

**GABRIELLA FAINA GARCIA**

**ESTUDO NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DE FADIGA NO  
DOMÍNIO DO TEMPO DE VIGAS SANDUÍCHES  
VISCOELÁSTICAS EMPREGANDO O MODELO  
FRACIONÁRIO COM RECORRÊNCIA**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
2022**

**GABRIELLA FAINA GARCIA**

**ESTUDO NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DE FADIGA NO DOMÍNIO DO  
TEMPO DE VIGAS SANDUÍCHES VISCOELÁSTICAS EMPREGANDO  
O MODELO FRACIONÁRIO COM RECORRÊNCIA**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima

**UBERLÂNDIA – MG  
2022**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

G216 2022	<p>Garcia, Gabriella Faina, 1994- Estudo Numérico-Experimental de Fadiga no Domínio do Tempo de Vigas Sanduíches Viscoelásticas Empregando o Modelo Fracionário com Recorrência [recurso eletrônico] / Gabriella Faina Garcia. - 2022.</p> <p>Orientador: Antônio Marcos Gonçalves De Lima. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Modo de acesso: Internet. Disponível em: <a href="http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.8">http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.8</a> Inclui bibliografia. Inclui ilustrações.</p> <p>1. Engenharia mecânica. I. Lima, Antônio Marcos Gonçalves De ,1975-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.</p>
--------------	--

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091


**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br


**ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO**

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 605, COPEM				
Data:	31/01/2022	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:30
Matrícula do Discente:	11922EMC004				
Nome do Discente:	Gabriella Faina Garcia				
Título do Trabalho:	Estudo Numérico-Experimental de Fadiga no Domínio do Tempo de Vigas Sanduíches Viscoelásticas Empregando o Modelo Fracionário com Recorrência				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	PPM-2018				

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Rogério Sales Gonçalves - FEMEC/UFU; Sebastião Simões da Cunha Júnior - UNIFEI; e Antônio Marcos Gonçalves de Lima - FEMEC/UFU, orientador da candidata. Ressalta-se que os Prof. Antônio Marcos Gonçalves de Lima, Rogério Sales Gonçalves e a Discente participaram da defesa por meio de videoconferência desde a cidade de Uberlândia/MG, e o Prof. Sebastião Simões da Cunha Júnior desde a cidade de Itajubá/MG, em atendimento a Portaria nº 36, de 19 de março de 2020, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos Gonçalves de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 31/01/2022, às 16:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rogério Sales Gonçalves, Professor(a) do Magistério Superior**, em 31/01/2022, às 16:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sebastiao Simoes da Cunha Jr, Usuário Externo**, em 31/01/2022, às 16:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3337022** e o código CRC **7A71818C**.

*A Deus, aos espíritos protetores, aos meus pais, aos meus irmãos e ao meu namorado.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e aos espíritos bons que me protegem e me cercam sempre, me orientando na melhor direção.

Agradeço aos meus avós falecidos Algeu Faina, Euclides Garcia, Alzira da Silva e Ruth Pinto Faina pelos princípios de força, honestidade e trabalho que deixaram na família. Serão sempre minhas maiores inspirações.

Agradeço aos meus pais Tânia e Paulo Roberto e aos meus irmãos Laleska e Luís Paulo pelo apoio em todos os sentidos da minha vida. Contribuindo sempre para minha evolução profissional e pessoal. Além disso, agradeço ao meu Tio Luiz Fernando Faina por ter cedido seu apartamento para eu morar e também pelas palavras de incentivo.

Agradeço ao meu namorado Ener pelo apoio e pela infinita paciência em me auxiliar nos momentos difíceis, como a depressão que enfrentei durante o mestrado. Agradeço pela ajuda e por contribuir para meu sucesso e felicidade pessoal.

Aos meus amigos e colegas, agradeço a todos pelos bons momentos e pelas experiências e conhecimentos trocados, que certamente contribuíram para minha formação e neste trabalho. Um agradecimento aos meus amigos Erivaldo Pereira, Fernandinha e Fernanda Beatriz. Em especial, ao João, que me auxiliou em todos os aspectos da dissertação, e a Lauren, que me ajudou com várias sugestões para minha dissertação com muita boa vontade e carinho. Gostaria de agradecer também ao Luiz Fernando, que me auxiliou de maneira significativa na minha dissertação.

Ao meu orientador Prof. Antônio Marcos, pela disponibilidade, paciência, atenção dispensadas nos desafios deste trabalho e principalmente, por ter acreditado em mim. Ao Prof. Helder que me auxiliou nos experimentos de fadiga, com toda a paciência, comprometimento e o profissionalismo.

A todos do LMEst que auxiliaram de alguma forma na execução deste trabalho.

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica, e também aos órgãos de fomento CAPES pela bolsa de mestrado, e à FAPEMIG (PPM00548-18) e ao CNPq (306138/2019-0) pelo apoio aos projetos de pesquisa de AMG de Lima.

*“Comece fazendo o que é necessário, depois o  
que é possível e, de repente, você estará  
fazendo o impossível”.*  
*São Francisco de Assis*



GARCIA, G. F. **Estudo Numérico-Experimental de Fadiga no Domínio do Tempo de Vigas Sanduíches Viscoelásticas empregando o Modelo Fracionário com Recorrência**. 2022. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

## RESUMO

A fadiga é um processo que envolve sucessivos danos acumulativos até a falha de uma peça em decorrência do carregamento cíclico imposto. Uma maneira de aumentar a vida em fadiga de uma estrutura é utilizando técnicas especializadas ou mesmo técnicas de controle de vibração. Dentre as técnicas de controle passivo de vibrações, os materiais viscoelásticos têm despertado grande interesse da comunidade científica mundial e das indústrias aeronáuticas. Isto se deve em função do baixo custo de aplicação e manutenção desses materiais comparado com outras técnicas, além da sua grande eficiência. Entretanto, um inconveniente é a forte dependência do seu comportamento em relação à frequência da excitação e da temperatura de operação, o que impõe dificuldades para a modelagem de sistemas viscoelásticos, principalmente para o estudo da fadiga no tempo. Neste sentido, este trabalho apresenta uma estratégia promissora para o estudo da fadiga de sistemas viscoelásticos no domínio do tempo. Para tanto, é utilizado um modelo derivativo fracionário com uma fórmula de recorrência para representar o comportamento dinâmico do material viscoelástico no tempo. Para o estudo da fadiga, o modelo viscoelástico proposto aqui é combinado com os métodos de contagem *Rainflow* e Palmgren-Miner. Os resultados numéricos demonstram a eficácia da metodologia proposta, além de mostrar a influência de parâmetros ambientais e operacionais na eficiência do tratamento viscoelástico em termos da vida em fadiga. Por fim, com o intuito de verificar as implementações feitas no código *próprio* em MATLAB<sup>®</sup>, os resultados numéricos de uma viga sanduíche sujeita a uma excitação na base são confrontados com os obtidos de experimentos para uma dada condição de excitação e temperatura de operação. Através dos resultados obtidos, fica evidente a eficiência dos materiais viscoelásticos para o aumento da vida em fadiga de sistemas dinâmicos sujeitos a vibrações indesejáveis. Além disso, foi demonstrado a eficiência da metodologia proposta para o estudo da vida em fadiga no domínio do tempo de sistemas dinâmicos contendo materiais viscoelásticos.

**Palavras-Chave:** Viscoelásticos, *FDM*, fadiga, Método *Rainflow*, regra de Palmgren-Miner.

GARCIA, G. F. **Numerical-Experimental Study of Fatigue in the Time Domain of Viscoelastic Sandwich Beams using the Fractional Model with Recurrence.** 2022. Master Thesis, Federal University of Uberlândia, Uberlândia.

## ***ABSTRACT***

*Fatigue is a process that involves successive damages accumulated until failure as a result of the imposed cyclic loading. One way to increase the fatigue life of a structure is by using specialized techniques or even vibration control techniques. Among the passive vibration control techniques worldwide, aeronautical materials are of great interest to the community and have aeronautical materials. This is due to the low cost of application and maintenance of these materials compared to other techniques, in addition to their great efficiency. However, a drawback is its strong in relation to the intensity of the intensification of the behavior and the operating temperature, which imposes difficulties in the modeling of viscoelastic systems, mainly for the study of fatigue over time. In this sense, this work presents a promising strategy for the study of fatigue of viscoelastic systems in the time domain. To use a dictionary-derived model with a recurrence formula to represent the behavior, both the viscoelastic material and time do not allow. For the study of fatigue, the viscoel model proposed here is combined with the Rainflow and Palmgren-Miner counting methods. efficient calculations in terms of proposal treatment efficiency, in addition to showing the influence of environmental and operational factors on the efficiency of life in viscoelastic. Finally, in order to verify the implementations made in the code itself, in MATLAB©, the numerical results, once they increase the base, are confronted with the experiments for the operating temperature. It increases the efficiency of the improved viscose materials, as is evident through the efficiency of the improved viscoelastic materials. In addition, an efficient study of the proposal for fatigue time in systems containing viscoelastic materials was demonstrated.*

**Keywords:** *Viscoelastic materials, fractional derivative model, fatigue, sandwich structures, Rainflow method, Palmgren-Miner rule.*

# Lista de Símbolos

## Sistema de coordenadas

$X, Y, Z$	Sistema de coordenadas global
$x, y, z$	Sistema de coordenadas local

## Símbolos latinos

$a_E$	Parâmetro do modelo unidimensional associado ao alongamento
$a_G$	Parâmetro do modelo unidimensional associado ao cisalhamento
$a_h$	Parâmetro do modelo associado ao efeito hidrostático
$a_d$	Parâmetro do modelo associado ao efeito desviatório
$[\bar{A}]$	Parâmetro do modelo
$b$	Largura [m]
$b_E$	Parâmetro do modelo unidimensional associado ao alongamento
$b_G$	Parâmetro do modelo unidimensional associado ao cisalhamento
$b_h$	Parâmetro do modelo associado ao efeito hidrostático
$b_d$	Parâmetro do modelo associado ao efeito desviatório
$[B]$	Parâmetro do modelo
$[\bar{B}]$	Parâmetro do modelo
$[C]$	Parâmetro do modelo
$[\bar{C}]$	Parâmetro do modelo
$D_1^E, D_2^E, D_3^E$	Parâmetro do modelo unidimensional associado ao alongamento
$D_1^G, D_2^G, D_3^G$	Parâmetro do modelo unidimensional associado ao cisalhamento
$E$	Módulo de Elasticidade [Pa]
$E'$	Módulo de Armazenamento
$F$	Função Fluência
$\{F\}$	Vetor dos esforços aplicados no sistema de coordenadas global
$\{F_v\}$	Vetor dos esforços viscoelásticos no sistema de coordenadas global
$f$	Função objetivo
$\{f\}$	Vetor dos esforços aplicados

$\{f_v\}$	Vetor dos esforços viscoelásticos
$\{f_r\}$	Vetor dos esforços aplicados reduzidos
$\{f_{vr}\}$	Vetor dos esforços viscoelásticos reduzidos
G	Módulo de Cisalhamento [Pa]
h	Espessura da camada [m]
[I]	Matriz identidade
[K]	Matriz de rigidez
$[K_r]$	Matriz de rigidez reduzida
k	Número identificador da camada (1,2 e 3)
L	Comprimento [m]
$\int$	Lagrangeano
li	Comprimento do elemento finito
N	Comprimento de memória
$[N_u], [N_w], [N_\beta]$	Matrizes relacionadas às funções de forma
[M]	Matriz de Massa
u	Componente em x do deslocamento [m]
R	Função relaxação
$T^{(k)}$	Energia cinética da k-ésima camada
T	Temperatura do material viscoelástico [°C]
$[T_h]$	Matriz de transformação hidrostática
$[T_d]$	Matriz de transformação desviatório
[T]	Matriz de transformação do sistema de coordenadas local para a global
$V^{(k)}$	Energia de deformação da k-ésima camada

### Símbolos gregos

$a_h$	Ordem da derivada fracionária associada ao efeito hidrostático
$a_d$	Ordem da derivada fracionária associada ao efeito desviatório
$a_T$	Fator de deslocamento
$\beta$	Cisalhamento da camada viscoelástica
$[\beta_{j+1}]$	Termo de recorrência para a lei constitutiva tridimensional
$\beta_{j+1}^E$	Termo de recorrência associado ao alongamento para a lei constitutiva unidimensional

$\beta_{j+1}^G$	Termo de recorrência associado ao cisalhamento para a lei constitutiva unidimensional
$\gamma$	Deformação por cisalhamento
$\Delta t$	Variação do tempo
$\varepsilon$	Deformação normal unidimensional
$\{\varepsilon\}$	Vetor de deformação
$\varepsilon_o$	Deformação normal aplicada
$\{\varepsilon_h\}$	Vetor das componentes hidrostáticas de deformação
$\{\varepsilon_d\}$	Vetor das componentes desviatórias de deformação
$\eta$	Fator de perda
$\theta$	Rotação
$\mu$	Viscosidade [ $m^2/s$ ]
$\nu$	Coeficiente de Poisson
$\rho$	Densidade [ $Kg/m^3$ ]
$\sigma$	Tensão normal unidimensional
$\{\sigma\}$	Vetor de tensão
$\sigma_o$	Tensão Normal aplicada
$\{\sigma_h\}$	Vetor das componentes hidrostáticas de tensão
$\{\sigma_d\}$	Vetor das componentes desviatórias de tensão
$\tau$	Tensão por cisalhamento
$\phi$	Ângulo entre os sistemas de coordenadas
$\omega$	Frequência de excitação

### Sobrescrito

1	Camada base
2	Camada viscoelástica
3	Camada restringente
e	Camada elástica
v	Camada viscoelástica

### Subcrito

e

A nível elementar

## Lista de Abreviações

EFs	Elementos Finitos
<i>FDM</i>	<i>Fractional Derivative Model</i>
FEMEC	Faculdade de Engenharia Mecânica
FRF	Função de resposta em frequência
gdl	Grau de liberdade
<i>LMEst</i>	Laboratório de Mecânica de Estruturas
MEF	Método dos elementos finitos
PSFT	Princípio de superposição frequência-temperatura
UFU	Universidade Federal de Uberlândia
<i>LabView</i>	Virtual Instrument Engineering Workbench
PEEV	Princípio da Equivalência Elástico-Viscoelástico
<i>RTG</i>	Rubbery, transition and glassy regions

