

**ULISSES LIMA ROSA**

**PROJETO ÓTIMO-ROBUSTO DE SISTEMAS  
DINÂMICOS ESTOCÁSTICOS BASEADO NA  
ANÁLISE DE FADIGA**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**2021**

ULISSES LIMA ROSA

**PROJETO ÓTIMO-ROBUSTO DE SISTEMAS DINÂMICOS  
ESTOCÁSTICOS BASEADO NA ANÁLISE DE FADIGA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA.**

Área de concentração: Mecânica dos sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima

UBERLÂNDIA – MG

2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

R788 2021	<p>Rosa, Ulisses Lima, 1992- Projeto Ótimo-Robusto de Sistemas Dinâmicos Estocásticos Baseado na Análise de Fadiga [recurso eletrônico] / Ulisses Lima Rosa. - 2021.</p> <p>Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Modo de acesso: Internet. Disponível em: <a href="http://doi.org/10.14393/ufu.te.2021.95">http://doi.org/10.14393/ufu.te.2021.95</a> Inclui bibliografia.</p> <p>1. Engenharia mecânica. I. Lima, Antônio Marcos Gonçalves de, 1975-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.</p> <p>CDU: 621</p>
--------------	--

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091


**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br


**ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO**

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Tese de Doutorado, nº 310, COPEM				
Data:	25/02/2021	Hora de início:	08:00	Hora de encerramento:	11:50
Matrícula do Discente:	11613EMC013				
Nome do Discente:	Ulisses Lima Rosa				
Título do Trabalho:	Projeto Ótimo-Robusto de Sistemas Dinâmicos Estocásticos Baseado na Análise de Fadiga				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	PQ				

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Marcus Antonio Viana Duarte - FEMEC/UFU; Roberto Mendes Finzi Neto - FEMEC/UFU; Edson Hideki Koroishi - UTFPR; Sebastião Simões da Cunha Júnior - UNIFEI; e Antônio Marcos Gonçalves de Lima - FEMEC/UFU, orientador do candidato. Ressalta-se que os Prof. Marcus Antonio Viana Duarte, Roberto Mendes Finzi Neto, Antônio Marcos Gonçalves de Lima e o Discente participaram da defesa por meio de videoconferência desde a cidade de Uberlândia/MG; Edson Hideki Koroishi desde a cidade de Cornélio Procopio/PR; e Sebastião Simões da Cunha Júnior desde a cidade de Itajubá/MG, em atendimento a Portaria nº 36, de 19 de março de 2020, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos Gonçalves de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/02/2021, às 11:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Roberto Mendes Finzi Neto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/02/2021, às 11:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sebastiao Simoes da Cunha Jr, Usuário Externo**, em 25/02/2021, às 11:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcus Antonio Viana Duarte, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/02/2021, às 11:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edson Hideki Koroishi, Usuário Externo**, em 25/02/2021, às 11:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2587944** e o código CRC **80208FF4**.

*“The sun is the same in a relative way  
but you’re older”*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a meus pais, irmão, avós e toda a minha família por terem me concedido o ambiente e a educação propícios para que eu pudesse me desenvolver intelectualmente e chegar aonde cheguei. Sou extremamente grato por nunca ter me faltado um livro, um gibi, uma revista, um computador ou qualquer dispositivo que pudesse me auxiliar a adquirir conhecimento.

Na sequência agradeço de maneira carinhosa à Lorraine, que esteve presente em quase toda a totalidade dessa caminhada ao meu lado. Seu jeito doce de ser foi, por muitas vezes, toda a base de apoio que eu tive quando as minhas condições mentais eram adversas e tudo que eu pensava era em desistir. Apesar de não termos continuado nossa caminhada juntos, tudo que aprendi nesses últimos anos possui uma parcela de contribuição de nosso relacionamento.

Agradeço ao meu orientador Antônio Marcos por ter compreendido e aceitado o processo de mudança pelo qual passei. Nosso convívio fez com que eu me motivasse a seguir na busca e compartilhamento de conhecimento. Por meio deste convívio fui inserido na comunidade científica e por isso sou muito grato.

Agradeço imensamente à minha psicóloga Anna Abdala pelo excelente tratamento disposto para que eu pudesse me reencontrar e voltar a trilhar o caminho que me propus quando decidi me integrar ao meio acadêmico.

Agradeço a Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica e LMEst pela disponibilização de seu espaço. Agradeço também a todos os amigos, colegas, professores e colaboradores que contribuíram, cada um de sua forma, para minha formação acadêmica e também em minha formação como ser humano pensante.

Agradeço à CAPES pela concessão da bolsa de estudos e pelas outras agências de fomento CNPq e FAPEMIG pelo amparo à pesquisa brasileira. O suporte do governo por meio dessas agências é imprescindível para que nosso país cresça e se desenvolva.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a mim mesmo por ter tido um processo de mudança tão importante em minha vida, que no fim me engrandeceu bastante como pessoa, apesar das poucas e boas que passei. Nas horas em que eu me encontrava sozinho e abatido tive que compreender solitariamente o porquê de muitas coisas que se passavam na minha cabeça e só assim pude ter uma pequena noção do que é, como funciona e do poder da mente humana.

ROSA, U. L. **Projeto Ótimo-Robusto de Sistemas Dinâmicos Estocásticos Baseado na Análise de Fadiga**. 2021. 113f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

## Resumo

Este trabalho é dedicado à elaboração de um método computacional capaz de realizar análises de fadiga em estruturas dinâmicas sujeitas a carregamentos aleatórios e incertezas em seus parâmetros geométricos e físicos. A modelagem é feita por meio do método dos elementos finitos estocásticos, com incertezas sendo incluídas de forma paramétrica, causando perturbações nas matrizes de massa e rigidez e propagando-as pelo modelo. A discretização dos campos aleatórios é feita pelo método de expansão de Karhunen-Loève, afetando diretamente a integração das matrizes elementares do sistema dinâmico. Por meio da aplicação do critério de Sines aliado com técnicas de análise de sinais e históricos de tensões no domínio da frequência, é possível estimar um índice indicativo de falha de cada um dos elementos da estrutura. Para que os resultados possam ser obtidos em tempo não proibitivo é indispensável a aplicação de técnicas de redução de modelo, visando ganho em tempo computacional. As técnicas clássicas tal como a base de Ritz não atendem completamente as necessidades referentes à execução do programa em tempo hábil. Dessa maneira, propõe-se aqui uma alternativa a essa base, onde o problema de autovetores é calculado somente uma vez para o sistema nominal e a base se atualiza a cada iteração por meio de resíduos estáticos gerados por forças não-exatas, que surgem devido à flutuação dos parâmetros aleatórios. Com o uso dessa base é possível realizar um procedimento de otimização robusta com o intuito de se obter um ponto ótimo que reduza a massa da estrutura e aumente sua vida em fadiga, objetivos diretamente conflitantes. Esse método possibilita a obtenção de um conjunto de soluções de Pareto com pontos menos susceptíveis à variação das propriedades do sistema. Dessa maneira, o projetista pode escolher dentre aqueles pontos o que melhor se adapta a seus anseios e aumentar a vida em fadiga dos elementos mais críticos.

---

*Palavras-chave: modelagem estocástica, propagação de incertezas, critério de fadiga, otimização robusta, redução de modelos*

ROSA, U. L. **Robust Optimal Project of Dynamic Stochastic Systems Based on Fatigue Analysis**. 2021. 113p. Ph. D. Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

### Abstract

This work is devoted to the proposition of a computational method capable of performing fatigue analysis on dynamic structures subject to random loads and uncertainties in their geometric and physical parameters. The modeling is based on the stochastic finite element method, with uncertainties being included in a parametric way, causing disturbances in mass and stiffness matrices, and propagating them through the model. The discretization of random fields is done by the Karhunen-Loève expansion method, directly affecting the integration of the elementary matrices of the dynamic system. Through the application of the Sines criterion combined with signal analysis techniques and stress history in the frequency domain, it is possible to estimate an indicative failure index for each of the elements of the structure. For the results to be obtained in a non-prohibitive time, it is essential to apply model reduction techniques, aiming at gaining computational time. Classical techniques such as the Ritz base do not fully meet the needs regarding the execution of the program in a timely manner. Thus, an alternative to this base is proposed here, where the eigensolutions are calculated only once for the nominal system and the base is updated at each iteration by means of static residues generated by non-exact forces, which arise due to fluctuation of random parameters. With the use of this base, it is possible to carry out a robust optimization procedure to obtain an optimum point capable of reducing structural mass and increases its fatigue life, which are directly conflicting objectives. This method aims to obtain a set of Pareto solutions with points less susceptible to variations in the system's properties. In this way, the designer can choose from those points the one that best suits his desires and increase the fatigue life of the most critical elements.

---

*Keywords: stochastic modeling, uncertainties propagation, fatigue criterion, robust optimization, model condensation*

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos Latinos

$\mathbf{B}(x, y, z)$	operadores diferenciais aplicados às funções de forma
$\mathbf{B}_N(x, y)$	matriz de derivadas das funções de formas
$C(x_1, x_2)$	função de covariância
$\mathbf{D}$	matriz de operadores diferenciais
$D_{\text{Sines}}$	coeficiente de Sines
$E$	módulo de elasticidade [GPa]
$E[\bullet]$	operador esperança matemática
$f(t)$	carregamento externo aplicado [N]
$f_n$	frequência natural [Hz]
$f_0$	limite de fadiga em tração repetida [Mpa]
$f_{-1}$	limite de fadiga em tração alternada simétrica [Mpa]
$g(t)$	esforço do tipo impulso unitário [N]
$\mathbf{G}(\omega)$	matriz de funções resposta em frequência [dB]
$h$	espessura da placa [m]
$\mathbf{H}$	matriz de propriedades mecânicas do material
$H(x, \theta)$	campo aleatório
$\hat{H}(x, \theta)$	campo aleatório aproximado
$H_r(x), \xi_r(\theta)$	funções determinísticas e variáveis aleatórias
$J_2$	segundo invariante do tensor desvio [Mpa]
$J_{2,a}$	segundo invariante do tensor desvio, aproximado [Mpa]
$k_a, k_b, k_c, k_d, k_e, k_f$	modificadores do limite de resistência à fadiga
$L_x, L_y$	comprimentos de correlação nas direções $x, y$ [m]
$\mathbf{M}^{(e)}(\theta), \mathbf{K}^{(e)}(\theta)$	matrizes elementares estocásticas
$\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}$	matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema
$\mathbf{M}^{(e)}, \mathbf{K}^{(e)}$	matrizes de massa e rigidez elementares
$\mathbf{M}_R, \mathbf{K}_R, \mathbf{C}_R$	matrizes de massa, rigidez e amortecimento reduzidas

$\mathbf{N}(x, y)$	vetor de funções de forma
$N_{GDL}$	número de graus de liberdade da estrutura completa
$\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_w, \mathbf{N}_{\theta_x}, \mathbf{N}_{\theta_y}$	funções de forma ou de aproximação
$p(x)$	função densidade de probabilidade
$p_{hid}(t)$	pressão hidrostática
$R_x(\tau)$	função de autocorrelação
$S_e$	limite de resistência à fadiga uniaxial [Mpa]
$S_y, S_{ut}$	limite de escoamento e ruptura [Mpa]
$t_0$	limite de fadiga em torção repetida [Mpa]
$t_{-1}$	limite de fadiga em torção alternada simétrica [Mpa]
$\mathbf{U}(x, y, z, t)$	vetor de deslocamentos
$\hat{\mathbf{U}}(x, y, z, t)$	vetor deslocamentos aproximados pelas funções de forma
$u_e(t)$	deslocamentos elementares [m]
$u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y$	graus de liberdade: deslocamentos e rotações
$u, v, w$	deslocamentos nas três direções cartesianas
$\mathbf{Z}(\omega)$	matriz de impedância mecânica do sistema

### Símbolos Gregos

$\beta$	coeficiente de amortecimento proporcional
$\delta_i$	fator de irregularidade
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	deformações normais e cisalhantes
$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t)$	vetor de deformações
$\phi_x(\omega)$	matriz de densidades espectrais de potência
$\Phi_S(\omega)$	matriz reduzida de densidades espectrais em tensão [Pa <sup>2</sup> /Hz]
$\gamma$	constante de Euler-Mascheroni
$\lambda_m$	momento estatístico de ordem $m$
$\lambda_r, \mathbf{f}_r(x, y)$	autovalores e autofunções de $\mathbf{C}(x_1, x_2)$
$\mu_i, \beta_i$	modo e dispersão de um processo aleatório
$\mu_x, \mathbf{s}_x^2, \psi_x^2$	propriedades estatísticas de um processo $x$
$\nu$	coeficiente de Poisson

$\rho$	massa específica [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_a, \sigma_m$	níveis máximos e médios de tensão flutuante [Mpa]
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	tensões normais e cisalhantes [Mpa]
$\sigma(x, y, z, t)$	vetor de tensões [Mpa]
$\omega$	frequência de excitação [rad/s]
$\Omega_x, \Omega_y$	domínios estocásticos
$\zeta_3$	constante de Apery
$\Psi$	matriz de propriedades mecânicas reduzida

### Abreviações

FEM	método dos elementos finitos
FRF	função resposta em frequência
GDL	grau de liberdade
KL	método de Karhunen-Loève
LHC	método de amostragem Hipercubo Latino
MCS	simulação de Monte Carlo
NSGA-II	<i>Non dominated Sorting Genetic Algorithm 2</i>
PDF	função densidade de probabilidade
PSD	densidade espectral de potência
RMSD	raiz quadrada do desvio médio quadrático
SFEM	método dos elementos finitos estocásticos

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 Contexto do estudo .....	1
1.2 Objetivos .....	5
1.3 Organização da tese .....	6
<b>CAPÍTULO II - CRITÉRIO MULTIAXIAL DE SINES PARA ANÁLISE DE FADIGA EM METAIS .....</b>	<b>8</b>
2.1 Revisão sobre o fenômeno de fadiga em metais .....	8
2.2 Vida em fadiga uniaxial .....	11
2.3 Vida em fadiga multiaxial.....	15
2.4 Escolha do critério de fadiga multiaxial.....	17
2.5 Formulação do critério de Sines para carregamentos aleatórios não-proporcionais.....	19
<b>CAPÍTULO III - MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE PLACAS FINAS PARA ANÁLISE DE FADIGA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....</b>	<b>28</b>
3.1 Modelagem determinística de placas finas para análise de tensão no domínio da frequência .....	28
3.2 Modelo de elementos finitos estocásticos para análise de fadiga.....	41
3.2.1 Parametrização das variáveis incertas.....	41
3.2.3 Cálculo das matrizes elementares estocásticas de massa e rigidez .....	44
3.3 Solução do Problema Estocástico .....	49
<b>CAPÍTULO IV - BASE DE REDUÇÃO ROBUSTA PARA SISTEMAS ESTOCÁSTICOS ...</b>	<b>50</b>
4.1 Revisão sobre síntese modal de componentes .....	50
4.2 Base modal de Ritz .....	53
4.3 Base de redução adaptada a sistemas estocásticos .....	57
<b>CAPÍTULO V - OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO ROBUSTA .....</b>	<b>61</b>
5.1 Introdução aos métodos de otimização .....	61
5.2 Otimização multiobjetivo.....	63

5.3 Método de solução do problema de otimização – NSGA-II.....	67
5.4 Método de solução do problema completo .....	70
<b>CAPÍTULO VI - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS .....</b>	<b>74</b>
6.1 Apresentação da estrutura nominal em análise .....	74
6.2 Comparação entre as bases de redução .....	77
6.3 Geração das respostas do sistema estocástico .....	80
6.4 Procedimento de otimização robusta.....	86
6.5 Avaliação da robustez do ponto ótimo escolhido .....	88
<b>CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS</b> <b>.....</b>	<b>91</b>
7.1 Resumo e contribuições .....	91
7.2 Produção científica .....	93
7.3 Perspectivas de trabalhos futuros .....	94
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>96</b>

# **CAPÍTULO I**

## **INTRODUÇÃO**

### **1.1 Contexto do estudo**

Este trabalho de tese está inserido nas temáticas de pesquisa que vem sendo desenvolvidas no Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst), da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC), da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Em síntese, é apresentada uma metodologia de otimização robusta baseada em técnicas de análise de fadiga no domínio da frequência para sistemas estocásticos submetidos a carregamentos dinâmicos aleatórios combinada com um método eficiente de redução de modelos.

O desenvolvimento de projetos de engenharia passa por algumas etapas onde o objeto em concepção é analisado, classicamente, quanto à sua falha em condições diversas, sejam elas estáticas (baseadas nos conceitos de resistência dos materiais) ou dinâmicas (baseadas nos conceitos da mecânica clássica). Ambas essas abordagens visam caracterizar e quantificar a falha da estrutura quando seus limites de resistência são ultrapassados sob diferentes modos de carregamento.

A busca por eficiência, conforto, segurança e confiabilidade para operadores e usuários de máquinas são fatores chaves na concepção de um projeto estrutural em engenharia. As análises clássicas de resistência dos materiais nem sempre englobam todas as possibilidades de falha da estrutura. Efeitos dinâmicos gerados por carregamentos que variam no tempo são, por vezes, muito mais críticos do que os próprios limites de resistência

do material, por exemplo, limite de escoamento e limite de ruptura. O fenômeno da fadiga em metais está inserido neste contexto.

Segundo Callister (2000), estima-se que 90% de todas as falhas em metais são causadas pela fadiga. Sua característica principal engloba a nucleação e propagação de trincas sob carregamentos que geram tensões significativamente inferiores aos limites de resistência do material. Além disso, essa propagação se dá, na maioria das vezes, de maneira bem lenta, o que acarreta quebras repentinas sem aviso prévio notável a olho nu (DOWLING, 2007). Daí o potencial perigosamente destrutivo das falhas por fadiga.

O fenômeno de fadiga em si ainda não é completamente compreendido (TAKAHASHI, 2014). No entanto, existem diversos métodos de predição e estimativa da vida em fadiga, baseados nas tensões e deformações que a estrutura sofre (BUDYNAS e NISBETT, 2011). Esses métodos envolvem em sua formulação, várias parcelas empíricas, onde os valores dos coeficientes da vida em fadiga são obtidos quase que de maneira puramente experimental. É evidente que essas análises carreguem um nível considerável de erros e incertezas de medição e aquisição de dados, o que requer atenção dos projetistas quando aplicados ao projeto de estruturas reais.

Os primeiros estudos na área de fadiga de metais se iniciaram em meados do século XIX pelo engenheiro ferroviário alemão August Wöhler, que estava intrigado com as quebras repentinas de trilhos de ferrovias e elementos mecânicos de trens. Seu estudo gerou os diagramas tensão-número de ciclos, ou curvas de Wöhler (SCHUTZ, 1996; WEBER, 1999; KOÇER, 2010). Essas curvas contêm as informações dos limites de vida em fadiga de vários tipos de metais e são geralmente usadas em projetos onde o carregamento aplicado na estrutura é bem conhecido no domínio do tempo.

Com os limites de vida em fadiga em mãos, primeiro deve-se adequá-los à aplicação prática requerida por meio de correções por fatores modificadores (MARIN, 1962) e depois adotar um método de predição de vida em fadiga, onde estão, como os mais amplamente usados: os critérios de Gerber (1874), Goodman (1890) e Sodeberg (1930). Dependendo do tipo e configuração do carregamento, uma lei de acúmulo de dano aliada com um método de contagem de ciclos devem ser aplicados (PALMGREN, 1924; MINER, 1945; MATSUISHI E ENDO 1968).

Para o caso específico de interesse deste trabalho, a análise no domínio do tempo se faz proibitiva devido à natureza aleatória do carregamento adotado. Sendo assim, é preferível que se trabalhe no domínio da frequência (LAMBERT, 2007). Além disso, as tensões presentes na estrutura são de natureza multiaxial, o que aumenta a complexidade

dos métodos existentes na literatura, saindo do escopo das curvas de Wöhler e entrando em métodos baseados em tensões equivalentes, tais como tensões de Tresca, Von Mises, tensão principal máxima e invariantes de tensão.

Dentre os critérios de fadiga multiaxial estudados por Weber (1999), destacou-se o critério de Sines (1959), que foi adotado como método de estimativa de vida em fadiga neste trabalho. Os estudos de Weber envolveram outros critérios, que foram classificados quanto a intervalos de precisão. Os resultados do critério de Sines não foram os melhores dentre todos, mas foram satisfatórios. Sua escolha foi motivada por esse fator, aliado com sua formulação mais simples e que envolve menos propriedades empíricas relacionadas à fadiga (LAMBERT, 2007).

Além do caráter aleatório do carregamento e das incertezas presentes na aquisição dos limites de resistência à fadiga, visando uma simulação estrutural da maneira mais fidedigna possível, é altamente desejável que o modelo leve em conta incertezas inerentes às dimensões físicas e propriedades dos materiais. Nesse âmbito, optou-se pela utilização do método dos elementos finitos estocásticos (GHANEM e SPANOS, 1991; STEFANOU, 2009), permitindo a inclusão de variáveis aleatórias no modelo. Para a discretização dos campos aleatórios, foi aplicada a técnica de expansão de Karhunen-Loève, cujo método insere as incertezas não só por meio da flutuação dos parâmetros, mas também afetando o processo de integração das matrizes de massa e rigidez elementares, o que possibilita sua propagação ao longo de todo o domínio físico do problema.

As técnicas de solução para problemas estocásticos, tais como o método de simulação de Monte Carlo, envolvem muitos indivíduos como parâmetros de entrada e necessitam de várias iterações para que sua convergência seja garantida (SCHUELLER, 2001; STEFANOU, 2009). Então, é de se imaginar que o processo de análise estocástica de sistemas em fadiga envolva um custo computacional elevado. Cada conjunto de variáveis aleatórias consideradas nesse processo requer uma execução completa da rotina de cálculo para obtenção dos valores dos índices de Sines. Se esse cálculo envolver um tempo muito grande, a execução da análise completa em fadiga fica praticamente impossível de ser realizada.

Visando evitar o uso de supercomputadores ou clusters, o custo computacional pode ser diminuído de maneira drástica usando-se métodos de redução de modelos (GERGES, 2013). Essas técnicas permitem reduzir o número de graus de liberdade efetivos da estrutura discreta, mantendo o comportamento dinâmico numa dada faixa de interesse (CRAIG e KURDILA, 2006). A aplicação desses métodos torna o sistema mais simples

numericamente, com matrizes de dimensões menores, o que torna mais eficaz a obtenção das respostas.

Para uma estrutura linear cujas características do sistema são conhecidas é apropriado utilizar a base de Ritz (GERGES, 2013). Essa base, aplicada às matrizes globais do sistema, reduz suas dimensões sem perder as informações dinâmicas. Sua composição é feita pelos primeiros modos de vibrar normais à interface fixa (autovetores) e enriquecida com a inclusão de vetores de modos restritos do tipo resíduo estático.

Apesar da base de Ritz ter sido aplicada de maneira satisfatória em outros trabalhos (ROSA e DE LIMA, 2015; ROSA e DE LIMA, 2016a), notou-se que o tempo envolvido nos cálculos do problema de autovalores é bastante significativo. Dessa forma, propõe-se aqui, uma base de redução robusta adaptada ao processo estocástico, onde ao invés do recálculo oneroso dos autovalores a cada iteração, as alterações causadas nas matrizes globais são consideradas como parcelas de forças não-exatas. Essas forças geradas pela flutuação de parâmetros aleatórios, quando isoladas, geram resíduos estáticos que entram na composição da base, juntamente com os modos de vibrar do sistema nominal, gerando um método de redução de modelos robusto (ROSA e DE LIMA, 2016b). Dessa maneira espera-se ganhar mais tempo computacional de modo a acelerar a última etapa, que é a otimização robusta da estrutura tendo em vista a vida em fadiga.

Após a concepção inicial de um projeto baseado na vida em fadiga é interessante que se realize um processo de otimização para que os melhores valores sejam adotados para as propriedades geométricas da estrutura. Nesse âmbito, a aplicação desejada neste trabalho é obter a estrutura com maior vida em fadiga possível e com menor massa, o que são objetivos conflitantes. Portanto, devem ser aplicados métodos de otimização multiobjetivo.

Esses métodos geram não apenas um ponto ótimo, e sim um conjunto de pontos ótimos conflitantes entre si que otimizam várias componentes de um vetor custo (VICENTE, 2014; ESCHENAUER *et al.*, 2012). O conjunto de soluções ótimas que não são dominadas por nenhuma outra recebe o nome de soluções de Pareto (PARETO, 1896). Em outras palavras, existe um equilíbrio entre esses pontos, tal que não se pode melhorar um critério sem deteriorar pelo menos algum dos outros e todas as soluções são consideradas igualmente satisfatórias (HAUPT e HAUPT, 2004).

As técnicas de otimização multiobjetivo determinísticas permitem a busca das soluções de Pareto de maneira eficiente. No entanto, se a curva da função objetivo possui descontinuidades ou não é bem conhecida (caso da análise de vida em fadiga), pode-se obter respostas que não são as melhores para aquele dado sistema. Além disso, segundo

Vanderplaats (1984), a aplicação de um método de otimização pode sofrer efeito direto das sensibilidades de cada uma das variáveis de projeto, além da propagação de incertezas inerentes ao modelo do método dos elementos finitos estocásticos e da existência de ruídos em suas respostas finais.

Dessa maneira, no caso de uma aplicação que pode envolver falhas catastróficas como as geradas pelo processo de fadiga, o melhor ponto pode não ser o que gere um índice de fadiga menor e sim aquele que não seja tão afetado pela flutuação dos parâmetros causada pela estocasticidade do modelo. A aplicação de uma técnica de otimização robusta considera em sua formulação perturbações no projeto, funções de custo e nas restrições de modo a obter uma solução que, mesmo não sendo a melhor de todas (solução sub-ótima) apresenta maior estabilidade, garantindo que as incertezas presentes no modelo não afetem sobremaneira suas respostas finais (LEE e PARK, 2001). Sua formulação se dá pela adição de uma função que representa a vulnerabilidade (inverso de robustez) do sistema junto às funções objetivos do problema físico.

Os métodos de otimização são anteriores ao advento de computadores e calculadoras. Porém foi após a popularização destes que eles ganharam força. O método de solução adotado para o problema multiobjetivo robusto foi por meio do algoritmo NSGA-II (*Non dominated Sorting Genetic Algorithm*) (SRINIVAS e DEB, 1993). Segundo Vargas (2018), esse método é o mais amplamente encontrado na literatura para solução de problemas multiobjetivo.

O NSGA-II se baseia em conceitos de cruzamento tais quais os mecanismos de seleção natural e genética, compreendendo parcelas randômicas, onde uma população inicial que atenda aos requisitos do problema evolui a cada iteração por meio de operadores genéticos (VICENTE, 2014). Esses mecanismos se aliam ao conceito da dominância de Pareto, compondo um conjunto de pontos que servirá como ferramenta de tomada de decisão pelo projetista tendo em vista suas preferências e/ou limitações de projeto para a implementação prática do mesmo.

## 1.2 Objetivos

O caráter original desta tese se inicia com a geração de uma metodologia numérico-computacional para a predição de vida em fadiga de sistemas dinâmicos na presença de incertezas incluídas por meio do método dos elementos finitos estocásticos. Compondo

esse modelo está a parte da concepção de um método de redução de modelos que possibilite a execução dos processos iterativos requerido pela metodologia de maneira eficiente em computadores pessoais, carregando as informações dinâmicas da estrutura nominal, com suas características médias aliadas com a atualização da base de redução a cada passo, evitando o recálculo do problema de autovalores.

Por fim, aplica-se uma técnica de otimização multiobjetivo robusta para obtenção de um conjunto de soluções de Pareto baseado na vida em fadiga de uma estrutura do tipo placa sujeita à carregamentos aleatórios e incertezas em suas propriedades físicas. Dessa maneira espera-se gerar uma ferramenta útil para que esses testes possam ser feitos previamente, durante as fases iniciais de um projeto estrutural. Os objetivos específicos são:

- a) Implementar um modelo de elementos finitos estocásticos baseado na técnica de expansão de Karhunen-Loève capaz de gerar as respostas em tensão da estrutura no domínio da frequência, na forma de densidades espectrais de tensão (PSD);
- b) Utilizar técnicas de análise de sinais para extração dos momentos estatísticos das PSDs para compor o cálculo que estima os índices de fadiga de cada um dos elementos da placa, possibilitando encontrar a posição dos mais críticos e, consequentemente, os mais propensos a falhar;
- c) Concomitantemente com os dois passos acima, implementar uma técnica de redução de modelos adaptada ao sistema estocástico, onde as características do sistema nominal são mantidas e a base é enriquecida pelas alterações causadas pela flutuação dos parâmetros em cada amostra do processo iterativo;
- d) Aplicar uma técnica de otimização multiobjetivo robusta, gerando um conjunto de pontos ótimos onde sua sensibilidade também é otimizada. Em outras palavras, os pontos obtidos devem ser menos suscetíveis à variabilidade gerada pelo processo estocástico;
- e) Realizar simulações numéricas para comprovar a eficácia da base de redução proposta e obter as soluções de Pareto para uma estrutura do tipo placa fina;

### **1.3 Organização da tese**

Após este capítulo introdutório, no Capítulo II é realizada uma revisão sobre fadiga em metais, comentários sobre a origem das pesquisas relacionadas a esse fenômeno e as metodologias clássicas de análise de fadiga uniaxial e multiaxial, aliadas com conceitos de contagem de ciclos e acúmulo de dano. Após essas definições, a escolha do critério

multiaxial de Sines é justificada. Por fim, sua formulação para o caso de carregamentos aleatórios e fora de fase é apresentada.

O Capítulo III é dedicado à modelagem estocástica para análise em fadiga, com base no método dos elementos finitos estocásticos. Inicia-se pela revisão das definições dos campos de deslocamentos, deformações e tensões, conceitos fundamentais para o cálculo das funções de resposta em frequência e das respostas em tensão no domínio da frequência via densidade espectral de potência. Esses conceitos são todos baseados em técnicas de análise de sinais, que também permitem a extração de dados estatísticos das PSDs. Na parte final, a formulação do método de expansão de Karhunen-Loève e o método de solução são apresentados, gerando as respostas estocásticas do sistema.

No Capítulo IV inicia-se pela introdução das técnicas de síntese modal de componentes. Sua aplicação visa diminuir as dimensões das matrizes globais do método dos elementos finitos, carregando somente a parcela referente a uma banda de interesse. A base de Ritz, própria para sistemas lineares com características conhecidas, é apresentada. Ressalta-se que sua aplicação requer o recálculo do problema de autovetores a cada amostra do processo estocástico. Sendo assim, é altamente desejável que isso seja evitado para que se ganhe mais tempo computacional. Na parte final mais uma contribuição desta tese é apresentada, que é a concepção de uma base adaptável às flutuações de parâmetros e que carrega as informações do sistema nominal.

