 D_1 U_1^*) = tr(D_1) = d_{1,1} + \cdots + d_{1,km}$$

e

$$1 = \det(C) = \det(U_1 D_1 U_1^*) = \det(D_1) = d_{1,1} \cdots d_{1,km}.$$

Então

$$\frac{d_{1,1} + \cdots + d_{1,km}}{km} = \sqrt{d_{1,1} \cdots d_{1,km}}.$$

Assim, $d_{1,1} = d_{1,2} = \cdots = d_{1,km}$, ou seja, $d_{1,1} = d_{1,2} = \cdots = d_{1,km} = 1$. Portanto $D_1 = Id_{km}$, logo $C = Id_{km} = Id_k \otimes Id_m$. Isto é, $Id_k \otimes Id_m$ é o único ponto limite da sequência $(\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n = Id_k \otimes Id_m.$$

Consideremos o traço parcial a direita L_f^+ definido no Exemplo (1.26). Como L_f^+ é contínua e do item (2) $tr(B_n) = \sqrt{m}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{k}\lim_{n\to\infty} A_n\right) m &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{k}A_n tr\left(\sqrt{m}B_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} L_f^+\left(\sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n\right) \\
&= L_f^+\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt{k}A_n \otimes \sqrt{m}B_n\right) \\
&= L_f^+\left(Id_k \otimes Id_m\right) \\
&= Id_k tr(Id_m) = mId_k.
\end{aligned}$$

Assim, $\lim_{n\to\infty} A_n = Id_k/\sqrt{k}$.

Agora, consideremos a norma $\|\cdot\|_2$ dada por $\|A\|_2 = \sqrt{\max\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}}$, para toda $A \in M_k$, onde $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ é o conjunto de autovalores da matriz A^*A. A norma $\|\cdot\|_2$ é chamada de norma espectral. Por [1, Corollary 2.3.8] sabemos que o operador norma de um mapa positivo induzido pela norma espectral é atingido na identidade. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\left\| Y_nT\left(X_n(\cdot)X_n^*\right)Y_n^*\right\| = \left\| Y_nT\left(X_n(Id_k)X_n^*\right)Y_n^*\right\|_2 = \left\| \sqrt{k}Y_nT\left(X_n\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_n^*\right)Y_n^*\right\|_2$$

e pelo item (1) obtemos

$$\left\| Y_nT\left(X_n(\cdot)X_n^*\right)Y_n^*\right\| = \left\| \sqrt{k}\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right)\right\|_2 = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\left\| Id_m\right\|_2 = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}.$$

Assim, a sequência de mapas positivos $(Y_nT\left(X_n\left(\cdot\right)X_n^*\right)Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, ou seja, tem pontos limites. Seja $S : M_k \to M_m$ um ponto limite de $(Y_nT\left(X_n\left(\cdot\right)X_n^*\right)Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$, então existe uma subsequência $(Y_{n_j}T(X_{n_j}(\cdot)X_{n_j}^*)Y_{n_j}^*)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$S = \lim_{j\to\infty} Y_{n_j}T\left(X_{n_j}\left(\cdot\right)X_{n_j}^*\right)Y_{n_j}^*.$$

Portanto, seque do item (1)

$$S\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right) = \lim_{j\to\infty} Y_{n_j}T\left(X_{n_j}\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right)X_{n_j}^*\right)Y_{n_j}^* = \lim_{j\to\infty}\frac{Id_m}{\sqrt{m}} = \frac{Id_m}{\sqrt{m}}$$

e da Definição (3.20)

$$S^*\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right) = \lim_{j\to\infty} X_{n_j}^*T^*\left(Y_{n_j}^*\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right)Y_{n_j}\right)X_{n_j} = \lim_{j\to\infty} A_{n_j} = \frac{Id_k}{\sqrt{k}}.$$

Além disso, notemos que pela Observação (3.6) temos que $S(A) \in P_m$ para todo $A \in P_k$, pois para toda $B \in P_m$

$$\begin{aligned} tr\left(S(A)B\right) &= tr\left(\lim_{j\to\infty} Y_{n_j}T\left(X_{n_j}\left(A\right)X_{n_j}^*\right)Y_{n_j}^*B\right)\\ &= \lim_{j\to\infty} tr\left(Y_{n_j}T\left(X_{n_j}\left(A\right)X_{n_j}^*\right)Y_{n_j}^*B\right) \geq 0, \end{aligned}$$

ou seja, S é um mapa positivo. Concluímos que S é duplamente estocástico.

■

3.3 Teorema de Sinkhorn-Knopp para Mapas Positivos

Nesta seção apresentamos o teorema de Sinkhorn-Knopp para mapas positivos. Como já falamos na seção anterior, estamos interessados nas condições que deve possuir $T : M_k \to M_m$ a fim de que cada ponto limite da sequência $(T_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ do processo de normalização de T seja um mapa positivo duplamente estocástico. Para começar precisamos do seguinte lema.

Lema 3.24. *Seja $T : M_k \to M_m$ um mapa positivo tal que $T(Id_k)$ e $T^*(Id_m)$ são matrizes Hermitianas positivas definidas. Seja $T_1 : M_k \to M_m$ um ponto limite da sequência de mapas positivos $(Y_n T(X_n(\cdot)X_n^*)Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $X_n \in M_k$ e $Y_n \in M_m$ são as matrizes definidas no Processo de Normalização (3.20). Então,*

(1) *Se T tem suporte então T_1 é duplamente estocástico.*

(2) *Se T tem suporte total então existem matrizes invertíveis $X' \in M_k$ e $Y' \in M_m$ tais que $T_1(X) = Y'T(X'XX'^*)Y'^*$ para todo $X \in M_k$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos as descomposições SVD de X_n e Y_n, ou seja, $X_n = L_n D_n Q_n^*$ e $Y_n = S_n \widetilde{D}_n R_n^*$, onde $L_n, Q_n \in M_k$ e $S_n, R_n \in M_m$ são matrizes unitárias e $D_n = diag(x_{1,n}, ..., x_{k,n})$, $\widetilde{D}_n = diag(y_{1,n}, ..., y_{m,n})$ são matrizes diagonais positivas.

Já que o conjunto de matrizes unitárias é compacto, então podemos encontrar subsequências $(L_{n_t})_{t\in\mathbb{N}}, (Q_{n_t})_{t\in\mathbb{N}}, (S_{n_t})_{t\in\mathbb{N}}, (R_{n_t})_{t\in\mathbb{N}}$ de $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Q_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}, (R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para matrizes unitárias L, Q, S, R respectivamente, tais que

$$\lim_{t\to\infty} Y_{n_t} T\left(X_{n_t} X X_{n_t}^*\right) Y_{n_t}^* = T_1(X).$$

Sejam $l_{i,t}, q_{i,t}, s_{i,t}, r_{i,t}, l_i, q_i, s_i, r_i$ as i-ésimas colunas de $L_{n_t}, Q_{n_t}, S_{n_t}, R_{n_t}, L, Q, S, R$ respectivamente. Para cada $t \in \mathbb{N}$ consideremos as seguintes matrizes em M_{km} com entradas não negativas

$$\begin{aligned}
A_t &= \left(x_{i,n_t}^2 y_{j,n_t}^2\right)_{k\times m} \otimes \mathbf{1}_{m\times k} \\
B_t &= \left(tr\left(T\left(l_{i,t} l_{i,t}^*\right) r_{j,t} r_{j,t}^*\right)\right)_{k\times m} \otimes \mathbf{1}_{m\times k} \\
C_t &= A_t \odot B_t = \left(x_{i,n_t}^2 y_{j,n_t}^2 tr\left(T\left(l_{i,t} l_{i,t}^*\right) r_{j,t} r_{j,t}^*\right)\right)_{k\times m} \otimes \mathbf{1}_{m\times k}
\end{aligned}$$

Então, para cada $1 \le i \le k$ e cada $1 \le j \le m$ temos

$$\begin{aligned}
x_{i,n_t}^2 y_{j,n_t}^2 tr\left(T\left(l_{i,t} l_{i,t}^*\right) r_{j,t} r_{j,t}^*\right) &= tr\left(x_{i,n_t}^2 y_{j,n_t}^2 T\left(l_{i,t} l_{i,t}^*\right) r_{j,t} r_{j,t}^*\right) \\
&= tr\left(y_{j,n_t}^2 T\left((x_{i,n_t} l_{i,t})(x_{i,n_t} l_{i,t})^*\right) r_{j,t} r_{j,t}^*\right) \\
&= tr\left(y_{j,n_t}^2 T\left(X_{n_t} q_{i,t} q_{i,t}^* X_{n_t}\right) r_{j,t} r_{j,t}^*\right), \\
&= tr\left(T\left(X_{n_t} q_{i,t} q_{i,t}^* X_{n_t}\right) (y_{j,n_t} r_{j,t})(y_{j,n_t} r_{j,t})^*\right) \\
&= tr\left(T\left(X_{n_t} q_{i,t} q_{i,t}^* X_{n_t}\right) Y_{n_t}^* s_{j,t} s_{j,t}^* Y_{n_t}\right) \\
&= tr\left(Y_{n_t} T\left(X_{n_t} q_{i,t} q_{i,t}^* X_{n_t}\right) Y_{n_t}^* s_{j,t} s_{j,t}^*\right). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Assim

$$C_t = \left(tr\left(Y_{n_t} T\left(X_{n_t} q_{i,t} q_{i,t}^* X_{n_t}\right) Y_{n_t}^* s_{j,t} s_{j,t}^*\right)\right)_{k\times m} \otimes \mathbf{1}_{m\times k} \qquad (3.4)$$

Definimos agora $C \in M_{km}$ e $B \in M_{km}$ como

$$C := \lim_{t\to\infty} C_t = \lim_{t\to\infty} \left(tr\left(Y_{n_t} T\left(X_{n_t} q_{i,t} q_{i,t}^* X_{n_t}\right) Y_{n_t}^* s_{j,t} s_{j,t}^*\right)\right)_{k\times m} \otimes \mathbf{1}_{m\times k}$$
$$= \left(tr\left(T_1\left(q_i q_i^*\right) s_j s_j^*\right)\right)_{k\times m} \otimes \mathbf{1}_{m\times k}$$

$$B := \lim_{t\to\infty} B_t = \lim_{t\to\infty} \left(tr\left(T\left(l_{i,t} l_{i,t}^*\right) r_{j,t} r_{j,t}^*\right)\right)_{k\times m} \otimes \mathbf{1}_{m\times k}$$
$$= \left(tr\left(T\left(l_i l_i^*\right) r_j r_j^*\right)\right)_{k\times m} \otimes \mathbf{1}_{m\times k}.$$

Como $L_{n_t} \in M_k$ e $R_{n_t} \in M_m$ são matrizes unitárias para todo $t \in \mathbb{N}$ temos que $L \in M_k$ e $R \in M_m$ são matrizes unitárias. Logo $\{l_1, ..., l_k\} \subset \mathbb{C}^k$ é uma base ortonormal de $\mathbb{C}^k$ e $\{r_1, ..., r_m\} \subset \mathbb{C}^m$ é uma base ortonormal de $\mathbb{C}^m$. Portanto, se $T : M_k \to M_m$ tem suporte (resp. suporte total), segue da Definição (3.17) que B tem suporte (resp. suporte total).

Vamos provar agora cada item desse lema separadamente.

(1) Pelo item (1) do Lema (3.23) temos

$$Y_{n_t} T\left(X_{n_t} X_{n_t}^*\right) Y_{n_t}^* = \sqrt{k} Y_{n_t} T\left(X_{n_t}\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right) X_{n_t}^*\right) Y_{n_t}^* = \sqrt{k}\frac{Id_m}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} Id_m,$$

para cada $t \in \mathbb{N}$. Como $Q_{n_t} \in M_k$ e $S_{n_t} \in M_m$ são matrizes unitárias para todo $t \in \mathbb{N}$ temos $\{q_{1,t}, ..., q_{k,t}\} \subset \mathbb{C}^k$ é uma base ortonormal de $\mathbb{C}^k$ e $\{s_{1,t}, ..., s_{m,t}\} \subset \mathbb{C}^m$ é uma base ortonormal de $\mathbb{C}^m$, para cada $t \in \mathbb{N}$. Portanto, para cada $1 \leq j \leq m$ e cada $t \in \mathbb{N}$ segue

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} = tr\left(\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} Id_m\right) s_{j,t} s_{j,t}^*\right)$$
$$= tr\left(Y_{n_t} T\left(X_{n_t} X_{n_t}^*\right) Y_{n_t}^* s_{j,t} s_{j,t}^*\right)$$
$$= tr\left(Y_{n_t} T\left(X_{n_t} Id_k X_{n_t}^*\right) Y_{n_t}^* s_{j,t} s_{j,t}^*\right)$$
$$= tr\left(Y_{n_t} T\left(X_{n_t}\left(\sum_{i=1}^{k} q_{i,t} q_{i,t}^*\right) X_{n_t}^*\right) Y_{n_t}^* s_{j,t} s_{j,t}^*\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} tr\left(Y_{n_t} T\left(X_{n_t} q_{i,t} q_{i,t}^* X_{n_t}^*\right) Y_{n_t}^* s_{j,t} s_{j,t}^*\right).$$

