

PAULO VICTOR SANTANA

Abordagens de Sistemas Neuro-Fuzzy em Modelos Econômicos



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2021

PAULO VICTOR SANTANA

Abordagens de Sistemas Neuro-Fuzzy em Modelos Econômicos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Matemática Aplicada.

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

UBERLÂNDIA - MG
2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S232 Santana, Paulo Victor, 1997-
2021 Abordagens de Sistemas Neuro-Fuzzy em Modelos
Econômicos [recurso eletrônico] / Paulo Victor Santana.
- 2021.

Orientadora: Rosana Sueli da Motta Jafelice.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.697>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Jafelice, Rosana Sueli da Motta,
1964-, (Orient.). II. Universidade Federal de
Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.posgrad.famat.ufu.br - pmat@famat.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 97, PPMAT				
Data:	15 de dezembro de 2021	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:	11:40
Matrícula do Discente:	11922MAT001				
Nome do Discente:	Paulo Victor Santana				
Título do Trabalho:	Abordagens de Sistemas Neuro-Fuzzy em Modelos Econômicos				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Matemática Aplicada				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Conjuntos Fuzzy dos Tipos 1 e 2 na Modelagem Matemática de Incertezas				

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Mconf-RNP, em conformidade com a PORTARIA Nº 36, DE 19 DE MARÇO DE 2020 da COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR - CAPES, pela Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Geraldo Nunes da Silva - UNESP; Rodolfo Collegari - FAMAT/UFU e Rosana Sueli da Motta Jafelice - FAMAT/UFU, orientadora do candidato.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Rosana Sueli da Motta Jafelice, Professor(a) do Magistério Superior**, em 15/12/2021, às 11:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodolfo Collegari, Professor(a) do Magistério Superior**, em 15/12/2021, às 11:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **GERALDO NUNES SILVA, Usuário Externo**, em 15/12/2021, às 11:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3238654** e o código CRC **46405401**.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a meus pais, Marcelo José Santana e Maria Heleni Gomide Santana. Muito obrigado por todo suporte e apoio que me deram até aqui, em especial no período da pandemia do coronavírus.

Agradeço a minha namorada, Byhanka Whitaker, por todo apoio, suporte e companheirismo. Principalmente neste último ano, que foi tão difícil e ao mesmo tempo muito recompensador. Sem dúvidas o seu apoio foi indispensável para a conclusão deste trabalho.

Agradeço a minha irmã, Ana Beatriz Santana, pelos incentivos e apoio durante a realização desta etapa.

Gostaria de agradecer a minha orientadora, professora Rosana Sueli Da Motta Jafelice, primeiramente por ter aceito me orientar neste trabalho e também por todo o período que trabalhamos juntos, por todos aprendizados e por todo suporte.

Agradeço aos professores José Waldemar da Silva e Julio Fernando Costa Santos por todo apoio e suporte técnico, sem dúvidas a ajuda de vocês foi muito importante para o desenvolvimento e conclusão deste projeto.

Agradeço aos meus companheiros de mestrado, os quais sempre me incentivaram e apoiaram durante essa jornada.. Um agradecimento especial aos companheiros: Gabriela, Fernando, João Paulo, Walteir, Dino, Elis, Jeferson, Fellipe e Tiago.

Agradeço a todos os professores da banca, titulares e suplentes, por terem aceito o convite para participar da banca examinadora deste trabalho.

Agradeço a CAPES, pela oportunidade de participar deste programa de mestrado.

E por último, agradeço a todas as pessoas que me ajudaram de alguma forma na minha caminhada até aqui, meu sincero, MUITO OBRIGADO!!

Resumo

A ciência econômica ainda enfrenta obstáculos para a modelagem matemática de problemas, devido a grande incerteza existente em torno das variáveis estudadas nesta área. O objetivo deste trabalho é utilizar a teoria dos conjuntos fuzzy para estimar dois indicadores econômicos, a taxa de crescimento do produto interno bruto a preço de mercado (PIBpm) e a taxa de poupança, que é um parâmetro do modelo de crescimento econômico de Solow. Para isso, são construídos sistemas baseados em regras fuzzy (SBRFs), que por sua vez são gerados através de dois sistemas neuro-fuzzy. Neste trabalho utiliza-se dois sistemas neuro-fuzzy distintos, o *Adaptive Neuro-fuzzy Inference System* (ANFIS) e o *Hybrid Neural Fuzzy Inference System* (HyFIS), que têm como método de inferência Takagi-Sugeno e Mamdani, respectivamente. O estudo referente à taxa de poupança é realizado em dois contextos, o primeiro com dados globais de 74 países, de 2016 a 2018, para o treinamento dos sistemas neuro-fuzzy, e o segundo apenas com dados nacionais, de 2000 a 2018. Na validação do primeiro caso obteve-se um coeficiente de correlação de 0,87330 entre os valores reais e os estimados pelo SBRF, gerado pelo HyFIS. Para o caso, com os dados nacionais, os resultados são satisfatórios, mas a etapa de validação é realizada apenas com valores de dois anos, devido a baixa quantidade de informações disponíveis. Na abordagem envolvendo a taxa de crescimento do PIBpm são utilizados dados brasileiros para o treinamento das redes neuro-fuzzy, referentes aos anos de 2000 a 2018 selecionados de forma trimestral. Além disso, essa abordagem é realizada com uma defasagem entre os valores de entrada e saída, permitindo assim que o modelo possa realizar previsões. Nesta modelagem, a correlação obtida na etapa de validação do SBRF construído pelo HyFIS é 0,90540, mostrando resultados promissores. Os valores obtidos nas previsões, quando comparados com os dados reais não são satisfatórios, acredita-se que a pandemia do coronavírus tenha afetado de maneira negativa as projeções realizadas. É importante mencionar que nestas abordagens são empregados o HyFIS e o ANFIS, mas em ambas o HyFIS demonstrou superioridade para modelar os problemas econômicos.

Palavras-chave: Conjuntos Fuzzy; ANFIS; HyFIS; Modelo de Solow; PIBpm; Taxa de Poupança.

Abstract

Economic science still faces obstacles for the mathematical modeling of problems, due to the great uncertainty surrounding the variables studied in this area. The aim of this work is to use fuzzy set theory to estimate two economic indicators, the growth rate of the gross domestic product at market price (GDPmp) and the savings rate, which is a parameter of the Solow economic growth model. For this, Fuzzy Rule-Based Systems (FRBS) are built, which in turn are generated through two neuro-fuzzy systems. In this work, two distinct neuro-fuzzy systems are used, the Adaptive Neuro-fuzzy Inference System (ANFIS) and the Hybrid Neural Fuzzy Inference System (HyFIS), which use the Takagi-Sugeno and Mamdani inference method, respectively. The study on the savings rate is carried out in two contexts, the first with global data from 74 countries, from 2016 to 2018, for the training of neuro-fuzzy systems, and the second with only national data, from 2000 to 2018. In the validation of the first case, a correlation coefficient of 0.87330 was obtained between the real values and those estimated by the FRBS, generated by HyFIS. In this case, with national data, the results are satisfactory, but the validation step is carried out only with values of two years, due to the low amount of available information. In the approach involving the GDPmp growth rate, Brazilian data are used for the training of neuro-fuzzy networks, referring to the years 2000 to 2018, selected on a quarterly basis. Furthermore, this approach is performed with a lag between the input and output values, thus allowing the model to make predictions. In this modeling, the correlation obtained in the validation step of the FRBS built by HyFIS is 0.90540, showing promising results. The values obtained in the forecasts, when compared with the real data, are not satisfactory, it is believed that the coronavirus pandemic has negatively affected the projections made. It is important to mention that in these approaches HyFIS and ANFIS are used, but in both, HyFIS demonstrated superiority to model economic problems.

Keywords: Fuzzy Sets; ANFIS; HyFIS; Solow Model; PIBmp; Saving Rate.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 Teoria dos Conjuntos Fuzzy	5
1.1 Introdução	5
1.2 Conjuntos Fuzzy	5
1.3 Operações com Conjuntos Fuzzy	8
1.4 Normas triangulares	9
1.5 α -Níveis de um Conjunto Fuzzy	11
1.6 Números Fuzzy	11
1.7 O Princípio de Extensão de Zadeh	12
1.8 Operações Aritméticas com Números Fuzzy	13
1.9 Variáveis Linguísticas	14
1.10 Sistema Baseado em Regras Fuzzy	15
1.11 Exemplo de SBRF: Recomendação de Compra de Fundos Imobiliários	17
2 Sistemas de Inferência Fuzzy Determinados pelas Redes Neurais Artificiais	22
2.1 Redes Neurais Artificiais	22
2.1.1 Método dos Mínimos Quadrados	23
2.1.2 Método do Gradiente Descendente	24
2.1.3 Exemplo do Método Gradiente Descendente	25
2.2 HYFIS	27
2.2.1 Arquitetura do Modelo Neuro-fuzzy do HyFIS	28
2.2.2 O Algoritmo de Aprendizagem Híbrido	30
2.3 ANFIS	35
2.3.1 O Algoritmo de Aprendizagem Híbrido	36
3 O Modelo de Crescimento Econômico de Solow	39
3.1 Introdução	39
3.2 O Modelo Clássico de Solow	39
3.2.1 Propriedades da Função Produção	40
3.2.2 Propriedades dos Insumos	41
3.2.3 Dinâmicas do Modelo	42
3.2.4 A Trajetória para o Equilíbrio	44
3.2.5 A Taxa de Poupança	44
3.3 Modelo Clássico de Solow: Caso Particular	46
3.4 O Modelo Fuzzy de Solow Global	49
3.4.1 Tratamento de Dados	50

3.4.2	Metodologia Utilizada na Construção e Validação do SBRF	51
3.4.3	Modelo Clássico de Solow x Modelo Fuzzy de Solow	53
3.5	O Modelo Fuzzy de Solow Nacional	57
3.6	Conclusão	58
4	Modelo de Previsão para o Crescimento do PIBpm do Brasil	60
4.1	Introdução	60
4.2	Taxa de Crescimento do PIBpm do Brasil	61
4.3	Tratamento de Dados	62
4.4	Metodologia Utilizada na Construção e Validação do SBRF através do HyFIS .	64
4.5	Previsões para a Taxa Crescimento do PIBpm Brasileiro	67
4.5.1	Comparação das Previsões com Dados Reais	69
4.6	HyFIS x ANFIS	70
4.7	HyFIS x Regressão Linear Múltipla	70
4.8	Conclusão	71
5	Conclusão	72
	Referências Bibliográficas	74

Lista de Figuras

1	PIB per capita referente aos dois últimos milênios. Fonte: (OURWORLDIN- DATA, 2017).	2
1.1	Função μ_{1A} .	7
1.2	Função μ_{2A} .	7
1.3	Função μ_{3A} .	7
1.4	Funções μ_A e μ_B .	8
1.5	Função $\mu_A \cup \mu_B$.	8
1.6	Função $\mu_A \cap \mu_B$.	8
1.7	Função μ_{A^c} .	8
1.8	União padrão.	9
1.9	Soma algébrica.	9
1.10	Soma limitada.	10
1.11	União drástica.	10
1.12	Intersecção padrão.	10
1.13	Produto algébrico.	10
1.14	Diferença limitada.	11
1.15	Intersecção drástica.	11
1.16	Princípio da extensão de Zadeh.	13
1.17	Variável Linguística.	15
1.18	Sistema Baseado em Regras Fuzzy.	15
1.19	Método de inferência de Mamdani.	16
1.20	Método de inferência de Takagi-Sugeno.	17
1.21	Funções de pertinência do <i>Dividend Yield(DY)</i> .	18
1.22	Funções de pertinência do Preço sobre o Valor Patrimonial.	19
1.23	Funções de pertinência da Recomendação de Compra.	19
1.24	Superfície definida pelo SBRF.	20
1.25	Avaliação do BARI11 pelo SBRF.	21
2.1	Representação de um neurônio biológico. Fonte: (RAUBER, 2021).	23
2.2	Interpretação geométrica do método dos mínimos quadrados.	24
2.3	Paraboloide caracterizado pelo erro quadrático médio.	24
2.4	Valores de x_g e y_g gerados pelo software (R Core Team, 2020).	25
2.5	Configuração da reta gerada pelo chute inicial em comparação com os dados.	26
2.6	Retas geradas pelos parâmetros obtidos pelo método após cada iteração.	27
2.7	Arquitetura do HyFIS. Fonte: (KIM; KASABOV, 1999).	28
2.8	Estrutura do modelo neuro-fuzzy do HyFIS. Fonte: (KIM; KASABOV, 1999).	29
2.9	Exemplo de funções de pertinência para x_1 , x_2 e y .	31
2.10	Arquitetura do ANFIS. Fonte:(FREITAS, 2021).	35
3.1	Exemplo de Função Produção. Fonte: (ROMER, 2012).	41
3.2	Investimento de equilíbrio e atual. Fonte: (ROMER, 2012).	43

3.3	Diagrama de fase de k no modelo de Solow. Fonte: (ROMER, 2012).	44
3.4	Os efeitos do aumento da taxa de poupança no Investimento. Fonte: (ROMER, 2012).	45
3.5	Os efeitos do aumento da taxa de poupança. Fonte: (ROMER, 2012).	46
3.6	Solução da equação (3.10).	48
3.7	Soluções numéricas da equação (3.10) variando a condição inicial.	49
3.8	Solução numérica da equação (3.10) com o campo de direções das retas tangentes.	49
3.9	Arquitetura do SBRF.	50
3.10	Diagrama da obtenção de dados.	50
3.11	Esquema da modelagem utilizada no processo. Os retângulos vermelhos representam a etapa de treinamento e construção dos SBRFs e os verdes representam a etapa de validação.	52
3.12	Funções de pertinência da variável consumo das famílias.	53
3.13	k^* real x k^* estimado pelo SBRF referente a Nova Zelândia, em que $f(k) = k^{0,5}$	55
3.14	k^* real x k^* estimado pelo SBRF referente ao Brasil, em que $f(k) = k^{0,5}$	55
3.15	k^* real x k^* estimado pelo SBRF referente a Gâmbia, em que $f(k) = k^{0,5}$	55
3.16	Soluções numéricas das equações (3.15) e (3.16), e as assíntotas horizontais $y = k^*$ com valores de s obtidos pelo SBRF e com valores reais referentes a Nova Zelândia.	56
3.17	Soluções numéricas das equações (3.18) e (3.19), e as assíntotas horizontais $y = k^*$ com valores de s obtidos pelo SBRF e com valores reais referentes ao Brasil.	56
3.18	Soluções numéricas das equações (3.21) e (3.22), e as assíntotas horizontais $y = k^*$ com valores de s obtidos pelo SBRF e com valores reais referentes a Gâmbia.	56
3.19	Funções de pertinência do consumo das famílias com dados somente do Brasil.	58
4.1	Arquitetura do SBRF.	62
4.2	Diagrama da obtenção de dados no IPEA.	62
4.3	Diagrama da obtenção de dados no IBGE.	63
4.4	Diagrama da obtenção de dados no BETS.	63
4.5	Esquema da modelagem utilizada no processo de construção do SBRF. Os retângulos vermelhos representam a etapa de treinamento e construção do SBRF e os verdes representam a etapa de validação.	64
4.6	Impacto da taxa de poupança no PIB. Fonte: (HOOGSTRATE; OSANG, 2007).	65
4.7	Exemplo da defasagem dos dados para $x = 8$ trimestres.	65
4.8	Gráfico de barras referente aos dados da Tabela 4.4.	66
4.9	Funções de pertinência da variável consumo das famílias.	67
4.10	Gráfico de barras referente aos dados da Tabela 4.7.	68
4.11	Gráfico aos dados da variável de saída (y). Fonte: (IPEA, 2021b).	69

Lista de Tabelas

1.1	Países e seus respectivos IDH.	6
1.2	Regras fuzzy do SBRF.	20
3.1	Informações sobre os dados utilizados.	51
3.2	Domínio das variáveis utilizadas para criação do SBRF.	51
3.3	Tabela com os erros obtidos com a HyFIS.	52
3.4	Comparação HyFIS x ANFIS.	53
3.5	Dados dos países selecionados, sendo os valores de s estimados obtidos por meio do SBRF e os valores s reais são referentes ao ano de 2019 (FEENSTRA; INKLAAR; TIMMER, 2015).	54
3.6	Valores do investimento de equilíbrio (k^*) real e estimado.	54
3.7	Tabela com os erros obtidos com o HyFIS.	57
3.8	Domínio das variáveis utilizadas para criação do SBRF.	58
3.9	Comparação HyFIS x ANFIS para o caso do Brasil.	58
4.1	Informações sobre os dados utilizados.	63
4.2	Domínio das variáveis utilizadas para construção do SBRF, as unidades de medida destas variáveis são suas respectivas participações no PIB em porcentagem.	63
4.3	Domínio das variáveis utilizadas para construção do SBRF, as variáveis x_7 , x_8 , x_{10} e y são dadas em porcentagem.	64
4.4	Tabela com os erros obtidos com o HyFIS.	66
4.5	Domínios alterados das variáveis utilizadas para construção do SBRF.	67
4.6	Domínios alterados das variáveis utilizadas para construção do SBRF.	68
4.7	Tabela com os erros obtidos com o HyFIS para os domínios alterados.	68
4.8	Tabela com os valores de previsão obtidas pelo SBRF.	69
4.9	Comparação das previsões com dados reais.	70
4.10	Comparação HyFIS x ANFIS.	70

Introdução

“Se quisermos que a economia continue crescendo, o único modo é com a tecnologia” (Roland Busch).

Este trabalho apresenta um estudo que tem como base a teoria dos conjuntos fuzzy que foi proposta em 1965 por Lotfi Askar-Zadeh, professor no departamento de Engenharia Elétrica e Ciências da Computação da Universidade da Califórnia (ZADEH, 1965). Essa teoria consegue quantificar e caracterizar incertezas em inúmeros contextos, isso ocorre através de uma definição de conjuntos mais flexível que admite a noção de graus de pertinência de um elemento a um conjunto. Essa metodologia juntamente com ferramentas da inteligência artificial (IA) tem trazido grandes avanços para diversas áreas do conhecimento.

É inegável que as máquinas através da IA, em especial as redes neurais artificiais (RNAs), nunca estiveram tão próximas do raciocínio humano. Com isso, essas tecnologias vem nos ajudando a solucionar diversos problemas e estão cada vez mais presentes no cotidiano. As RNAs quando aplicadas em conjunto com a teoria dos conjuntos fuzzy resulta em uma ferramenta de modelagem matemática de alto nível, os sistemas neuro-fuzzy.

Apesar da forte resistência à teoria fuzzy em seu início, muitos pesquisadores vislumbraram as possibilidades que essa teoria fornecia e Zadeh encontrou seguidores no mundo todo, principalmente no Japão. Nos anos subsequentes a 1965 a teoria fuzzy avançou consideravelmente, em 1974 Ebrahim Mamdani apresentou o primeiro controlador fuzzy. A partir daí, vários pesquisadores buscaram utilizar essa teoria para controlar sistemas de engenharia. Em 1976 tivemos a primeira aplicação industrial desta teoria, desenvolvida pelo Circle Cement e SIRA, na Dinamarca, que construiu um controlador fuzzy capaz de incorporar a experiência dos operários e controlar os fornos das fábricas. Em 1987 no Japão foi inaugurado o primeiro trem controlado pela lógica fuzzy, neste mesmo ano a Yamaha desenvolveu um helicóptero não tripulado totalmente controlado por um controlador fuzzy e em 1988 o primeiro sistema de comércio financeiro fuzzy começou a operar. Porém, foi em 1990 que esta teoria ganhou popularidade, nessa década vários eletrodomésticos japoneses contavam com sistemas baseados em controladores fuzzy (MASSAD; ORTEGA; SILVEIRA, 2004).

Tendo em vista todo esse leque de aplicações da teoria dos conjuntos fuzzy, podemos indagar se essa teoria pode ser aplicada de modo eficiente nas ciências econômicas. Com o intuito de expor as contribuições vindas destas abordagens, em 2006, foi criada uma associação internacional intitulada SIGEF (*The International Association for Management and Economy Fuzzy-set*) que organiza palestras, congressos e publica semestralmente a revista internacional, *Fuzzy Economic Review*. Para exemplificar como a teoria fuzzy vem sendo utilizada na área econômica alguns artigos científicos publicados entre 1987 e 2007 são mencionados, tais trabalhos estão citados na referência (SURIPAH, 2020).

Em 1998, Flod e Marion publicaram um trabalho denominado “Output convergence and International Trade: Time Series and Fuzzy Clustering Evidence for New Zealand and Her Trading Partners” que apresenta uma nova forma de medir a convergência de séries temporais utilizando uma aplicação fuzzy. No mesmo ano, Gilaes publicou o artigo “Econometric Modeling based on Pattern Recognition via the Fuzzy C-Means Clustering Encryption” que modelou a

demanda de dinheiro através da teoria fuzzy e de dados anuais de 1960-1983 do departamento de comércio americano. Em 2003 Özkan desenvolveu o trabalho intitulado “Currency Crises Analyzed By Type-I Fuzzy System Modelling” que fez uso de um software computacional para analisar crises cambiais, com dados da Turquia. Para isso utilizou-se a teoria de séries temporais macroeconômicas juntamente com um sistema baseado em regras fuzzy (SBRF), este trabalho já contava com as redes neurais artificiais em seu desenvolvimento. Em 2003, Achسانی utilizou um algoritmo baseado na teoria fuzzy para criar um modelo de demanda para a Indonésia através de dados trimestrais dos anos 1993-2002, os resultados obtidos não foram promissores quando comparados à abordagem econométrica tradicional. Porém, Achسانی continuou os estudos nessa área, utilizando os dados referentes a relação Dívida/PIB, a estabilidade da taxa de câmbio, a taxa de inflação e a taxa de juros para determinar a posição relativa da Indonésia dentre as economias do Leste da Ásia.

Lin, em 2002, publicou o trabalho intitulado “A New Approach to Modeling Early Warning Systems for Currency Crises: can a machine-learning fuzzy expert system predict the currency crises effectively?” em que conduziu pesquisas usando a abordagem neuro-fuzzy para prever crises na Indonésia, Filipinas, Tailândia e Malásia.

Em 2007, Muslim em “Implementation Algorithms and Neuro Fuzzy Fuzzy Cluster Case Studies Indonesia’s exports to Japan” fornece uma abordagem alternativa para modelagem de dados referentes as exportações da Indonésia para o Japão por meio da aplicação que utilizava sistemas neuro-fuzzy.

Assim, este trabalho busca contribuir para os estudos em relação à inserção da teoria dos conjuntos fuzzy como ferramenta de modelagem nas Ciências Econômicas. A seguir a proposta deste trabalho é apresentada, começando com algumas informações econômicas relevantes.

Nos últimos séculos houve um aumento do padrão de vida da humanidade em uma proporção nunca vista antes na história do mundo. Entretanto, percebe-se que esse aumento de padrão de vida não ocorre de forma uniforme no globo terrestre, para ilustrar essa não uniformidade tome como exemplo os Estados Unidos da América e um outro país, como a Venezuela. O que explica essa enorme diferença no padrão de vida entre alguns países? Se pararmos para pensar um pouco, a pobreza sempre esteve presente ao longo da história do mundo. Isso fica claro quando observamos o histórico do PIB per capita no mundo ao longo dos dois últimos milênios que está representado na Figura 1 (OURWORLDINDATA, 2017).

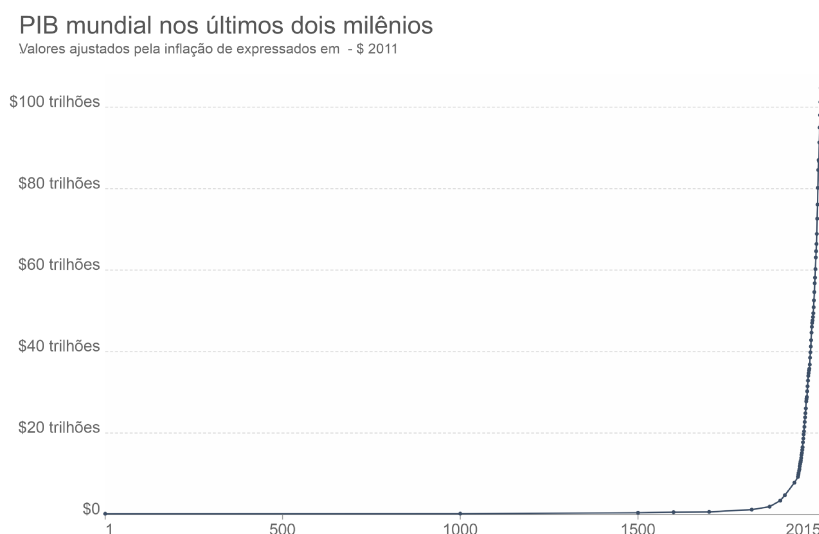


Figura 1: PIB per capita referente aos dois últimos milênios. Fonte: (OURWORLDINDATA, 2017).

Com essa informação, conclui-se que não devemos direcionar o foco de nossos estudos para encontrar os motivos que fazem alguns países serem pobres. Essa pergunta deve ser reformulada para: como alguns países saíram dessa condição natural e atingiram patamares tão altos no que se diz respeito a produção de riqueza? Assim, surgem os modelos que tentam explicar como o crescimento econômico ocorre. Dentro das ciências econômicas existem várias vertentes que estudam este fenômeno, como por exemplo: a corrente clássica (Adam Smith, David Ricardo, Thomas Malthus), a corrente Keynesiana (Damodar-Harrod, Kaldor), a corrente neo-clássica (Solow), a corrente do crescimento endógeno (Lucas, Romer) e outras. Cada uma delas tenta explicar esse fenômeno de uma maneira diferente.

O modelo de Solow é o ponto de partida para quase todas análises de crescimento econômico. Mesmo modelos que se baseiam fundamentalmente nele, são melhores compreendidos quando comparados ao próprio modelo de Solow. Assim, compreender este modelo é essencial para compreender teorias de crescimento econômicos (ROMER, 2012). Com base nisso, o modelo de crescimento econômico utilizado neste trabalho é o modelo de Solow como descrito no livro do Romer, considerando o capital humano como uma de suas variáveis. Além do estudo do modelo de Solow, é apresentado dois SBRFs, um construído com dados de 74 países e o outro com dados brasileiros, ambos possuem como variável de saída um parâmetro do modelo, a taxa de poupança. Dessa forma, os modelos de crescimento econômico nos ajudam a entender por que alguns países prosperam.

Além disso, existe um indicador muito utilizado para mensurar o nível de atividade econômica de uma determinada região, o PIB. Assim, a previsão de sua trajetória fornece informações úteis sobre o comportamento futuro da economia de determinada região no curto prazo, desse modo, esse indicador atua como objeto para a formação de expectativas sobre o comportamento de uma economia. A partir da performance do PIB, é possível traçar a evolução da economia e compará-la a outras economias (COSTA; SILVA, 2020).

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o PIB é, contudo, apenas um indicador síntese de uma economia. Este indicador ajuda a compreender a economia de um país, mas não expressa importantes fatores como distribuição de renda, qualidade de vida, educação e saúde. Um país pode ter um PIB baixo, como a Islândia, e ter um altíssimo padrão de vida. Ou, como no caso da Índia, um PIB alto e um padrão de vida relativamente baixo (IBGE, 2017).

Por esses motivos, existe um grande interesse em estimar o PIB futuro de determinado país e, conseqüentemente, diversos modelos de previsão com esse propósito são criados todos os anos. Neste trabalho é proposto um modelo de previsão para a taxa de crescimento do PIB a preço de mercado (PIBpm) brasileiro trimestral anualizada, que leva em consideração alguns fatores que não são contabilizados no PIB. Tal modelo é construído através de dois sistemas neuro-fuzzy distintos, o *Adaptive Neuro-fuzzy Inference System* (ANFIS) (JANG, 1993) e o *Hybrid Neural Fuzzy Inference System* (HyFIS) (KIM; KASABOV, 1999), em que o primeiro utiliza o método de inferência de Takagi-Sugeno (TAKAGI; SUGENO, 1985) e o segundo o método de inferência de Mamdani (MAMDANI; ASSILIAN, 1975). Para mensurar a acurácia dos modelos estudados utiliza-se as seguintes métricas: o erro absoluto máximo (EAM) e o erro absoluto médio (MAE), os quais são explicitados a seguir:

- $EAM = \max_{i=1, \dots, n} |y(i) - y_e(i)|;$

- $MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y(i) - y_e(i)|;$

em que y_e é o valor estimado da variável de saída, y é o valor real e n é o número de dados presente na etapa de validação do modelo. Além disso, o coeficiente de correlação entre y e y_e é

utilizado para definir a quantidade ótima de funções de pertinência para o HyFIS. O coeficiente de correlação é dado por

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (y_e(i) - \bar{y}_e)(y(i) - \bar{y})}{(n-1)S_{y_e}S_y}$$

em que \bar{y}_e é a média dos valores de y_e , S_{y_e} é o desvio padrão de y_e , \bar{y} é a média dos valores de y , S_y é o desvio padrão de y e n a quantidade de dados.

Portanto, os principais objetivos deste trabalho são determinar SBRFs por meio de duas redes neuro-fuzzy, o HyFIS e o ANFIS, que modelem problemas econômicos. Dessa forma, duas abordagens são estudadas:

- A primeira determina a taxa de poupança, parâmetro do modelo de Solow, como saída de um SBRF tendo como variáveis de entrada: o consumo das famílias, o saldo em transações correntes e a taxa de juros. Este enfoque é realizado para o treinamento de dois bancos de dados distintos: um global e um nacional.
- A segunda estabelece um SBRF que possui como variável de saída a taxa de crescimento trimestral anualizada do PIBpm brasileiro, tendo dez variáveis de entrada selecionadas pelo especialista da área econômica. Neste estudo é possível realizar previsões referentes a trimestres futuros.

Além disso, há um objetivo secundário que é selecionar a quantidade ótima de funções de pertinência para o HyFIS em cada uma das abordagens citadas anteriormente. Nos dois contextos os resultados de validação são satisfatórios e o HyFIS correspondeu às expectativas. A estrutura desta dissertação é dada da seguinte forma.

No Capítulo 1 são apresentados os principais conceitos básicos da teoria dos conjuntos fuzzy, inclusive a definição de sistemas baseados em regras fuzzy. No fim deste capítulo é apresentado um exemplo ilustrativo de um SBRF no contexto de análise de fundos imobiliários.

No Capítulo 2 é abordado o conceito de redes neurais artificiais e a teoria básica necessária para entender o funcionamento das duas redes neuro-fuzzy que são empregadas neste trabalho, o ANFIS e o HyFIS. Posteriormente, a arquitetura e funcionamento destas redes são detalhadas.

No Capítulo 3 é exibido o modelo de crescimento econômico de Solow, bem como os SBRFs que possuem a taxa de poupança como variável de saída.

No Capítulo 4 é exposto o processo de construção de um SBRF, que tem como variável de saída a taxa de crescimento do PIBpm do Brasil. Finalmente, no Capítulo 5 tem-se as conclusões, os resultados obtidos e as sugestões para trabalhos futuros.

Paulo Victor Santana
Uberlândia-MG, 15 de Dezembro de 2021.

Capítulo 1

Teoria dos Conjuntos Fuzzy

“Uma semente não constitui uma pilha nem duas nem três ... mas por outro lado todo mundo irá concordar que 100 milhões de sementes constitui uma pilha. Afinal, qual é o limite apropriado? Nós podemos dizer que 325647 sementes não constitui uma pilha mas 325648 constitui?” (Borel 1950).

1.1 Introdução

Na teoria clássica de conjuntos, dado um conjunto universo U e um subconjunto $A \subseteq U$ podemos separar os elementos de U em duas classes, os elementos que pertencem a A e os que não pertencem. Dessa forma, o conjunto dos números inteiros pode ser separado como sendo os números pares e os números que não são pares. Porém, em conjuntos com fronteiras menos precisas essa abordagem pode perder um pouco o sentido, como descrito a seguir.

Pense no conjunto das pessoas altas, uma abordagem clássica para formalizar esse conjunto seria determinar um valor de altura a partir do qual as pessoas seriam consideradas altas, por exemplo, 1,8 metros e assim o conjunto das pessoas altas seria o conjunto das pessoas com altura igual ou superior a 1,8m. Porém, nesse caso, uma pessoa que possui 1,79m e outra com 1,5m estariam no mesmo conjunto, das pessoas que não são altas. Se pararmos para pensar, essa abordagem não é tão usual nesse caso, já que uma pessoa com 1,79m está apenas 1 centímetro de pertencer ao conjunto das pessoas altas, e a de 1,5m está a 30 centímetros.