No Capítulo V é apresentado o método de otimização multiobjetivo utilizado para a obtenção do projeto ótimo-robusto de uma placa fina de alumínio com base no índice de fadiga de Sines. Uma breve introdução aos tipos de métodos clássicos e suas particularidades é feita e o conceito de otimização multiobjetivo é posteriormente definido, seguido da metodologia de solução adotada que, neste caso, trata-se do método *Non dominated Sorting Genetic Algorithm* ou NSGA-II.

Os resultados obtidos nas simulações numéricas são apresentados no Capítulo VI, evidenciando o ganho computacional obtido pela aplicação das bases de redução, os gráficos contendo os envelopes das FRFs e respostas em tensão (PSD), os valores mínimos, médios e máximos do índice de Sines para cada um dos elementos da placa e por fim o conjunto de pontos ótimos de Pareto, possibilitando ao projetista a escolha do que melhor se adapta às suas preferências e/ou necessidades.

Por fim, no Capítulo VII as conclusões gerais e perspectivas de trabalhos futuros relacionados a este trabalho são apresentadas.

## **CAPÍTULO II**

### **CRITÉRIO MULTIAXIAL DE SINES PARA ANÁLISE DE FADIGA EM METAIS**

Este capítulo é dedicado à revisão sobre o fenômeno de fadiga em metais. Após um breve estudo sobre os processos clássicos e metodologias para análise de falha e ruptura por fadiga, o foco principal é dado aos métodos que englobam a fadiga mutiaxial. Dentre estes métodos, que envolvem conceitos de análise de sinais e tratamentos estatísticos, destaca-se o chamado critério de fadiga multiaxial de Sines, que leva como base amplitudes de tensão para estimativa de um coeficiente que indica os prováveis pontos de falha do sistema.

#### **2.1 Revisão sobre o fenômeno de fadiga em metais**

Componentes mecânicos sujeitos a carregamentos variáveis ou flutuantes apresentam tensões variáveis com o tempo, podendo oscilar entre diferentes níveis. Como exemplos de aplicações que envolvem esse tipo de carregamento, pode-se citar pontes, componentes estruturais de aeronaves e eixos de automóveis. Essas e outras estruturas, quando sujeitas a esse tipo de esforço, podem sofrer falhas sob níveis significativamente inferiores aos limites estáticos, tais como limite de escoamento e limite de ruptura. Esse fenômeno recebeu o nome de fadiga, que em sua tradução original faz referência à sensação de enfraquecimento e cansaço do corpo humano, resultante de esforços físicos. Ressalta-se aqui a importância de se realizar cálculos considerando a análise de fadiga em um projeto de engenharia, dada a estimativa de que 90% de todas as falhas em metais são causadas por esse fenômeno (CALLISTER, 2000).

Antes de prosseguir com a teoria de fadiga em metais, é importante definir o significado dado ao termo “falha” no presente trabalho. Segundo a definição clássica, uma falha ocorre quando um material ou estrutura sofre mudanças nas duas dimensões físicas ou propriedades de material de modo a deixar de desempenhar a função para a qual foi originalmente projetada (DOWLING, 2007). Definido o conceito clássico de falha, nota-se sua clara e direta dependência de fatores diversos, como o ambiente onde o sistema opera, do nível de responsabilidade de sua aplicação, do desempenho esperado, dentre outros. Neste trabalho será considerado como “falha por fadiga” o momento em que uma trinca superficial surge na estrutura, e não em sua ruptura, que ocorre quando o corpo sofre uma trinca de uma extremidade a outra.

O processo de ruptura por fadiga de uma peça sujeita a carregamentos dinâmicos cíclicos passa por três fases bem definidas: nucleação da trinca, propagação lenta e fratura súbita. A estrutura fraturada apresenta uma forma bastante característica, sendo fácil identificar cada uma das três fases. A aparência é de uma fratura frágil, mesmo em materiais que apresentam comportamento dúctil. Isso ocorre devido a presença de pouca ou nenhuma deformação plástica associada ao processo (CALLISTER, 2000). A Fig. 2.1 mostra um esquema simplificado de como é a aparência de uma fratura por fadiga. A Fig. 2.2 apresenta uma imagem real de uma barra de aço fraturada, onde nota-se que o início da propagação da trinca se deu na borda esquerda.

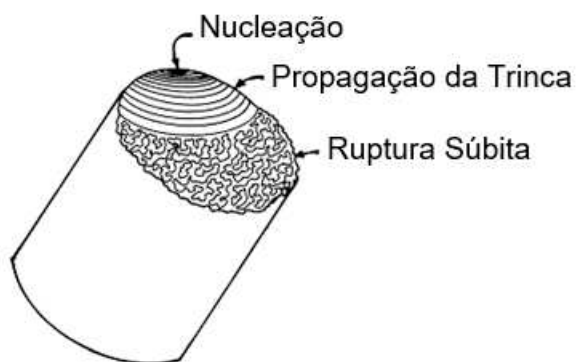


Figura 2.1 – Esquema simplificado e regiões de um eixo que sofreu fratura por fadiga (adaptado de Askeland e Wright (2014))

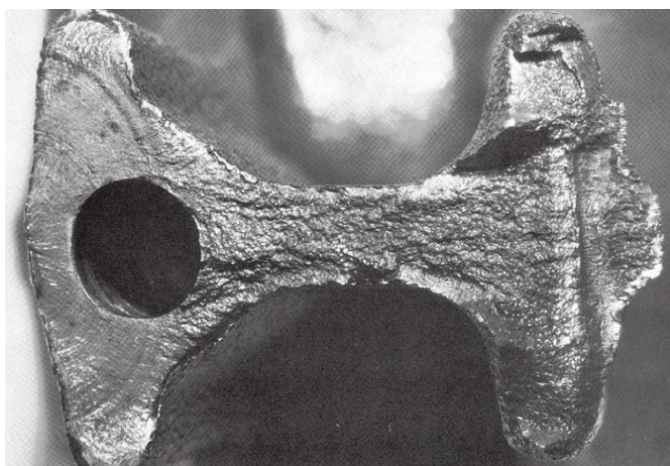


Figura 2.2 – Imagem real de uma barra de aço fraturada por fadiga (extraído de Budynas e Nisbett, 2011).

A abordagem tratada neste trabalho leva em consideração o fenômeno de fadiga policíclico, também chamado de fadiga de alto ciclo. Nesse tipo de processo, a falha geralmente ocorre entre  $10^5$  e  $10^7$  ciclos. É interessante definir aqui também o conceito de vida infinita sob fadiga, onde teoricamente a estrutura não sofre falha se sujeita a um nível baixo de tensões. No entanto, na prática, vida infinita implica na falha após um elevadíssimo número de ciclos, geralmente superiores a  $10^7$  ou  $10^8$  (LAMBERT, 2007).

Diversos métodos de análise de fadiga foram propostos ao longo dos anos, sendo classificados em três grandes grupos (BUDYNAS e NISBETT, 2011): os métodos de vida sob deformação, que baseiam-se em curvas que relacionam a deformação sofrida pelo material e o número de ciclos até a falha, os métodos baseados na energia de deformação, que são bem adaptados para avaliação de fadiga em estruturas sujeitas à combinações de carregamento de diferentes naturezas e os métodos de vida sob tensão, que relacionam tensão e número de ciclos, considerando que o surgimento da trinca ocorre em pontos estruturais sujeitos aos maiores níveis de tensão, sejam eles oriundos de concentração de tensões causadas por fatores geométricos ou em pontos de aplicação de carregamento.

Os métodos do último grupo (vida sob tensão) são os mais apropriados para aplicação no presente estudo, visto que os métodos de energia são descartados devido ao carregamento aplicado ser oriundo somente de uma natureza e os métodos de vida sob deformação carregam incertezas provenientes da necessidade de se compor várias idealizações em seus cálculos (BUDYNAS e NISBETT, 2011).

## 2.2 Vida em fadiga uniaxial

Historicamente, os métodos de análise de fadiga estão fortemente ligados à experimentos repetidos e tratamentos estatísticos para estimativa de quantos ciclos um material suporta antes de falhar ou se romper. Os primeiros estudos considerando o conceito de limite de resistência à fadiga foram realizados entre os anos de 1860 e 1870 por August Wöhler, um engenheiro ferroviário alemão intrigado com fraturas repentinas e catastróficas em eixos de locomotivas e vagões.

Em seus estudos, Wöhler desenvolveu um equipamento que realizava ensaios de fadiga rotativa em corpos de prova com formato de viga em balanço, solicitada em sua extremidade livre de maneira a gerar um esforço flutuante do tipo tração-compressão nas fibras superficiais. Por meio de seus resultados, ele concluiu que a amplitude das tensões cíclicas é muito mais importante do que o valor máximo da tensão, introduzindo assim o conceito de limite de resistência à fadiga e gerando os gráficos tensão-número de ciclos (diagramas S-N), também chamados de curvas de Wöhler (SCHUTZ, 1996; WEBER, 1999; KOÇER, 2010). Esses diagramas são geralmente traçados em escala *semilog* para que o comportamento da curva seja mais bem visualizado, conforme pode ser visto na Fig. 2.3, que representa o diagrama S-N obtido para um aço UNS G41300, evidenciando suas regiões de fadiga de baixo ciclo (oligocíclica), de alto cíclico (policíclica) e também as regiões de vida finita e infinita.

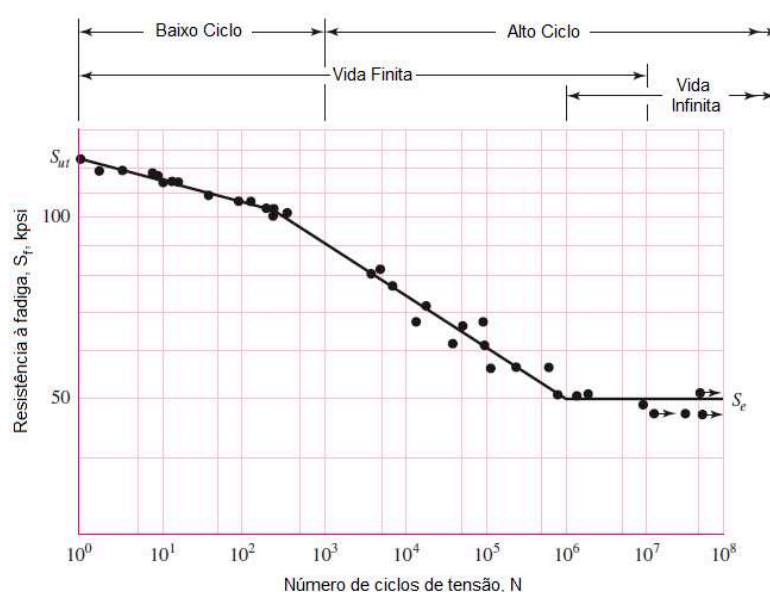


Figura 2.3 – Diagrama S-N de um aço UNS G41300 (adaptado de Budynas e Nisbett, 2011))

Esses gráficos S-N obtidos experimentalmente estão disponíveis na literatura para consulta, compreendendo diversos tipos de metais. No entanto, esses ensaios são realizados em laboratório em condições controladas de carregamento, umidade, pressão, temperatura e com corpos de prova padronizados, fazendo-se necessário a aplicação de fatores de correção para aplicações reais distintas. A obtenção do limite de resistência à fadiga  $S_e$  para uma dada condição é feita por meio da multiplicação direta dos fatores modificadores  $k$  pelos valores  $S'_e$  extraídos da curva S-N (MARIN, 1962):

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e \quad (2.1)$$

Os fatores modificadores são (BUDYNAS e NISBETT, 2011):

- a) Fator de superfície  $k_a$ , depende do tipo de acabamento superficial a qual a peça foi submetida em seu processo de fabricação. Os valores desse parâmetro são disponibilizados em tabelas na literatura;
- b) Fator de tamanho  $k_b$ , atua na correção das dimensões da estrutura, como por exemplo, eixos com diâmetro ou seção transversal diferentes do corpo de prova. Seus valores são tabelados em função de um diâmetro equivalente;
- c) Fator de carregamento  $k_c$ , corrige a aplicação quando o tipo de solicitação é diferente da utilizada no ensaio. Seus valores típicos são 1 para flexão (ensaio padrão), 0,85 para esforço axial e 0,59 para torção;
- d) Fator de temperatura  $k_d$ , corrige o efeito acarretado pela diferença de temperatura entre o ensaio e a aplicação real da peça. Seus valores são calculados por equações presentes na literatura;
- e) Fator de confiabilidade  $k_e$ , leva em conta fatores estatísticos, necessários devido ao espalhamento de dados dos ensaios. Conforme a responsabilidade da aplicação e o consequente aumento da confiança, os valores tabelados desse coeficiente decrescem. Por exemplo, para 50% de confiança seu valor é 1 e para 99% passa a ser 0,814.
- f) Fator de efeitos diversos  $k_f$ , inserido quando ocorre redução do limite de resistência devido a fatores tais como corrosão, chapeamento eletrolítico, pulverização de metal, frequência cíclica, microabrasão, interação estrutural, dentre outros.

Após a correção do limite de resistência à fadiga, já se torna possível a aplicação de um critério de fadiga. Em um primeiro momento, serão apresentados os métodos uniaxiais mais aplicados e aceitos na literatura, para que depois seja feita a extensão para os métodos multiaxiais de interesse deste trabalho.

Se a tensão gerada for de média nula, a aplicação de um critério de fadiga se dá diretamente pela comparação desta com o valor obtido na Eq. (2.1). No entanto, na grande parte dos casos, a tensão atuante não é de média nula, definindo o que se chama de tensões flutuantes. Os métodos uniaxiais tradicionais para esses casos apresentam equações que geram superfícies e linhas delimitando uma zona ou banda na qual é possível afirmar que a estrutura resiste à fadiga. Os três métodos clássicos mais apresentados na literatura são os critérios de falha de Gerber (1874), Goodman (1890) e Sodeberg (1930). Suas expressões analíticas são apresentadas nas Eqs. (2.2) a (2.4), respectivamente:

$$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \left( \frac{n\sigma_m}{S_{ut}} \right)^2 = 1 \quad (2.2)$$

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = \frac{1}{n} \quad (2.3)$$

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_y} = \frac{1}{n} \quad (2.4)$$

onde  $\sigma_a$  é o valor da tensão alternada,  $\sigma_m$  é o valor médio de tensão,  $S_{ut}$  é o limite de resistência mecânica,  $S_y$  é o limite de escoamento do material e  $n$  é o coeficiente de segurança.

A Fig. 2.4 representa graficamente as três regiões delimitantes das bandas geradas por cada critério. Nota-se que o critério que leva em consideração o limite de escoamento (Sodeberg) é, entre os três, o mais conservador, enquanto que o de Gerber apresenta um formato semi-elíptico e é o menos conservador entre eles.

Ainda sobre os critérios uniaxiais é importante citar a lei de Palmgren-Miner, também conhecida como lei de dano cumulativo de fadiga. Sua aplicação é necessária quando o carregamento a qual uma estrutura está sujeita não é uniformemente distribuído ao longo do tempo, ou seja, apresenta diferentes níveis (KOÇER, 2010).

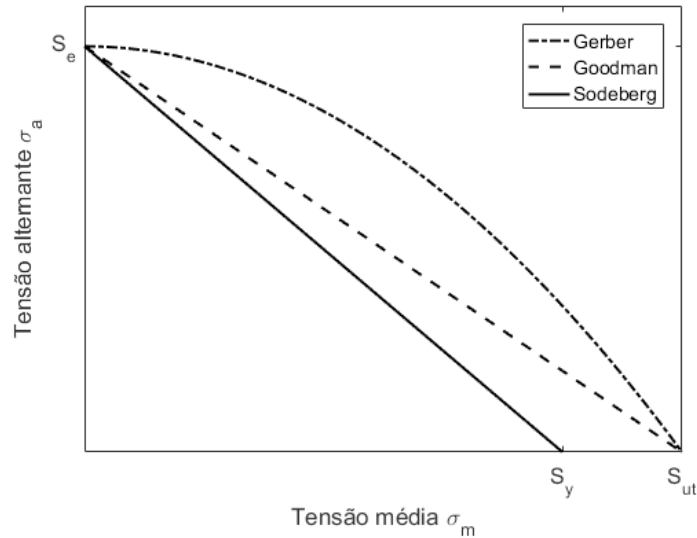


Figura 2.4 – Regiões delimitadas pelas expressões dos três critérios de fadiga uniaxial

A lei de Palmgren-Miner surgiu da combinação das teorias propostas por Palmgren (1924) e Miner (1945). O dano total  $D$  sofrido por uma dada estrutura é calculado pelo seguinte somatório:

$$D = \sum_{i=1}^k D_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} \quad (2.5)$$

onde  $D_i$  são os danos causados por  $n_i$  ciclos de tensão de amplitude  $\sigma_{ai}$  e  $N_i$  é o número de ciclos onde a ruptura ocorreria sob uma tensão  $\sigma_{ai}$ .

A aplicação da Eq. (2.5) é trivial quando se conhece o histórico de tensões no domínio do tempo. Apesar disso, existe o fato inconveniente de não se levar em conta a ordem de aplicação dos carregamentos. Existem alguns outros métodos que consideram essa ordem, mas para estudos considerando carregamentos aleatórios, eles perdem eficácia. Nestes

casos, podem ser aplicados métodos de contagem de ciclos, conforme apresentados e descritos pela ASTM (1985). O método de contagem mais utilizado é o método *Rainflow* (MATSUSHI e Die ENDO, 1968), que consiste na transformação de um conjunto de tensões flutuantes em um conjunto simplificado de dados de inversão de tensões. Esse método possui fácil implementação computacional e gera valores de tensões que podem ser somados de maneira direta por algum método de acúmulo.

Após introduzir de maneira resumida os principais métodos de análise de fadiga uniaxial, pode-se agora apresentar o quesito maior de interesse desse capítulo: os métodos de análise de vida em fadiga multiaxial.

### **2.3 Vida em fadiga multiaxial**

Em situações reais ou simulações mais fidedignas, o estado de tensões gerado por carregamentos cíclicos aleatórios possui direções de tensões principais que variam com o tempo, dependendo do ciclo de carregamento e as próprias tensões principais podem não ser proporcionais às outras tensões (RAMOS, 2014). Tensões binárias causadas por um fluido num tubo, tensões combinadas de flexão e torção em eixos e flexão de placas em mais de um eixo são exemplos de aplicações que apresentam caráter multiaxial de tensões (DOWLING, 2007).

A importância do tópico introdutório sobre fadiga uniaxial é que, a diferença entre as abordagens uni e multiaxial está na tensão utilizada na comparação com as propriedades de resistência do material. No estado uniaxial de tensões utiliza-se diretamente a tensão alternante para verificação da vida em fadiga. Já para o estado multiaxial, são usadas tensões equivalentes para comparação com os limites de resistência. Os métodos mais conhecidos usam as tensões de Tresca e Von Mises, tensão principal máxima, invariantes de tensão e planos críticos para essa análise. Quando aplicado o método, essas tensões são chamadas de variáveis de contagem, permitindo o uso de alguma técnica de contagem e depois a aplicação de uma lei de acúmulo de dano.

Dado o caráter experimental da obtenção das propriedades de resistência à fadiga de metais, salienta-se que os dados obtidos por experimentos similares aos de Wöhler não são aplicáveis à análise de fadiga multiaxial não-proporcional. Para este caso estão disponíveis outros limites de resistência, obtidos por outros tipos de ensaio. Dentre estes, os principais limites são:

- a) Limite de fadiga em torção alternada simétrica  $t_{-1}$ ;
- b) Limite de fadiga em tração alternada simétrica  $f_{-1}$ ;
- c) Limite de fadiga em torção repetida  $t_0$ .
- d) Limite de fadiga em tração repetida  $f_0$ .

A execução de experimentos sempre carrega erros e incertezas que se propagam ao longo dos testes e processamento de dados. Lambert (2007) reforça que esses valores podem carregar até 10% de variação em torno das médias disponíveis na literatura. Sendo assim, deve-se tomar cuidado em sua aplicação em situações que envolvem alta responsabilidade.

Com o valor da tensão equivalente e dos limites de resistência em mãos, a aplicação dos métodos multiaxiais, em sua maioria, se resume à estimativa de um coeficiente  $D$  a ser comparado com um valor crítico  $D_c$ , que por vezes é apresentado como um valor unitário. A condição  $D = q(\sigma, f_{-1}, f_0, t_{-1}, \dots) \geq D_c$  indica falha da peça enquanto que uma condição  $D = q(\sigma, f_{-1}, f_0, t_{-1}, \dots) < D_c$  indica a não falha. Um histograma de comparação entre os métodos uniaxiais e multiaxiais é apresentado na Fig. 2.5.

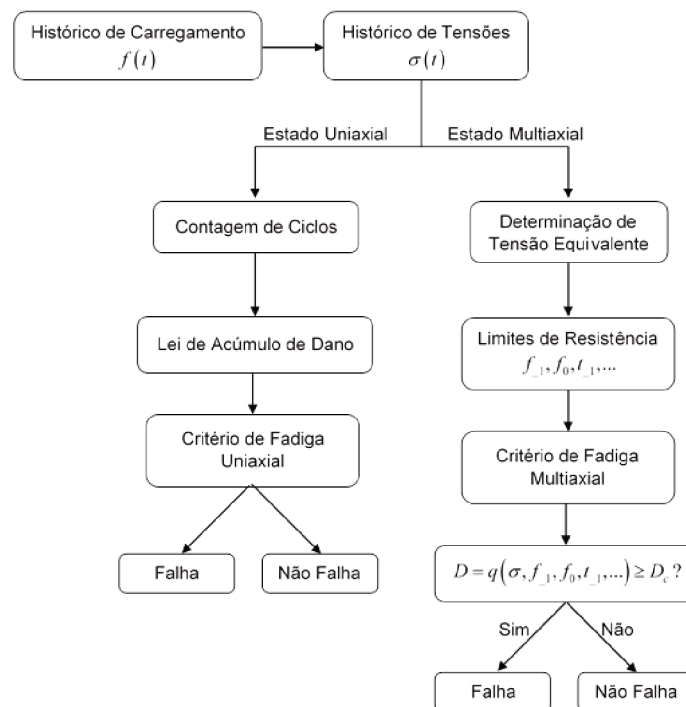


Figura 2.5 – Comparação entre métodos uniaxiais e multiaxiais (adaptado de Lambert (2007))

Lambert (2007) resumiu em seu trabalho os quatro tipos principais de abordagem dos critérios de fadiga multiaxiais. São eles:

- a) Critérios empíricos: as tensões equivalentes aplicadas são as de Von Mises ou Tresca, obtidas através de um número elevado de ensaios de fadiga. Esses critérios usualmente geram previsões de vida em fadiga excelentes, porém, somente para as condições de carregamento para os quais foram elaborados. Considerando a complexidade dos carregamentos aleatórios que serão utilizados neste trabalho, os critérios empíricos se tornam inviáveis.
- b) Critérios de energia: baseiam-se na energia transmitida durante a excitação do sistema, sendo elas deformações elásticas e plásticas e dissipações em forma de calor. Esses critérios são mais bem adaptados à fadiga de baixo ciclo e à aplicações termomecânicas, devido ao nível de deformação plástica envolvido (CHARKALUK *et al.*, 2002). Como dito anteriormente, nesse estudo somente o domínio de alto ciclo é de interesse. Dessa maneira esses critérios não são aplicáveis.
- c) Critérios do tipo plano crítico: são os mais utilizados na atualidade. Adotam como planos críticos os pontos onde a ocorrência de fadiga é mais provável, decompondo o tensor tensão em sua direção e gerando um trajeto de carregamento que deve ser analisado para determinação do coeficiente de comparação. Esse tipo de critério é bem adaptado quando o carregamento é proporcional como, por exemplo, quando ocorre flexão e torção em fase.
- d) Critérios de abordagem global: utilizam invariantes de tensão como variáveis de comparação. Esses critérios se mostraram como os mais adaptados para o caso de carregamentos não-proporcionais ou fora de fase.

## 2.4 Escolha do critério de fadiga multiaxial

A escolha do critério de Sines (1959) para aplicação neste trabalho se deu primeiramente devido à necessidade da inclusão da não-proporcionalidade passível de ser gerada na presença de carregamentos aleatórios. Ressalta-se que o critério de Sines é notavelmente um critério de abordagem global, mesmo assim apresenta algumas características semelhantes aos critérios de planos críticos, adotando o plano octaédrico como plano de cisalhamento máximo e considerando a pressão hidrostática em seus

cálculos. A variável de comparação do critério de Sines é o segundo invariante do tensor desviatório de tensões ( $J_2$ ).

Apesar disso, a escolha do critério de Sines não se deu somente por se encaixar bem nas características da estrutura em análise. Os estudos de Weber (1999) compararam diversos métodos multiaxiais do tipo plano crítico e de abordagem global, visando mostrar quais são melhores em termos de resultados em diferentes intervalos de precisão: entre -40% e +40% de variação, entre -2% e +2%, -40% e +2%, -2% e +40%, nomeando cada um de acordo com seu tamanho. A tabela 2.1 sumariza os resultados desse experimento, classificando os métodos de maneira decrescente em função dos valores da categoria “justo”.

Tabela 2.1 – Resultados dos ensaios de validação dos critérios de fadiga multiaxiais obtidos por Weber (1999)

Critério	Nº de ensaios	Número de ensaios no intervalo referido			
		$[-40\%, +40\%]$	$[-2\%, +2\%]$ “justo”	$[-40\%, +2\%]$ “não-conservativo”	$[-2\%, +40\%]$ “conservativo”
<b>Fogue</b>	233	232	52 (22,3%)	90 (38,9%)	81 (34,8%)
<b>Sines</b>	233	231	47 (20,2%)	99 (42,5%)	85 (36,5%)
<b>Froustey</b>	233	224	46 (19,7%)	73 (31,3%)	105 (45,1%)
<b>Dang Van</b>	233	232	45 (19,3%)	115 (49,4%)	72 (30,9%)
<b>Papadopoulos</b>	233	232	45 (19,3%)	130 (55,8%)	57 (24,5%)
<b>Deperrois</b>	233	232	44 (18,9%)	100 (42,9%)	88 (37,8%)
<b>Robert</b>	233	232	44 (18,9%)	92 (39,5%)	96 (41,2%)
<b>Matake</b>	233	227	40 (17,2%)	96 (41,2%)	91 (39,1%)
<b>Crossland</b>	233	230	28 (12,0%)	180 (77,3%)	22 (9,4%)

Os três primeiros critérios melhor classificados nos ensaios de Weber (1999) são de abordagem global. O critério de Fogue apresentou resultados melhores que o de Sines, mas requer três limites de resistência à fadiga em sua formulação, resultando em mais erros e incertezas para o modelo computacional. Nesse caso, a formulação proposta por Sines (1959) é mais desejada, visto que necessita de apenas dois limites de resistência e, com algumas simplificações, pode depender de apenas um. Além disso, sua formulação é mais simples, proporcionando cálculos mais rápidos, o que é de extrema importância na

execução de modelos de predição de vida em fadiga de sistemas estocásticos de interesse deste trabalho.

## 2.5 Formulação do critério de Sines para carregamentos aleatórios não-proporcionais

Sines (1959) propôs um critério de fadiga baseado no segundo invariante do tensor desvio de tensão ( $J_2$ ), adotando o plano octaédrico como plano de tensões máximas. Sua formulação visa calcular o coeficiente  $D_{\text{Sines}}$  que, sendo inferior à unidade, indica não-falha do sistema. Além do  $J_2$ , em casos onde a tensão é repetida (tensão média diferente de zero), a média da pressão hidrostática  $p_{\text{hid}}(t)$  também é levada em consideração. O critério em sua formulação completa utiliza somente duas propriedades de resistência à fadiga multiaxial:  $t_{-1}$  e  $f_{-1}$ :

$$D_{\text{Sines}} = \frac{\sqrt{J_{2,a}} + \alpha p_{\text{hid}}(t)}{t_{-1}} \quad (2.6)$$

onde  $\sqrt{J_{2,a}}$  é uma estimativa da raiz quadrada do segundo invariante do tensor desviatório

de tensão,  $\alpha = \frac{3t_{-1}(S_{ut} + f_{-1})}{f_{-1}S_{ut}} - \sqrt{6}$  e  $p_{\text{hid}}(t) = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ .

O carregamento aleatório que será utilizado para análise de fadiga neste trabalho é do tipo ruído com média zero. Nesse caso, sua densidade espectral de potência é igual a um valor constante correspondente ao seu nível de energia (BENDAT e PIERSOL, 2010). Dessa maneira, pode-se considerar  $p_{\text{hid}}(t) = 0$  e o problema recai na estimativa de  $\sqrt{J_{2,a}}$  que passa a depender apenas da propriedade  $t_{-1}$ . A Eq. (2.6) apresentada anteriormente pode ser reescrita da seguinte forma:

$$D_{\text{Sines}} = \frac{\sqrt{J_{2,a}}}{t_{-1}} \quad (2.7)$$

Segundo Boresi *et al.* (2011), o segundo invariante do tensor desviatório pode ser calculado por meio da seguinte expressão analítica:

$$\sqrt{J_2(t)} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{d}(t) \cdot \mathbf{d}(t)} \quad (2.8)$$

onde  $\mathbf{d}(t)$  é o tensor desvio de tensão.

Se o carregamento for bem conhecido, apresentar proporcionalidade e estiver em fase, a estimativa de  $\sqrt{J_{2,a}}$  se dá de maneira direta:

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{\frac{1}{6} \left[ (\sigma_{x,a} - \sigma_{y,a})^2 + (\sigma_{y,a} - \sigma_{z,a})^2 + (\sigma_{z,a} - \sigma_{x,a})^2 + 6(\tau_{xy,a} + \tau_{yz,a} + \tau_{zx,a})^2 \right]} \quad (2.9)$$

onde  $\sigma_{i,a}$  e  $\tau_{ij,a}$  são os valores estimados para as tensões normais e cisalhantes.