Pela equação (3.4), para todo $t \in \mathbb{N}$, temos que cada entrada de C_t é menor ou igual que $\sqrt{k}/\sqrt{m}$. Daí, pelo item (1) do Lema (3.14), para cada permutação $\sigma \in S_{km}$ segue

$$\sigma(A_t)\sigma(B_t) = \sigma(A_t \odot B_t) = \sigma(C_t) \leq \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\right)^{km}. \tag{3.5}$$

Por hipótese T tem suporte, então a matriz B tem suporte. Logo existe $\psi \in S_{km}$ tal que $\psi(B) > 0$. Como $(B_t)_{t\in\mathbb{N}}$ converge para B, $(\psi(B_t))_{t\in\mathbb{N}}$ converge para $\psi(B)$. Portanto existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\psi(B_t) > \psi(B)/2$, pata todo $t > t_0$. Logo, de (3.5) temos

$$\psi(A_t) \leq \psi(B_t)^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\right)^{km} < 2\psi(B)^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\right)^{km},$$

para todo $t > t_0$. Agora, pelo item (3) do Lema (3.14) temos que para cada $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\psi(A_t) &= \left(\prod_{i=1}^{k} x_{i,t}^2\right)^m \left(\prod_{j=1}^{m} y_{j,t}^2\right)^k \\ &= \det(X_{n_t}X_{n_t}^*)^m \det(Y_{n_t}Y_{n_t}^*)^k \\ &= \det(X_{n_t}X_{n_t}^* \otimes Y_{n_t}Y_{n_t}^*). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Assim para cada $t > t_0$ segue que

$$\begin{aligned} 2\psi(B)^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\right)^{km} &> \psi(A_t) \\ &= \det(X_{n_t}X_{n_t}^* \otimes Y_{n_t}Y_{n_t}^*) \\ &= \det\big((X_{n_t} \otimes Y_{n_t})(X_{n_t}^* \otimes Y_{n_t}^*)\big) \\ &= \det(X_{n_t} \otimes Y_{n_t})\,\overline{\det(X_{n_t} \otimes Y_{n_t})}. \end{aligned}$$

Como $\det(X_{n_t} \otimes Y_{n_t}) > 0$ para todo $t \in \mathbb{N}$, pelo item (3) do Lema (3.23), então

$$2\psi(B)^{-1}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\right)^{km} > \det(X_{n_t} \otimes Y_{n_t})^2,$$

para todo $t > t_0$.

Com isto provamos que a subsequência $(\det(X_{n_t}\otimes Y_{n_t}))_{t\in\mathbb{N}}$ de $(\det(X_n\otimes Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Pelo item (3) do Lema (3.23) temos que a sequência $(\det(X_n \otimes Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, então ela é limita pois contém uma subsequência limitada. Portanto do item (4) do Lema (3.23) concluímos que T_1 é duplamente estocástico.

(2) Suponhamos que T tenha suporte total, então em particular T tem suporte. Logo, do item (1) que acabamos de provar, a sequência $(\det(X_n\otimes Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e limita. Seja $L > 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \det(X_n \otimes Y_n) = L.$$

Segue de (3.6) que para cada $\sigma \in S_{km}$ temos

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(A_t) = \lim_{t\to\infty} \det(X_{n_t} \otimes Y_{n_t})^2 = L^2.$$

Seja $tr(T(l_{i_0}l_{i_0}^*)r_{j_0}r_{j_0}^*)$ uma entrada não nula da matriz B. Por hipótese desse item, T tem suporte total, então B tem suporte total. Logo, existe $\phi \in S_{km}$ tal que $\phi(B) > 0$ e $\phi(i_0) = j_0$. Note que $tr(T_1(q_{i_0}q_{i_0}^*)s_{j_0}s_{j_0}^*)$ é um fator do produto que forma $\phi(C)$.

Como

$$0 \neq L^2\phi(B) = \lim_{t\to\infty} \phi(A_t)\phi(B_t) = \lim_{t\to\infty} \phi(C_t) = \phi(C)$$

e $tr(T_1(q_{i_0}q_{i_0}^*)s_{j_0}s_{j_0}^*)$ é um fator de $\phi(C)$, então $tr(T_1(q_{i_0}q_{i_0}^*)s_{j_0}s_{j_0}^*) \neq 0$. Portanto, de (3.3) segue

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} x_{i_0,t}y_{j_0,t} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\left[tr\left(Y_{n_t}T\left(X_{n_t}q_{i_0,t}q_{i_0,t}^*X_{n_t}\right)Y_{n_t}^*s_{j_0,t}s_{j_0,t}^*\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[tr\left(T\left(l_{i_0,t}l_{i_0,t}^*\right)r_{j_0,t}r_{j_0,t}^*\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\left[tr\left(T_1\left(q_{i_0}q_{i_0}^*\right)s_{j_0}s_{j_0}^*\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[tr\left(T\left(l_{i_0}l_{i_0}^*\right)r_{j_0}r_{j_0}^*\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \neq 0.
\end{aligned}$$

Então $((x_{i,t}y_{j,t})_{k\times m})_{t\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de matrizes com entradas positivas tal que a sequência $(x_{i_0,t}y_{j_0,t})_{t\in\mathbb{N}}$ converge para um limite positivo sempre que a correspondente entrada da matriz $(tr(T(l_il_i^*)r_jr_j^*))_{k\times m}$ seja não nula, ou seja, $tr(T(l_{i_0}l_{i_0}^*)r_{j_0}r_{j_0}^* \neq 0$.

Agora, $(tr(T(l_il_i^*)r_jr_j^*))_{k\times m}$ tem suporte total pois B tem suporte total. Então segue do Lema (3.13) que para todos $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq m$, existem sequências de números positivos $(x_{i,t}^{'})_{t\in\mathbb{N}}$, $(y_{j,t}^{'})_{t\in\mathbb{N}}$ convergindo a limites positivos $x_i^{'}$ e $y_j^{'}$, respectivamente, tais que $x_{i,t}^{'}y_{j,t}^{'} = x_{i,t}y_{j,t}$, para cada $t \in \mathbb{N}$.

Para cada $t \in \mathbb{N}$ definimos

$$X_t^{'} = L_{n_t}(diag(x_{1,t}^{'}, ..., x_{k,t}^{'}))Q_{n_t}^* \quad \text{e} \quad Y_t^{'} = S_{n_t}(diag(y_{1,t}^{'}, ..., y_{m,t}^{'}))R_{n_t}^*.$$

Logo

$$\lim_{t\to\infty} X_t^{'} = \lim_{t\to\infty} L_{n_t}(diag(x_{1,t}^{'}, ..., x_{k,t}^{'}))Q_{n_t}^* = L(diag(x_1^{'}, ..., x_k^{'}))Q^*$$

e

$$\lim_{t\to\infty} Y_t^{'} = \lim_{t\to\infty} S_{n_t}(diag(y_{1,t}^{'}, ..., y_{m,t}^{'}))R_{n_t}^* = S(diag(y_1^{'}, ..., y_m^{'}))R^*.$$

Sejam $X^{'} = L(diag(x_1^{'}, ..., x_k^{'}))Q^*$ e $Y^{'} = S(diag(y_1^{'}, ..., y_m^{'}))R^*$. Já que L, Q^*, S, R^* e $diag(x_1^{'}, ..., x_k^{'}), diag(y_1^{'}, ..., y_m^{'})$ são matrizes invertíveis então $X^{'}$ e $Y^{'}$ são matrizes invertíveis. Além disso, para todos $i, \alpha \in \{1, .., k\}$ e $j, \beta \in \{1, .., m\}$ temos

$$
\begin{aligned}
tr\left(Y_{n_t}T\left(X_{n_t}q_{i,t}q_{\alpha,t}^*X_{n_t}^*\right)Y_{n_t}^*s_{j,t}s_{\beta,t}^*\right) &= tr\left(Y_{n_t}T\left((x_{i,t}l_{i,t})(x_{\alpha,t}l_{\alpha,t})^*\right)Y_{n_t}^*s_{j,t}s_{\beta,t}^*\right)\\
&= x_{i,t}x_{\alpha,t}tr\left(T\left(l_{i,t}l_{\alpha,t}^*\right)Y_{n_t}^*s_{j,t}s_{\beta,t}^*Y_{n_t}\right)\\
&= x_{i,t}x_{\alpha,t}tr\left(T\left(l_{i,t}l_{\alpha,t}^*\right)(y_{j,t}r_{j,t})(y_{\beta,t}r_{\beta,t})^*\right)\\
&= x_{i,t}y_{j,t}x_{\alpha,t}y_{\beta,t}tr\left(T\left(l_{i,t}l_{\alpha,t}^*\right)r_{j,t}r_{\beta,t}^*\right).
\end{aligned}
$$

Como $x_{i,t}y_{j,t} = x_{i,t}^{'}y_{j,t}^{'}$ e $x_{\alpha,t}y_{\beta,t} = x_{\alpha,t}^{'}y_{\beta,t}^{'}$ então

$$
\begin{aligned}
tr\left(Y_{n_t}T\left(X_{n_t}q_{i,t}q_{\alpha,t}^*X_{n_t}^*\right)Y_{n_t}^*s_{j,t}s_{\beta,t}^*\right) &= x_{i,t}^{'}y_{j,t}^{'}x_{\alpha,t}^{'}y_{\beta,t}^{'}tr\left(T\left(l_{i,t}l_{\alpha,t}^*\right)r_{j,t}r_{\beta,t}^*\right)\\
&= tr\left(T\left((x_{i,t}^{'}l_{i,t})(x_{\alpha,t}^{'}l_{\alpha,t})^*\right)(y_{j,t}^{'}r_{j,t})(y_{\beta,t}^{'}r_{\beta,t})^*\right)\\
&= tr\left(T\left(X_t^{'}q_{i,t}q_{\alpha,t}^*(X_t^{'})^*\right)(Y_t^{'})^*s_{j,t}s_{\beta,t}^*Y_t^{'}\right)\\
&= tr\left(Y_t^{'}T\left(X_t^{'}q_{i,t}q_{\alpha,t}^*(X_t^{'})^*\right)(Y_t^{'})^*s_{j,t}s_{\beta,t}^*\right).
\end{aligned}
$$

Portanto para todos $i,\alpha \in \{1,..,k\}$ e $j,\beta \in \{1,..,m\}$ segue

$$
\left\langle Y_{n_t}T\left(X_{n_t}q_{i,t}q_{\alpha,t}^*X_{n_t}^*\right)Y_{n_t}^*\ ,\ s_{\beta,t}s_{j,t}^*\right\rangle = \left\langle Y_t^{'}T\left(X_t^{'}q_{i,t}q_{\alpha,t}^*(X_t^{'})^*\right(Y_t^{'})^*\ ,\ s_{\beta,t}s_{j,t}^*\right\rangle.
$$

Daí, $Y_{n_t}T\left(X_{n_t}XX_{n_t}^*\right)Y_{n_t}^* = Y_t^{'}T\left(X_t^{'}X(X_t^{'})^*\right)(Y_t^{'})^*$, para todo $X \in M_k$. Assim

$$
\begin{aligned}
T_1(X) &= \lim_{t\to\infty} Y_{n_t}T\left(X_{n_t}XX_{n_t}^*\right)Y_{n_t}^*\\
&= \lim_{t\to\infty} Y_t^{'}T\left(X_t^{'}X(X_t^{'})^*\right)(Y_t^{'})^*\\
&= Y^{'}T\left(X^{'}XX^{'^*}\right)Y^{'^*},
\end{aligned}
$$

para todo $X \in M_k$.

■

Definição 3.25. *Sejam $T : M_k \to M_m$ e $T_1 : M_k \to M_m$ mapas positivos. Dizemos que T é equivalente a T_1 se existirem matrizes invertíveis $X^{'} \in M_k$ e $Y^{'} \in M_m$ tais que $T_1(X) = Y^{'}T(X^{'}XX^{'^*})Y^{'^*}$, para toda $X \in M_k$.*

No item (2) do Lema (3.24) vimos que se $T : M_k \to M_m$ tiver suporte total, então ele é equivalente a um mapa positivo duplamente estocástico. A seguir apresentamos a generalização desse resultado que é o teorema principal deste capítulo.