Segundo Barros e Bassanezi (2015), uma outra abordagem para definir o conjunto das pessoas altas é considerar que todos os indivíduos são altos, porém com maior ou menor intensidade. Assim, têm-se pessoas que pertencem mais ao conjunto das pessoas altas do que outras. Portanto, uma pessoa com 1,79m de altura, pode ter um grau de pertinência ao conjunto das pessoas altas maior do que uma pessoa com 1,5m.

É nessa segunda abordagem que consiste a teoria dos conjuntos fuzzy. Desenvolvida por Zadeh com a intenção de dar um tratamento matemático a certos termos subjetivos, como “aproximadamente” ou “cerca de”. Em suma, os conjuntos fuzzy são ferramentas que nos permitem representar matematicamente a imprecisão, ou a incerteza.

1.2 Conjuntos Fuzzy

Para obter a formalização de um conjunto fuzzy, Zadeh utilizou como base o fato de que um conjunto clássico pode ser definido através de sua função característica. Desta forma, neste capítulo tem-se um estudo sobre a teoria dos conjuntos fuzzy de acordo com as referências (JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2012) e (BARROS; BASSANEZI, 2015).

Definição 1.1 Um conjunto clássico A de um conjunto universo U é caracterizado por sua função característica:

$$\chi_A : U \longrightarrow \{0, 1\},$$

em que se um elemento x de U tem imagem 1 por χ_A dizemos que x pertence a A , caso contrário, dizemos que x não pertence a A .

Definição 1.2 Um conjunto fuzzy A de um conjunto universo U é caracterizado por uma função:

$$\mu_A : U \longrightarrow [0, 1].$$

Esta função é chamada de função de pertinência do conjunto fuzzy A . A imagem de um elemento de U por μ_A é interpretado como o grau com que o elemento x pertence ao conjunto fuzzy A , ou seja, $\mu_A(x) = 0$ indica a não pertinência de x à A , e $\mu_A(x) = 1$ indica a plena pertinência do elemento x ao conjunto fuzzy A .

Um conjunto fuzzy A pode ser representado pelo gráfico da função de pertinência:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U, \mu_A(x) \in [0, 1]\}.$$

Observação 1.1 A definição de conjuntos fuzzy nos permite ver os conjuntos clássicos como casos particulares de conjuntos fuzzy. Para ilustrar esta observação, veja o seguinte exemplo, (BARROS; BASSANEZI, 2015).

Exemplo 1.1 Considere o conjunto dos números naturais pares, isto é, $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$. A função característica de P é dada por:

$$\chi_P(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é par} \\ 0, & \text{caso o contrário.} \end{cases}$$

Como o contra domínio de χ_P está contido em $[0, 1]$ pode-se ver P como um conjunto fuzzy em que a função de pertinência é sua própria função característica. Isso é possível pois todo número natural ou é par, ou é ímpar.

Outros exemplos de conjuntos fuzzy.

Exemplo 1.2 Segundo o canal de televisão (CNN, 2020), os dez países com os maiores índices de desenvolvimento humano (IDH) em 2019 foram Noruega, Suíça, Irlanda, Hong Kong, Islândia, Alemanha, Suécia, Austrália, Holanda e Dinamarca. O IDH é um índice que varia entre 0 e 1, os IDH dos países citados constam na Tabela 1.1.

Países	IDH
Noruega	0,957
Suíça	0,955
Irlanda	0,955
Hong Kong	0,949
Islândia	0,949
Alemanha	0,947
Suécia	0,945
Austrália	0,944
Holanda	0,944
Dinamarca	0,940

Tabela 1.1: Países e seus respectivos IDH.

Assim, o conjunto dos países com maior IDH pode ser representado como um conjunto fuzzy da seguinte forma:

$$A = \{(Noruega; 0, 957), (Suíça; 0, 955), (Irlanda; 0, 955), (Hong Kong; 0, 949), (Islândia; 0, 949), (Alemanha; 0, 947), (Suécia; 0, 945), (Holanda; 0, 944), (Dinamarca; 0, 940)\}.$$

Exemplo 1.3 O conjunto fuzzy A dos IDH dos países próximos de $0,5$ pode ser caracterizado por uma função de pertinência $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Essa função pode ser definida de diversas formas, como por exemplo, μ_{1_A} , μ_{2_A} e μ_{3_A} .

$$\mu_{1_A}(x) = \begin{cases} 10x - 4, & \text{se } x \in [0, 4; 0, 5) \\ -10x + 6, & \text{se } x \in [0, 5; 0, 6] \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad \mu_{2_A}(x) = \begin{cases} 10x - 3, & \text{se } x \in [0, 3; 0, 4) \\ 1, & \text{se } x \in [0, 4; 0, 6) \\ -10x + 7, & \text{se } x \in [0, 6; 0, 7] \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$\mu_{3_A}(x) = e^{-\frac{(x - 0,5)^2}{0,05^2}}$$

que estão representadas nas Figuras 1.1, 1.2 e 1.3.

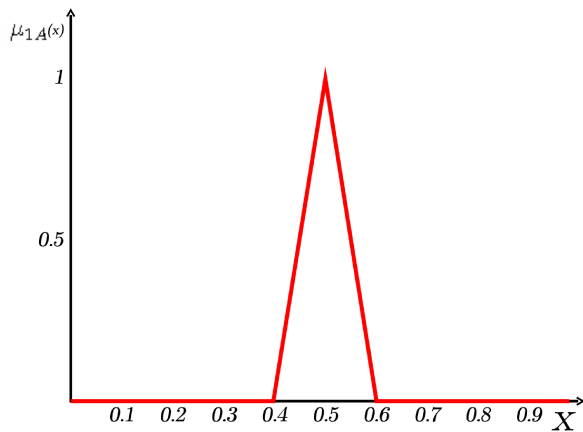


Figura 1.1: Função μ_{1_A} .

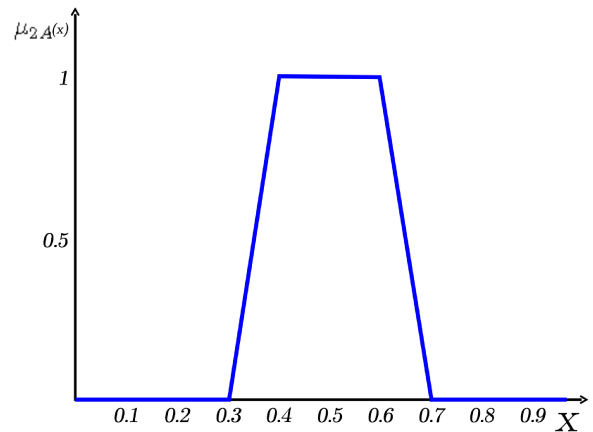


Figura 1.2: Função μ_{2_A} .

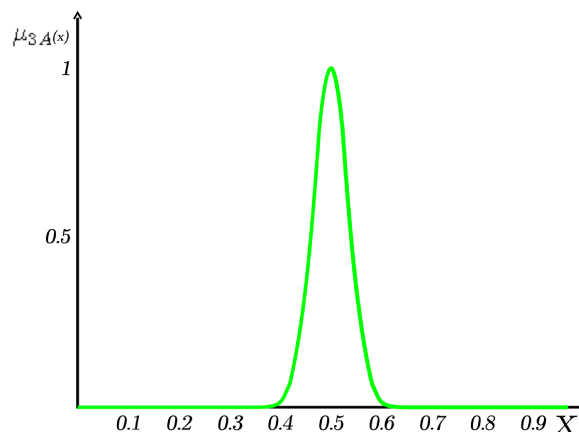


Figura 1.3: Função μ_{3_A} .

Assim, qualquer uma destas três funções de pertinência pode ser uma representação do conjunto fuzzy A , dos países com IDH próximo de $0,5$. Porém, cada uma destas funções produz conjuntos fuzzy distintos. Por esse motivo, a função de pertinência que irá representar um conjunto pode ser escolhida de modo conveniente para o problema em questão.

1.3 Operações com Conjuntos Fuzzy

Para os conjuntos clássicos pode-se definir as operações de união, intersecção e complementar utilizando suas funções características. Os conjuntos clássicos:

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

tem como funções característica:

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$$

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$$

$$\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x),$$

respectivamente. Assim, como na teoria clássica de conjuntos, essas operações também existem na teoria de conjuntos fuzzy e são definidas através de funções de pertinência. A seguir essas operações são apresentadas.

Definição 1.3 *Sejam A e B conjuntos fuzzy, Figura 1.4. Os conjuntos fuzzy $A \cup B$, $A \cap B$ e A^c são caracterizados respectivamente pelas seguintes funções de pertinência:*

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x),$$

que estão representadas nas Figuras 1.5, 1.6 e 1.7.

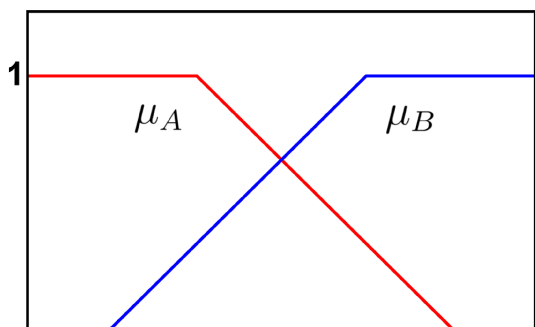


Figura 1.4: Funções μ_A e μ_B .

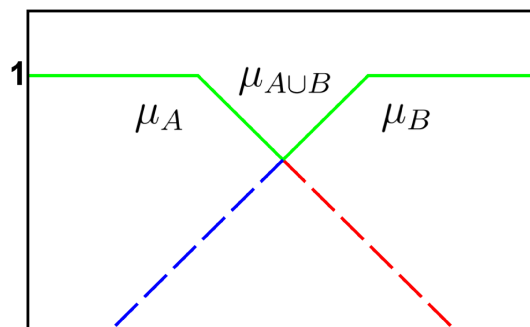


Figura 1.5: Função $\mu_A \cup \mu_B$.

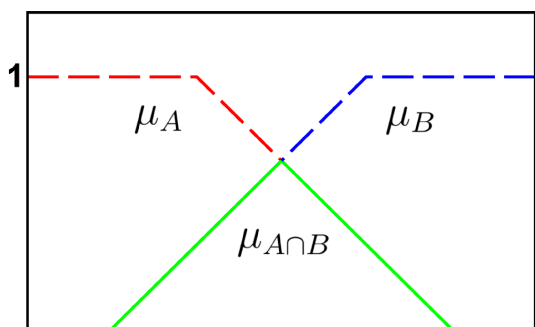


Figura 1.6: Função $\mu_A \cap \mu_B$.

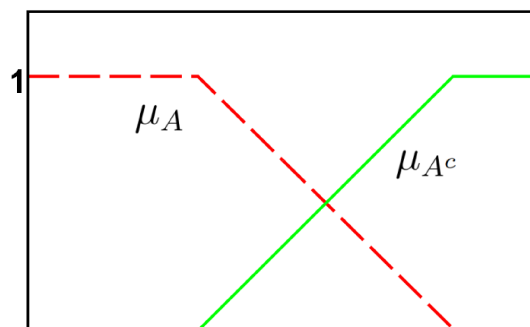


Figura 1.7: Função μ_{A^c} .

1.4 Normas triangulares

A seguir, os conceitos de normas triangulares são definidos, conforme a referência (KLIR; YUAN, 1995).

Definição 1.4 Uma co-norma triangular (*s-norma*) é uma operação binária $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, denotada por $s(x, y) = xsy$, com as seguintes propriedades:

- (a) Comutativa: $xsy = ysx$;
- (b) Associativa: $xs(ysz) = (xsy)sz$;
- (c) Monótona: Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $xsw \leq ysz$;
- (d) Condições de Fronteira: $xs0 = x$ e $xs1 = 1$.

A seguir alguns exemplos de s-normas que são frequentemente usadas.

Exemplo 1.4 .

1. União Padrão: $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, onde $xsy = \max(x, y)$, Figura 1.8;
2. Soma Algébrica: $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, onde $xsy = x + y - xy$, Figura 1.9;
3. Soma Limitada: $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, onde $xsy = \min(1, x + y)$, Figura 1.10;

4. União Drástica: $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, onde $xsy = \begin{cases} x, & \text{se } y = 0 \\ y, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$ Figura 1.11.

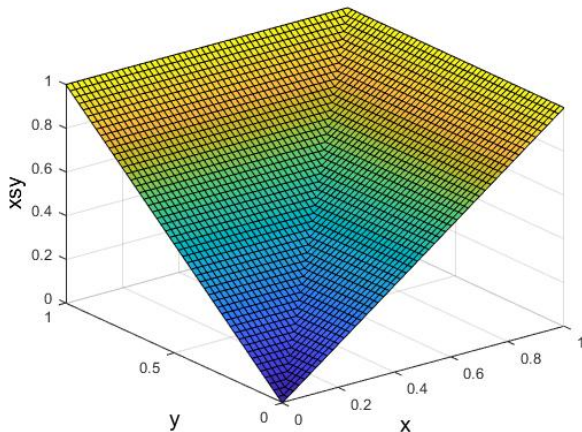


Figura 1.8: União padrão.

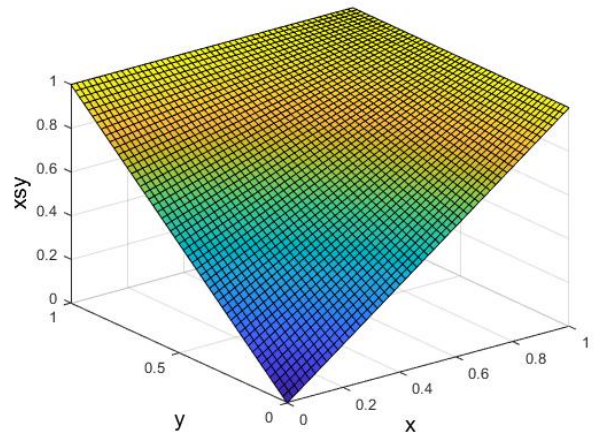


Figura 1.9: Soma algébrica.

Definição 1.5 Uma norma triangular (*t-norma*) é uma operação binária $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, denotada por $t(x, y) = xty$, com as seguintes propriedades:

- (a) Comutativa: $xty = ytx$;
- (b) Associativa: $xt(ytz) = (xty)tz$;
- (c) Monótona: Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $xtw \leq ytz$;

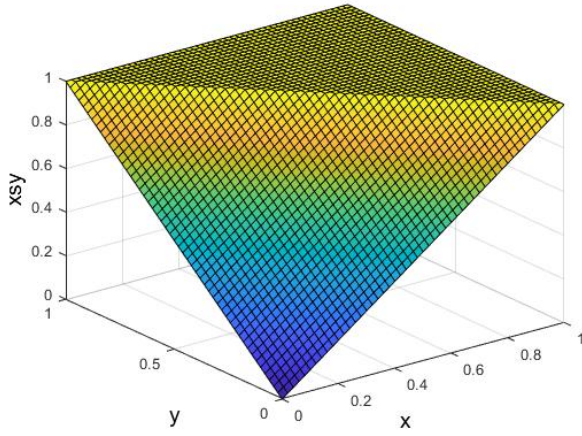


Figura 1.10: Soma limitada.

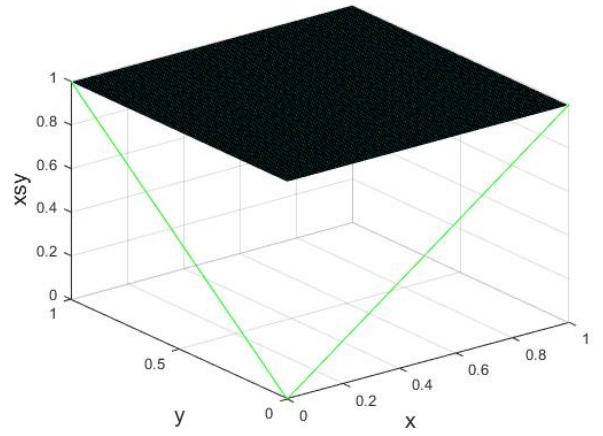


Figura 1.11: União drástica.

(d) Condições de Fronteira: $xt_0 = 0$ e $xt_1 = x$.

Alguns exemplos de t-normas clássicas são exibidos.

Exemplo 1.5 .

1. *Intersecção Padrão:* $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, onde $xty = \min(x, y)$, Figura 1.12;
2. *Produto Algébrico:* $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, onde $xty = xy$, Figura 1.13;
3. *Diferença Limitada:* $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, onde $xty = \max(0, x + y - 1)$, Figura 1.14;

4. *Intersecção Drástica:* $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, onde $xty = \begin{cases} x, & \text{se } y = 1 \\ y, & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$

Figura 1.15.

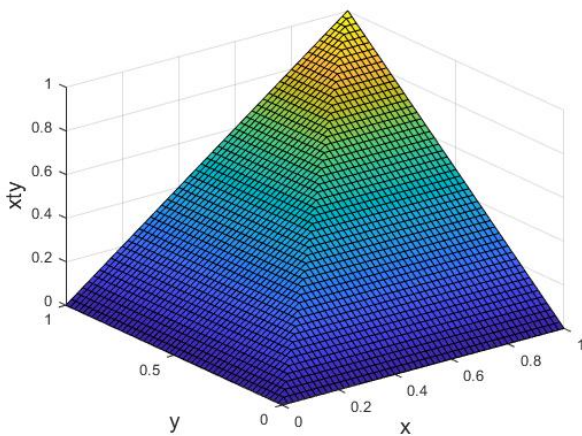


Figura 1.12: Intersecção padrão.

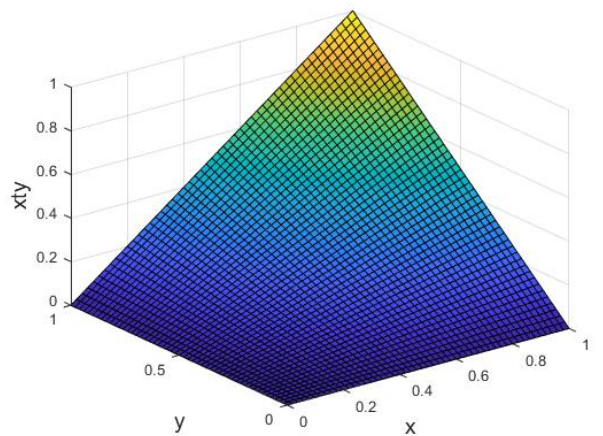


Figura 1.13: Produto algébrico.

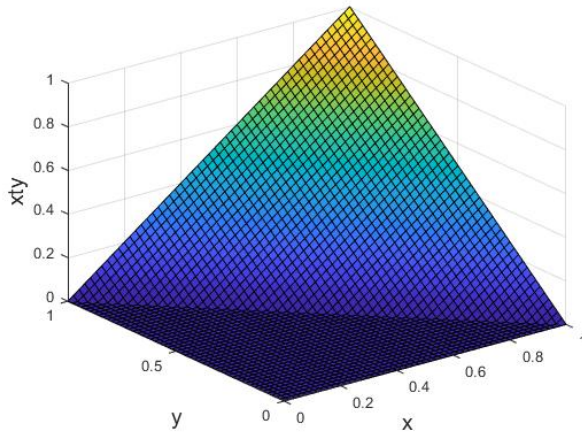


Figura 1.14: Diferença limitada.

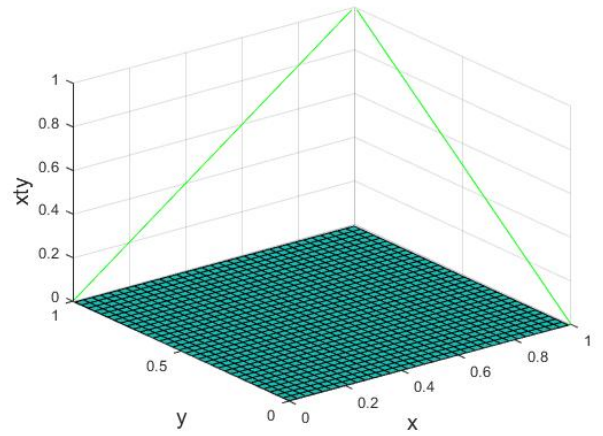


Figura 1.15: Intersecção drástica.

1.5 α -Níveis de um Conjunto Fuzzy

Nessa seção é apresentado o conceito de α -nível, importante na teoria em estudo.

Definição 1.6 *Sejam U um conjunto universo, $A \subset U$ um conjunto Fuzzy e $\alpha \in [0, 1]$. O α -nível de A em U é definido por:*

$$[A]^\alpha = \{x \in U; \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Definição 1.7 *Sejam U um conjunto universo e $A \subset U$ um conjunto Fuzzy. O suporte de A é o seguinte conjunto:*

$$\text{supp}(A) = \{x \in U; \mu_A(x) > 0\}.$$

As definições anteriores nos permitem definir o nível zero de um conjunto fuzzy da seguinte forma.

Definição 1.8 *Sejam U um espaço topológico e $A \subset U$ um conjunto fuzzy. O nível zero de A é o fecho topológico do suporte de A , ou seja,*

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)}.$$

1.6 Números Fuzzy

Os números fuzzy são uma subclasse dos conjuntos fuzzy que é utilizada em muitas aplicações. Posteriormente, esses conjuntos nos permitirão definir algumas operações.

Definição 1.9 *Um conjunto fuzzy A é chamado de número fuzzy se seu conjunto universo for o conjunto os números reais e satisfaz as seguintes condições:*

- (a) A é normal, isto é, existe $x_0 \in U$ tal que $\mu_A(x_0) = 1$;
- (b) $[A]^\alpha$ é um intervalo fechado para todo $\alpha \in (0, 1]$;
- (c) O suporte de A é limitado.

Definição 1.10 Um número fuzzy A é dito triangular se sua função de pertinência é da forma:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{se } b \leq x \leq c \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$. O gráfico da função de pertinência de um número fuzzy triangular forma um triângulo com o eixo x , tendo como base o intervalo $[a, c]$ e, como único vértice fora do eixo x , o ponto $(b, 1)$. Um conjunto fuzzy triangular pode ser denotador pela terna ordenada (a, b, c) .

Definição 1.11 Um número fuzzy A é dito trapezoidal se sua função de pertinência é da forma:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{se } c < x \leq d \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. O gráfico da função de pertinência de um número fuzzy trapezoidal forma um trapézio com o eixo x , tendo como base maior o intervalo $[a, d]$ e, com dois vértices fora do eixo x , o ponto $(b, 1)$ e o ponto $(c, 1)$. Um conjunto fuzzy trapezoidal pode ser denotado por (a, b, c, d) .

Definição 1.12 Um número fuzzy A é dito gaussiano se sua função de pertinência é da forma:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-c)^2}{\delta^2}}, & \text{se } c - \delta \leq x \leq c + \delta \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $c, \delta \in \mathbb{R}$ são o centro e a largura da função, respectivamente.

Exemplo 1.6 Os conjuntos fuzzy apresentados no Exemplo 1.3 pelas funções μ_{1A} , μ_{2A} e μ_{3A} são números fuzzy triangular, trapezoidal e gaussiano, respectivamente.

1.7 O Princípio de Extensão de Zadeh

O princípio de extensão de Zadeh é uma ferramenta de extrema importância dentro da teoria dos conjuntos fuzzy. Através deste princípio é possível obter um conjunto fuzzy a partir de um conjunto fuzzy previamente dado e uma função entre seus universos de definição.

Definição 1.13 Sejam $f : X \rightarrow Z$ uma função e A um subconjunto fuzzy de X . A extensão de Zadeh de f é a função \widehat{f} que, aplicada a A , fornece o subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A)$ de Z , cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{\widehat{f}(A)}(x) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \mu_A(x), & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

em que $f^{-1}(z) = \{x \in X \mid f(x) = z\}$. Conforme ilustrado na Figura 1.16.

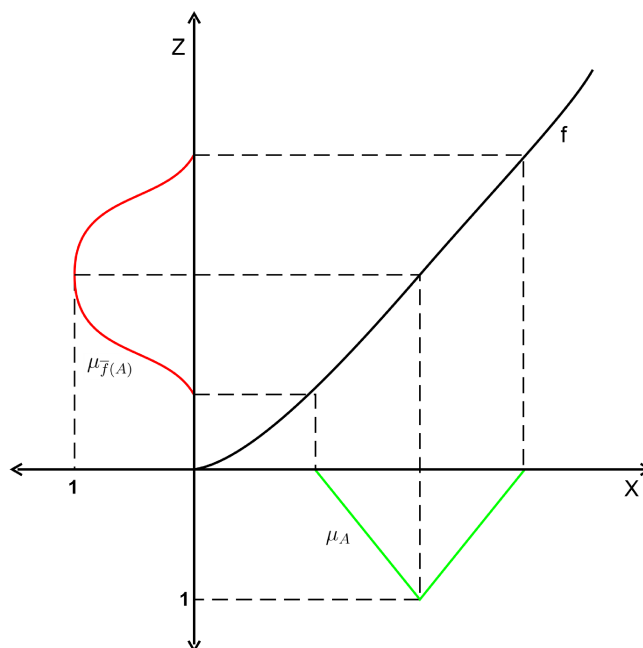


Figura 1.16: Princípio da extensão de Zadeh.

1.8 Operações Aritméticas com Números Fuzzy

Definição 1.14 *Sejam $A, B \subset U$ dois números fuzzy e $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *A soma entre os números fuzzy A e B é o número fuzzy $A + B$, cuja função de pertinência é:*

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

em que $\phi(z) = \{(x, y) \mid x + y = z\}$.

2. *A diferença entre os números fuzzy A e B é o número fuzzy $A - B$, cuja função de pertinência é:*

$$\mu_{A-B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

em que $\phi(z) = \{(x, y) \mid x - y = z\}$.

3. *A multiplicação entre os números fuzzy A e B é o número fuzzy $A \cdot B$, cuja função de pertinência é:*

$$\mu_{A \cdot B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

em que $\phi(z) = \{(x, y) \mid xy = z\}$.

4. *A divisão do número fuzzy A pelo número fuzzy B , se $0 \notin \text{supp}(B)$ é o número fuzzy A/B , cuja função de pertinência é:*

$$\mu_{A/B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

em que $\phi(z) = \{(x, y) \mid x/y = z\}$.

5. *A multiplicação de um escalar λ pelo número fuzzy A é o número fuzzy λA , cuja função de pertinência é:*

$$\mu_{\lambda A}(z) = \begin{cases} \mu_A(\phi(z)), & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(z), & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$$

em que $\chi_{\{0\}}$ é a função característica de $\{0\}$ e $\phi(z) = \lambda^{-1}z$.

Através dos α -níveis é possível realizar estas operações de modo mais prático, exibidas a seguir.

Proposição 1.1 *Sejam A e B números fuzzy com α -níveis dados, respectivamente, por $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[B]^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então valem as seguintes propriedades:*

1. *A soma entre os números fuzzy A e B é o número fuzzy $A + B$, cujo o α -nível é:*

$$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha].$$

2. *A diferença entre os números fuzzy A e B é o número fuzzy $A - B$, cujo o α -nível é:*

$$[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha].$$

3. *A multiplicação entre os números fuzzy A e B é o número fuzzy $A \cdot B$, cujo o α -nível é:*

$$[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha = [\min P, \max P],$$

em que $P = \{a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha\}$.

4. *A divisão do número fuzzy A pelo número fuzzy B , se $0 \notin \text{supp}(B)$ é o número fuzzy A/B , cujo o α -nível é:*

$$\left[\frac{A}{B} \right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \left[\frac{1}{b_2^\alpha}, \frac{1}{b_1^\alpha} \right].$$

5. *A multiplicação de λ pelo números fuzzy A é o número fuzzy λA , cujo o α -nível é:*

$$[\lambda A]^\alpha = \lambda [A]^\alpha \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha, \lambda a_2^\alpha] & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha, \lambda a_1^\alpha] & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

1.9 Variáveis Linguísticas

Através das variáveis linguísticas é possível traduzir dados e informações matemáticas para expressões da linguagem humana. As variáveis linguísticas são substantivos, enquanto seus valores podem ser considerados adjetivos.

Definição 1.15 *Uma variável linguística é uma variável cujo valor é expresso qualitativamente por um termo linguístico e quantitativamente por sua função de pertinência. Desta forma, a variável linguística é composta por uma variável simbólica e por um valor numérico.*

Exemplo 1.7 *Considere a variável linguística IDH, que assume valores no intervalo $[0, 1]$, e os termos linguísticos: Baixo, Médio e Alto. Estes valores são descritos através de conjuntos fuzzy, conforme a Figura 1.17.*

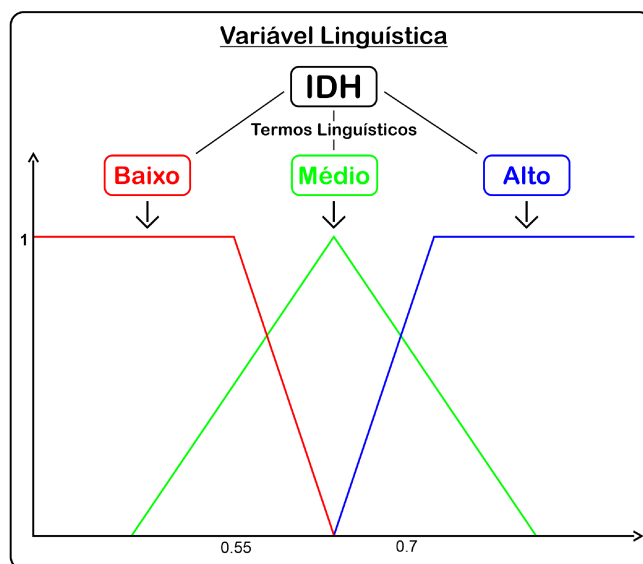


Figura 1.17: Variável Linguística.

1.10 Sistema Baseado em Regras Fuzzy

Os SBRFs são amplamente utilizados em problemas de modelagem, controle e classificação, tais sistemas podem ser vistos como um mapeamento entre a entrada e a saída na forma $y = f(x)$, em que $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$, veja Figura 1.18.

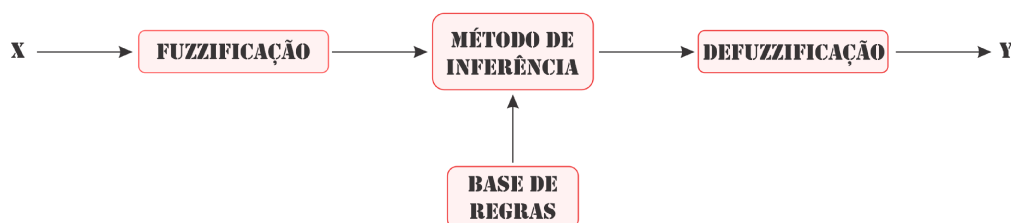


Figura 1.18: Sistema Baseado em Regras Fuzzy.

Um SBRF é composto por quatro módulos, os quais são detalhados a seguir:

1. **Módulo de Fuzzificação:** transforma as componentes de entrada em conjuntos fuzzy em seus respectivos domínios. Muitas vezes é necessário um especialista da área do fenômeno a ser modelado para auxiliar na construção das funções pertinência das entradas e saídas.
2. **Módulo da Base de Regras:** composta por uma coleção de proposições do tipo “Se condição, então ação”, em que a “condição” e a “ação” podem ser descritas linguisticamente com o conhecimento do especialista da área. Ou seja, cada proposição é da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Se} & x_1 \text{ é } A_1 \text{ e } x_2 \text{ é } A_2 \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_n \\ \text{Então} & y_1 \text{ é } B_1 \text{ e } y_2 \text{ é } B_2 \text{ e } \dots \text{ e } y_n \text{ é } B_m \end{array}$$

em que A_1, A_2, \dots, A_n e B_1, B_2, \dots, B_m são conjuntos fuzzy relacionados às variáveis linguísticas de entrada e saída, respectivamente.

3. **Módulo de Inferência Fuzzy:** neste módulo cada regra fuzzy é “traduzida” matematicamente por meio de técnicas fuzzy. No módulo de inferência que são escolhidas as

t-normas, as s-normas e as regras de inferência que são utilizadas para definir a relação fuzzy que modela a base de regras. Esse módulo é de extrema importância para o funcionamento do sistema, uma vez que este fornecerá a saída fuzzy a partir de cada entrada fuzzy e da relação definida pela base de regras.

- **Método de Inferência de Mamdani:** uma regra: Se (condição) então (ação), é definida pelo produto cartesiano fuzzy dos conjuntos fuzzy que compõe a condição e a ação gerada pela regra. O método de Mamdani agrupa o operador lógico OU, definido pela s-norma, e o operador E, definido pela t-norma em cada regra. Para exemplificar esse processo, considere as seguintes regras fuzzy:

Regra 1: Se x_1 é A_1 e x_2 é B_1 então y é C_1

Regra 2: Se x_1 é A_2 e x_2 é B_2 então y é C_2 .