Segundo Lambert *et. al* (2010), o equacionamento apresentado na Eq. (2.9) pode ser simplificado de modo que os termos presentes na raiz quadrada sejam decompostos num espaço euclidiano reduzido de cinco dimensões  $\mathbf{D}(t) = [D_1(t), D_2(t), D_3(t), D_4(t), D_5(t)]$ , onde:

$$D_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \sigma_x(t) - \frac{1}{3} \sigma_y(t) - \frac{1}{3} \sigma_z(t) \right) \quad (2.10.a)$$

$$D_2(t) = \frac{1}{2} \sigma_y(t) - \frac{1}{2} \sigma_z(t) \quad (2.10.b)$$

$$D_3(t) = \tau_{xy}(t) \quad (2.10.c)$$

$$D_4(t) = \tau_{yz}(t) \quad (2.10.d)$$

$$D_5(t) = \tau_{zx}(t) \quad (2.10.e)$$

Introduzindo as Eqs. (2.10) na Eq. (2.8) tem-se:

$$\sqrt{J_2(t)} = \sqrt{D_1^2(t) + D_2^2(t) + D_3^2(t) + D_4^2(t) + D_5^2(t)} \quad (2.11)$$

Da mesma maneira, para um carregamento proporcional e em fase, chega-se à seguinte relação:

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{D_{1,a}^2 + D_{2,a}^2 + D_{3,a}^2 + D_{4,a}^2 + D_{5,a}^2} \quad (2.12)$$

A aplicação da Eq. (2.12) não vale para o caso de um carregamento não proporcional ou fora de fase (BERNASCONI, 2002). Sendo assim, é necessário utilizar outros métodos para a estimação de  $\sqrt{J_{2,a}}$ , como por exemplo o método de Bin Li e Freitas (2002). Esse método assume que o trajeto de carregamentos periódicos é descrito por uma curva fechada e está circunscrito em uma elipse de semi-eixos  $R_1$  e  $R_2$ . Segundo essa abordagem, o valor de  $\sqrt{J_{2,a}}$  é dado pela Eq. (2.13). Os caminhos de um carregamento proporcional e outro não proporcional e a elipse mínima que circunscreve esses carregamentos são apresentados na Fig. 2.6.

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} \quad (2.13)$$

Ainda assim, o método de Bin Li e Freitas (2002) não é aplicável à Eq. (2.11) da maneira como foi formulado e apresentado, pois engloba apenas um espaço bidimensional. O espaço em cinco dimensões introduzido para a estimativa de  $\sqrt{J_{2,a}}$  necessita de outro tipo de trajeto de carregamento. Neste contexto, Khalij *et al.* (2010) propuseram um método que assume que o trajeto do carregamento é descrito pelos semi-eixos de uma casca prismática de tamanho máximo, em que os caminhos das tensões geradas por carregamentos não proporcionais podem ser melhor representados e levados em conta na estimativa de  $\sqrt{J_{2,a}}$  (RAMOS, 2014).

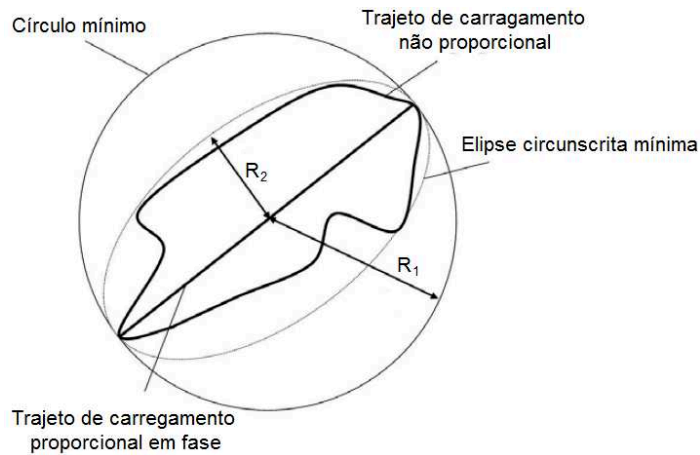


Figura 2.6 – Elipse mínima cujo carregamento está circunscrito, segundo a teoria de Bin Li e Freitas (2002) (adaptado de Lambert (2007))

O método da casca prismática (KHALIJ *et al.*, 2010) permite a aplicação da Eq. (2.11) para uma estrutura sujeita a carregamentos não proporcionais e fora de fase, podendo ser reescrita em termos das dimensões da casca prismática que contém o trajeto do carregamento, o que faz com que o problema recaia no cálculo dos semi-eixos  $R_i (i = 1, \dots, 5)$ :

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2} \quad (2.14)$$

A presença de carregamentos aleatórios na estrutura faz com que a estimativa direta do coeficiente de Sines não seja mais coerente, sendo necessário o cálculo de sua esperança matemática  $E[D_{\text{Sines}}]$ . Neste caso, a esperança matemática do índice de fadiga de Sines de uma estrutura sob carregamento aleatório com média nula pode ser estimado pela seguinte relação:

$$E[D_{\text{Sines}}] = \frac{E[\sqrt{J_{2,a}}]}{t_{-1}} \quad (2.15)$$

$$\text{onde: } E\left[\sqrt{J_{2,a}}\right] \approx \sqrt{E\left[R_1^2\right] + E\left[R_2^2\right] + E\left[R_3^2\right] + E\left[R_4^2\right] + E\left[R_5^2\right]} \quad (2.16)$$

Sob as condições descritas anteriormente, os eixos  $R_i$  do prisma no espaço de cinco dimensões podem ser determinados estatisticamente conforme as etapas apresentadas a seguir, propostas por Lambert *et al.* (2010).

Sejam  $D_i'(t)$  as componentes do vetor  $\mathbf{D}'(t)$ , linearmente associado a  $\mathbf{D}(t)$  através da relação de transformação ortonormal  $\mathbf{D}'(t) = \mathbf{P}_D \mathbf{D}(t)$ , onde  $\mathbf{P}_D \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  pode ser obtida através dos autovetores da matriz de covariância  $V[\mathbf{D}(t)]$ . Dessa maneira cada um dos cinco processos  $D_i'(t)$  pode ser interpretado como uma projeção nos eixos principais de carregamento de  $\mathbf{D}(t)$ .

Um processo estacionário e Gaussiano é caracterizado por um conjunto de valores estatísticos chamados momentos espectrais (BENDAT e PIERSOL, 2010). Um momento espectral de ordem  $m$ , de um processo genérico  $\phi_s(\omega)$  é denominado  $\lambda_m$ :

$$\lambda_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^m \phi_s(\omega) d\omega \quad (2.17)$$

Seja então,  $X_i(t) = D_i'(t) - E[D_i']$  um processo aleatório Gaussiano de média zero e momentos espectrais  $\lambda_{m,i}(D_i')$ . Dentre as características do processo, define-se também  $N(\alpha_0, 0, T)$  como sendo o número de passagens pelo nível  $\alpha_0$  no intervalo  $[0, T]$  com cálculo mostrado na Eq. (2.18),  $T_f(\alpha_0)$  é o tempo do primeiro cruzamento no nível  $\alpha_0$  e  $\mathfrak{R}_i = \max_{0 \leq t \leq T} X_i(t)$  o valor máximo alcançado por  $X_i$  no intervalo  $[0, T]$ .

$$N(\alpha_0, 0, T) = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \exp\left(-\frac{\alpha_0^2}{2\lambda_0}\right) \quad (2.18)$$

A probabilidade de que o valor máximo atingido no intervalo  $[0, T]$  não exceda o dado nível  $\alpha_0$  pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$P[\mathfrak{R}_i \leq \alpha_0] = P[T_f(\alpha_0) > T] = P[N(\alpha_0, 0, T) = 0] \quad (2.19)$$

Utilizando as definições acima e a Eq. (2.18) formula-se a Eq. (2.20):

$$E[N(\alpha_0, 0, T)] = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_{2,i}}{\lambda_{0,i}}} \exp\left(-\frac{\alpha_0^2}{2\lambda_{0,i}}\right) = N_{0,i} \exp\left(-\frac{\alpha_0^2}{2\lambda_{0,i}}\right) \quad (2.20)$$

onde  $N_{0,i}$  é o número de cruzamento por zero com inclinação positiva:

$$N_{0,i} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_{2,i}}{\lambda_{0,i}}} \quad (2.21)$$

Preumont (1985) propôs que a distribuição de probabilidade  $P_{R_i}(\alpha_0)$  que melhor se adapta à forma apresentada na Eq. (2.20), é uma distribuição de Gumbel:

$$P_{R_i}(\alpha_0) = \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - \alpha_0}{\beta}\right)\right) \quad (2.22)$$

A adoção da distribuição de Gumbel para esse tipo de análise assume que o cruzamento por um dado nível ocorre segundo um processo Markoviano, ou seja, os estados anteriores são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido. Os valores que caracterizam a distribuição de Gumbel são seu modo  $\mu_i$  e sua dispersão  $\beta_i$ , calculados pelas relações (2.23), onde  $\kappa_u$  e  $\kappa_a$  são parâmetros de largura de banda obtidos pelas Eqs. (2.24), função do fator irregularidade  $\delta_i$ , proveniente da Eq. (2.25):

$$\mu_i = \sqrt{2\ln(\kappa_u N_{0,i})} \quad (2.23.a)$$

$$\beta_i = \frac{1}{\sqrt{2\ln(\kappa_a N_{0,i})}} \quad (2.23.b)$$

$$\kappa_u = \begin{cases} 1,5(1 - e^{1,8\delta_i}), & \delta_i < 0,5 \\ 0,94 & , \delta_i \geq 0,5 \end{cases} \quad (2.24.a)$$

$$\kappa_a = \begin{cases} 7\delta_i, & \delta_i < 0,5 \\ 4,05, & \delta_i \geq 0,5 \end{cases} \quad (2.24.b)$$

$$\delta_i = \left(1 - \frac{\lambda_{1,i}^2}{\lambda_{0,i}\lambda_{2,i}}\right)^{1/2} \quad (2.25)$$

As propriedades da distribuição de Gumbel permitem a formulação das seguintes expressões para a média e variância de  $R_i$ , conforme as expressões seguintes, sendo  $\gamma \approx 0,57721$  a constante de Euler-Mascheroni:

$$E[\mathfrak{R}_i] = \sqrt{\lambda_{0,i}} (\mu_i + \gamma\beta_i) \quad (2.26)$$

$$V[\mathfrak{R}_i] = \lambda_{0,i} \frac{(\beta_i\pi)^2}{6} \quad (2.27)$$

A caracterização estatística de  $\sqrt{\mathfrak{J}_{2,a}} = \sqrt{\mathfrak{R}_1^2 + \mathfrak{R}_2^2 + \mathfrak{R}_3^2 + \mathfrak{R}_4^2 + \mathfrak{R}_5^2}$  pode ser feita por meio das propriedades estatísticas dos semi-eixos  $\mathfrak{R}_i$ , ao se considerar que cada uma delas não é correlacionada. Primeiramente, estimam-se os dois primeiros momentos estatísticos (média e variância) de  $(\sqrt{\mathfrak{J}_{2,a}})^2$ :

$$E[\mathfrak{J}_{2,a}] = E[\mathfrak{R}_1^2] + E[\mathfrak{R}_2^2] + E[\mathfrak{R}_3^2] + E[\mathfrak{R}_4^2] + E[\mathfrak{R}_5^2] \quad (2.28)$$

$$V[\mathfrak{J}_{2,a}] = V[\mathfrak{R}_1^2] + V[\mathfrak{R}_2^2] + V[\mathfrak{R}_3^2] + V[\mathfrak{R}_4^2] + V[\mathfrak{R}_5^2] \quad (2.29)$$

Por meio das definições de variância e da não correlação entre as variáveis aleatórias é possível escrever as seguintes relações:

$$E[\mathfrak{X}_i^2] = E[\mathfrak{X}_i]^2 + V[\mathfrak{X}_i] \quad (2.30)$$

$$V[\mathfrak{X}_i^2] = E\left[\left(\mathfrak{X}_i^2 - E[\mathfrak{X}_i^2]\right)^2\right] = E[\mathfrak{X}_i^4] - E[\mathfrak{X}_i^2]^2 \quad (2.31)$$

Das equações acima, somente  $E[\mathfrak{X}_i^4]$  é uma incógnita. Pode-se formular a Eq. (2.32) aplicando-se a definição das propriedades estatísticas de variáveis aleatórias (BENDAT e PIERSOL, 2010):

$$\begin{aligned} E[\mathfrak{X}_i^4] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{X}_i^4 dP_{\mathfrak{X}_i} \\ &= 4E[\mathfrak{X}_i]^2 \times V[\mathfrak{X}_i] + \frac{22}{5}V[\mathfrak{X}_i]^2 + 48\zeta_3 \frac{\sqrt{6}}{\pi^3} E[\mathfrak{X}_i] \times V[\mathfrak{X}_i]^{3/2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde  $\zeta_3 = 1,20206$  é a constante de Apéry.

De maneira similar à Eq. (2.32) acima e assumindo que a variável aleatória  $\sqrt{\mathfrak{J}_{2,a}}$  também apresenta uma distribuição de probabilidades seguindo a lei de Gumbel por ser uma combinação dos  $\mathfrak{X}_i$ , pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} E[\mathfrak{J}_{2,a}^2] &= 4E[\sqrt{\mathfrak{J}_{2,a}}]^2 V[\sqrt{\mathfrak{J}_{2,a}}] + \frac{22}{5}V[\sqrt{\mathfrak{J}_{2,a}}]^2 \\ &\quad + 48\zeta_3 \frac{\sqrt{6}}{\pi^3} E[\sqrt{\mathfrak{J}_{2,a}}] V[\sqrt{\mathfrak{J}_{2,a}}]^{3/2} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Seguindo as definições das expressões de média e variância, pode-se escrever:

$$E[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}^2] = E[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}]^2 - V[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}] \quad (2.34)$$

$$V[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}] = E[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}] - E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]^2 \quad (2.35)$$

Substituindo as Eqs. (2.34) e (2.35) na Eq. (2.33) formula-se a Eq. (2.36), que possui como única incógnita o valor  $E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]$ .

$$\begin{aligned} E[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}]^2 + V[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}] - 4E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]^2 \left( E[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}] - E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]^2 \right) \\ - \frac{22}{5} \left( E[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}] - E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]^2 \right)^2 \\ - 48\zeta_3 \frac{\sqrt{6}}{\pi^3} E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}] \left( E[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}] - E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]^2 \right)^{3/2} = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

A solução da Eq. (2.36) pode ser obtida por meio de um método numérico, permitindo a estimativa do valor de  $E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]$ . Junto com a variância calculada pela Eq. (2.35), é possível caracterizar o processo aleatório do segundo invariante do tensor desviatório. Com esse valor calculado, pode-se aplicá-lo à Eq. (3.20), completando a estimativa da esperança matemática do coeficiente de Sines.

No capítulo seguinte, é mostrada a formulação do método de elementos finitos que visa a obtenção de respostas em tensão no domínio da frequência via densidades espectrais de potência (PSD). Por meio da aplicação dos conceitos da teoria de análise de sinais, é possível extrair os valores dos momentos espectrais necessários para os cálculos apresentados anteriormente.

## **CAPÍTULO III**

### **MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE PLACAS FINAS PARA ANÁLISE DE FADIGA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA**

O equacionamento para modelagem estocástica de placas finas por meio do método dos elementos finitos é apresentado neste capítulo. Primeiramente é feita uma breve revisão sobre a formulação das matrizes determinísticas empregadas nos cálculos dos campos de deslocamento, deformação e tensão da placa. Posteriormente é apresentado o método para se obter as respostas dinâmicas em tensão do sistema no domínio da frequência, em termos de densidades espectrais de potência (PSD). Como citado no capítulo anterior, as PSDs são utilizadas na estimativa dos momentos espectrais envolvidos no cálculo da esperança matemática da raiz quadrada do segundo invariante do tensor desviatório de tensão. Após o desenvolvimento do método determinístico, a teoria é expandida para o domínio estocástico, onde a espessura e outras propriedades da placa podem ser consideradas variáveis aleatórias. Para isso, as incertezas são incluídas de forma paramétrica no modelo através dos elementos finitos estocásticos, afetando diretamente a integração das matrizes de massa e rigidez do sistema, onde os campos aleatórios são discretizados via expansão de Karhunen-Loève.

#### **3.1 Modelagem determinística de placas finas para análise de tensão no domínio da frequência**

O elemento de placa fina adotado neste trabalho para composição do método dos elementos finitos é retangular e composto por quatro nós, sendo um em cada extremidade. Cada nó possui cinco graus de liberdade, sendo dois deslocamentos no plano da placa

$(u_0, v_0)$ , um deslocamento transversal ( $w_0$ ) e duas rotações das seções transversais  $(\theta_x, \theta_y)$ . A Fig. 3.1 mostra um esquema simplificado desse elemento de dimensões  $a$  e  $b$ , bem como os eixos XYZ adotados, os nós e os graus de liberdade.

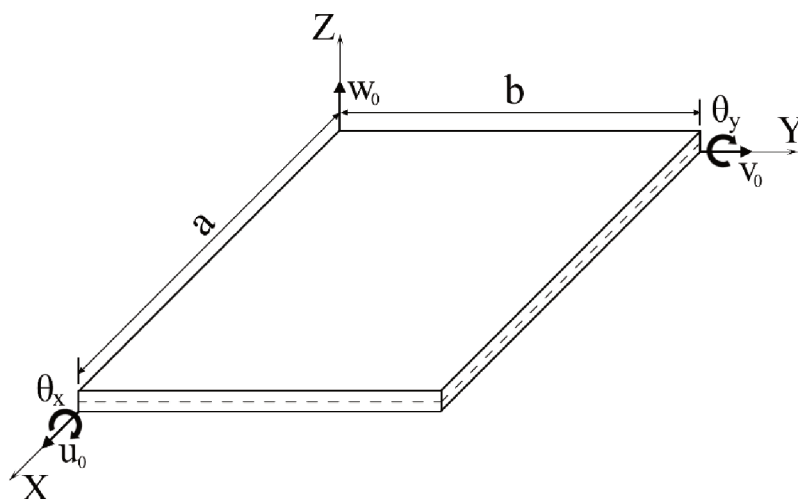


Figura 3.1 – Representação simplificada de um elemento finito de placa fina retangular

A formulação proposta por Kirchhoff para modelagem de placas finas deve seguir quatro hipóteses cinemáticas primordiais para simplificar o problema (REDDY, 1997). A primeira hipótese assumida é que as linhas retas perpendiculares à superfície média indeformada (linha neutra) permanecem retas e perpendiculares após a estrutura sofrer deformação. A segunda diz que as normais transversais não sofrem alongamento, ou seja, são inextensíveis. Apesar disso, elas podem sofrer rotação de maneira que não quebrem a primeira hipótese. As duas últimas hipóteses são que a espessura da placa deve permanecer constante durante o processo de deformação e que os deslocamentos atingidos são muito pequenos em relação às dimensões da placa.

A interpretação das duas primeiras condições leva à conclusão de que o deslocamento transversal é independente da coordenada transversal (ao longo da espessura) e, portanto, a deformação normal nessa direção é zero ( $\varepsilon_z = 0$ ) e as deformações cisalhantes são nulas ( $\gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0$ ). Por meio dessas implicações aliadas com as outras duas condições e com o fato da placa ser assumidamente fina, pode-se concluir que o sistema se encontra em um estado plano de tensões.

Após a deformação, segundo as hipóteses de Kirchhoff, a placa deve se apresentar de maneira semelhante ao corte apresentado na Fig. 3.2, que representa o comportamento de uma linha paralela à superfície da placa.

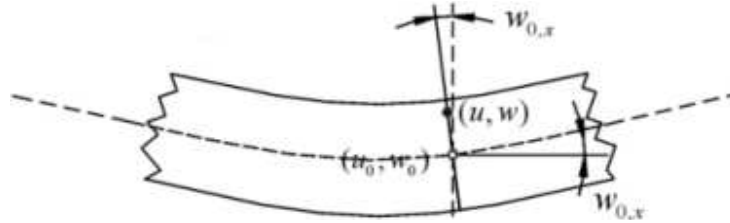


Figura 3.2 – Comportamento dos campos de deslocamento da placa fina segundo hipóteses de Kirchhoff (adaptado de Faria (2006))

Segundo Reddy (1997), os campos de deslocamento nas três direções principais XYZ, seguindo as hipóteses apresentadas anteriormente, são:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\theta_x \quad (3.1.a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\theta_y \quad (3.1.b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (3.1.c)$$

onde  $\theta_x = \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x}$  e  $\theta_y = \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y}$  são as rotações em relação aos eixos x e y, respectivamente.

Nesse caso a adoção de uma notação vetorial torna mais fácil o equacionamento do problema. Sendo assim, é desejável agrupar as Eqs. (3.1) em um vetor de campos de deslocamento  $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ , função das três dimensões x, y, z da placa e do tempo t:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Considerando-se as hipóteses que implicam em um estado plano de tensões e negligenciando-se as deformações na direção transversal, os campos de deformação podem ser calculados por meio das seguintes relações (TIMOSHENKO e GOODIER, 1951):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.3.a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.3.b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.3.c)$$

Novamente para facilitar o equacionamento, é conveniente agrupar esses campos em forma vetorial. Introduz-se aqui a matriz **D** de diferenciais do sistema:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial / \partial y & 0 \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{U}(x, y, z, t) \quad (3.4)$$

onde nota-se que os termos  $\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$  estão sem a indicação explícita da dependência geométrica e temporal  $(x, y, z, t)$  para simplificação das notações. Ressalta-se que, na sequência, por vezes o vetor  $\mathbf{U}(x, y, z, t)$  também poderá ser notado **U** assim como as componentes do deslocamento  $(u_0(x, y, t), v_0(x, y, t), w_0(x, y, t))$  podem aparecer simplesmente como  $(u_0, v_0, w_0)$ .

Na sequência, a adoção de funções de forma para aproximar os campos  $\mathbf{U}(x, y, z, t)$  se faz necessária. Essas funções representam o comportamento das variáveis de campo em cada elemento finito. Segundo Faria (2006), os campos de deslocamentos devem apresentar continuidade nos nós e nas fronteiras dos elementos para que esse modelo baseado na teoria de Kirchhoff seja aplicável no método dos elementos finitos. Para garantir

esse aspecto, as funções de forma escolhidas devem apresentar as primeiras derivadas contínuas.

Devido aos fatos citados no parágrafo anterior, a adoção de funções polinomiais é a melhor escolha para esse caso, pois possuem a garantia de continuidade e a facilidade de diferenciação e integração. Devido às incógnitas nodais, serão adotados polinômios de grau dois para os deslocamentos  $(u, v)$  no plano da placa e de grau quatro para o deslocamento transversal  $(w)$ , sendo que as rotações são obtidas por meio de diferenciação. As equações a seguir mostram as funções de interpolação escolhidas para o processo de integração das matrizes elementares:

$$\mathbf{N}_u(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad xy] \quad (3.5.a)$$

$$\mathbf{N}_v(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad xy] \quad (3.5.b)$$

$$\mathbf{N}_w(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3] \quad (3.5.c)$$

$$\mathbf{N}_{\theta_x}(x, y) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 2x \quad y \quad 0 \quad 3x^2 \quad 2xy \quad y^2 \quad 0 \quad 3x^2y \quad y^3] \quad (3.5.d)$$

$$\mathbf{N}_{\theta_y}(x, y) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad x \quad 2y \quad 0 \quad x^2 \quad 2xy \quad 3y^2 \quad x^3 \quad 3xy^2] \quad (3.5.e)$$

De maneira conveniente, é possível escrever as funções de forma  $\mathbf{N}(x, y)$  na seguinte forma matricial de dimensões elementares  $5 \times 20$ :

$$\mathbf{N}(x, y) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u(x, y) & \mathbf{0}_{1 \times 4} & \mathbf{0}_{1 \times 12} \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} & \mathbf{N}_v(x, y) & \mathbf{0}_{1 \times 12} \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} & \mathbf{0}_{1 \times 4} & \mathbf{N}_w(x, y) \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} & \mathbf{0}_{1 \times 4} & \mathbf{N}_{\theta_x}(x, y) \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} & \mathbf{0}_{1 \times 4} & \mathbf{N}_{\theta_y}(x, y) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

O vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{U}(x, y, z, t)$  apresentado na Eq. (3.2) pode ser aproximado por  $\hat{\mathbf{U}}(x, y, z, t)$  por meio das funções de forma:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) \approx \hat{\mathbf{U}}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(z) \mathbf{N}(x, y) u_e(t) \quad (3.7)$$

onde  $\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e o vetor dos deslocamentos mecânicos nodais contendo os

dados de deslocamentos elementares de cada grau de liberdade em cada nó é dado por:

$$u_e(t) = \left[ (u_0)_1 \quad (v_0)_1 \quad (w_0)_1 \quad (\theta_x)_1 \quad (\theta_y)_1 \quad \dots \quad (u_0)_4 \quad (v_0)_4 \quad (w_0)_4 \quad (\theta_x)_4 \quad (\theta_y)_4 \right]^T \quad (3.8)$$

O vetor de campos de deformação apresentado na Eq. (3.4) pode ser convenientemente reescrito da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\epsilon}(x, y, z, t) = \mathbf{B}(x, y, z) u_e(t) \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{D} \mathbf{A}(z) \mathbf{N}(x, y)$ .

A aplicação da lei de Hooke generalizada (BORESI *et al.*, 2011), estabelece que a relação entre deformação e tensão se dá por meio da multiplicação pela matriz dos coeficientes elásticos, dependentes do material e de sua orientação cristalina. Para o caso de materiais isotrópicos, a matriz de coeficientes elásticos é função do módulo de elasticidade  $E$  e do coeficiente de Poisson  $\nu$ :

$$\mathbf{H} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A aplicação da lei de Hooke resulta no vetor de tensões:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\boldsymbol{\epsilon}(x, y, z, t) = \mathbf{H}\mathbf{B}(x, y, z)u_e(t) \quad (3.11)$$

O equacionamento que representa o movimento do elemento de placa retangular pode ser obtido por meio da aplicação das equações de Lagrange (RAO, 2010). Para isto, as expressões das energias de deformação e cinética do elemento são formuladas com base nas deformações e tensões, expressas pelas Eqs. (3.9) e (3.11). As matrizes de massa e rigidez são calculadas por meio das seguintes integrais:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}(x, y)^T \mathbf{N}(x, y) dV_e \quad (3.12)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{V_e} \mathbf{B}_N(x, y)^T \mathbf{H}\mathbf{B}_N(x, y) dV_e \quad (3.13)$$

onde o superíndice  $(e)$  indica que as matrizes são elementares,  $V_e$  é o domínio volumétrico de integração do elemento finito e  $\mathbf{B}_N(x, y)$  é uma matriz que engloba o processo derivativo das funções de forma em relação às coordenadas  $(x, y)$ . Essa matriz é escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{B}_N(x, y) = \begin{bmatrix} \partial N_u / \partial x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_v / \partial y & 0 & 0 & 0 \\ \partial N_u / \partial y & \partial N_v / \partial x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial^2 N_w / \partial x^2 & \partial^2 N_w / \partial y^2 & \partial^2 N_w / \partial x \partial y \\ 0 & 0 & \partial^2 N_{\theta_x} / \partial x^2 & \partial^2 N_{\theta_x} / \partial y^2 & \partial^2 N_{\theta_x} / \partial x \partial y \\ 0 & 0 & \partial^2 N_{\theta_y} / \partial x^2 & \partial^2 N_{\theta_y} / \partial y^2 & \partial^2 N_{\theta_y} / \partial x \partial y \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

As matrizes globais de massa e rigidez são obtidas pela concatenação das matrizes elementares, observando as regras de conectividade dos nós e dos graus de liberdade (MOAVENI, 1999). A Eq. (3.15) descreve o movimento do sistema não-amortecido no domínio do tempo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.15)$$

onde  $\mathbf{M} = \bigcup_{n^{\circ}elem.} \mathbf{M}^{(e)}$ ,  $\mathbf{K} = \bigcup_{n^{\circ}elem.} \mathbf{K}^{(e)}$ ,  $\mathbf{f}(t)$  é o vetor dos carregamentos externos e  $\mathbf{u}(t)$  é o vetor dos deslocamentos do sistema global, ou seja, contém os valores dos  $u_e(t)$  de cada elemento.

Uma vez obtidos os deslocamentos  $\mathbf{u}(t)$  do sistema por meio da Eq. (3.15), é possível determinar a resposta em tensão no domínio do tempo fazendo uso da Eq. (3.11). Neste caso, se a estrutura for carregada por uma excitação harmônica da forma  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}e^{j\omega t}$ , a resposta gerada também será harmônica na forma  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}e^{j\omega t}$ . Para uma representação mais fiel à realidade, adiciona-se um amortecimento estrutural  $\mathbf{C}$  à equação do movimento. Originalmente apresentada no domínio do tempo, a Eq. (3.15) é transformada em uma equação algébrica no domínio da frequência da seguinte forma (RAO, 2011):

$$[\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{U}e^{j\omega t} = \mathbf{F}e^{j\omega t} \quad (3.16)$$

Isolando o módulo da relação entre deslocamento e força externa obtém-se a expressão da função de resposta em frequência (FRF)  $\mathbf{G}(\omega)$ :

$$\mathbf{G}(\omega) = \left| \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{F}} \right| = \frac{1}{[\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]} \quad (3.17)$$

A análise de tensões no domínio do tempo para caracterização do processo de fadiga é um método bastante oneroso computacionalmente pois, primeiramente, faz-se necessário o armazenamento de uma grande quantidade de dados e históricos de tensões. Além disso,

o pós-tratamento desses dados para análise numérica requer a avaliação de algumas integrais de convolução (LAMBERT, 2007). Esses fatores aliados com a aleatoriedade do carregamento tornam o tempo computacional envolvido proibitivo em análises feitas em computadores pessoais, mesmo para casos mais simples como uma placa fina.

Como alternativa, é desejável que a análise de tensão seja feita no domínio da frequência (ou domínio de Fourier). Com o uso dessa técnica é possível obter as densidades espectrais de potência (PSD) da resposta em tensão, geradas pela aplicação de esforços externos.

Segundo Bendat e Piersol (2010), sendo  $X$  um processo aleatório Gaussiano, existem quatro importantes propriedades estatísticas utilizadas para descrevê-lo:

- a) Média e média quadrática;
- b) Função densidade de probabilidade;
- c) Função de autocorrelação;
- d) Densidade espectral de potência (ou função densidade autoespectral).

A média  $\mu_x$  e a variância  $s^2$  de um processo representam a tendência central e dispersão em torno dela, enquanto que a média quadrática  $\psi_x^2$  constitui uma combinação dessas duas, ou seja, carrega uma estimativa da variância em seu cálculo. Já a função densidade de probabilidade  $p(x)$ , por sua vez, representa a distribuição da probabilidade de uma variável aleatória contínua em assumir um dado valor. A área total embaixo de sua curva será sempre unitária, representando a certeza da ocorrência do processo num intervalo  $]-\infty, +\infty[$ . Por fim, a função de autocorrelação  $R_x(\tau)$  é definida como sendo uma medida de propriedades do sinal em diferentes tempos, ou seja, como o valor dessa variável variando no tempo afeta o processo. Seu cálculo é dado em função de um atraso ou distância  $\tau$ . Por exemplo, se essa distância é zero, o valor da função de autocorrelação será unitário, indicando total correlação da variável com ela mesma.