Teorema 3.26 (Teorema de Sinkhorn-Knopp para mapas positivos)**.** *Seja $T : M_k \to M_m$ um mapa positivo. Então T é equivalente a um mapa positivo duplamente estocástico se, e somente se existirem matrizes invertíveis $X' \in M_k$ e $Y' \in M_m$ tais que $Y'T(X'(\cdot)X'^*)Y'^*$ tem suporte total e $T(Id_k), T(Id_m)$ são matrizes Hermitianas positivas definidas.*

Demonstração. Suponhamos que T é equivalente a um mapa duplamente estocástico $T_1 : M_k \to M_m$, então existem matrizes invertíveis $X' \in M_k$ e $Y' \in M_m$ tais que $T_1 = Y'T(X'(\cdot)X'^*)Y'^*$. Como T_1 é duplamente estocástico, segue do Exemplo (3.19) que T_1 tem suporte total. Agora, notemos que

$$
\begin{aligned}
T(Id_k) &= Y'^{-1}T_1\left(X'^{-1}\left(X'^*\right)^{-1}\right)\left(Y'^*\right)^{-1} \\
&= Y'^{-1}T_1\left(X'^{-1}\left(X'^{-1}\right)^*\right)\left(Y'^{-1}\right)^*
\end{aligned}
$$

e pela Definição (3.10) e o Exemplo (3.12) temos

$$
\begin{aligned}
T^*(Id_m) &= \left(X'^*\right)^{-1}T_1^*\left(\left(Y'^*\right)^{-1}Y'^{-1}\right)X'^{-1} \\
&= \left(X'^{-1}\right)^*T_1^*\left(\left(Y'^{-1}\right)^*Y'^{-1}\right)X'^{-1}.
\end{aligned}
$$

Como $X'^{-1}\left(X'^{-1}\right)^*$ e $\left(Y'^{-1}\right)^*Y'^{-1}$ são Hermitianas positivas definidas então da Observação (3.9) temos

$$
T_1\left(X'^{-1}\left(X'^{-1}\right)^*\right) \quad \text{e} \quad T_1^*\left(\left(Y'^{-1}\right)^*Y'^{-1}\right)
$$

são Hermitianas positivas definidas. Portanto, $T(Id_k)$ e $T^*(Id_m)$ são Hermitianas positivas definidas. Reciprocamente, suponhamos que existem $X' \in M_k$ e $Y' \in M_m$ invertíveis tais que

$$
T_1 = Y'T(X'(\cdot)X'^*)Y'^* : M_k \to M_m
$$

tem suporte total e $T(Id_k)$, $T^*(Id_m)$ são matrizes Hermitianas positivas definidas. Então, $Y'T(X'X'^*)Y'^*$ e $X'^*T(Y'^*Y')X'$ são matrizes Hermitianas positivas definidas. Logo, T_1 é um mapa positivo com suporte total tal que $T_1(Id_k)$ e $T_1^*(Id_m)$ são Hermitianas positivas definidas. Segue do item (2) do Lema (3.24) que existem $X'' \in M_k$ e $Y'' \in M_m$ invertíveis tais que

$$
\begin{aligned}
Y''T_1\left(X''(\cdot)X''^*\right)Y''^* &= Y''Y'T\left(X'X''(\cdot)X''^*X'^*\right)Y'^*Y''^* \\
&= Y''Y'T\left(X'X''(\cdot)\left(X'X''\right)^*\right)\left(Y''Y'\right)^*
\end{aligned}
$$

é um mapa positivo duplamente estocástico. Como $X'X'' \in M_k$ e $Y''Y' \in M_m$ são matrizes invertíveis, então T é equivalente a um mapa duplamente estocástico.

■

Capítulo 4

Problema da Separabilidade dos Estados Quânticos

Como observamos em (1.25), podemos identificar o espaço $M_k \otimes M_m$ com o espaço M_{km} utilizando o produto de Kronecker. Essa identificação nos permite chamar de estados quânticos (ou simplesmente estado) os elementos $\sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j$ de $M_k \otimes M_m$ que são matrizes Hermitianas positivas semi-definidas em M_{km}.

Dizemos que um estado $\gamma \in M_k \otimes M_m$ é separável se existirem matrizes $A_j \in P_k$, $B_j \in P_m$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, tais que

$$\gamma = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j.$$

Os estados que não são separáveis estão emaranhados. O problema da separabilidade dos estados quânticos pede um critério determinístico para distinguir os estados quânticos emaranhados daqueles que não estão emaranhados (separáveis). Esse problema foi resolvido somente para estados $\gamma \in M_k \otimes M_m$ com $km \leq 6$. Para k, m arbitrários sabe-se que esse problema é NP-difícil. Nesse capítulo focaremos no problema em $M_2 \otimes M_n$ e apresentaremos sua solução em $M_2 \otimes M_2$.

Na primeira seção falaremos sobre uma forma normal para estados em $M_k \otimes M_m$, chamada de forma normal de filtro, que será utilizada posteriormente. Veremos que ela está totalmente conectada com a extensão do teorema de Sinkhorn-Knopp para mapas positivos obtida no capítulo anterior. Depois mostraremos que o problema da separabilidade em $M_2 \otimes M_n$ pode ser reduzido a estados que podem ser postos na forma normal de filtro e depois mostraremos como resolver o problema em $M_2 \otimes M_2$.

4.1 Forma Normal de Filtro

Nessa seção buscaremos condições para garantir que um estado possa ser posto na forma normal de filtro, pois nem todo estado tem essa propriedade. Vejamos a seguir a definição da forma normal de filtro.

Definição 4.1. *Seja γ um estado em $M_k \otimes M_m$. Dizemos que γ pode ser posto na forma normal de filtro, se existirem matrizes invertíveis $X^{'} \in M_k$ e $Y^{'} \in M_m$ tais que $(X^{'} \otimes Y^{'})\gamma(X^{'^*} \otimes Y^{'^*}) = \sum_{j=1}^{n} C_j \otimes D_j$, onde:*

(1) *$\{C_1, \ldots, C_n\}$ é um conjunto de matrizes Hermitianas ortogonais com respeito ao produto interno do traço ,*

(2) *$\{D_1, \ldots, D_n\}$ é um conjunto de matrizes Hermitianas ortogonais com respeito ao produto interno do traço, e*

(3) *$C_1 = \frac{Id_k}{\sqrt{k}}$ e $D_1 = \frac{Id_m}{\sqrt{m}}$.*

Observação 4.2. Seja $\gamma = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j \in M_k \otimes M_m$ uma matriz Hermitiana então, sem perda de generalidade, podemos assumir que A_j, B_j são matrizes Hermitianas para todo $1 \leq j \leq n$. Para perceber isso, notemos que para cada $1 \leq j \leq n$ temos $A_j = C_j + iD_j$ e $B_j = E_j + iF_j$, onde $C_j, D_j \in M_k$ e $E_j, F_j \in M_m$ são Hermitianas, de fato, $C_j = (A_j + A_j^*)/2$, $D_j = (A_j - A_j^*)/2i$, $E_j = (B_j + B_j^*)/2$ e $F_j = (B_j - B_j^*)/2i$. Logo

$$A_j \otimes B_j = (C_j + iD_j) \otimes (E_j + iF_j) = C_j \otimes E_j - D_j \otimes F_j + i\,(C_j \otimes F_j + D_j \otimes E_j)\,,$$

para todo $1 \leq j \leq n$. Assim

$$\begin{aligned}
\gamma = \frac{1}{2}(\gamma + \gamma^*) &= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} C_j \otimes E_j - D_j \otimes F_j + i\,(C_j \otimes F_j + D_j \otimes E_j)\right] + \\
&+ \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} C_j \otimes E_j - D_j \otimes F_j - i\,(C_j \otimes F_j + D_j \otimes E_j)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} C_j \otimes E_j + (-D_j) \otimes F_j.
\end{aligned}$$

Veremos no Teorema (4.6) que o problema de dizer quando um estado $\gamma \in M_k \otimes M_m$ pode ser posto na forma normal de filtro ou não é equivalente a dizer quando o mapa $G_\gamma : M_k \to M_m$ definido a seguir é equivalente a um mapa duplamente estocástico ou não.

Definição 4.3. *Seja $\gamma = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j \in M_k \otimes M_m$. Definimos as transformações lineares $G_\gamma : M_k \to M_m$ e $F_\gamma : M_m \to M_k$ dados por*

$$G_\gamma(X) = \sum_{j=1}^{n} B_j tr\,(A_j X) \quad \text{e} \quad F_\gamma(Y) = \sum_{j=1}^{n} A_j tr\,(B_j Y),$$

para todos $X \in M_k$ e $Y \in M_m$.

A forma de escrever a matriz γ na definição anterior não é única, entretanto as aplicações G_γ e F_γ estão bem definidas. Veja a seguinte observação.

Observação 4.4. Seja $\gamma = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j \in M_k \otimes M_m$. Notemos que $G_\gamma = L_{f^-} \circ h \circ i_1$ e $F_\gamma = L_{f^+} \circ h \circ i_2$, onde

$$i_1 : M_k \to M_k \otimes M_m \ , \qquad i_2 : M_m \to M_k \otimes M_m \ , \qquad h : M_k \otimes M_m \to M_k \otimes M_m \ ,$$
$$X \mapsto X \otimes Id_m \qquad\qquad Y \mapsto Id_k \otimes Y \qquad\qquad \gamma' \mapsto \gamma\gamma'$$

e L_{f^-}, L_{f^+} são as aplicações lineares definidas no Exemplo (1.26). Portanto, G_γ e F_γ estão bem definidas.

Vejamos agora que G_γ e F_γ são mapas positivos quando γ é um estado e que eles são mapas adjuntos com respeito ao produto interno do traço.

Proposição 4.5. *Seja $\gamma = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j \in M_k \otimes M_m$ Hermitiana positiva semi-definida. Então*

(1) *G_γ e F_γ são mapas positivos*

(2) *$G_\gamma^* = F_\gamma$*

Demonstração.

(1) Sejam $Y \in P_m$ e $X \in P_k$, então

$$\begin{aligned}
tr\left(G_\gamma(X)Y\right) = tr\left(\sum_{j=1}^{n} B_j tr\left(A_j X\right) Y\right) &= tr\left(\sum_{j=1}^{n} tr\left(A_j X\right) B_j Y\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} tr\left(tr\left(A_j X\right) B_j Y\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} tr(A_j X) tr(B_j Y) \\
&= \sum_{j=1}^{n} tr(A_j X \otimes B_j Y) \\
&= \sum_{j=1}^{n} tr\left((A_j \otimes B_j)(X \otimes Y)\right) \\
&= tr\left(\gamma(X \otimes Y)\right).
\end{aligned}$$

Analogamente, $tr\left(F_\gamma(Y)X\right) = tr\left(\gamma(X \otimes Y)\right)$.

Agora, como $\gamma, X \otimes Y \in P_{km}$ segue da Observação (3.6) que

$$tr(G_\gamma(X)Y) \geq 0 \text{ e } tr(F_\gamma(Y)X \geq 0$$

para todo $X \in P_k$ e $Y \in P_m$. Portanto $G_\gamma(X) \in P_m$ e $F_\gamma(Y) \in P_k$.

(2) Pela Observação (4.2) podemos assumir sem perda de generalidade que A_j e B_j são Hermitianas para cada $1 \leq j \leq n$. Então, para cada $X \in M_k$ e $Y \in M_m$ temos

$$\begin{aligned}
\langle X, F_\gamma(Y)\rangle = tr\left(XF_\gamma(Y)^*\right) &= tr\left(X\left(\sum_{j=1}^{n} A_j tr\left(B_j Y\right)\right)^*\right) \\
&= tr\left(X\sum_{j=1}^{n} A_j^* \overline{tr\left(B_j Y\right)}\right) \\
&= tr\left(X\sum_{j=1}^{n} A_j^* tr\left(B_j^* Y^*\right)\right) \\
&= tr\left(\sum_{j=1}^{n} XA_j tr\left(B_j Y^*\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} tr\left(B_j Y^*\right) tr\left(XA_j\right) \\
&= tr\left(\sum_{j=1}^{n} B_j tr\left(XA_j\right) Y^*\right) \\
&= tr\left(G_\gamma(X)Y^*\right) \\
&= \langle G_\gamma(X), Y\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto $G_\gamma^* = F_\gamma$.

■

O próximo teorema apresenta uma condição sobre o mapa positivo G_γ para que o estado $\gamma \in M_k \otimes M_m$ possa ser posto na forma normal de filtro. Um resultado importante para as próximas seções será o Corolário (4.9) desse teorema.

Teorema 4.6. *Seja $\gamma = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j \in M_k \otimes M_m$ Hermitiana positiva semi-definida. Existem matrizes invertíveis $X' \in M_k$ e $Y' \in M_m$ tais que*

$$(X' \otimes Y')\gamma(X' \otimes Y')^* = \sum_{j=1}^{n} C_j \otimes D_j,$$

com $C_1 = Id_k/\sqrt{k}$, $D_1 = Id_m/\sqrt{m}$, C_j, D_j são Hermitianas para todo j e $tr(C_iC_j) = tr(D_iD_j) = 0$, para cada $i \neq j$, se, e somente se, G_γ é equivalente a um mapa duplamente estocástico.

Demonstração. Suponhamos que existem matrizes invertíveis $X' \in M_k$ e $Y' \in M_m$ tais que

$$(X' \otimes Y')\gamma(X' \otimes Y')^* = \sum_{j=1}^{n} C_j \otimes D_j,$$

com $C_1 = Id_k/\sqrt{k}$, $D_1 = Id_m/\sqrt{m}$ e $tr(C_iC_j) = tr(D_iD_j) = 0$, para cada $i \neq j$. Logo

$$
\begin{aligned}
G_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*}\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right) &= \sum_{j=1}^{n} D_j tr\left(C_j \frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right) \\
&= \left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right) tr\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right) + \sum_{j=2}^{n} D_j tr\left(C_j \frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right) \\
&= \left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right) tr\left(\frac{Id_k}{k}\right) + \sum_{j=2}^{n} D_j tr\left(C_j C_1\right) \\
&= \frac{Id_m}{\sqrt{m}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
F_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*}\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right) &= \sum_{j=1}^{n} C_j tr\left(D_j \frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right) \\
&= \left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right) tr\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right) + \sum_{j=2}^{n} C_j tr\left(D_j \frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right) \\
&= \left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right) tr\left(\frac{Id_m}{m}\right) + \sum_{j=2}^{n} C_j tr\left(D_j D_1\right) \\
&= \frac{Id_k}{\sqrt{k}}.
\end{aligned}
$$

Como γ é Hermitiana positiva semi-definida e $X^{'}, Y^{'}$ são invertíveis, então $(X^{'}\otimes Y^{'})\gamma(X^{'}\otimes Y^{'})^*$ é Hermitiana positiva semi-definida. Da Proposição (4.5) segue que $G_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*}$ é um mapa positivo e

$$G^*_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*} = F_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*}.$$

Assim, $G_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*}$ é um mapa duplamente estocástico.