## Lista de Figuras

Figura 1.1– Amortecedores viscoelásticos na construção civil como rolamento elastomérico: a) Aplicado em reforço horizontal de uma estrutura de aço; b) Aplicado em pilares .....	2
Figura 1.2 – Amortecedores aplicados em edifícios altos.....	2
Figura 1.3 – Pontos de aplicação de tratamentos viscoelásticos em automóveis .....	2
<hr/>	
Figura 2.1 – Carregamento Cíclico de amplitude constante e nomenclatura associada. (a) carregamento cíclico completamente reverso, $\sigma_m = 0$ ; (b) tensão média, $\sigma_m \neq 0$ ; (c) ciclo de mínimo nulo, $\sigma_{min} = 0$ .....	8
Figura 2.2 – Curva S-N, oriundas de ensaios de flexão rotativa de corpos de prova sem entalhes de uma liga de alumínio. Uso de escalas lineares de tensão idênticas, mas os números de ciclos foram representados graficamente numa escala linear em (a) e em escala logarítmica em (b).....	10
Figura 2.3 – Estimativa da curva $\sigma - N$ para aços forjados e laminados, sob flexão rotativa. ....	10
Figura 2.4 – Trinca de fadiga em uma amostra de aço AISI 4340 com $\sigma_m = 0$ . A inclusão que gerou a trinca pode ser vista nas duas aplicações maiores .....	11
Figura 2.5 – Mecanismo de propagação de trinca de fadiga (estágio II): (a) carga compressiva zero ou máxima; (b) carga de tração pequena; (c) carga de tração máxima; (d) carga compressiva pequena; (e) carga compressiva zero ou máxima; (f) carga de tração pequena .....	12
Figura 2.6 – Ilustração da <i>regra de Palmgren-Miner</i> para estimar a vida em fadiga .....	14
Figura 2.7 – Construção típica japonesa .....	15
Figura 2.8 – Ilustração de histórico de carregamento irregular .....	15
Figura 2.9 – Regras para extração de ciclos .....	16
Figura 2.10 – Passos para estimar a vida em fadiga no domínio do tempo .....	17
<hr/>	
Figura 3.1 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a temperatura.....	20



Figura 3.2 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a frequência .....	20
Figura 3.3 – Comportamento no tempo: a) fluência e b) relaxação.....	21
<hr/>	
Figura 4.1 – Cinemática da deformação da viga sanduíche viscoelástica.....	33
Figura 4.2 – Definição dos nós e GDLs para o EF de viga sanduíche.....	34
Figura 4.3 – Procedimento numérico de análise de fadiga de sistemas viscoelásticos.....	38
<hr/>	
Figura 5.1 – Convergência da malha de EFs.....	41
Figura 5.2 – Representação da viga-base com a massa pontual na sua extremidade livre sujeita a uma excitação na sua base.....	42
Figura 5.3 – Etapas no ANSYS® para a análise da vida em fadiga no tempo.....	42
Figura 5.4 – Sistema Submetido a movimentação da base.....	43
Figura 5.5 – Resultado da vida em fadiga da viga sem tratamento obtida com o ANSYS® .....	46
Figura 5.6 – Fator de concentração de tensão ( $K_t$ ) para uma barra retangular com entalhe sujeita ao momento.....	47
Figura 5.7 – Influência da Temperatura na vida em fadiga da viga sanduíche sem entalhe.....	49
Figura 5.8 – Influência da Temperatura na vida em fadiga da viga sanduíche com entalhe.....	50
<hr/>	
Figura 6.1 – Gerador de Sinais na Frequência de 13 Hz aproximadamente.....	53
Figura 6.2 – Amplificador Power Amplifier Type 2732.....	53
Figura 6.3 – <i>Shaker</i> Modal Exciter Type 4824.....	54
Figura 6.4 – Placa de Aquisição da National Instruments Instruments.....	54
Figura 6.5 – Interfase.....	55
Figura 6.6 – Diagrama de Blocos da Viga com Tratamento.....	56
Figura 6.7 – Desenho da Viga de Alumínio sem Tratamento ou Viga Base no AutoCad em mm na Escala 1:2.....	57
Figura 6.8 – Viga de Alumínio sem Tratamento com a instrumentação montada.....	57
Figura 6.9 – Viga sem tratamento com a ruptura após o experimento, salientando a posição dos entalhes.....	58
Figura 6.10 – Viga de alumínio tratada com camada restrita passiva instrumentada.....	59

Figura 6.11 – Viga de alumínio tratada em que mostra a ruptura e as camadas da viga sanduíche.....	59
Figura 6.12 – Deformação Experimental em Deformação Teórica.....	62
Figura 6.13 – Deformação Experimental em a Deformação Teórica.....	63
Figura 6.14 – Deformação e acelerações durante o experimento até a eminência de ruptura da viga com tratamento.....	64

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1 – Propriedades da viga sanduíche puramente elástica.....	40
Tabela 5.1 – Frequências naturais para a viga sanduíche puramente elástica.....	40
Tabela 5.3 – Propriedades da viga sanduíche viscoelástica.....	40
Tabela 5.4 – Vida em fadiga da viga-base.....	46
Tabela 5.5 – Vida em fadiga da viga sem e com tratamento viscoelástico e sem e com entalhe.....	48
Tabela 5.6 – Parâmetros ajustados do modelo FDM com recorrência.....	49
Tabela 5.7 – Influência das espessuras das camadas na vida em fadiga – sem entalhe.....	50
Tabela 5.8 – Influência das espessuras das camadas na vida em fadiga – com entalhe.....	50
<hr/>	
Tabela 6.1 – Propriedades da viga de alumínio sem tratamento.....	58
Tabela 6.2 – Propriedades da viga sanduíche viscoelástica.....	59
Tabela 6.3 – Descrição das massas utilizadas na calibração.....	60
Tabela 6.4 – Tempos de ruptura numérico e experimental da viga com tratamento.....	63

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E JUSTIFICATIVAS

A fadiga é um processo que envolve sucessivos danos acumulativos até a falha ou ruptura de uma peça e/ou equipamento sujeito a um carregamento cíclico. Estudos recentes apontam que as falhas por fadiga representam quase a totalidade de todas as falhas estruturais registradas, dispendendo um gasto anual de bilhões de dólares. Porém, as pesquisas apontam que essas falhas podem ser reduzidas em até 30% com o uso de tecnologias especializadas ou técnicas de controle de vibrações para o aumento da vida em fadiga (BOSCO JÚNIOR, 2007). Por isso, é indispensável compreender as técnicas de controle envolvidas em sistemas mecânicos.

Várias técnicas de controle de vibrações de sistemas dinâmicos têm sido propostas nos últimos anos, podendo ser divididas em métodos de controle ativo, passivo ou semiativo. O controle ativo envolve o uso de elementos como atuadores e microprocessadores para produzir um sinal fora de fase para cancelar eletronicamente a perturbação indesejável. Os métodos de controle passivo tradicionais utilizam absorvedores, barreiras, abafadores e silenciadores. No caso dos métodos semiativos, o controle ativo é utilizado para melhorar as propriedades de amortecimento dos elementos passivos, tais como os fluidos eletroreológicos (ER), magneto-reológicos (MR) ou camadas restritas ativas (ACLD) (RAO, 2003).

Dentre as técnicas de controle passivo, os materiais viscoelásticos têm despertado um grande interesse da comunidade científica mundial e das indústrias, principalmente a indústria aeroespacial. Isto se deve em virtude do seu baixo custo de aplicação e manutenção, além de serem eficientes em uma grande faixa de operação (banda de frequência). Nas últimas duas décadas, esses materiais têm sido amplamente utilizados para reduzir os níveis de vibração e ruído de sistemas estruturais em várias aplicações de interesse prático, como ilustrado nas Figs. 1.1 a 1.3. Eles possuem a capacidade de absorverem parte da energia vibratória indesejável e dissipá-la sob a forma de calor (NASHIF *et al.*, 1985; DE LIMA *et al.*, 2010). Portanto, no tocante à fadiga, quanto menor os níveis de vibrações, menor são os esforços cíclicos e,

portanto, espera-se um ganho na vida útil da estrutura e/ou equipamento.



(a)



(b)

Figura 1.1 – Amortecedores viscoelásticos na construção civil como rolamento elastomérico: a) Aplicado em reforço horizontal de uma estrutura de aço; b) Aplicado em pilares (extraída de Magebousa, 2018)

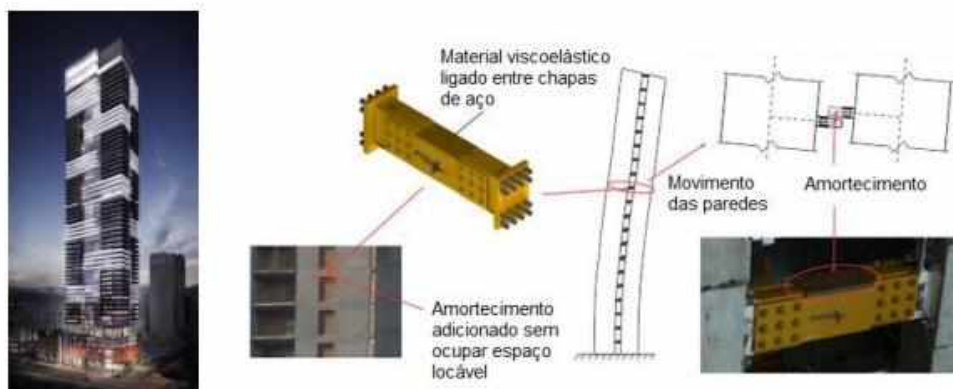


Figura 1.2 – Amortecedores aplicados em edifícios altos (extraída de MIRABELLI, 2015)



Figura 1.3 – Pontos de aplicação de tratamentos viscoelásticos em automóveis (adaptado de EMS - EFTEC, 2018)

Entretanto, um aspecto importante quanto ao uso dos materiais viscoelásticos, é a proposição de modelos matemáticos capazes de representar fidedignamente a dependência de suas propriedades em relação a fatores ambientais e operacionais. Neste enfoque, os primeiros modelos propostos no final do século XIX foram os modelos unidimensionais formados por associações de molas e amortecedores viscosos. Como exemplo, pode-se citar os modelos de Maxwell, Kelvin-Voigt e Zener. As formulações de Maxwell e Kelvin-Voigt, no entanto, não são capazes de representar os fenômenos de fluência e relaxação dos materiais viscoelásticos. Já o modelo de Zener pode ser considerado como sendo a primeira representação matemática do comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos (de LIMA, 2007). Um outro modelo também utilizado é o de relacionar a tensão e deformação por meio de um módulo complexo função da temperatura de operação e da frequência da excitação. Entretanto, sua aplicação é restrita ao domínio da frequência (BAGLEY *et al.*, 1983).

Portanto, para a análise da vida em fadiga de sistemas contendo materiais viscoelásticos de interesse deste trabalho, será utilizado um modelo *FDM* (*Fractional Derivative Model*) melhorado para computar os deslocamentos desses sistemas no domínio do tempo. Esse método foi desenvolvido baseado no cálculo fracionário, mas o modelo fracionário proposto neste trabalho emprega um termo de recorrência novo para aproximar as tensões da subestrutura viscoelástica de forma eficiente no domínio do tempo. O cálculo fracionário é considerado uma ferramenta matemática importante que vem sendo aplicado em várias áreas da engenharia. Neste caso, ele tem sido utilizado para representar os efeitos de memória dos materiais viscoelásticos, gerando bons resultados quando comparados com dados experimentos (FILHO, 2019). Vale ressaltar que o uso do *FDM* melhorado proposto aqui possui uma grande vantagem, já que permite eliminar a autodependência do campo de tensões viscoelásticas em processos iterativos das respostas dinâmicas de sistemas amortecidos viscoelasticamente, permitindo sua utilização para o estudo de fadiga no domínio do tempo de sistemas de interesse prático contendo materiais viscoelásticos.

Portanto, tem-se observado na literatura aberta uma carência de modelos adequados para a análise da vida em fadiga de sistemas viscoelásticos, principalmente no domínio do tempo, o que justifica o estudo proposto nesta Dissertação. A utilização desse modelo no domínio do tempo se baseia no fato de gerar resultados exatos, diferentemente do uso de modelos no domínio da frequência, em que os resultados utilizam modelos empíricos para estimar a probabilidade de ocorrência de um determinado nível de tensão. Além disto, com este trabalho, pretende-se demonstrar a eficiência desses materiais para o aumento da vida em fadiga de

sistemas dinâmicos sujeitos a carregamentos cíclicos. Para tanto, será utilizado um sistema acadêmico do tipo viga sanduíche de três camadas contendo um núcleo viscoelástico de material 3M ISD 112<sup>©</sup>. Em termos da modelagem numérico-computacional, o método dos elementos finitos é combinado com o modelo FDM melhorado para a obtenção das equações do movimento da viga tratada no domínio do tempo. Quanto ao cálculo da vida em fadiga, é utilizado aqui o método *Rainflow* combinado com a regra de Palmgren-Miner para contagem de ciclos.

Por fim, com o intuito de verificar os procedimentos de modelagem da metodologia proposta, resultados experimentais de uma viga sanduíche de três camadas com excitação pela base são confrontados com os correspondentes obtidos numericamente para uma dada condição de carga e temperatura de operação.

## 1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral desta Dissertação é propor uma ferramenta numérico-experimental eficiente para a análise de fadiga no domínio do tempo de sistemas tratados com materiais viscoelásticos e consolidar a linha de pesquisa relacionado a este tema que vem sendo desenvolvida no LMEst (Laboratório de Mecânica de Estruturas) da FEMEC/UFU. São os seguintes objetivos específicos:

- Utilizar o método dos elementos finitos com o modelo FDM melhorado para gerar um modelo numérico no domínio do tempo capaz de estimar a vida em fadiga de uma viga sanduíche sujeita a várias condições operacionais, ambientais e de contorno. Neste caso, será analisado a influência de parâmetros geométricos como espessuras das camadas do tratamento viscoelástico superficial e da temperatura de operação do sistema na vida em fadiga da viga;
- Verificação numérica da metodologia desenvolvida por um código *próprio* em MATLAB. Neste caso, quando possível, os resultados do estudo de fadiga da viga sem tratamento são confrontados com os correspondentes obtidos por códigos comerciais de renome como o ANSYS<sup>®</sup>.
- Realização de ensaios experimentais preliminares com uma viga sanduíche viscoelástica para uma dada condição de operação e ambiental para confrontar com os resultados obtidos via modelo proposto. O intuito é verificar a

metodologia proposta e a eficiência do material viscoelástico para o aumento da vida em fadiga da viga;

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está dividida em capítulos de modo a possibilitar a compreensão dos seus principais temas e de suas aplicações. Além deste capítulo introdutório, tem-se os seguintes capítulos:

No Capítulo 2 é apresentado uma revisão bibliográfica sobre o estudo de fadiga, desde o seu contexto histórico, passando pelas definições básicas indispensáveis para o entendimento da complexidade desse tema e a descrição sobre o surgimento e propagação das trincas. Além disso, é discutido sobre as metodologias mais utilizadas para o cálculo da vida em fadiga, como o método *rainflow* e o dano de Palmgren-miner. Outro aspecto abordado é o concentrador de tensões, popularmente denominado de entalhe, mostrando sua influência na estimação da vida em fadiga, principalmente no que tange à geometria do sistema.