Neste trabalho, a propriedade de maior interesse na obtenção das respostas em tensão de sistemas dinâmicos é a densidade espectral de potência  $\phi_x(\omega)$ . Ela representa a taxa de variação do valor da média quadrática com a frequência. Sua estimativa pode ser obtida de três maneiras, sendo que a que melhor se aplica à metodologia empregada neste trabalho é a transformada de Fourier das funções de autocorrelação (BENDAT e PIERSOL, 2010).

Seja  $\phi_u(\omega)$  a matriz de densidade espectral de potência e  $R_u(\tau)$  a função de autocorrelação do deslocamento  $\mathbf{u}(t)$  proveniente da aplicação de um carregamento externo  $f(t)$  com propriedades  $\phi_f(\omega)$  e  $R_f(\tau)$ . Seus valores podem ser calculados por:

$$\phi_u(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.18)$$

$$\phi_f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.19)$$

É importante observar que a aplicação da transformada inversa de Fourier nas equações anteriores resulta em:

$$R_u(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_u(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.20)$$

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_f(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.21)$$

A função autocorrelação para um processo estacionário aleatório é dada como segue:

$$R_u(\tau) = E[\mathbf{u}(t)\mathbf{u}^T(t+\tau)] = E[\mathbf{u}(t-\tau)\mathbf{u}^T(t)] \quad (3.22)$$

onde  $E[\bullet]$  é o operador esperança matemática.

Seguindo os desenvolvimentos originais propostos por Lambert (2007), a Eq. (3.22) pode ser reescrita como segue:

$$\begin{aligned}
R_u(\tau) &= E \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) f(t-\lambda) f^T(t+\tau-\zeta) g^T(\zeta) d\lambda d\zeta \right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) f(t-\lambda) f^T(t+\tau-\zeta) g^T(\zeta) d\lambda d\zeta dt
\end{aligned} \tag{3.23}$$

onde  $g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$  é a resposta do sistema a um impulso unitário.

Um processo é dito ergódico quando suas propriedades estatísticas podem ser obtidas de uma amostra com tamanho suficientemente grande. Em outras palavras, por exemplo, a média de uma amostra de um processo ergódico converge para a média do sinal caso o período de análise seja suficientemente longo. Matematicamente, em termos da autocorrelação pode-se escrever, para um processo ergódico:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_u(\tau, T) = R_u(\tau) \tag{3.24}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{var}[R_u(\tau, T)] = 0 \tag{3.25}$$

Considerando que a função de carregamento  $f(t)$  é um processo estacionário e ergódico, pode-se dizer que:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\lambda) f^T(t+\tau-\zeta) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^T(t+\tau+\lambda-\zeta) dt \\
&= R_f(\tau+\lambda-\zeta)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Substituindo a Eq. (3.26) na Eq. (2.23), obtém-se a função autocorrelação para o deslocamento do sistema na seguinte forma:

$$R_u(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) R_f(\tau+\lambda-\zeta) g^T(\zeta) d\lambda d\zeta \tag{3.27}$$

Essa equação define a resposta do deslocamento da estrutura sujeita a um carregamento aleatório no domínio do tempo. Por definição, o valor dessa função de correlação não depende do tempo  $t$  e, portanto, sendo este um sistema linear, se a excitação de entrada é um processo aleatório estacionário e ergódico, sua resposta também será. Portanto, introduzindo a Eq. (3.27) na (3.18) obtém-se uma nova expressão para a densidade espectral de potência do deslocamento  $\mathbf{u}(t)$ :

$$\phi_u(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\lambda) \mathbf{R}_f(\tau + \lambda - \zeta) \mathbf{g}^T(\zeta) d\lambda d\zeta \right] e^{j\omega\tau} d\tau \quad (3.28)$$

Observando a Eq. (3.26) e a relação apresentada na Eq. (3.21), pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\mathbf{R}_f(\tau + \lambda - \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_f(\omega) e^{j\omega(\tau + \lambda - \zeta)} d\omega \quad (3.29)$$

Introduzindo a Eq. (3.29) em (2.28), utilizando-se da definição de  $\mathbf{g}(t)$  e por meio de algumas manipulações matemáticas, chega-se à seguinte expressão para densidade espectral de potência do deslocamento:

$$\begin{aligned} \phi_u(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_f(\omega) e^{j\omega(\tau + \lambda - \zeta)} d\omega \mathbf{g}^T(\zeta) d\lambda d\zeta \right] e^{j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \times \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_f(\omega) e^{j\omega(\tau + \lambda - \zeta)} d\omega \times \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^T(\zeta) e^{j\omega\zeta} d\zeta \right] e^{j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \mathbf{G}(\omega) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_f(\omega) e^{j\omega(\tau + \lambda - \zeta)} d\omega \times \mathbf{G}^H(\omega) \right] e^{j\omega\tau} d\tau \\ &= \mathbf{G}(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_f(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \right] \mathbf{G}^H(\omega) \end{aligned} \quad (3.30)$$

ou ainda, sob a forma:

$$\phi_u(\omega) = \mathbf{G}(\omega) \phi_f(\omega) \mathbf{G}^H(\omega) \quad (3.31)$$

A matriz de densidade espectral de potência em tensão é obtida por meio da pré e pós multiplicação pelas matrizes  $\mathbf{HB}$ , de maneira similar à apresentada anteriormente para análise de tensão no domínio do tempo:

$$\phi_s(\omega) = \mathbf{HBG}(\omega) \phi_f(\omega) \mathbf{G}^H(\omega) \mathbf{B}^T \mathbf{H}^T \quad (3.32)$$

A Eq. (3.32) permite a obtenção da resposta em tensão no domínio da frequência de um sistema dinâmico quando conhecidos a FRF do deslocamento pela força aplicada, a matriz dos operadores diferenciais aplicados às funções de forma do método dos elementos finitos, a matriz de propriedades elásticas do material e o carregamento aplicado. Considerando o estado plano de tensões, a matriz da resposta em tensão do sistema assume a forma apresentada na Eq. (3.33), em unidades de  $Pa^2 / Hz$ .

$$\phi_s(\omega) = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(\omega) & \phi_{xy}(\omega) & \phi_{xy}(\omega) \\ \phi_{yx}(\omega) & \phi_{yy}(\omega) & \phi_{yx}(\omega) \\ \phi_{xy}(\omega) & \phi_{xy}(\omega) & \phi_{yy}(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

onde os elementos da diagonal principal dessa matriz simétrica representam as componentes das PSD das duas tensões normais  $[\phi_{xx}(\omega), \phi_{yy}(\omega)]$  e da tensão cisalhante  $[\phi_{xy}(\omega)]$  para cada elemento finito em cada frequência da banda de análise.

A figura 3.3 mostra um pequeno fluxograma que resume o processo de obtenção da resposta em tensão no domínio da frequência via PSD.

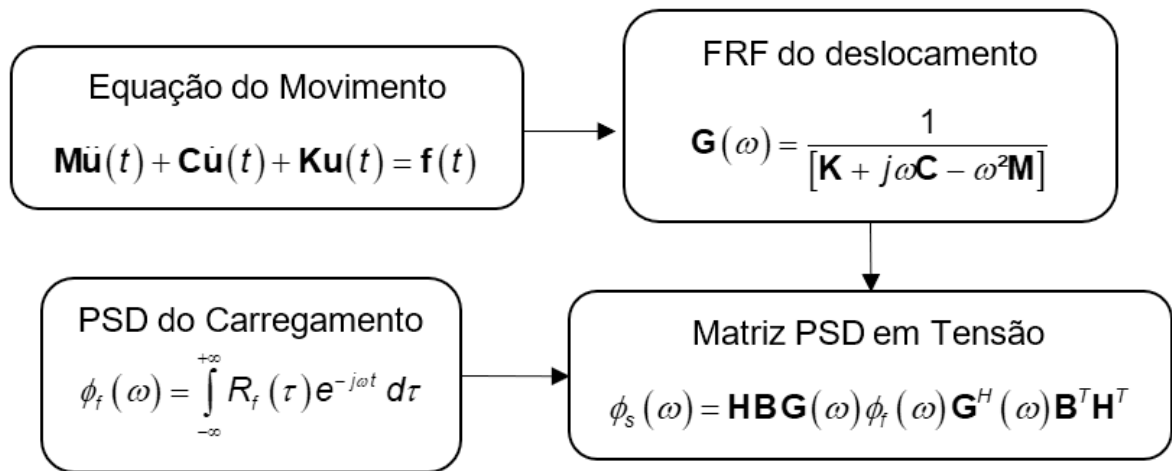


Figura 3.3 – Fluxograma resumo do processo de cálculo da resposta em tensão no domínio da frequência via PSD

### 3.2 Modelo de elementos finitos estocásticos para análise de fadiga

A inclusão de incertezas em um modelo computacional é usualmente feita de duas maneiras. A aproximação não paramétrica consiste na introdução de incertezas nas matrizes globais do modelo por meio de alterações diretas nas propriedades incertas de interesse (SOIZE, 2000; RITTO *et al.*, 2008). Em outras palavras, na abordagem não paramétrica, as matrizes de massa e rigidez do sistema são perturbadas pela flutuação direta de seus parâmetros incertos. A aproximação paramétrica, representada principalmente pelo método dos elementos finitos estocásticos (*Stochastic Finit Element Method* - SFEM), permite uma combinação da análise clássica por elementos finitos e a análise estatística (GHANEM e SPANOS, 1991; SCHUELLER, 2001). Neste caso, o processo de integração das Eqs. (3.12) e (3.13) para obtenção das matrizes elementares do sistema é alterado. A adição de alguns termos neste processo faz com que haja perturbação dentro das matrizes estocásticas de massa e rigidez do sistema dinâmico e não somente nas variáveis aleatórias.

#### 3.2.1 Parametrização das variáveis incertas

O primeiro passo visando preparar o sistema para a inclusão dos efeitos estocásticos é isolar as variáveis de interesse, parametrizando e fatorando-as para fora das matrizes de

massa e rigidez. Para isso, separam-se as matrizes em efeitos de membrana e flexão. Essa separação torna possível definir um grupo de parâmetros passível de serem considerados como variáveis aleatórias, sujeitas a flutuações em torno de seus valores médios. Além disso, esse processo possibilita ganho em custo computacional durante as iterações do processo numérico (DE LIMA *et al.*, 2010).

Para a análise de uma placa fina de material isotrópico, foram selecionados a espessura  $h$ , o módulo de elasticidade  $E$  e a densidade de massa  $\rho$ . Nas análises posteriores, o limite de fadiga em torção alternada simétrica  $t_{-1}$  também será considerado como variável aleatória. Como mostrado no Capítulo II, essa propriedade só aparece no equacionamento do coeficiente de Sines, então seus efeitos só aparecerão quando o índice de fadiga for estimado. As matrizes de massa e rigidez parametrizadas são definidas da seguinte maneira:

$$\mathbf{K} = Eh\mathbf{K}_m + Eh^3\mathbf{K}_b \quad (3.34)$$

$$\mathbf{M} = E\rho\mathbf{M}_m + E\rho^3\mathbf{M}_b \quad (3.35)$$

os subíndices  $m$  e  $b$  representam os efeitos de membrana (*membrane*) e flexão (*bending*), respectivamente.

### 3.2.2 Discretização dos campos aleatórios pelo método de Karhunen-Loève

Seja  $(x, y)$  o vetor que representa o campo físico bidimensional da placa fina e  $\theta$  as variáveis pertencentes ao espaço dos eventos aleatórios. Nesse âmbito, um campo aleatório bidimensional  $H(x, y, \theta)$  é definido como uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por um conjunto de parâmetros contínuos  $(x, y) \in \Omega$ , onde  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  representa o conjunto aberto que descreve a geometria do sistema físico. Em outras palavras, o campo  $H(x, y, \theta)$  corresponde a uma representação espacial em  $(x, y) \in \Omega$  de um parâmetro aleatório  $\theta$ .

Para a aplicação no método dos elementos finitos estocásticos, dentre as famílias de métodos utilizados para discretizar espacialmente um campo estocástico, estão os métodos chamados Series Expansion Methods (GHANEM e SPANOS, 1991). Estes métodos são

baseados no desenvolvimento em séries do campo aleatório e em uma análise espectral para seleção dos termos mais importantes. Dentre os três métodos que fazem parte desta categoria, destaca-se o método de expansão proposto por Karhunen-Loève (KL) como detalhado no livro de Ghanem e Spanos (1991). A discretização por KL de um campo aleatório bidimensional, gaussiano e homogêneo é dada sob a seguinte forma:

$$\hat{H}(x, y, \theta) = \bar{H}(x, y) + \sum_{r=1}^n H_r(x, y) \xi_r(\theta) \quad (3.36)$$

onde  $\bar{H}(x, y) = E[H(x, y, \theta)]$  é o valor esperado (média),  $\{\xi_r, i = 1, \dots, n\}$  são as variáveis aleatórias gaussianas e independentes (média zero e variância unitária) e  $\{H_r(x, y), r = 1, \dots, n\}$  representa as funções determinísticas.

Seja  $C((x_1, y_1), (x_2, y_2))$  a função de covariância conhecida associada a  $H(x, y, \theta)$ , restrita, simétrica e definida-positiva. Seu resultado indica o grau de interdependência dos valores de  $H$  nas posições físicas  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . Neste caso, a decomposição espectral de  $C((x_1, y_1), (x_2, y_2))$  é realizada como segue (GHANEM e SPANOS, 1991):

$$C((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r f_r(x_1, y_1) f_r(x_2, y_2) \quad (3.37)$$

onde  $(\lambda_r, f_r)$  representa, respectivamente, os autovalores e as autofunções de  $C((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ . A decomposição por KL de  $H(x, y, \theta)$  sobre a base das autofunções  $f_r(x)$  é dada pela seguinte expressão:

$$H(x, y, \theta) = \bar{H}(x, y) + \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_r} f_r(x, y) \xi_r(\theta) \quad (3.38)$$

A forma truncada dos  $r$  primeiros termos da série pode ser escrita como segue:

$$\hat{H}(x, y, \theta) = \bar{H}(x, y) + \sum_{r=1}^n \sqrt{\lambda_r} f_r(x, y) \xi_r(\theta) \quad (3.39)$$

### 3.2.3 Cálculo das matrizes elementares estocásticas de massa e rigidez

A formulação das matrizes elementares de massa e rigidez do elemento finito estocástico de placa se dá por meio da aplicação da técnica de expansão de KL de um campo aleatório  $H(x, y, \theta)$  sobre a base das autofunções do modelo que, aplicados juntamente à formulação determinística apresentada anteriormente neste mesmo capítulo, introduzem o efeito da estocasticidade no modelo. Como citado anteriormente, os parâmetros incertos escolhidos são a espessura e as propriedades mecânicas da placa. Portanto, fazendo uso das Eqs. (3.12) e (3.13), as matrizes de massa e rigidez estocásticas do elemento de placa fina podem ser obtidas pelas seguintes relações, já com as variáveis aleatórias fatoradas:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{V_e} H_r(x, y) \mathbf{N}(x, y)^T \mathbf{N}(x, y) dV_e \quad (3.40)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{V_e} H_r(x, y) \mathbf{B}_N(x, y)^T \mathbf{B}_N(x, y) dV_e \quad (3.41)$$

A obtenção de  $\lambda_r f_r(x, y)$  para um problema bidimensional se dá por meio da resolução do problema de autovalores definido pela seguinte equação integral de Fredholm (GHANEM e SPANOS, 1991):

$$\lambda_r f_r(x, y) = \int_{\Omega} C(x, y) f_r(x, y) dx dy \quad (3.42)$$

A expansão de Karhunen-Loève é definida em um domínio geométrico  $\Omega$ , que não necessariamente equivale ao domínio aplicado no método dos elementos finitos clássico (DE LIMA, RADE e BOUHADDI, 2010). Para o modelo bidimensional serão definidos dois

domínios  $\Omega_x, \Omega_y$  e adotada uma função de covariância  $C[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$  que facilite o cálculo dos  $\lambda_r$  e  $f_r(x, y)$ . Ghanem e Spanos (1991) propõem diversos tipos de funções de covariância e, dentre elas, existe a função de covariância exponencial cuja propriedade de separabilidade permite o desacoplamento do espaço dimensional, gerando dois problemas 1D independentes:

$$C[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = C(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \exp\left(-\frac{|x_1 - x_2|}{L_x} - \frac{|y_1 - y_2|}{L_y}\right) \quad (3.43)$$

onde  $(x_1, x_2) \in \Omega_x$  e  $(y_1, y_2) \in \Omega_y$ .  $L_x$  e  $L_y$  representam, respectivamente, os comprimentos de correlação para os domínios  $\Omega_x = [0, a]$  e  $\Omega_y = [0, b]$ , ilustrados na Fig. 3.4.

A escolha da função de covariância exponencial mostrada na Eq. (3.43) permite que o problema bidimensional de placa possa ser desacoplado em dois problemas de valores próprios independentes unidimensionais:

$$f_r(x, y) = f_i(x) f_j(y) \quad \text{e} \quad \lambda_r = \lambda_i \lambda_j \quad (3.44)$$

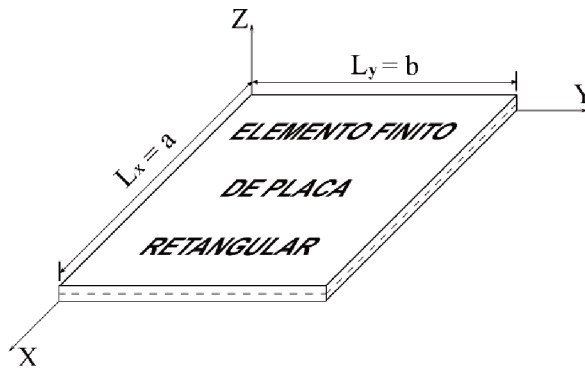


Figura 3.4 – Domínio de correlação adotado para o elemento finito de placa retangular

Como consequência, os termos  $(\lambda_i, f_i(x))$ , soluções da expressão da equação integral de Fredholm apresentada na Eq. (3.42) são obtidas por meio da decomposição de KL em um comprimento de correlação  $L_x \in \Omega_x$ . Em contrapartida, os termos  $(\lambda_j, f_j(y))$  são obtidos pela solução do mesmo problema, mas para um comprimento de correlação na

outra dimensão  $L_y \in \Omega_y$ . Esses termos são calculados pela seguinte rotina (GHANEM E SPANOS, 1991):

- **Se  $i$  e  $j$  são ímpares  $i \geq 1$  e  $j \geq 1$ :**

$$\lambda_i = \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2} ; \quad f_i(x) = \alpha_i \cos(\omega_i x) \quad (3.45.a)$$

$$\lambda_j = \frac{2c_2}{\omega_j^2 + c_2^2} ; \quad f_j(y) = \alpha_j \cos(\omega_j y) \quad (3.45.b)$$

onde  $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a + \frac{\sin(2\omega_i a)}{2\omega_i}}}$  e  $\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{b + \frac{\sin(2\omega_j b)}{2\omega_j}}}$ . Os termos  $\omega_i$  e  $\omega_j$  representam as

soluções das seguintes equações:

$$c_1 - \omega_i \tan(\omega_i a) = 0 ; \quad c_2 - \omega_j \tan(\omega_j b) = 0 \quad (3.46)$$

nos domínios  $\left[ (i-1)\frac{\pi}{a}, \left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a} \right]$  ee  $\left[ (j-1)\frac{\pi}{b}, \left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b} \right]$ .  $c_1 = 1/L_x$  e  $c_2 = 1/L_y$ .

- **Se  $i$  e  $j$  são pares  $i \geq 2$  e  $j \geq 2$ :**

$$\lambda_i = \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2} ; \quad f_i(x) = \alpha_i \cos(\omega_i x) \quad (3.47.a)$$

$$\lambda_j = \frac{2c_2}{\omega_j^2 + c_2^2} ; \quad f_j(y) = \alpha_j \cos(\omega_j y) \quad (3.47.b)$$

onde  $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a - \frac{\sin(2\omega_i a)}{2\omega_i}}}$  e  $\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{b - \frac{\sin(2\omega_j b)}{2\omega_j}}}$ . Os termos  $\omega_i$  e  $\omega_j$  representam,

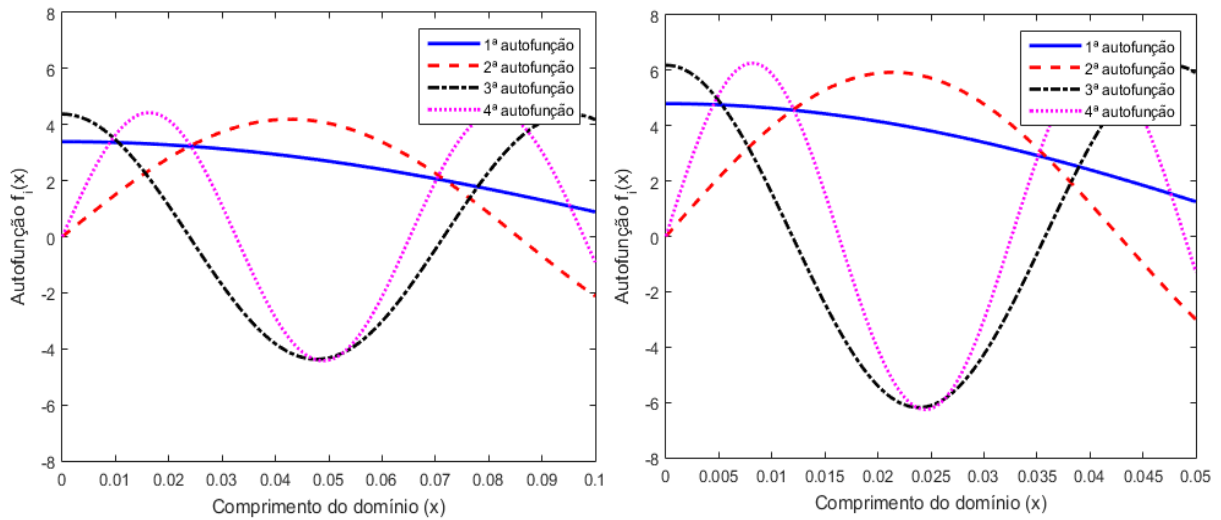
respectivamente, as soluções das seguintes equações:

$$\omega_i + c_1 \tan(\omega_i a) = 0; \quad \omega_j + c_2 \tan(\omega_j b) = 0 \quad (3.48)$$

nos domínios  $\left[\left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}, i\frac{\pi}{a}\right]$  e  $\left[\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b}, j\frac{\pi}{b}\right]$ , respectivamente.

A título ilustrativo foi elaborada uma rotina em ambiente MATLAB® para cálculo dos autovalores e autofunções de um problema unidimensional através do método de Karhunen-Loève, tendo como parâmetro de entrada os domínios, comprimentos de correlação e número de pontos desejado.

Para mostrar a diferença gerada pelas escolhas de comprimento de correlação, foram considerados dois cenários hipotéticos unidimensionais para teste: no primeiro, foi adotado um comprimento de correlação  $L_x = 0,1$  m e domínio  $\Omega_x = [0; 0,1]$ ; no segundo, foi assumido  $L_x = 0,05$  m e  $\Omega_x = [0; 0,05]$ . A Fig. 3.5 mostra as curvas das quatro primeiras autofunções definidos em cada domínio. Os autovalores estão na Tab. 3.1.



(a) (b)  
Figura 3.5 – Representação das autofunções para os cenários analisados

(a) Caso  $L_x = 0,1$  m e domínio  $\Omega_x = [0;0,1]$ ; (b)  $L_x = 0,05$  m e  $\Omega_x = [0;0,05]$

Tabela 3.1 – Valores dos autovalores calculados para cada cenário

Cenário	${}_1\lambda_x$	${}_2\lambda_x$	${}_3\lambda_x$	${}_4\lambda_x$
<b>1</b>	0,0739	0,0138	0,0045	0,0021
<b>2</b>	0,0369	0,0069	0,0023	0,0011

Após a obtenção de todos os parâmetros  $[\alpha_i, \alpha_j, \lambda_i, \lambda_j, f_i(x), f_j(y)]$ , as matrizes de massa e rigidez elementares e agora estocásticas são calculadas em função de  $\theta$ :

$$\mathbf{M}^{(e)}(\theta) = \bar{\mathbf{M}}^{(e)} + \sum_{r=1}^n \mathbf{M}_r^{(e)} \xi_r(\theta) \quad (3.49)$$

$$\mathbf{K}^{(e)}(\theta) = \bar{\mathbf{K}}^{(e)} + \sum_{r=1}^n \mathbf{K}_r^{(e)} \xi_r(\theta) \quad (3.50)$$

onde  $\bar{\mathbf{M}}^{(e)}$  e  $\bar{\mathbf{K}}^{(e)}$  são as matrizes elementares determinísticas calculadas de acordo com as Eqs. (3.11) e (3.12).  $\mathbf{M}_r^{(e)}$  e  $\mathbf{K}_r^{(e)}$  compreendem a parcela aleatória das matrizes elementares, computadas segundo a formulação apresentada nas Eqs. (3.51) e (3.52).

$$\mathbf{M}_r^{(e)} = \xi_r(\theta) \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_x} f_j(y) \int_{\Omega_y} f_i(x) \mathbf{N}(x,y)^T \mathbf{N}(x,y) d\Omega_y d\Omega_x \quad (3.51)$$

$$\mathbf{K}_r^{(e)} = \xi_r(\theta) \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_x} f_j(y) \int_{\Omega_y} f_i(x) \mathbf{B}_N(x,y)^T \mathbf{B}_N(x,y) d\Omega_y d\Omega_x \quad (3.52)$$

As matrizes globais são então concatenadas seguindo o procedimento padrão de montagem de matrizes elementares, levando em conta a conectividade dos nós. Dessa maneira as equações do movimento do sistema estocástico podem ser formuladas. Neste contexto, as matrizes das FRFs da Eq. (3.17) e da resposta em tensão da Eq. (3.32) do sistema determinístico assumem as seguintes formas para o sistema dinâmico estocástico:

$$\mathbf{G}(\omega, \theta) = \frac{1}{\mathbf{K}(\theta) + j\omega\mathbf{C}(\theta) - \omega^2\mathbf{M}(\theta)} \quad (3.53)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_s(\omega, \theta) = \mathbf{HBG}(\omega, \theta)\boldsymbol{\varphi}_r(\omega)\mathbf{G}^H(\omega, \theta)\mathbf{B}^T\mathbf{H}^T \quad (3.54)$$

### 3.3 Solução do Problema Estocástico

Os métodos de solução de problemas estocásticos se dividem nos seguintes grupos (SCHUELLER, 2001; STEFANO, 2009):

- a) *Método de simulação de Monte Carlo*: é o mais simples método para tratar o problema de variabilidade de respostas aleatórias. Sua metodologia é baseada no fato de que a melhor maneira de se obter uma distribuição de probabilidade adequada é tendo uma grande população como base dos cálculos;
- b) *Métodos de perturbação*: se baseiam em expansões das funções e operadores envolvidos em séries de Taylor ou séries de Neumann, fundamentando suas respostas em torno das médias das variáveis aleatórias;
- c) *Métodos espectrais*: baseados numa extensão do método dos elementos finitos para a solução de problemas de valor de contorno sujeitos a propriedades aleatórias descritas por campos Gaussianos. Eles utilizam funções de base no espaço de Hilbert, podendo ser polinômios ortogonais ou um caos polinomial.

Neste trabalho, será adotado o Método de Monte Carlo para a solução do problema estocástico. Para a aplicação do método é necessário gerar uma população com uma função de distribuição de probabilidade conhecida *a priori*. Neste caso, com o intuito de obter uma convergência mais rápida, foi adotado o Hipercubo-Latino (HCL) como gerador de amostras (FLORIAN, 1992; MANTEUFEL, 2000).

É importante salientar que uma análise de convergência das respostas do sistema estocástico será feita por meio do cálculo da raiz quadrada do desvio médio quadrático em função do número de amostras  $n_s$ , segundo a seguinte expressão:

$$RMSE(n_s) = \sqrt{\frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} |\mathbf{G}_i(\omega, \theta) - \bar{\mathbf{G}}(\omega, \theta)|^2} \quad (3.55)$$

## **CAPÍTULO IV**

### **BASE DE REDUÇÃO ROBUSTA PARA SISTEMAS ESTOCÁSTICOS**

Uma base de redução adaptada a modelos estocásticos é proposta nesse capítulo. A composição desta base consiste na alteração da base de Ritz clássica por meio da inclusão de resíduos de deslocamentos provenientes das chamadas forças não-exatas, geradas pelas perturbações causadas pelas aleatoriedades provenientes do modelo de elementos finitos estocástico. A intenção desta aplicação, também chamada de condensação de modelos, é diminuir satisfatoriamente o tempo de avaliação da rotina de cálculo para a análise de fadiga no domínio da frequência pelo método de Sines. A realização desse tipo de análise sem qualquer tipo de redução seria inviável, mesmo para aplicações acadêmicas, devido as inúmeras iterações envolvendo operações com matrizes estocásticas. Além disso, a necessidade de se repetir o cálculo do problema de autovalores a cada iteração do método faz com que o problema fique bastante oneroso computacionalmente. A técnica proposta neste trabalho propõe o adequado enriquecimento da base e alterando-a a cada iteração sem a necessidade de recalculas as autosoluções do sistema estocástico oneroso.

#### **4.1 Revisão sobre síntese modal de componentes**

Algumas aplicações de engenharia requerem o desenvolvimento de modelos computacionais visando representar virtualmente o comportamento mais realístico possível de uma estrutura sob diferentes condições de uso. Por exemplo, o método dos elementos finitos é uma ferramenta bastante útil e poderosa de discretização de sistemas contínuos formados por infinitos graus de liberdade (GDLs) em elementos e nós com um número finito de GDL, permitindo obter respostas dinâmicas de sistemas mais complexos de engenharia.

Em sistemas pequenos é possível obter bons resultados e ótimas aproximações de maneira bastante eficaz em computadores pessoais. No entanto, dependendo da dimensão do problema (sistemas de interesse industrial, por exemplo) e do tipo de análise pode ser necessária a utilização de um elevado número de elementos e refinamento da malha para que sejam gerados valores adequados, refletindo diretamente em acréscimo de esforço computacional.

Devido à necessidade de resolução de problemas em um tempo mais curto e com boa precisão, é necessária a utilização de técnicas de redução de modelos, conhecidas também como síntese modal de componentes, tradução do inglês *component-mode synthesis (CMS)* (DE LIMA *et al.*, 2015). Essa técnica permite diminuir o número de modos considerados no sistema, tornando-o mais simples, com matrizes de dimensões menores e possibilitando a obtenção de respostas mais rápidas.