A Figura 1.19 ilustra como uma saída y de um sistema de inferência do tipo Mamdani é gerada a partir dos valores de entrada x_1 e x_2 e a regra de composição dada pela t-norma do mínimo e a s-norma do máximo. Vale mencionar que a saída y é obtida pela defuzzificação do conjunto fuzzy de saída $C = C'_1 \cup C'_2$ da Figura 1.19.

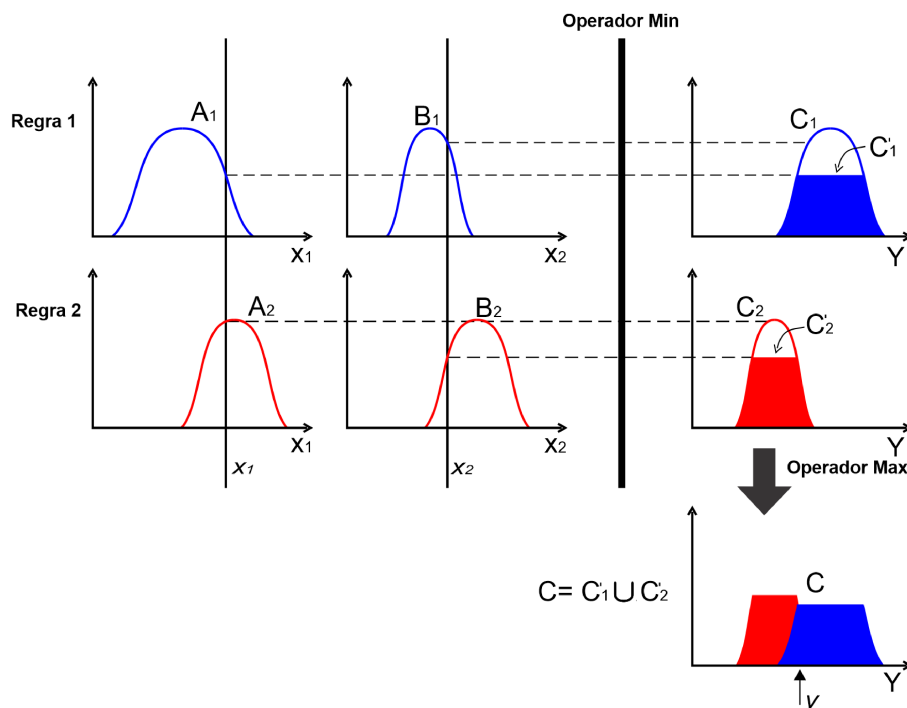


Figura 1.19: Método de inferência de Mamdani.

- **Método de Inferência de Takagi-Sugeno:** no método de Takagi-Sugeno a ação gerada por cada regra é uma função das variáveis de entrada. Um exemplo em que essa função é uma combinação linear das entradas é exibido a seguir:

Regra 1: Se x_1 é A_1 e x_2 é B_1 então $y = f_1(x_1, x_2)$

Regra 2: Se x_1 é A_2 e x_2 é B_2 então $y = f_2(x_1, x_2)$.

A Figura 1.20 ilustra como uma saída y de um sistema de inferência do tipo Takagi-Sugeno é gerada pela média ponderada das saídas de cada regra, usando-se o grau de ativação destas médias como ponderação, em que $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

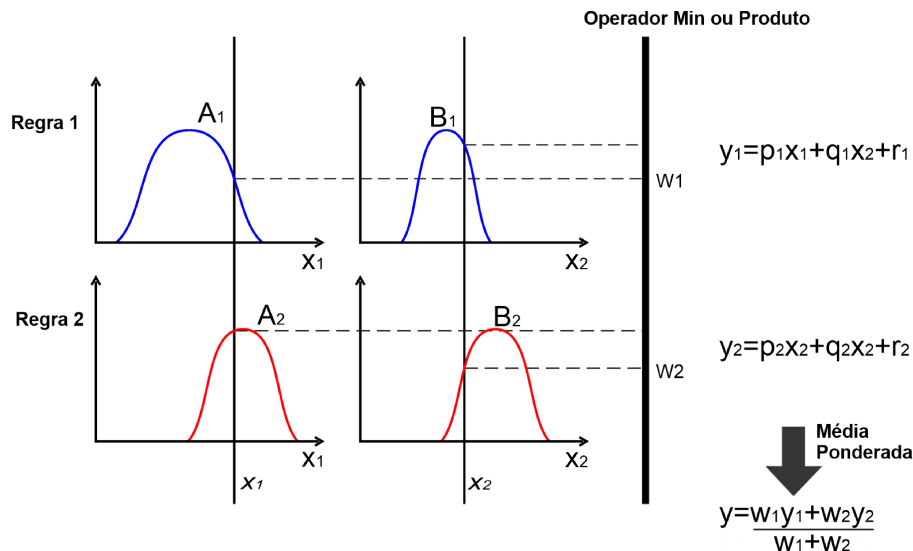


Figura 1.20: Método de inferência de Takagi-Sugeno.

4. **Módulo de Defuzzificação:** É o processo de representar um conjunto fuzzy por um número real. Geralmente, a saída gerada pelo módulo de inferência é um conjunto fuzzy, assim é necessário determinar um método para transformar esse conjunto fuzzy em um número real. Existem muitos métodos de defuzzificação, o mais comum é definido a seguir.

- **Centro de Gravidade:** esse método de defuzzificação é semelhante à média ponderada pela distribuição de dados, a diferença é que os pesos são os valores $\mu_C(y_i)$ que indicam o grau de compatibilidade do valor y_i com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy C . Para um domínio discreto, tem-se:

$$G(C) = \frac{\sum_{i=0}^n y_i \mu_C(y_i)}{\sum_{i=0}^n \mu_C(y_i)}$$

em que y_i pertence ao domínio de C .

A seguir é apresentado um exemplo de SBRF que tem como saída a recomendação de compra de fundos imobiliários.

1.11 Exemplo de SBRF: Recomendação de Compra de Fundos Imobiliários

Segundo o site da Nubank, os fundos de investimentos imobiliários (FII) são fundos focados exclusivamente em aplicações no setor imobiliário, isso inclui tanto a aquisição real de imóveis, quanto a compra de títulos relacionados a este mercado (NUBANK, 2020). Em suma, os FII reúnem pessoas interessadas em investir e gestores responsáveis por controlar e gerenciar o patrimônio dos fundos. Essa relação ocorre através da bolsa de valores, onde as cotas dos fundos podem ser negociadas pelos investidores.

Os investidores utilizam vários indicadores para realizar suas análises de investimentos em FII, atualmente existem diversos sites que fornecem esses indicadores de maneira gratuita.

Alguns dos indicadores mais conhecidos para analisar um fundo imobiliário são o *dividend yield* (DY) e o preço sobre valor patrimonial (P/VP). O objetivo é construir um SBRF utilizando o método de inferência de Mamdani que tem como variáveis de entrada DY e P/VP e como variável de saída a recomendação de compra de um Fundo Imobiliário, baseado exclusivamente nesses dois indicadores.

Observação 1.2 *Existem outros indicadores que um investidor deve levar em conta antes de tomar a decisão de realizar um investimento em FII, sendo assim, este é um exemplo ilustrativo de um SBRF.*

Segundo o site fiis.com.br:

1. **DY** é um indicador que mede a performance de um investimento de acordo com os proventos pagos aos investidores. No caso dos fundos imobiliários, este mostra a relação entre os dividendos distribuídos e o preço atual da cota de um FII (FII.COM.BR, 2021a).
2. **P/VP** é o preço da cota de um FII dividido pelo seu valor patrimonial. Sendo o valor patrimonial de um FII o seu patrimônio líquido dividido pela quantidade de cotas que o mesmo possui no mercado (FII.COM.BR, 2021b).

Para estimar o intervalo de variação desses dois indicadores é utilizado o ranking de FII do site Funds Explorer (FUNDS.EXPLORER, 2021). Removendo alguns *outliers* é possível determinar os intervalos de variação tanto do DY quanto do P/VP, ambos geralmente variam entre zero e dois.

Os termos linguísticos e as funções de pertinência das entradas e da saída são exibidos a seguir:

1. DY - A maior parte dos FII tem um DY entre 0,6% e 0,9%. Assim, os termos linguísticos desta variável são definidos da forma: **Baixo** entre 0 e 0,6; **Médio** entre 0,45 e 1; **Alto** entre 0,75 e 2, Figura 1.21.

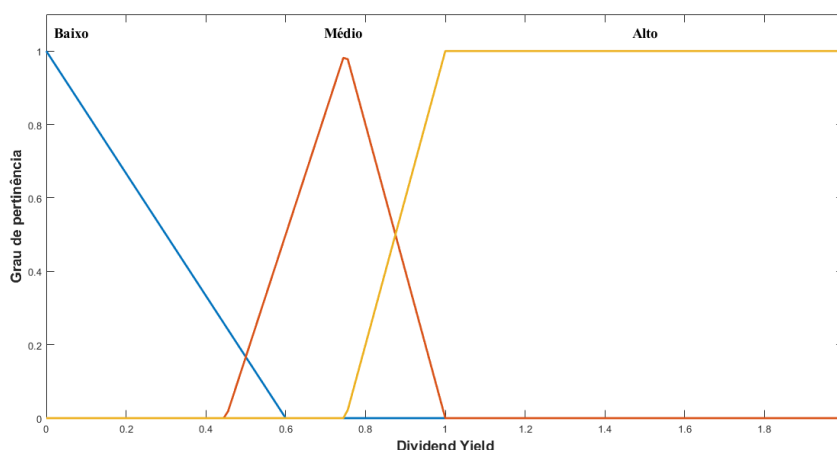


Figura 1.21: Funções de pertinência do *Dividend Yield*(DY).

2. P/VP - Um P/VP igual a 1 significa que o FII está sendo negociado pelo seu valor patrimonial. Portanto, se um FII tem um P/VP maior que 1, afirma-se que o fundo está sobrevalorizado, já quando seu P/VP está abaixo de 1 dizemos que o fundo está subvalorizado. Assim, os termos linguísticos desta variável são apresentados do seguinte modo: **Muito Baixo** entre 0 e 0,8; **Baixo** entre 0,7 e 0,95; **Médio** entre 0,9 e 1,1; **Alto** entre 1 e 2, Figura 1.22.

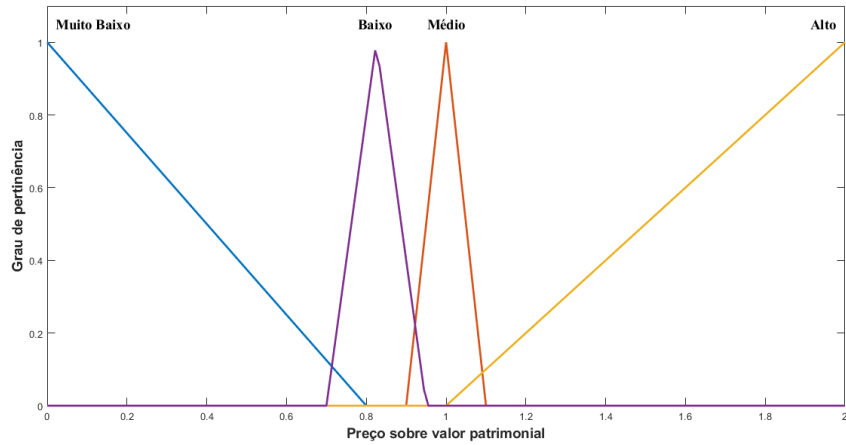


Figura 1.22: Funções de pertinência do Preço sobre o Valor Patrimonial.

3. Recomendação de Compra - A saída é definida no intervalo $[0,1]$ com os termos linguísticos: **Muito Baixa** entre 0 e 0,5; **Baixa Recomendação** entre 0,4 e 0,6; **Média Recomendação** entre 0,55 e 0,75; **Alta Recomendação** entre 0,7 e 1, Figura 1.23.

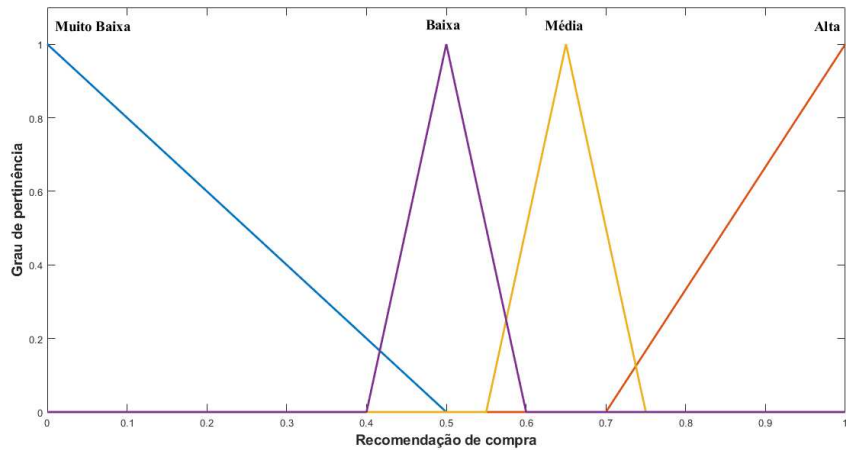


Figura 1.23: Funções de pertinência da Recomendação de Compra.

A partir daí, estabeleceu-se as regras fuzzy dadas na Tabela 1.2.

Regras	Dividend Yield	P/VP	Recomendação de compra
1	Baixo	Muito Baixo	Baixa
2	Baixo	Baixo	Baixa
3	Baixo	Médio	Muito Baixa
4	Baixo	Alto	Muito Baixa
5	Médio	Muito Baixo	Baixa
6	Médio	Baixo	Média
7	Médio	Médio	Alta
8	Médio	Alto	Muito Baixa
9	Alto	Muito Baixo	Baixa
10	Alto	Baixo	Média
11	Alto	Médio	Alta
12	Alto	Alto	Muito Baixa

Tabela 1.2: Regras fuzzy do SBRF.

Este SBRF gera a superfície apresentada na Figura 1.24.

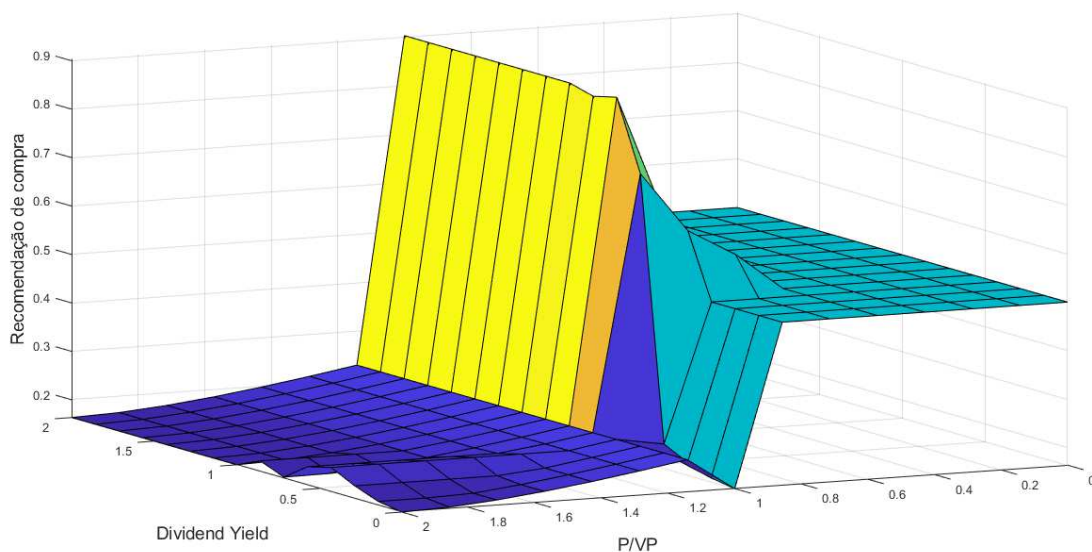


Figura 1.24: Superfície definida pelo SBRF.

Para ilustrar uma análise feita por esse SBRF, considera-se o fundo imobiliário BARI11. O BARI11 é considerado um fundo de papel, isto é, um fundo que investe no mercado imobiliário através de títulos e papéis deste mercado. Em 04/10/2020, este fundo possuía um DY de 1,09% e um P/VP de 1,03, valores retirados do ranking de FII do site Funds Explorer, FUNDS.EXPLORER. Assim, introduzindo esses valores de entrada no SBRF construído, obtém-se uma recomendação de compra de 0,833, ou seja, uma alta recomendação, veja a Figura 1.25.



Figura 1.25: Avaliação do BARI11 pelo SBRF.

É importante lembrar que existem inúmeros fatores que devem ser considerados em uma análise profunda sobre qualquer tipo de aplicação financeira, inclusive em fundos imobiliários. No caso dos FII há a vacância, a localização dos imóveis, o número de inquilinos, dentre outros. Inclusive, alguns acontecimentos podem afetar diretamente as duas variáveis utilizadas nesse exemplo de SBRF. Por exemplo, se um bom FII perde um dos seus principais inquilinos, nos meses subsequentes, o fundo provavelmente pagará menos dividendos, até que outro inquilino seja encontrado. O que fará que o DY do fundo diminua, mas não significa que o fundo tenha se tornado menos atrativo. Sendo assim, o SBRF construído se limita a ser somente um exemplo ilustrativo.

No segundo capítulo é abordado o conceito de redes neurais, bem como a fundamentação teórica das duas redes neuro-fuzzy empregadas na construção deste trabalho.

Capítulo 2

Sistemas de Inferência Fuzzy Determinados pelas Redes Neurais Artificiais

”Quando a complexidade do problema cresce, nossa habilidade para tornar as proposições precisas diminui até um limiar que está fora do nosso alcance. Isto torna a precisão e a relevância duas características excelentes” (Princípio de Zadeh).

A inteligência artificial é a ciência que permite a sistemas/máquinas a capacidade de aprender, perceber, tomar decisões e resolver problemas através da construção de instrumentos e mecanismos que apoiam a inteligência humana.

O surgimento das RNAs e da teoria dos conjuntos fuzzy marcaram o fim do século XX, o sinergismo destes mecanismos produzem sistemas impressionantes. Tais sistemas são caracterizados por uma capacidade de aprendizagem de alto nível proporcionada pelas redes neurais, que se traduz em uma alta precisão. O propósito de um sistema neuro-fuzzy é aplicar as técnicas de aprendizagem das redes neurais para identificar e ajustar os parâmetros de sistemas fuzzy.

Neste capítulo é apresentado o conceito de redes neurais artificiais e dois sistemas neuro-fuzzy, os quais são utilizados para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Redes Neurais Artificiais

Segundo Carvalho (2021), as RNAs são técnicas computacionais que apresentam um modelo matemático inspirado na estrutura neural de organismos inteligentes e que adquirem conhecimento através da experiência. Uma grande rede neural artificial pode ter centenas ou milhares de unidades de processamento; já o cérebro de um mamífero pode ter muitos bilhões de neurônios.

A Figura 2.1 representa o modelo simplificado de um único neurônio biológico. O neurônio é uma célula com núcleo e corpo, também conhecido como soma, onde reações químicas e elétricas representam o processamento de informação. A saída da informação do soma é realizada por impulsos elétricos que se propagam através do axônio. No final do axônio existem inúmeras ramificações que distribuem a informação para outros neurônios vizinhos. A ligação com outros neurônios é realizada através de sinapses que estão conectadas a um dendrite do neurônio receptor. A sinapse dispara uma substância química quando for excitada pelo impulso do axônio. A substância se transmite entre sinapse e dendrite realizando a conexão entre dois neurônios vizinhos. Conforme as excitações (ou inibições) que células vizinhas transmitem para a célula em consideração esta processa a informação novamente e a transmite via seu axônio (RAUBER, 2021).

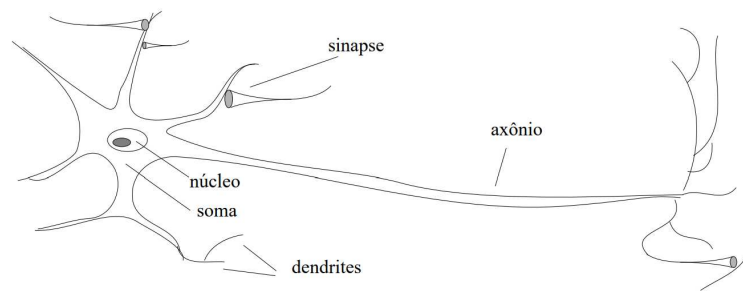


Figura 2.1: Representação de um neurônio biológico. Fonte: (RAUBER, 2021).

Rauber (2021) diz que uma RNA tem duas facetas elementares: a arquitetura e o algoritmo de aprendizagem. Essa divisão surge naturalmente pelo paradigma de como a rede é treinada. Ao contrário de um computador com arquitetura de von Neumann que é programado, a rede é treinada por exemplos de treinos. O conhecimento sobre o problema em consideração está guardado dentro dos exemplos que têm que estar obrigatoriamente disponíveis. O algoritmo de aprendizagem generaliza esses dados e memoriza o conhecimento dentro dos parâmetros adaptáveis da rede, os pesos. Assim, o construtor de um sistema baseado em RNA tem dois graus de liberdade, a definição sobre o tipo de rede para resolver o problema em consideração e o algoritmo para treinar a rede, isto é, para adaptar os pesos da rede.

Dentro da teoria dos conjuntos fuzzy, as RNAs podem fazer o trabalho de otimizar os parâmetros das funções de pertinência de um SBRF através de uma rotina de treinamento, além de construir uma base de regras consistentes para o sistema. Dessa forma, é natural pensar que a combinação entre as RNAs e a teoria dos conjuntos fuzzy é uma ferramenta de modelagem poderosa. Neste capítulo são apresentadas duas redes neuro-fuzzy artificiais que terão um papel de destaque neste trabalho, bem como a teoria necessária para entender o funcionamento destas.

2.1.1 Método dos Mínimos Quadrados

Dado um sistema linear da forma $Ax = b$, em que A é uma matriz $m \times n$, com $m \leq n$ e $b \in \mathbb{R}^m$, o método dos mínimos quadrados busca encontrar um $x \in \mathbb{R}^n$ que minimize a expressão:

$$\|r(x)\| = \|Ax - b\|.$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana. Em suma, o método dos mínimos quadrados resolve sistemas lineares minimizando a norma euclidiana do vetor residual (BURDEN; FAIRES, 2011).

Considerando um sistema linear $Ax = b$ nas hipóteses anteriores, a matriz A pode ser vista como uma função linear de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Assim, todo vetor v contido na imagem de A pode ser escrito como combinação linear de A e um vetor $x \in \mathbb{R}^n$, isto é, $v = Ax$. Além disso, como $b \in \mathbb{R}^m$ a norma euclidiana $\|Ax - b\|$ é a distância entre os pontos b e Ax , conforme ilustrado na Figura 2.2. Daí, pode-se projetar o vetor b na imagem de A obtendo um vetor $u \in \text{Im}(A)$, e portanto, existe um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $u = Ax$. Esse vetor x é a solução do sistema pelo método dos mínimos quadrados.

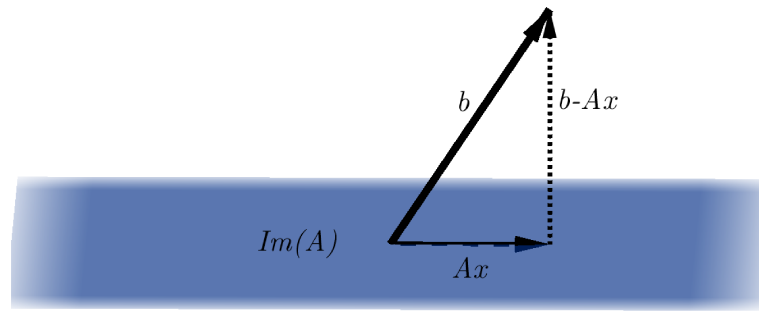


Figura 2.2: Interpretação geométrica do método dos mínimos quadrados.

2.1.2 Método do Gradiente Descendente

Dados dois vetores y e y_e como sendo os valores reais de uma variável e os valores estimados, respectivamente. O erro quadrático médio entre os valores y e y_e é dado por:

$$E = \frac{1}{2}(y_e - y)^2.$$

Se considerarmos que $y_e = g(a, b)$, onde a, b são dois parâmetros ajustáveis, então E é caracterizado por um parabolóide, conforme a Figura 2.3. O método do gradiente descendente consiste em procurar o ponto de mínimo deste parabolóide, encontrando assim valores de a e b de modo que E seja minimizado (FACURE, 2017).

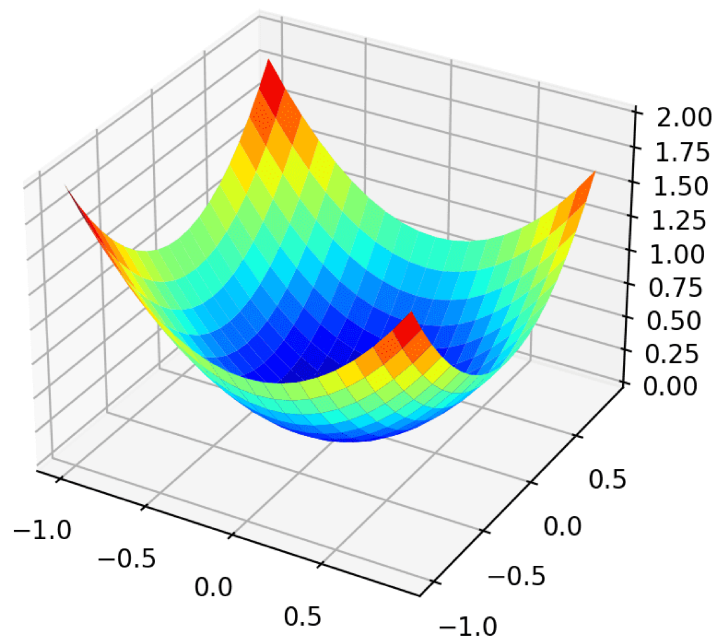


Figura 2.3: Parabolóide caracterizado pelo erro quadrático médio.

As correções dos parâmetros a e b são calculadas por:

$$a_j = a_{j-1} - \alpha \frac{\partial E}{\partial a}, \quad \text{e} \quad b_j = b_{j-1} - \alpha \frac{\partial E}{\partial b}, \quad (2.1)$$

em que $\alpha > 0$ é a taxa de aprendizagem do algoritmo, j é o número de iterações do método e:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial y_e} \cdot \frac{\partial y_e}{\partial a}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \frac{\partial E}{\partial y_e} \cdot \frac{\partial y_e}{\partial b}. \quad (2.3)$$

A seguir é apresentado um exemplo onde este método é aplicado.

2.1.3 Exemplo do Método Gradiente Descendente

Para ilustrar o funcionamento do método do gradiente descendente, é utilizado o software (R Core Team, 2020) para gerar 200 dados com valores de x_g e y_g satisfazendo $y_g = ax_g + b + \epsilon$, em que ϵ é um valor tomado aleatoriamente no intervalo $[-1, 1]$. Esses dados estão representados na Figura 2.4. O objetivo deste exemplo é encontrar parâmetros a e b através do método do gradiente descendente, de modo que a reta $y = ax + b$ se encaixe de maneira ótima nos dados. Para isso, considere a função $y = g(a, b) = ax + b$, o erro para os valores de y_g em relação a reta y é dado por:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{200} \frac{(y - y_{g_i})^2}{200} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{200} \frac{(ax_{g_i} + b - y_{g_i})^2}{200}.$$

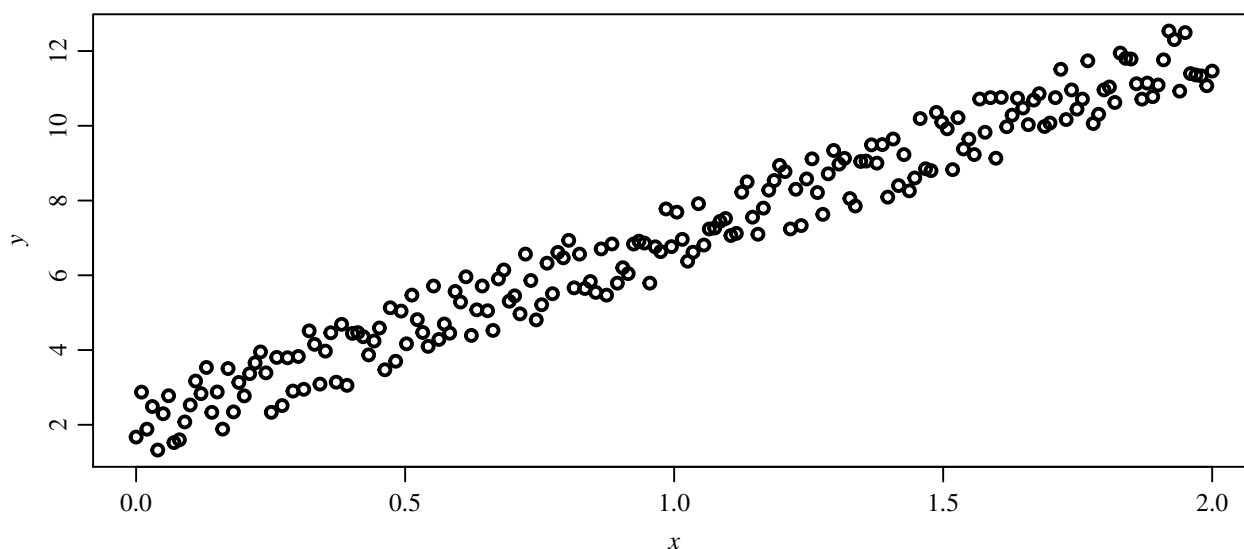


Figura 2.4: Valores de x_g e y_g gerados pelo software (R Core Team, 2020).

Para realizar as correções dos parâmetros a e b , o método utiliza as derivadas parciais de E com relação a a e b .

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial a}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial b}. \quad (2.5)$$

Substituindo os valores do exemplo nas equações (2.4) e (2.5), temos que:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^{200} \frac{(y - y_{g_i})x_{g_i}}{200}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^{200} \frac{(y - y_{g_i})}{200}. \quad (2.7)$$

Além das derivadas parciais, o método também necessita de um valor para a taxa de aprendizagem do modelo, α , para realizar as correções nos parâmetros. Neste caso é utilizado $\alpha = 0,1$. Assim, as correções nos parâmetros são realizadas por meio das equações (2.8) e (2.9) em que o valor de α determina o tamanho do passo em direção ao mínimo da função E e N é o número de iterações do método.

$$a_j = a_{j-1} - \alpha \frac{\partial E(a_{j-1})}{\partial a}, \quad (2.8)$$

$$b_j = b_{j-1} - \alpha \frac{\partial E(b_{j-1})}{\partial b}, \quad (2.9)$$

com $j = 1, \dots, N$. Para a inicialização do método também é necessário um chute inicial, neste caso os valores iniciais são $a_0 = 1$ e $b_0 = 5$. Gerando assim a reta $y_0 = a_0x + b_0$ que está representada em azul na Figura 2.5.

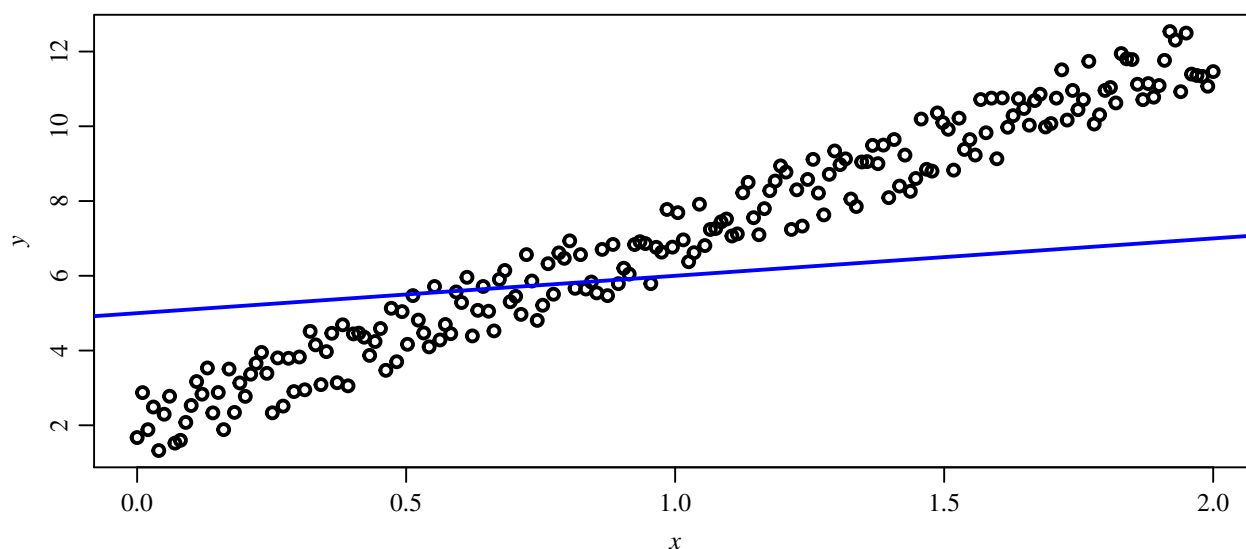


Figura 2.5: Configuração da reta gerada pelo chute inicial em comparação com os dados.