No Capítulo 3 é apresentado de forma resumida os fundamentos da viscoelasticidade linear e os principais modelos matemáticos propostos para a sua representação. É mostrado aqui em detalhe a formulação do modelo *FDM* melhorado adaptado para o caso de vigas sanduíches, utilizando como ferramenta base, o cálculo fracionário e a fórmula da recorrência, já que essa elimina a autodependência da tensão advinda da lei constituinte para materiais viscoelásticos.

No Capítulo 4 é apresentado a modelagem por elementos finitos de vigas sanduíches viscoelásticas no domínio tempo utilizando o modelo *FDM* com recorrência para a análise de fadiga de tais sistemas. É mostrado também o procedimento numérico que foi implementado para num código *próprio* em ambiente *MATLAB*® para a estimação da vida em fadiga de sistemas viscoelásticos.

No Capítulo 5 é apresentado os resultados das simulações numéricas obtidas pelo código *próprio* desenvolvido neste trabalho. Neste sentido, procurou-se comparar, sempre que possível, os resultados obtidos pelo modelo proposto em termos da vida em fadiga da viga sem tratamento com os da viga tratada, e sem e com entalhe, através do método *Rainflow* e o dano de Palmgren. Por fim, feito um estudo da influência da temperatura de operação do material viscoelástico e das espessuras da camada viscoelástica e da camada restringente na estimativa da vida em fadiga da viga sanduíche viscoelástica.

No Capítulo 6 é mostrado os resultados dos ensaios experimentais com uma viga sem e com tratamento viscoelástico sujeita à uma excitação harmônica em sua base. O intuito é de



verificar os procedimentos de modelagem numérico-computacional e da eficiência do tratamento viscoelástico na vida em fadiga de sistemas dinâmicos sujeitos a vibrações.

Finalmente, no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões gerais e as perspectivas para trabalhos futuros.

## CAPÍTULO II

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 2.1 CONTEXTO HISTÓRICO

Ao longo das últimas décadas, vários pesquisadores tem contribuído significativamente com o estudo da fadiga. A história da fadiga começou com Albert em 1837, quando ele publicou os primeiros resultados do teste de fadiga em metais. Em seu estudo, ele construiu uma máquina de teste para as correntes transportadoras que falhavam em serviço nas minas. Mais tarde, precisamente em 1843, William John Macquorn Rankine fez um estudo sobre as causas da ruptura inesperada envolvendo elementos de eixos ferroviários. O estudo foi baseado em um acidente ferroviário na estrada de ferro de Versailles em 1842, Mendon, Paris. Nesse acidente, os eixos de vagões ferroviários começaram a falhar após um pequeno período em serviço e, apesar de serem construídos com materiais dúcteis, as falhas apresentavam características frágeis e repentinas. Assim, buscando uma solução para tal problema, Rankine chegou à conclusão que o material havia cristalizado, tornando-o frágil devido às tensões aplicadas em serviço (SCHUTZ, 1996).

Friedrich Wöhler foi o primeiro pesquisador que realizou um estudo experimental para a investigação da fadiga. O resultado de seu estudo resultou na criação da conhecida curva S-N, que relacionava o número de ciclos com a amplitude da tensão aplicada (SCHUTZ, 1996).

Bauschinger, professor de mecânica na escola politécnica de Munique, criou o conhecido Efeito de Bauschinger que se refere à mudança do limite elástico por ciclos repetitivos de estresse. Este Efeito é a base para as hipóteses de Manson e Coffin originadas na década de 1950 e que ainda hoje estão sendo utilizadas na previsão da vida em fadiga (SCHUTZ, 1996).

Poncelet em 1839 definiu pela primeira vez o termo fadiga. Nesta época o mecanismo de falha ainda não havia sido compreendido e a aparência de uma fratura frágil num material dúctil fazia os pesquisadores acreditarem que o material empregado havia apresentado um cansaço, fragilizando-se devido ao carregamento alternado. Mais tarde, Wöhler provou que o material dos eixos que falharam ainda continuava tão resistente e dúctil nos ensaios de tração quanto o material de um eixo novo. Assim, o termo fadiga permaneceu como sendo a definição para falha devido a cargas variantes no tempo ou alternadas (SCHUTZ, 1996).

Ewing e Humfrey em 1903 desenvolveram importantes avanços na interpretação das propriedades microestruturais de materiais cristalinos, contribuindo muito para o entendimento dos mecanismos da fratura. Em 1930, Goodman e Soderberg estudaram e determinaram, de forma independente, a influência das tensões médias na vida em fadiga. Palmgren em 1924 e Miner em 1954 desenvolveram o conceito de acúmulo de dano e a regra de acúmulo linear de dano, nomeada em sua homenagem como Regra de Palmgren-Miner, muito utilizada até os dias atuais (SCHUTZ, 1996).

## 2.2 FADIGA NA ÓTICA DA RESISTÊNCIA DOS MATERIAS

A fadiga é um processo que envolve sucessivos danos acumulativos até a falha ou ruptura em decorrência do carregamento cíclico imposto. Para entender todo o processo da fadiga, é preciso começar com definições básicas, como carregamento cíclico. O carregamento cíclico é o protagonista da fadiga. Além dele, a curva S-N ou curva  $\sigma$ -N (Curvas de Wöhler) é fundamental para entender o comportamento do material até a falha. Essa curva indica o número de ciclos até a falha para uma dada amplitude ou faixa de tensões. O carregamento cíclico é um dos grandes responsáveis pelo surgimento e propagação das trincas, responsáveis pela falha ou ruptura da estrutura ou componente.

### 2.2.1 Carregamentos cíclicos

Algumas aplicações práticas envolvem um carregamento cíclico entre níveis constantes de tensão máxima e mínima, sendo chamado de carregamento com amplitude constante (DOWLING, 2018), como ilustrado na Figura 2.1. Há também o carregamento de amplitude variável, requerendo métodos específicos de estimativa de vida como discutido na sequência.

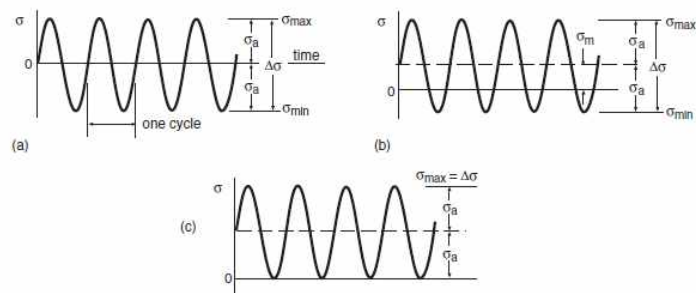


Figura 2.1 – (a) completamente reverso,  $\sigma_m = 0$ ; (b) tensão média,  $\sigma_m \neq 0$ ; (c) ciclo de mínimo nulo,  $\sigma_{mín} = 0$ . (Adaptado de DOWLING, 2013)

Na Figura 2.1,  $\Delta\sigma = \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}$ , é a diferença entre os valores máximos e mínimos e  $\sigma_m$ , é a tensão média, podendo ser zero no caso (a), ou então, diferente de zero, no caso (b). A metade da faixa de tensões é chamada amplitude de tensões,  $\sigma_a$ , que é a variação em torno da média (DOWLING, 2018). Essa amplitude de tensões ( $\sigma_a$ ) é chamada também de tensão alternada. As definições matemáticas para tensão média ( $\sigma_m$ ) e amplitude ( $\sigma_a$ ) de tensões são:

$$\sigma_a = \frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}}{2}, \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{m\acute{i}n}}{2} \quad 2.1$$

Vale ressaltar que a tensão média é calculada a partir da força, do momento ou de sua combinação na estrutura ou componente mecânico em análise.

Outro aspecto importante no estudo da fadiga é análise da curva S-N, que será vista posteriormente.

### 2.2.2 A Curva $\sigma - N$

Se um corpo de prova de um material ou um componente mecânico é submetido a um carregamento cíclico suficientemente severo, uma falha por fadiga ou outros danos irá se desenvolver, conduzindo a uma falha completa do mesmo. Se o teste é repetido com um nível de tensão mais elevado, o número de ciclos até a falha será menor (DOWLING, 2018). Os resultados desses testes, para diversos níveis de tensão, podem ser representados graficamente de modo a obter uma curva de *tensão-vida* chamada de curva S-N. A amplitude de tensão,  $\sigma_a$ , é geralmente representada em função do número de ciclos até a falha  $N_f$  (DOWLING, 2018), como ilustrado na Figura 2.2.

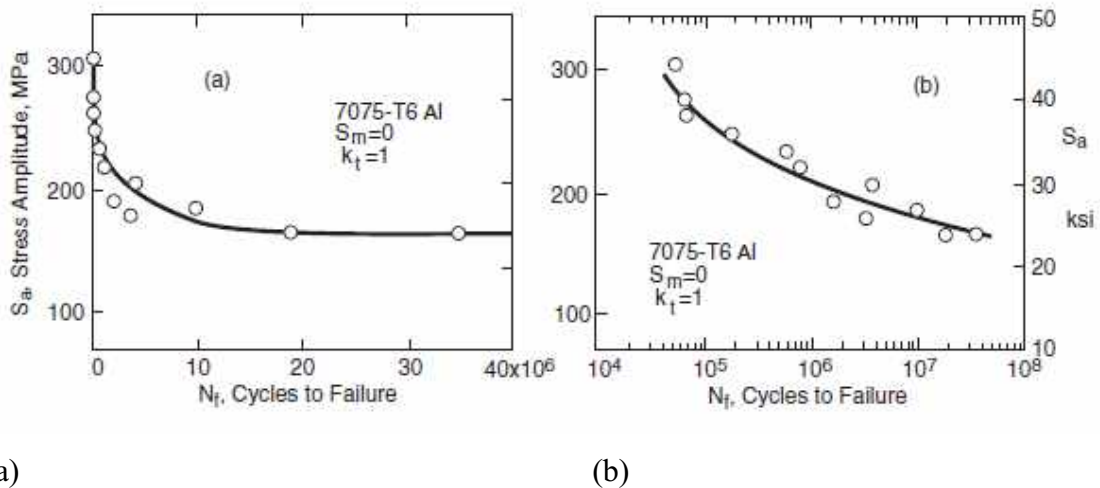


Figura 2.2 – Curva S-N de ensaios de flexão rotativa de corpos de prova sem entalhes de uma liga de alumínio. (a) escala linear; (b) escala logarítmica. (Adaptado de DOWLING, 2013)

O número de ciclos até a falha muda rapidamente com o nível de tensão e pode variar ao longo de várias ordens de grandeza (DOWLING, 2018). Sendo assim, normalmente, o número de ciclos é representado graficamente em uma escala logarítmica (ver Fig. 2.2(b)). Na Figura 2.2(a), percebe-se que a curva em escala linear reduz o número de ciclos, reduzindo o número e informações e diminuindo a precisão.

Em relação a curva  $\sigma - N$ , dois comportamentos distintos podem ser observados, a saber: para os materiais como as ligas de alumínio e de magnésio, a curva  $\sigma - N$  tem um aspecto sempre decrescente, ou seja, não importa o nível de tensão alternante, sempre haverá uma vida finita, embora bastante longa, como mostrada na Figura 2.2. Já para algumas ligas ferrosas e de titânio, a curva  $\sigma - N$  se torna horizontal para valores de  $N$  mais altos, ou seja, há um nível de tensão limitante, definido como limite de resistência à fadiga, abaixo do qual a falha por fadiga não ocorrerá, como mostrado na Figura 2.3.

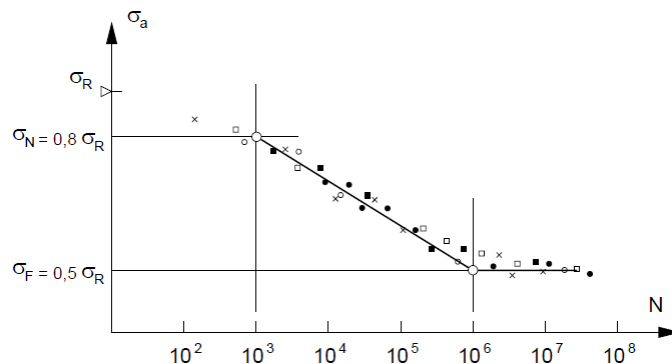


Figura 2.3 – Curva  $\sigma - N$  para aços forjados sob flexão. (Adaptado de ROSA, 2002)

Como pode ser visto, as curvas S-N variam com o material. Porém, elas também são afetadas pela tensão média e geometria, especialmente pela presença de entalhes e também pelo acabamento superficial, ambiente químico e térmico, frequência de ciclagem e tensões residuais (DOWLING, 2018). Por trás da curva S-N, há toda a dinâmica do surgimento e crescimento das trincas, como será visto na sequência.

### 2.2.3 Surgimento e Propagação de Trincas

Todos os materiais são anisotrópicos e heterogêneos em uma escala microscópica. Por exemplo, os metais são constituídos por um agregado de pequenos grãos cristalinos, onde o comportamento é anisotrópico devido aos planos cristalinos. Se um limite de grão é cruzado, a orientação destes planos muda. A estrutura do grão é apenas uma das incompatibilidades. Há também pequenos vazios ou partículas de composição química diferentes da maior parte do material, como inclusões de alumina no aço. Considerando essa microestrutura não uniforme, as tensões também não são distribuídas de maneira não uniforme em escala microscópica. Nas regiões onde as tensões são severas é onde se inicia os danos de fadiga (DOWLING, 2018).

Uma pequena trinca se desenvolve em um vazio, inclusão, banda de deslizamento, contorno de grão ou ranhura superficial. Normalmente, a trinca propaga em um plano normal ao esforço de tração até causar a falha por fadiga, juntando-se às vezes a outras trincas ao longo do evento. A Figura 2.4 mostra o surgimento de uma trinca a partir de uma inclusão.

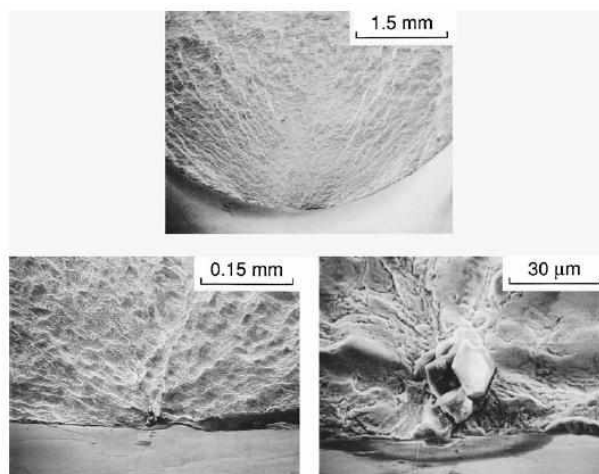


Figura 2.4 – Trinca de fadiga em uma amostra de aço AISI 4340 com  $\sigma_m = 0$ . A inclusão que gerou a trinca pode ser vista nas duas aplicações maiores (Adaptado de DOWLING, 2013).