Agora, notemos que

$$(X^{'}\otimes Y^{'})\gamma(X^{'}\otimes Y^{'})^* = (X^{'}\otimes Y^{'})\left(\sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j\right)(X^{'}\otimes Y^{'})^* = \sum_{j=1}^{n} X^{'}A_jX^{'^*} \otimes Y^{'}B_jY^{'^*},$$

então, para todo $X \in M_k$

$$
\begin{aligned}
G_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*}(X) = \sum_{j=1}^{n} Y' B_j Y'^* tr(X' A_j X'^* X) &= Y' \left(\sum_{j=1}^{n} B_j tr(X' A_j X'^* X)\right) Y'^* \\
&= Y' \left(\sum_{j=1}^{n} B_j tr(A_j X'^* X X')\right) Y'^* \\
&= Y' \left(G_\gamma(X'^* X X')\right) Y'^*. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Portanto G_γ é equivalente ao mapa duplamente estocástico $G_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*}$.

Reciprocamente, suponhamos que existam matrizes invertíveis $X'' \in M_k$ e $Y'' \in M_m$ tais que $Y'' G_\gamma(X''(\cdot)X''^*)Y''^*$ é duplamente estocástico. Chamando $X' = X''^*$ e $Y' = Y''$ segue de (4.1)

$$G_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*}(X) = Y'' G_\gamma(X''(X)X''^*)Y''^*.$$

Portanto

$$G_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*}\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right) = \frac{Id_m}{\sqrt{m}} \quad \text{e} \quad G^*_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*}\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right) = \frac{Id_k}{\sqrt{k}}.$$

Como $(X' \otimes Y')\gamma(X' \otimes Y')^*$ é Hermitiana positiva semi-definida segue da Proposição (4.5) que $G_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*}$ e $F_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*}$ são mapas positivos e

$$G^*_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*} = F_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*},$$

ou seja,

$$G_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*}\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right) = \frac{Id_m}{\sqrt{m}} \quad \text{e} \quad F_{(X'\otimes Y')\gamma(X'\otimes Y')^*}\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right) = \frac{Id_k}{\sqrt{k}}.$$

Agora, chamando de $\delta = (X' \otimes Y')\gamma(X' \otimes Y')^*$ temos que $F_\delta \circ G_\delta : M_k \to M_k$ é um mapa positivo auto-adjunto pois $(F_\delta \circ G_\delta)^* = G_\delta^* \circ F_\delta^* = F_\delta \circ G_\delta$.

Notemos que se λ é autovalor de $F_\delta \circ G_\delta : M_k \to M_k$ então λ é real (não negativo) e existe um autovetor $L \in M_k$ associado a λ. Como $L = H_1 + iH_2$ com H_1, H_2 Hermitianos então

$$\lambda H_1 + i\lambda H_2 = F_\delta \circ G_\delta(L) = F_\delta \circ G_\delta(H_1) + iF_\delta \circ G_\delta(H_2).$$

Como uma mapa positivo preserva a propriedade de ser Hermitiana obtemos

$$F_\delta \circ G_\delta(H_j) = \lambda H_j, \text{ para } j = 1, 2.$$

Portanto cada autovetor (L) é combinação de autovetores Hermitianos $(L = H_1 + iH_2)$. Assim os auto-espaços são gerados por matrizes Hermitianas e existe uma base ortonormal para cada auto-espaço formada por matrizes Hermitianas.

Além disso, lembremos que

$$F_\delta \circ G_\delta\left(\frac{Id_k}{\sqrt{k}}\right) = F_\delta\left(\frac{Id_m}{\sqrt{m}}\right) = \frac{Id_k}{\sqrt{k}}.$$

Portanto segue do Teorema Espectral que existe uma base ortonormal de M_k formada por autovetores Hermitianos de $F_\delta \circ G_\delta$ contendo $\frac{Id_k}{\sqrt{k}}$, seja ela $\mathcal{B} = \{C_1 = \frac{Id_k}{\sqrt{k}}, C_2, \ldots, C_{k^2}\}$.

Sejam $D_j = G_\delta(C_j)$ para cada $1 \leq j \leq k^2$. Então $D_1 = Id_m/\sqrt{m}$ e para cada $i \neq j$ temos

$$tr(D_iD_j) = tr\left(G_\delta(C_i)G_\delta(C_j)\right) = \langle G_\delta(C_i), G_\delta(C_j)\rangle = \langle C_i, F_\delta \circ G_\delta(C_j)\rangle = \langle C_i, \lambda_j C_j\rangle = 0.$$

Além disso, como toda matriz Hermitiana é diferença de duas Hermitianas positivas semi-definidas então o mapa positivo G_δ manda matrizes Hermitianas em matrizes Hermitianas, ou seja, D_j é Hermitiano para cada j.

Consideremos $\delta^{'} = \sum_{j=1}^{k^2} C_j \otimes D_j$, então para cada $1 \leq i \leq k^2$ temos

$$G_{\delta'}(C_i) = \sum_{j=1}^{k^2} D_j tr(C_jC_i) = \sum_{j=1}^{k^2} G_\delta(C_j) tr(C_jC_i) = G_\delta(C_i).$$

Portanto $G_{\delta'} = G_\delta$, pois $\{C_1, C_2, \ldots, C_{k^2}\}$ é base para M_k. Daí segue que $\delta = \delta^{'}$, o que conclui a prova.

■

Observemos que a condição de G_γ ser equivalente a um mapa duplamente estocástico pode ser substituída por outra por meio do teorema de Sinkhorn-Knopp para mapas positivos como diz o seguinte resultado.

Corolário 4.7. *Seja $\gamma = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j \in M_k \otimes M_m$ Hermitiana positiva semi-definida tal que $G_\gamma(Id_k) \in M_m$ e $F_\gamma(Id_m) \in M_k$ são Hermitianas positivas definidas. Existem matrizes invertíveis $X^{'} \in M_k$ e $Y^{'} \in M_m$ tais que*

$$(X^{'} \otimes Y^{'})\gamma(X^{'} \otimes Y^{'})^* = \sum_{j=1}^{n} C_j \otimes D_j,$$

com $C_1 = Id_k/\sqrt{k}$, $D_1 = Id_m/\sqrt{m}$ e $tr(C_iC_j) = tr(D_iD_j) = 0$, para cada $i \neq j$, se, e somente se, existem matrizes invertíveis $X^{''} \in M_k$ e $Y^{''} \in M_m$ tais que $Y^{''}G_\gamma(X^{''}(\cdot)X^{''^*})Y^{''^*}$ tem suporte total.

Demonstração. Segue diretamente do Teorema (4.6) e o Teorema de Sinkhorn-Knopp para mapas positivos (3.26).

■

Definição 4.8. *Seja $u \in \mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^m$. Dizemos que u tem posto 1 se $u = v \otimes w$, onde $v \in \mathbb{C}^k$ e $w \in \mathbb{C}^m$.*

O seguinte corolário é um resultado importante para a solução do problema da separabilidade dos estados quânticos em $M_2 \otimes M_2$ que apresentamos nas próximas seções.

Corolário 4.9. *Seja γ um estado em $M_k \otimes M_m$. Se γ não possui vetores de posto 1 no núcleo, então γ pode ser posto na forma normal de filtro.*

Demonstração. Como γ é Hermitiana positiva semi-definida, então G_γ é um mapa positivo. Sejam $\{v_1, \ldots, v_k\}$ e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ bases ortonormais de $\mathbb{C}^k$ e $\mathbb{C}^m$ respectivamente.

Consideremos a matriz $(tr(G_\gamma(v_i v_i^*) w_j w_j^*)) \in M_{k\times m}(\mathbb{C})$ e suponhamos que existem $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ e $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tais que $tr(G_\gamma(v_{i_0} v_{i_0}^*) w_{j_0} w_{j_0}^*) = 0$.

Do item (1) da demonstração da Proposição (4.5) vimos que

$$tr\left(G_\gamma(v_{i_0} v_{i_0}^*) w_{j_0} w_{j_0}^*\right) = tr\left(\gamma(v_{i_0} v_{i_0}^* \otimes w_{j_0} w_{j_0}^*)\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 = tr\left(\gamma(v_{i_0} \otimes w_{j_0})(v_{i_0}^* \otimes w_{j_0}^*)\right) &= tr\left((v_{i_0}^* \otimes w_{j_0}^*)\gamma(v_{i_0} \otimes w_{j_0})\right) \\ &= tr\left((v_{i_0}^* \otimes w_{j_0}^*)\gamma^{1/2}\gamma^{1/2}(v_{i_0} \otimes w_{j_0})\right) \\ &= \langle \gamma^{1/2}(v_{i_0} \otimes w_{j_0}), \gamma^{1/2}(v_{i_0} \otimes w_{j_0})\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\gamma^{1/2}(v_{i_0} \otimes w_{j_0}) = 0$, de onde $\gamma(v_{i_0} \otimes w_{j_0}) = 0$, ou seja, $v_{i_0} \otimes w_{j_0}$ está no núcleo de γ. Absurdo. Assim, a matriz $(tr(G_\gamma(v_i v_i^*) w_j w_j^*)) \in M_{k\times m}(\mathbb{C})$ não tem entradas nulas, segue que G_γ tem suporte total.

Notemos também que para todo vetor unitário $w \in \mathbb{C}^m$ temos $tr(G_\gamma(v_i v_i^*) w w^*) \neq 0$, para cada $1 \leq i \leq k$. Da mesma forma segue que $tr(vv^* F_\gamma(w_j w_j^*)) \neq 0$, para cada $1 \leq j \leq m$.

Como $\sum_{i=1}^k v_i v_i^* = Id_k$ e $\sum_{j=1}^m w_j w_j^* = Id_m$ então

$$tr(G_\gamma(Id_k)ww^*) > 0 \quad e \quad tr(vv^* F_\gamma(Id_m)) > 0.$$

Assim, $w^* G_\gamma(Id_k) w > 0$ e $v^* F_\gamma(Id_m) v > 0$, isto é, $G_\gamma(Id_k)$ e $F_\gamma(Id_m)$ são Hermitianas positivas definidas. O resultado segue do Corolário (4.7).

■

A continuação mostramos que se a dimensão do núcleo de um estado é pequena então ele pode ser posto na forma normal de filtro. Assim obtemos diversos exemplos de estados que podem ser postos na forma normal de filtro.

Teorema 4.10. *Seja $A = \sum_{j=1}^n A_j \otimes B_j \in M_k \otimes M_m$ Hermitiana positiva semi-definida. Se $k \neq m$ e $\dim(Nuc(A)) < \min\{k, m\}$ ou se $k = m$ e $\dim(Nuc(A)) < k - 1$, então $G_A(Id_k), F_A(Id_m)$ são matrizes Hermitianas positivas definidas e $G_A : M_k \to M_m$ tem suporte total.*

Demonstração. Como A é Hermitiana positiva semi-definida, segue da Proposição (4.5) que G_A e F_A são mapas positivos. Sejam $v \in \mathbb{C}^k$ e $w \in \mathbb{C}^m$ vetores unitários.

Do item (1) da demonstração da Proposição (4.5) vimos que

$$tr\left(G_A(Id_k)ww^*\right) = tr\left(A(Id_k \otimes ww^*\right)$$

Como $A, Id_k \otimes ww^* \in P_{km}$ segue da Observação (3.6) que $tr(A(Id_k \otimes ww^*)) \geq 0$. Suponhamos que $tr(A(Id_k \otimes ww^*)) = 0$, então da Observação (3.6) temos $A(Id_k \otimes ww^*) = 0$. Logo, $Im(Id_k \otimes ww^*) \subseteq Nuc(A)$. Daí, $\dim(Im(Id_k \otimes ww^*)) = k \leq \dim(Nuc(A))$, o que contradiz o fato de $\dim(Nuc(A)) < k$. Portanto, $tr(A(Id_k \otimes ww^*)) > 0$.

Analogamente, como $\dim(Nuc(A)) < m$ temos $tr\,(vv^* F_A(Id_m)) = tr\,(A(vv^* \otimes Id_m)) > 0$.

Portanto, para todos $v \in \mathbb{C}^k$ e $w \in \mathbb{C}^m$ vetores unitários temos

$$0 < tr\,(G_A(Id_k)ww^*) = w^* G_A(Id_k) w$$

e

$$0 < tr\,(vv^* F_A(Id_m)) = tr\,(F_A(Id_m)vv^*) = v^* F_A(Id_m) v,$$

isto é, $G_A(Id_k)$ e $F_A(Id_m)$ são Hermitianas positivas definidas.

Agora, sejam $\{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{C}^k$ e $\{w_1, \dots, w_m\} \subset \mathbb{C}^m$ bases ortonormais. Consideremos a matriz $(tr(G_A(v_i v_i^*) w_j w_j^*)) \in M_{k \times m}(\mathbb{C})$, então para cada $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq m$ temos

$$tr\left(G_A(v_i v_i^*) w_j w_j^*\right) = tr\left(A(v_i v_i^* \otimes w_j w_j^*)\right).$$

Então, se $tr(G_A(v_i v_i^*) w_j w_j^*) = 0$, temos $v_i \otimes w_j \in Nuc(A)$.