Por meio das equações (2.8) e (2.9) e dos valores iniciais de a e b , construiu-se uma rotina no software (R Core Team, 2020), que ao final de 1000 iterações gerou a Figura 2.6. Nessa figura, a reta azul corresponde ao chute inicial, em verde as retas geradas pelas iterações do método e em vermelho a reta final, gerada após 1000 iterações.

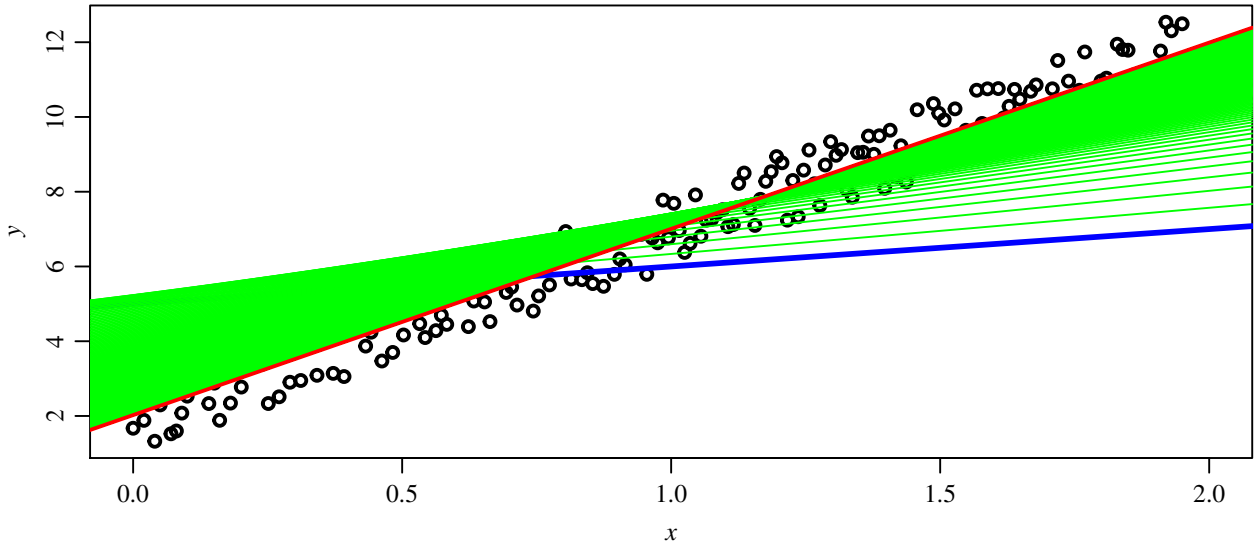


Figura 2.6: Retas geradas pelos parâmetros obtidos pelo método após cada iteração.

Na última iteração o software encontrou os valores de $a_{1000} = 4,982793$ e $b_{1000} = 2,024088$ gerando um erro de aproximadamente $E = 1,05 \times 10^{-2}$.

Nas próximas seções são apresentadas as duas redes neuro-fuzzy utilizadas no desenvolvimento deste trabalho, o ANFIS e o HyFIS. Para as explicações referentes ao HyFIS utilizou-se como base a referência (KIM; KASABOV, 1999).

2.2 HYFIS

O *Hybrid Neural Fuzzy Inference System* (HyFIS) é um sistema de inferência neuro-fuzzy que conta com uma rede neural de cinco camadas, onde cada uma destas camadas realiza uma etapa do processo que resulta na construção de um SBRF com o método de inferência de Mamdani. A arquitetura do HyFIS está representada na Figura 2.7, em que P e G representam os termos linguísticos das duas entradas e da saída, respectivamente, e $R1, \dots, R4$ as regras fuzzy.

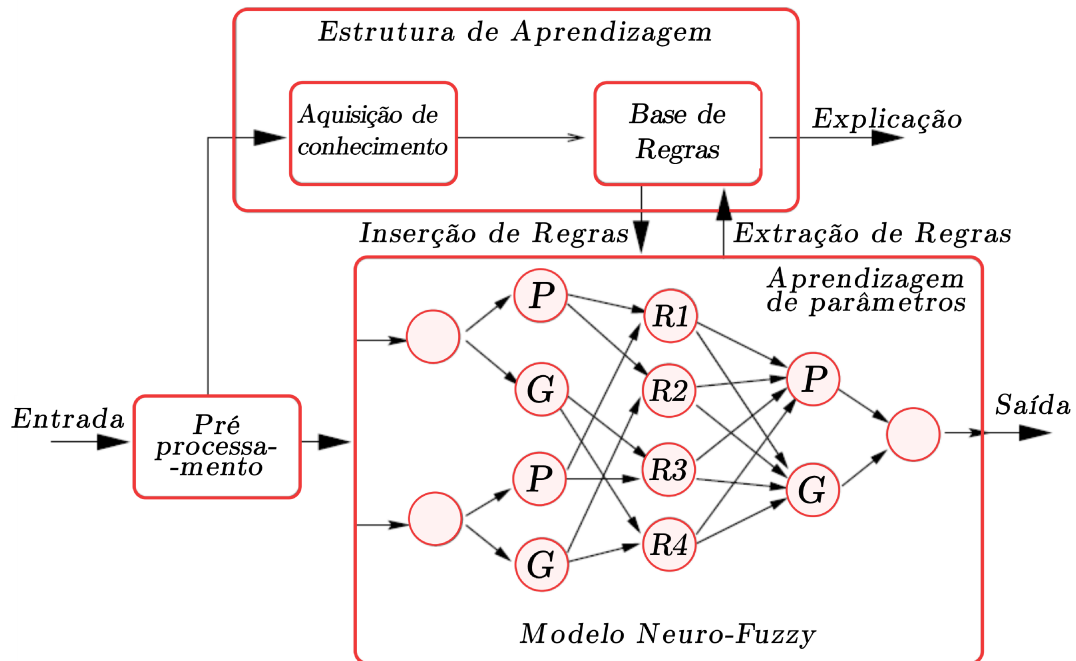


Figura 2.7: Arquitetura do HyFIS. Fonte: (KIM; KASABOV, 1999).

O HyFIS possui um módulo de aprendizagem em duas fases. Na primeira etapa do módulo de aprendizagem temos a “aprendizagem estrutural”, onde ocorre a construção das regras fuzzy através das técnicas fuzzy propostas por Wang e Mendel (1992). Na segunda etapa é onde ocorre a “aprendizagem de parâmetros”, é nela que as funções de pertinência do sistema são ajustadas através do método do gradiente descendente. Nas próximas seções é abordado com detalhes as funções de cada camada da rede neural e o funcionamento do módulo de aprendizagem. Para facilitar o entendimento do HyFIS na Figura 2.8 temos a estrutura do modelo neuro-fuzzy do HyFIS apresentada com apenas duas entradas (x_1) e (x_2) e uma saída (y).

2.2.1 Arquitetura do Modelo Neuro-fuzzy do HyFIS

Como mencionado anteriormente, o modelo neuro-fuzzy do HyFIS possui uma rede neural multicamadas, conforme a Figura 2.7. Antes de explicar cada camada é importante mencionar que neste trabalho, todas as funções de pertinência usadas são funções gaussianas definidas da seguinte forma:

$$\mu_A(x) = e^{-((x-c)^2/\sigma^2)}, \quad (2.10)$$

em que c representa o centro da função e σ determina sua largura. São utilizados os índices, i, j, k e l para representar os nós das camadas 2, 3, 4 e 5, respectivamente. A saída do n ésimo nó da camada (m) é denotada por $y_n^{(m)}$.

Camada 1

Os nós desta camada apenas transmitem os valores de cada entrada para a próxima camada. É importante observar que cada nó se conecta apenas aos nós da camada 2 que representam os termos linguísticos (P, M e G) das respectivas entradas.

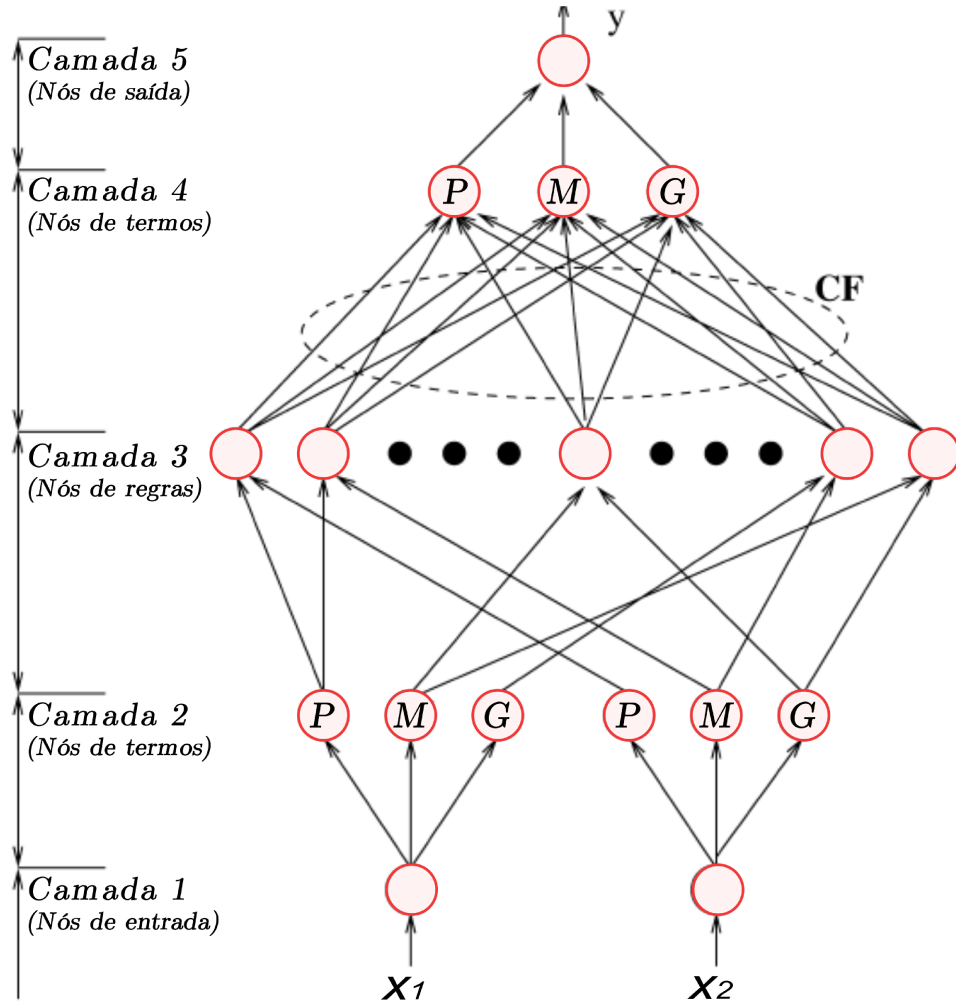


Figura 2.8: Estrutura do modelo neuro-fuzzy do HyFIS. Fonte: (KIM; KASABOV, 1999).

Camada 2

Os nós desta camada atuam como funções de pertinência para representar os termos linguísticos das variáveis de entrada. Uma vez que os valores de entrada chegam nessa camada, seus graus de pertinência são calculados através de funções de pertinência gaussianas. Inicialmente, os pesos de conexão nesta camada são unitários e as funções de pertinência são igualmente espaçadas sobre o domínio das entradas. Assim, a saída de cada nó desta camada são as imagens das entradas pelas funções de pertinência fornecidas com a equação (2.10). Os valores dos parâmetros c e σ mudam devido ao processo de aprendizagem, com isso, as funções de pertinência variam.

Camada 3

Cada nó da camada 3 representa a parte “SE” (condição) de uma regra fuzzy. Assim, os nós nesta camada executam a operação “E” definida por uma t-norma (neste caso é utilizada a t-norma do mínimo), formando os componentes antecedentes da base de regras fuzzy. Logo, as funções dos nós desta camada são:

$$y_j^{(3)} = \min_{i \in I_j} y_i^{(2)}$$

em que I_j é o conjunto de índices dos nós na camada 2 que estão conectados ao nó j na camada 3 e $y_i^{(2)}$ é a saída do nó i na camada 2.

Camada 4

Os nós da camada 4 representam a parte “ENTÃO” (ação) de uma regra fuzzy, e cada nó desta camada realiza a operação fuzzy “OU” para integrar os componentes consequentes da base de regras que conduzem aos mesmos termos linguísticos de saída.

Dessa forma, os nós das camadas 3 e 4 são totalmente conectados. Nesta camada, as conexões definem as consequências de cada regras fuzzy, logo, cada nó representa um termo linguístico da variável de saída.

Os pesos de conexão w_{kj} que conectam os nós k na camada 4 aos nós j na camada 3 representam conceitualmente os fatores de certeza (CF) das regras fuzzy correspondentes ao inferir valores de saída fuzzy. Esses pesos que conectam as camadas 3 e 4 são inicialmente tomados aleatoriamente no intervalo $[-1, 1]$. As funções desta camada são expressas como:

$$y_j^{(4)} = \max_{j \in I_k} (y_j^{(3)} w_{kj}^{(2)})$$

em que I_k é o conjunto de índices dos nós da camada 3 que são conectados ao nó k na camada 4.

Camada 5

Essa camada representa as variáveis de saída do sistema. Esses nós e as conexões anexadas a eles atuam como um defuzzificador. Logo, um nó nesta camada calcula um valor de saída real, nesta camada utiliza-se o método do Centro de Gravidade (COG). Assim, as funções dos nós desta camada são:

$$y_l^{(5)} = \frac{\sum_{k \in I_l} y_k^{(4)} \sigma_{lk} c_{lk}}{\sum_{k \in I_k} y_k^{(4)} \sigma_k} \quad (2.11)$$

em que I_l é o conjunto de índices dos nós na camada 4 que são conectados ao nó l na camada 5 e σ_{lk} e c_{lk} são os parâmetros da função de pertinência do termo linguístico representado por k na camada 4. Os pesos das conexões entre as camadas 5 e 4 são unitários, assim, os únicos pesos ajustáveis na rede são os w_{kj} entre as camadas 3 e 4.

2.2.2 O Algoritmo de Aprendizagem Híbrido

Nessa subseção, é apresentado o sistema de aprendizagem híbrido de duas fases do HyFIS. Na fase 1, tem-se a fase de obtenção de regras, onde técnicas fuzzy são utilizadas para a construção destas regras. Na fase 2 é realizado um aprendizado supervisionado baseado no método do gradiente descendente, que é usado para ajustar os parâmetros as funções de pertinência de forma otimizada. Para iniciar o sistema de aprendizagem, o domínio de variação de cada variável de entrada e saída deve ser fornecido.

Fase 1: Aprendizagem Estrutural

Nessa etapa do processo é utilizado um método simples, proposto por Wang e Mendel (1992) para obter regras fuzzy a partir de dados de entrada e saída numéricos. O objetivo é gerar um conjunto de regras fuzzy a partir de um conjunto de dados, e em seguida utilizar essas regras para estruturar o sistema neuro-fuzzy do HyFIS. Para ilustrar esse processo, considere o seguinte conjunto de dados:

$$(x_1^1, x_2^1, y^1), (x_1^2, x_2^2, y^2), \dots, (x_1^n, x_2^n, y^n)$$

em que x_1 e x_2 são entradas, y é a saída e n é o número de dados. Esse caso com duas entradas e uma saída é escolhido com o intuito de explicar a metodologia de forma clara, mas o método pode ser generalizado para múltiplas entradas e múltiplas saídas. O método de Wang e Mendel (1992) consiste em uma abordagem de três etapas, as quais são descritas a seguir.

- Etapa 1:

O primeiro passo deste processo é a divisão dos espaços de entrada e saída em regiões fuzzy, para isso considere os domínios das variáveis x_1 , x_2 e y , que são denotados por $[x_1^-, x_1^+]$, $[x_2^-, x_2^+]$ e $[y^-, y^+]$, respectivamente.

O número de funções de pertinência de cada entrada e saída é fixado, e os valores iniciais dos parâmetros de cada função de pertinência são definidos de forma que os centros das funções sejam igualmente espaçados ao longo do domínio de cada variável de entrada e saída. Além disso, os intervalos para cada termo linguístico deve ser tomado de modo que suas funções de pertinência se sobreponham, cobrindo o domínio de cada variável por completo. Suponha por exemplo que os domínios de x_1 , x_2 e y seja o intervalo $[-1, 1]$, logo, podemos dividir cada domínio em N (N pode assumir valores diferentes para cada variável) regiões e atribuir a cada região uma função de pertinência fuzzy. Claro que essa divisão e a distribuição das funções de pertinência não é única. A Figura 2.9 mostra um exemplo onde os intervalos de domínio de x_1 , x_2 e y são divididos em cinco regiões.

- Etapa 2: Nessa etapa ocorre a construção das regras fuzzy. Para isso, determina-se os graus de pertinência de cada dado de entrada e saída, x_1^i, x_2^i e y^i , $i = 1, \dots, n$ para suas respectivas regiões fuzzy. Para exemplificar o processo, considere as ternas de dados $(0, 8; 0, 2; 0, 6)$ e $(0, 4; 0, 6; 0, 2)$, e a Figura 2.9 como sendo as região fuzzy tanto das entradas quanto da saída.

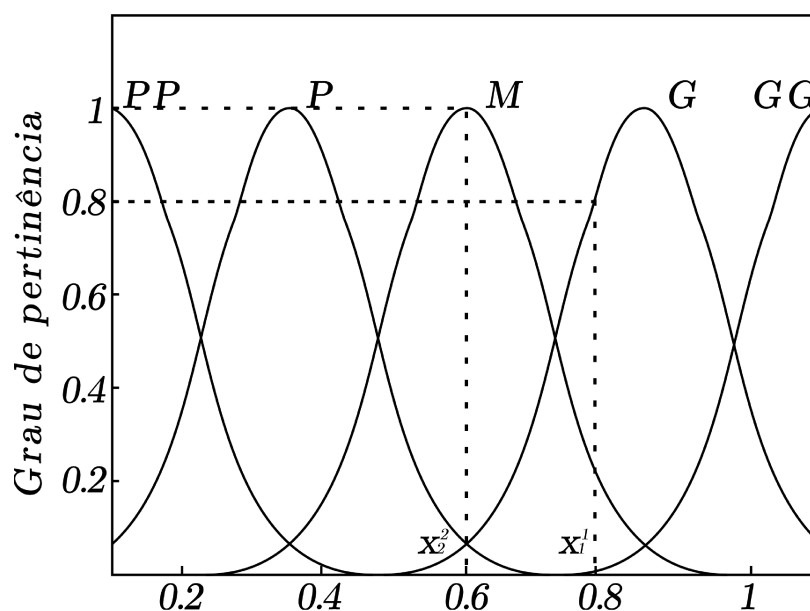


Figura 2.9: Exemplo de funções de pertinência para x_1 , x_2 e y .

Como exemplificado na Figura 2.9, x_1^1 tem um grau de pertinência de 0,8 em G e 0,2 em M, de forma similar x_2^2 tem grau 1 em M e graus menores que 1 nas demais regiões. Assim, determina-se as regiões de grau máximo para cada terna x_1^i, x_2^i e y^i . De acordo com o exemplo, têm-se que x_1^1 é G e x_2^2 é M. Para os demais valores de entrada e saída, a

região de grau máximo é definida de forma similar. Desse modo, é possível extrair uma regra fuzzy de cada par de dados fornecido,

$$(x_1^1, x_2^1; y^1) \implies [x_1^1(0,8 \text{ em } G), x_2^1(0,8 \text{ em } PP), y^1(1 \text{ em } M)]$$

gera a seguinte regra: Se x_1 é G e x_2 é PP então y é M

e

$$(x_1^2, x_2^2; y^2) \implies [x_1^2(0,8 \text{ em } P), x_2^2(1 \text{ em } M), y^2(0,8 \text{ em } P)]$$

gera a seguinte regra: Se x_1 é P e x_2 é M então y é P.

- Etapa 3:

Nessa etapa é atribuído um grau para cada regra fuzzy gerada na etapa anterior. Isso é feito para resolver os possíveis problemas de conflito de regras, isto é, regras com os mesmos antecedentes mas com uma parte conseqüente diferente. Assim, atribuímos um grau para cada regra gerada na Etapa 2, de modo que quando houver um conflito de regras, mantém-se apenas a regra com o maior grau. Em outras palavras, esta etapa é realizada para excluir regras redundantes e, portanto, obter uma base de regras fuzzy. O grau de cada regra é definido como sendo o produto dos graus de pertinência máximos de cada variável. Logo, dado uma regra R1: Se x_1 é G e x_2 é PP, então y é M, seu grau é definido por:

$$w_1 = \mu_G(x_1)\mu_{PP}(x_2)\mu_M(y) = 0,8 \times 0,8 \times 1 = 0,64.$$

Fase 2: Aprendizagem de Parâmetros

Depois que as regras fuzzy são encontradas toda a rede da estrutura é estabelecida, e a rede entra na segunda fase de aprendizagem para ajustar os parâmetros das funções de pertinência.

Seja $y_l^{(5)}$ a saída estimada pelo nó l da camada 5 para um vetor de entrada $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$. É aplicado o método do gradiente descendente para minimizar o erro quadrático médio, definido por:

$$E = \frac{1}{2}(y - y_l^{(5)})^2, \quad (2.12)$$

em que y é o valor real da variável de saída.

Assumindo que o peso w_{kj} é um parâmetro ajustável correspondendo ao nó k na camada 4 e ao nó j na camada 3, a regra de aprendizagem utilizada pelo método do gradiente descendente é:

$$w_{kj}(t) = w_{kj}(t-1) - \alpha \left(\frac{\partial E}{\partial w_{kj}} \right)$$

em que $\alpha > 0$ é a taxa de aprendizagem do método, t é o número de iterações e:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{kj}} = \frac{\partial E}{\partial y_k^{(4)}} \frac{\partial y_k^{(4)}}{\partial w_{kj}} = \frac{\partial E}{\partial y_l^{(5)}} \frac{\partial y_l^{(5)}}{\partial y_k^{(4)}} \frac{\partial y_k^{(4)}}{\partial w_{kj}}. \quad (2.13)$$

Para ilustrar a regra de aprendizagem para cada parâmetro, realiza-se os cálculos de $\frac{\partial E}{\partial w_{kj}}$, camada por camada, a partir dos nós de saída das respectivas camadas. A seguir, as correções dos parâmetros das funções de pertinência referentes a saída são deduzidas. Da equação (2.12) segue que:

$$\frac{\partial E}{\partial y_l^{(5)}} = -(y - y_l^{(5)}). \quad (2.14)$$

Logo, o erro nesta camada é dado por:

$$\delta_l^{(5)} = -\frac{\partial E}{\partial y_l^{(5)}} = (y - y_l^{(5)}).$$

Utilizando a equação (2.13), obtém-se:

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma_{lk}} = \frac{\partial E}{\partial y_l^{(5)}} \cdot \frac{\partial y_l^{(5)}}{\partial \sigma_{lk}}. \quad (2.15)$$

A partir da equação (2.11)

$$y_l^{(5)} = \frac{\sum (y_k^{(4)} \sigma_{lk} c_{lk})}{\sum (y_k^{(4)} \sigma_{lk})}.$$

Assim,

$$\frac{\partial y_l^{(5)}}{\partial \sigma_{lk}} = \frac{y_{lk} \left(c_{lk} \left(\sum_{k'} y_{k'}^{(4)} \sigma_{lk'} \right) - \left(\sum_{k'} y_{k'}^{(4)} \sigma_{lk'} c_{lk'} \right) \right)}{\left(\sum_{k'} y_{k'}^{(4)} \sigma_{lk} \right)^2} \quad (2.16)$$

em que k' é o conjunto de nós da camada 4 que estão conectados ao nó l da camada 5. Das equações anteriores, conclui-se:

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma_{lk}} = \frac{\partial E}{\partial y_l^{(5)}} \cdot \frac{\partial y_l^{(5)}}{\partial \sigma_{lk}} \quad (2.17)$$

$$= -(y - y_l^{(5)}) \frac{y_{lk} (c_{lk} (\sum_{k'} y_{k'}^{(4)} \sigma_{lk'}) - (\sum_{k'} y_{k'}^{(4)} \sigma_{lk'} c_{lk'}))}{(\sum_{k'} y_{k'}^{(4)} \sigma_{lk})^2}. \quad (2.18)$$

Portanto, a correção do parâmetro σ é dada por:

$$\sigma_{lk}^{(4)}(t+1) = \sigma_{lk}(t)^{(4)} + \alpha \delta_l^{(5)} \frac{y_{lk} (c_{lk} (\sum_{k'} y_{k'}^{(4)} \sigma_{lk'}) - (\sum_{k'} y_{k'}^{(4)} \sigma_{lk'} c_{lk'}))}{(\sum_{k'} y_{k'}^{(4)} \sigma_{lk})^2}.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial E}{\partial c_{lk}} = \frac{\partial E}{\partial y_l^{(5)}} \cdot \frac{\partial y_l^{(5)}}{\partial c_{lk}} = (y - y_l^{(5)}) \frac{\sigma_{lk} y_k^{(4)}}{\sum_k \sigma_{lk} y_l^{(4)}}.$$

Portanto, a correção do parâmetro c é dada por:

$$c_{lk}(t+1) = c_{lk}(t) + \alpha \delta_l^{(5)} \frac{\sigma_{lk} y_k^{(4)}}{\sum_k \sigma_{lk} y_l^{(4)}}.$$

Para calcular as correções dos parâmetros das funções de pertinência das entradas, primeiro calcula-se os erros das camadas 3 e 4. O erro para os nós da camada 4 são calculados com base na fuzzificação das saídas. Assim,

$$\delta_k^{(4)} = \frac{\partial E}{\partial y_k^{(4)}} = \frac{\partial E}{\partial y_l^{(5)}} \cdot \frac{\partial y_l^{(5)}}{\partial y_k^{(4)}}.$$

Além disso,

$$\frac{\partial E}{\partial y_l^{(5)}} = -(y - y_l^{(5)}).$$

Da equação (2.11),

$$\frac{\partial y_l^{(5)}}{\partial y_k^{(4)}} = \frac{(\sigma_{lk}(c_{lk} \sum_{k'} y_{k'}^{(4)} \sigma_{lk'}) - \sum_{k'} y_{k'}^{(4)} \sigma_{lk'} c_{lk'})}{(\sum_{k'} y_{k'}^{(4)} \sigma_{lk})^2}.$$

Por fim, obtém-se:

$$\delta_k^{(4)} = (y - y_l^{(5)}) \frac{(\sigma_{lk}(c_{lk} \sum_{k'} y_{k'}^{(4)} \sigma_{lk'}) - \sum_{k'} y_{k'}^{(4)} \sigma_{lk'} c_{lk'})}{(\sum_{k'} y_{k'}^{(4)} \sigma_{lk})^2}.$$

Assim como na camada 4, na camada 3 nenhum parâmetro precisa ser ajustado, logo, basta calcularmos o erro, $\delta_j^{(3)}$:

$$\delta_j^{(3)} = \frac{\partial E}{\partial y_j^{(3)}} = \frac{\partial E}{\partial y_k^{(4)}} \cdot \frac{\partial y_k^{(4)}}{\partial y_j^{(3)}} = \frac{\partial E}{y_k^{(4)}} = \delta_k^{(4)}.$$

A partir daí obtém-se a formula de correção dos parâmetros das funções de pertinência das entradas da seguinte forma:

$$\frac{\partial E}{\partial c_i} = \frac{\partial E}{\partial y_i^{(2)}} \cdot \frac{\partial y_i^{(2)}}{\partial c_i} = \frac{\partial E}{\partial y_i^{(2)}} y_i^{(2)} \frac{2(x - c_i)}{\sigma_i^2}.$$

Também,

$$\frac{\partial E}{\partial y_i^{(2)}} = \frac{\partial E}{\partial y_j^{(3)}} \cdot \frac{\partial y_j^{(3)}}{\partial y_i^{(2)}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial E}{\partial y_j^{(3)}} = \delta_j^{(3)}.$$

Definindo por:

$$r = \text{Arg} \min_{i \in I_j} (y_i^{(2)})$$

em que r representa o argumento do índice $j \in I_j$ que minimiza $y_2^{(2)}$. Obtém-se:

$$\frac{\partial E}{\partial y_i^{(2)}} = \begin{cases} \sum_j \delta_j^{(3)} & \text{se } i = r \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, a correção do parâmetro c_i é dada por:

$$c_i(t+1) = c_i(t) + \alpha \frac{\partial E}{\partial y_i^{(2)}} y_i^{(2)} \frac{2(x - c_i)}{\sigma_i^2}.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial E}{\partial y_i^{(2)}} \cdot \frac{\partial y_i^{(2)}}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial E}{\partial y_i^{(2)}} y_i^{(2)} \frac{2(x - c_i)^2}{\sigma_i^3}.$$

Portanto, a correção do parâmetro σ_i é dada por:

$$\sigma_i(t+1) = \sigma_i(t) + \alpha \frac{\partial E}{\partial y_i^{(2)}} y_i^{(2)} \frac{2(x - c_i)^2}{\sigma_i^3}.$$

Na próxima seção é apresentada a segunda rede neuro-fuzzy utilizada para o desenvolvimento deste trabalho. Para isso, utiliza-se as referências (JANG, 1993), (NEGNEVITSKY, 2005) e (FREITAS, 2021).

2.3 ANFIS

O *Adaptive Neuro-fuzzy Inference System* (ANFIS) também é uma rede neuro-fuzzy com cinco camadas, porém suas camadas são interligadas através de pesos unitários. Assim, como no HyFIS, cada camada é responsável por uma etapa do processo, que neste caso resulta na construção de um SBRF com o método de inferência do tipo Takagi-Sugeno. A arquitetura do ANFIS é representada na Figura 2.10.

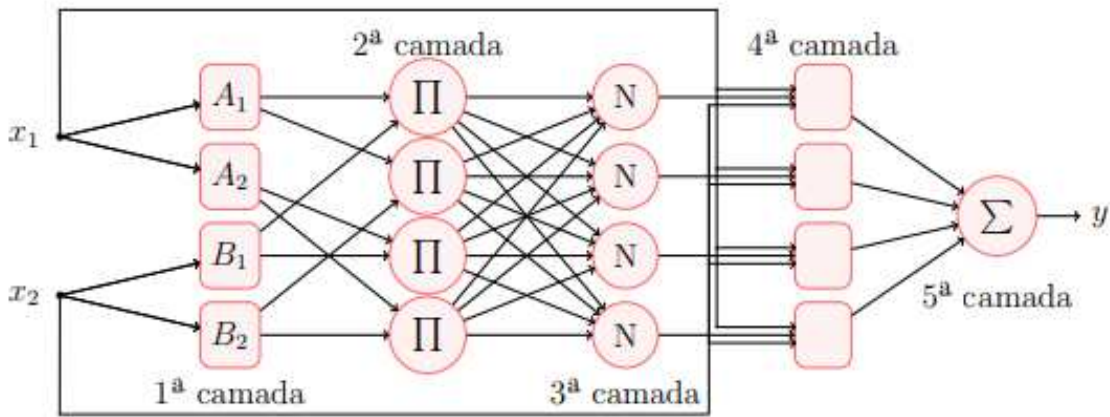


Figura 2.10: Arquitetura do ANFIS. Fonte:(FREITAS, 2021).

Para facilitar o entendimento do modelo neuro-fuzzy do ANFIS, considera-se um exemplo apenas com duas entradas e uma saída. Além disso, considera-se as funções de pertinência como sendo gaussianas, conforme descrito na equação (2.10), denota-se c por a e σ^2 por b com intuito de facilitar a notação.

A seguir cada camada do ANFIS é abordada de maneira detalhada, de acordo com JANG (1993).

Camada 1

Os nós desta camada funcionam essencialmente como os nós da camada 2 do HyFIS. Isto é, após os valores de entrada serem computados, os nós desta camada calculam seus graus de pertinência aos respectivos termos linguísticos de cada variável de entrada. Assim, as funções dos nós desta camada são dadas por:

$$y_i^{(1)} = \mu_{A_i}(x_1) \text{ para } i = 1, 2 \quad (2.19)$$

$$y_i^{(1)} = \mu_{B_{i-2}}(x_1) \text{ para } i = 3, 4 \quad (2.20)$$

em que A_i e B_{2-i} são os termos linguísticos relacionados as entradas x_1 e x_2 , respectivamente.