As trincas associadas com falhas por fadiga quase sempre se iniciam (ou nucleiam) sobre a superfície de um componente em algum ponto de concentração de tensões. Os sítios de nucleação de trincas incluem riscos superficiais, ângulos vivos, rasgos de chaveta, fios de roscas e afins. Uma vez que uma trinca estável tenha se nucleado, ela então começa a se propagar muito lentamente. Isso é algumas vezes chamado de propagação de estágio I. O segundo estágio de propagação (estágio II) inicia-se quando a taxa de extensão da trinca aumenta drasticamente e, neste ponto, existe também uma alteração na direção de propagação para uma direção que é praticamente perpendicular à tensão de tração aplicada. Durante esse estágio de propagação, o crescimento da trinca avança através de um processo de abaulamento plástico e afilamento da ponta da trinca, mecanismo esse ilustrado na Figura 2.5 (CALLISTER, 2002).

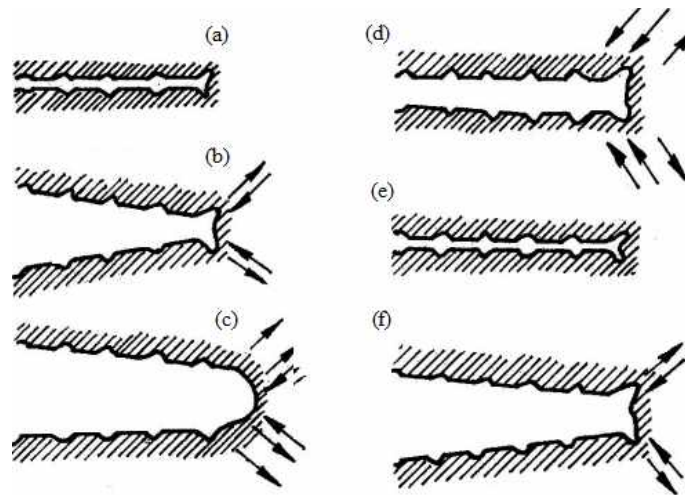


Figura 2.5 – Mecanismo de propagação de trinca de fadiga (estágio II): (a) carga compressiva zero ou máxima; (b) carga de tração pequena; (c) carga de tração máxima; (d) carga compressiva pequena; (e) carga compressiva zero ou máxima; (f) carga de tração pequena (Adaptado de CALLISTER, 2002).

No início do ciclo de tensões (carga de compressão zero ou máxima), a ponta da trinca possui a forma de um entalhe duplo afiado (Fig. 2.5a). À medida que a tensão de tração é aplicada (Fig. 2.5b), ocorre uma deformação localizada em cada um desses entalhes de extremidade ao longo de planos de escorregamento que estão orientados a 45<sup>a</sup> em relação ao plano da trinca. Com o aumento do alargamento da trinca, a ponta avança pela deformação de cisalhamento continuada, assumindo uma configuração abaulada (Fig. 2.5c). Durante a compressão, as direções da deformação cisalhante na ponta da trinca são invertidas (Fig. 2.5d) até que, no ápice do ciclo, uma nova extremidade afilada com entalhe duplo se forma (Fig.

2.5e). Dessa forma, a ponta da trinca avança o equivalente à distância de um entalhe durante o curso de um ciclo completo. Esse processo é repetido com cada ciclo subsequente, até que finalmente alguma dimensão crítica da trinca seja atingida, o que precipita a etapa de fratura final, tendo início uma fratura catastrófica (CALLISTER, 2002).

## 2.3 FADIGA E AS METODOLOGIAS UTILIZADAS

Na análise estrutural de componentes mecânicos sujeitos a cargas cíclicas em trabalho, o tipo de falha predominante é a fadiga. Quando o carregamento cíclico é constante e invariável, a estimativa de vida pode ser feita por meio de equações consolidadas. Porém, em diversas aplicações práticas, o componente está submetido a solicitações aleatórias. Neste caso, existem basicamente duas abordagens para a estimativa do dano por fadiga. Uma utiliza algoritmos para a contagem de ciclos a partir da solicitação aleatória no tempo, e a outra utiliza metodologias empíricas para estimar a probabilidade de ocorrência de um determinado nível de tensão. Neste último, usa-se amplamente a Densidade Espectral de Potência (PSD) do registro de tensão para a estimativa da Função de Probabilidade (PDF) e, então, a estimativa do dano por fadiga (BOSCO JUNIOR, 2007). Porém, no presente trabalho, a abordagem utilizada é a contagem de ciclos pelo método *Rainflow* no domínio do tempo, pois, apesar de não se tratar de um carregamento variável, o histórico das tensões dos sistemas viscoelásticos (efeito de memória) é bem extenso e seria impossível a contagem dos ciclos se não fosse a estratégia numérica proposta neste trabalho. O método *Rainflow* é mais popular e provavelmente o melhor método de contagem de ciclos e será descrito detalhadamente nas próximas seções (BOSCO JUNIOR, 2007). Utilizando então a regra de *Palmgren-Miner*, é possível determinar o dano para um determinado período de avaliação do carregamento e, conseqüentemente, a vida em fadiga.

### 2.3.1 Regra de Palmgren-miner

Desde o seu desenvolvimento, em 1924 por Palmgren, e posteriormente em 1945 por Miner, a regra linear de acúmulo do dano de *Palmgren-Miner*, vem sendo utilizada amplamente em métodos de análise de fadiga por solicitações aleatórias ou quando o histórico de tensões é bastante extenso. Mesmo com sua limitação linear e de não considerar efeitos combinados dos carregamentos, a regra linear de *Palmgren-Miner* tem sido bastante aplicada em função de sua facilidade de implementação numérica e analítica (BOSCO JUNIOR, 2007).



Considere um caso de carga de amplitude variável, como a ilustrada na Figura 2.6. Seja uma amplitude de tensão ( $\sigma_{a1}$ ) que é aplicada para um número de ciclos ( $N_1$ ), em que o número de ciclos para a falha da curva S-N para  $\sigma_{a1}$  é  $N_{f1}$ . Sendo assim, considerando outra amplitude de tensões ( $\sigma_{a2}$ ) que é aplicada para um número de ciclos ( $N_2$ ), em que o número de ciclos para a falha da curva S-N para  $\sigma_{a2}$  é  $N_{f2}$  (DOWLING, 2018). Seguindo essa lógica, a *regra de Palmgren-Miner* afirma que a falha de fadiga será obtida somando tais frações, ou seja, se 100% da vida estiver esgotada:

$$\frac{N_1}{N_{f1}} + \frac{N_2}{N_{f2}} + \frac{N_3}{N_{f3}} + \dots = \sum \frac{N_j}{N_{fj}} = 1 \quad (2.2)$$

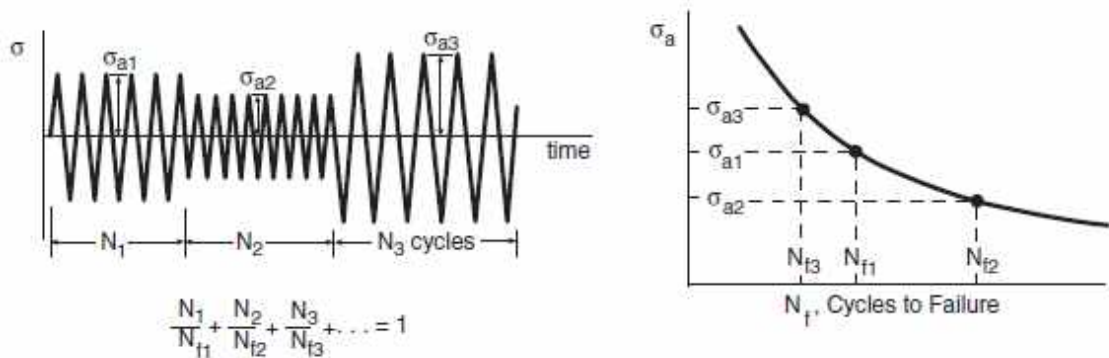


Figura 2.6 – Ilustração da *regra de Palmgren-Miner* para estimar a vida em fadiga (Adaptado de DOWLING, 2013).

Quando há variações de carregamento altamente irregulares ao longo do tempo não é possível definir, na forma de ciclos, os eventos individuais para que a regra de *Palmgren-Miner* possa ser empregada (DOWLING, 2018). Para solucionar essa questão, foi proposta uma série de métodos, porém, a melhor abordagem aceita é a *contagem rainflow*, desenvolvida por M. Matsuishi e T. Endo, em 1968, no Japão.

### 2.3.2 Método rainflow

Os sinais de tensão para o cálculo da fadiga na maioria dos casos reais não apresentam uma forma periódica, mas uma forma aleatória. Desta forma, a determinação dos ciclos de carregamento e a variação de sua amplitude se torna uma tarefa complexa. A fim de facilitar

esta tarefa, pesquisadores desenvolveram métodos de contagem de ciclos de tensões, sendo o método *Rainflow* um dos métodos de maior aplicação (ARIDURU, 2004; LEE *et al.*, 2005).

Sua origem data de 1968 quando M. Matsuishi e T. Endo propuseram contar os ciclos e meios ciclos de sinais de deformação no tempo. Ele foi baseado na analogia de gotas de chuva caindo através de um telhado típico japonês chamado “*Pagoda Roof*”. A analogia pode ser vista ao girar o gráfico de tensão no tempo, deixando o eixo do tempo na vertical, e imaginar gotas de chuva fluindo, como mostrado na Figura 2.7 (PASSOS, 2016).

Uma história de carregamento irregular representa uma série de picos e vales que são pontos onde a direção da carga muda, como ilustrado na Figura 2.6. Além disso, os intervalos (faixas ou amplitudes) são as diferenças de tensões medidas entre picos e vales ou entre vales e picos. Os intervalos simples são a medida entre um pico e um próximo vale ou entre um vale e o próximo pico. Um intervalo global é medido entre um pico e um vale que não é próximo, ou entre um vale e um pico muito posterior. Essa questão de intervalos simples e globais serão comentados detalhadamente na sequência (DOWLING, 2018). Na Figura 2.8, observa-se os picos, os vales, os intervalos simples e os intervalos globais.

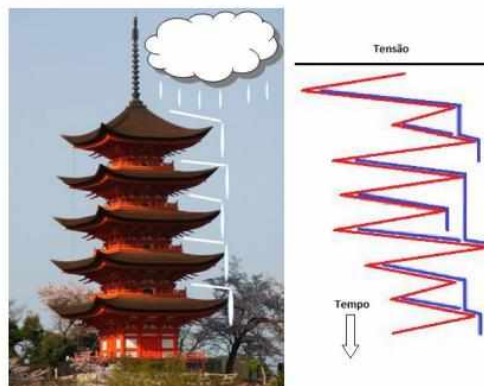


Figura 2.7 – Construção típica japonesa com telhado Pagoda (Extraída de IRVINE, 2016).

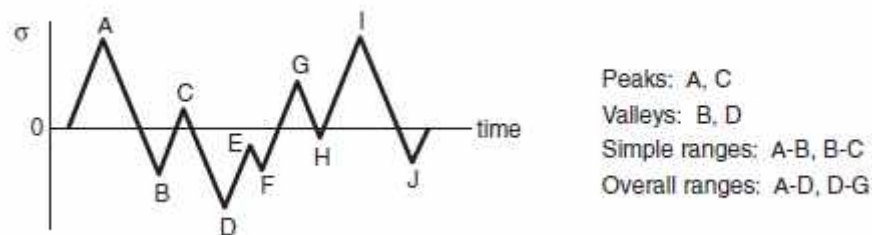


Figura 2.8 – Ilustração de histórico de carregamento irregular (Adaptado de DOWLING, 2013).

O método usa três pontos consecutivos para determinar se um ciclo foi ou não formado. A Figura 2.9 mostra as regras que identificam a existência ou não de um ciclo. Os 3 pontos consecutivos de tensão ( $S_1, S_2, S_3$ ) definem duas variações consecutivas, a saber:  $\Delta S_1 = S_1 - S_2$  e  $\Delta S_2 = S_2 - S_3$ . Se  $\Delta S_1 \leq \Delta S_2$ , um ciclo de carregamento é retirado, variando de  $S_1$  a  $S_2$ . Caso contrário, nenhum ciclo é formado. Este método requer que a história de carregamento seja rearranjada de modo a conter somente picos e vales, e inicia com o pico mais alto ou o vale mais profundo, aquele que for maior em valor absoluto. Então a regra de identificação de ciclos é aplicada para conferir cada três pontos consecutivos. Os dois pontos formando um ciclo são desprezados, e os pontos remanescentes são conectados entre si. O procedimento é repetido até que não reste nenhum evento de carregamento (BAPTISTA, 2016).

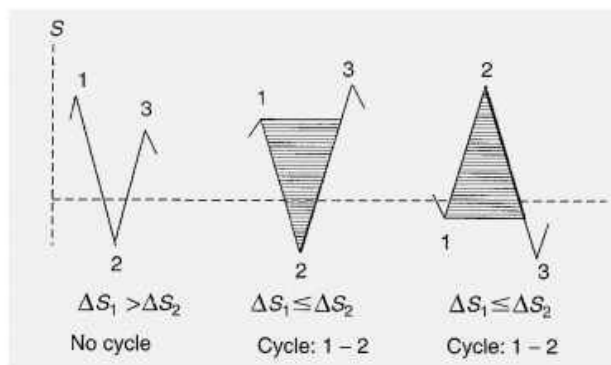


Figura 2.9 – Regras para extração de ciclos (extraída de Lee *et al.*, 2005)

Além de histórias de carregamento de amplitude aleatória, para histórias longas é também conveniente apresentar os resultados da contagem de ciclos pelo método *rainflow* como uma matriz dando o número de ciclos que ocorrem em várias combinações de intervalo e média, como já foi comentado (DOWLING, 2018).

Assim, nesse trabalho, a análise será feita no domínio do tempo, onde a estimativa é feita com o método *Rainflow*. Em resumo, usando a regra Palmgren-Miner é possível determinar os danos para um determinado período de avaliação de carregamento e, conseqüentemente, a vida em fadiga de uma viga sem e com tratamento viscoelástico, como mostrado na Figura. 2.10. Outra análise que pode ser feita para estimar a vida em fadiga de um componente é no domínio da frequência (RAMOS *et al.*, 2013). Esta pode ser utilizada de modo a modelar a solicitação aleatória de tensão como um processo aleatório estacionário (GONÇALVES *et al.*, 2019). Estes métodos espectrais utilizam formulações empíricas para estimar a densidade de probabilidade da distribuição dos ciclos alternantes, a partir de parâmetros da resposta espectral ou PSD do

componente em análise (REIS, 2013). Porém, a modelagem viscoelástica no domínio do tempo apresenta inúmeras vantagens, dentre elas estão o fato de ser um método mais preciso, já que não é tratado probabilisticamente. Além disso, leva em conta os efeitos de memória do material viscoelástico.