O termo “modos componentes” (*component-modes* ou ainda vetores de Ritz) é utilizado para representar modos tais como modos de vibrar, modos de corpo rígido, modos de restrição e *attachment modes*. Esses modos são utilizados na composição de uma base de redução que, ao ser aplicada às matrizes representativas de uma estrutura conseguem representar, com certa precisão (adotada pelo usuário), seu comportamento dinâmico em uma faixa desejada (CRAIG e KURDILA, 2006). Os métodos CMS em geral consistem em três passos básicos:

- a) Divisão da estrutura completa em várias subestruturas (componentes);
- b) Definição do conjunto de modos (*component-modes*) que representarão o comportamento dinâmico das subestruturas;
- c) Acoplamento das subestruturas para compor o sistema reduzido e a equação do movimento reduzida.

A título de exemplo ilustrativo deste processo, seja uma viga engastada, como mostrada na Fig. 4.1. Esse exemplo representa o tipo de subestruturação mais comum, que é a conexão de dois ou mais componentes adjacentes por meio de interfaces redundantes. Na Fig. 4.1(a) tem-se a estrutura subdividida em três componentes cujo elemento central apresenta essa condição. Na Fig. 4.1(b) nota-se a divisão entre os tipos de coordenadas. As coordenadas de interface redundante (ou de contorno) são conhecidas como *boundary* e notadas por um *B*, enquanto *I*, *R*, *E* representam as coordenadas interiores, de corpo rígido e exteriores, respectivamente. As coordenadas de contorno são obtidas pela soma das coordenadas de corpo rígido mais as externas. Ao se aplicar uma carga externa em um elemento interno, este passa a ser um grau de liberdade de contorno. Para um sistema não

amortecido subestruturado, a equação do movimento é dada na forma apresentada na Eq. (4.1).

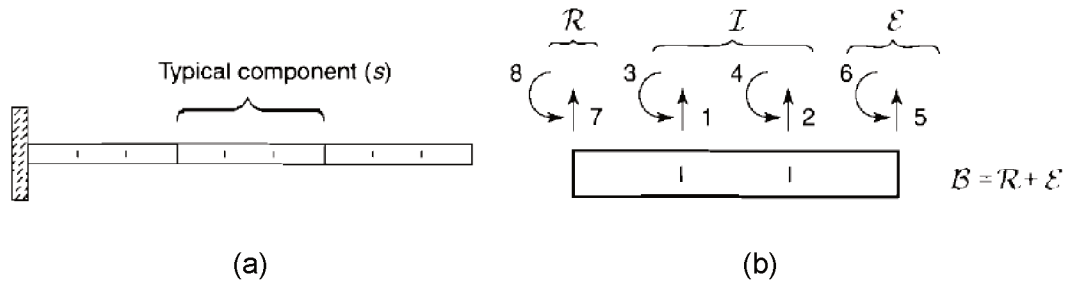


Figura 4.1 – Viga engastada e suas divisões. (a) Componentes típicos. (b) Coordenadas típicas (extraído de Craig e Kurdila (2006))

$$\mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{K}^{(s)} \dot{\mathbf{u}}^{(s)} = \mathbf{f}^{(s)} + \mathbf{r}^{(s)} \quad (4.1)$$

onde o superíndice (s) indica que essa equação foi dada para uma subestrutura. Do lado esquerdo da equação tem-se a matriz de massa  $\mathbf{M}^{(s)}$ , a matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(s)}$  e o vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}^{(s)}$ . Do lado direito da equação estão o vetor de esforços externos aplicados  $\mathbf{f}^{(s)}$  e as forças de reação dos componentes  $\mathbf{r}^{(s)}$ . Essa última aparece devido à conectividade dos componentes adjacentes nos graus de liberdade de contorno.

O método de síntese modal de componentes consiste na representação das coordenadas de deslocamento físicas  $\mathbf{u}$  em termos de coordenadas generalizadas  $\mathbf{u}_r$ , por uma transformação de Ritz da seguinte forma:

$$\mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{T}^{(s)} \mathbf{u}_r^{(s)} \quad (4.2)$$

onde a matriz  $\mathbf{T}^{(s)}$  é a matriz de modos componentes que, aplicada aos elementos da Eq. (4.1) geram as seguintes matrizes e vetores. A inclusão do subíndice  $r$  indica que elas foram reduzidas.

$$\mathbf{M}_r^{(s)} = \mathbf{T}^{(s)T} \mathbf{M}^{(s)} \mathbf{T}^{(s)} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{K}_r^{(s)} = \mathbf{T}^{(s)T} \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{T}^{(s)} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{f}_r^{(s)} = \mathbf{T}^{(s)T} \mathbf{f}^{(s)} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{r}_r^{(s)} = \mathbf{T}^{(s)T} \mathbf{r}^{(s)} \quad (4.6)$$

As matrizes reduzidas geram a equação do sistema reduzido para cada componente de subestrutura:

$$\mathbf{M}_r^{(s)} \ddot{\mathbf{u}}_r^{(s)} + \mathbf{K}_r^{(s)} \mathbf{u}_r^{(s)} = \mathbf{f}_r^{(s)} + \mathbf{r}_r^{(s)} \quad (4.7)$$

A próxima etapa do método CMS é a escolha dos modos de composição da base de redução. Busca-se aqui a melhor representação possível para o comportamento dinâmico do sistema. Segundo Craig e Kurdila (2006), os modos componentes se dividem em modos normais, modos de restrição, modos de corpo rígido e *attachment modes*, e são incluídos na matriz da base de redução dependendo da técnica CMS adotada. Após a redução, se o sistema tiver sofrido subestruturação, uma técnica de acoplamento deve ser aplicada.

## 4.2 Base modal de Ritz

Para um modelo de placa fina linear e sem a presença de amortecimento externo é recomendada a utilização da chamada base modal de Ritz, por vezes chamada simplesmente de base de Ritz. Ela é composta por modos normais e modos de restrição. A aplicação da redução de modelos via base modal de Ritz e sua extensão e adaptação para o caso estocástico não envolverá subestruturação do sistema devido à sua simplicidade e simetria. Em aplicações reais, no entanto, pode ser necessário a utilização do conjunto completo de técnicas de subestruturação e composição das bases de redução por outros tipos de modos componentes (CRAIG e KURDILA, 2006).

Os dois tipos de modos componentes presentes e a composição da base modal de Ritz são abordados nos subtópicos a seguir.

#### 4.2.1. Modos normais

O grupo de modos componentes mais utilizado na composição de bases de redução são os modos normais. Eles podem ser divididos em duas categorias mais amplamente aplicadas, dependendo das condições de contorno das interfaces: os modos à interface fixa e os modos à interface livre.

Os modos normais à interface fixa são obtidos aplicando-se as restrições de movimento (condições de contorno) e resolvendo o seguinte problema de autovalores e autovetores associado ao sistema:

$$[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] \{\phi_i\} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

onde o autovalor  $\omega_i$  representa a i-ésima frequência natural do sistema com modo de vibrar dado pelo autovetor  $\phi_i$ .

O segundo tipo de modos normais são os modos à interface livre. A obtenção destes modos se dá de maneira similar aos modos à interface fixa, com a diferença que a solução do problema de autovalores e autovetores é realizada sem a imposição das condições de contorno.

#### 4.2.2. Modos restritos

O segundo tipo de modo componente que entra na composição da base de Ritz são os modos restritos. Eles são definidos como a resposta estática da estrutura quando submetida à aplicação de um carregamento unitário e imposição dos bloqueios dos graus de liberdade sujeitos a condições de contorno. Matematicamente os modos restritos  $\bar{\mathbf{U}}$  são obtidos pela resolução da Eq. (4.9) para  $F = 1$ , ou seja, consiste na inversão da matriz de rigidez.

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (4.9)$$

#### 4.2.3. Composição da base modal de Ritz

Busca-se primeiramente, no âmbito das técnicas de condensação de modelos, a obtenção de uma base de redução que represente de maneira eficaz as mesmas respostas dinâmicas obtidas pelo uso dos modelos nominais. Neste aspecto, dispor de uma base de redução capaz de representar fidedignamente o movimento de um modelo de dimensões maiores é primordial nos processos iterativos presentes na modelagem estocástica e na otimização, uma vez que a aplicação desta base permite reanálises aproximadas rápidas e econômicas em termo do custo de cálculo.

A aplicação das bases de redução, em especial aqui a referida base modal de Ritz, utiliza-se da aproximação das respostas, buscando a solução num subespaço, ou seja, a aproximação modal consiste na projeção das matrizes componentes das equações do movimento do sistema numa base de redução com o objetivo de diminuir o número de graus de liberdade efetivos do sistema e, portanto, acelerar a resolução numérica do problema, através da hipótese de que as respostas exatas podem ser aproximadas por soluções dentro de um subespaço reduzido da forma apresentada anteriormente na Eq. (4.2).

Em seu trabalho, Lima *et al.* (2010), Gèrges (2013), e Cunha-Filho et al (2018) apontaram algumas técnicas para a obtenção de bases de redução. Conforme citado anteriormente, para o caso de uma estrutura linear cujas características físicas do sistema são bem conhecidas, é apropriado utilizar-se da base modal de Ritz, formada pelos primeiros modos normais à interface fixa (autovetores obtidos pela solução do problema de autovetores da Eq. (4.8)) e enriquecida com a inclusão de vetores de modos restritos (resíduo estático, Eq. (4.9)).

A definição da quantidade de modos normais a ser utilizada na composição da base de Ritz depende de alguns critérios de escolha. Recomenda-se primeiramente expandir a faixa de análise, utilizando 1,5 a 2,5 vezes a frequência máxima desejada na banda de interesse (MACIEL e BARBOSA, 2015). Por exemplo, para uma análise na faixa [0-100] Hz, a banda de interesse se torna no mínimo [0-150 Hz] e a parte referente aos modos normais à interface fixa será composta de todos os modos de vibrar com frequência natural até 150 Hz. A Eq. (4.10) mostra a composição final da base modal de Ritz  $\mathbf{T}_{(0)}$ , obtida pela concatenação dos modos componentes:

$$\mathbf{T}_{(0)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} & \bar{\mathbf{U}} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Como não serão utilizadas técnicas de subestruturação, o cálculo das matrizes de massa e rigidez globais reduzidas ( $\mathbf{M}_R$  e  $\mathbf{K}_R$ , respectivamente) se dá diretamente por meio da pré e pós multiplicação das matrizes do sistema nominal pela base de redução, da seguinte forma:

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \quad (4.12)$$

As expressões para cálculo da FRF e resposta em tensão apresentadas nas Eqs. (3.53) e (3.54) do Capítulo III podem ser reescritas da seguinte maneira para o sistema reduzido:

$$\mathbf{G}_R(\omega, \theta) = \frac{1}{\mathbf{K}_R(\theta) + j\omega \mathbf{C}_R(\theta) - \omega^2 \mathbf{M}_R(\theta)} \quad (4.13)$$

$$\Phi_s(\omega, \theta) = \Psi \mathbf{G}_R(\omega, \theta) \Phi_F(\omega) \mathbf{G}_R^H(\omega, \theta) \Psi^T \quad (4.14)$$

onde  $\Psi = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{T}$  e  $\Phi_F(\omega) = \mathbf{T}^T \phi_f(\omega) \mathbf{T}$ .

A Fig. 4.2 mostra um fluxograma representativo das etapas aplicadas para a obtenção da resposta em tensão no domínio da frequência para um sistema dinâmico condensado.

É notável que a obtenção da matriz  $\mathbf{T}$  dada pela Eq. (4.10) envolve a solução do problema de autovalores e autovetores para o cálculo dos modos componentes normais à interface fixa, conforme apresentado na Eq. (4.8). Há ainda a necessidade da inversão da matriz de rigidez para obter os modos componentes restritos, Eq. (4.9). O tempo total envolvido nessas operações pode se tornar bastante elevado, visto que elas devem ser realizadas a cada amostra componente do processo iterativo envolvido na solução estocástica do problema. Pode-se imaginar ainda que se o modelo for referente a uma

estrutural industrial real o tempo de cálculo pode se tornar realmente proibitivo em virtude das dimensões matriciais. Sendo assim, é altamente desejável evitar o recálculo do problema de autosoluções e a inversão matricial para que o processo de condensação atinja máxima eficácia.

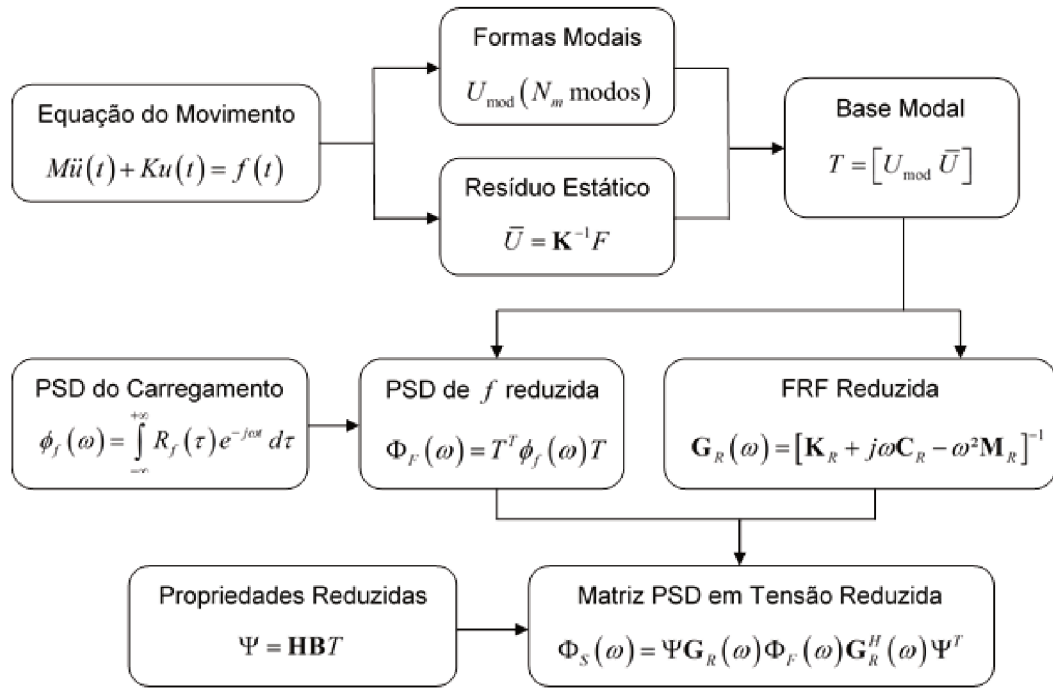


Figura 4.2 – Fluxograma da rotina de cálculo para obtenção da resposta em tensão no domínio da frequência de um sistema dinâmico condensado

#### 4.3 Base de redução adaptada a sistemas estocásticos

A base de redução proposta neste trabalho foi baseada no desenvolvimento de uma base adaptada para alterações em sistemas viscoelásticos por de Lima *et al.* (2010). A ideia principal para compor a base adaptada para sistemas estocásticos é considerar as flutuações dos parâmetros incertos como “alterações estruturais”. Dessa forma, a base deve ser atualizada e enriquecida por meio da inclusão de mais modos restritos a cada iteração, tomando como ponto de partida a base de Ritz do sistema nominal, ou seja, o sistema com os valores médios para os parâmetros incertos.

Seguindo a formulação proposta no Capítulo III, especificamente nas equações (3.49) e (3.50), nota-se que as matrizes globais estocásticas podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\mathbf{M}(\theta) = \bar{\mathbf{M}} + \Delta\mathbf{M} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{K}(\theta) = \bar{\mathbf{K}} + \Delta\mathbf{K} \quad (4.16)$$

onde  $\bar{\mathbf{M}}$ ,  $\bar{\mathbf{K}}$  são referentes à parcela do sistema nominal (propriedades médias) e  $\Delta\mathbf{M}$ ,  $\Delta\mathbf{K}$  podem ser entendidos como a flutuação em torno da média, ou em outras palavras, a parcela de alteração estrutural presente na estrutura sujeita a efeitos estocásticos.

Introduzindo as Eqs. (4.15) e (4.16) na equação de movimento do sistema não amortecido tem-se:

$$(\bar{\mathbf{M}} + \Delta\mathbf{M})\ddot{\mathbf{U}} + (\bar{\mathbf{K}} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (4.17)$$

De forma a deixar o lado esquerdo da equação apenas com termos referentes ao sistema nominal, pode-se realizar a seguinte manipulação matemática:

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{U}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_{\Delta\mathbf{M}} - \mathbf{F}_{\Delta\mathbf{K}} \quad (4.18)$$

onde  $\mathbf{F}_{\Delta\mathbf{M}} = \Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{F}_{\Delta\mathbf{K}} = \Delta\mathbf{K}\mathbf{U}$  são vetores de forças não-exatas associados às modificações introduzidas no sistema pela flutuação das variáveis aleatórias.

Considerando que as respostas dinâmicas do sistema não são conhecidas, esses vetores não podem ser computados de maneira exata. Segundo Masson *et al.* (2006), um método de redução de modelos robusto consiste em, primeiramente, gerar uma pré-avaliação dessas forças não-exatas para representar o subespaço que as contém. Esses vetores contendo modos restritos são então incluídos na base de Ritz do sistema nominal,

representando o comportamento dinâmico do sistema modificado. Esse processo é então repetido a cada iteração.

Seja um sistema sujeito a modificações estruturais causadas por estocasticidade em um parâmetro  $p_i$  qualquer. A formulação da pré-avaliação das forças não-exatas é dada por:

$$\mathbf{F}_{\Delta p_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\Delta p_i}^{\mathbf{M}} & \mathbf{F}_{\Delta p_i}^{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

onde  $\mathbf{F}_{\Delta p_i}^{\mathbf{M}} = \Delta \mathbf{M} \phi_0 \Lambda_0$ ,  $\mathbf{F}_{\Delta p_i}^{\mathbf{K}} = \Delta \mathbf{K} \phi_0$  são relacionadas às modificações nas matrizes de massa e rigidez,  $\phi_0$  são os modos normais da base de Ritz do sistema original e  $\Lambda_0 = \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_{NR})$  é o vetor de autovalores. Esses dois vetores são obtidos pela solução do problema apresentado na Eq. (4.8).

De maneira similar à apresentada na Eq. (4.9), o resíduo associado às forças não-exatas adicionadas ao sistema modificado por cada parâmetro  $p_i$  é calculado pela Eq. (4.20).

$$\mathbf{R}_{\Delta p_i} = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{F}_{\Delta p_i} \quad (4.20)$$

O passo final é introduzir esse resíduo de modos restritos na base de Ritz calculada para o sistema nominal por meio da Eq. (4.10), enriquecendo-a e possibilitando a representação das respostas dinâmicas do sistema sob flutuações de parâmetros sem a necessidade de recálculo do problema de autosoluções a cada iteração. A base de redução adaptada para modelos estocásticos  $\mathbf{T}_{(s)}$  é montada da seguinte forma:

$$\mathbf{T}_{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{(0)} & \mathbf{R}_{\Delta} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

onde  $\mathbf{R}_{\Delta} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Delta p_1} & \mathbf{R}_{\Delta p_2} & \dots & \mathbf{R}_{\Delta p_{np}} \end{bmatrix}$  e  $np$  é o número de variáveis aleatórias.

A diferença de procedimentos entre o método clássico de redução utilizando a base nominal de Ritz e o método robusto, por meio da base estocástica pode ser observada no fluxograma da Fig. 4.3.

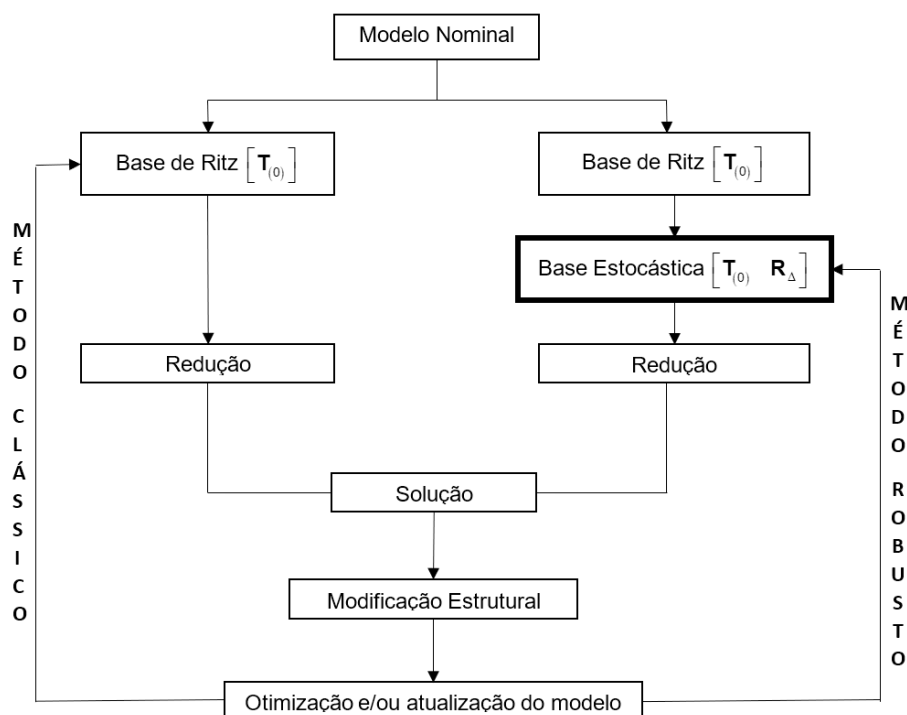


Figura 4.3 – Fluxograma comparativo entre as metodologias clássica e robusta de redução de modelos

Neste capítulo foi proposta uma base de redução de modelos bem adaptada para sistemas estocásticos com propagação de incertezas por meio da expansão de Karhunen-Loève (GHANEM e SPANOS, 1991). O objetivo principal da aplicação da metodologia proposta é evitar a necessidade de se resolver o problema de autovalores e autovetores a cada iteração da rotina estocástica. Com sua aplicação, espera-se obter resultados de maneira mais eficaz do que com a base de Ritz clássica.

# CAPÍTULO V

## OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO ROBUSTA

Este capítulo é dedicado à apresentação do método de otimização utilizado na aplicação de concepção do projeto ótimo-robusto de uma placa fina de alumínio com base no índice de fadiga de Sines. Os métodos de otimização tiveram sua origem antes dos primeiros computadores, mas foi após a popularização de computadores pessoais com maior capacidade de processamento de dados que esses métodos ganharam força. Como os métodos são iterativos, o processo de otimização usualmente requer bastante tempo computacional para que tenha sua convergência assegurada. Esse é mais um fator que mostra a importância da aplicação dos métodos de redução de modelo apresentados no Capítulo IV. Primeiro, uma breve introdução aos tipos de métodos clássicos e suas particularidades é apresentada. O conceito de otimização multiobjetivo é definido, seguido da metodologia de solução adotada, neste caso, o método *Non dominated Sorting Genetic Algorithm*, também conhecido como NSGA-II.

### 5.1 Introdução aos métodos de otimização

O conceito de otimizar é, de maneira simplificada, tornar melhor o que já existe, como por exemplo obter uma configuração estrutural que atue bem na função para a qual foi projetada com mais eficiência e menores custos financeiros. Os processos de otimização visam a busca da melhor solução para um problema sem ter que testar na prática todas as possibilidades envolvidas, o que seria impossível.

Um problema de otimização, matematicamente, consiste em minimizar ou maximizar uma dada função, chamada de função objetivo, que pode estar sujeita ou não a restrições de igualdade, desigualdade e restrições laterais. Essas restrições podem estar explícitas ou implícitas em relação as variáveis de projeto e podem ser lineares ou não-lineares (VANDERPLAATS, 1999).

A solução de um problema de otimização requer a aplicação de alguns métodos, que em sua maior parte, são divididos em dois grandes grupos. O primeiro engloba os métodos baseados no cálculo de derivadas ou que envolvem informações extraídas dos gradientes (algoritmos determinísticos). Nesses métodos não há a presença de decisões de caráter aleatório. Para otimizar projetos por meio de técnicas determinísticas, deve-se determinar um vetor direção que reduza o valor da função objetivo e, se esse projeto apresenta restrições, a direção adotada não deve violar nenhuma delas.

Já os métodos estocásticos (randômicos ou aleatórios), utilizam conceitos da teoria de probabilidades, inserindo características aleatórias no processo de otimização. Isso diminui a probabilidade de o valor ótimo se situar numa região local da curva da função objetivo e consequentemente aumenta a chance de este valor ótimo convergir para um ótimo global que atenda melhor as expectativas geradas durante a formulação do problema (SUDRET e DER KIUREGHIAN, 2000; SUDRET, 2007).

O problema pode ter ou não limitantes. Quando existem restrições, há dois tipos de métodos para resolução: os métodos indiretos, onde como maior exemplo, tem-se os métodos sequenciais e métodos diretos, que trabalham diretamente sobre as restrições, podendo-se citar como exemplo clássico a programação linear (PRADO, 2003; GOLDBARG, 2000).

Os métodos de otimização também são classificados quanto ao número de variáveis envolvidas. Para funções de uma variável utilizam-se os métodos de busca unidimensional (busca de Fibonacci, método da Seção Áurea, Aproximação Polinomial e outros). Já para funções de várias variáveis existem muitos métodos disponíveis, sendo alguns deles mais aplicados como por exemplo: métodos de primeira ordem baseados no cálculo do gradiente, de segunda ordem baseados no cálculo da matriz Hessiana e métodos Quasi-Newton, que utilizam uma matriz pseudo-Hessiana.

Por fim, há ainda mais uma classificação dos métodos quanto ao número de objetivos do processo de otimização: problemas mono-objetivo e problemas multiobjetivo. Neste trabalho deseja-se realizar um processo de otimização de mais de um objetivo. Sendo assim, o texto a seguir tratará de problemas multiobjetivos determinísticos (PMOD) e de

problemas multiobjetivos robustos (PMOR), ou estocásticos. Em ambos os casos não há a obtenção de uma resposta ótima definitiva, e sim um conjunto de pontos ótimos conflitantes entre si que otimizam várias componentes de um vetor custo (soluções de Pareto) (VICENTE, 2014; ESCHENAUER *et al.*, 2012).

## 5.2 Otimização multiobjetivo

### 5.2.1 Problema de otimização multiobjetivo determinístico (PMOD)

Um problema de otimização multiobjetivo pode ser definido em sua forma matemática da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \\ g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ x_L \leq x \leq x_U \quad x \in C \end{array} \right. \quad (5.1)$$

onde  $F(x)$  é o vetor de funções objetivo a serem otimizadas,  $n \geq 2$  designa o número de funções objetivo,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  é o vetor contendo as variáveis de projeto,  $C \subset R^k$  é o conjunto realizável, também chamado de espaço de projeto, delimitado pelas restrições de igualdade ou desigualdade  $g_j(x)$  e seus limites laterais inferior  $x_L$  e superior  $x_U$ .

Como mencionado anteriormente, uma função multiobjetivo não apresenta apenas uma solução ótima e sim um conjunto de pontos ótimos conflitantes, onde por definição, existe um equilíbrio tal que não se pode melhorar um critério sem deteriorar pelo menos algum dos outros. Esse princípio, postulado por Vilfredo Pareto (PARETO, 1896) recebeu o nome de ótimo de Pareto: uma solução  $x^* \in C$  é uma solução de Pareto se, e somente se, não existir uma solução  $x \in C$  tal que  $F(x^*)$  seja dominada por  $F(x)$ . Além disso, sem nenhuma outra informação sobre o problema além das definidas pelo equacionamento similar ao da Eq. (5.1), todas as soluções de Pareto são consideradas igualmente satisfatórias (HAUPT e HAUPT, 2004).

Por fim todos os fatores apresentados acima implicam que é impossível encontrar uma solução que melhore os desempenhos sobre um critério sem que isso provoque uma degradação dos desempenhos sobre pelo menos um outro critério qualquer. Sendo assim as soluções de Pareto recebem, por vezes, os nomes de soluções viáveis, não dominadas e inferiores (ZITZLER e THIELE, 1998).

Uma maneira mais simples para compreender e exemplificar o conceito de dominância, é analisar a Fig. 5.1. Nela é possível afirmar que os pontos 1, 3 e 5 não são dominados pelos outros dois pontos, enquanto o ponto 2 é dominado pelo ponto 3 e o ponto 4 é dominado pelos pontos 3 e 5.

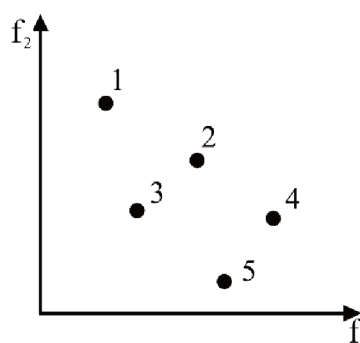


Figura 5.1 – Exemplificação do conceito de dominância de Pareto (adaptada de Ait Brik (2005))

### 5.2.2 Problema de otimização multiobjetivo robusto (PMOR)

Quando um processo de otimização é realizado em uma função cuja curva é bem conhecida, na maioria das vezes não há maiores problemas quanto à busca em torno de descontinuidades e pontos de mínimo local. No entanto, para o caso de aplicações mais próximas à realidade, como o método de análise de fadiga desenvolvido neste trabalho, geralmente não se conhece ou não é possível representar a curva da função objetivo.

Segundo Vanderplaats (1984), além dos dois fatores citados anteriormente, a aplicação de um método de otimização pode sofrer efeito direto das sensibilidades de cada uma das variáveis de projeto, além da propagação de incertezas inerentes ao modelo do método dos elementos finitos estocásticos e da existência de ruídos em suas respostas finais.

Sabe-se que os resultados obtidos pelo método de Sines variam bastante com uma pequena flutuação do valor das variáveis de projeto, como por exemplo a espessura da placa (ROSA, 2016). Em outras palavras, a sensibilidade do processo de obtenção dos índices de fadiga de uma placa fina é alta e implica em grandes variações nos resultados (LEIDEMER, 2009). Sendo assim, por vezes é melhor adotar como solução ótima um ponto de mínimo local em vez do mínimo global, caso a função apresente menor flutuação em torno desse ponto.

Garantir um valor que, mesmo não sendo o mínimo global, apresente uma sensibilidade menor da função em sua redondeza é altamente desejável no caso de uma estrutura sujeita à efeitos aleatórios, modelada pelo método dos elementos finitos estocásticos. Essa busca por soluções robustas evita que os valores ótimos se desviem demasiadamente de um ótimo teórico real e resulte em comportamentos não esperados, distintos dos fornecidos inicialmente na formulação do problema de otimização numérica.