Camada 2

Os nós desta camada funcionam essencialmente como os nós da camada 3 do HyFIS. Isto é, aqui a parte “SE” das regras fuzzy são criadas com base no operador “E” definido por uma t-norma. Assim, as funções dos nós desta camada são dadas por:

$$\begin{aligned}y_1^{(2)} &= w_1 = \mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{B_1}(x_2), \\y_2^{(2)} &= w_2 = \mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{B_2}(x_2), \\y_3^{(2)} &= w_3 = \mu_{A_2}(x_1) \cdot \mu_{B_1}(x_2), \\y_4^{(2)} &= w_4 = \mu_{A_2}(x_1) \cdot \mu_{B_2}(x_2),\end{aligned}$$

em que $y_i^{(2)}$ é a saída do nó i obtida pela t-norma do produto algébrico.

Camada 3

A terceira camada é composta por nós fixos, denotados por N . Tais nós realizam um processo de normalização dos antecedentes das regras criados na camada 2. Assim, as funções dos nós desta camada são dadas por:

$$y_i^{(3)} = \bar{w}_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}.$$

Camada 4

Os nós desta camada funcionam essencialmente como os nós da camada 4 do HyFIS. Isto é, aqui a parte “ENTÃO” das regras são criadas, porém no ANFIS essa criação ocorre através de um conjunto de parâmetros $\{k_{i0}, k_{i1}, k_{i2}\}$, denominados parâmetros consequentes. Assim, as funções dos nós desta camada são dadas por:

$$y_i^{(4)} = \bar{w}_i f_i = \bar{w}_i (k_{i0} x_1 + k_{i1} x_2 + k_{i2}).$$

Camada 5

Esta é uma camada de nó único que tem como objetivo calcular a saída do sistema neuro-fuzzy através da média ponderada das saídas de cada regra. Assim, a função de saída deste nó é dada por:

$$y_i^{(5)} = \sum_{i=1}^4 \bar{w}_i f_i. \quad (2.21)$$

2.3.1 O Algoritmo de Aprendizagem Híbrido

O ANFIS também utiliza um algoritmo de aprendizagem híbrido de duas fases. Porém, no caso do ANFIS é utilizado o método dos mínimos quadrados para aperfeiçoar os parâmetros k_{i0}, k_{i1} e k_{i2} , e o método do gradiente descendente para otimizar os parâmetros das funções de pertinência, assim como no HyFIS. Inicialmente as funções de pertinência são definidas igualmente espaçadas no domínio de cada variável entrada de modo a cobri-lo por completo.

O Treinamento do ANFIS

A partir dos valores iniciais dos parâmetros e de um conjunto de dados com P combinações de entrada-saída, temos de (2.21) as seguintes P equações:

$$\begin{cases} Y(1) = \bar{w}_1(1)f_1(1) + \bar{w}_2(1)f_2(1) + \dots + \bar{w}_n(1)f_n(1) \\ Y(2) = \bar{w}_1(2)f_1(2) + \bar{w}_2(2)f_2(2) + \dots + \bar{w}_n(2)f_n(2) \\ \vdots \\ Y(p) = \bar{w}_1(p)f_1(p) + \bar{w}_2(p)f_2(p) + \dots + \bar{w}_n(p)f_n(p) \\ \vdots \\ Y(P) = \bar{w}_1(P)f_1(P) + \bar{w}_2(P)f_2(P) + \dots + \bar{w}_n(P)f_n(P) \end{cases} \quad (2.22)$$

em que $f_i = k_{i0} + k_{i1}x_1 + \dots + k_{im}x_m$ para $i = 1, \dots, n$, m é o número de variáveis de entrada, n o número de nós da terceira camada e $Y(p)$ a saída do ANFIS para as entradas $x_1(p), \dots, x_n(p)$. Dessa forma, a equação (2.22) pode ser escrita da forma:

$$y = Ak,$$

em que,

$$y = \begin{bmatrix} Y(1) \\ Y(2) \\ \vdots \\ Y(p) \\ \vdots \\ Y(P) \end{bmatrix}_{P \times 1},$$

$$A = \begin{bmatrix} \bar{w}_1(1) & \bar{w}_1(1)x_1(1) & \dots & \bar{w}_1(1)x_m(1) & \dots & \bar{w}_n(1)x_1(1) & \dots & \bar{w}_n(1)x_m(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{w}_1(2) & \bar{w}_1(2)x_1(2) & \dots & \bar{w}_1(2)x_m(2) & \dots & \bar{w}_n(2)x_1(2) & \dots & \bar{w}_n(2)x_m(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{w}_1(p) & \bar{w}_1(p)x_1(p) & \dots & \bar{w}_1(p)x_m(p) & \dots & \bar{w}_n(p)x_1(p) & \dots & \bar{w}_n(p)x_m(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{w}_1(P) & \bar{w}_1(P)x_1(P) & \dots & \bar{w}_1(P)x_m(P) & \dots & \bar{w}_n(P)x_1(P) & \dots & \bar{w}_n(P)x_m(P) \end{bmatrix}_{P \times n(1+m)}$$

e

$$k = [k_{10} \ k_{11} \ k_{12} \ \dots \ k_{1m} \ k_{20} \ k_{21} \ k_{22} \ \dots \ k_{2m} \ \dots \ k_{n0} \ k_{n1} \ k_{n2} \ \dots \ k_{nm}]_{n(1+m) \times 1}^T.$$

A solução do sistema é encontrada através do método dos mínimos quadrados fazendo com que $\|Ak - y\|$ seja minimizado. Geralmente, o número de dados de entrada-saída é maior do que $n(1+m)$, então o sistema $y = Ak$ pode não ter solução.

Posteriormente, são calculados os valores de saída estimados pela rede para os dados, y_e , e o vetor de erro e é determinado:

$$e = y - y_e.$$

Por fim, o método do gradiente é aplicado, fazendo com que os parâmetros ajustáveis da rede se alterem de modo que e seja minimizado. O erro quadrático médio, E , é dado por:

$$E = \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}(y - y_e)^2.$$

De acordo com Sandmann (2006), as derivadas parciais de E são dadas por:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial(\bar{w}_i f_i)} \cdot \frac{\partial(\bar{w}_i f_i)}{\partial \bar{w}_i} \cdot \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial w_i} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial \mu_{A_i}} \cdot \frac{\partial \mu_{A_i}}{\partial a}; \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \frac{\partial E}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial(\bar{w}_i f_i)} \cdot \frac{\partial(\bar{w}_i f_i)}{\partial \bar{w}_i} \cdot \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial w_i} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial \mu_{A_i}} \cdot \frac{\partial \mu_{A_i}}{\partial b}. \quad (2.24)$$

Daí, tem-se:

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} e^2 \right)}{\partial e} = e; \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial(y_d - y)}{\partial y} = -1; \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial y}{\partial(\bar{w}_i f_i)} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n \bar{w}_i f_i \right)}{\partial \bar{w}_i f_i} = 1; \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial(\bar{w}_i f_i)}{\partial \bar{w}_i} = f_i; \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial w_i} = \frac{\left(\frac{\partial \sum_{i=1}^n w_i}{\partial w_i} \right)}{\left(\sum_{j=1}^n w_j \right)^2} = \frac{\left(\sum_{j=1}^n w_j \right) - w_i}{\left(\sum_{j=1}^n w_j \right)^2} = \frac{\bar{w}_i(1 - \bar{w}_i)}{w_i}; \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial \mu_{A_i}} = \frac{w_i}{\mu_{A_i}}; \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \mu_{A_i}}{\partial a} = \frac{\partial \left(e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{b} \right)^2} \right)}{\partial a} = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{b} \right)^2} \left(\frac{(x-a)}{b^2} \right); \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \mu_{A_i}}{\partial b} = \frac{\partial \left(e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{b} \right)^2} \right)}{\partial b} = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{b} \right)^2} \left(\frac{(x-a)^2}{b^3} \right); \quad (2.32)$$

As expressões de a e b serão corrigidas utilizando as equações (2.33) e (2.34), onde α é a taxa de aprendizagem do método.

$$a = a + \alpha(y_d - y) f_i \bar{w}_i (1 - \bar{w}_i) \cdot \frac{1}{\mu_{A_i}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{b} \right)^2} \left(\frac{(x-a)}{b^2} \right) \quad (2.33)$$

$$b = b + \alpha(y_d - y) f_i \bar{w}_i (1 - \bar{w}_i) \cdot \frac{1}{\mu_{A_i}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{b} \right)^2} \left(\frac{(x-a)^2}{b^3} \right) \quad (2.34)$$

Desse modo o ANFIS otimiza os parâmetros dos antecedentes através do método do gradiente descendente e os parâmetros dos consequentes pelo método dos mínimos quadrados.

No próximo capítulo é apresentado o modelo de crescimento econômico Solow em dois contextos, que consistem em obter um dos parâmetros deste modelo, através de SBRFs construídos por meio das redes neuro-fuzzy.

Capítulo 3

O Modelo de Crescimento Econômico de Solow

“Toda teoria depende de hipóteses que não são totalmente verdadeiras. É isso que a faz teoria. A arte de bem teorizar é fazer as inevitáveis hipóteses simplificadoras de tal maneira que os resultados finais não sejam muito sensíveis” (Solow, 1956).

3.1 Introdução

Há países no mundo que possuem padrões de vida que eram inimagináveis há décadas atrás. Isso está diretamente ligado ao crescimento econômico que vivenciamos nos últimos tempos, em especial após a primeira revolução industrial. Assim, surge a importância de estudos sobre modelos de crescimento econômico. Tais modelos podem nos fornecer uma estimativa de como a economia de um país estará em certo período de tempo, e com isso podemos ter uma noção do padrão de vida da população de determinado país, em um momento futuro.

Neste capítulo é apresentado o modelo de Solow, este é um modelo de crescimento neoclássico proposto por Robert Solow com o intuito de responder uma simples pergunta: “por que uns países são mais ricos que outros” (SOLOW, 1979). Tendo em vista a dificuldade em estimar o parâmetro, taxa de poupança, do modelo crescimento de Solow pelos métodos econométricos tradicionais, o HyFIS é utilizado para determinar a taxa de poupança como uma variável de saída de um SBRF. As variáveis de entrada são: consumo das famílias em relação ao PIB, o saldo em transações correntes, também empregado na obtenção do PIB e a taxa de juros real. O estudo é realizado com dois enfoques diferentes, um utilizando dados globais e outro apenas dados nacionais.

3.2 O Modelo Clássico de Solow

O conteúdo desta seção é baseado no livro de Romer (2012). O modelo de Solow é um modelo de crescimento econômico que relaciona as variáveis Trabalho (L), Capital (K) e Conhecimento, também conhecido como Eficiência do Trabalho (A), através de uma função produção da seguinte forma:

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)),$$

onde t é o tempo, e AL é o que chamamos de trabalho efetivo.

Note que o tempo não influencia a função produção diretamente, sua influência ocorre através das variáveis L , A e K . Além disso, a variável A entra na função de forma conveniente, de modo que isso junto a outras premissas do modelo implicará que a razão K/Y eventualmente se estabilizará. O que simplifica a análise do modelo.

As suposições centrais do modelo de Solow dizem respeito às propriedades tanto da função produção quanto da evolução dos três insumos (capital, trabalho e conhecimento) ao longo do tempo.

3.2.1 Propriedades da Função Produção

Uma das condições mais importantes para o modelo de Solow é que a função produção deve possuir retornos constantes de escala em seus dois argumentos, K e AL , isto é,

$$F(cK, cAL) = cY, \quad \forall c \geq 0. \quad (3.1)$$

Essa suposição de retornos constantes pode ser vista como uma combinação de duas premissas distintas. A primeira é que a economia a ser analisada pelo modelo deve ser grande o suficiente para que os ganhos da especialização serem exauridos. Dado que em uma economia muito pequena, uma maior especialização pode aumentar as quantidades de capital e trabalho mais do que aumenta a produção. Logo, o modelo de Solow assume que a economia é suficientemente grande para que se o capital e o trabalho aumentarem esses novos insumos serão usados essencialmente na mesma forma, e assim a saída aumentará na mesma proporção.

A segunda suposição é que outros insumos além de capital, trabalho e conhecimento devem ser desprezados. Assim, se c for substituído por $\frac{1}{AL}$ em (3.1) tem-se:

$$F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) = \frac{1}{AL}F(K, AL), \quad (3.2)$$

em que $\frac{K}{AL}$ é o capital por unidade de trabalho efetivo e $\frac{1}{AL}F(K, AL) = \frac{Y}{AL}$ é a produção por unidade de trabalho efetivo. Definindo $k = \frac{K}{AL}$, $y = \frac{Y}{AL}$ e $f(k) = F(k, 1)$, tem-se $y = f(k)$.

As variáveis k e y definidas anteriormente são de extrema importância na interpretação do modelo de Solow, dado que pode-se analisá-las ao invés de estudar o comportamento de K e AL diretamente. Por exemplo, para determinar o comportamento da produção por trabalhador, Y/L , pode-se reescrever essa expressão como $A(Y/AL)$, ou $Af(k)$, e então analisar A e k .

A função $f(k)$, é chamada de forma intensiva da função produção e deve satisfazer algumas condições:

1. $f(0) = 0$;
2. $f'(k) > 0$;
3. $f''(k) < 0$.

Como $F(K, AL) = AL \cdot f\left(\frac{K}{AL}\right)$, segue que o produto marginal do capital, isto é, $\frac{\partial F(K, AL)}{\partial K}$, é igual a $ALf'\left(\frac{K}{AL}\right)\left(\frac{1}{AL}\right) = f'(k) > 0$, que diminui a medida em que k aumenta. Além disso, assumi-se as condições de Inada (INADA, 1964):

$$\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f'(k) = 0. \quad (3.3)$$

Assim, garante-se que a trajetória da economia não divirja. Na Figura 3.1 é apresentado um gráfico com uma função de produção nas hipóteses anteriores.

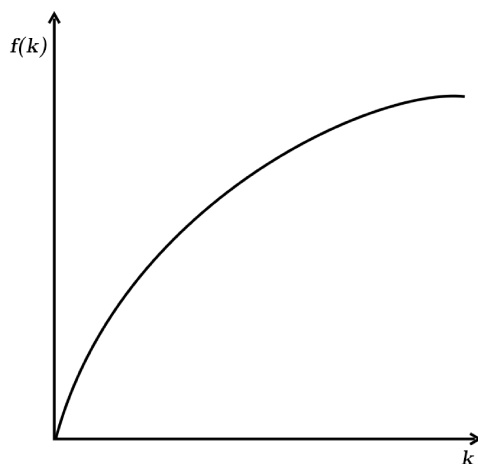


Figura 3.1: Exemplo de Função Produção. Fonte: (ROMER, 2012).

Exemplo 3.1 *A função de Cobb-Douglas*

$$F(K, AL) = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

é um exemplo de função produção relativamente fácil de ser analisada, o que a torna muito útil. Essa função de fato satisfaz as condições de uma função de produção. Note que dado $c \geq 0$

$$\begin{aligned} F(cK, cAL) &= (cK)^\alpha (cAL)^{1-\alpha} \\ &= c^\alpha c^{1-\alpha} K^\alpha (AL)^{1-\alpha} \\ &= cF(K, AL). \end{aligned}$$

Além disso,

$$f(k) = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) = \left(\frac{K}{AL}\right)^\alpha = k^\alpha.$$

Então, $f'(k) = \alpha k^{\alpha-1}$. Assim, $f'(k) > 0$ e $f''(k) = -(1-\alpha)\alpha k^{\alpha-2}$. Logo, $\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$ e $f''(k) < 0$.

3.2.2 Propriedades dos Insumos

As demais suposições do modelo dizem respeito às variáveis A , L e K . Vale mencionar que o modelo de Solow é contínuo no tempo, ou seja, essas variáveis estão definidas em cada instante t . Além disso, os níveis iniciais de capital, trabalho e conhecimento são estritamente positivos e são dados. O trabalho e o conhecimento possuem taxas de crescimento constantes,

$$\frac{dL(t)}{dt} = nL(t) \quad \text{e} \quad \frac{dA(t)}{dt} = gA(t),$$

em que n e g são parâmetros exógenos. A taxa de crescimento de uma variável $X(t)$ é dada por $\frac{\dot{X}(t)}{X(t)}$, portanto A e L crescem a taxas constantes n e g , respectivamente. Além disso, a taxa de crescimento de uma variável X é igual à taxa de variação de seu logaritmo na base natural,

isto é,

$$\begin{aligned}\frac{d \ln X}{dt} &= \frac{d \ln X}{dX} \frac{dX}{dt} \\ &= \frac{1}{X} \frac{dX}{dt}.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\ln L(t) &= [\ln L(0)] + nt \\ \ln A(t) &= [\ln A(0)] + gt\end{aligned}$$

em que $L(0)$ e $A(0)$ são os valores de L e A no instante 0, logo,

$$\begin{aligned}L(t) &= L(0)e^{nt} \\ A(t) &= A(0)e^{gt}.\end{aligned}$$

Portanto, L e A possuem um crescimento exponencial. Uma outra relação importante no modelo é que:

$$\frac{dK(t)}{dt} = sY(t) - \delta K(t), \quad (3.4)$$

em que s é a fração da produção destinada a investimentos, também conhecida como taxa de poupança e δ é a depreciação do capital em relação ao tempo, sendo $s \in [0, 1]$ e $n + g + \delta > 0$.

3.2.3 Dinâmicas do Modelo

Como vimos anteriormente, a taxa de crescimento do trabalho e do conhecimento são exógenos. Portanto, para analisar o comportamento de uma economia deve-se analisar o comportamento do terceiro insumo, o capital.

- **A Dinâmica de k**

Como uma economia tende a crescer ao longo do tempo, é preferível focar na análise do estoque de capital por unidade de trabalho efetivo, k , ao invés do estoque de capital, K . Assim, como $k = \frac{K}{AL}$, pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{[A(t)L(t)]^2} [A(t)\dot{L}(t) + L(t)\dot{A}(t)] \\ &= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \frac{\dot{A}(t)}{A(t)},\end{aligned}$$

em que $K/AL = k$, $\dot{L}/L = n$, $\dot{A}/A = g$ e \dot{K} é dado em (3.4). Portanto,

$$\dot{k}(t) = \frac{sY(t) - \delta K(t)}{A(t)L(t)} - k(t)n - k(t)g \quad (3.5)$$

$$= s \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} - \delta k(t) - nk(t) - gk(t). \quad (3.6)$$

Além disso, como Y/AL é dado por $f(k)$,

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n + g + \delta)k(t). \quad (3.7)$$

Essa última equação é fundamental para o modelo de Solow. A partir de (3.7) afirma-se que a taxa de variação do estoque de capital por unidade de trabalho efetivo é a diferença entre dois termos:

- O primeiro é $sf(k)$ que é o investimento real por unidade de trabalho efetivo, lembrando que a produção por unidade de trabalho efetivo é $f(k)$, e a fração dessa produção que é investida é s .
- O segundo termo, $(n + g + \delta)k$, é investimento de equilíbrio, isto é, a quantidade de investimento que deve ser feito apenas para manter k em seu nível constante.

Existem duas razões pelas quais algum investimento é necessário para evitar que k diminua. Em primeiro lugar, o capital existente está constantemente se depreciando e deve ser repostado para evitar uma queda do estoque de capital. Em segundo lugar, a quantidade de trabalho efetivo está crescendo. Assim, o investimento suficiente para manter o estoque de capital (K) constante não é suficiente para manter o estoque de capital por unidade de trabalho efetivo (k) constante. Como a quantidade de trabalho efetivo está crescendo a uma taxa $(n + g)$, o estoque de capital deve crescer a uma taxa $(n + g)$ para manter k estável. Quando o investimento real por unidade de trabalho efetivo excede o investimento necessário para manter o equilíbrio, k está aumentando. Quando o investimento real fica abaixo de $(n + g + \delta)k$, k está caindo. E quando os dois são iguais, k é constante, essa dinâmica é apresentada na Figura 3.2

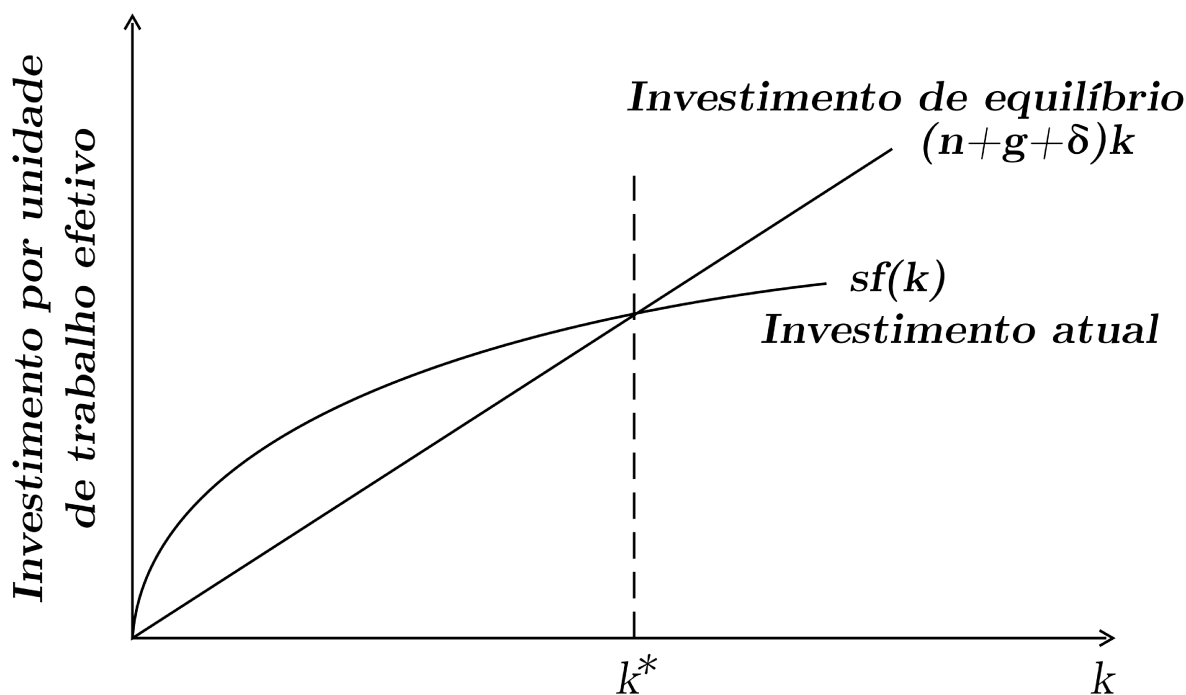


Figura 3.2: Investimento de equilíbrio e atual. Fonte: (ROMER, 2012).

Como $f(0) = 0$, o investimento real e o investimento de ponto de equilíbrio são iguais em $k = 0$. Além disso, as condições (3.3) implicam que em $k = 0$, $f'(k)$ é grande, logo, a curva $sf(k)$ é mais íngreme do que a curva $(n + g + \delta)k$. Assim, para pequenos valores de k , o investimento real é maior do que o investimento de equilíbrio. Essas condições também implicam que $f'(k)$ cai para zero à medida que k se torna grande. E o fato de que $f''(k) < 0$ implica que as duas curvas se cruzam apenas uma vez para $k > 0$. Denota-se por k^* tal ponto, isto é, k^* é o ponto de interseção entre as curvas $(n + g + \delta)k$ e $sf(k)$.

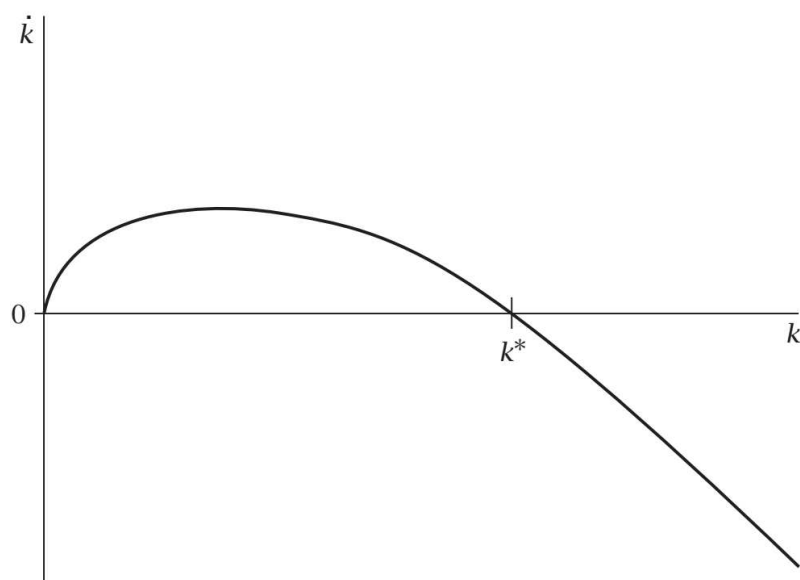


Figura 3.3: Diagrama de fase de k no modelo de Solow. Fonte: (ROMER, 2012).

Na Figura 3.3 essas informações são apresentadas na forma de um diagrama de fase, que mostra \dot{k} em função de k . Se k é inicialmente menor que k^* , o investimento real excede o investimento de equilíbrio, e assim \dot{k} é positivo, isto é, k é crescente. Se k for maior que k^* , \dot{k} é negativo. Finalmente, se k é igual a k^* , então $\dot{k} = 0$. Independente da condição inicial para k , este sempre converge para k^* .

3.2.4 A Trajetória para o Equilíbrio

Nesta subseção, as outras variáveis do modelo são analisadas quando $k = k^*$. Como k é constante e $k = \frac{K}{AL}$, K cresce a uma taxa $n + g$. Logo, Y cresce a uma taxa $n + g$, K/L e Y/L crescem a uma taxa g . Assim, independentemente do seu ponto de partida, o modelo de Solow afirma que a economia converge para uma trajetória de crescimento equilibrado.

3.2.5 A Taxa de Poupança

A taxa de poupança é o parâmetro do modelo de Solow mais suscetível à influência política. Nesta seção considera-se um modelo de Solow em equilíbrio de estado estacionário e um choque de variação permanente em “ s ”. Desse modo, estuda-se a influencia deste parâmetro no modelo.

- **O Impacto da Taxa de Poupança na Produção**

Um aumento de s desloca a curva de investimento real para cima e, portanto, k^* aumenta. Note que k permanece igual ao k^* velho. O investimento agora excede o investimento de equilíbrio, logo, mais recursos estão sendo destinados ao investimento do que o necessário para manter k constante e assim \dot{k} é positivo. Desse modo, k cresce até atingir o valor de k^* novo, onde este permanece constante. Esse comportamento está representado na Figura 3.4.

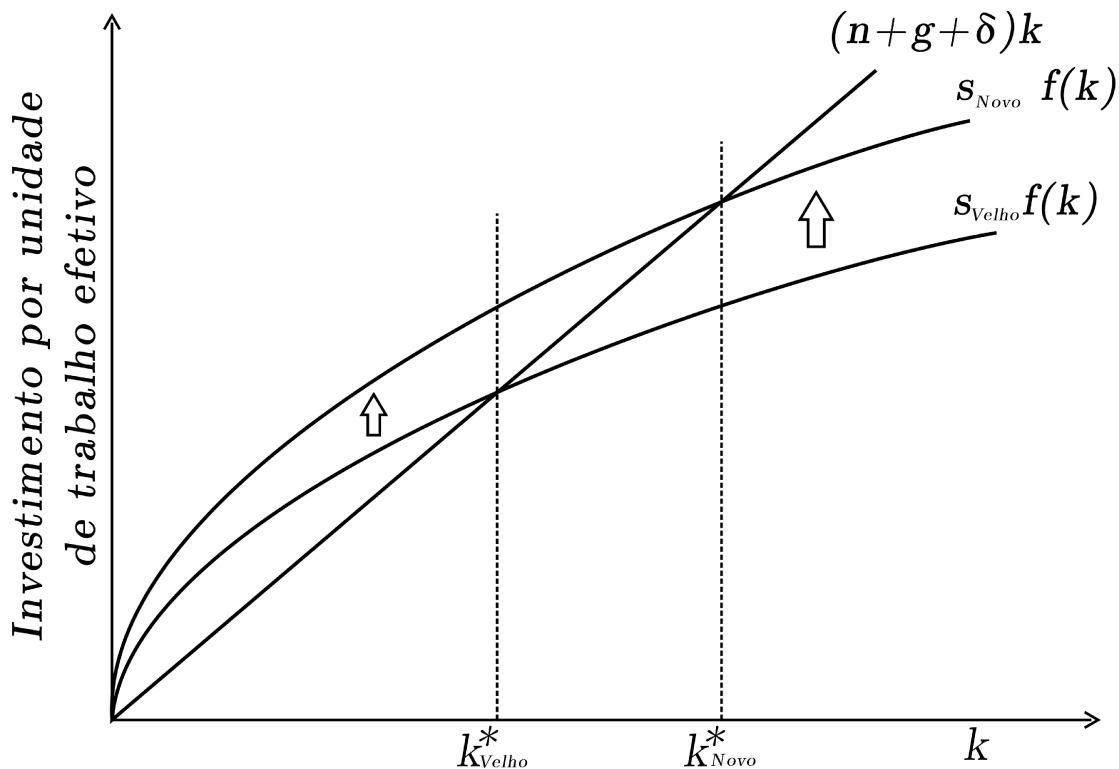


Figura 3.4: Os efeitos do aumento da taxa de poupança no Investimento. Fonte: (ROMER, 2012).

Esses resultados estão resumidos nos gráficos (a), (b) e (c) da Figura 3.5, em que t_0 denota o momento do aumento na taxa de poupança. Por suposição, s salta no tempo t_0 e permanece constante depois disso. Uma vez que o salto em s gera investimento suficiente para exceder o investimento de equilíbrio por um valor estritamente positivo, \dot{k} salta de zero para um valor estritamente positivo. Assim, k cresce gradualmente do valor de k^* velho até o k^* novo, e nesse processo, \dot{k} decresce gradativamente para zero.

Também é interessante analisar o comportamento da produção por trabalhador, $Y/L = Af(k)$. Daí, quando k é constante, Y/L cresce na mesma proporção que A , a uma taxa g . Logo, quando k está aumentando, Y/L cresce a uma taxa superior a g . Posteriormente, quando k^* atinge o valor de k^* novo, a taxa de crescimento de Y/L retorna a g .

Disso, tem-se que um aumento permanente na taxa de poupança produz apenas um aumento temporário na taxa de crescimento da produção por trabalhador. Os gráficos (d) e (e) da Figura 3.5 mostram esse impacto da taxa de poupança na produção por trabalhador.

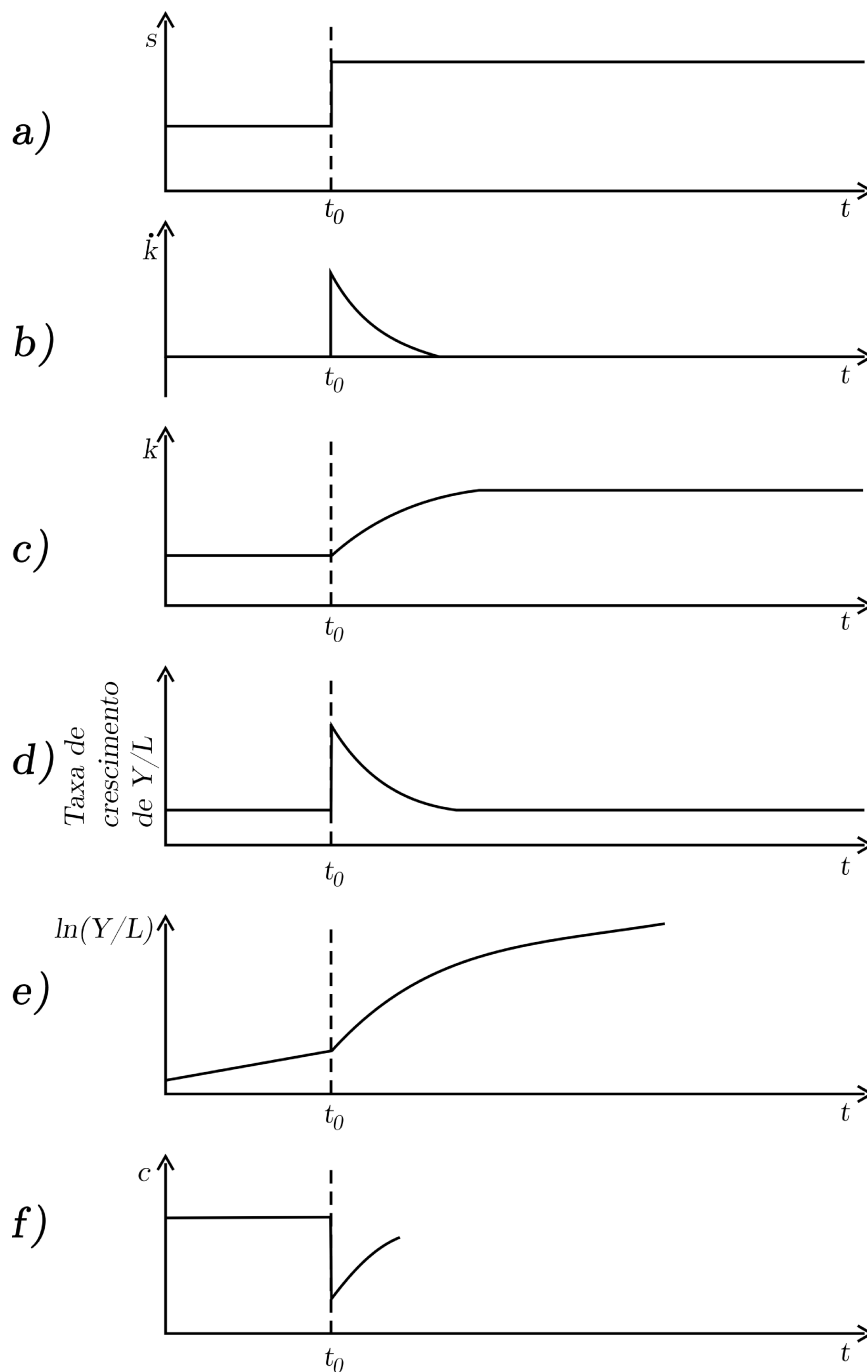


Figura 3.5: Os efeitos do aumento da taxa de poupança. Fonte: (ROMER, 2012).