Além disso, como $\{v_i \otimes w_j, 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq m\}$ é um conjunto linearmente independente então a cardinalidade do conjunto $\{(i,j) : tr(G_A(v_i v_i^*) w_j w_j^*) = 0\} \leq \dim(Nuc(A))$ que é menor que o $\min\{k, m\}$, se $k \neq m$, ou menor que $k - 1$ se $k = m$.

Assim, segue dos itens (5) e (6) do Lema (1.30) que a matriz $(tr(G_A(v_i v_i^*) w_j w_j^*)) \in M_{k \times m}(\mathbb{C})$ tem suporte total. Então da Definição (3.17) temos $G_A : M_k \to M_m$ tem suporte total. ■

Corolário 4.11. *Seja $A = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j \in M_k \otimes M_m$ Hermitiana positiva semi-definida. Se $k \neq m$ e $\dim(Nuc(A)) < \min\{k, m\}$ ou se $k = m$ e $\dim(Nuc(A)) < k - 1$, então existem matrizes invertíveis $X^{'} \in M_k$ e $Y^{'} \in M_m$ tais que*

$$(X^{'} \otimes Y^{'}) A (X^{'} \otimes Y^{'})^* = \sum_{j=1}^{n} C_j \otimes D_j,$$

com $C_1 = Id_k/\sqrt{k}$, $D_1 = Id_m/\sqrt{m}$, C_j, D_j são Hermitianas para todo j e $tr(C_i C_j) = tr(D_i D_j) = 0$, para cada $i \neq j$.

Demonstração. Segue diretamente do Teorema (4.10) e o Corolário (4.7). ■

Teorema 4.12. *Seja $A = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j \in M_k \otimes M_m$ Hermitiana positiva semi-definida tal que $G_A(Id_k)$ e $F_A(Id_m)$ são matrizes Hermitianas positivas definidas. Se $\dim(Nuc(A)) < \max\{k, m\}/\min\{k, m\}$, então G_A tem suporte total.*

Demonstração. Sejam $\{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{C}^k$ e $\{w_1, \dots, w_m\} \subset \mathbb{C}^m$ bases ortonormais. Do item (1) da demonstração da Proposição (4.5) temos que

$$tr(G_A(v_iv_i^*)w_jw_j^*) = tr(A(v_iv_i^* \otimes w_jw_j^*)) = tr(v_iv_i^*F_A(w_jw_j^*)),$$

para cada $1 \leq i \leq k$ e cada $1 \leq j \leq m$.

Consideremos a matriz $(tr(G_A(v_iv_i^*)w_jw_j^*)) \in M_{k\times m}(\mathbb{C})$. Como $G_A(Id_k)$ e $F_A(Id_m)$ são Hermitianas positivas definidas, então para cada $1 \leq j \leq m$

$$\sum_{i=1}^{k} tr\left(G_A(v_iv_i^*)w_jw_j^*\right) = tr\left(G_A\left(\sum_{i=1}^{k} v_iv_i^*\right)w_jw_j^*\right) = tr\left(G_A(Id_k)w_jw_j^*\right) > 0$$

e para cada $1 \leq i \leq k$

$$\sum_{j=1}^{m} tr\left(G_A(v_iv_i^*)w_jw_j^*\right) = \sum_{j=1}^{m} tr\left(v_iv_i^*F_A(w_jw_j^*)\right) = tr\left(v_iv_i^*F_A\left(\sum_{i=1}^{k} w_jw_j^*\right)\right)$$
$$= tr\left(w_iv_i^*F_A(Id_m)\right) > 0,$$

ou seja, a matriz $(tr(G_A(v_iv_i^*)w_jw_j^*)) \in M_{k\times m}(\mathbb{C})$ não tem linha ou coluna identicamente nula.

Repetindo o argumento da demonstração do teorema (4.10) temos que a cardinalidade do conjunto

$$\{(i,j) : tr(G_A(v_iv_i^*)w_jw_j^*) = 0\}$$

é menor que $\dim(Nuc(A)) < \max\{k,m\}/\min\{k,m\}$. Logo, pelo item (7) do Lema (1.30) a matriz $(tr(G_A(v_iv_i^*)w_jw_j^*)) \in M_{k\times m}(\mathbb{C})$ tem suporte total. Portanto $G_A : M_k \to M_m$ tem suporte total.

■

Corolário 4.13. *Seja $A = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j \in M_k \otimes M_m$ Hermitiana positiva semi-definida tal que $G_A(Id_k)$ e $F_A(Id_m)$ são matrizes Hermitianas positivas definidas. Se $\dim(Nuc(A)) < \max\{k,m\}/\min\{k,m\}$, então existem matrizes invertíveis $X' \in M_k$ e $Y' \in M_m$ tais que*

$$(X' \otimes Y')A(X' \otimes Y')^* = \sum_{j=1}^{n} C_j \otimes D_j,$$

com $C_1 = Id_k/\sqrt{k}$, $D_1 = Id_m/\sqrt{m}$, C_j, D_j são Hermitianas para todo j e $tr(C_iC_j) = tr(D_iD_j) = 0$, para cada $i \neq j$.

Demonstração. Segue diretamente do Teorema (4.12) e do Corolário (4.7)

■

4.2 Problema da Separabilidade em $M_2 \otimes M_n$

Nesta seção estudamos o emaranhamento quântico para estados $\gamma \in M_2 \otimes M_n$, mostrando que o problema da separabilidade dessas matrizes se reduz a estados sem vetores de posto 1 no núcleo. Isso é suficiente para reduzir o problema da separabilidade para estados na forma normal de filtro como vimos no Corolário (4.9).

Relembremos a definição de estado separável descrita na introdução desse capítulo.

Definição 4.14. *Seja γ um estado em $M_k \otimes M_m$. Dizemos que γ é separável se*

$$\gamma = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $A_j \in P_k$, $B_j \in P_m$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Se γ não puder ser escrito dessa maneira, dizemos que γ está emaranhado.

Exemplo 4.15. *Sejam $A_1 \in P_k$ e $B_1 \in P_m$. Então $A_1 \otimes B_1 \in M_k \otimes M_m$ é separável.*

Observação 4.16. $\gamma \in M_k \otimes M_m$ é separável se, e somente se $(R \otimes S)\gamma(R^* \otimes S^*)$ é separável, onde $R \in M_k$, $S \in M_m$ são matrizes invertíveis. Com efeito, suponhamos que γ é separável, então $\gamma = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j$ onde $A_j \in P_k$, $B_j \in P_m$ para cada $1 \leq j \leq n$. Logo,

$$(R \otimes S)\gamma(R^* \otimes S^*) = (R \otimes S) \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j(R^* \otimes S^*) = \sum_{j=1}^{n} RA_jR^* \otimes SB_jS^*.$$

Como $RA_jR^* \in P_k$ e $SB_jS^* \in P_m$ para cada $1 \leq j \leq n$, segue $(R \otimes S)\gamma(R^* \otimes S^*)$ é separável. Agora, se $(R \otimes S)\gamma(R^* \otimes S^*)$ é separável, já que R e S são invertíveis, temos

$$(R^{-1} \otimes S^{-1})(R \otimes S)\gamma(R^* \otimes S^*)(R^{-1^*} \otimes S^{-1^*}) = (R^{-1}R \otimes S^{-1}S)\gamma(R^*R^{-1^*} \otimes S^*S^{-1^*}) = \gamma$$

é separável.

Definição 4.17. *Seja $\gamma = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j \in M_k \otimes M_m$. Definimos a transposição parcial de γ como sendo a matriz*

$$\gamma^\Gamma = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j^t \in M_k \otimes M_m.$$

Se γ e γ^Γ são matrizes Hermitianas positivas semi-definidas, dizemos que γ é positiva sob transposição parcial ou simplesmente que γ é PPT.

Exemplo 4.18. *Seja $\gamma = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j \in M_k \otimes M_m$ PPT e sejam $R \in M_k$ e $S \in M_n$. Então*

$$((R \otimes S)\gamma(R^* \otimes S^*))^\Gamma = \left(\sum_{j=1}^{n} RA_jR^* \otimes SB_jS^* \right)^\Gamma = \sum_{j=1}^{n} RA_jR^* \otimes S^{*^t}B_j^tS^t,$$

de onde $((R \otimes S)\gamma(R^* \otimes S^*))^\Gamma = (R \otimes S^{*^t})\gamma^\Gamma(R^* \otimes S^t)$, ou seja, $(R \otimes S)\gamma(R^* \otimes S^*)$ é PPT.

Existe uma relação entre os estados PPT e os estados separáveis que mostramos na seguinte observação.

Observação 4.19. Seja $\gamma = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j \in M_k \otimes M_m$ tal que $A_j \in P_k$ e $B_j \in P_m$ para cada $1 \leq j \leq n$, isto é, γ é separável, então γ é Hermitiana positiva semi-definida. Notemos que para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ temos $B_j^{t^*} = B_j^{*^t} = B_j^t$, ou seja, B_j^t é Hermitiana. Além disso, os autovalores de B_j^t e os autovalores de B_j são os mesmos. Portanto $B_j^t \in P_m$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Dai $\gamma^\Gamma = \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j^t$ é Hermitiana positiva semi-definida, segue que γ é PPT.

Em geral, um estado PPT em $M_k \otimes M_m$ não é separável. Entretanto, para estados $\gamma \in M_2 \otimes M_i$ $(i = 2, 3)$ foi provado que γ é separável se e somente se γ é PPT [10]. O caso $i = 2$ será apresentado na última subseção como consequência do Teorema de Sinkhorn-Knopp.

4.2.1 Redução do problema da separabilidade aos estados na forma normal de filtro

Nesta subseção apresentamos a redução do problema da separabilidade dos estados quânticos em $M_2 \otimes M_n$. Obtendo que em $M_2 \otimes M_n$ basta olhar a separabilidade das matrizes que não possuem vetores de posto 1 no núcleo. Esse resultado foi provado em [12, Lemma 7].

Primeiro precisamos dos Lemas (4.20) e (4.21) para mostrar o Lema (4.22) que é o resultado chave para obter a redução do problema.

Lema 4.20. *Seja $\gamma \in M_2 \otimes M_n$ uma matriz Hermitiana positiva semi-definida. Existem $R \in M_2$ e $S \in M_n$ invertíveis tais que*

$$(R \otimes S)\gamma(R^* \otimes S^*) = \begin{pmatrix} Id_k & 0_{k\times n-k} & A^*_{k\times k} & B^*_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} & 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \\ A_{k\times k} & 0_{k\times n-k} & C_{k\times k} & D^*_{k\times n-k} \\ B_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} & D_{n-k\times k} & E_{n-k\times n-k} \end{pmatrix}.$$

Além disso, se γ é PPT então $B = 0$.

Demonstração. Como $\gamma \in M_2 \otimes M_n$ então

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix},$$

onde $\gamma_i \in M_n$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$. Já que γ é Hermitiana positiva semi-definida segue $\gamma_1 \in P_n$. Assim, existe $S \in M_n$ invertível tal que

$$S\gamma_1 S^* = \begin{pmatrix} Id_k & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$(Id_2 \otimes S)\gamma(Id_2^* \otimes S^*) = \begin{pmatrix} S & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^* & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & S^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} S\gamma_1 S^* & S\gamma_2 S^* \\ S\gamma_3 S^* & S\gamma_4 S^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Id_k & 0_{k\times n-k} & A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} & A_2^{(3)} & A_2^{(4)} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(2)} & A_4^{(1)} & A_4^{(2)} \\ A_3^{(3)} & A_3^{(4)} & A_4^{(3)} & A_4^{(4)} \end{pmatrix}.$$

onde $A_i^{(1)} \in M_k$, $A_i^{(2)} \in M_{k\times n-k}$, $A_i^{(3)} \in M_{n-k\times k}$, $A_i^{(4)} \in M_{n-k}$ e

$$S\gamma_i S^* = \begin{pmatrix} A_i^{(1)} & A_i^{(2)} \\ A_i^{(3)} & A_i^{(4)} \end{pmatrix}, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Como γ é Hermitiana, temos que $(Id_2 \otimes S)\gamma(Id_2^* \otimes S^*)$ é Hermitiana. Assim

$$(Id_2 \otimes S)\gamma(Id_2^* \otimes S^*) = \begin{pmatrix} Id_k & 0_{k\times n-k} & A_3^{(1)^*} & A_3^{(3)^*} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} & A_3^{(2)^*} & A_3^{(4)^*} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(2)} & A_4^{(1)} & A_4^{(3)^*} \\ A_3^{(3)} & A_3^{(4)} & A_4^{(3)} & A_4^{(4)} \end{pmatrix},$$

com $A_4^{(1)}, A_4^{(4)}$ Hermitianas. Já que γ é positiva semi-definida então $(Id_2 \otimes S)\gamma(Id_2^* \otimes S^*)$ é positiva semi-definida, então a submatriz

$$\widetilde{\gamma} = \begin{pmatrix} 0_{n-k\times n-k} & A_3^{(2)^*} \\ A_3^{(2)} & A_4^{(1)} \end{pmatrix} \in M_n,$$

é Hermitiana positiva semi-definida. Para cada $a_{ij} \in A_3^{(2)}$ consideremos a submatriz $\widetilde{\gamma}[\alpha, \alpha]$ onde $\alpha = (j, n-k+i)$, ou seja,

$$\widetilde{\gamma}[\alpha, \alpha] = \begin{pmatrix} 0 & \overline{a_{ij}} \\ a_{ij} & b \end{pmatrix},$$

com $b \in A_4^{(1)}$. Temos que $\widetilde{\gamma}[\alpha, \alpha]$ é Hermitiana positiva semi-definida, dai $0 \leq \det(\widetilde{\gamma}[\alpha, \alpha]) = -|a_{ij}|^2$. Segue $a_{ij} = 0$. Analogamente tomando a submatriz

$$\widetilde{\gamma}' = \begin{pmatrix} 0_{n-k\times n-k} & A_3^{(4)^*} \\ A_3^{(4)} & A_4^{(4)} \end{pmatrix} \in M_{2(n-k)},$$

concluímos que $A_3^{(4)} = 0_{n-k\times n-k}$. Isto prova a primeira parte do lema.