Observando a Fig. 5.2 apresentada por Lee e Park (2001), nota-se a presença de dois pontos: A e B. O ponto A é um ponto de ótimo global, como os obtidos num processo de otimização determinística e o ponto B é um ponto de mínimo local, obtido por um processo robusto. Empiricamente, observando apenas esta curva didático fica evidente que, ao sofrer uma variação  $\Delta x_1$ , os valores de  $f(x_1)$  em torno do ponto A variam mais que o valor desta função em torno do ponto B. Dessa forma diz-se que a robustez gerada pela adoção do ponto B como ótimo é maior que a do ponto A.

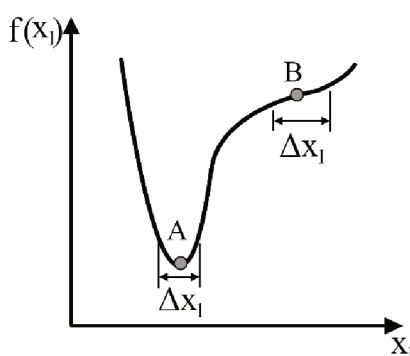


Figura 5.2 – Representação gráfica de duas soluções ótimas com robustezes diferentes (adaptado de LEE e PARK, 2001)

A aplicação de uma técnica de otimização robusta considera em sua formulação, perturbações no projeto, funções de custo e nas restrições de modo a obter uma solução

que, mesmo não sendo a melhor de todas (solução sub-ótima) apresenta maior estabilidade, garantindo que as incertezas presentes no modelo não afetem sobremaneira suas respostas finais.

A definição matemática de um problema de otimização multiobjetivo robusto é feita de maneira similar ao determinístico apresentado na Eq. (5.1). A diferença primordial é que, além de minimizar as funções objetivo originais, o método deve ser capaz de maximizar simultaneamente sua robustez ou minimizar sua vulnerabilidade. De maneira similar à apresentada por Deb e Gupta (2006), o problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x F(x) = (f_1(x), f_1^v(x), f_2(x), f_2^v(x), \dots, f_n(x), f_n^v(x)) \\ g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ x_L \leq x \leq x_U \quad x \in C \end{array} \right. \quad (5.2)$$

onde  $f_i^v(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  é a função vulnerabilidade do objetivo, calculada pelo inverso da dispersão (DE LIMA, 2007):

$$f_i^v(x) = \left( \sigma_i / \mu_i \right)^{-1} \quad (5.3)$$

A aplicação dessa técnica visa garantir que o problema encontre ótimos estáveis mesmo quando os parâmetros e variáveis de projeto estão sujeitos à estocasticidade do modelo. O fluxograma apresentado na Fig. 5.3 mostra a comparação entre as duas metodologias de otimização multiobjetivo apresentadas anteriormente.

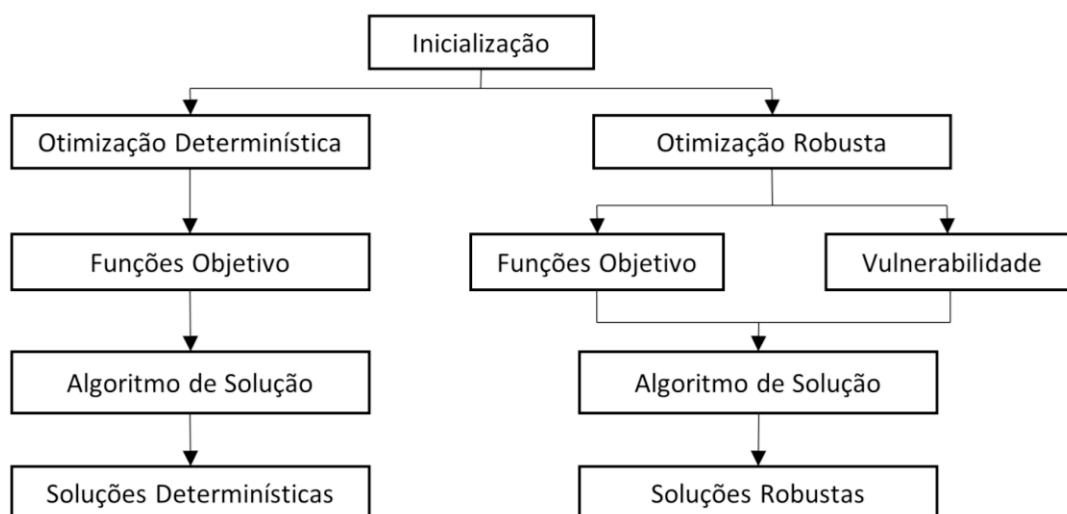


Figura 5.3 – Comparação entre os processos dos dois métodos de otimização

### 5.3 Método de solução do problema de otimização – NSGA-II

A formulação dos problemas multiobjetivos determinístico e robusto foram apresentadas nos tópicos anteriores. Após essas definições, busca-se agora um método de solução para que os pontos ótimos da solução de Pareto sejam obtidos. Em um problema multiobjetivo como o deste presente trabalho, a função do método de solução não é encontrar um ponto ótimo e sim todo o conjunto de soluções que atendam de maneira satisfatória os requisitos e restrições da função objetivo.

Com esse conjunto em mãos, cabe ao projetista escolher o que apresente melhor compromisso com a função a ser desempenhada pela estrutura, como por exemplo análise de fatores de custo e efeitos ambientais diversos. Em outras palavras, os algoritmos que resolvem um problema multiobjetivo nada mais são que uma ferramenta auxiliadora, deixando a responsabilidade da escolha para o projetista.

Segundo Ait Brik (2005), existem duas abordagens possíveis para a solução de problemas de otimização multiobjetivo. A primeira consiste em transformar o problema em outro similar mono-objetivo, com ponderação das funções objetivo: o chamado Método da Soma Ponderada. Seu princípio é bastante simples, se resumindo basicamente em somar as funções objetivos ponderadas por pesos  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Esses pesos são números reais positivos e devem satisfazer a condição de somatório tal que  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  (MOREIRA, 2015).

Nesse caso a solução do problema se torna clássica (VANDERPLAATS, 1999). Há de se imaginar que essa abordagem, envolvendo uma simplificação, possa influenciar o

problema no sentido da perda de seu significado físico original. Ressalta-se ainda o fato de que a obtenção dessa solução não satisfaz, necessariamente, todos os critérios originais do problema multiobjetivo, sendo ótima para a função mono-objetivo simplificada. Dessa forma, a adoção dos pesos que ponderam a soma das funções objetivo levam a diferentes resultados.

O projetista deve ainda realizar diversas simulações com diferentes configurações de ponderação, sem garantia que as soluções sejam bem distribuídas em uma curva de Pareto (MESSAC, 1996; DAS e DENNIS, 1997). Além desses fatores, Das e Dennis (1997) evidenciam em seu trabalho, que essa abordagem não cobre todo o conjunto de soluções para um problema não-convexo.

A outra alternativa é utilizar-se de algoritmos que respondem diretamente ao problema multiobjetivo. A diferença é que, nesta abordagem, o conjunto dos pontos ótimos que compõem as soluções de Pareto é calculado e disponibilizado pelo próprio algoritmo (AIT BRIK, 2005). A vantagem é que o processo de otimização é realizado apenas uma única vez e, tendo os pontos disponíveis, o projetista pode realizar uma análise e concluir qual deles melhor se adapta com as necessidades do projeto, apesar de que essa escolha pode se tornar mais complicada, devido ao grande número de pontos ótimos gerados. Apesar disso, essa abordagem se adapta melhor nos anseios da presente pesquisa.

Tendo exposto as vantagens e desvantagens das duas abordagens e a preferência pelo segundo grupo, parte-se para a escolha final do método. De modo a aumentar a variabilidade da busca, utilizar-se de algoritmos evolutivos é uma boa alternativa. Dentre as variantes mais comuns desse método destacou-se o algoritmo chamado NSGA-II (*Non dominated Sorting Genetic Algorithm*), proposto por Srinivas e Deb (1993) e que hoje é o algoritmo mais amplamente encontrado na literatura para solução de problemas multiobjetivo (VARGAS, 2018).

O algoritmo evolutivo NSGA-II se baseia no conceito da dominância de Pareto aliadas com mecanismos de seleção natural e genética. Concomitantemente são aplicados princípios de sobrevivência dos melhores indivíduos e cruzamentos de informações pseudo-aleatórias (VICENTE, 2014). Uma população inicial que atenda aos requisitos iniciais da função objetivo é gerada de maneira aleatória e evolui através da aplicação de operadores genéticos.

As soluções obtidas em sua rotina recebem um ranking de classificação, onde os indivíduos não-dominados são posicionados no primeiro fronte e por consequência são eliminados da população original. Na sequência, dentre os indivíduos restantes na

população, os não-dominados são posicionados no segundo fronte e eliminados. O processo segue separando os pontos até que todos os indivíduos da população original tenham sido classificados em um fronte, da maneira ilustrada na Fig. 5.4.

Esse procedimento de classificação recebe o nome de *ranking* e as soluções são classificadas em *rang*, denominado  $r$ . Matematicamente, após essa classificação em *rang*, cada indivíduo  $x_i$  recebe um valor  $f_i$ , conhecido como *fitness* e definido como o inverso do *rang*, ou seja  $f_i = 1/r$ . Essa função é capaz de avaliar o quão próximo essa dada solução se encontra da solução ótima. Por fim, o valor do *fitness* de cada indivíduo é dividido pela função de *niche*, processo denominado *sharing*. Os valores da função de *niche* são calculados conforme a Eq. (5.4).

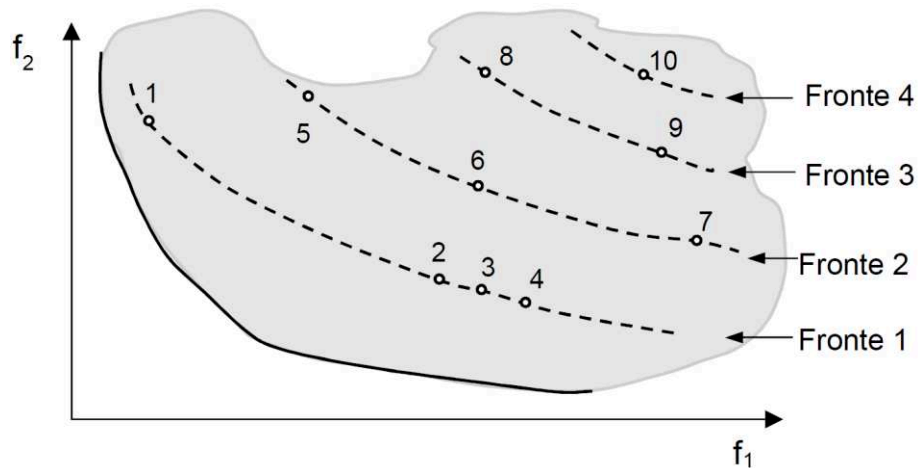


Figura 5.4 – Representação gráfica do método de ordenamento em frentes pelo algoritmo evolutivo NSGA-II (adaptado de Deb (2001))

$$sh(d(x_i, x_j)) = \begin{cases} 1 - d(x_i, x_j) & \text{se } d(x_i, x_j) < \sigma \\ 0 & \text{se } d(x_i, x_j) \geq \sigma \end{cases} \quad (5.4)$$

onde  $(x_i, x_j)$  são os indivíduos comparados, *sh* é a função *sharing* (*niche*),  $\sigma$  é a constante definida a priori que define o intervalo de *niche*, e  $d(x_i, x_j)$  é a distância euclidiana entre os indivíduos.

Após a definição desses parâmetros de classificação, o processo segue as operações comuns de evolução de outros algoritmos genéticos clássicos. O processo completo de funcionamento do NSGA-II pode ser visto no fluxograma da Fig. 5.5.

A aplicação do algoritmo NSGA-II será feita por uma toolbox em ambiente MatLab®, funcionando concomitantemente com o código para a estimativa do índice de fadiga de Sines de uma placa fina sob esforços aleatórios e na presença de incertezas paramétricas em suas propriedades físicas e geométricas. O objetivo é obter soluções de Pareto que possam atender os requisitos do sistema, minimizando a massa da placa e aumentando sua resistência à fadiga. Nota-se o conflito de interesses, visto que se espera uma menor rigidez e consequente menor vida em fadiga quando ocorre a diminuição da massa estrutural.

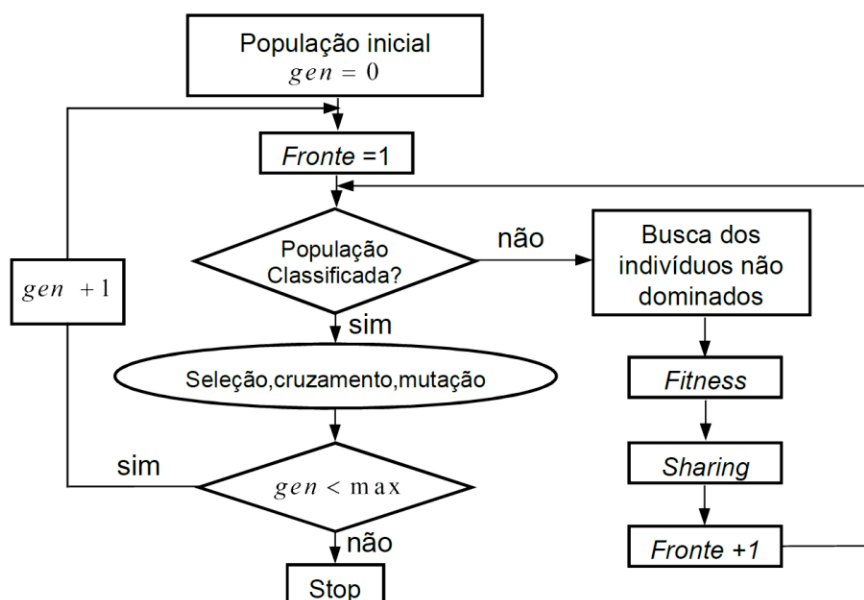


Figura 5.5 – Fluxograma representativo do funcionamento do algoritmo NSGA-II (adaptado de Ait Brik, 2005)

#### 5.4 Método de solução do problema completo

Nos tópicos e nos capítulos anteriores foi apresentada a metodologia de otimização robusta baseada em técnicas de análise de fadiga no domínio da frequência para sistemas estocásticos submetidos a carregamentos aleatórios, combinada com um método eficiente de redução de modelos visando a geração das respostas em computadores pessoais e envolvendo um tempo hábil de execução.

A execução completa do método segue o seguinte passo a passo:

1. Geração das amostras pelo método do Hipercubo Latino (HCL), tendo como parâmetros de entrada os valores médios das variáveis aleatórias e a taxa de variação de cada uma delas;
2. Montagem das matrizes de massa e rigidez globais por meio do método dos elementos finitos estocásticos. A expansão de Karhunen-Loève afeta o processo de integração das matrizes elementares, alterando o sistema internamente e propagando incertezas pelo modelo;
3. Formulação da equação do movimento do sistema;
4. Extração das formas modais do sistema nominal (valores médios das variáveis aleatórias) e do resíduo estático proveniente da aplicação de uma força unitária;
5. Identificação da parcela das matrizes de massa e rigidez causadas pela flutuação dos parâmetros aleatórios. Ao isolar essas parcelas na equação do movimento e realizar algumas manipulações matemáticas, obtém-se um vetor de forças não-exatas proveniente da perturbação causada no sistema pelas estocasticidades do modelo;
6. Obtenção dos resíduos (modos restritos) advindos das forças não-exatas;
7. Composição da base estocástica utilizando as formas modais e resíduos calculados nos passos 4 e 6;
8. Aplicação da base robusta nas matrizes de massa e rigidez, reduzindo suas dimensões sem perder as informações dinâmicas do sistema;
9. Cálculo das funções resposta em frequência de todos os nós da placa. Obtém-se aqui uma matriz de três dimensões, utilizada no cálculo das respostas em tensão;
10. Obtenção das matrizes de densidade espectral de potência (PSD) em tensão para cada um dos elementos da estrutura;
11. Extração dos momentos espectrais das matrizes de PSD e cálculo da esperança matemática da raiz quadrada do segundo invariante do tensor desviatório de tensão;
12. Estimativa do coeficiente de Sines para cada elemento;
13. Os passos de 2 a 12 são executados para cada uma das amostras geradas no passo 1. Uma exceção é o passo 4, que só precisa ser calculado uma vez. A não resolução do problema de autovetores para composição da base em cada passo providencia ganho computacional;

14. Aplicação do método de otimização robusta NSGA-II. O algoritmo executa diversas vezes os passos 1 a 12 para obtenção do conjunto de soluções ótimas de Pareto. Nesse caso a otimização consiste em maximizar a vida em fadiga da estrutura e minimizar sua massa função vulnerabilidade;
15. Escolha do ponto de ótimo menos vulnerável ou que melhor se adeque aos anseios do projetista;
16. Execução de outra rotina de cálculo completo para verificação da robustez do ponto escolhido.

As etapas descritas acima estão sumarizadas no fluxograma apresentado a seguir na Fig 5.6.

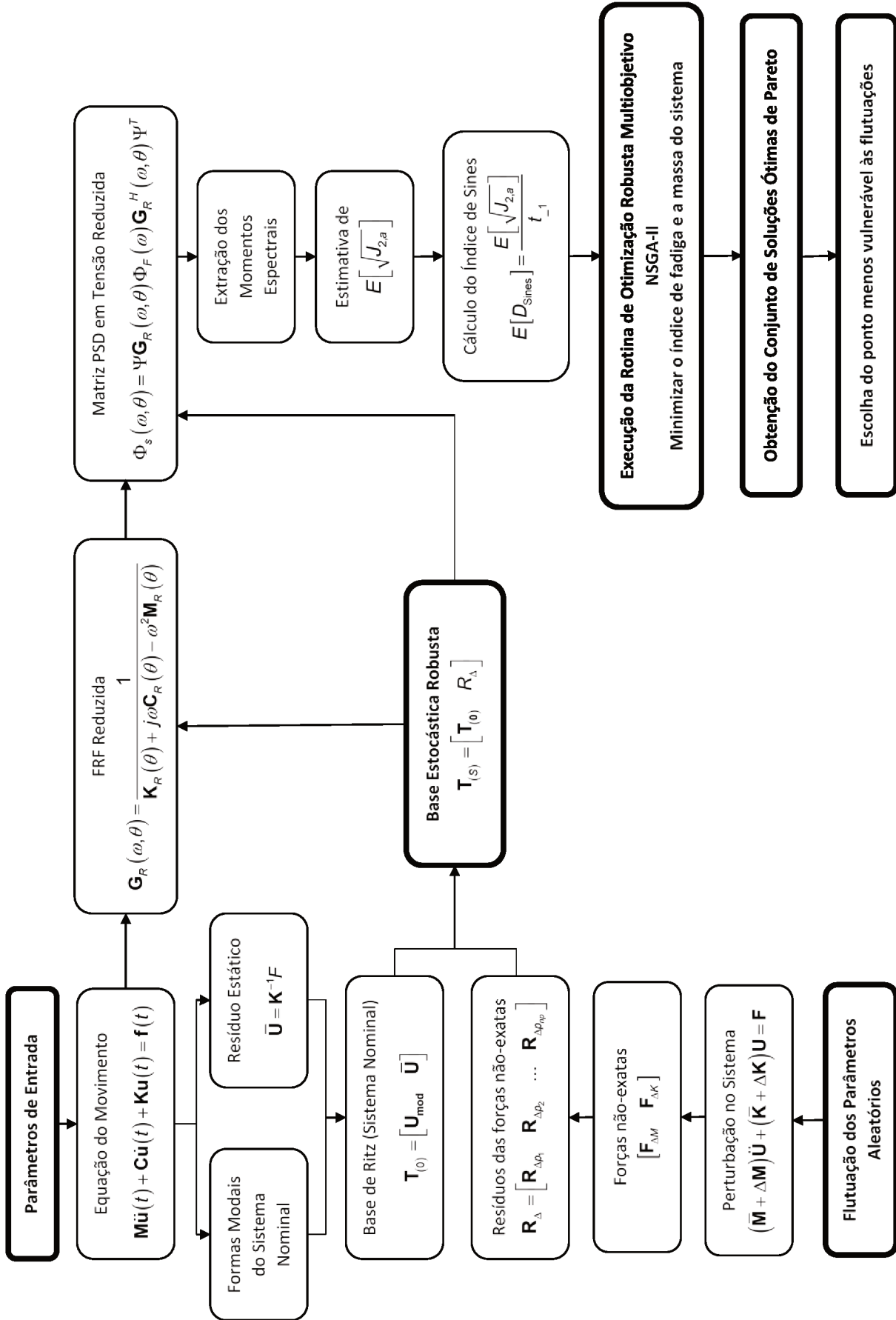


Figura 5.6 – Fluxograma representativo das etapas do processo completo

# **CAPÍTULO VI**

## **SIMULAÇÕES NUMÉRICAS**

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com a realização de simulações numéricas, empregando as rotinas de cálculo desenvolvidas em ambiente MATLAB®. Partindo da modelagem pelo método dos elementos finitos estocásticos com discretização dos campos aleatórios pelo método de Karhunen-Loève, extrai-se as respostas com base nas FRFs e respostas em tensão no domínio da frequência via PSD. Comparando o tempo de cálculo envolvido na solução do sistema completo, reduzido pela base de Ritz e pela base estocástica proposta neste trabalho é possível evidenciar o ganho computacional obtido por essa abordagem. Na sequência é possível estimar os valores mínimos, médios e máximos do índice de Sines para cada um dos elementos da malha. Por fim o conjunto de pontos ótimos de Pareto é obtido, possibilitando ao projetista a escolha do que melhor se adapta ao seu projeto e as restrições referentes a ele.

### **6.1 Apresentação da estrutura nominal em análise**

A estrutura base considerada para realização dos estudos aqui apresentados é uma placa fina de alumínio, com dimensões 654 mm × 527 mm. Suas extremidades ao longo do eixo y estão engastadas. A placa foi discretizada em uma malha de 8 × 8 EFs, totalizando 89 nós, 64 elementos e 405 GDLs. A força é aplicada no nó central da placa. Para as medidas das FRFs, por definição esse esforço é unitário e a medição dos deslocamento é feita no mesmo ponto. Já para o cálculo das PSDs, o carregamento inserido é do tipo ruído branco com média zero e variância  $85 \times 10^3 \text{ N}^2/\text{Hz}$ . As outras propriedades físicas e

geométricas da placa podem ser vistas na Tab. 6.1 e uma representação simplificada da mesma é apresenta na Fig. 6.1.

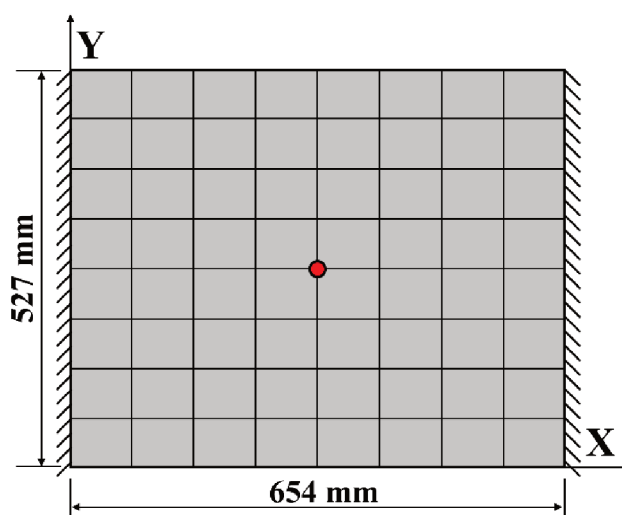


Figura 6.1 – Representação da placa fina em análise: fixação dos eixos definindo as direções X e Y, dimensões e ponto de aplicação da força e medição da FRF

Tabela 6.1 – Propriedades físicas e geométricas da placa de alumínio

Espessura (mm)	Módulo de Elasticidade (E) [GPa]	Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	Massa Específica ( $\rho$ ) (kg/m <sup>3</sup> )	Limite de Ruptura ( $S_{ut}$ ) (MPa)	Limite de Torção Alternada <sup>(1)</sup> ( $t_{-1}$ ) (MPa)	Limite de Tração Alternada <sup>(1)</sup> ( $f_{-1}$ ) (MPa)
1,8	70	0,33	2700	343	92	132

<sup>(1)</sup>obtidos para  $2.0 \times 10^6$  ciclos

Para garantir que os resultados partam de um modelo coerente, primeiramente foi feita uma análise de convergência da malha levando em consideração as três primeiras frequências naturais. A malha de  $8 \times 8$  adotada apresentou resultados satisfatórios, com variações máximas da ordem de apenas 0,5% para a terceira frequência natural, se comparada com malhas mais finas, como notado na Fig. 6.2.

É evidente também ao se observar a Fig. 6.3 que o tempo computacional envolvido nos cálculos é exponencialmente proporcional ao tamanho da malha. Como os testes realizados posteriormente envolvem diversas avaliações dessa função principal, optar por uma malha de menor dimensão é desejável para este caso. Por fim, conclui-se que a malha adotada está de acordo com os resultados esperados.

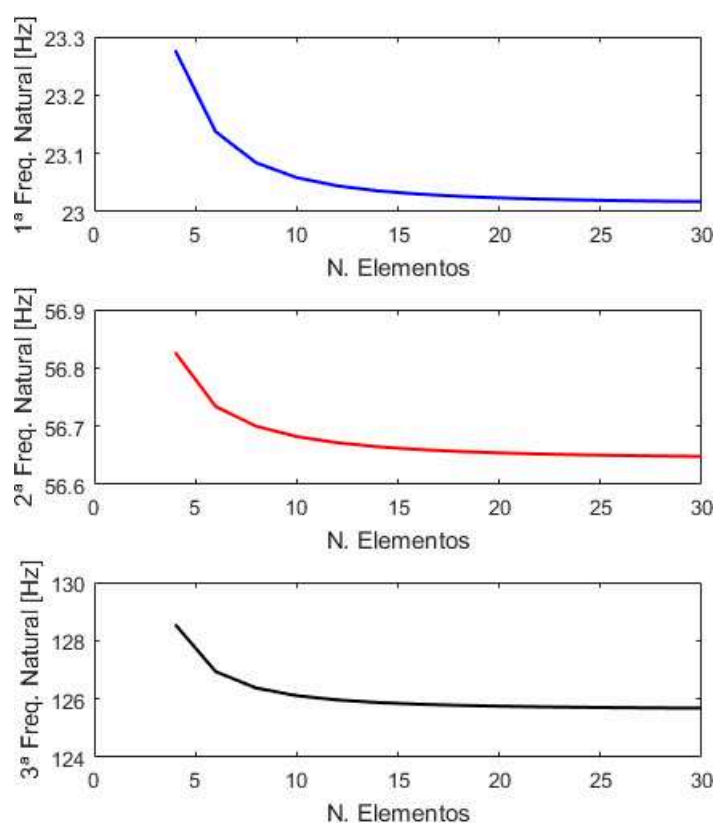


Figura 6.2 – Análise de convergência de malha para a placa fina em estudo

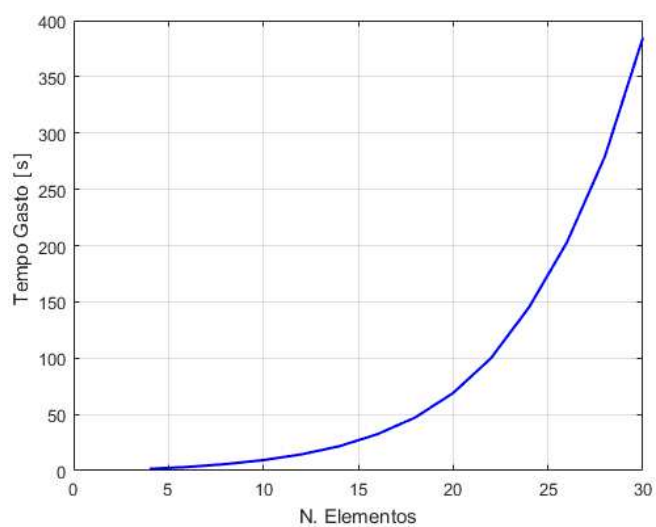


Figura 6.3 – Análise de tempo computacional em uma avaliação da função principal

## 6.2 Comparação entre as bases de redução

Em um primeiro momento, uma comparação entre os resultados obtidos pelas bases de redução utilizando o método de Ritz e a base estocástica e o sistema nominal foi realizada. O principal foco dessa comparação é avaliar a capacidade dessas bases em reduzir as dimensões e o tempo computacional envolvidos na avaliação do modelo mantendo o comportamento e as características dinâmicas do sistema completo na banda de interesse.

A primeira comparação foi feita entre a estrutura nominal e a estrutura reduzida pela base de Ritz. Nesse primeiro caso a análise estocástica completa não foi realizada, e sim apenas o cálculo da FRF do sistema determinístico com as propriedades médias mostradas na Tab. 6.1, evidenciando também a forma e os picos da FRF do sistema nominal. Na Fig. 6.4(a) nota-se que as duas curvas se sobrepõem, não sendo possível distinguir alguma diferença entre seus resultados. Devido a isso, calculou-se o erro relativo entre as duas, mostrado na Fig. 6.4(b). Nota-se que o maior valor do erro relativo não ultrapassou 0,14%, o que é uma diferença desprezível. Apesar disso, notou-se um ganho computacional da ordem de 90% entre os dois métodos de análise.