3.3 Modelo Clássico de Solow: Caso Particular

Nessa seção é apresentado alguns gráficos envolvendo o modelo clássico de Solow. Para isso, considera-se a função de Cobb-Douglas com $\alpha = 0,5$, isto é,

$$Y_{0,5}(t) = F(K, AL) = K^{0,5}(AL)^{0,5}.$$

Logo, substituindo $Y(t)$ por $Y_{0,5}(t)$ na equação (3.6), obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= s \frac{K^{0,5}(A(t)L(t))^{0,5}}{A(t)L(t)} - \delta \frac{K(t)}{A(t)L(t)} - nk(t) - gk(t) \\ &= s \frac{K^{0,5}}{(A(t)L(t))^{0,5}} - \delta \frac{K(t)}{A(t)L(t)} - nk(t) - gk(t).\end{aligned}$$

Como $k = \frac{K}{A(t)L(t)}$, tem-se:

$$\dot{k}(t) = s \frac{K^{0,5}}{(A(t)L(t))^{0,5}} - \delta k(t) - nk(t) - gk(t) \quad (3.8)$$

$$= sk(t)^{0,5} - \delta k(t) - nk(t) - gk(t) \quad (3.9)$$

$$= sk(t)^{0,5} - (\delta + n + g)k(t). \quad (3.10)$$

A equação diferencial ordinária não linear (3.10) é a famosa equação de Bernoulli (BASSA-NEZI; FERREIRA, 1988). Assim, realiza-se a seguinte mudança de variável:

$$z = k^{1-0,5} = k^{0,5} \Rightarrow z^2 = k.$$

De (3.10), tem-se:

$$2z\dot{z} = sz - (\delta + n + g)z^2 \Rightarrow \dot{z} + \frac{(\delta + n + g)}{2}z = \frac{s}{2}. \quad (3.11)$$

Para determinar a solução analítica da equação (3.11), utiliza-se o fator integrante:

$$\mu(t) = e^{\int (\frac{\delta+n+g}{2})dt} = e^{(\frac{\delta+n+g}{2})t}.$$

Portanto, a solução geral da equação (3.11) de primeira ordem não homogênea é dada por:

$$\begin{aligned}z(t) &= e^{-(\frac{\delta+n+g}{2})t} \left[\int \frac{s}{2} e^{(\frac{\delta+n+g}{2})t} dt + c \right] \\ &= e^{-(\frac{\delta+n+g}{2})t} \left[\frac{s}{2} \int e^{(\frac{\delta+n+g}{2})t} dt + c \right] \\ &= e^{-(\frac{\delta+n+g}{2})t} \left[\frac{s}{\delta + n + g} e^{(\frac{\delta+n+g}{2})t} + c \right].\end{aligned}$$

Considerando a condição inicial $z(0) = z_0$,

$$z(0) = z_0 \Rightarrow z_0 = \frac{s}{\delta + n + g} + c \Rightarrow c = z_0 - \frac{s}{\delta + n + g}.$$

Substituindo na equação anterior, obtém-se:

$$z(t) = \frac{s}{\delta + n + g} + \left[z_0 - \frac{s}{\delta + n + g} \right] e^{-(\frac{\delta+n+g}{2})t}.$$

Então,

$$k(t)^{0,5} = \frac{s}{\delta + n + g} + \left(k_0^{0,5} - \frac{s}{\delta + n + g} \right) e^{-(\frac{\delta+n+g}{2})t},$$

disso, tem-se:

$$k(t) = \left[\frac{s}{\delta + n + g} + \left(k_0^{0,5} - \frac{s}{\delta + n + g} \right) e^{-(\frac{\delta+n+g}{2})t} \right]^2.$$

Quando $\dot{k}(t) = 0$ da equação (3.10) tem-se:

$$(\delta + n + g)k = sk^{0,5} \Rightarrow k^{0,5} = \frac{s}{\delta + n + g} \Rightarrow k^* = \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^2. \quad (3.12)$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^2 = k^*. \quad (3.13)$$

Tomando $s = 0,2$ e $(\delta + n + g) = 0,05$ de (3.12) tem-se $k^* = 16$.

O gráfico da solução da equação (3.10) com a condição inicial $k(0) = 1$ está represento na Figura 3.6.

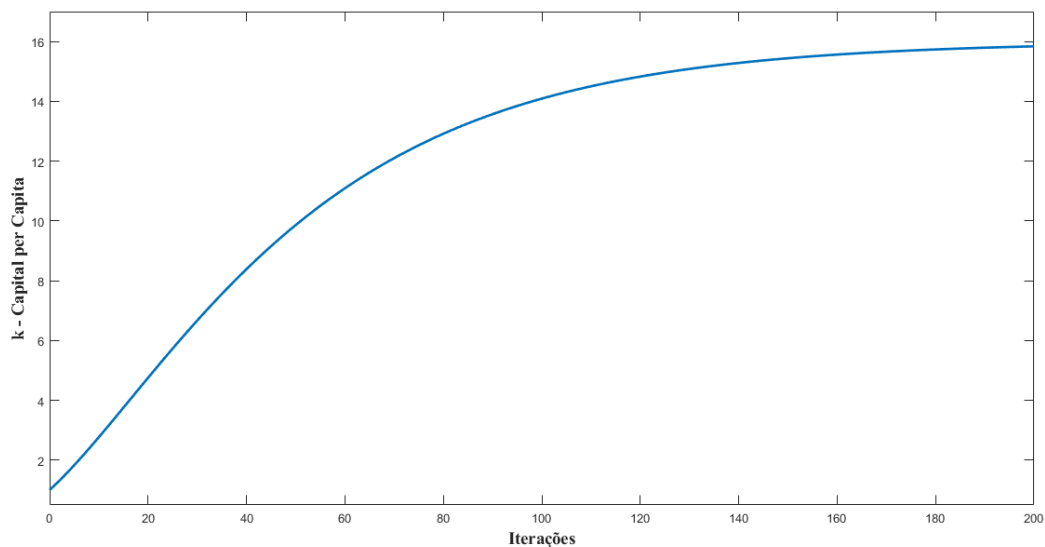


Figura 3.6: Solução da equação (3.10).

Além disso, variando a condição inicial é possível ver que o sistema sempre converge para o mesmo ponto, independentemente do ponto de partida, conforme a equação (3.13). Veja a Figura 3.7 a qual temos as soluções numéricas da equação (3.10) variando a condição inicial, através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem (BURDEN; FAIRES, 2011).

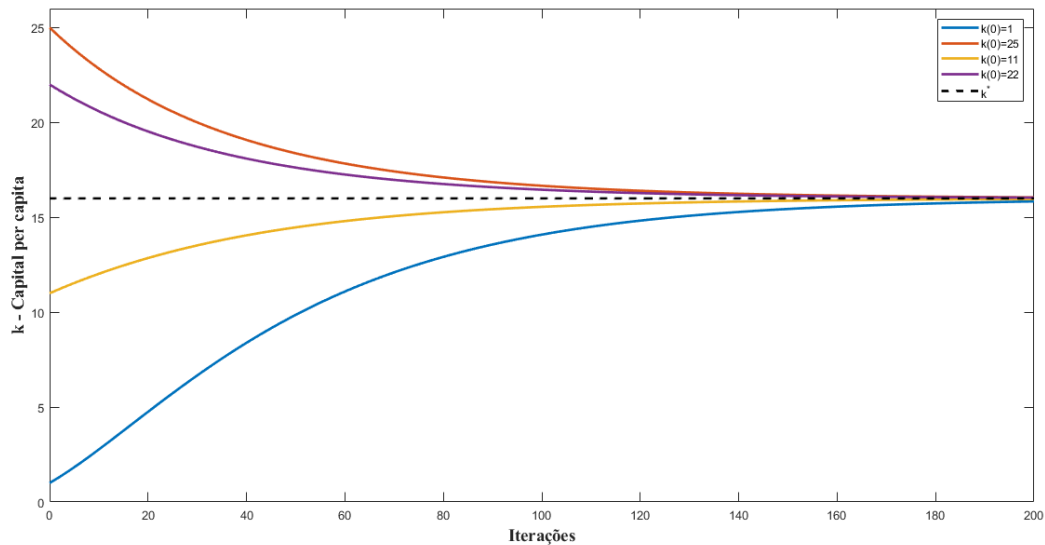


Figura 3.7: Soluções numéricas da equação (3.10) variando a condição inicial.

Na Figura 3.8 é exibido o crescimento do capital per capita (k) em função do tempo com o campo de direções das retas tangentes.

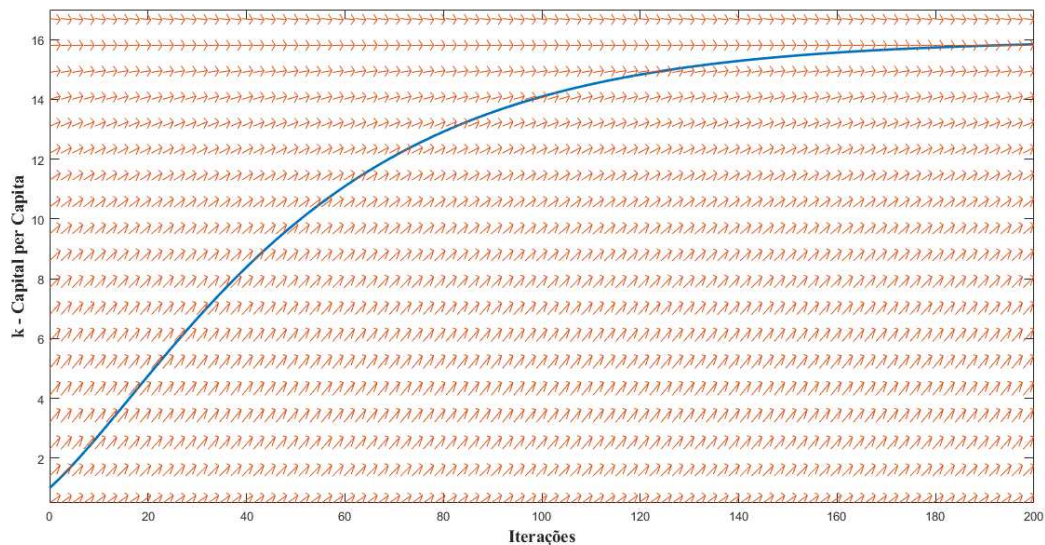


Figura 3.8: Solução numérica da equação (3.10) com o campo de direções das retas tangentes.

Na próxima seção é introduzido o modelo fuzzy de Solow, com o parâmetro s sendo a variável de saída de um SBRF.

3.4 O Modelo Fuzzy de Solow Global

O objetivo deste estudo é utilizar a teoria dos conjuntos fuzzy para determinar o parâmetro “ s ” da equação (3.7) como sendo a variável de saída de um SBRF. A ideia de realizar este processo surge tendo em vista a dificuldade para obter este parâmetro pelos métodos econométricos

tradicionais. Para construir este sistema fuzzy utilizou-se três variáveis de entrada que foram indicadas pelo especialista da área econômica Prof. Dr. Julio Fernando Costa Santos, do Instituto de Economia e Relações Internacionais da UFU. As variáveis selecionadas foram:

1. **Consumo das famílias/PIB (x_1):** que representa a participação relativa do consumo das famílias no PIB (FEENSTRA; INKLAAR; TIMMER, 2015).
2. **O Saldo em Transações Correntes (x_2):** que é obtido fazendo a diferença entre o saldo de importações e o saldo de exportações de um país (FEENSTRA; INKLAAR; TIMMER, 2015).
3. **A Taxa de Juros Real (x_3):** é a taxa de juros que um investidor, poupador ou credor recebe após descontar a inflação (WORLD.BANK.DATA, 2021).

Desta forma, na equação (3.7) tem-se $s = s(x_1, x_2, x_3)$. A arquitetura deste SBRF é apresentada na Figura 3.9.

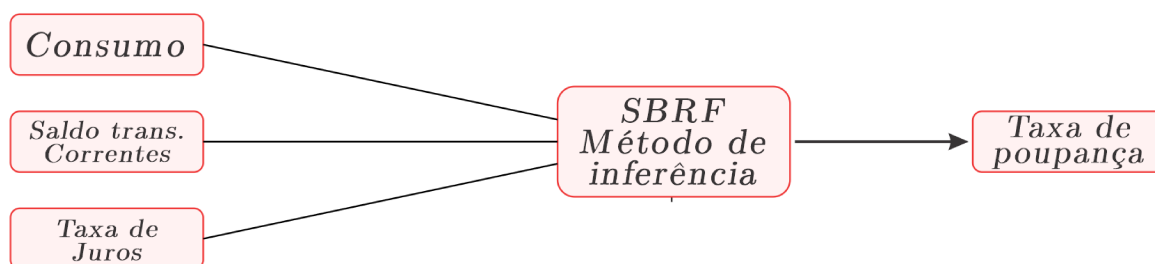


Figura 3.9: Arquitetura do SBRF.

3.4.1 Tratamento de Dados

Para obter os dados necessários para o processo utilizou-se duas fontes, a Penn World Table (FEENSTRA; INKLAAR; TIMMER, 2015), uma planilha que reúne dados econômicos de diversos países, e o Banco Mundial (WORLD.BANK.DATA, 2021). Na Figura 3.10 é mostrada a forma de obtenção de cada um dos dados utilizados na construção do SBRF.

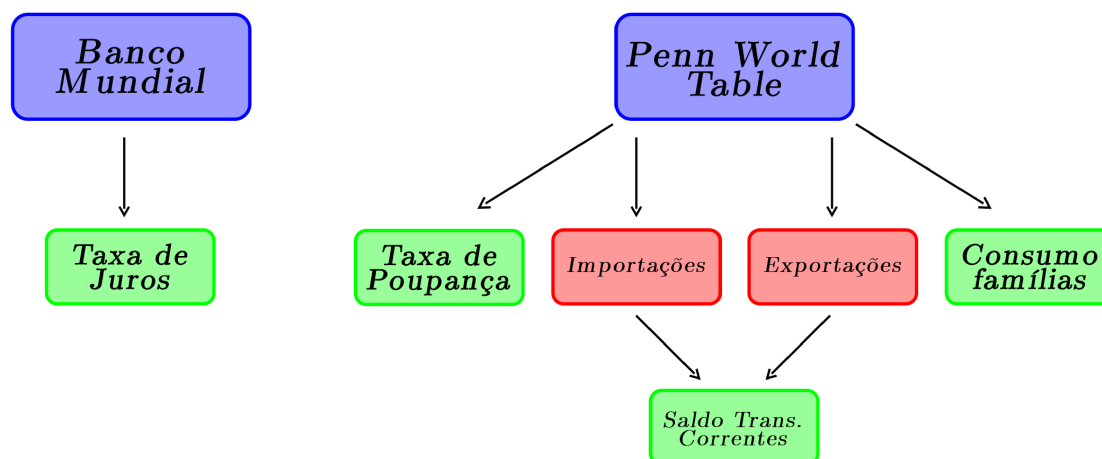


Figura 3.10: Diagrama da obtenção de dados.

Após obter os dados necessários de todos os países disponíveis nas fontes consultadas, foi necessário um extenso trabalho de tratamento de dados. Devido ao fato que vários países não

tinham todos os dados disponíveis em alguns dos anos selecionados, sendo assim foi necessário fazer um cruzamento de dados para determinar os países que possuíam todos os dados necessários. No final do processo determinou-se os anos de treinamento da rede neural e os de validação, conforme a Tabela 3.1.

	Número de Países	Período selecionado	Qtd. de dados
Treinamento	73	2016-2018	188
Validação	54	2019	54

Tabela 3.1: Informações sobre os dados utilizados.

Além disso, o domínio de cada variável de entrada e da saída são apresentados na Tabela 3.2.

	Taxa de Juros	C. das Famílias	Saldo em Trans. C.	Taxa de Poupança
Mínimo	-30,41239	0,14515	0,12500	0,02992
Máximo	15,95218	0,96461	2,40422	0,58459

Tabela 3.2: Domínio das variáveis utilizadas para criação do SBRF.

3.4.2 Metodologia Utilizada na Construção e Validação do SBRF

A construção do SBRF ocorreu no âmbito do software (R Core Team, 2020) com o pacote FRBS (RIZA *et al.*, 2015) que possui as duas redes neuro-fuzzy utilizadas neste trabalho. O pacote FRBS permite a escolha da quantidade de funções de pertinência das variáveis de entrada e de saída para o treinamento. Assim, para selecionar a quantidade ótima de funções de pertinência foram realizados testes empíricos variando essa quantidade de 2 até 20 e avaliando os erros na validação do sistema após cada teste. Os dados de treinamento foram empregados no treinamento da rede neural, que por sua vez gerou um SBRF, posteriormente estimou-se a saída referente aos dados de validação através do SBRF e comparou-se os resultados com os dados reais. Essa metodologia está representada na Figura 3.11.

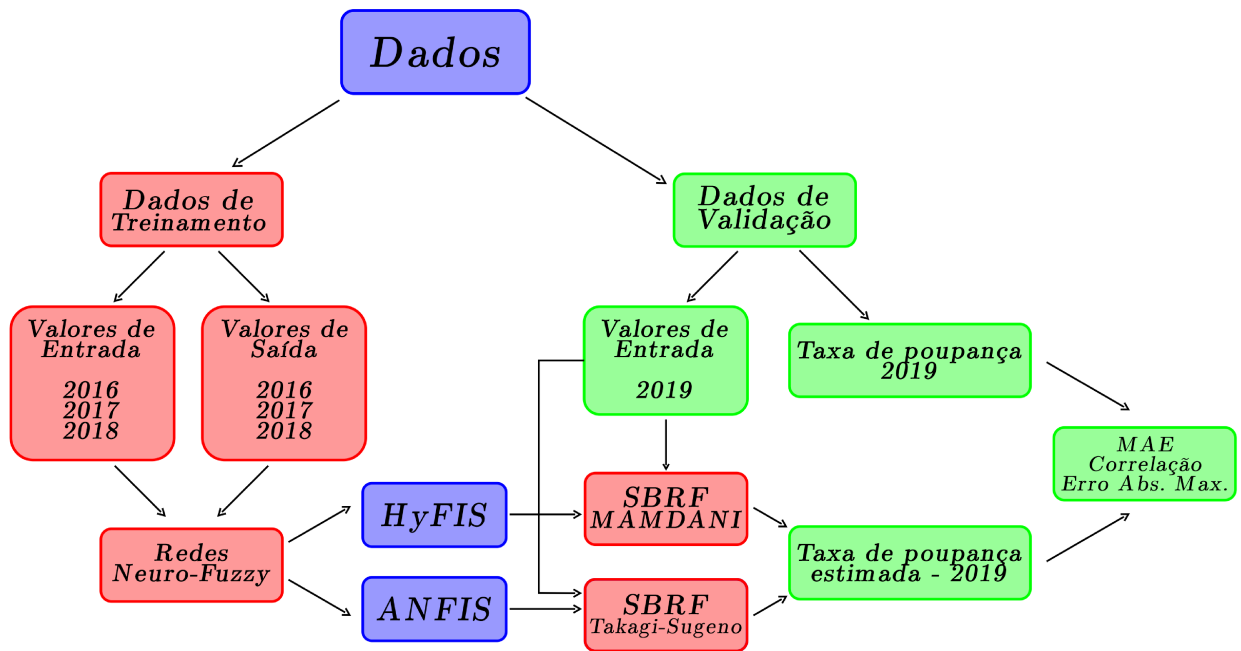


Figura 3.11: Esquema da modelagem utilizada no processo. Os retângulos vermelhos representam a etapa de treinamento e construção dos SBRFs e os verdes representam a etapa de validação.

Inicialmente, calculou-se apenas a correlação e o erro absoluto máximo para selecionar a quantidade ótima de funções de pertinência para o HyFIS. A cada teste realizado, os valores dos erros foram salvos, e constam na Tabela 3.3.

Num. Funç.	Correlação	EAM
2	0,28021	0,23972
3	0,71111	0,16172
4	0,48226	0,21213
5	0,72495	0,19143
6	0,71333	0,19074
7	0,71613	0,13630
8	0,73692	0,15267
9	0,72676	0,13879
10	0,79614	0,14606
11	0,76542	0,19236
12	0,82650	0,16208
13	0,80474	0,17617
14	0,82367	0,18343
15	0,82036	0,15734
16	0,76914	0,18539
17	0,87330	0,11650
18	0,82299	0,17193
19	0,78991	0,17054
20	0,79404	0,13254

Tabela 3.3: Tabela com os erros obtidos com a HyFIS.

Assim, a quantidade ótima de funções de pertinência para o HyFIS é 17. Posteriormente, o MAE foi inserido no leque de métricas para fazer a comparação entre o modelo gerado pelo

o HyFIS e o gerado pelo ANFIS. Na Tabela 3.4 é mostrada a comparação entres esses dois sistemas neuro-fuzzy, ambos com 17 funções de pertinência.

Rede Neural	MAE	EAM
ANFIS	0,34886	0,537399
HyFIS	0,02676	0,116455

Tabela 3.4: Comparação HyFIS x ANFIS.

Os gráficos das funções de pertinência da variável consumo das famílias do SBRF gerado pelo HyFIS estão representados na Figura 3.12.

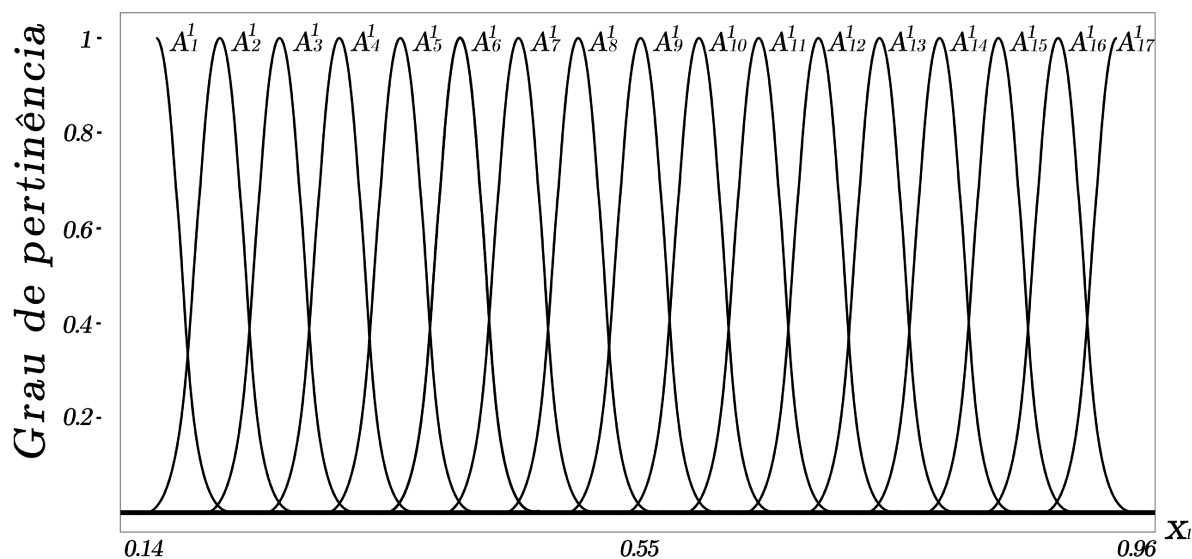


Figura 3.12: Funções de pertinência da variável consumo das famílias.

Os gráficos das funções de pertinência das demais variáveis do SBRF gerado tanto pelo HyFIS quanto pelo ANFIS, são determinados de modo similar. A única diferença entre os gráficos diz respeito ao intervalo de variação de cada variável, os quais estão representados na Tabela 3.2.

Portanto, com os resultados apresentados na Tabela 3.4, conclui-se que o HyFIS se mostrou superior em relação ao ANFIS para modelar o problema em questão. Isso posto, na seção seguinte é considerado apenas o SBRF gerado pelo HyFIS com 17 funções de pertinência.

3.4.3 Modelo Clássico de Solow x Modelo Fuzzy de Solow

Três países foram selecionados para serem analisados com base em seus respectivos crescimentos econômicos futuros dentro da perspectiva do modelo de Solow. Para isso, a função de produção utilizada foi a de Cobb-Douglas com $\alpha = 0.5$, obtendo a equação (3.10).

Os países selecionados para essa análise foram Nova Zelândia, Brasil e Gâmbia. Esta seleção foi feita com o intuito de realizar este estudo com países em situações econômicas diferentes, levando em consideração a classificação quanto ao nível de desenvolvimento econômico apresentada na referência (ESCAP *et al.*, 2017).

Os parâmetros n , g e δ do modelo de Solow para estes países foram obtidos através da Penn World Table (FEENSTRA; INKLAAR; TIMMER, 2015). No caso de n e g , ambos foram estimados fazendo a taxa de variação da população e do capital humano do ano de 2018 para o ano de 2019, respectivamente. Esses dados constam na Tabela 3.5 .

País	n	g	delta	s real	s estimado
Nova Zelândia	0,0084	0,006	0,037	0,2173	0,2226
Brasil	0,0075	0,0238	0,0478	0,1714	0,1830
Gâmbia	0,0296	0,0179	0,0528	0,1194	0,1259

Tabela 3.5: Dados dos países selecionados, sendo os valores de s estimados obtidos por meio do SBRF e os valores s reais são referentes ao ano de 2019 (FEENSTRA; INKLAAR; TIMMER, 2015).

Supondo que estes três países mantenham estes parâmetros constantes no tempo e que suas economias estabilizem, pode-se substituí-los na equação (3.10). Assim, as equações do modelo de Solow para cada país selecionado são dadas por:

1 Nova Zelândia

$$\dot{k}(t) = sk^{0,5} - \delta k(t) - nk(t) - gk(t) \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow \dot{k}(t) = 0,2173k^{0,5} - 0,0514k(t) : \text{com } s \text{ real} \quad (3.15)$$

$$\Rightarrow \dot{k}(t) = 0,2226k^{0,5} - 0,0514k(t) : \text{com } s \text{ estimado pelo SBRF.} \quad (3.16)$$

2 Brasil

$$\dot{k}(t) = sk^{0,5} - \delta k(t) - nk(t) - gk(t) \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow \dot{k}(t) = 0,1714k^{0,5} - 0,0791k(t) : \text{com } s \text{ real} \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow \dot{k}(t) = 0,1830k^{0,5} - 0,0791k(t) : \text{com } s \text{ estimado pelo SBRF.} \quad (3.19)$$

3 Gâmbia

$$\dot{k}(t) = sk^{0,5} - \delta k(t) - nk(t) - gk(t) \quad (3.20)$$

$$\Rightarrow \dot{k}(t) = 0,1194k^{0,5} - 0,1003k(t) : \text{com } s \text{ real} \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow \dot{k}(t) = 0,1259k^{0,5} - 0,1003k(t) : \text{com } s \text{ estimado pelo SBRF.} \quad (3.22)$$

Os valores de k^* calculados com os “ s ” reais e os estimados através da equação (3.12) estão representados na Tabela 3.6. Além disso, é possível observar o impacto da taxa de poupança no investimento de equilíbrio (k^*), essa comparação é realizada para os três países estudados e estão representadas nas Figuras 3.13, 3.14 e 3.15.

País	k^* com os dados reais	k^* com o s estimado pelo SBRF
Nova Zelândia	17,87	18,76
Brasil	4,7	5,35
Gâmbia	1,42	1,58

Tabela 3.6: Valores do investimento de equilíbrio (k^*) real e estimado.

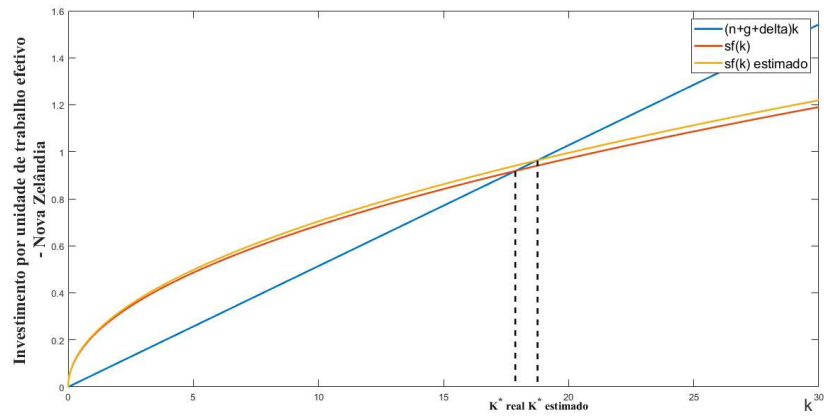


Figura 3.13: k^* real x k^* estimado pelo SBRF referente a Nova Zelândia, em que $f(k) = k^{0,5}$.

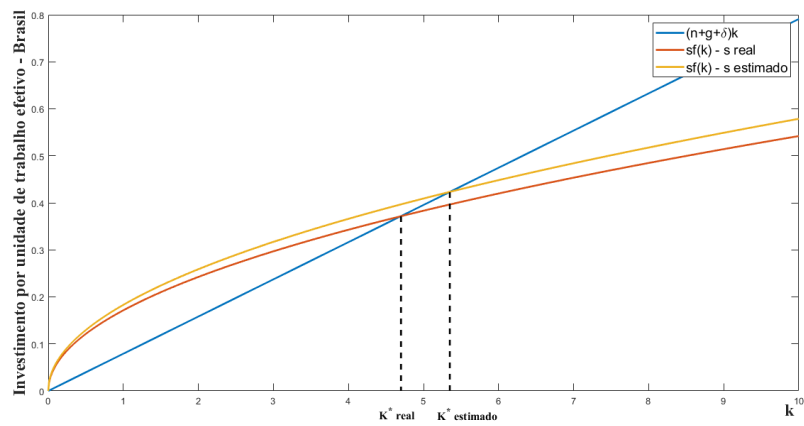


Figura 3.14: k^* real x k^* estimado pelo SBRF referente ao Brasil, em que $f(k) = k^{0,5}$.

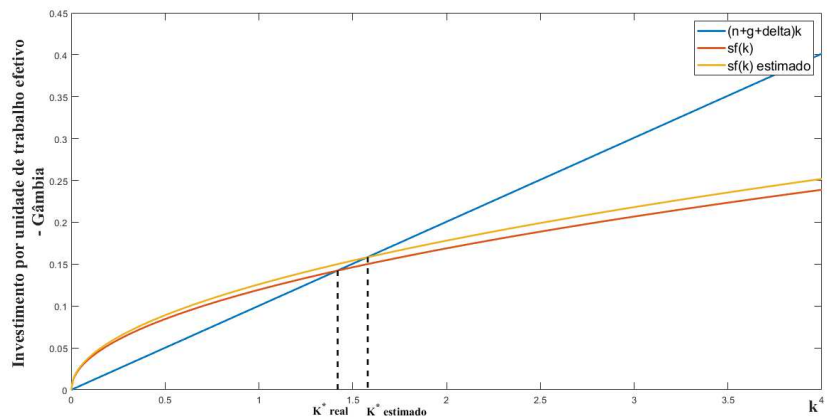


Figura 3.15: k^* real x k^* estimado pelo SBRF referente a Gâmbia, em que $f(k) = k^{0,5}$.

Nota-se que os valores de k^* calculados utilizando a taxa de poupança estimada pelo SBRF possuem valores sobrevalorizados em comparação com os valores de k^* reais.