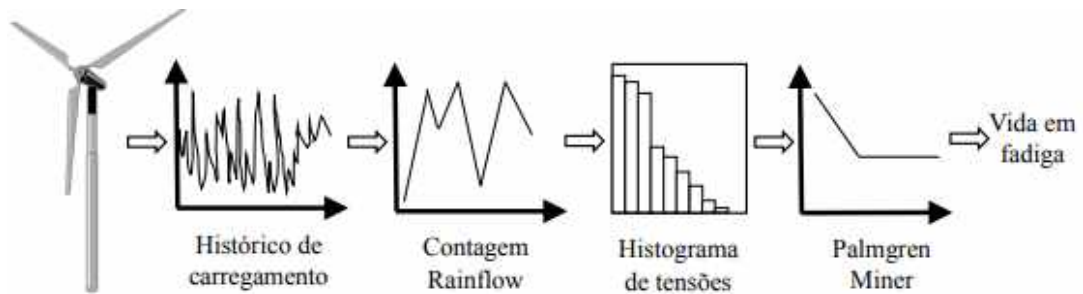


Figura 2.10 – Etapas para estimar a vida em fadiga no tempo (extraído de ARIDURU, 2004)

Como o interesse deste trabalho é propor uma metodologia de análise da vida em fadiga no domínio do tempo de sistemas viscoelásticos do tipo vigas sanduíches, um aspecto importante no estudo numérico-experimental de fadiga é a possibilidade de lidar com corpos de prova contendo algum tipo de descontinuidade geométrica, popularmente chamadas de entalhes, como discutido na sequência.

## 2.4 FADIGA COM ENTALHE ASSOCIADO

As descontinuidades geométricas inevitáveis em muitos projetos práticos de engenharia como furos, filetes, sulcos e chavetas, fazem com que a tensão seja localmente aumentada, sendo, portanto, chamadas de concentradores de tensões. Os concentradores de tensão são normalmente chamados de entalhes para fins de simplificação. Neste caso, eles reduzem a resistência de um componente à falha por fadiga.

### 2.4.1 Concentração de tensão

O fator de concentração de tensão teórico ou geométrico,  $K_t$ , é a tensão máxima,  $\sigma_{m\acute{a}x}$ , que ocorre na região próxima de uma descontinuidade de um elemento estrutural, em relação à tensão nominal atuante,  $\sigma$ . O fator de concentração de tensão,  $K_t$ , depende da geometria do componente e do modo de carregamento, e independe da intensidade deste último, já que é assumido um comportamento elástico linear do material para definição deste fator (DA ROSA, 2002). Ele é definido como:

$$K_t = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma} \quad (2.3)$$

onde a tensão nominal, como já foi falado, refere-se a força, ao momento ou de sua combinação na estrutura ou componente mecânico em análise.

Segundo SHIGLEY (1984), a concentração de tensões é um efeito altamente localizado e as tensões elevadas só ocorrem em uma pequena região na vizinhança da descontinuidade. No caso de materiais dúcteis, a primeira carga aplicada à peça dará origem ao escoamento na descontinuidade, aliviando a concentração de tensões. Assim, quando a estrutura é feita de material dúctil e as cargas são consideradas estáticas, não é necessário o uso do concentrador de tensões. Normalmente, utiliza-se o concentrador de tensões para materiais frágeis ou quando a peça ou componente estiver sujeito à fadiga. Para esses materiais, é interessante utilizar,  $K_f$ , fator de concentração de tensões de fadiga, como definido pela equação seguinte:

$$K_f = \frac{\text{Limite de resistência à fadiga para corpos de prova sem entalhe}}{\text{Limite de resistência à fadiga para corpos de prova com entalhe}} \quad (2.4)$$

Neste caso, a sensibilidade ao entalhe pode ser definida como segue:

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad (2.5)$$

onde  $q$  pode variar entre 0 e 1.

A Eq. 2.5 mostra que se  $q = 0$ ,  $K_f = 1$  e assim, o material não possui sensibilidade ao entalhe. Porém, se  $q = 1$ , então  $K_f = K_t$  e assim, o material terá sensibilidade plena ao entalhe. Em trabalhos de análise ou de projeto, primeiro determina-se o  $K_t$  a partir da geometria da peça. E a partir disso, pode-se determinar  $q$  e resolver a seguinte equação para calcular  $K_f$ :

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \quad (2.6)$$

## CAPÍTULO III

### MODELO DERIVATIVO FRACIONÁRIO COM RECORRÊNCIA PARA MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Neste capítulo, é apresentado primeiramente uma revisão sobre os fundamentos da viscoelasticidade linear e uma breve discussão sobre os principais modelos matemáticos que foram propostos para descrever o seu comportamento dependente da frequência da excitação e da temperatura de operação. Em seguida, é apresentado o cálculo fracionário como ferramenta para o desenvolvimento do modelo FDM (*Fractional Derivative Model*) de interesse deste trabalho. Posteriormente, o desenvolvimento do modelo FDM com a fórmula de recorrência é mostrado em detalhe para eliminar a autodependência do campo de tensões viscoelásticas no domínio do tempo, tornando o processo de integração mais eficiente e permitindo a análise de fadiga de tais sistemas.

#### 3.1. FUNDAMENTOS DA VISCOELASTICIDADE LINEAR

Os materiais viscoelásticos são alguns vidros e polímeros que, quando solicitados mecanicamente, deformam-se exibindo comportamento elástico e viscoso. Um desafio ao se modelar o comportamento desses materiais é o fato de suas propriedades serem fortemente dependentes de fatores ambientais e operacionais, principalmente da temperatura de operação e da frequência da excitação. A Figura 3.1 ilustra a influência da temperatura, sendo observado quatro estados diferentes: vítreo (I), de transição (II), de borracha (III) e o estado de fluido (IV). Portanto, é imprescindível considerar as variações de temperatura durante a modelagem de sistemas contendo materiais viscoelásticos (DE LIMA *et al.*, 2010). Na região (I) de baixas temperaturas, o material apresenta-se sob a forma vítrea, com o máximo valor para o módulo de armazenamento, e variando pouco com a temperatura. A transição (II) é caracterizada por um módulo que decresce fortemente com a temperatura, e o máximo valor do fator de perda, mas que varia muito com a temperatura. Na região de borracha (III) há pouca variação das propriedades do material em relação à temperatura, sendo normalmente a região de preferência

em projetos. A quarta região corresponde ao estado de fluido do material, sendo raramente considerada em aplicações estruturais em razão de sua instabilidade (GONÇALVES, 2018).

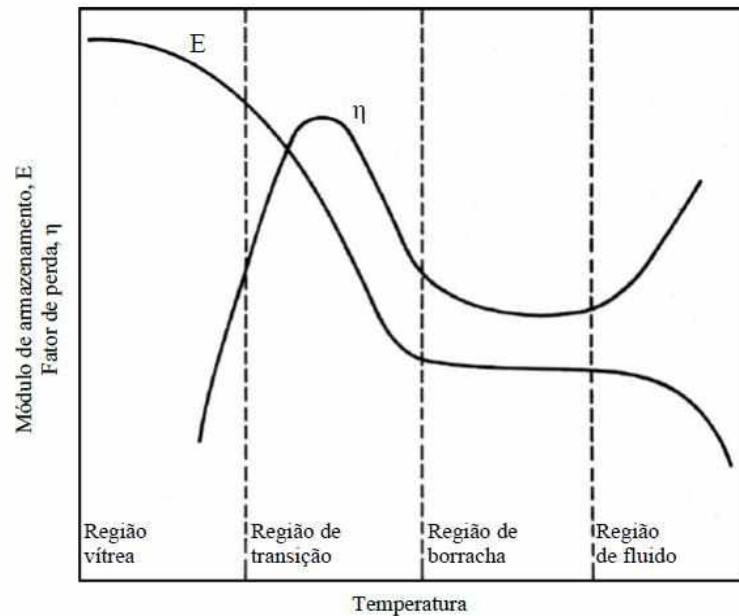


Figura 3.1 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a temperatura. (Adaptado de NASHIF *et al.* (1985))

Quanto à frequência, seu principal efeito é o aumento do módulo de armazenamento, conforme visto na Figura 3.2. Neste caso, observa-se que a frequência tem um efeito inverso ao da temperatura, sendo este um dos principais aspectos da viscoelasticidade linear segundo Nashif *et al.* (1985) para a formulação do princípio da superposição frequência-temperatura.

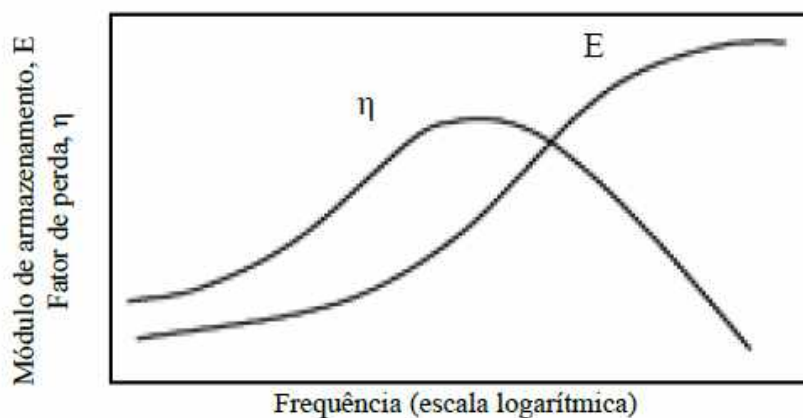


Figura 3.2 – Variação do módulo de armazenamento e do fator de perda com a frequência. (Adaptado de NASHIF *et al.*, 1985)

Diferente do que ocorre nos materiais elásticos e viscosos, nos materiais viscoelásticos, a aplicação da carga resulta em uma deformação elástica instantânea e uma deformação anelástica que é dependente do tempo. Quando a carga é retirada, a deformação é recuperada e o material retorna à sua configuração inicial. Entretanto, essa recuperação não ocorre de forma instantânea como nos materiais elásticos (NUNES, 2020). De acordo com De Lima (2007), a caracterização do comportamento no tempo dos materiais viscoelásticos pode ser feita através das funções de fluência e relaxação. A primeira representa a deformação do material submetido a uma tensão constante e a segunda refere-se ao caso em que o material está sujeito à uma deformação constante, como ilustrado na Figura 3.3.

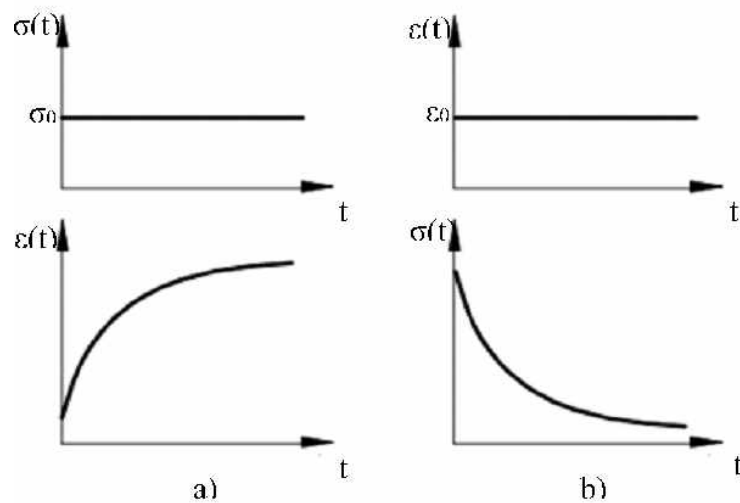


Figura 3.3 – Comportamento no tempo de materiais viscoelásticos: a) fluência e b) relaxação. Adaptado DE LIMA (2007).

Do comportamento temporal caracterizado pelas funções fluência e relaxação advém o efeito de memória dos materiais viscoelásticos e a necessidade de se conhecer o histórico do carregamento. Como uma consequência do princípio da superposição de Boltzmann (superposição dos efeitos das das tensões/deformações no regime linear) as variações futuras no carregamento são sobrepostas às solicitações anteriores, de forma que todos os estados de tensão ou deformação passados contribuirão para o comportamento do material viscoelástico (NUNES, 2020). Nesse sentido, o campo de tensões pode ser expresso por meio da seguinte integral de convolução como mostrado na Eq. 3.1.



$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t - \tau) d\varepsilon(\tau) \quad (3.1)$$

### 3.2. MODELOS VISCOELÁSTICOS

Os primeiros modelos para descrever o comportamento dos materiais viscoelásticos começaram a ser desenvolvidos no final do século XIX e são modelos unidimensionais mais simples, representados por associações de molas e amortecedores como os de Maxwell, Kelvin-Voigt e Zener. No entanto, não são capazes de representar fielmente os comportamentos de fluência e relaxação dos materiais viscoelásticos. Detalhes desses modelos mais simples e os generalizados de Maxwell e Kelvin-Voigt podem ser encontrados em (DE LIMA, 2007).

Uma outra abordagem, similar ao que se observa pela lei de Hooke para a elasticidade, consiste em relacionar tensão e deformação através de um módulo complexo, sendo uma forma bastante conveniente de caracterizar as propriedades dos viscoelásticos diretamente no domínio da frequência através de técnicas experimentais (NASHIF *et al.*, 1985; BARKANOV, 1999). Uma desvantagem desse método é o fato de não representar satisfatoriamente as respostas em regime transiente de sistemas viscoelásticos via integração direta de equações do movimento ou via método da superposição modal (de LIMA, 2003).

Isto tem motivado inúmeros pesquisadores a utilizar o cálculo fracionário como ferramenta matemática para a proposição de modelos viscoelásticos de maior fidelidade e que possam ser combinados com modelos de elementos finitos de sistemas estruturais tanto no domínio do tempo, quanto no domínio da frequência (FILHO, 2019).

### 3.3. FORMULAÇÃO DE GRÜNWARD-LETNIKOV

O Cálculo Fracionário é considerado por muitos como sendo o cálculo da modernidade, em que a limitação das ordens de integração e derivação aos números inteiros é superada e se passa a trabalhar com as ordens desses operadores em valores arbitrários, reais ou complexos (CARVALHO; OTTONI, 2018). Neste sentido, ele tem sido bastante utilizado para representar matematicamente o comportamento dinâmico de inúmeros fenômenos causais (GRUNWALD, 1867). Detalhes do seu desenvolvimento e origem podem ser encontrados em (CARVALHO; OTTONI, 2018).

O Cálculo Fracionário apresenta diversas formulações, porém muitas delas entravam em contradição com o tempo, dando resultados diferentes para uma mesma aplicação, o que gerava uma certa controvérsia. Será apresentado aqui as características da definição de interesse deste trabalho, que é a de Grünwald-Letnikov.

É importante ressaltar que as derivadas e integrais de ordem arbitrária terão uma notação como representada a seguir: para a derivada de ordem  $\alpha$  de uma função  $f(x)$ , a representação será  $D^\alpha f(x)$ , e para integrais de ordem arbitrária utilizar-se  $J^\alpha f(x)$ .