Agora, suponhamos que γ é PPT, então γ é Hermitiana positiva semi-definida. Portanto, existem $R \in M_2$ e $S \in M_n$ invertíveis tais que

$$
(R\otimes S)\gamma(R^*\otimes S^*) = \begin{pmatrix} Id_k & 0_{k\times n-k} & A^*_{k\times k} & B^*_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} & 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \\ A_{k\times k} & 0_{k\times n-k} & C_{k\times k} & D^*_{k\times n-k} \\ B_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} & D_{n-k\times k} & E_{n-k\times n-k} \end{pmatrix},
$$

como já mostramos. Segue

$$
\begin{aligned}
(R\otimes S)\gamma(R^*\otimes S^*) &= \hat{e}_1 \otimes \begin{pmatrix} Id_k & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} + \hat{e}_2 \otimes \begin{pmatrix} A^*_{k\times k} & B^*_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} \\
&+ \hat{e}_3 \otimes \begin{pmatrix} A_{k\times k} & 0_{k\times n-k} \\ B_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} + \hat{e}_4 \otimes \begin{pmatrix} C_{k\times k} & D^*_{k\times n-k} \\ D_{n-k\times k} & E_{n-k\times n-k} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

onde $\{\hat{e}_1,\dots,\hat{e}_4\} \subset M_2$ é a base canônica de M_2. Agora, como γ é PPT segue do exemplo (4.18) que $(R\otimes S)\gamma(R^*\otimes S^*)$ é PPT. Assim, $((R\otimes S)\gamma(R^*\otimes S^*))^\Gamma$ é Hermitiana positiva semi-definida. Já que

$$
\begin{aligned}
((R\otimes S)\gamma(R^*\otimes S^*))^\Gamma &= \hat{e}_1 \otimes \begin{pmatrix} Id_k & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} + \hat{e}_2 \otimes \begin{pmatrix} \overline{A}_{k\times k} & 0_{k\times n-k} \\ \overline{B}_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} \\
&+ \hat{e}_3 \otimes \begin{pmatrix} A^t_{k\times k} & B^t_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} + \hat{e}_4 \otimes \begin{pmatrix} C^t_{k\times k} & D^t_{k\times n-k} \\ \overline{D}_{n-k\times k} & E^t_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Id_k & 0_{k\times n-k} & \overline{A}_{k\times k} & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} & \overline{B}_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \\ A^t_{k\times k} & B^t_{k\times n-k} & C^t_{k\times k} & D^t_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} & \overline{D}_{n-k\times k} & E^t_{n-k\times n-k} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

segue $B^t = 0_{k\times n-k}$. Portanto $B = 0_{n-k\times k}$.

■

Lema 4.21. *Seja $\delta \in M_2 \otimes M_n$ uma matriz Hermitiana positiva semi-definida tal que*

$$
\delta = \begin{pmatrix} Id_k & 0_{k\times n-k} & A^*_{k\times k} & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} & 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \\ A_{k\times k} & 0_{k\times n-k} & C_{k\times k} & D^*_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} & D_{n-k\times k} & E_{n-k\times n-k} \end{pmatrix}
$$

e $G_\delta(Id)$ é Hermitiana positiva definida (ver Definição (4.3)). Então existe $v \in \mathbb{C}^2$ tal que $G_\delta(vv^*)$ é Hermitiana positiva definida.

Demonstração. Notemos que

$$
\begin{aligned}
\delta &= \hat{e}_1 \otimes \begin{pmatrix} Id_k & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} + \hat{e}_2 \otimes \begin{pmatrix} A^*_{k\times k} & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} \\
&+ \hat{e}_3 \otimes \begin{pmatrix} A_{k\times k} & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} + \hat{e}_4 \otimes \begin{pmatrix} C_{k\times k} & D^*_{k\times n-k} \\ D_{n-k\times k} & E_{n-k\times n-k} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

onde $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_4\} \subset M_2$ é a base canônica de M_2. Então para cada $a \in \mathbb{C}$ segue

$$\begin{aligned}
G_\delta\left(\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & 1 \end{pmatrix}\right) &= G_\delta\left(\begin{pmatrix} a\overline{a} & a \\ \overline{a} & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} Id_k & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} tr \begin{pmatrix} a\overline{a} & 0 \\ \overline{a} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^*_{k\times k} & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} tr \begin{pmatrix} 0 & a\overline{a} \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} A_{k\times k} & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} tr \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{k\times k} & D^*_{k\times n-k} \\ D_{n-k\times k} & E_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} tr \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\overline{a}Id_k + \overline{a}A^* + aA + C & D^* \\ D & E \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\overline{a}Id_k + A)(\overline{a}Id_k + A)^* + C - AA^* & D^* \\ D & E \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Agora, como δ é Hermitiana positiva semi-definida, segue que

$$\begin{aligned}
\delta' &= \begin{pmatrix} Id & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 & 0 \\ -A & 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_k & 0 & A^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & C & D^* \\ 0 & 0 & D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & 0 & -A^* & 0 \\ 0 & Id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Id_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C - AA^* & D^* \\ 0 & 0 & D & E \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

é Hermitiana positiva semi-definida. Portanto $G_{\delta'}$ é um mapa positivo. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e considere

$$Q_\lambda = G_{\delta'}\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda Id_k + C - AA^* & D^* \\ D & E \end{pmatrix}.$$

Além disso, considere

$$G_\delta(Id_2) = \begin{pmatrix} C + Id_k & D^* \\ D & E \end{pmatrix}.$$

Logo, para λ real positivo e suficientemente grande obtemos

$$Q_\lambda - G_\delta(Id_2) = G_{\delta'}\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} C + Id_k & D^* \\ D & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda - 1)Id_k - AA^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é Hermitiana positiva semi-definida. Por hipótese $G_\delta(Id_2)$ é Hermitiana positiva definida então Q_λ também é.

Como $G_{\delta'}$ é um mapa positivo e a imagem de uma matriz Hermitiana positiva definida resultou em uma Hermitiana positiva definida

$$G_{\delta'}\left(\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = Q_\lambda,$$

então a imagem de qualquer matriz Hermitiana positiva definida por $G_{\delta'}$ também é Hermitiana positiva definida, por [5, Proposition 3.2]. Isso implica que para qualquer $\lambda > 0$, Q_λ é Hermitiana positiva definida.

Finalmente, notemos que

$$G_\delta\left(\begin{pmatrix}a\overline{a} & a\\ \overline{a} & 1\end{pmatrix}\right) - Q_\lambda = G_\delta\left(\begin{pmatrix}a\overline{a} & a\\ \overline{a} & 1\end{pmatrix}\right) - G_{\delta'}\left(\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}(\overline{a}Id + A)(\overline{a}Id + A)^* - \lambda Id & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

é Hermitiana positiva semi-definida para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, pois nos tomamos $a \in \mathbb{C}$ tal que $(\overline{a}Id + A)(\overline{a}Id + A)^*$ é positiva definida. Assim,

$$G_\delta\left(\begin{pmatrix}a\overline{a} & a\\ \overline{a} & 1\end{pmatrix}\right)$$

é Hermitiana positiva definida. Isso conclui a demonstração.

■

Lema 4.22. *Seja $\gamma \in M_2 \otimes M_n$ uma matriz PPT tal que $G_\gamma(Id_2)$ é positiva definida. Existem $M \in M_2$ e $N \in M_n$ invertíveis tais que*

$$(M \otimes N)\gamma(M \otimes N^*) = \begin{pmatrix}Id_n & Y^*_{n\times n}\\ Y_{n\times n} & Z_{n\times n}\end{pmatrix}.$$

Demonstração. Pelo Lema (4.20), existem $S \in M_2$ e $R \in M_n$ invertíveis tais que

$$\delta = (R \otimes S)\gamma(R^* \otimes S^*) = \begin{pmatrix}Id_k & 0_{k\times n-k} & A^*_{k\times k} & 0_{k\times n-k}\\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} & 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k}\\ A_{k\times k} & 0_{k\times n-k} & C_{k\times k} & D^*_{k\times n-k}\\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} & D_{n-k\times k} & E_{n-k\times n-k}\end{pmatrix}.$$

Como R é invertível, então R^*R é Hermitiana positiva definida. Além disso, por hipótese $G_\gamma(Id_2)$ é positiva definida, então por [5, Proposition 3.2] temos que $G_\gamma(R^*R)$ é Hermitiana positiva definida.

Agora, da equação (4.1) obtemos $G_\delta(Id) = SG_\gamma(R^*R)S^*$. Como S é invertível, segue que

$$G_\delta(Id_2) = \begin{pmatrix}C + Id & D^*\\ D & E\end{pmatrix}$$

é Hermitiana positiva definida.

Logo, pelo Lema (4.21), existe $v \in \mathbb{C}^2$ tal que

$$G_\delta(vv^*) = SG_\gamma(R^*vv^*R)S^*$$

é positiva definida. Assim $G_\gamma(R^*vv^*R)$ é positiva definida.

Seja $M \in M_2$ invertível tal que $M^*e_1 = R^*v$, onde e_1 é o primeiro vetor da base canônica de $\mathbb{C}^2$. Seja $N \in M_n$ invertível tal que $NG_\gamma(R^*vv^*R)N^* = Id_n$. Logo, da equação (4.1) segue que

$$G_{(M\otimes N)\gamma(M^*\otimes N^*)}(e_1e_1^t) = NG_\gamma(M^*e_1e_1^tM)N^* = Id_n.$$

Agora,

$$(M\otimes N)\gamma(M^*\otimes N^*) = \begin{pmatrix} X_{n\times n} & Y^*_{n\times n} \\ Y_{n\times n} & Z_{n\times n}\end{pmatrix} = \hat{e}_1 \otimes X_{n\times n} + \hat{e}_2 \otimes Y^*_{n\times n} + \hat{e}_3 \otimes Y_{n\times n} + \hat{e}_4 \otimes Z_{n\times n},$$

onde $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_4\} \subset M_2$ é a base canônica de M_2. Portanto,

$$\begin{aligned} Id_n = G_{(M\otimes N)\gamma(M^*\otimes N^*)}(e_1e_1^t) &= G_{(M\otimes N)\gamma(M^*\otimes N^*)}(\hat{e}_1) \\ &= X_{n\times n}tr(\hat{e}_1\hat{e}_1) + Y^*_{n\times n}tr(\hat{e}_2\hat{e}_1) + Y_{n\times n}tr(\hat{e}_3\hat{e}_1) + Z_{n\times n}tr(\hat{e}_4\hat{e}_1) \\ &= X_{n\times n}tr(\hat{e}_1) + Y^*_{n\times n}tr(0_{2\times 2}) + Y_{n\times n}tr(\hat{e}_3) + Z_{n\times n}tr(0_{2\times 2}) \\ &= X_{n\times n}. \end{aligned}$$

■

A seguir o resultado que adiantamos na introdução da seção.

Teorema 4.23. *Para resolver o problema da separabilidade dos estados quânticos em $M_2 \otimes M_n$, basta resolvê-lo para matrizes em $M_2 \otimes M_n$ sem vetores de posto 1 (i.e., $v \otimes w$) no núcleo.*

Demonstração. Seja $\gamma \in M_2 \otimes M_n$ uma matriz com um vetor de posto 1 no núcleo. Pela Observação (4.19) temos que se γ não é uma matriz PPT, então não é separável. Assim, suponhamos que γ é PPT. Agora temos dois casos a considerar,

CASO 1. $G_\gamma(Id_2)$ é positiva definida. Pelo Lema (4.22) existem matrizes invertíveis $M \in M_2$ e $N \in M_n$ tais que

$$\delta = (M\otimes N)\gamma(M^*\otimes N^*) = \begin{pmatrix} Id_n & Y^*_{n\times n} \\ Y_{n\times n} & Z_{n\times n}\end{pmatrix}.$$

Agora, pela Observação (4.16) γ é separável se, e somente se δ for separável. Além disso, como γ tem um vetor de posto 1 no núcleo, existem $v = (v_1, v_2)^t \in \mathbb{C}^2$ e $w \in \mathbb{C}^n$ tais que $v \otimes w$ é não nulo e pertence ao núcleo de δ.