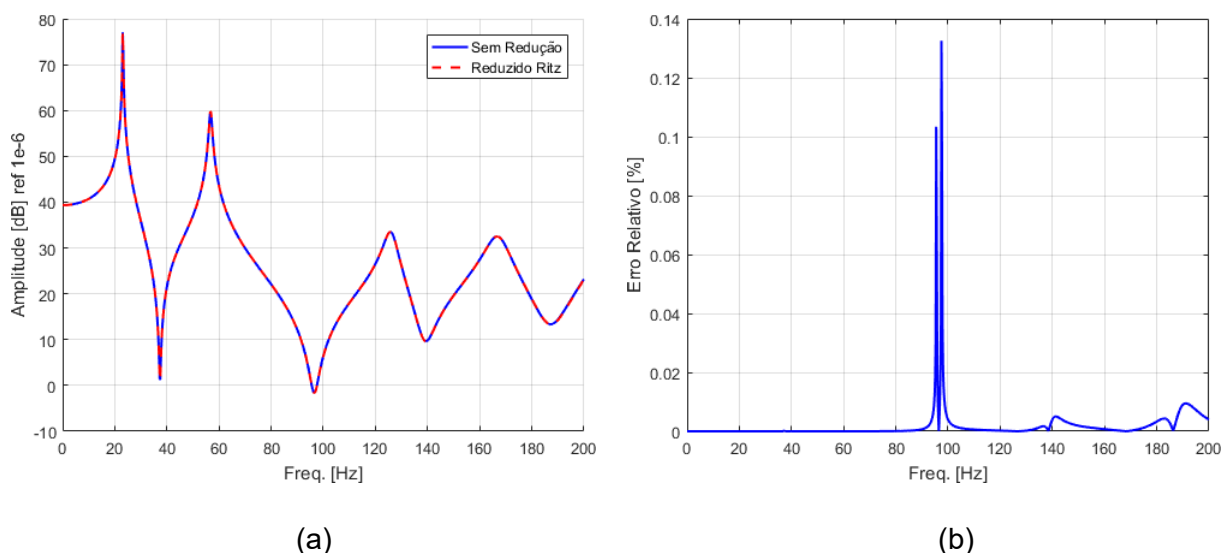


Figura 6.4 – Comparação entre o sistema sem redução e reduzido pela base de Ritz

Na sequência, foi realizada a primeira simulação estocástica, permitindo comparar a performance da base de Ritz, já comprovada pelo teste acima, com a performance da base

estocástica proposta. Para essa análise foram utilizadas 500 amostras com distribuição normal Gaussiana, geradas pelo método do Hipercubo Latino (HCL) com uma variação na espessura da ordem de 5% aplicada e um desvio padrão de  $3\sigma$  (99,73% de confiabilidade).

Para a expansão de Karhunen-Loève foram adotados dez termos na série. Esse número, apesar de gerar resultados similares com outros truncamentos de ordem inferior, já foi utilizado diversas vezes em trabalhos anteriores e apresentou resultados satisfatórios em outras aplicações similares (DE LIMA, 2017; DE LIMA *et al.*, 2010; KOROISHI *et al.* 2012). Esse número será mantido em todas as simulações estocásticas na sequência deste trabalho.

Em um primeiro momento realiza-se a análise de convergência via RMSD normalizado, calculada pela Eq. (3.55) apresentada no Capítulo III. Os resultados esperados são respostas idênticas nos gráficos de convergência, o que é evidenciado na Fig. 6.5. Analisando os gráficos nota-se uma convergência satisfatória a partir de 300 indivíduos.

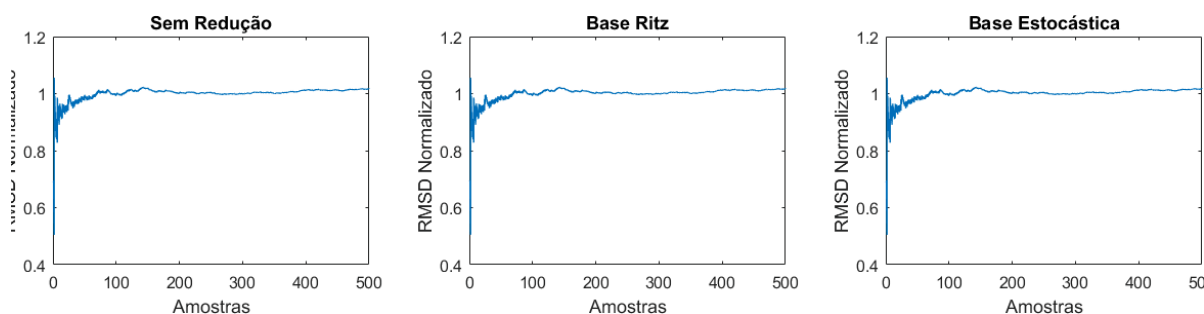


Figura 6.5 – Análise de convergência: comparação entre os três casos

Nota-se na Fig. 6.6 que as bordas dos envelopes obtidos pelos três métodos se sobrepõem perfeitamente, assim como a primeira comparação feita e mostrada na Fig. 6.4(a). Dessa maneira optou-se novamente por plotar gráficos comparativos dos erros, que estão representados nas Fig. 6.7.

O erro máximo relativo envolvido nos cálculos da FRF utilizando a base de Ritz não superou 0,03% enquanto o referente à base estocástica ficou abaixo de 0,13%. Novamente os erros são de magnitude desprezível nesse tipo de análise, evidenciando a excelente capacidade de ambas em preservar o comportamento dinâmico original da estrutura.

Quanto ao tempo computacional gasto, comparadas com o sistema nominal, nesse teste estocástico a base de Ritz apresentou ganho em tempo de cálculo de 70,4% enquanto

a base estocástica apresentou 96,4% de ganho. Quando comparados entre si, os resultados da base estocástica tiveram ganho computacional de 87,8% em comparação aos obtidos pela base de Ritz.

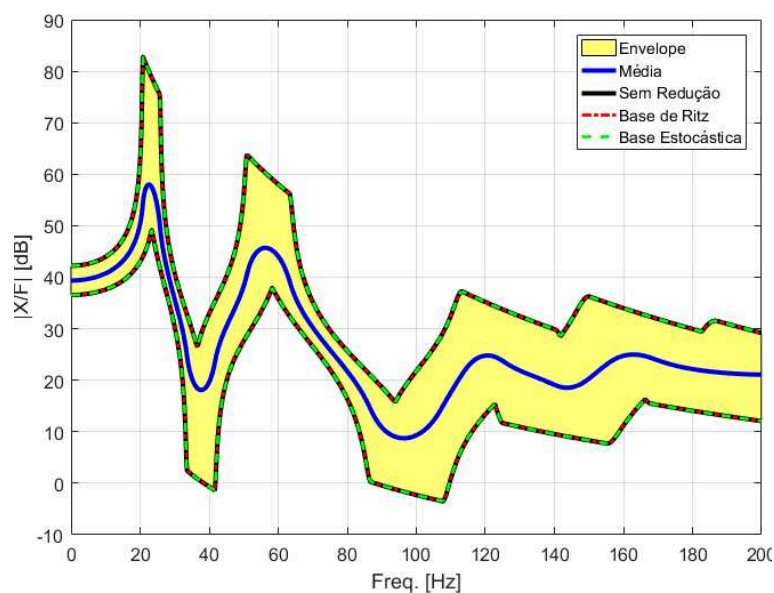


Figura 6.6 – Envelope de FRFs comparativo entre as bases de redução e o sistema nominal: placa sujeita a incerteza de 10% na espessura

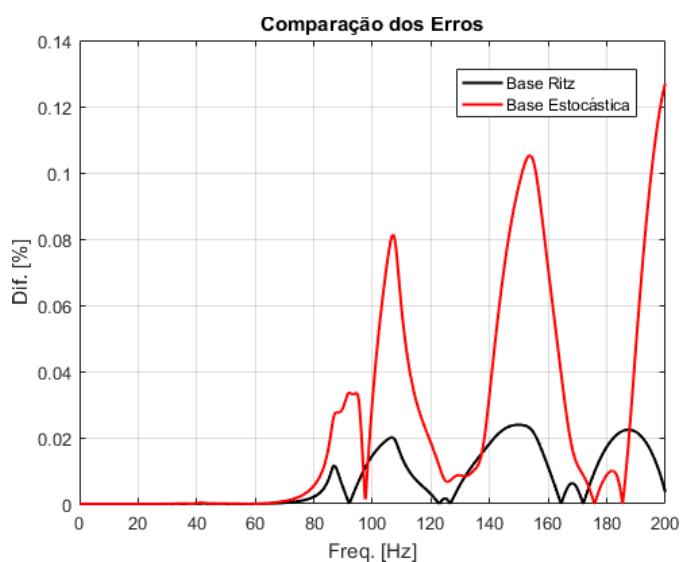


Figura 6.7 – Comparação entre os erros relativos gerados pelas duas bases de redução e o sistema nominal

Após comprovada a eficácia da base proposta, ela será adotada em todos os testes estocásticos realizados na sequência deste trabalho. Assim espera-se obter os resultados em um tempo não-proibitivo, se tratando das muitas iterações e amostras envolvidas nos ensaios estocásticos e no método de otimização robusta.

### 6.3 Geração das respostas do sistema estocástico

#### 6.3.1 Respostas referentes ao sistema determinístico

Antes de realizar a análise de fadiga com a placa sujeita a flutuações em seus parâmetros geométricos e propriedades de material, é importante apresentar os resultados referentes ao sistema determinístico. Em outras palavras, os resultados apresentados nessa subseção foram obtidos utilizando-se como parâmetros de entrada os valores médios das propriedades e o sistema não conta com a influência da expansão de Karhunen-Loève na integração de suas matrizes elementares.

O primeiro resultado é mostrado na Fig. 6.8 e representa as amplitudes da FRF do sistema determinístico para a força aplicada no ponto central da placa e o deslocamento medido no mesmo ponto. Vale ressaltar que, para efeito de cálculo das respostas em tensão da placa para a estimação do índice de fadiga mostrado na Fig. 6.9, o conjunto de todas as FRFs de todos os pontos da malha deve ser utilizado.

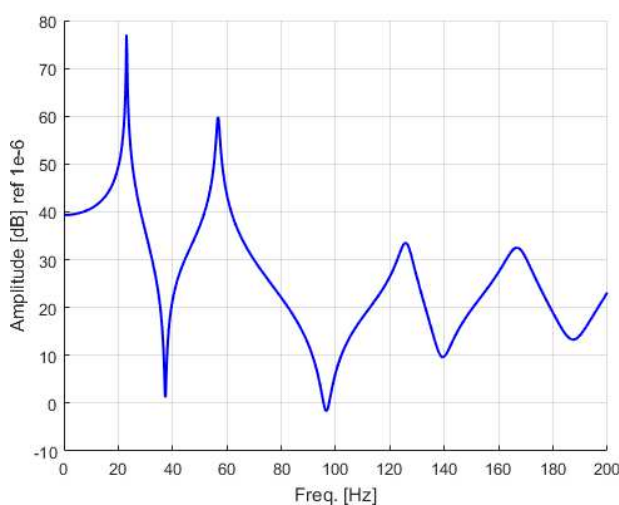


Figura 6.8 – FRF do sistema determinístico

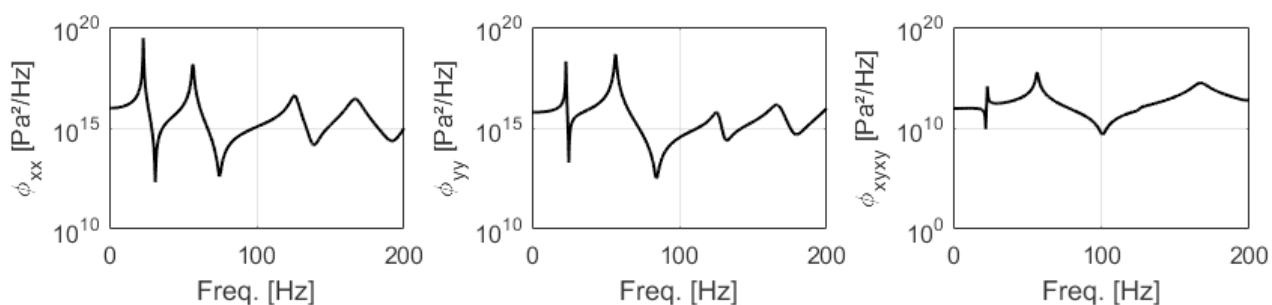


Figura 6.9 – Gráficos das respostas em tensão no domínio da frequência via PSD

A partir das respostas em tensão da Fig. 6.9 são extraídos os momentos espectrais envolvidos na estimativa do índice de fadiga de Sines. Para a estrutura determinística em questão o valor máximo encontrado foi de 0,7276 nas bordas da placa, conforme a distribuição completa dos valores para todos os elementos da mesma mostrado na Fig. 6.10.

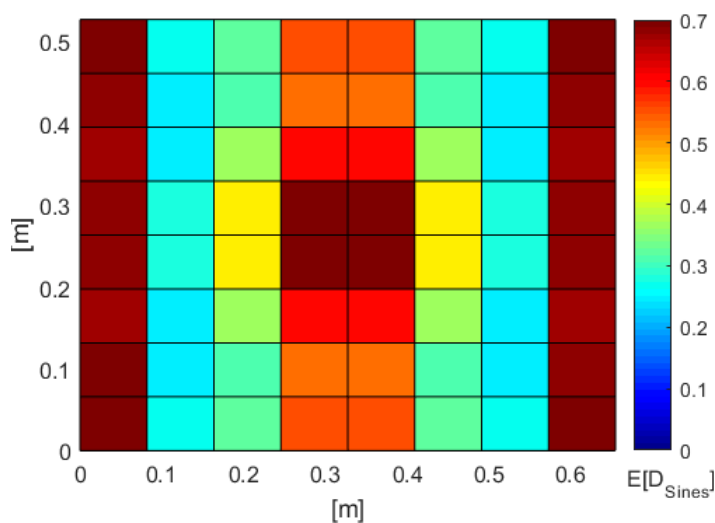


Figura 6.10 – Distribuição dos índices de Sines para a placa determinística

Nota-se que o valor 0,7276 é inferior à unidade. Sendo assim, numa primeira análise, pode-se concluir que para condições do problema consideradas nesta aplicação, a placa não falhará antes de 2 milhões de ciclos de carregamento.

### 6.3.2 Respostas referentes ao sistema estocástico

Na sequência serão apresentados os resultados referentes a um teste estocástico similar ao realizado para comprovar a eficácia das bases de redução apresentadas na Seção 6.2. Novamente foram utilizadas 500 amostras com distribuição normal Gaussiana, geradas pelo método Hipercubo Latino (HCL) com uma variação na espessura da ordem de 5% aplicados com um desvio padrão de  $3\sigma$  (99,73% de confiabilidade).

Novamente, o primeiro passo é a análise de convergência. O resultado para esse caso está mostrado na Fig. 6.11, notando-se uma convergência satisfatória após 350 indivíduos. O envelope das FRFs é apresentado na Fig. 6.12 e as respostas em tensão no domínio da frequência via PSD são mostradas na Fig. 6.13. Já os valores máximos, médios e mínimos dos índices de fadiga de Sines para cada elemento finito da placa são vistos na Fig. 6.14.

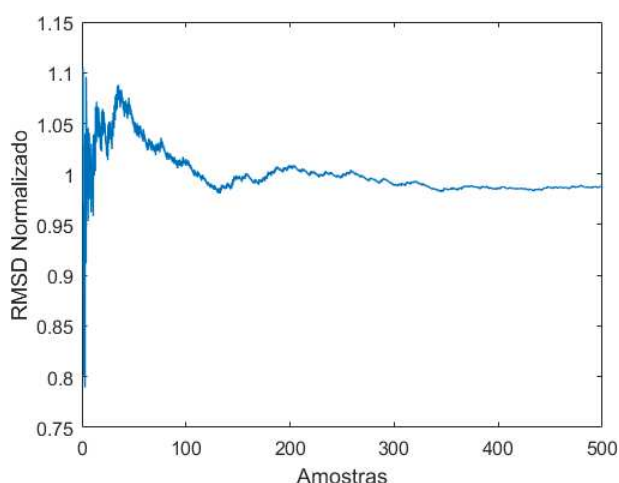


Figura 6.11 – Análise de convergência via RMSD: placa sujeita a incerteza de 5% na espessura

O valor máximo obtido para os coeficientes de Sines da região mais crítica da placa para este caso foi de 0,9834. Como esse valor, mesmo sendo bem próximo, ainda é inferior à unidade, pode-se afirmar que com a presença de incertezas da ordem de 5% na espessura da placa, não se espera falha por fadiga antes de 2 milhões de ciclos.

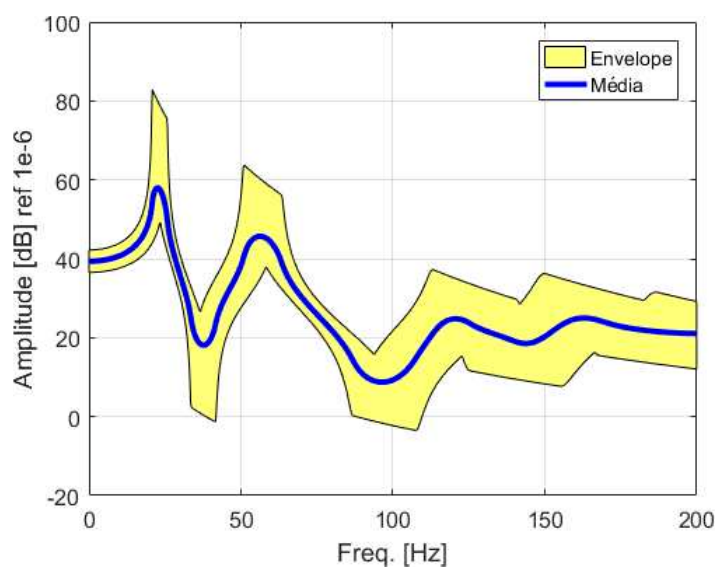


Figura 6.12 – Envelopes de FRFs: placa sujeita a incerteza de 5% na espessura

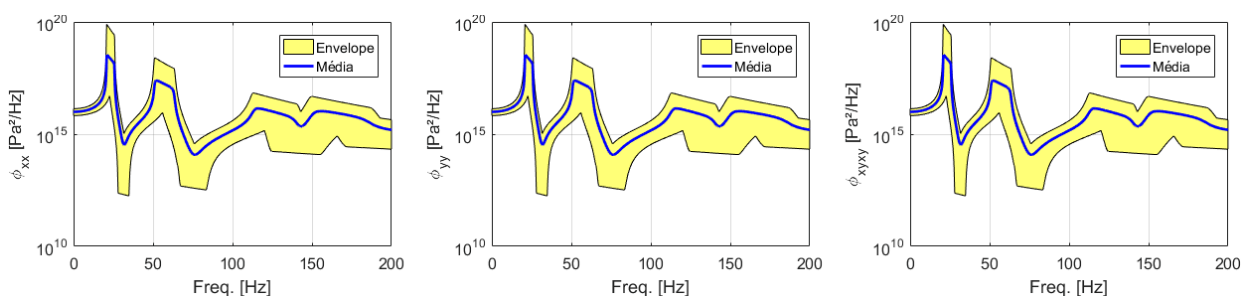


Figura 6.13 – Envelopes das respostas em tensão no domínio da frequência: placa sujeita a incerteza de 5% na espessura

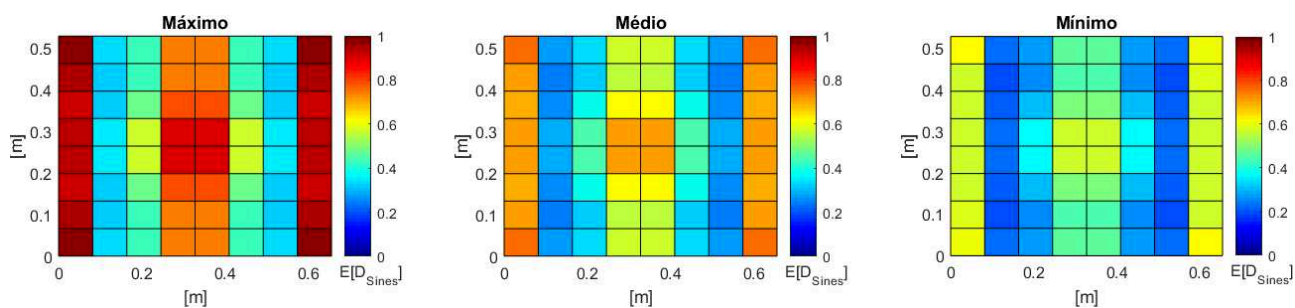


Figura 6.14 – Valores máximos, médios e mínimos dos índices de Sines: placa sujeita a incerteza de 5% na espessura

Um segundo teste foi realizado para verificar a influência da inclusão de incertezas no limite de fadiga de torção,  $t_{-1}$ . Segundo Lambert (2007), devido a seu caráter de aquisição puramente experimental, esse parâmetro está usualmente sujeito a variações de até 10%. Para essa análise foram considerados níveis de incerteza de 5% sobre a espessura e de 10% sobre o limite de fadiga em torção, ambos aplicados sobre um desvio padrão de  $3\sigma$ . Assim como os testes anteriores, foram usadas 500 amostras geradas pelo método do HCL.

A análise de convergência foi realizada e apresentou resultado satisfatório após 250 amostras. Sua representação gráfica é vista na Fig. 6.15.

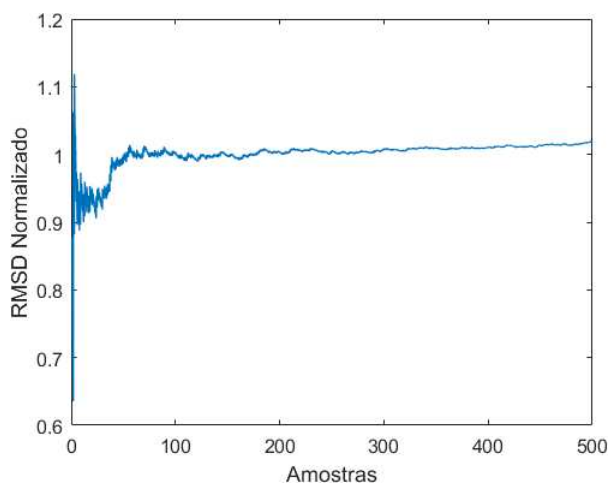


Figura 6.15 – Análise de convergência via RMSD: placa sujeita a incertezas de 5% na espessura e 10% no limite de fadiga em torção.

Como o limite  $t_{-1}$  não está envolvido diretamente no cálculo da FRF e nem na estimativa da resposta em tensão via PSD, o que se espera é que a manutenção no nível de incertezas da espessura gere envelopes de respostas similares, dada a convergência garantida. Esse fato pode ser confirmado pela análise das Figs. 6.16 e 6.17 em comparação com as Figs. 6.12 e 6.13.

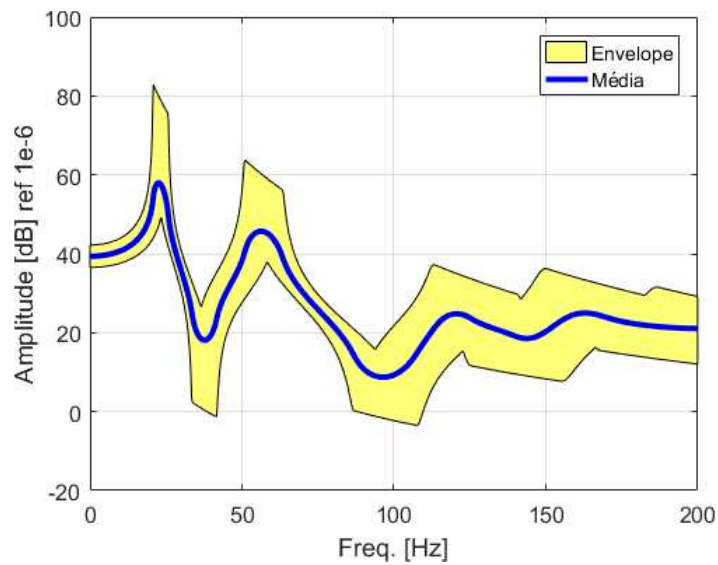


Figura 6.16 – Envelope de FRFs do deslocamento pela força aplicada: placa sujeita a incertezas de 5% na espessura e 10% no limite de fadiga em torção alternada simétrica

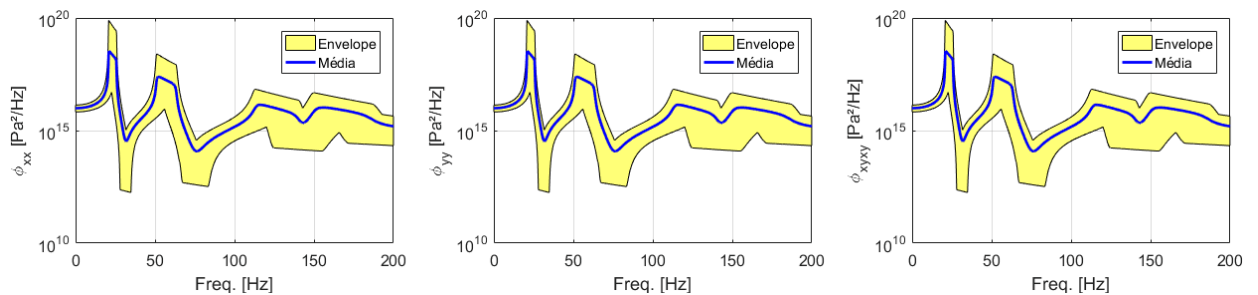


Figura 6.17 – Envelopes das respostas em tensão no domínio da frequência: placa sujeita a incertezas de 5% na espessura e 10% no limite de fadiga em torção alternada simétrica

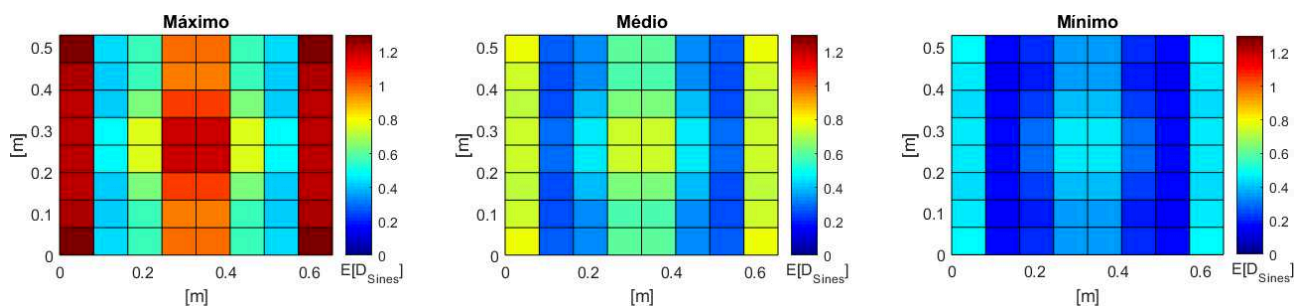


Figura 6.18 – Distribuições máxima, média e mínima dos índices de Sines: placa sujeita a incertezas de 5% na espessura e 10% no limite de fadiga em torção alternada simétrica

Entretanto, pode-se notar neste caso que o valor máximo do coeficiente de Sines foi da ordem de 1,2814 para as bordas. É evidente que a análise subjetiva de falha ou não-falha foi alterada, visto que neste caso o valor superou a unidade. Esse tipo de comportamento evidencia o quão importante é realizar a inclusão de incertezas em um modelo preditivo de fadiga, dadas as usuais grandes responsabilidades envolvidas em processos cujas aplicações estão frequentemente sujeitas a carregamentos dinâmicos com flutuação no tempo. Isso se torna ainda mais significativo visto que as falhas por fadiga são aproximadamente 90% de todas as falhas que ocorrem em componentes mecânicos (CALLISTER, 2000).

#### 6.4 Procedimento de otimização robusta

Nesta seção, é aplicada a metodologia de otimização robusta tendo como base o índice de fadiga. Esse método visa obter um conjunto de soluções de Pareto cujos pontos ótimos apresentam menor sensibilidade a flutuações causadas pelas variáveis aleatórias do modelo de elementos finitos estocásticos. Neste caso, as funções objetivo são o índice de fadiga ( $f_1$ ) e a massa total da placa ( $f_2$ ) e suas correspondentes funções vulnerabilidades  $f_3$  e  $f_4$ , conforme a Eq. (6.1).

$$\text{Minimizar} \begin{cases} f_1 = \max(E[D_{\text{Sines}}]) \\ f_2 = \rho ABh \\ f_3 = \frac{\sigma_1}{\mu_1} \quad \text{vulnerabilidade de } f_1 \\ f_4 = \frac{\sigma_2}{\mu_2} \quad \text{vulnerabilidade de } f_2 \end{cases} \quad (6.1)$$

onde A e B são as dimensões da placa.

Como mencionado no Capítulo V, o algoritmo utilizado para a solução do problema de otimização robusto é o NSGA-II por meio de uma *toolbox* disponível no MATLAB®. O valor nominal da espessura foi 1,8 mm com taxa de variação admissível de 20%, determinando assim os limites superior e inferior do intervalo de busca da função objetivo. Os níveis de incerteza foram 5% sobre a espessura, 10% sobre o limite de fadiga em torção alternada

simétrica e 5% sobre a densidade de massa da placa, todos aplicados sobre um desvio padrão de  $3\sigma$ .

Os parâmetros de entrada utilizados na execução do NSGA-II são apresentados na Tab. 6.2.

Tabela 6.2 – Valores dos parâmetros de entrada do algoritmo NSGA-II

Probabilidade de seleção	0,25
Probabilidade de reprodução	0,25
Probabilidade de mutação	0,25
Número de gerações	100
Número de indivíduos	20
Coefficiente de Niche	0,20

Após a execução do problema de otimização multiobjetivo robusto, a Fig. 6.19 mostra o conjunto de soluções de Pareto que foi obtido. Nesse caso, optou-se pela não inserção direta de uma restrição visando penalizar valores de Sines superiores à unidade. Dessa forma, a linha azul traçada no gráfico representa o limite máximo do índice admissível para o elemento mais crítico da placa.

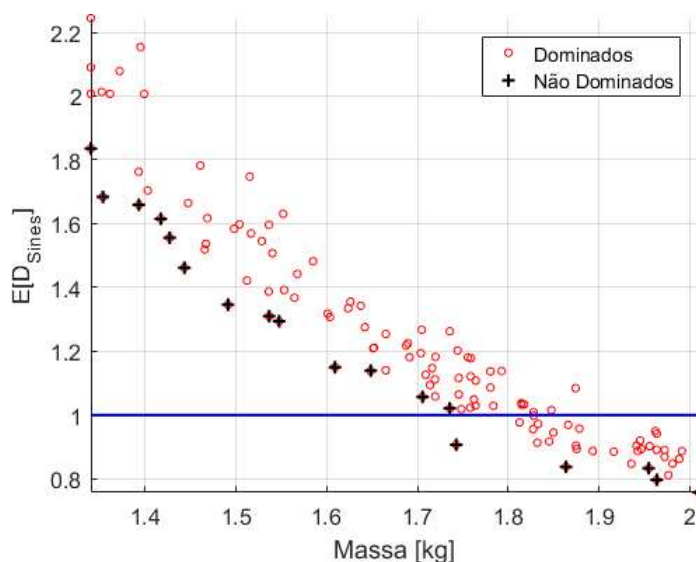


Figura 6.19 – Soluções de Pareto para o problema multiobjetivo robusto

Todas as soluções não-dominadas do conjunto de Pareto apresentadas na Fig. 6.19 são consideradas igualmente ótimas, não se levando em consideração a restrição

relacionada ao índice de Sines. A escolha agora passa a ser do projetista, levando em conta outros fatores envolvidos no projeto. Para essa aplicação, como não se tem restrições diretas ligadas a um projeto específico, uma estratégia é a adoção de um ponto com menor vulnerabilidade.