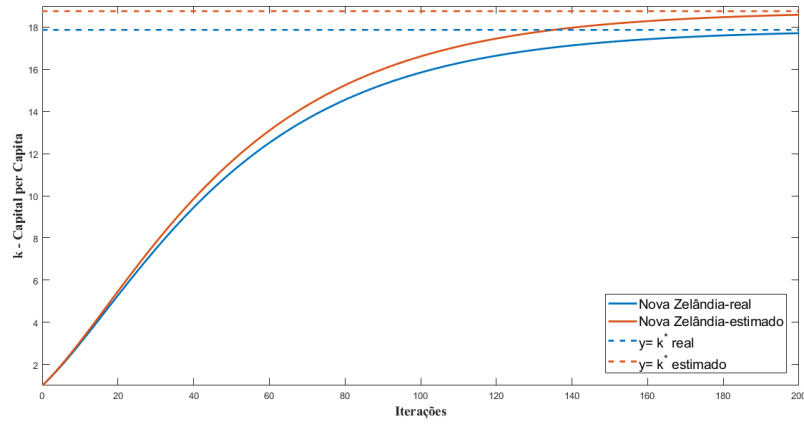


Figura 3.16: Soluções numéricas das equações (3.15) e (3.16), e as assíntotas horizontais $y = k^*$ com valores de s obtidos pelo SBRF e com valores reais referentes a Nova Zelândia.

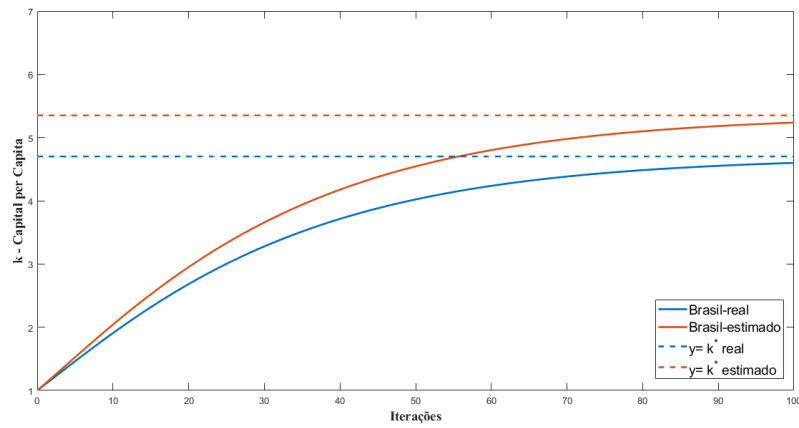


Figura 3.17: Soluções numéricas das equações (3.18) e (3.19), e as assíntotas horizontais $y = k^*$ com valores de s obtidos pelo SBRF e com valores reais referentes ao Brasil.

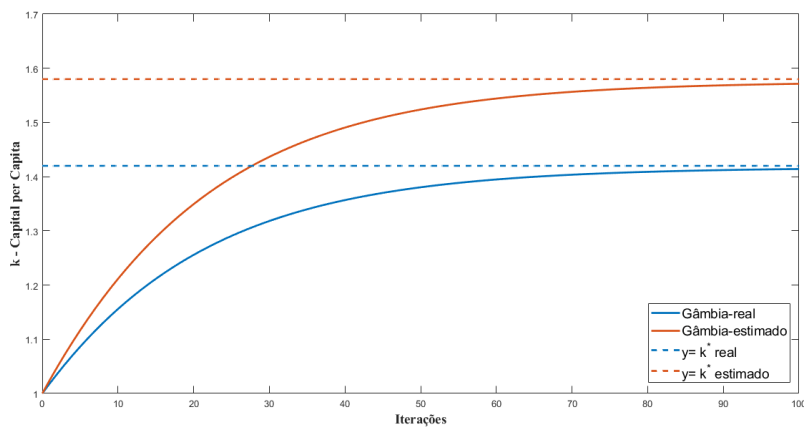


Figura 3.18: Soluções numéricas das equações (3.21) e (3.22), e as assíntotas horizontais $y = k^*$ com valores de s obtidos pelo SBRF e com valores reais referentes a Gâmbia.

Com as informações apresentadas nesta seção pode-se observar que o investimento de equilíbrio de uma economia está relacionado ao nível de desenvolvimento do país em questão. Os gráficos das Figuras 3.16, 3.17 e 3.18 mostram o comportamento de estabilidade das economias estudadas ao longo do tempo, sendo o erro absoluto entre os valores de k^* estimado e reais 0.89, 0.65 e 0.16, respectivamente. As hipóteses exigidas para o equilíbrio de uma economia na perspectiva do modelo de crescimento de Solow são inalcançáveis no mundo real, uma vez que o modelo não considera diversos fatores que afetam diretamente as variáveis econômicas consideradas.

Na próxima seção é construído um modelo fuzzy de Solow utilizando somente dados brasileiros.

3.5 O Modelo Fuzzy de Solow Nacional

Com um intuito investigativo, o processo descrito na seção 3.4 é realizado somente com dados do Brasil. Neste caso, foram utilizados dados do ano de 2000 até 2019, dos quais os dados de 2018 e 2019 foram utilizados para validação do sistema fuzzy e o restante dos dados foram usados para o treinamento das redes neuro-fuzzy.

Para esta abordagem, a taxa de juros é obtida através da diferença entre o índice de preços no consumidor (IPCA) e a taxa Selic. Como estas taxas são divulgadas mensalmente, foi necessário um processo de normalização dos dados para transformá-los em dados anuais. Para isso, foram realizados os seguintes cálculos para cada ano:

$$(1 + (\text{taxa de juros média do ano} \cdot 0,01))^{12} - 1.$$

Os demais dados foram obtidos na PWT 10.0 conforme descrito na seção anterior. Os resultados dos testes utilizando a rede neuro-fuzzy HyFIS constam na Tabela 3.7.

Num. Funç.	EAM	MAE
2	0,04978	0,04826
3	0,06456	0,06305
4	0,08448	0,06297
5	0,02461	0,01932
6	0,05892	0,04287
7	0,04165	0,03660
8	0,06195	0,04555
9	0,06948	0,04822
10	0,05956	0,04253
11	0,05896	0,04166
12	0,06468	0,05106
13	0,06070	0,04235
14	0,06540	0,04365
15	0,06195	0,04164
16	0,06596	0,04339
17	0,06289	0,04164
18	0,06018	0,04319
19	0,02861	0,02706
20	0,06116	0,04302

Tabela 3.7: Tabela com os erros obtidos com o HyFIS.

Assim, a quantidade ótima de funções de pertinência para o HyFIS é 5. O gráfico das funções de pertinência do SBRF gerado pelo HyFIS e pelo ANFIS para a variável consumo das

famílias está representado na Figura 3.19. Além disso, o domínio de cada variável de entrada e da saída para os dados do Brasil estão representados na Tabela 3.8.

	Taxa de Juros	C. das Famílias	Saldo em Trans. C.	Taxa de Poupança
Mínimo	0,20520	0,62090	0,01807	0,18526
Máximo	0,31508	0,71494	0,15482	0,29051

Tabela 3.8: Domínio das variáveis utilizadas para criação do SBRF.

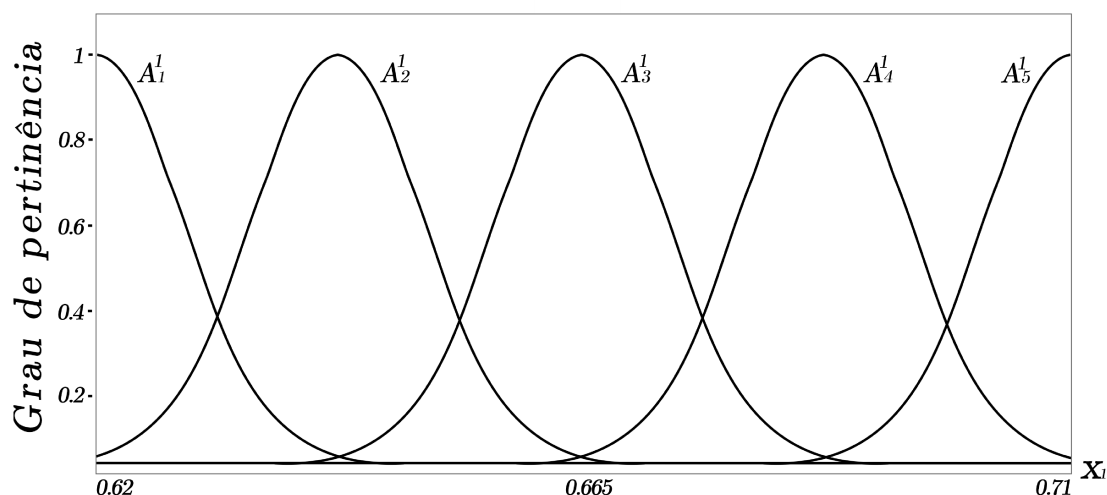


Figura 3.19: Funções de pertinência do consumo das famílias com dados somente do Brasil.

Os gráficos das funções de pertinência referentes às demais saídas são obtidos de modo similar. Na Tabela 3.9 é apresentada a comparação entre o SBRF gerado pelo HyFIS e pelo ANFIS, ambos com 5 funções de pertinência.

Rede Neural	MAE	EAM
ANFIS	0,04730319	0,06908321
HyFIS	0,01932	0,02461

Tabela 3.9: Comparação HyFIS x ANFIS para o caso do Brasil.

Para essa abordagem, novamente nota-se uma superioridade do HyFIS em relação ao ANFIS para modelar a taxa de poupança, através das métricas MAE e do erro absoluto máximo.

3.6 Conclusão

Os resultados apresentados mostram que de fato a junção das redes neurais artificiais com a teoria dos conjuntos fuzzy é uma ferramenta poderosa na modelagem de problemas. É importante destacar o desempenho do HyFIS em relação a ANFIS para modelar a taxa de poupança, principalmente no que se diz respeito ao primeiro SBRF utilizando os dados de 74 países.

No caso do SBRF com dados somente do Brasil, os resultados foram promissores. Porém, devido à baixa quantidade de dados disponíveis, a validação do SBRF foi realizada apenas com dados referentes a dois anos.

Estes estudos referentes ao modelo teórico de Solow nos motivaram a continuar desenvolvendo novas abordagens econômicas utilizando redes neuro-fuzzy, porém, em contextos mais realísticos. No próximo capítulo é apresentado o processo de construção de um SBRF que tem como saída o crescimento do PIBpm do Brasil, para isso foram utilizadas dez variáveis de entrada, evidenciando o poder computacional das redes neuro-fuzzy utilizadas.

Capítulo 4

Modelo de Previsão para o Crescimento do PIBpm do Brasil

“O que vai gerar a riqueza das nações é o fato de cada indivíduo procurar o seu desenvolvimento e crescimento econômico pessoal” (Adam Smith, 1776).

4.1 Introdução

De acordo com a XP.Investimentos (2019), uma das maiores corretoras brasileiras, o mercado utiliza uma série de “termômetros” para avaliar a economia de um país, e o PIB é um dos principais índices considerados nessas avaliações. Assim, surge um grande interesse ao redor desse índice, mas afinal o que é o PIB? Segundo o IBGE (2017), o PIB é a soma de todos os bens e serviços finais produzidos por um país, estado ou cidade, geralmente em um ano. Este indicador mede apenas os bens e serviços finais para evitar dupla contagem, além disso, essas variáveis que compõem o PIB são medidas no preço em que chegam ao consumidor. Dessa forma, levam em consideração também os impostos sobre os produtos comercializados.

O PIB não é o total de riqueza existente em um país. Esse é um equívoco muito comum, pois dá a impressão de que o PIB seria um estoque de valor que existe na economia, como uma espécie de tesouro nacional. Se um país não produzir nada em um ano, o seu PIB será nulo (IBGE, 2017).

Um outro indicador comumente utilizado nas ciências econômicas é o PIBpm, que leva em consideração os impostos sobre produtos, o valor adicionado a preços básicos, o consumo pessoal, o consumo do governo, a formação bruta de capital fixo, avariação de estoques, as exportações e importações de bens e serviços. Em algumas situações, pode ser mais conveniente utilizar este indicador ao invés do PIB, uma vez que o PIBpm leva em conta alguns fatores não contabilizados no PIB.

Tendo em vista a importância do PIBpm, surgem diversos modelos de previsão para este, ou para a sua taxa de crescimento. Este capítulo traz a construção de um SBRF que tem como saída a taxa de crescimento do PIBpm trimestral brasileiro anualizada. Para isso, testou-se o ANFIS e o HyFIS. Uma das métricas utilizadas para comparar os SBRFs construídos por essas duas redes neuro-fuzzy é o coeficiente de correlação entre as saídas estimadas pelo SBRF e os valores reais para os dados de validação. Entretanto, o ANFIS demonstrou um desempenho não satisfatório, enquanto o HyFIS demonstrou resultados consistentes. Tal processo é descrito com detalhes nas seções a seguir.

4.2 Taxa de Crescimento do PIBpm do Brasil

O objetivo deste estudo é utilizar a teoria dos conjuntos fuzzy para determinar a taxa de crescimento do PIBpm a preços de mercado trimestral brasileiro anualizada (y) como sendo a variável de saída de um SBRF. Para determinar este sistema fuzzy utilizou-se dez variáveis de entrada que foram selecionadas pelo especialista da área econômica, Prof. Dr. Julio Fernando Costa Santos, do Instituto de Economia e Relações Internacionais da UFU. As variáveis selecionadas foram:

1. **Consumo das famílias/PIB** (x_1): representa a participação relativa do consumo das famílias no PIB (SIDRA-IBGE, 2021a).
2. **Investimento/PIB** (x_2): representa a participação relativa dos investimentos, formação bruta de capital fixo, no PIB. É utilizada como variável representante a taxa de poupança na economia (SIDRA-IBGE, 2021c).
3. **Gasto do Governo/PIB** (x_3): representa a participação relativa do gasto do governo no PIB (SIDRA-IBGE, 2021b).
4. **Exportações/PIB** (x_4): representa a participação relativa das exportações no PIB (SIDRA-IBGE, 2021d).
5. **Importações/PIB** (x_5): representa a participação relativa das importações no PIB (SIDRA-IBGE, 2021e).
6. **Índice de *Commodities* Trimestral** (x_6): é o índice em nível do valor das *commodities* (BETS, 2021c).
7. **Taxa de Crescimento Trimestral do PIB dos EUA** (x_7): representa a taxa de crescimento trimestral do PIB dos Estados Unidos da América (EUA) (IPEA, 2021a).
8. **Taxa de Crescimento Trimestral do PIB da Zona do Euro** (x_8): representa a taxa de crescimento trimestral do PIB da Zona do Euro (IPEA, 2021c).
9. **Média Trimestral da Taxa de Câmbio Real amarrada pela Produtividade** (x_9): representa a média trimestral da taxa de câmbio com correção inflacionária amarrada pela produtividade (BETS, 2021a).
10. **Selic Real Anualizada** (x_{10}): a Selic é a taxa básica de juros da economia brasileira. É o principal instrumento de política monetária utilizado pelo Banco Central (BC) para controlar a inflação (BETS, 2021b).

A arquitetura deste SBRF é apresentada na Figura 4.1.

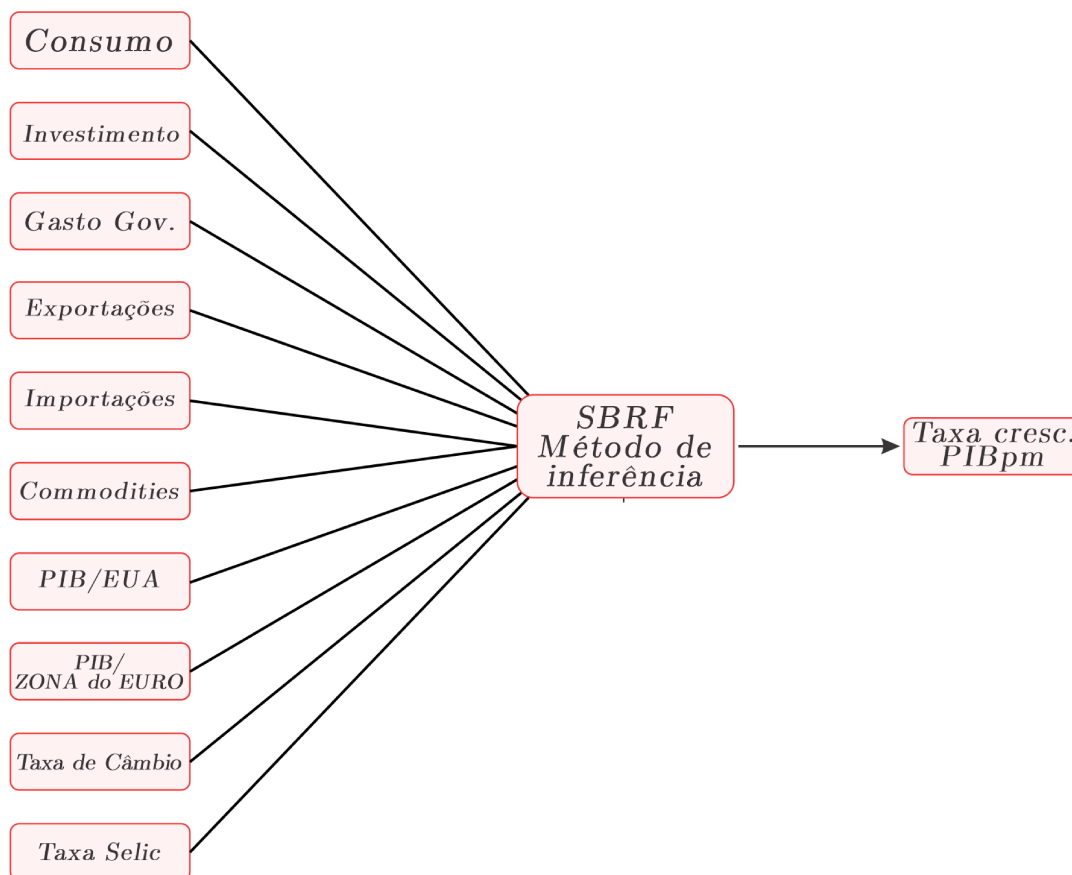


Figura 4.1: Arquitetura do SBRF.

4.3 Tratamento de Dados

Os dados para realização deste experimento foram obtidos através do software (R Core Team, 2020) que buscou dados nas fontes: O sistema de recuperação automática do IBGE (SIDRA-IBGE), o Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA) e o *Brazilian Economic Time* (BETS). Foram coletados dados do ano de 2000 até 2020 de forma trimestral, totalizando 84 trimestres de dados. As Figuras 4.2, 4.3 e 4.4 mostram as fontes de cada uma das dez variáveis de entrada escolhidas e também da saída, que foi obtida através do IPEA.

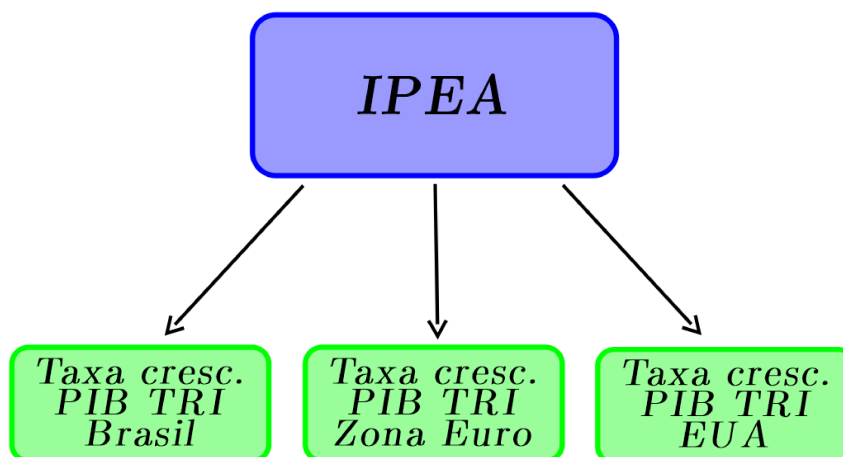


Figura 4.2: Diagrama da obtenção de dados no IPEA.

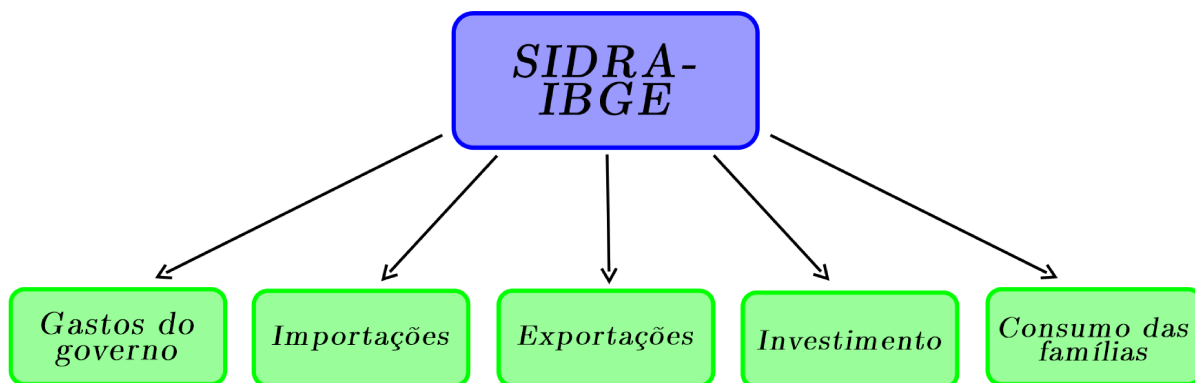


Figura 4.3: Diagrama da obtenção de dados no IBGE.

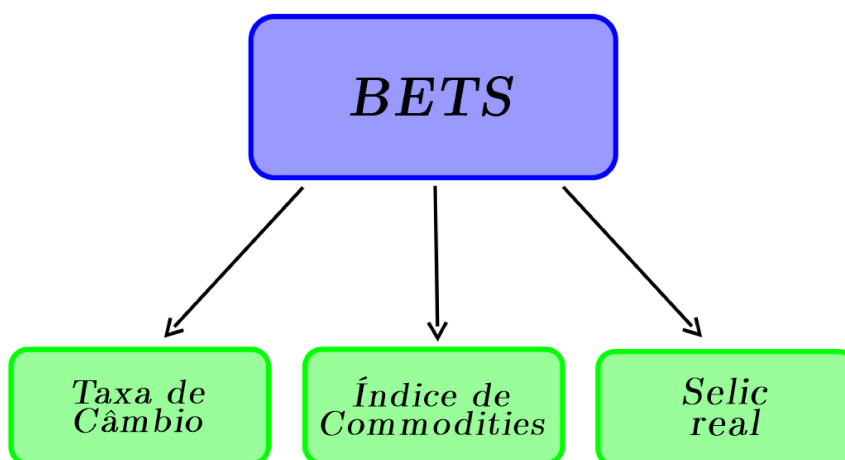


Figura 4.4: Diagrama da obtenção de dados no BETS.

Para selecionar os trimestres de validação do SBRF foi realizado um processo de seleção randômica no âmbito do software MATLAB dentre os 84 trimestres, os resultados estão apresentados na Tabela 4.1.

	Número de trimestres	Trimestres selecionados
Treinamento	74	1-6,8,9,11-14,16,17,19-22,24-32, 34-37,39-43,45,46,47-64,66-84.
Validação	10	7,10,15,18,23,33,38,44,46,65.

Tabela 4.1: Informações sobre os dados utilizados.

Além disso, o domínio de cada variável de entrada e da saída estão representados nas Tabelas 4.2 e 4.3.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Mínimo	0,59428	0,14141	0,18240	0,09577	0,10471
Máximo	0,65529	0,22614	0,20908	0,18240	0,15771

Tabela 4.2: Domínio das variáveis utilizadas para construção do SBRF, as unidades de medida destas variáveis são suas respectivas participações no PIB em porcentagem.

	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	y
Mínimo	50,38000	-0,03800	-4,80000	55,02667	0,00784	-0,10900
Máximo	202,10333	0,06000	3,70000	159,58000	0,13789	0,08518

Tabela 4.3: Domínio das variáveis utilizadas para construção do SBRF, as variáveis x_7 , x_8 , x_{10} e y são dadas em porcentagem.

4.4 Metodologia Utilizada na Construção e Validação do SBRF através do HyFIS

Assim como no capítulo anterior, a construção do SBRF ocorreu no âmbito do software (R Core Team, 2020) com o pacote FRBS (RIZA *et al.*, 2015) com a rede neuro-fuzzy HyFIS. Novamente, para selecionar a quantidade ótima de funções de pertinência gaussianas foram realizados testes empíricos variando essa quantidade de 2 até 20 e avaliando os erros na validação do sistema após cada teste. Como mencionado anteriormente após os dados de treinamento e validação estarem definidos, os dados de treinamento foram utilizados para treinar a rede neuro-fuzzy, que por sua vez gerou um SBRF. Posteriormente, determina-se as saídas referentes aos dados de validação do SBRF gerado e compara-se os resultados com os dados reais. Essa metodologia está representada na Figura 3.11.

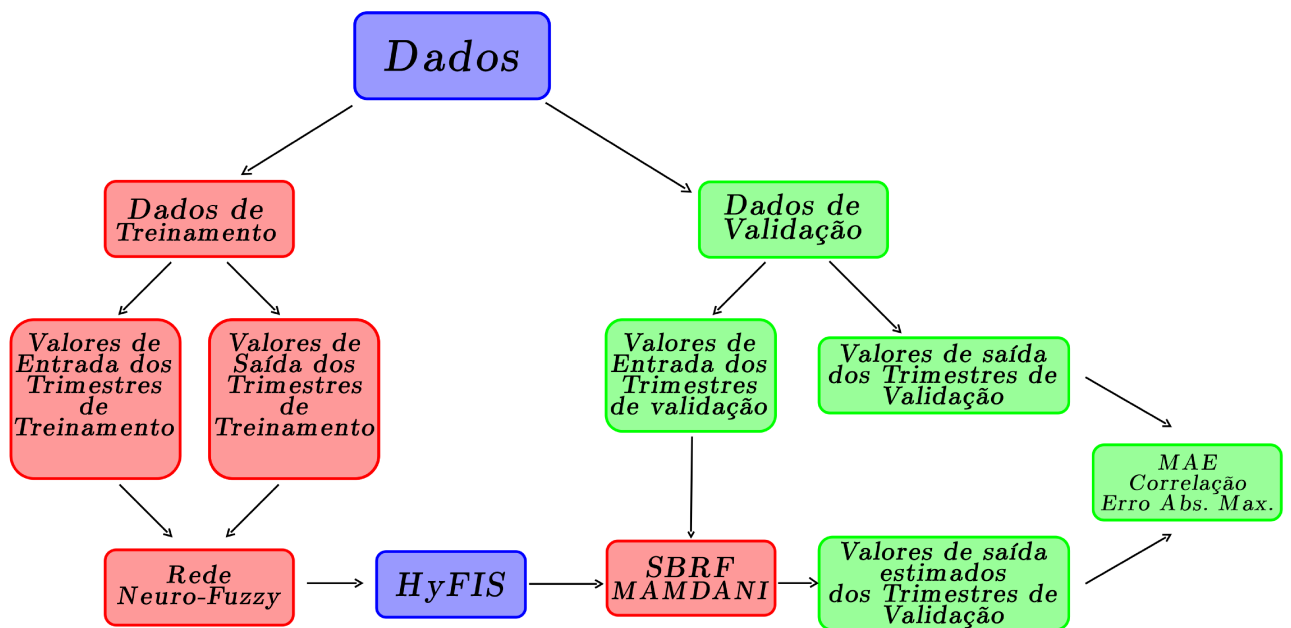


Figura 4.5: Esquema da modelagem utilizada no processo de construção do SBRF. Os retângulos vermelhos representam a etapa de treinamento e construção do SBRF e os verdes representam a etapa de validação.

Um dos pontos abordados na referência (HOOGSTRATE; OSANG, 2007) é a relação entre o PIB e a taxa de poupança (x_2), um choque na taxa de poupança provoca uma forte reação positiva de crescimento do PIB que permanece significativo em períodos subsequentes. Através dessas informações, pode-se concluir que a influência da taxa de poupança (x_2) no PIB ocorre de maneira mais intensiva nos 4 anos subsequentes, tal fato é representado na Figura 4.6.

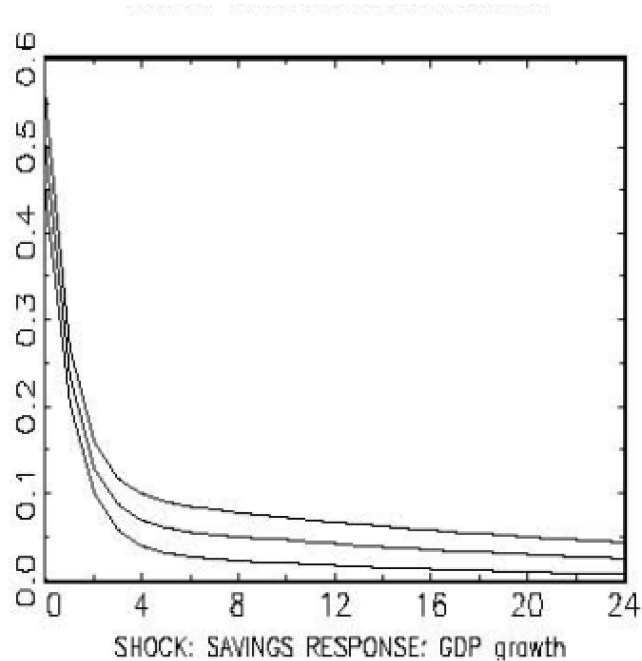


Figura 4.6: Impacto da taxa de poupança no PIB. Fonte: (HOOGSTRATE; OSANG, 2007).

Com base nessa informação, é construído um SBRF que tem como saída a taxa de crescimento do PIBpm trimestral brasileiro anualizada para valores x trimestres à frente das entradas, o que traz para o experimento uma possibilidade de realizar previsões. Para selecionar quantos trimestres à frente trazem resultados mais próximos dos valores de validação foram realizados testes empíricos levando em consideração o tempo de influencia da taxa de poupança no PIB. Foram realizados 304 testes variando os valores de x entre 1 e 16 trimestres e a quantidade de funções de pertinência gaussianas entre 2 e 20 para as entradas e a saída.

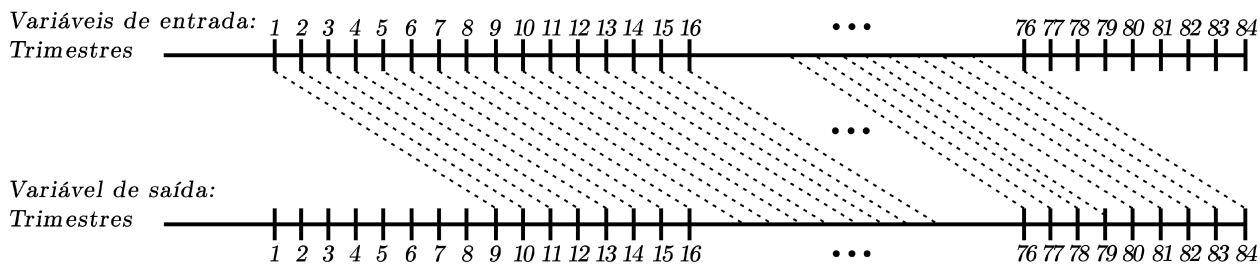


Figura 4.7: Exemplo da defasagem dos dados para $x = 8$ trimestres.

Na Tabela 4.4 temos os resultados dos testes feitos utilizando a defasagem de 8 trimestres entre as entradas e a saída, conforme a Figura 4.7. É importante mencionar que os trimestres utilizados para o treinamento do SBRF foram se alterando a cada teste, isso ocorre pois a defasagem subutiliza alguns dados, isso fica claro na Figura 4.7 em que não se tem as saídas referentes aos trimestres de 77 a 84. Assim, para x trimestres de defasagem se tem $74 - x$ trimestres de treinamento.

Para uma melhor visualização, os dados da Tabela 4.4 estão representados como gráfico de barras na Figura 4.8.

Num. Funç.	Correlação	EAM
2	0,56524	0,08580
3	0,35969	0,10838
4	0,77131	0,05925
5	0,75653	0,04402
6	0,74566	0,05882
7	0,77325	0,06276
8	0,79032	0,07499
9	0,86727	0,03996
10	0,76031	0,06686
11	0,92806	0,03320
12	0,76241	0,06716
13	0,79000	0,07020
14	0,88899	0,05506
15	0,78594	0,06383
16	0,77602	0,06350
17	0,76161	0,06569
18	0,85033	0,06052
19	0,80806	0,07020
20	0,79133	0,06239

Tabela 4.4: Tabela com os erros obtidos com o HyFIS.