Agora, se $v_2 = 0$ temos

$$\begin{pmatrix}\vec{0} \\ \vec{0}\end{pmatrix} = \delta(v\otimes w) = \begin{pmatrix} Id_n & Y^* \\ Y & Z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1w \\ v_2w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_n & Y^* \\ Y & Z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1w \\ \vec{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1w \\ v_1Yw\end{pmatrix}.$$

Como $w \neq \vec{0}$ então $v_1 = 0$. Absurdo. Logo, $v_2 \neq 0$. Multiplicando $v \otimes w$ por um número diferente de zero, ele continua no núcleo então podemos assumir que $v_2 = 1$. Assim,

$$\begin{pmatrix}\vec{0} \\ \vec{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_n & Y^* \\ Y & Z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1w \\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1w + Y^*w \\ v_1Yw + Zw\end{pmatrix}.$$

Dai, $v_1 w + Y^* w = \vec{0}$, ou seja, $Y^* w = -v_1 w$, isto é, w é autovetor de B^* associado a $-v_1$. Seja $U \in M_n$ uma matrix unitária tal que $U^* e_1 = w$, onde e_1 é o primeiro vetor da base canônica de $\mathbb{C}^n$. Portanto

$$UY^*U^*e_1 = UY^*(w) = U(-v_1 w) = -v_1 Uw = -v_1 e_1.$$

Além disso, como $v_1 Yw + Zw = \vec{0}$, temos $Zw = -v_1 Yw$. Logo,

$$UZU^*e_1 = UZw = U(-v_1 Yw) = -v_1 UYw = -v_1 UYU^* e_1.$$

Assim

$$UY^*U^* = \begin{pmatrix} -v_1 & x^t \\ \vec{0} & C \end{pmatrix},$$

onde $x \in \mathbb{C}^{n-1}$ e $C \in M_{n-1}$. Portanto

$$UZU^*e_1 = -v_1 UYU^* e_1 = -v_1 (UY^*U^*)^* e_1 = -v_1 \begin{pmatrix} -\overline{v_1} & \vec{0}^t \\ \overline{x} & C^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |v_1|^2 \\ -v_1 \overline{x} \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$UZU^* = \begin{pmatrix} |v_1|^2 & y^t \\ -v_1 \overline{x} & F \end{pmatrix},$$

onde $y \in \mathbb{C}^{n-1}$ e $F \in M_{n-1}$. Mas Z é Hermitiana pois δ é Hermitiana, então UZU^* é Hermitiana. Portanto, $y = -\overline{v}_1 x$, logo

$$UZU^* = \begin{pmatrix} |v_1|^2 & -\overline{v}_1 x^t \\ -v_1 \overline{x} & F \end{pmatrix}.$$

Desta forma obtemos

$$(Id_2 \otimes U) \begin{pmatrix} Id_n & Y^* \\ Y & Z \end{pmatrix} (Id_2 \otimes U^*) = \begin{pmatrix} Id_n & UY^*U^* \\ UYU^* & UZU^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t & -v_1 & x^t \\ \vec{0} & Id_{n-1} & \vec{0} & C \\ -\overline{v}_1 & \vec{0}^t & |v_1|^2 & -\overline{v}_1 x^t \\ \overline{x} & C^* & -v_1 \overline{x} & F \end{pmatrix}.$$

Pela Observação (4.16) δ é separável se, e somente se essa matriz for separável. Como γ é PPT segue do Exemplo (4.18) que esta última matriz também é PPT. Assim sua transposição parcial

$$\left((Id_2 \otimes U) \begin{pmatrix} Id_n & Y^* \\ Y & Z \end{pmatrix} (Id_2 \otimes U^*) \right)^{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t & -v_1 & \vec{0}^t \\ \vec{0} & Id_{n-1} & x & C^t \\ -\overline{v}_1 & \overline{x}^t & |v_1|^2 & -v_1 \overline{x}^t \\ \vec{0} & \overline{C} & -\overline{v}_1 x & F^t \end{pmatrix}$$

é Hermitiana positiva semi-definida. Então,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t & -v_1 \\ \vec{0} & Id_{n-1} & x \\ -\overline{v}_1 & \overline{x}^t & |v_1|^2 \end{pmatrix} \in M_{n+1}$$

é Hermitiana positiva semi-definida.

Portanto

$$\begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t & 0 \\ \vec{0} & Id_{n-1} & \vec{0} \\ \overline{v}_1 & -\overline{x}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t & -v_1 \\ \vec{0} & Id_{n-1} & x \\ -\overline{v}_1 & \overline{x}^t & |v_1|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t & v_1 \\ \vec{0} & Id_{n-1} & -x \\ 0 & \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t & 0 \\ \vec{0} & Id_{n-1} & \vec{0} \\ 0 & \vec{0}^t & -\overline{x}^t x \end{pmatrix}$$

é Hermitiana positiva semi-definida, mas isso só ocorre quando $x = \vec{0}$

Assim

$$(Id_2 \otimes U) \begin{pmatrix} Id_n & B^* \\ B & E \end{pmatrix} (Id_2 \otimes U^*) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t & -v_1 & \vec{0}^t \\ \vec{0} & Id_{n-1} & \vec{0} & C \\ -\overline{v}_1 & \vec{0}^t & |v_1|^2 & -\vec{0}^t \\ \vec{0} & C^* & \vec{0} & F \end{pmatrix} = L_1 + L_2,$$

onde

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ -\overline{v}_1 & |v_1|^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \vec{0} & 0_{n-1 \times n-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t \\ \vec{0} & Id_{n-1} & \vec{0} & C \\ 0 & \vec{0}^t & 0 & \vec{0}^t \\ \vec{0} & C^* & \vec{0} & F \end{pmatrix}.$$

Agora,

$$\begin{pmatrix} 1 & -v_1 \\ -\overline{v}_1 & |v_1|^2 \end{pmatrix} \in P_2,$$

pois seus autovalores são 0 e $|v_1|^2 + 1$. Logo L_1 é separável.

Notemos que

$$\left(Id_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}^t \\ \vec{0} & Id_{n-1} \end{pmatrix}\right) (L_1 + L_2) \left(Id_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}^t \\ \vec{0} & Id_{n-1} \end{pmatrix}\right) = L_2,$$

mas isso implica que $L_1 + L_2$ é separável se, e somente se L_2 for separável. Notemos também que

$$\widetilde{L}_2 = \left(Id_2 \otimes \begin{pmatrix} \vec{0} & Id_{n-1} \end{pmatrix}\right) (L_2) \left(Id_2 \otimes \begin{pmatrix} \vec{0}^t \\ Id_{n-1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} Id_{n-1} & C \\ C^* & F \end{pmatrix} \in M_2 \otimes M_{n-1}.$$

Isso implica que L_2 é separável se, e somente se $\widetilde{L}_2$ for separável.

Assim, γ é separável se, e somente se $\widetilde{L}_2$ for separável. Além disso,

$$G_{\widetilde{L}_2}(Id_2) = Id_{n-1}tr(\hat{e}_1) + Ctr(\hat{e}_2) + C^*tr(\hat{e}_3) + Ftr(\hat{e}_4) = Id_{n-1} + F$$

é Hermitiana positiva definida, já que F é Hermitiana positiva semi-definida, e $\widetilde{L}_2$ é PPT pois $(Id_2 \otimes U)\delta(Id_2 \otimes U^*)$ é PPT.

Então reduzimos o problema de detectar o emaranhamento da matriz PPT $\gamma \in M_2 \otimes M_n$ ao problema de detectar o emaranhamento da matriz PPT $\widetilde{L}_2 \in M_2 \otimes M_{n-1}$. Se $\widetilde{L}_2$ tiver um vetor de posto 1 no núcleo então podemos reduzir o problema a uma matriz em $M_2 \otimes M_{n-2}$. Continuando o processo ou obteremos uma matriz PPT em $M_2 \otimes M_m$ sem vetores de posto 1 no núcleo, a qual devemos detectar seu emaranhamento, ou continuamos o processo até obter uma matriz em $M_2 \otimes M_1$ que será separável e portanto a γ também.

CASO 2. $G_\gamma(Id_2)$ não é positiva definida. De [3, Lemma 3.42.] temos

$$\gamma = \frac{F_\gamma(Id_n) \otimes G_\gamma(Id_2)}{tr(\gamma)} + \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes B_j,$$

onde $A_j \in M_2$, $B_j \in M_n$ são Hermitianas, $Im(A_j) \subset Im(F_\gamma(Id_n))$ e $Im(B_j) \subset Im(G_\gamma(Id_2))$, para $j = 1, 2, \ldots, n$. Mas $Im(B_j) \subset Im(G_\gamma(Id_2))$ se, e somente se existe $\epsilon > 0$ tal que $G_\gamma(Id_2) \pm \epsilon B_j \in P_n$, por [16, Lema 2.2.1.]. Como $G_\gamma(Id_2) \in P_n$, existe uma matriz unitária $R \in M_n$ tal que

$$RG_\gamma(Id_2)R^* = \begin{pmatrix} D_{k\times k} & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix},$$

sendo D uma matriz diagonal positiva e $k < n$, pois $G_\gamma(Id_2)$ não é positiva definida. Agora, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ temos

$$RG_\gamma(Id_2)R^* \pm \epsilon RB_jR^* = R\left(G_\gamma(Id_2) \pm \epsilon B_j\right)R^* \in P_n,$$

ou seja, $Im(RB_jR^*) \subset Im(RG_\gamma(Id_2)R^*)$, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Logo

$$RB_jR^* = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_j & (C_j)_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix},$$

onde $\widetilde{B}_j \in M_k$. Como RB_jR^* é Hermitiana, segue $(C_j)_{k\times n-k} = 0_{k\times n-k}$. Assim

$$RB_jR^* = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_j & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix},$$

para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Então,

$$\begin{aligned}(Id_2 \otimes R)\gamma(Id_2 \otimes R^*) &= \frac{F_\gamma(Id_n)}{tr(\gamma)} \otimes RG_\gamma(Id_2)R^* + \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes RB_jR^* \\ &= \frac{F_\gamma(Id_n)}{tr(\gamma)} \otimes \begin{pmatrix} D_{k\times k} & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes \begin{pmatrix} \widetilde{B}_j & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Notemos que γ é separável se, e somente se $(Id_2 \otimes R)\gamma(Id_2 \otimes R^*)$ for separável, mas isso acontece se, e somente se a matriz

$$\widetilde{\gamma} = \frac{F_\gamma(Id_n)}{tr(\gamma)} \otimes D_{k\times k} + \sum_{j=1}^{n} A_j \otimes \widetilde{B}_j \in M_2 \otimes M_k,$$

for separável. Então, estudar a separabilidade de $\gamma \in M_2 \otimes M_n$ é equivalente a estudar a separabilidade de $\widetilde{\gamma} \in M_2 \otimes M_k$, com $k < n$. Se $G_{\widetilde{\gamma}}(Id_2)$ for positiva definida então estamos no caso 1, do contrario, voltamos para o caso 2.

Se pudermos repetir o caso 2 várias vezes até obter $k = 1$ então concluiremos que γ é separável. A outra opção é o caso 1, onde já vimos que basta resolver o problema da separabilidade para matrizes sem vetores de posto 1 no núcleo.

■

Corolário 4.24. *Para resolver o problema da separabilidade dos estados quânticos em $M_2 \otimes M_n$, basta resolvê-lo para matrizes em $M_2 \otimes M_n$ na forma normal de filtro.*

Demonstração. Estados em $M_2 \otimes M_n$ sem vetores de posto 1 no núcleo podem ser postos na forma normal de filtro pelo Corolário (4.9). Logo o resultado segue do Teorema (4.23).

■

Corolário 4.25. *Se $\gamma \in M_2 \otimes M_2$ é um estado PPT com um vetor de posto 1 no núcleo então γ é separável.*

Demonstração. Pelo teorema anterior temos que se γ possui um vetor de posto 1 no núcleo, então existe $\widetilde{L_2} \in M_2 \otimes M_1$ tal que γ é separável se, e somente se $\widetilde{L_2}$ for separável, o que é sempre verdade.

■

4.2.2 Solução do problema da separabilidade em $M_2 \otimes M_2$

O último resultado que apresentaremos aqui é a solução do problema da separabilidade em $M_2 \otimes M_2$, isto é, $\gamma \in M_2 \otimes M_2$ é separável se, e somente se ele for positivo sob transposição parcial. Para isso vamos precisar do seguinte lema que reduz o problema da separabilidade em $M_2 \otimes M_2$ para um tipo muito especial de matrizes. Nessa nova redução utilizaremos a redução a estados na forma normal de filtro obtida no Corolário (4.24).

Definição 4.26. *As matrizes normalizadas da base de Pauli de M_2 são*

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ \gamma_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},\ \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Lema 4.27. *Seja $\gamma \in M_2 \otimes M_2$ um estado PPT sem vetores de posto 1 no núcleo. Então existem matrizes invertíveis R, S tais que*

$$(R \otimes S)\gamma(R^* \otimes S^*) = \gamma_1 \otimes \gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 \otimes \gamma_2 + \lambda_3\gamma_3 \otimes \gamma_3 + \lambda_4\gamma_4 \otimes \gamma_4,$$

onde

(1) γ_i, $i = 1 \ldots, 4$, *são as matriz da base de Pauli e*

(2) $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$ *e* $\lambda_4 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Pelo Corolário (4.9), como γ não possui vetores de posto 1 no núcleo, ele pode ser posto na forma normal de filtro, ou seja, existem matrizes invertíveis $G, H \in M_2$ tais que

$$\gamma' = (G \otimes H)\gamma(G^* \otimes H^*) = \sum_{j=1}^{n} C_j \otimes D_j$$

com

(1) C_j, $j = 1, \ldots, n$, são Hermitianas em M_2 e ortogonais com respeito ao produto interno do traço,

(2) D_j, $j = 1, \ldots, n$, são Hermitianas em M_2 e ortogonais com respeito ao produto interno do traço e

(3) $C_1 = C_1 = \gamma_1$.