Neste caso, o ponto ótimo escolhido foi o ponto com massa de 1,863 kg. Essa massa corresponde a uma espessura da placa de aproximadamente 2,0 mm, e será tomada como base no procedimento de verificação da robustez da resposta. As vulnerabilidades das funções objetivos nesse ponto foram de 0,016 para  $f_1$  e 0,090 para  $f_2$ .

### 6.5 Avaliação da robustez do ponto ótimo escolhido

Para a verificação da robustez do ponto escolhido no espaço de soluções, faz-se a mesma análise apresentada na Subseção 6.3.2 deste capítulo. De maneira similar aos resultados mais críticos apresentados anteriormente, foram considerados níveis de incerteza de 5% sobre a espessura e de 10% sobre o limite de fadiga em torção, ambos aplicados com um desvio padrão de  $3\sigma$ . Novamente, a geração de indivíduos pelo método HCL foi de 500 amostras.

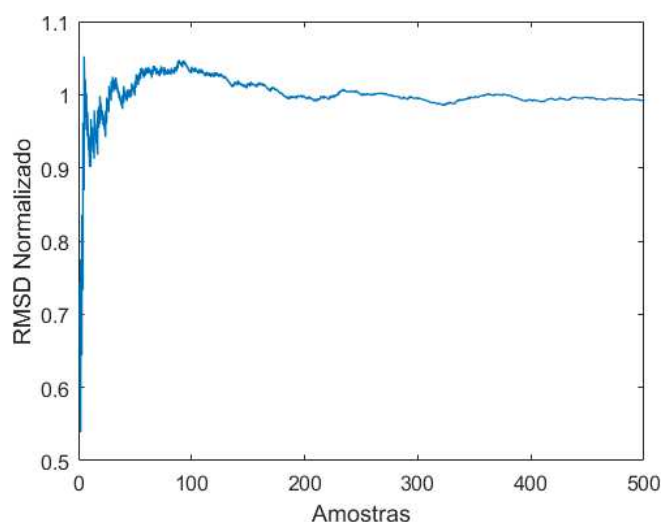


Figura 6.20 – Análise de convergência via RMSD: placa otimizada e sujeita a incertezas de 5% na espessura e 10% no limite de fadiga em torção alternada simétrica

Pela análise da Fig. 6.20, nota-se que uma convergência satisfatória foi atingida em torno de 300 amostras. Sendo assim, esse ensaio possui validade para as análises feitas na sequência. A Fig. 6.21 representa o envelope das FRFs obtido para o caso otimizado. O que se nota nesse caso é um leve deslocamento da curva para a esquerda e a diminuição dos níveis máximos de amplitude das FRFs. Esse comportamento corresponde ao esperado empiricamente, pois espera-se que a elevação da massa estrutural diminua o valor das suas frequências naturais.

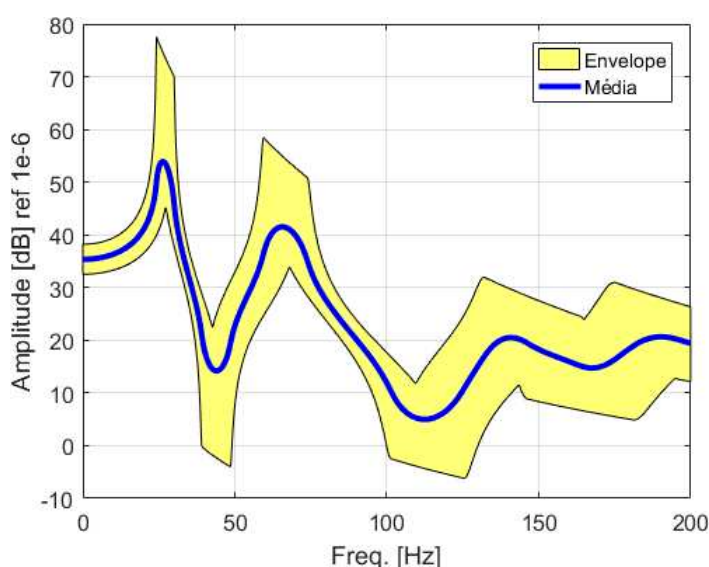


Figura 6.21 – Envelope de FRFs: placa otimizada e sujeita a incertezas de 5% na espessura e 10% no limite de fadiga em torção.

Na Fig. 6.22 tem-se os envelopes das respostas em tensão no domínio da frequência via PSD para as três componentes de tensão atuantes na placa. Como estes gráficos derivam diretamente das FRFs, um comportamento similar ao descrito anteriormente é esperado, o que de fato ocorre. O aumento da massa estrutural causa uma diminuição dos níveis de tensão nos elementos críticos da estrutura.

Da mesma forma, com os níveis de tensão menores espera-se uma direta redução no índice de Sines. Para essa análise, o valor máximo de Sines para o elemento mais crítico foi de 0,9059. Esse valor, mesmo próximo, é inferior a 1, indicando uma condição de não falha dentro de 2 milhões de ciclos. Nota-se então, no caso do estudo da vida em fadiga da placa otimizada, uma mudança na análise subjetiva de falha com as alterações no parâmetro

massa estrutural por meio do aumento da espessura da placa. A distribuição do coeficiente de Sines para todos os elementos da placa pode ser vista na Fig. 6.23.

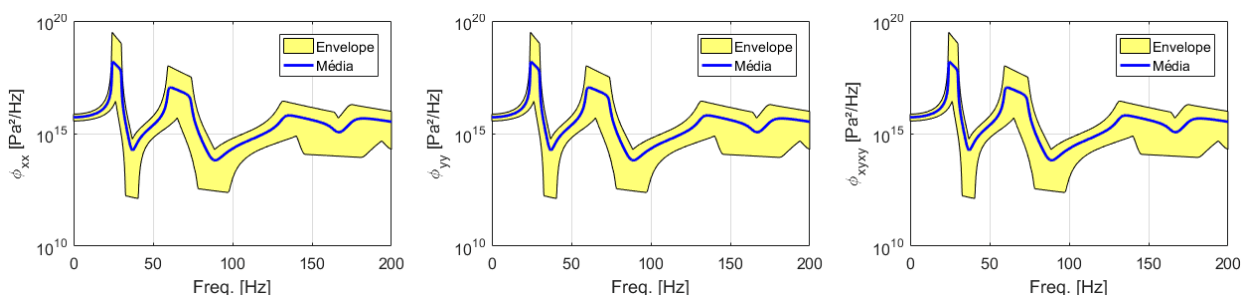


Figura 6.22 – Envelopes das respostas em tensão no domínio da frequência: placa otimizada e sujeita a incertezas de 5% na espessura e 10% no limite de fadiga em torção alternada simétrica

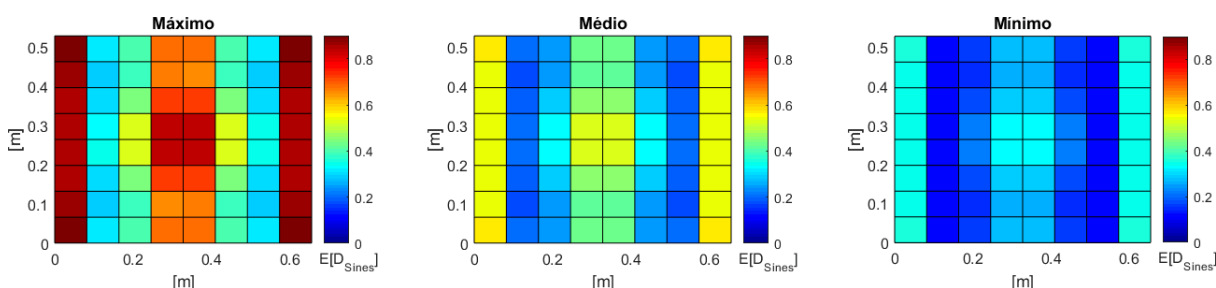


Figura 6.23 – Distribuições máxima, média e mínima dos índices de Sines: placa otimizada e sujeita a incertezas de 5% na espessura e 10% no limite de fadiga em torção alternada simétrica

A partir dos resultados obtidos em termos dos envelopes das FRFs, das respostas em tensão via PSD e das distribuições dos índices de fadiga de Sines, fica evidente a importância da escolha do melhor ponto ótimo no espaço de soluções de Pareto em termos de sua menor vulnerabilidade. Como esse ponto apresentou valores de vulnerabilidades menores que os outros, espera-se que as flutuações nas variáveis aleatórias do método estocástico afetem a estimativa do coeficiente de Sines de maneira menos significativa. Por fim este último ensaio garantiu a não falha da estrutura por meio de um acréscimo de massa de aproximadamente 11,1%.

## **CAPÍTULO VII**

### **CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS**

#### **7.1 Resumo e contribuições**

No contexto das linhas de pesquisa que vem sendo desenvolvidas pelo LMEst/UFU, esta Tese contribui com a proposição de uma metodologia de projeto robusto de sistemas dinâmicos sujeitos a incertezas paramétricas baseado na análise de fadiga no domínio da frequência. A intenção do desenvolvimento desta metodologia é disponibilizar uma ferramenta para a identificação de falha ou não-falha de sistemas utilizando técnicas de otimização combinadas com incertezas visando aplicações mais realísticas de interesse prático. O modelo de fadiga estocástico proposto neste trabalho fornece ao projetista não somente a distribuição dos índices de fadiga de Sines para os elementos da malha de discretização do sistema físico de interesse, mas também o uso destes valores como objetivos a serem otimizados no contexto da técnica de otimização multiobjetivo robusta. Isto permite ao projetista avaliar o grau de influência das incertezas consideradas na análise de fadiga e a busca pelo espaço de projeto que leve a uma estrutura sem falha.

Salienta-se que dado o caráter fortemente experimental associado às propriedades dos ensaios de fadiga, essa ferramenta pode ser aplicada durante as fases preliminares e/ou concepção inicial de um projeto estrutural. Com a posição e os valores referentes ao elemento mais crítico da estrutura, o engenheiro pode tomar decisões prévias durante a fase de projeto sem a necessidade de realizar inúmeros ensaios de fadiga em um protótipo que, em muitas situações, pode envolver um elevado custo e tempo de realização.

O desenvolvimento deste modelo passou por diversas etapas. Uma delas, primordial ao processo, foi a proposição de uma técnica de redução de modelos, visando obtenção de

resultados em tempo hábil para futuras aplicações em otimização robusta. Há de se esperar que um processo de otimização como este que envolve o uso de um modelo estocástico leve a um custo computacional proibitivo, mesmo para problemas acadêmicos como o abordado nesta Tese. Isto é devido, principalmente, às inúmeras avaliações do problema físico original para avaliar as funções objetivo e suas correspondentes vulnerabilidades. Devido a esse fator, em um primeiro momento foram utilizadas técnicas de síntese modal de componentes, por meio da aplicação da base de Ritz (modos de vibração) enriquecida com resíduos estáticos. Essa abordagem possibilitou um ganho computacional da ordem de 70,4% na avaliação da função principal do programa, com erro relativo máximo de 0,14%. Entretanto, vale ressaltar que tal base não é aplicável para sistemas amortecidos e não lineares, como por exemplo, sistemas com amortecimento viscoelástico ou na presença de não linearidades geométricas.

Apesar da eficácia da base de Ritz para a estrutura-tese abordada neste trabalho, o tempo computacional ainda se mostrou elevado para o problema da otimização robusta com fadiga do sistema estocástico. Analisando os tempos computacionais de cada etapa do processo de otimização robusta, pôde-se concluir que o recálculo do problema de autovalores a cada iteração para computar as amostras é um dos principais responsáveis pelo elevado custo computacional de cálculo. Neste caso, uma nova base de redução de modelos dita robusta foi sugerida. Ela é composta pelos modos de vibração do sistema nominal e de resíduos estáticos provenientes das forças de modificação associadas às alterações causadas pelas variáveis aleatórias. A aplicação dessa técnica possibilitou um ganho computacional de 87,8% em comparação com a base de Ritz. Comparado com o modelo nominal sem redução, o ganho computacional foi de 96,4%, com erro relativo máximo menor que 0,13%. Essa redução de custo computacional tornou possível a execução da técnica de otimização multiobjetivo robusta em termos da fadiga que foi proposta. Por fim, salienta-se que esta base pode ser aplicada a sistemas dinâmicos com e sem amortecimento, além de poder ser aplicada a sistemas não lineares onde, neste caso, as forças de modificação devem levar em conta as perturbações causadas no sistema pelas forças não lineares.

A análise determinística que envolve a estrutura com suas propriedades nominais, apresentou um índice de Sines de 0,7276, o que não indica falha antes de 2 milhões de ciclos. Quando um nível de incerteza de 5% foi aplicado na espessura da placa em estudo, o valor máximo do coeficiente de Sines para o elemento mais crítico foi de 0,9834, ainda inferior à unidade, porém bem próximo, ou seja, nesses dois casos a estrutura não apresenta falha.

Na sequência, seguindo recomendações da literatura (LAMBERT, 2007), um nível de incerteza da ordem de 10% foi aplicado no limite de fadiga utilizado na estimativa do índice de Sines. Para este caso, o valor máximo do índice para o elemento mais crítico foi de 1,2814, indicando já uma falha após 2 milhões de ciclos. Desse aspecto de alteração na análise de falha, reitera-se novamente a importância da análise estocástica em aplicações desse tipo, visto que a inclusão de incertezas no modelo preditivo da fadiga se mostrou mandatória para a obtenção de resultados mais próximos aos reais esperados.

Após a verificação da falha, o processo de otimização robusta multiobjetivo foi realizado por meio do algoritmo NSGA-II. Esse método possibilitou a obtenção de um conjunto de soluções ótimas de Pareto. Dentre esses pontos, limitou-se a escolha somente para valores com índice de fadiga menor que 1, já que se optou pela não inclusão direta de restrições à função objetivo original. O ponto escolhido foi que apresentou menor vulnerabilidade e consequentemente maior robustez. Esse ponto de massa 1,863 kg equivale a uma espessura da placa de aproximadamente 2,0 mm.

Para comprovar a robustez do ponto ótimo-robusto, foi realizada uma análise similar à anterior, com a inclusão de incertezas de 5% na espessura e 10% no limite de fadiga da placa. O elemento mais crítico da estrutura apresentou um índice de Sines de 0,9059. Esse valor, inferior à unidade, indica a não falha do sistema após 2 milhões de ciclos. Nesse caso, mesmo com a presença de incertezas em níveis elevados, a análise de fadiga foi de não falha, o que indica a robustez do ponto ótimo escolhido.

Para o caso de uma aplicação mais realística de interesse prático, o aumento de 11,1% na massa do sistema deve ser reavaliado pelo projetista afim de concluir se esse acréscimo se encaixa nas limitações e/ou restrições do projeto. Como todos os pontos do conjunto de soluções de Pareto são igualmente ótimos, deve-se atentar a outras possíveis restrições de aplicação no momento da concepção do projeto, além da robustez que se deseja atingir.

## 7.2 Produção científica

Durante o período de desenvolvimento desta Tese, alguns artigos foram publicados e divulgados em congressos nacionais e internacionais da área. São eles:

- Rosa, U.L.; Gonçalves, L.K.S.; de Lima, A.M.G. **A robust condensation strategy for stochastic systems**, XXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods

in Engineering, 2016, Brasília. XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2016. p. 1-11.

- Rosa, U.L.; Gonçalves, L.K.S.; de Lima, A.M.G. **Fatigue analysis of viscoelastically damped structures subjected to uncertainties**, XXXVIII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2017, Florianópolis. XXXVIII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2017.

- Gonçalves, L.K.S.; Rosa, U.L.; de Lima, A.M.G. **Multiobjective Optimization Techniques applied to Fatigue Analysis of Viscoelastically Damped Systems**, XII Brazilian Workshop on Continuous Optimization, Foz do Iguaçu, 2018.

- Rosa, U.L.; Gonçalves, L.K.S.; de Lima, A.M.G. **Design optimization of a stochastic dynamic plate based on fatigue life**, 25<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering (COBEM), Uberlândia, 2019.

- Gonçalves, L.K.S.; Rosa, U.L.; de Lima, A.M.G. **Iterative condensation strategy to fatigue analysis of viscoelastically damped structures**, 25<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering (COBEM), Uberlândia, 2019.

- Rosa, U.L.; Gonçalves, L.K.S.; de Lima, A.M.G. **Robust design of stochastic dynamic systems based on fatigue damage**, Uncertainties 2020: 5<sup>th</sup> International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modelling, St-Etienne Rouvray, France, 2020, p. 1-20.

Além dos artigos publicados em congresso mencionados acima, este trabalho gerou ainda duas publicações em periódicos e outra em processo de submissão:

- Rosa, U.L.; Gonçalves, L.K.S.; de Lima, A.M.G. **A robust condensation strategy for stochastic systems**, Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia, v. 2, p. 90-100, 2016.

- Gonçalves, L.K.S.; Rosa, U.L.; de Lima, A.M.G. **Fatigue damage investigation and optimization of a viscoelastically damped system with uncertainties**, Journal of Brazilian Society of Mechanical Engineering, v. 41, p. 1-15, 2019.

### 7.3 Perspectivas de trabalhos futuros

Dentre as perspectivas que surgem com a publicação deste trabalho pode-se citar:

- Aplicação desta metodologia visando a análise de fadiga de sistemas industriais de maior nível de complexidade;

- Avaliação da influência de tratamentos da placa com materiais inteligentes e amortecimento, visando a diminuição dos níveis de vibração, atenuação dos níveis de tensão e menores valores do índice de fadiga;
- Realização de experimentos que possam comprovar a modelagem de um sistema real, aliado com os tratamentos dos tópicos acima;
- Extensão de metodologia desenvolvida para sistemas não lineares.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AIT BRIK. **Méthodologie de Conception Robuste et Optimisation dans un Concept d'Architectures Mécaniques Nouvelles en Avant Projet**. Thèse de doctorat, Besançon, 2005.

ASKELAND, D. R.; WRIGHT, W. J. **Essentials of Materials Science and Engineering**, Cengage Learning. Stamford, 2014.

ASTM. **Standard practices for cycle fatigue counting in fatigue analysis**, Designation E 1049-85, Metal Test Methods and Analytical procedure, vol. 03.01, p. 836-848, 1985.

BENDAT, J. S.; PIERSOL, A.G. **Random Data: Analysis and Measurements Procedures**. John Wiley & Sons, New Jersey, 4ª edição, 2010. <https://doi.org/10.1002/9781118032428>

BERNASCONI, A. **Efficient algorithms for calculation of shear stress amplitude and amplitude of the second invariant of the stress deviator in fatigue criteria applications**. International Journal of Fatigue, v. 24, p. 649-657, 2002. [https://doi.org/10.1016/S0142-1123\(01\)00181-5](https://doi.org/10.1016/S0142-1123(01)00181-5)

BIN LI; FREITAS, M. **A procedure for fast evaluation of high-cycle fatigue under multiaxial random loading**. Journal of Mechanical Design, vol. 124, p. 558-563, 2002. <https://doi.org/10.1115/1.1485291>

BORESI, A. P.; CHONG, K. P.; LEE, J. D. **Elasticity in engineering mechanics**. John Wiley & Sons, New Jersey, 3ª edição, 2011. <https://doi.org/10.1002/9780470950005>

BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. **Shigley's Mechanical Engineering Design**. McGraw-Hill, New York, 9ª edição, 2011.

CALLISTER, W. T. **Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução**. LTC, Rio de Janeiro, 7ª edição, 2008.

CHARKALUK, E.; BIGNONNET, A.; CONSTANTINESCU, A.; DANG VAN, K. **Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures**. V. 25, n. 12, p. 1199-1206, 2002. <https://doi.org/10.1046/j.1460-2695.2002.00612.x>

CRAIG JR, R. R.; KURDILA, A. J. **Fundamentals of structural dynamics**. John Wiley & Sons, 2006.

CUNHA-FILHO, A. G.; BRIEND, Y. P. J.; de Lima, A.M.G.; DONADON, M.V. **An efficient iterative model reduction method for aeroviscoelastic panel flutter analysis in the supersonic regime**. Mechanical Systems and Signal Processing, v. 104, p. 575-588, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.11.018>

DAS, I.; DENNIS, J. E. **A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generation in multicriteria optimization problems**. Structural optimization, v. 14, n. 1, p. 63-69, 1997. <https://doi.org/10.1007/BF01197559>

DE LIMA, A. M. G. **Modélisation et Optimisation Robuste de l'amortissement Viscoélastique de Systèmes Mécaniques**. Tese de Doutorado, Université de Franche-Comté, Besançon, 2007.

DE LIMA, A.M.G.; BOUHADDI, N.; RADE, D.A.; BELONSI, M. H. **A time-domain finite element model reduction method for viscoelastic linear and nonlinear systems**. Latin American Journal of Solids and Structures, v. 12, p. 1182-1201, 2015. <https://doi.org/10.1590/1679-78251695>

DE LIMA, A. M. G.; RADE, D. A.; BOUHADDI, N. **Stochastic modeling of surface viscoelastic treatments combined with model condensation procedures**, Shock and Vibration, vol. 17, p. 429-444, 2010. <https://doi.org/10.1155/2010/359283>

DEB, K. **Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms**. John Wiley & Sons, 2001.

DOWLING, N. E. **Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture and Fatigue**. Pearson Prentice Hall, 3ª edição. 2007.

ESCHENAUER, H.; KOSHI, J.; OSYCZKA, A. **Multicriteria Design Optimization: Procedures and Applications**. Springer Science & Business Media, 2012.

FARIA, A. W. **Modelagem por Elementos Finitos de Placas Compostas Dotadas de Sensores e Atuadores Piezoelétricos: Implementação Computacional e Avaliação Numérica**, 152f. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2006.

FLORIAN, A. An efficient sampling scheme: updates Latin Hypercube sampling. **Probabilistic Engineering Mechanics**, vol. 7, p. 123-130, 1992. [https://doi.org/10.1016/0266-8920\(92\)90015-A](https://doi.org/10.1016/0266-8920(92)90015-A)

GERBER, H. **Bestimmung der zulässigen spannungen in eisen-constructionen**. Wolf, 1874.

GERGES, Y. **Méthodes de reduction de modèles en vibroacoustique non-linéaire**. Tese de Doutorado, Université de Franche-Comté, Besançon, 2013.

GHANEM, R.G.; SPANOS, P.D. **Stochastic Finite Elements – A Spectral Approach**. Springer Verlag, 1991. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3094-6>

GOLDBARG, M. C. **Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos**. Campus, Rio de Janeiro, 2000.

HAUPT, R. L.; HAUPT, S. **Practical genetic algorithms**. 2004. <https://doi.org/10.1002/0471671746>

KHALIJ, L.; PAGNACCO, E.; LAMBERT, S. **A measure of the equivalent shear stress amplitude from a prismatic hull in the principal coordinate system**, International Journal of Fatigue, vol. 32, p. 1977-1984, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2010.07.007>

KOÇER, B. **Vibration fatigue analysis of structures under broadband excitation**, Tese de doutorado, GSNAS of METU, Ankara, 2010.

KOROISHI, E. H.; CAVALINI Jr., A. A.; DE LIMA, A. M. G.; STEFFEN Jr., V. **Stochastic modeling of flexible rotors**, Journal of ABCM, vol. 34 (2), p. 574-583, 2012. <https://doi.org/10.1590/S1678-58782012000600006>

LAMBERT, S. **Contribution à l'analyse d l'endommagement par fatigue et au dimensionnement de structures soumises à des vibrations aléatoires**, Tese de doutorado, INSA de Rouen, Rouen, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2009.09.007>

LAMBERT, S.; PAGNACCO E.; KHALIJ, L. **A probabilistic model for the fatigue reliability of structures under random loadings with phase shift effects**, International Journal of Fatigue, Vol. 32, p. 463-474, 2010

LEE, K. H.; PARK, G. J. **Robust Optimization Considering Tolerance of Design Variables**. Journal of Computers and Structures, v. 79, pp. 77-86, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00117-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00117-6)

LEIDEMER, M. N. **Proposta de uma metodologia de otimização evolucionária robusta utilizando a transformada unscented aplicável a circuitos de Rf/microondas**. 2009.

- MACIEL, G. P. R.; BARBOSA, R. S. **Técnicas para redução da ordem de sistemas dinâmicos na base modal**, SIMEA, Blucher Engineering Proceedings, vol. 2, 2015. <https://doi.org/10.5151/engpro-simea2015-PAP189>
- MANTEUFEL, R. D. Evaluating the convergence of Latin Hypercube sampling. **AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics and Materials Conference**, vol. 3, p. 100-106, 2000. <https://doi.org/10.2514/6.2000-1636>
- MARIN, J. **Mechanical Behavior of Engineering Materials**, Prentice-Hal, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- MASSON, G.; AIT BRIK, B.; COGAN, S.; BOUHADDI, N. **Component Mode Synthesis (CMS) Base on an Enriched Ritz Approach for Efficient Structural Optimization**. Journal of Sound and Vibration, v. 296(4), p. 845-860, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.03.024>
- MATSUISHI, M.; ENDO, T. **Fatigue of metals subjected to varying stress**, Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers, 1968.
- MESSAC, A. **Physical programming-effective optimization for computational design**. AIAA journal, v. 34, n. 1, p. 149-158, 1996. <https://doi.org/10.2514/3.13035>
- MINER, M. A. **Cumulative damage in fatigue**, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME 12, p. 159-164, 1945. <https://doi.org/10.1115/1.4009458>
- MOAVENI, S. **Finite Element Analysis: Theory and Application**, Prentice-Hall, 1999.
- MOREIRA, F. R. **Otimização Robusta Multiobjetivo para o Projeto de Sistemas de Engenharia**. Tese de Doutorado – Universidade Federal de Uberlândia, 2015.
- PALMGREN, A. **Die Lebensdauer von Kugellagern**, ZVDI, vol. 68, p. 339-341, 1924.
- PARETO, V. **La curva delle entrate e le osservazioni del prof. Edgeworth**. *Giornale degli economisti*, p. 439-448, 1896.
- PRADO, D. S. **Programação Linear**. Editora de Desenvolvimento Gerencial, Belo Horizonte, 2003.
- PREUMONT, A. **On the peak factor of stationary Gaussian processes**, Journal of Sound and Vibrations, vol. 100, p. 15-34, 1985. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(85\)90339-6](https://doi.org/10.1016/0022-460X(85)90339-6)
- RAMOS, A. P. R. **Contribuição à Análise de Fadiga de Sistemas Estruturais Incorporando Materiais Viscoelásticos**. Tese de Doutorado – Universidade Federal de Uberlândia, 2014.

RAO, S. S. **The Finite Element Method in Engineering**, Butterworth-Heinemann, 5ª edição, 2010.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis**. Florida: CRC Press, 2ª edição, 1997.

RITTO, T. G.; SAMPAIO, R.; CATALDO, E. **Timoshenko beam with uncertainty on the boundary conditions**, Journal of ABCM, vol. 30 (4), p. 295-303, 2008. <https://doi.org/10.1590/S1678-58782008000400005>

ROSA, U. L. **Análise de Fadiga de Sistemas Estocásticos Submetidos a Carregamentos Aleatórios Multiaxiais**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Uberlândia, 2016.

ROSA, U. L.; DE LIMA, A. M. G. **Fatigue analysis of dynamic systems subjected to cyclic loading in the frequency domain**, Proceeding of 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering, COBEM, Rio de Janeiro, RJ, 2015.

ROSA, U. L.; DE LIMA, A. M. G. **Fatigue analysis of stochastic systems subjected to cyclic loading in the frequency domain**, Proceedings of the 3rd International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling, UNCERTAINTIES, Maresias, SP, 2016a. <https://doi.org/10.20906/CPS/USM-2016-0012>

ROSA, U. L.; DE LIMA, A. M. G. **A Robust Condensation Strategy for Stochastic Dynamic Systems**. XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE 2016, Brasília, DF, 2016b.

RUBINSTEIN, R. Y. **Simulation and the Monte Carlo Method**, John & Wiley & Sons, 1981. <https://doi.org/10.1002/9780470316511>

SCHUELLER, G. I. **Computational stochastic mechanics - recent advances**, Journal of Computers and Structures, vol. 79, p. 2225-2234, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00078-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00078-5)

SCHUTZ, W. **A history of fatigue**. Engineering Fracture Mechanics, V. 54, n. 2, pp. 263-300, 1996. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(95\)00178-6](https://doi.org/10.1016/0013-7944(95)00178-6)

SINES, G. **Behavior of metals under complex stresses**, Metal Fatigue, McGraw-Hill, New York, 1959.

SOIZE, C. **A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics**, Probabilistic Engineering Mechanics, Elsevier, vol. 15 (3), p. 277-294, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0266-8920\(99\)00028-4](https://doi.org/10.1016/S0266-8920(99)00028-4)

SRINIVAS, N.; DEB, K. **Multiobjective using Non-dominated Sorting in Genetic Algorithms, Technical Report**. Department of Mechanical Engineering, Institute of Technology, India, v. 1993, 1993.

STEFANO, G. **The stochastic finite element method: Past, present and future**, Computational Methods Applied Mechanical Engineering, vol. 198, p. 1031-2051, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.11.007>

SUDRET, B. **Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models—Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods**. Habilitation a diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France, v. 147, 2007.

SUDRET, B.; DER KIUREGHIAN, A. **Stochastic finite element methods and reliability: a state-of-the-art report**. Berkeley, CA: Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, 2000.

TAKAHASHI, B. X. **Metodologia moderna para análise de fadiga baseada em elementos finitos de componentes sujeitos a fadiga uni e multiaxial**. Tese de Doutorado - Universidade de São Paulo, 2014.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. **Theory of elasticity**, McGraw-Hill, New York, 1951.

VANDERPLAATS, G. N. **Numerical optimization techniques for engineering design: with applications**. New York: McGraw-Hill, 1984.

VARGAS, D. **Um Estudo dos Parâmetros do Algoritmo NSGA-II com o operador SBX em Problemas de Otimização Estrutural Multiobjetivo**. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018. <https://doi.org/10.5540/03.2018.006.02.0333>

VICENTE, B. G. G. L. Z. **Projeto robusto de Circuitos Shunt para o controle passivo de vibrações de estruturas compostas**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Uberlândia, 2014.

WEBER, B. **Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque**, Tese de doutorado, INSA de Lion, Lion, 1999.

ZITZLER, E.; THIELE, L. **An evolutionary algorithm for multiobjective optimization: The strength pareto approach**. TIK-report, v. 43, 1998.