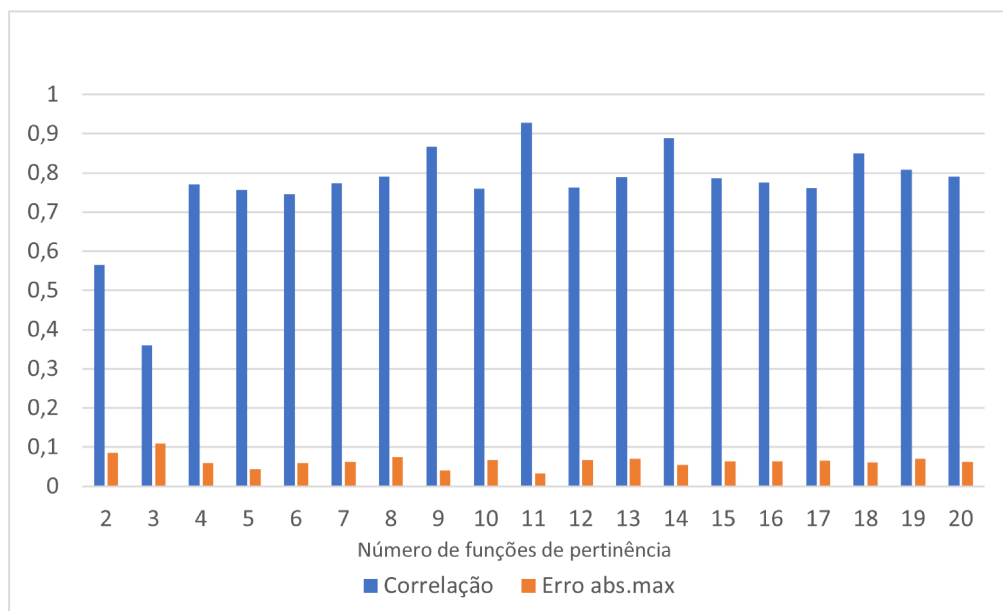


Figura 4.8: Gráfico de barras referente aos dados da Tabela 4.4.

Com base nos testes empíricos realizados, os melhores valores para serem trabalhados foram 8 trimestres de defasagem entre as entradas e a saída com 11 funções de pertinência para cada variável. Os gráficos das funções de pertinência do SBRF gerado pelo HyFIS para a variável consumo das famílias (x_t) está representado na Figura 4.9, em que $A_1^1, A_2^1 \dots A_{11}^1$ são os termos linguísticos dessa variável.

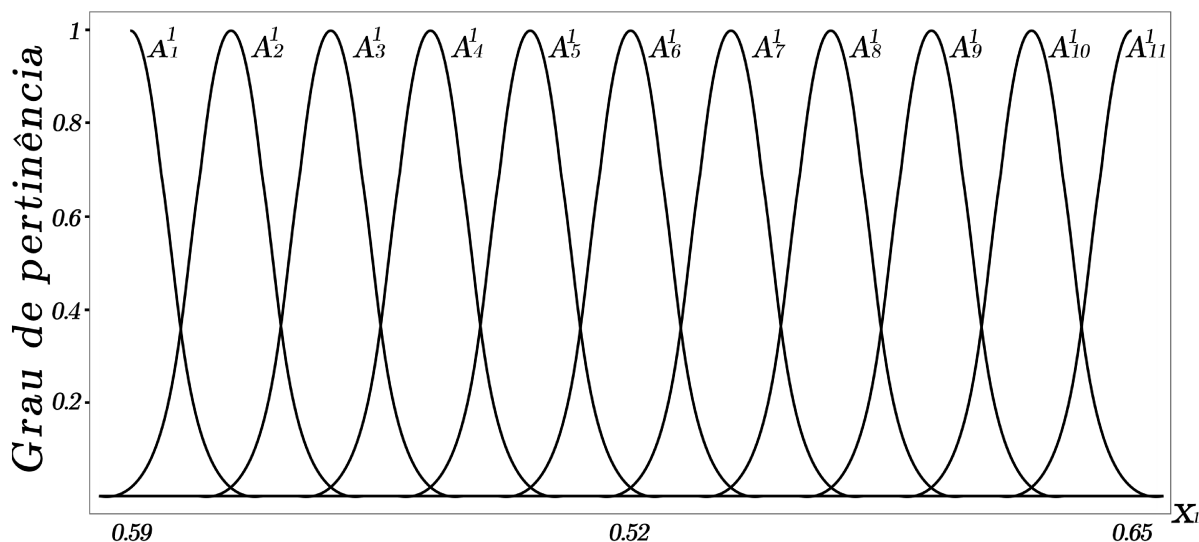


Figura 4.9: Funções de pertinência da variável consumo das famílias.

As funções de pertinências das demais variáveis são determinadas de forma similar. Este SBRF possui 65 regras fuzzy, a seguir tem-se um exemplo:

Se x_1 é A_5^1 e x_2 é A_6^2 e x_3 é A_5^3 e x_4 é A_5^4 e x_5 é A_4^5 e x_6 é A_3^6 e x_7 é A_8^7 e x_8 é A_{10}^8 e x_9 é A_3^9 e x_{10} é A_7^{10} então y é A_6^{11} .

O SBRF gerado pelo HyFIS tem o método de inferência de Mamdani e o de defuzzificação, o centro de gravidade. Os resultados obtidos pelo HyFIS são promissores, uma vez que a correlação com 11 funções de pertinência e 8 trimestres de defasagem é de 0,92806 e o erro absoluto máximo de 0,03320 entre os valores de saída do SBRF e os dados de validação. Na próxima seção é apresentado os resultados referentes às previsões utilizando este modelo.

4.5 Previsões para a Taxa Crescimento do PIBpm Brasileiro

Conforme apresentado na Figura 4.7 não existem os valores de saídas, nos dados estudados, correspondentes aos trimestres de 77 a 84. Assim, foi possível realizar uma previsão dos valores de saída destes trimestres através do SBRF construído. As primeiras tentativas de previsão não foram bem sucedidas, pois inicialmente o SBRF é definido para os valores máximos e mínimos das variáveis, conforme as Tabelas 4.2 e 4.3. Porém, os valores das entradas referentes aos trimestres de previsão estavam fora destes domínios. Para corrigir este problema foi definido um outro domínio para o SBRF, aumentando o limite superior e inferior do domínio de cada variável de entrada e saída em 20%. Os novos domínios das variáveis estão representados nas Tabelas 4.5 e 4.6, os resultados obtidos utilizando essas novas variações e 8 trimestres de defasagem estão representados na Tabela 4.7

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Mínimo	0,47542	0,11313	0,14577	0,07662	0,08377
Máximo	0,78635	0,27137	0,26491	0,22249	0,20108

Tabela 4.5: Domínio alterados das variáveis utilizadas para construção do SBRF.

	x_6	x_7	x_9	x_8	x_{10}	y_1
Mínimo	40,30400	-0,10800	-17,76000	44,02133	-0,01168	-0,13080
Máximo	242,523	0,07200	4,44000	191,49600	0,16547	0,11051

Tabela 4.6: Domínios alterados das variáveis utilizadas para construção do SBRF.

Num. Funç.	Correlação	EAM
2	-0,00281	0,07713
3	0,55990	0,04010
4	0,19176	0,05564
5	0,52448	0,12300
6	0,35054	0,04950
7	0,80114	0,03585
8	0,61530	0,07409
9	0,13452	0,06701
10	0,47892	0,04633
11	0,90540	0,02496
12	0,64142	0,04421
13	0,58616	0,09228
14	0,87182	0,02568
15	0,50256	0,13182
16	0,78315	0,02518
17	0,75043	0,02861
18	0,49741	0,12097
19	0,86605	0,02050
20	0,43165	0,12388

Tabela 4.7: Tabela com os erros obtidos com o HyFIS para os domínios alterados.

Para uma melhor visualização, os dados da Tabela 4.7 estão representados como gráfico de barras na Figura 4.10.

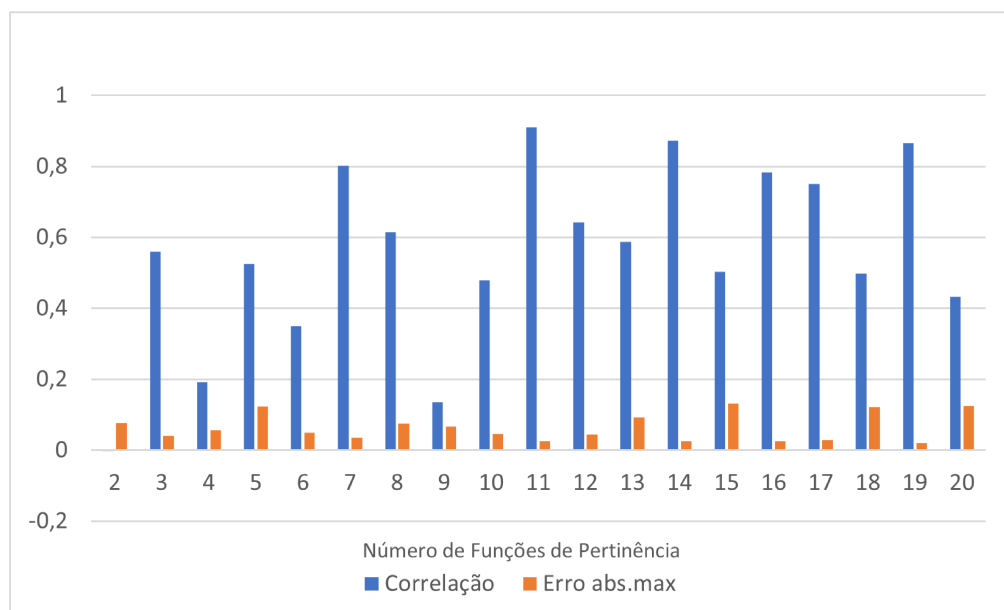


Figura 4.10: Gráfico de barras referente aos dados da Tabela 4.7.

Nota-se pelo gráfico de barras que a melhor configuração para o HyFIS se manteve com 11 funções de pertinência.

Deste modo foi possível realizar as previsões através do SBRF para 8 trimestres, os resultados das previsões constam na Tabela 4.8.

Trimestre de Entrada	Trimestre de Saída	Valor da Saída Estimada pelo SBRF
2019-1	2021-1	-0,01025
2019-2	2021-2	0,01393
2019-3	2021-3	0,01398
2019-4	2021-4	0,00444
2020-1	2022-1	-0,01019
2020-2	2022-2	0,06224
2020-3	2022-3	-0,01014
2020-4	2022-4	-0,01062

Tabela 4.8: Tabela com os valores de previsão obtidas pelo SBRF.

4.5.1 Comparação das Previsões com Dados Reais

Os valores reais da taxa de crescimento do PIBpm trimestral brasileiro anualizada já estão disponíveis no IPEA com os dois primeiros trimestres de 2021. Na Figura 4.11 é exibido o gráfico destes dados referentes ao ano 2000 até 2021. Nota-se que a pandemia causada pelo coronavírus desencadeou um comportamento drasticamente atípico no PIBpm, no segundo trimestre de 2020, com o auge das restrições causadas pela pandemia, houve uma diminuição da atividade econômica. Quanto ao crescimento do PIBpm observado no segundo trimestre de 2021, devido ao avanço da vacinação, houve um relaxamento nas restrições e uma retomada na demanda por produtos e serviços. Além disso, a valorização do dólar perante o real ocasionou uma alta nas exportações brasileiras.

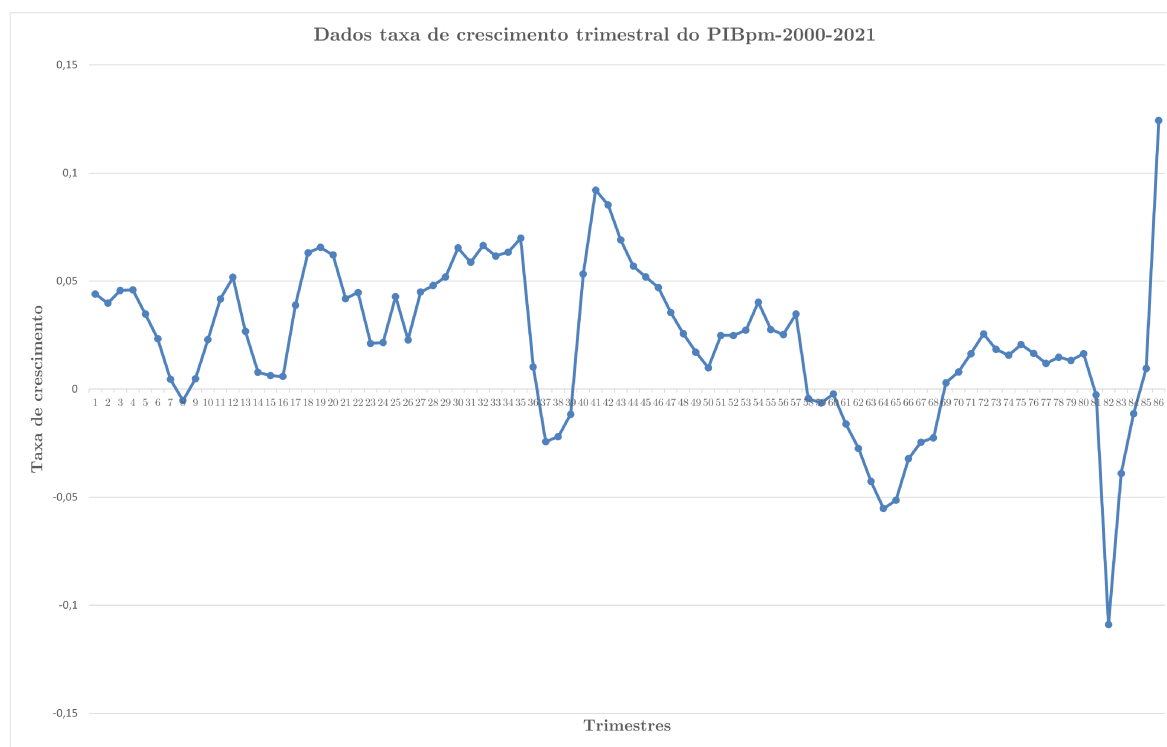


Figura 4.11: Gráfico aos dados da variável de saída (y). Fonte: (IPEA, 2021b).

Comparou-se os valores obtidos pelo SBRF com os dados do PIBpm referentes ao 1^o e 2^o trimestre de 2021, como pode ser visto na Tabela 4.9.

Trimestres	Valores Reais	Previsões
2021-1	0,009564965	-0,01025
2021-2	0,124273778	0,01393

Tabela 4.9: Comparação das previsões com dados reais.

Observa-se que as previsões para o PIBpm realizadas pelo SBRF não foram satisfatórias em comparação com os valores reais. É importante destacar que o valor do PIBpm no 2^o trimestre de 2021 não está no domínio da saída do SBRF, apesar de termos considerado um aumento de 20% no intervalo de variação de y , conforme ilustrado na Tabela 4.6. Acredita-se que isso ocorreu devido às variações abruptas no PIBpm descritas anteriormente.

Na próxima seção é apresentada uma comparação entre os resultados obtidos pelo HyFIS e o ANFIS utilizando 8 trimestres de defasagem e 11 funções de pertinência para os dados do PIBpm brasileiro.

4.6 HyFIS x ANFIS

O ANFIS integrado ao pacote FRBS do software R não obteve um desempenho satisfatório para a resolução deste problema. A comparação entre os resultados obtidos pelo ANFIS e pelo HyFIS utilizando oito trimestres de defasagem entre os dados das variáveis de entrada e da saída com 11 funções e pertinência constam na Tabela 4.10

Rede Neural	MAE	EAM
ANFIS	0,3461	0,5373
HyFIS	0,00906235	0,02496

Tabela 4.10: Comparação HyFIS x ANFIS.

Além da diferença nos resultados dos erros, o ANFIS do pacote FRBS não manteve resultados estáveis, uma vez que a correlação se altera a cada vez que o programa computacional é executado. Com relação às previsões os resultados do ANFIS são menos satisfatórios ainda, a rede neuro-fuzzy fornece valores iguais para todos os trimestres de previsão.

Outra abordagem matemática clássica que pode ser utilizada na modelagem da taxa de crescimento do PIBpm é a regressão linear múltipla. Na próxima seção é analisada a possibilidade da utilização deste método com base na validação de alguns dos pressupostos para o modelo obtido.

4.7 HyFIS x Regressão Linear Múltipla

A regressão linear múltipla é um modelo de análise usado para modelar a relação linear entre uma variável de desfecho contínua e múltiplas variáveis preditoras que podem ser contínuas ou discretas.

A regressão múltipla é um modelo estatístico explanatório. Sua base estatística advém da regressão linear, que se restringe a determinar uma variável y em função de outra variável x . A regressão múltipla permite expressar uma ou mais variáveis (dependentes) através de um conjunto de variáveis explicativas (independentes).

A inferência sobre os parâmetros de um modelo de regressão múltipla, quando realizada sob a ótica paramétrica, é válida se os resíduos deste modelo satisfazem as seguintes condições:

- **Distribuição Normal:** Os resíduos devem possuir uma distribuição normal em torno de zero. Para isso, basta verificar se os resíduos seguem a função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- **Independência:** Os resíduos não devem ser correlacionados, isto é, um resíduo não pode ser obtido através dos demais.
- **Homocedasticidade:** Os resíduos devem possuir uma variância constante. A variância é dada por:

$$\frac{\sum_{i=0}^n (x_i - M_x)^2}{n}$$

em que x_i são os resíduos, M_x é a média aritmética dos resíduos e n é a quantidade de dados.

Formalmente, estas condições podem ser verificadas pelos testes de normalidade (ROYSTON, 1995), independência (DURBIN, 1969) e homogeneidade (BREUSCH; PAGAN, 1979), isto é, a adequação do modelo está condicionada à validação destes três pressupostos.

Com o intuito de comparar os resultados obtidos pelo HyFIS com uma regressão linear múltipla, foram determinadas 16 regressões, variando a defasagem da saída em relação às entradas, conforme realizado com os dados utilizados na construção do SBRF pelo HyFIS. Assim, para cada regressão foram encontrados os coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_{11} \in \mathbb{R}$ tais que

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{10}x_{10} + a_{11}.$$

Entretanto, nenhuma das regressões obtidas respeitaram todos os pressupostos simultaneamente. Este resultado ressalta os aspectos positivos do HyFIS, mostrando-se uma metodologia promissora.

4.8 Conclusão

O propósito de construir um modelo preditivo para a taxa de crescimento do PIBpm brasileiro foi alcançado de forma satisfatória, apesar de haver uma situação atípica nos dados dos trimestres referentes ao ano de 2020, devido à pandemia causada pelo coronavírus.

Esses dados de 2020 podem ter prejudicado o modelo negativamente, ainda assim obteve-se uma correlação de 0,90540 entre valores de saídas estimados pelo SBRF e os reais. Segundo informações do especialista da área, modelos preditores relacionados às ciências econômicas não possuem valores de correlação na validação na faixa de 0,9; o que evidencia a qualidade dos resultados obtidos. Além disso, não foi possível realizar uma comparação direta entre o HyFIS e o ANFIS devido às instabilidades dos resultados gerados pelo ANFIS.

É importante destacar que o HyFIS gerou um SBRF com 10 variáveis de entrada e com 11 funções de pertinência em cada entrada o que mostra o poder computacional deste sistema neuro-fuzzy. Em suma, os estudos descritos neste capítulo podem ser vistos sobre duas perspectivas, a primeira sobre os ganhos de metodologia ao utilizar a teoria dos conjuntos fuzzy em problemas relacionados à economia, e uma segunda sobre a capacidade computacional do HyFIS.

Capítulo 5

Conclusão

A combinação entre as redes neurais artificiais e a teoria dos conjuntos fuzzy geram os sistemas neuro-fuzzy que são ferramentas de modelagem de alto nível. Tais sistemas foram os principais instrumentos matemáticos utilizados neste trabalho, que apresenta duas abordagens distintas que envolvem a construção de SBRFs. Os resultados obtidos são exibidos a seguir.

1. Abordagem: Cálculo da taxa de poupança

Nesta abordagem é estudado o modelo teórico de Solow que assume um estado estacionário da economia, onde o valor do investimento de equilíbrio é igual ao investimento atual. A metodologia proposta possibilita o cálculo da taxa de poupança e do investimento de equilíbrio de um país, através das três variáveis: consumo das famílias, saldo em transações correntes e a taxa de juros real. Esta metodologia leva em consideração a incerteza destas variáveis e tem, como saída do SBRF, um parâmetro de uma equação diferencial ordinária.

- *Modelo Fuzzy de Solow Global*: Neste estudo os sistemas neuro-fuzzy foram treinados com um banco de dados global, gerando resultados promissores. Na etapa de validação do SBRF gerado pelo HyFIS obteve-se o MAE de 0,02676 e o EAM de 0,116455.
- *Modelo Fuzzy de Solow Nacional*: Este SBRF determina a taxa de poupança do Brasil, uma vez que o treinamento das redes neurais foi realizado apenas com dados nacionais. Esta análise econômica trouxe bons resultados, porém, seria importante que houvesse uma quantidade maior de dados disponíveis para o treinamento e validação dos modelos.

2. Abordagem: Cálculo da taxa de crescimento do PIBpm brasileiro

- Este SBRF possui ótimos resultados, uma vez que permite fazer previsões dois anos à frente dos valores de entrada. Porém, temos uma quantidade de dados relativamente pequena para averiguar a acurácia das previsões.

A comparação dos resultados de validação das duas redes neurais, através do erro absoluto máximo e do erro absoluto médio evidencia a superioridade do HyFIS para modelar estes problemas. O algoritmo do ANFIS presente no pacote FRBS do software (R Core Team, 2020) demonstra instabilidade no experimento envolvendo a taxa de crescimento do PIBpm do Brasil e resultados menos satisfatórios nos demais experimentos em comparação com o HyFIS. O destaque deste trabalho se dá com o terceiro experimento, visto que o mesmo permite realizar previsões a respeito da taxa de crescimento do PIBpm do Brasil.

Este trabalho gerou uma publicação nos anais de evento da X Mostra IC da FAMAT (SANTANA; JAFELICE; SANTOS, 2021) e será submetido um artigo sobre o estudo realizado com a taxa de crescimento do PIBpm brasileiro para uma revista ainda a ser escolhida.

Um trabalho futuro importante a ser realizado é comparar diretamente as modelagens fuzzy realizadas com outras metodologias utilizadas nas Ciências Econômicas. Outra metodologia que pode ser explorada é utilizar os conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar para a construção do SBRF com dados do PIB brasileiro, através de redes neuro-fuzzy deste tipo (JAFELICE; BERTONE, 2020).

Referências Bibliográficas

- BARROS, L.; BASSANEZI, R. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Campinas, SP: UNICAMP/IMECC, 2015. 426 p. ISBN 85-87185-05-5.
- BASSANEZI, R.; FERREIRA, W. J. *Equações Diferenciais com Aplicações*. S. Paulo: Ed. Harbra, 1988.
- BETS. *Dados referentes a taxa de câmbio real amarrada pela produtividade: Código-11774*. 2021. [〈https://cran.r-project.org/web/packages/BETS/BETS.pdf〉](https://cran.r-project.org/web/packages/BETS/BETS.pdf). Acessado em 10/11/2021.
- BETS. *Dados referentes a taxa Selic: Código-4390*. 2021. [〈https://cran.r-project.org/web/packages/BETS/BETS.pdf〉](https://cran.r-project.org/web/packages/BETS/BETS.pdf). Acessado em 10/11/2021.
- BETS. *Dados referentes ao índice de commodities: Código-27574*. 2021. [〈https://cran.r-project.org/web/packages/BETS/BETS.pdf〉](https://cran.r-project.org/web/packages/BETS/BETS.pdf). Acessado em 10/11/2021.
- BREUSCH, T. S.; PAGAN, A. R. A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 1287–1294, 1979.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. Boston, MA: Brooks/Cole, 2011.
- CARVALHO, A. P. L. F. *Redes Neurais Artificiais*. 2021. [〈https://sites.icmc.usp.br/andre/research/neural/〉](https://sites.icmc.usp.br/andre/research/neural/). Acessado em 10/11/2021.
- CNN. *Veja o ranking completo dos 189 países por IDH*. 2020. [〈https://www.cnnbrasil.com.br/internacional/veja-o-ranking-completo-de-todos-os-paises-por-idh/〉](https://www.cnnbrasil.com.br/internacional/veja-o-ranking-completo-de-todos-os-paises-por-idh/). Acessado em 10/11/2021.
- DA COSTA, K. V. S.; DA SILVA, F. L. C. Modelos de previsão de séries temporais aplicados ao produto interno bruto do Brasil entre 1996 e 2019. In: *Simposio de Engenharia de Produção*. Bauru, SP: UNESP, 2020.
- DURBIN, J. Tests for serial correlation in regression analysis based on the periodogram of least-squares residuals. *Biometrika*, Oxford University Press, v. 56, n. 1, p. 1–15, 1969. Disponível em: [〈https://doi.org/10.1093/biomet/56.1.1〉](https://doi.org/10.1093/biomet/56.1.1).
- ESCAP, U.; ECA, U.; ECE, U.; ESCWA, U.; ECLAC, U. *et al.* World economic situation and prospects 2017. United Nations, 2017.
- FACURE, M. *Um método poderoso e flexível para otimização iterativa*. 2017. [〈https://matheusfacure.github.io/2017/02/20/MQO-Gradiente-Descendente/〉](https://matheusfacure.github.io/2017/02/20/MQO-Gradiente-Descendente/). Acessado em 05/10/2021.
- FEENSTRA, R. C.; INKLAAR, R.; TIMMER, M. P. The next generation of the penn world table. *American Economic Review*, v. 105, n. 10, p. 3150–3182, 2015. Disponível em: [〈https://doi.org/10.1257/aer.20130954〉](https://doi.org/10.1257/aer.20130954).

- FII.COM.BR. *Dividend yield nos FIIs – Entenda de uma vez por todas*. 2021. <<https://fiis.com.br/artigos/dividend-yield-fiis/>>. Acessado em 05/10/2021.
- FII.COM.BR. *P/VP: Jamais use apenas esse indicador na sua análise*. 2021. <<https://fiis.com.br/artigos/p-vp-jamais-use-apenas-esse-indicador-na-sua-analise/>>. Acessado em 05/10/2021.
- FREITAS, F. A. *Aplicação da Teoria dos Conjuntos Fuzzy no Estudo da Impedância Eletromecânica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2021.
- FUNDS.EXPLORER. *Ranking de Fundos Imobiliários*. 2021. <<https://www.fundsexplorer.com.br/ranking/>>. Acessado em 05/10/2021.
- HOOGSTRATE, A.; OSANG, T. Saving, openness and growth: A panel data var approach. *International Journal of Behavioral Medicine - INT J BEHAVIORAL MEDICINE*, 01 2007.
- IBGE. *O que é o PIB*. 2017. <<https://www.ibge.gov.br/explica/pib.php>>. Acessado em 10/11/2021.
- INADA, K. Some structural characteristics of turnpike theorems. *Review of Economic Studies*, n. 10, p. 43–58, 1964. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/2295934>>.
- IPEA. *Estados Unidos - produto interno bruto (PIB): variação real contra igual trimestre do ano anterior*. 2021. <<http://www.ipeadata.gov.br/Default.aspx>>. Acessado em 10/11/2021.
- IPEA. *Produto interno bruto (PIB) a preços de mercado: variação real trimestral sobre mesmo trimestre do ano anterior*. 2021. <<http://www.ipeadata.gov.br/Default.aspx>>. Acessado em 10/11/2021.
- IPEA. *Zona do Euro - produto interno bruto (PIB): variação real contra igual trimestre do ano anterior*. 2021. <<http://www.ipeadata.gov.br/Default.aspx>>. Acessado em 10/11/2021.
- JAFELICE, R.; BARROS, L.; BASSANEZI, R. *Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações*. São Carlos, SP: SBMAC, 2012. 119 p. ISSN 2236-5915.
- JAFELICE, R. M.; BERTONE, A. M. A. *Biological Models via Interval Type-2 Fuzzy Sets*. Cham, Switzerland: Heidelberg: SBMAC SpringerBriefs, 2020. 136 p. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-030-64530-4>>.
- JANG, J.-S. ANFIS: Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, IEEE, v. 23, n. 3, p. 665–685, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/21.256541>>.
- KIM, J.; KASABOV, N. HyFIS: Adaptive Neuro-Fuzzy Inference Systems and Their Application to Nonlinear Dynamical Systems. *Neural Networks*, v. 12, n. 9, p. 1301–1319, 1999. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0893-6080\(99\)00067-2](https://doi.org/10.1016/S0893-6080(99)00067-2)>.
- KLIR, G.; YUAN, B. *Fuzzy sets and fuzzy logic*. New Jersey: Prentice Hall New Jersey, 1995.
- MAMDANI, E. H.; ASSILIAN, S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *Int. J. Man-Machine Studies*, v. 7, p. 1–13, 1975. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0020-7373\(75\)80002-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7373(75)80002-2)>.
- MASSAD, E.; ORTEGA, N. R. S.; SILVEIRA, P. S. P. *Metodos Quantitativos em Medicina*. S. Paulo: Editora Manole Ltda, 2004.

- NEGNEVITSKY, M. *Artificial Intelligence: A Guide to Intelligent Systems*. 2. ed. Boston MA: Addison-Wesley, 2005. 282 p.
- NUBANK. *Fundos imobiliários: o que são e como investir*. 2020. <<https://blog.nubank.com.br/o-que-sao-fundos-imobiliarios/>>. Acessado em 05/10/2021.
- OURWORLDINDATA. *World GDP over the last two millennia*. 2017. <<https://ourworldindata.org/grapher/world-gdp-over-the-last-two-millennia>>. Acessado em 10/11/2021.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2020. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.
- RAUBER, T. Redes neurais artificiais. 11 2021.
- RIZA, L. S.; BERGMEIR, C.; HERRERA, F.; BENÍTEZ, J. M. frbs: Fuzzy rule-based systems for classification and regression in R. *Journal of Statistical Software*, v. 65, n. 6, p. 1–30, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.18637/jss.v065.i06>>.
- ROMER, D. *Advanced Macroeconomics*. New York: McGraw Hill Education, 2012.
- ROYSTON, J. Shapiro-wilk normality test and p-value. *Applied Statistics*, v. 44, n. 4, p. 547–551, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/2986146>>.
- SANDMANN, H. R. *Predição não-linear de séries temporais usando sistemas de arquitetura neuro-fuzzy*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2006.
- SANTANA, P. V.; JAFELICE, R. S. M.; SANTOS, J. F. C. Predição do modelo de crescimento econômico de Solow com parâmetro fuzzy. 2021. Acessado em 10/11/2021.
- SIDRA-IBGE. *Dados referentes ao consumo das famílias: Código-93404*. 2021. <<https://sidra.ibge.gov.br/home/pms/brasil>>. Acessado em 10/11/2021.
- SIDRA-IBGE. *Dados referentes ao gasto do governo: Código-93405*. 2021. <<https://sidra.ibge.gov.br/home/pms/brasil>>. Acessado em 10/11/2021.
- SIDRA-IBGE. *Dados referentes ao investimento: Código-11255*. 2021. <<https://sidra.ibge.gov.br/home/pms/brasil>>. Acessado em 10/11/2021.
- SIDRA-IBGE. *Dados referentes as exportações: Código-93407*. 2021. <<https://sidra.ibge.gov.br/home/pms/brasil>>. Acessado em 10/11/2021.
- SIDRA-IBGE. *Dados referentes as importações: Código-93408*. 2021. <<https://sidra.ibge.gov.br/home/pms/brasil>>. Acessado em 10/11/2021.
- SOLOW, R. M. A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 1287–1294, 1979. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1911963>>.
- SURIPAH, Z. Application of a fuzzy set and fuzzy logic to economic problems: Study literature review of journal. *ICoSEEH 2019*, v. 4, p. 79–87, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.5220/0009059900790087>>.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TSMC.1985.6313399>>.

WANG, L.-X.; MENDEL, J. M. Generating fuzzy rules by learning from examples. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, IEEE, v. 22, n. 6, p. 1414–1427, 1992. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/21.199466>.

WORLD.BANK.DATA. *Inflation, consumer prices (annual %)*. 2021. <https://data.worldbank.org/indicator/FP.CPI.TOTL.ZG>. Acessado em 10/11/2021.

XP.INVESTIMENTOS. *Produto Interno Bruto: O que é para que serve o PIB do Brasil?* 2019. <https://conteudos.xpi.com.br/aprenda-a-investir/relatorios/pib-produto-interno-bruto/>. Acessado em 10/11/2021. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1911963>.

ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965.