A formulação da derivada fracionária de Grünwald-Letnikov pode ser definida tendo como base a derivada do cálculo diferencial e integral clássico, onde a definição das derivadas primeira e segunda são dadas como segue:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.2)$$

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{h} \quad (3.3)$$

Logo:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+2h) - 2f'(x+h) + f'(x)}{h^2} \quad (3.4)$$

Generalizando esse resultado para derivadas de  $n$ -ésima ordem, pode-se deduzir que:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x-mh) \quad (3.5)$$

Sabe-se que os coeficientes binominais são apresentados como segue:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r-1)}{r!} \quad (3.6)$$

Assim, pode-se obter a formulação geral de Grünwald-Letnikov:

$$\frac{d^\alpha}{[d(x-a)]^\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(x-mh) \quad (3.7)$$

### 3.4 LEI CONSTITUTIVA TRIDIMENSIONAL

Utilizando os conceitos da mecânica do contínuo como os tensores hidrostático e de desvio, é possível desenvolver a lei constitutiva para os materiais viscoelásticos. De acordo com essa teoria, em um ponto qualquer do meio contínuo, o estado de tensões e deformações pode ser representado pela soma das componentes hidrostáticas, que são responsáveis por alterações volumétricas, e das componentes deviatórias, que são responsáveis pelas alterações da forma, como definido pelas Eqs. (3.8). A utilização desta abordagem para a obtenção da lei constitutiva para materiais viscoelásticos é bastante vantajosa, já que permite analisar os efeitos das tensões e deformações atuantes em nesses materiais de forma separada e depois somá-los.

$$\{\sigma\} = \{\sigma_h\} + \{\sigma_d\} \quad (3.8a)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_h\} + \{\varepsilon_d\} \quad (3.8b)$$

onde  $\{\sigma_h\} = \{\sigma\}[T_h]$ ,  $\{\sigma_d\} = \{\sigma\}[T_d]$ ,  $\{\varepsilon_h\} = \{\varepsilon\}[T_h]$ ,  $\{\varepsilon_d\} = \{\varepsilon\}[T_d]$  e as matrizes de transformação são definidas como segue (FILHO, 2016):

$$[T_h] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [T_d] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Portanto, utilizando os conceitos hidrostático e desviatório e baseado nos trabalhos de Makris (1997) e Flügge (1975), as relações constitutivas para os materiais viscoelásticos podem ser estabelecidas como segue:

$$\{\sigma_h\} + a_h \frac{d^{\alpha_h}}{dt^{\alpha_h}} \{\sigma_h\} = 3K_0 \{\varepsilon_h\} + 3b_h \frac{d^{\alpha_h}}{dt^{\alpha_h}} \{\varepsilon_h\} \quad (3.10a)$$

$$\{\sigma_d\} + a_d \frac{d^{\alpha_d}}{dt^{\alpha_d}} \{\sigma_d\} = 2G_0 \{\varepsilon_d\} + 2b_d \frac{d^{\alpha_d}}{dt^{\alpha_d}} \{\varepsilon_d\} \quad (3.10b)$$

onde  $K_0$  e  $G_0$  são os módulos volumétrico e de cisalhamento, a baixa frequência. Os parâmetros  $\alpha_h$ ,  $\alpha_d$ ,  $a_h$ ,  $a_d$ ,  $b_h$  e  $b_d$  são determinados através do ajuste da curva. Observa-se que os parâmetros  $a_h$ ,  $a_d$ ,  $b_h$  e  $b_d$  são nulos quando o material é elástico, consistentes com a lei de Hooke.

Transformando as Eq. (3.10) para o domínio da frequência via transformada de Fourier, tem-se:

$$\left(1 + a_h (i\omega)^{\alpha_h}\right) \{\sigma_h^*\} = 3 \left(K_0 + b_h (i\omega)^{\alpha_h}\right) \{\varepsilon_h^*\} \quad (3.11a)$$

$$\left(1 + a_d (i\omega)^{\alpha_d}\right) \{\sigma_d^*\} = 2 \left(G_0 + b_d (i\omega)^{\alpha_d}\right) \{\varepsilon_d^*\} \quad (3.11b)$$

Das relações anteriores, pode-se definir os módulos volumétrico e de cisalhamento complexos dos materiais viscoelásticos:

$$K^*(i\omega) = \frac{\{\sigma_h^*\}}{3\{\varepsilon_h^*\}} = \frac{K_0 + b_h (i\omega)^{\alpha_h}}{1 + a_h (i\omega)^{\alpha_h}} \quad (3.12)$$

$$G^*(i\omega) = \frac{\{\sigma_d^*\}}{2\{\varepsilon_d^*\}} = \frac{G_0 + b_d(i\omega)^{\alpha_d}}{1 + a_d(i\omega)^{\alpha_d}} \quad (3.13)$$

Na sequência, aplicando o princípio da equivalência elástico-viscoelástico (NASHIF et al, 1985), chega-se à seguinte relação entre os módulos de cisalhamento e volumétrico:

$$K^*(i\omega) = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G^*(i\omega) \quad (3.14)$$

Além disso, comparando as Eqs. (3.11), pode-se relacionar os parâmetros hidrostáticos e de desvio da seguinte forma:

$$K_0 = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G_0 \quad (3.15a)$$

$$b_h = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} b_d \quad (3.15b)$$

$$\alpha_h = \alpha_d = \alpha \quad (3.15c)$$

$$a_h = a_d = a \quad (3.15d)$$

Somando as Eq. (3.10a) e (3.10b) e utilizando as Eq. (3.15), chega-se finalmente à seguinte relação para o campo de tensões para materiais viscoelásticos:

$$\{\sigma\} + a \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} + [B] \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \{\varepsilon\} \quad (3.16)$$

onde:

$$[B] = 3b_h [T_h] + 2b_d [T_d] \quad (3.17a)$$

$$[C] = 3K_0 [T_h] + 2G_0 [T_d] \quad (3.17b)$$

Agora, para avaliar a derivada fracionária, a definição de Grünwald-Letnikov, expressa pela Eq. (3.7) deve ser utilizada. Essa formulação pode ser aproximada pela Eq. (3.18), onde  $N_1$  indica o número de tempos passados a serem analisados e  $A_{j+1}$  são os coeficientes de Grünwald a serem calculados de forma recursiva (SCHMIDT; GAUL, 2001).

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N_1} A_{j+1} f(t - j\Delta t) \quad (3.18)$$

onde  $A_{j+1} = \frac{j-\alpha-1}{j} A_j$ , com  $A_1 = 1$ , é o termo recursivo.

Nota-se que os coeficientes de Grünwald vão ficando cada vez mais próximos de zero, indicando que os eventos passados, quanto mais longe do tempo presente, têm cada vez menos efeito sobre o atual (NUNES, 2020). Portanto, introduzindo a fórmula de Grünwald-Letnikov à Eq. (3.18), obtem-se a seguinte equação para o campo de tensões:

$$\{\sigma_t\} = \frac{([C] + \Delta t^{-\alpha} [B])\{\varepsilon_t\} + \Delta t^{-\alpha} [B] \sum_{j=1}^{N_1} A_{j+1} \{\varepsilon_{t-j\Delta t}\} - a\Delta t^{-\alpha} \sum_{j=1}^{N_1} A_{j+1} \{\sigma_{t-j\Delta t}\}}{1 + a\Delta t^{-\alpha}} \quad (3.19)$$

ou ainda sob a seguinte forma:

$$\{\sigma_t\} = [\bar{C}]\{\varepsilon_t\} + [\bar{B}] \sum_{j=1}^{N_1} A_{j+1} \{\varepsilon_{t-j\Delta t}\} - [\bar{A}] \sum_{j=1}^{N_1} A_{j+1} \{\sigma_{t-j\Delta t}\} \quad (3.20)$$

onde:

$$[\bar{C}] = \frac{[C] + \Delta t^{-\alpha} [B]}{1 + a\Delta t^{-\alpha}} \quad (3.21a)$$

$$[\bar{B}] = \frac{\Delta t^{-\alpha} [B]}{1 + a\Delta t^{-\alpha}} \quad (3.21b)$$

$$[\bar{A}] = \frac{a\Delta t^{-\alpha}}{1 + a\Delta t^{-\alpha}} [I] \quad (3.21c)$$

Pode-se observar na Eq. (3.20) que o campo de tensões no instante de tempo atual depende do campo de tensões nos instantes de tempo passado. Assim, essa autodependência do campo de tensões para os materiais viscoelásticos será eliminada através da introdução de um termo de recorrência, tornando o modelo mais eficiente computacionalmente, principalmente quando se trata de sistemas industriais de interesse prático contendo materiais viscoelásticos.

### 3.5 A FÓRMULA DA RECORRÊNCIA

O desenvolvimento da fórmula da recorrência baseia-se na análise do campo de tensões com passos de tempo sucessivos, avaliando a forma em que as tensões anteriores aparecem no cálculo das tensões posteriores. A partir da Eq. (3.20), para o primeiro passo de tempo, tem-se a Eq. (3.22) que, reescrita sob a forma da Eq. (3.23) permite definir o primeiro termo de recorrência,  $[\beta_1]$ .

$$\{\sigma_{1\Delta t}\} = [\bar{C}] \{\varepsilon_{1\Delta t}\} \quad (3.22)$$

$$\{\sigma_{1\Delta t}\} = [\beta_1] \{\varepsilon_{1\Delta t}\} \quad (3.23)$$

$$[\beta_1] = [\bar{C}] \quad (3.24)$$

Para o segundo passo de tempo, o campo de tensões é escrito novamente a partir da Eq. (3.20), obtendo-se a Eq. (3.25). Nessa equação, incorporando o primeiro termo da recorrência e substituindo a Eq. (3.22), encontra-se a Eq. (3.26), que pode ser escrita na forma da Eq. (3.27), com a definição do segundo termo de recorrência,  $[\beta_2]$  (NUNES, 2020).

$$\{\sigma_{2\Delta t}\} = [\bar{C}] \{\varepsilon_{2\Delta t}\} + [\bar{B}] A_2 \{\varepsilon_{\Delta t}\} - [\bar{A}] A_2 \{\sigma_{\Delta t}\} \quad (3.25)$$

$$\{\sigma_{2\Delta t}\} = [\beta_1] \{\varepsilon_{2\Delta t}\} + ([\bar{B}] A_2 - [\bar{A}] A_2 [\beta_1]) \{\varepsilon_{\Delta t}\} \quad (3.26)$$

$$\{\sigma_{2\Delta t}\} = [\beta_1] \{\varepsilon_{2\Delta t}\} + [\beta_2] \{\varepsilon_{\Delta t}\} \quad (3.27)$$

$$[\beta_2] = [\bar{B}] A_2 - [\bar{A}] A_2 [\beta_1] \quad (3.28)$$

Para  $t=3\Delta t$ , o campo de tensões é reescrito através da Eq. (3.29). Substituindo as Eq. (3.23) e (3.26), tem-se a Eq. (3.29), que pode ser escrita na forma da Eq. (3.31), definindo o terceiro termo da recorrência conforme a Eq. (3.32). A partir dessa equação é possível observar que os termos da recorrência se repetem e ter uma ideia de como defini-los (NUNES, 2020).

$$\begin{aligned} \{\sigma_{3\Delta t}\} = & [\bar{C}] \{\varepsilon_{3\Delta t}\} + [\bar{B}] A_2 \{\varepsilon_{2\Delta t}\} - [\bar{A}] A_2 \{\sigma_{2\Delta t}\} \\ & + [\bar{B}] A_3 \{\varepsilon_{\Delta t}\} - [\bar{A}] A_3 \{\sigma_{\Delta t}\} \end{aligned} \quad (3.29)$$



$$\begin{aligned} \{\sigma_{3\Delta t}\} &= [\bar{C}]\{\varepsilon_{3\Delta t}\} + \left( [\bar{B}]A_2 - [\bar{A}]A_2[\beta_1] \right) \{\varepsilon_{2\Delta t}\} \\ &+ \left( [\bar{B}]A_3[\beta_1] - [\bar{A}]A_2[\beta_2] - [\bar{A}]A_3[\beta_1] \right) \{\varepsilon_{\Delta t}\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\{\sigma_{3\Delta t}\} = [\beta_1]\{\varepsilon_{3\Delta t}\} + [\beta_2]\{\varepsilon_{2\Delta t}\} + [\beta_3]\{\varepsilon_{\Delta t}\} \quad (3.31)$$

$$[\beta_3] = [\bar{B}]A_3 - [\bar{A}]A_2[\beta_2] - [\bar{A}]A_3[\beta_1] \quad (3.32)$$

Portanto, para um instante de tempo qualquer, tem-se a Eq. (3.33). Incorporando os campos de tensões para os tempos anteriores, obtém-se a Eq. (3.34), ao agrupar os termos de forma cronológica, a equação pode ser reescrita conforme a Eq. (3.35).

$$\begin{aligned} \{\sigma_{n\Delta t}\} &= [\bar{C}]\{\varepsilon_{n\Delta t}\} + [\bar{B}]A_2\{\varepsilon_{(n-1)\Delta t}\} - [\bar{A}]A_2\{\sigma_{(n-1)\Delta t}\} + \dots \\ &\dots + [\bar{B}]A_{n-1}\{\varepsilon_{2\Delta t}\} - [\bar{A}]A_{n-1}\{\sigma_{2\Delta t}\} + [\bar{B}]A_n\{\varepsilon_{\Delta t}\} - [\bar{A}]A_n\{\sigma_{\Delta t}\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \{\sigma_{n\Delta t}\} &= [\beta_1]\{\varepsilon_{n\Delta t}\} + [\bar{B}]A_2\{\varepsilon_{(n-1)\Delta t}\} \\ &- [\bar{A}]A_2\left([\beta_1]\{\varepsilon_{(n-1)\Delta t}\} + \dots + [\beta_{n-2}]\{\varepsilon_{2\Delta t}\} + [\beta_{n-1}]\{\varepsilon_{\Delta t}\}\right) + \dots \\ &\dots + [\bar{B}]A_{n-1}\{\varepsilon_{2\Delta t}\} - [\bar{A}]A_{n-1}\left([\beta_1]\{\varepsilon_{2\Delta t}\} + [\beta_2]\{\varepsilon_{\Delta t}\}\right) + [\bar{B}]A_n\{\varepsilon_{\Delta t}\} \\ &- [\bar{A}]A_n\{[\beta_1]\{\varepsilon_{\Delta t}\}\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\{\sigma_{n\Delta t}\} = [\beta_1]\{\varepsilon_{n\Delta t}\} + [\bar{B}]\sum_{j=1}^{n-1} A_{j+1}\{\varepsilon_{(n-j)\Delta t}\} - [\bar{A}]\sum_{j=1}^{n-1} \left( \sum_{i=0}^{j-1} A_{j+1-i}\beta_{i+1} \right) \{\varepsilon_{(n-j)\Delta t}\} \quad (3.35)$$

Generalizando, a lei constitutiva com recorrência para materiais viscoelásticos pode ser estabelecida como segue:

$$\{\sigma_t\} = \sum_{j=0}^{N_t} [\beta_{j+1}]\{\varepsilon_{t-j\Delta t}\} \quad (3.36)$$

onde  $[\beta_{j+1}] = [\bar{B}]A_{j+1} - [\bar{A}]\sum_{i=0}^{j-1} A_{j+1-i}[\beta_{i+1}]$ , com  $[\beta_1] = [\bar{C}]$ .