Assim,

$$\gamma' = \gamma_1 \otimes \gamma_1 + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j A_j \otimes B_j,$$

onde $\lambda_j = \|C_j\|\|D_j\|$, $A_j = C_j/\|C_j\|$ e $B_j = D_j/\|D_j\|$.

Podemos completar os conjuntos ortonormais $\{\gamma_1, A_2, ..., A_n\}$ e $\{\gamma_1, B_2, ..., B_n\}$ para obter bases ortonormais $\{\gamma_1, A_2, ..., A_4\}$ e $\{\gamma_1, B_2, ..., B_4\}$ de M_2 formada por matrizes Hermitianas.

Assim podemos escrever

$$\gamma' = (G \otimes H)\gamma(G^* \otimes H^*) = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j A_j \otimes B_j$$

onde

(1) A_j, $j = 1, \ldots, 4$, são Hermitianas em M_2 e ortonormais com respeito ao produto interno do traço,

(2) B_j, $j = 1, \ldots, 4$, são Hermitianas em M_2 e ortonormais com respeito ao produto interno do traço,

(3) $A_1 = B_1 = \gamma_1$ e

(4) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$.

Para $j = 2, 3, 4$, temos $tr(A_1 A_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} tr(A_j) = 0$ e $tr(A_j A_j^*) = tr(A_j^2) = 1$. O mesmo vale para os B_j. Assim para $j \geq 2$, as matrizes $A_j, B_j \in M_2$ são Hermitianas de norma 1 e tem traço 0. Portanto seus dois autovalores são $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Agora, como A_2, B_2 são Hermitianas, existem matrizes unitárias $U, V \in M_2$ tais que $UA_2U^* = VB_2V^* = \gamma_2$. Logo,

(1) $C_j = UA_jU^*$, $j = 1, \ldots, 4$, são Hermitianas em M_2 e ortonormais com respeito ao produto interno do traço, pois

$$tr(C_iC_j) = tr(UA_iU^*UA_jU^*) = tr(A_iA_j).$$

Analogamente,

(2) $D_j = VB_jV^*$, $j = 1, \ldots, 4$, são Hermitianas em M_2 e ortonormais com respeito ao produto interno do traço, e

(3) $UA_1U^* = VB_1V^* = \gamma_1$.

Agora, definimos

$$\gamma'' = (U \otimes V)\gamma'(U^* \otimes V^*) = \gamma_1 \otimes \gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 \otimes \gamma_2 + \lambda_3 C_3 \otimes D_3 + \lambda_4 C_4 \otimes D_4.$$

Como C_3 é Hermitiana de norma 1 e ortogonal a γ_1 e γ_2 temos que

$$C_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & -a \end{pmatrix}$$

e

$$0 = tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right) = tr\left(\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & -\frac{b}{\sqrt{2}} \\ \frac{\overline{b}}{\sqrt{2}} & \frac{a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right) = 2\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Portanto,

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \overline{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente,

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ \overline{c} & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $tr(C_3^2) = tr(D_3^2) = 1$, temos $|b| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $|c| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Definimos

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}$$

satisfazendo

(1) $|r_1| = |r_2| = |s_1| = |s_2| = 1$,

(2) $r_2\overline{br_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e

(3) $s_2\overline{cs_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Isso implica que $R, S \in M_2$ são unitárias e

$$RC_3R^* = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ \overline{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{r}_1 & 0 \\ 0 & \overline{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r_1 b \overline{r}_2 \\ r_2 \overline{b r_1} & 0 \end{pmatrix} = \gamma_3,$$

$$SD_3S^* = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ \overline{c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{s}_1 & 0 \\ 0 & \overline{s}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s_1 c \overline{s}_2 \\ s_2 \overline{c s_1} & 0 \end{pmatrix} = \gamma_3.$$

Além disso,

$$R\gamma_1 R^* = S\gamma_1 S^* = \gamma_1 \quad \text{e} \quad R\gamma_2 R^* = S\gamma_2 S^* = \gamma_2.$$

Definimos

$$\gamma''' = (R \otimes S)\gamma''(R^* \otimes S^*) = \gamma_1 \otimes \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 \otimes \gamma_2 + \lambda_3 \gamma_3 \otimes \gamma_3 + \lambda_4 E_4 \otimes F_4,$$

onde $E_4 = RC_4R^*$ e $F_4 = SD_4S^*$. Como E_4 é Hermitiana de norma 1 e ortogonal a γ_1, γ_2 e γ_3, então

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & e \\ \overline{e} & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$0 = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & e \\ \overline{e} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \right) = tr\left(\begin{pmatrix} \frac{e}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\overline{e}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) = \frac{e + \overline{e}}{\sqrt{2}},$$

isto é, $\overline{e} = -e$, segue $e = i\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$. Já que E_4 tem norma 1, temos

$$1 = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & i\alpha \\ -i\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i\alpha \\ -i\alpha & 0 \end{pmatrix} \right) = tr\left(\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \right) = 2\alpha^2.$$

Assim,

$$E_4 = \pm \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \pm\gamma_4.$$

Analogamente, $F_4 = \pm\gamma_4$. Portanto,

$$\gamma''' = \gamma_1 \otimes \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 \otimes \gamma_2 + \lambda_3 \gamma_3 \otimes \gamma_3 \pm \lambda_4 \gamma_4 \otimes \gamma_4.$$

$\blacksquare$

O próximo teorema resolve o problema da separabilidade em $M_2 \otimes M_2$.

Teorema 4.28. *Seja $\gamma \in M_2 \otimes M_2$ um estado. Então γ é separável se, e somente se γ é PPT.*

Demonstração. Da Observação (4.19) temos que ser positiva sob transposição parcial é necessária para separabilidade. Vamos provar agora que isso é suficiente em $M_2 \otimes M_2$. Portanto vamos assumir que γ é PPT.

Se γ possuir um vetor de posto 1 no núcleo, do Corolário (4.25) segue que γ é separável. Suponhamos que não existe tal vetor no núcleo. Pelo Lema (4.27), existem matrizes $R, S \in M_2$ invertíveis tais que

$$\delta = (R \otimes S)\gamma(R^* \otimes S^*) = \gamma_1 \otimes \gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 \otimes \gamma_2 + \lambda_3\gamma_3 \otimes \gamma_3 \pm \lambda_4\gamma_4 \otimes \gamma_4,$$

onde $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$ e $\lambda_4 \geq 0$. Agora, $\gamma = \sum_{j=1}^n A_j \otimes B_j$, então

$$\delta^\Gamma = \sum_{j=1}^n RA_jR^* \otimes (SB_jS^*)^t = (R \otimes \overline{S}) \sum_{j=1}^n A_j \otimes B_j^t(R^* \otimes \overline{S}^*) = (R \otimes \overline{S})\gamma^\Gamma(R^* \otimes S^t).$$

Como γ^Γ é Hermitiana positiva semi-definida, segue que δ^Γ também é Hermitiana positiva semi-definida. Notemos que

$$\delta^\Gamma = \gamma_1 \otimes \gamma_1^t + \lambda_2\gamma_2 \otimes \gamma_2^t + \lambda_3\gamma_3 \otimes \gamma_3^t \pm \lambda_4\gamma_4 \otimes \gamma_4^t = \gamma_1 \otimes \gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 \otimes \gamma_2 + \lambda_3\gamma_3 \otimes \gamma_3 \mp \lambda_4\gamma_4 \otimes \gamma_4,$$

pois $\gamma_4^t = -\gamma_4$. Definimos $\zeta = \gamma_1 \otimes \gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 \otimes \gamma_2 + \lambda_3\gamma_3 \otimes \gamma_3 + \lambda_4\gamma_4 \otimes \gamma_4$, então $\zeta = \delta$ ou $\zeta = \delta^\Gamma$. Seja $\{e_1, e_2\}$ a base canônica do $\mathbb{C}^2$. Consideremos o vetor $w = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$. Para toda matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2$$

temos,

$$(A \otimes A)w = (A \otimes A)(e_1 \otimes e_2) - (A \otimes A)(e_2 \otimes e_1) = Ae_1 \otimes Ae_2 - Ae_2 \otimes Ae_1,$$

assim

$$(A \otimes A)w = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \det(A) \\ -\det(A) \\ 0 \end{pmatrix} = \det(A) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \det(A)w.$$

Dai, $(\gamma_i \otimes \gamma_i)w = \det(\gamma_i)w$, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Então

$$\zeta w = (\gamma_1 \otimes \gamma_1)w + \sum_{j=2}^4 (\lambda_j\gamma_j \otimes \gamma_j)w = \det(\gamma_1)w + \sum_{j=2}^4 \lambda_j \det(\gamma_j)w.$$

Mas ζ é Hermitiana positiva semi-definida. Assim

$$0 \leq w^*\zeta w = w^* \det(\gamma_1)w + \sum_{j=2}^4 w^*\lambda_j \det(\gamma_j)w = \det(\gamma_1)w^*w + \sum_{j=2}^4 \lambda_j \det(\gamma_j)w^*w.$$

Como $w^*w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t = 2$, temos

$$0 \leq 2\left(\det(\gamma_1) + \sum_{j=2}^{4} \lambda_j \det(\gamma_j)\right),$$

isto é, $\det(\gamma_1) + \sum_{j=2}^{4} \lambda_j \det(\gamma_j) \geq 0$. Agora, $\det(\gamma_1) = 1/2$ e $\det(\gamma_i) = -1/2$ para $i = 2, 3, 4$. Portanto $(1/2) - (1/2)(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \geq 0$, ou seja, $\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \leq 1$. Notemos que

$$\zeta = (1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)\gamma_1 \otimes \gamma_1 + \sum_{j=2}^{4} \lambda_j(\gamma_1 \otimes \gamma_1 + \gamma_j \otimes \gamma_j),$$

e para cada $2 \leq i \leq 4$,

$$\gamma_1 \otimes \gamma_1 + \gamma_i \otimes \gamma_i = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_i) \otimes (\gamma_1 + \gamma_i) + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_i) \otimes (\gamma_1 - \gamma_i).$$

Também, $\gamma_1 \pm \gamma_i \in P_2$, para $i = 2, 3, 4$ e $1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \geq 0$ então ζ é separável e portanto δ ou δ^Γ é separável. Mas se δ^Γ é separável é claro que δ é separável. Daí temos δ separável e pela Observação (4.16) γ é separável.

$\blacksquare$

Bibliografia

[1] Bhatia, R. *Positive definite matrices*, Princeton (NJ): Princeton University Press, 2009. https://doi.org/10.1515/9781400827787.

[2] Birkhoff, G., *Tres observaciones sobre el algebra lineal*, Univ. Nac. Tucuman, Ser. A 5, p. 147-154, 1946.

[3] Cariello, D., *Analytical Techniques on Multilinear Problems*, Doctoral dissertation,, Universidad Complutense de Madrid (2016), Retrieved from http://eprints.ucm.es/43479/1/T38970.pdf.

[4] Cariello, D., *Sinkhorn–Knopp theorem for rectangular positive maps*, Linear and Multilinear Algebra, Vol. 67, Issue 11, p. 2345-2365, 2018. https://doi.org/10.1080/03081087.2018.1491524.

[5] Ende, F., *Strict positivity and D-majorization*, Linear and Multilinear Algebra, p. 1-25, 2020. https://doi.org/10.1080/03081087.2020.1860887.

[6] Frobenius, G., *Über matrizen aus positiven Elementen*, S.-B. Kgl. Preuss. Akad. Wiss., p. 456-477, 1912.

[7] Gühne, O.; Tóth, G., *Entanglement detection*, Physics Reports, Vol. 474, No. 1-6, p. 1-75, 2009. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2009.02.004.

[8] Gurvits, L. *Classical deterministic complexity of Edmonds' Problem and quantum entanglement*, Proceedings of the thirty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing; Jun 9-–11; San Diego, CA, USA. New York: ACM press, p.10-19, 2003. https://doi.org/10.1145/780542.780545.

[9] Horn, R.; Johnson, C., *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, p. 239-254, 1991. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840371.

[10] Horodecki, M.; Horodecki, P.; Horodecki, R., *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions* , Physics Letters A 223, p. 1-8, 1996. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2.

[11] Konig, D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Vol. 72, American Mathematical Soc., 2001.

[12] Kraus B.; Cirac J. I.; Karnas S.; Lewenstein M., *Separability in* $2 \times N$ *composite quantum systems*. Physical Review A, 61(6), 2000. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.062302.

[13] Leinaas, J. M.; Myrheim, J.; Ovrum, E., *Geometrical aspects of entanglement*, Physical Review A 74, 012313, 2006. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.012313.

[14] Meyer, C.D., *Matrix Analysis and applied linear algebra*, Vol. 2, SIAM 2000. https://doi.org/10.1137/1.9780898719512.

[15] Marcus, M.; Minc, H, *A survey of matrix theory and matrix inequalities*, Vol. 14. Courier Corporation, 1992.

[16] Silva, L., *Teoria de Perron Frobenius para mapas positivos*, Monografia, Universidade Federal de Uberlândia, 2019.

[17] Sinkhorn, R.; Knopp, P. *Concerning nonnegative matrices and doubly stochastic matrices*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 21, No. 2, p. 343-348, 1967. https://doi.org/10.2140/pjm.1967.21.343.