### 3.6 SIMPLIFICAÇÃO DA LEI CONSTITUTIVA PARA O CASO DE VIGAS

De acordo com a teoria de Euler-Bernoulli, vigas finas sujeitas a um estado uniaxial de tensões não levam em consideração o cisalhamento transversal, diferentemente da camada viscoelástica numa configuração sanduíche, onde o cisalhamento é um dos responsáveis pela dissipação de energia. Neste caso, para lidar com vigas sanduíches viscoelásticas, a lei constitutiva tridimensional desenvolvida anteriormente deve ser simplificada para este caso. Baseado na lei constitutiva tridimensional e nos trabalhos de Bagley e Torvik (1983a) e Makris (1997), o modelo RTG (*rubbery, transition and glassy regions*) pode ser escrito como nas Eqs. (3.37) e (3.38), onde os parâmetros são definidos na Eq. (3.67) pelo PEEV (Princípio da Equivalência Elástico-Viscoelástico).

$$\sigma_x + a_E \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \sigma_x = E_0 \varepsilon_x + b_E \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \varepsilon_x \quad (3.37)$$

$$\tau_{xz} + a_G \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \tau_{xz} = 2G_0 \varepsilon_{xz} + 2b_G \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \varepsilon_{xz} \quad (3.38)$$

onde  $E_0 = 2G_0(1+\nu)$ ;  $b_E = 2b_G(1+\nu)$ ;  $a_E = a_G$ .

Aplicando a lei constitutiva baseada na recorrência na camada viscoelástica de uma viga sanduíche qualquer, tem-se as relações (3.39) e (3.40), onde os termos de recorrência são descritos pelas relações (3.41) e (3.42).

$$\sigma_t = \sum_{j=0}^{N_1} \beta_{j+1}^E \varepsilon_{t-j\Delta t} \quad (3.39)$$

$$\tau_t = \sum_{j=0}^{N_1} \beta_{j+1}^G \varepsilon_{t-j\Delta t} \quad (3.40)$$

$$\beta_{j+1}^E = D_3^E A_{j+1} + \sum_{i=0}^j D_1^E A_{i+1} \beta_{j+1-i}^E \quad \text{com } \beta_1^E = D_2^E \quad (3.41)$$

$$\beta_{j+1}^G = D_3^G A_{j+1} + \sum_{i=0}^j D_1^G A_{i+1} \beta_{j+1-i}^G \quad \text{com } \beta_1^G = D_2^G \quad (3.42)$$

$$\text{onde } D_1^E = -\frac{a_E \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_E \Delta t^{-\alpha}}; \quad D_2^E = \frac{E_0 + E_\infty \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_E \Delta t^{-\alpha}} \quad \text{e } D_3^E = \frac{E_\infty \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_E \Delta t^{-\alpha}} \quad \text{e}$$

$$D_1^G = -\frac{a_G \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_G \Delta t^{-\alpha}}; \quad D_2^G = \frac{2G_0 + 2G_\infty \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_G \Delta t^{-\alpha}} \quad \text{e } D_3^G = \frac{2G_\infty \Delta t^{-\alpha}}{1 + a_G \Delta t^{-\alpha}}$$

# CAPÍTULO IV

## MODELAGEM DE VIGAS SANDUÍCHES VISCOELÁSTICAS UTILIZANDO O MODELO FDM COM RECORRÊNCIA

Neste capítulo, é apresentado a modelagem por elementos finitos de vigas sanduíches viscoelásticas no domínio tempo utilizando o modelo FDM com recorrência para a análise de fadiga. Além disso, é apresentado o procedimento numérico em ambiente MATLAB<sup>®</sup> que foi implementado para a resolução do sistema de equações no domínio do tempo.

### 4.1 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

A Figura 4.1 ilustra a viga sanduíche composta por uma camada base (1), um núcleo viscoelástico (2) e uma camada restringente (3). A viga possui comprimento ( $L$ ), largura ( $b$ ) e espessuras ( $h_1$ ), ( $h_2$ ) e ( $h_3$ ) respectivamente.

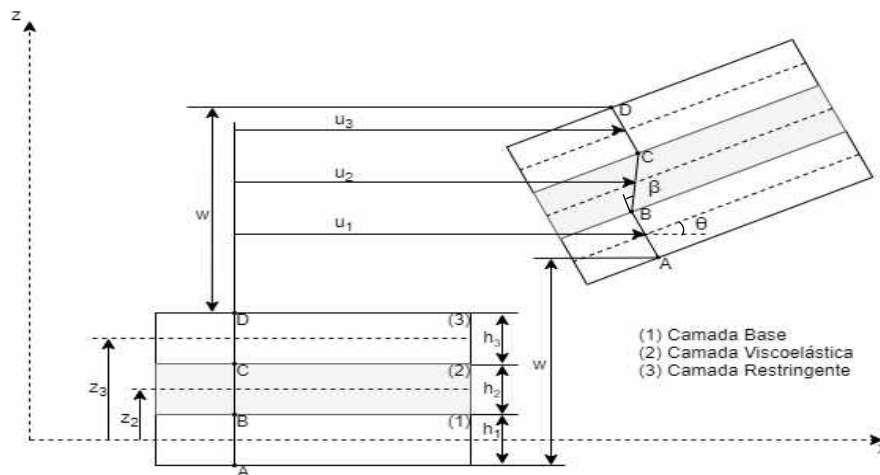


Figura 4.1 – Cinemática da deformação da viga sanduíche viscoelástica (NUNES, 2020)

São consideradas algumas hipóteses para o problema em questão, que também têm sido assumidas por diversos autores (GALUCIO *et al.*, 2004; LIMA *et al.*, 2010; GUARALDONETO, 2012). Dentre elas estão: (a) os materiais são homogêneos e apresentam propriedades isotrópicas e as deformações não são grandes o suficiente para exceder o regime linear; (b) a

aderência entre ambas as camadas é perfeita; (c) as tensões normais na direção  $z$  são nulas; (d) os deslocamentos transversais das três camadas são os mesmos, bem como as suas rotações; (e) as hipóteses da teoria de Euler-Bernoulli são válidas para as faces elásticas e para a camada viscoelástica a teoria de Timoshenko é usada.

O campo de deslocamento na direção  $z$  é representado pela Eq. (4.1), válida para toda a seção transversal da viga. Porém, os deslocamentos longitudinais em  $x$  são diferentes para cada camada, contribuindo para o cisalhamento do viscoelástico. Esse movimento longitudinal das camadas base, viscoelástica e restringente, são descritos, respectivamente, pelas Eqs. (4.2) a (4.4), como ilustrado na Figura 4.1.

$$w^{(k)}(x, t) = w(x, t), \text{ com } k=1, 2, 3 \quad (4.1)$$

$$u^{(1)}(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (4.2)$$

$$u^{(2)}(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \left( z - \frac{h_1}{2} \right) \beta(x, t) \quad (4.3)$$

$$u^{(3)}(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + h_2 \beta(x, t) \quad (4.4)$$

A partir das equações acima, percebe-se que, em termos do método dos elementos finitos (MEF), é necessário a adoção de quatro graus de liberdade (GDLs) para cada nó para um EF de viga de dois nós, a saber: o deslocamento longitudinal,  $u(x,t)$ ; o deslocamento transversal,  $w(x,t)$ ; a rotação,  $\theta(x,t)$  (equivalente à derivada da deflexão em relação à posição  $x$ ); e o ângulo de cisalhamento da camada viscoelástica,  $\beta(x,t)$ , como ilustrados na Figura 4.2. Neste caso, os campos  $u(x,t)$  e  $\beta(x,t)$  são aproximados por funções de interpolação lineares e para o campo  $w(x,t)$  utiliza-se um polinômio cúbico, como definidos pelas Eqs. (4.5) e (4.6), onde  $N_u$  e  $N_w$  são as matrizes contendo as funções de forma e o vetor  $q$  é o que contém os GDLs.

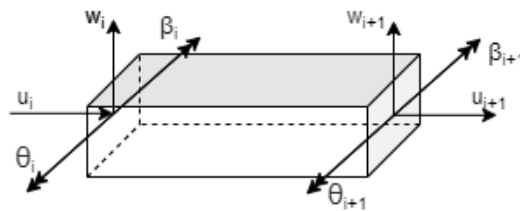


Figura 4.2 – Definição dos nós e GDLs para o EF de viga sanduíche (NUNES, 2020)

$$w(x, t) = [N_w(x)] \{q_{(e)}\} \quad (4.5)$$

$$u^{(k)}(x, z, t) = [N_u^{(k)}(x, z)] \{q_{(e)}\}, \text{ com } k=1, 2, 3 \quad (4.6)$$

Considerando as hipóteses assumidas para a viga, as deformações normais em cada uma das camadas ( $k=1,2,3$ ) são dadas pela Eq. (4.7), e as deformações cisalhantes na camada viscoelástica é dada pela Eq. (4.8). No apêndice A, mostrou-se detalhadamente a formulação em MEF.

$$\varepsilon_x^{(k)}(x, z, t) = \left[ \frac{d}{dx} N_u^{(k)}(x, z) \right] \{q_{(e)}\} \quad (4.7)$$

$$\gamma_{xz}^{(2)}(x, t) = [N_\beta(x)] \{q_{(e)}\} \quad (4.8)$$

Utilizando os campos de deslocamento e deformação em conjunto com a lei constitutiva do material viscoelástico, as energias cinética e de deformação da viga podem ser determinadas. A partir da expressão da energia cinética de um corpo deformável dada pela Eq. (4.9), e das relações (4.5) e (4.6), pode-se obter a Eq. (4.10), onde  $M$  é a matriz de massa da viga sanduíche definida conforme a Eq. (4.11) (NUNES, 2020).

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left( \frac{d}{dt} \{U\} \right)^2 dV \quad (4.9)$$

$$T_e^{(k)} = \frac{1}{2} \{\dot{q}_e\}^T [M_e^{(k)}] \{\dot{q}_e\} \quad (4.10)$$

$$\text{onde } [M_e] = \sum_{k=1}^3 \rho_k \left( b \int_{z_k}^{z_k+h_k} \int_0^{li} [N_u^{(k)}]^T [N_u^{(k)}] dx dz + A_k \int_0^{li} [N_w^{(k)}]^T [N_w^{(k)}] dx \right).$$

A partir da energia de deformação (4.12) e dos campos (4.5) e (4.6), também é possível determinar a matriz de rigidez de cada camada elástica da viga sanduíche.

$$V_e = \frac{1}{2} \iiint_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \quad (4.11)$$

$$V_e^{(e)} = \frac{1}{2} \{q_e\}^T [K_e^{(e)}] \{q_e\} \quad (4.12)$$

onde  $[K_e^{(e)}] = b \sum_{k=1,3} E_k \int_{z_k}^{z_k+h_k} \int_0^{li} [N'_u^{(k)}]^T [N'_u^{(k)}] dx dz$ .

Já para o núcleo de material viscoelástico, deve-se usar a lei constitutiva baseada no modelo FDM com recorrência proposto no Capítulo 3. Da relação tensão-deformação, descrita nas Eqs. (3.39) e (3.40), na Eq. (4.11), é possível descrever a energia de deformação para a camada viscoelástica, conforme a Eq. (4.13). Incorporando as expressões para as deformações dessa camada, a energia de deformação é expressa de acordo com a Eq. (4.14).

$$V_e^{(v)} = \frac{1}{2} \iiint_V \sum_{j=0}^{N_t} (\beta_{j+1}^E \varepsilon_t \varepsilon_{t-j\Delta t} + \beta_{j+1}^G \gamma_t \gamma_{t-j\Delta t}) dV \quad (4.13)$$

$$V_e^{(v)} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N_t} \left( \beta_{j+1}^E \{q_e(t)\}^T b \int_{z_2}^{z_2+h_2} \int_0^{li} [N'_u^{(2)}]^T [N'_u^{(2)}] dx dz \{q_e(t-j\Delta t)\} \dots \right. \\ \left. + \beta_{j+1}^G \{q_e(t)\}^T A_2 \int_0^{li} [N_\beta(x)]^T [N_\beta(x)] dx \{q_e(t-j\Delta t)\} \right) \quad (4.14)$$

$$V_e^{(v)} = \frac{1}{2} \{q_e(t)\}^T \sum_{j=0}^{N_t} [K_e^{**(v)}]_j \{q_e(t-j\Delta t)\} \quad (4.15)$$

onde  $[K_e^{**(e)}]_j = b \left( \beta_{j+1}^E \int_{z_k}^{z_k+h_k} \int_0^{li} [N'_u^{(2)}]^T [N'_u^{(2)}] dx dz + \beta_{j+1}^G \int_{z_k}^{z_k+h_k} \int_0^{li} [N_\beta^{(2)}]^T [N_\beta^{(2)}] dx dz \right)$ .

Após a montagem das matrizes globais de massa e rigidez do sistema utilizando procedimentos padrões de elementos finitos, e levando-se em conta a conectividade dos nós, pode-se obter a seguinte equação do movimento do sistema no domínio do tempo:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [K^{(e)}]\{q(t)\} + \sum_{j=0}^{N_1} [K^{*(v)}]_j \{q(t-j\Delta t)\} = \{f(t)\} \quad (4.16)$$

A fim de simplificar e auxiliar na resolução da Eq. (4.16), o primeiro termo ( $j=0$ ) pode ser extraído para fora do somatório, permanecendo na soma apenas aqueles associados aos demais valores de  $j$ , como visto na Eq. (4.17). Esse procedimento torna possível a separação de todos os termos que dependem dos valores nodais no tempo analisado em um lado da igualdade, e no outro aparecem aqueles relacionados aos esforços externo e viscoelástico. A equação do movimento do sistema é, portanto, colocada sob a forma da Eq. (4.18).

$$\sum_{j=0}^{N_1} [K^{*(v)}]_j \{q(t-j\Delta t)\} = [K^{*(v)}]_0 \{q(t)\} + \sum_{j=1}^{N_1} [K^{*(v)}]_j \{q(t-j\Delta t)\} \quad (4.17)$$

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + ([K^{(e)}] + [K^{*(v)}])\{q(t)\} = \{f(t)\} - \{f_v(t)\} \quad (4.18)$$

onde  $\{f_v(t)\} = \sum_{j=1}^{N_1} [K^{*(v)}]_j \{q(t-j\Delta t)\}$  e  $[K^{*(v)}] = [K^{*(v)}]_0$ .

Neste caso, pode-se utilizar o método de integração de Newmark (1959) para determinar as respostas dinâmicas do sistema viscoelástico em função do tempo.

## 4.2 PROCEDIMENTO NÚMÉRICO-COMPUTACIONAL

A Figura 4.3 mostra o fluxograma das principais etapas do procedimento numérico e computacional empregado neste trabalho para a análise da vida em fadiga de sistemas viscoelásticos. É importante salientar que um dos principais objetivos aqui é o de tornar disponível uma ferramenta numérico-computacional para análise de fadiga de sistemas viscoelásticos no domínio do tempo que seja eficiente para futuras aplicações de interesse prático.



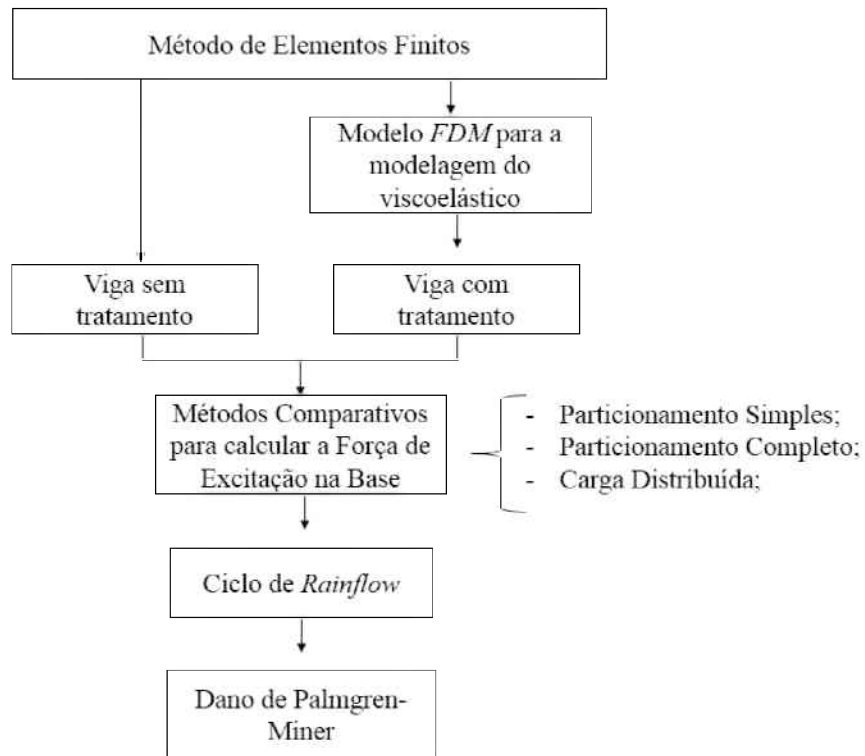


Figura 4.3 – Procedimento numérico de análise de fadiga de sistemas viscoelásticos.

# CAPÍTULO V

## SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo é apresentado os resultados das simulações numéricas realizadas com o intuito de verificar os procedimentos de modelagem propostos para o estudo da fadiga de sistemas viscoelásticos e a eficiência dos mesmos em termos do aumento da vida em fadiga. É apresentado também os resultados do estudo paramétrico realizado com o modelo de fadiga combinado com o *FDM* e recorrência para verificar o grau de influência de parâmetros físicos como temperatura de operação do sistema, e geométricos como espessuras das camadas do tratamento superficial, conforme modelo apresentado no Capítulo IV.

### 5.1 VERIFICAÇÃO DA VIGA SANDUÍCHE ELÁSTICA

Primeiramente, uma análise modal foi feita para verificar o modelo de viga sanduíche de três camadas. Os resultados obtidos com o modelo proposto foram comparados com os resultados disponíveis na literatura e com o código ANSYS® Workbench versão estudantil. A Tabela 5.1 mostra as propriedades físicas e geométricas usadas para a construção do modelo, segundo Banerjee *et al.* (2007). Nesta aplicação, todas as camadas são consideradas elásticas. Esta simulação é importante para demonstrar que os campos de deslocamentos, deformações, matrizes de massa e rigidez e, conseqüentemente, as equações do movimento foram formuladas e resolvidas corretamente. Na Tabela 5.2 são mostradas as quatro primeiras frequências naturais encontradas pelo modelo proposto em comparação com o ANSYS® e com a literatura de referência. Nota-se claramente uma boa correlação entre os resultados obtidos com o modelo proposto e com o código comercial ANSYS®, apresentando um erro percentual de no máximo 1,4 %. Apesar de apresentarem valores com pequenas diferenças, em relação ao terceiro modo de vibrar, as frequências por Banerjee *et al.* (2007), também concordam com aquelas previstas pelo modelo proposto deste trabalho. O primeiro modo de vibrar apresenta um erro percentual de 1,8 %.

Tabela 5.1 – Propriedades da viga sanduíche puramente elástica

Camada	1° camada	2° camada	3° camada
Material	Aço	Chumbo	Aço
Comprimento (L)	0,5 m	0,5 m	0,5 m
Largura (b)	0,04 m	0,04 m	0,04 m
Espessura (m)	0,015 m	0,02 m	0,01 m
Módulo (G)	80 GPa	5,5 GPa	80 GPa
Densidade ( $\rho$ )	7.850 kg/m <sup>3</sup>	11.100 kg/m <sup>3</sup>	7.850 kg/m <sup>3</sup>

Tabela 5.2 – Frequências naturais para a viga sanduíche puramente elástica

Frequência	Modelo proposto	ANSYS®	Banerjee <i>et al.</i> (2007)
1 <sup>a</sup>	123,61 Hz	121,83 Hz	123,57 Hz
2 <sup>a</sup>	633,20 Hz	628,97 Hz	611,33 Hz
3 <sup>a</sup>	1460,0 Hz	1462,5 Hz	1393,10 Hz
4 <sup>a</sup>	1825,9 Hz	1825,6 Hz	1823,79 Hz

## 5.2 PROPRIEDADES DA VIGA SANDUÍCHE VISCOELÁSTICA

Para efeito do estudo da vida em fadiga, será utilizado nas simulações que seguem uma outra configuração de viga sanduíche viscoelástica, conforme definido na Tabela 5.3. Neste caso, será ainda considerado que a viga em balanço está com uma massa pontual de 0,076 Kg acrescentada à sua extremidade livre. Outro aspecto importante são os parâmetros de fadiga do material da viga-base, no caso o alumínio. Neste caso, utilizou-se o  $S'$ , coeficiente de resistência à fadiga, igual a 726 MPa e o  $b$ , expoente de resistência à fadiga, igual a -0,126, tanto no MATLAB® como no ANSYS®.

Tabela 5.3 – Propriedades da viga sanduíche viscoelástica

Camada	Viga-base	Viscoelástica	Restringente
Material	Alumínio	3M ISM 112	Alumínio
Comprimento (L)	0,24 m	0,24 m	0,24 m
Largura (b)	0,026 m	0,026 m	0,026 m
Espessura (h)	0,002 m	0,001m	0,001 m
Módulo (E)	7,1MPa	8,3MPa	7,1MPa
Densidade ( $\rho$ )	2770 Kg/m <sup>3</sup>	1050 Kg/m <sup>3</sup>	2770 Kg/m <sup>3</sup>

### 5.3 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DA MALHA

Esta seção apresenta o estudo da convergência da malha de elementos finitos para determinar o número mínimo de elementos da malha para a viga sanduíche viscoelástica. Vale lembrar que os valores das propriedades da viga sem e com tratamento a partir de agora são definidos na Tabela 5.3.

A Fig. 5.1 mostra o deslocamento transversal máximo da extremidade livre da viga sanduíche como função do número de elementos finitos. Nota-se que é necessário um número mínimo de 80 EFs na malha para que não exista variação significativa na resposta temporal da mesma. Portanto, nas simulações que seguem, serão utilizados um total de 100 EFs.

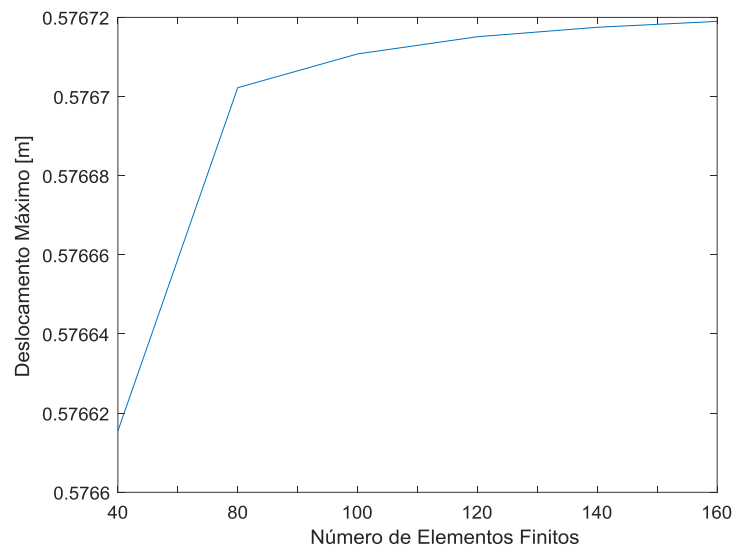


Figura 5.1 – Convergência da malha de EFs para a viga sanduíche viscoelástica.

### 5.4 VIDA EM FADIGA DA VIGA-BASE (SEM TRATAMENTO)

Antes de passar para a análise da vida em fadiga no domínio do tempo da viga sanduíche viscoelástica, foco deste trabalho, é importante verificar as implementações que foram feitas das técnicas de fadiga no tempo no código *próprio* desenvolvido em MATLAB<sup>®</sup>. Neste sentido, foi utilizado aqui somente a viga-base (viga sem tratamento viscoelástico) e com uma massa de 0,076 Kg colocada em sua extremidade livre. Como referência para comparação dos resultados, foi utilizado o código comercial ANSYS<sup>®</sup> Workbench VERSÃO 2020.

A Fig. 5.2 mostra um desenho esquemático da viga sem tratamento com a massa pontual na sua extremidade livre e sujeita à uma excitação na sua base do tipo harmônica na direção y com amplitude de 0,01 m e com frequência de 200 Hz.

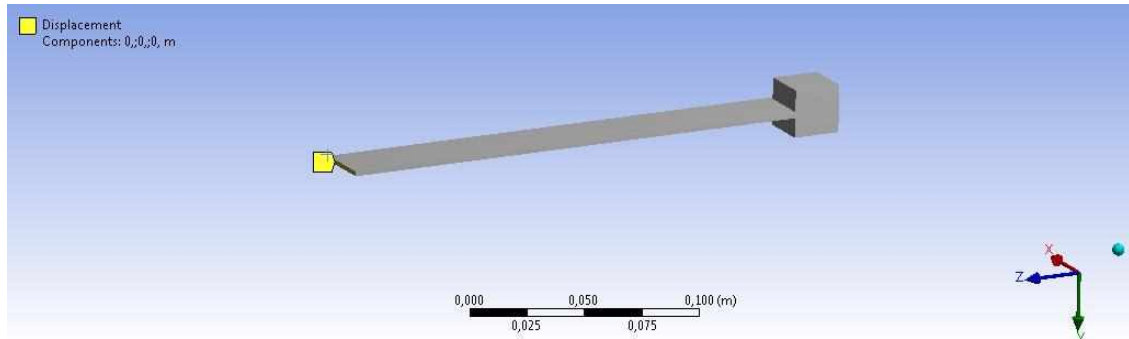


Figura 5.2 – Viga-base com a massa pontual em ANSYS®

A Fig. 5.3 mostra basicamente a duas etapas principais necessárias que precedem o cálculo da vida em fadiga no domínio do tempo utilizando o ANSYS® Workbench. O maior desafio é simular a excitação pela base. Para isso, primeiro, deve-se utilizar a *Função modal*, onde são colocados os dados do material, no caso, o alumínio (Biblioteca do ANSYS®), e, no *Engineering Data*, pode-se importar a geometria da viga-base com a massa na extremidade feita no SOLIDWORKS. Após a aplicação das condições de contorno mecânicas, foi gerada a malha de elementos finitos e a resolução do sistema no domínio modal. Essa etapa foi feita com o objetivo de criar o *fixed support*, indispensável para ativar a *Função transiente Structural* e o *base excitation*. Os três primeiros passos da *Função modal* foram transferidas para a *Função transiente Structural*. Assim, criou-se a excitação de base na direção y para a simulação no tempo da fadiga. Foi utilizada a ferramenta *fatigue*, precisamente *Life*, em que foi possível estimar o número de ciclos necessários para ocorrer a ruptura por falha por fadiga.

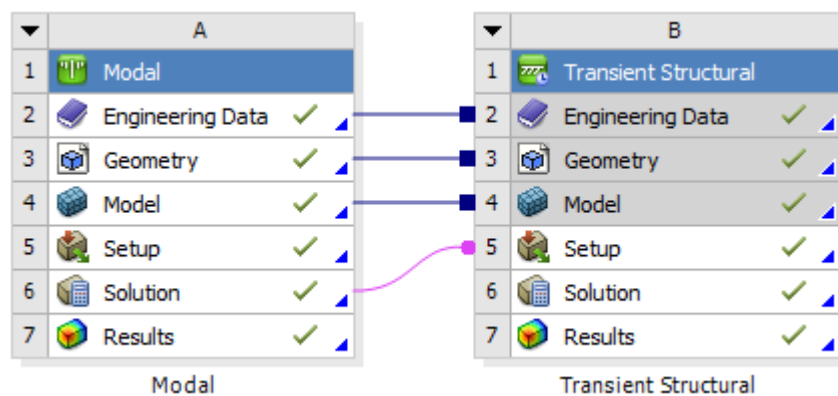


Figura 5.3 – Etapas no ANSYS® para a análise da vida em fadiga no tempo.

### 5.4.1 Excitação pela base – particionamento completo dos GDL's

Como discutido anteriormente, uma das dificuldades foi a excitação pela base da viga sem tratamento simulando um *shaker* para o estudo de fadiga no tempo utilizando o ANSYS®. A incorporação da excitação pela base da viga no código *próprio* também foi uma tarefa desafiadora. Na literatura, são poucos os métodos utilizados para o estudo de sistemas dinâmicos excitados pela base para o estudo de vibrações. Sendo assim, dentre os métodos disponíveis na literatura, optou-se pelo método do particionamento completo dos GDL's em função de ações múltiplas nos apoios.

Neste ponto, vale ressaltar que uma das vantagens da utilização do ANSYS® Workbench para a modelagem de sistemas estruturais é justamente a facilidade oferecida pelo código para lidar com estruturas sujeitas a ações múltiplas nos apoios (HUGHES, 1987). Entretanto, para o desenvolvimento da formulação com excitação múltipla dos apoios no código desenvolvido no MATLAB®, algumas adaptações foram necessárias na formulação do modelo proposto.

Seja o sistema da Fig. 5.4 sujeito a um movimento em sua base (OLIVEIRA, 2016).

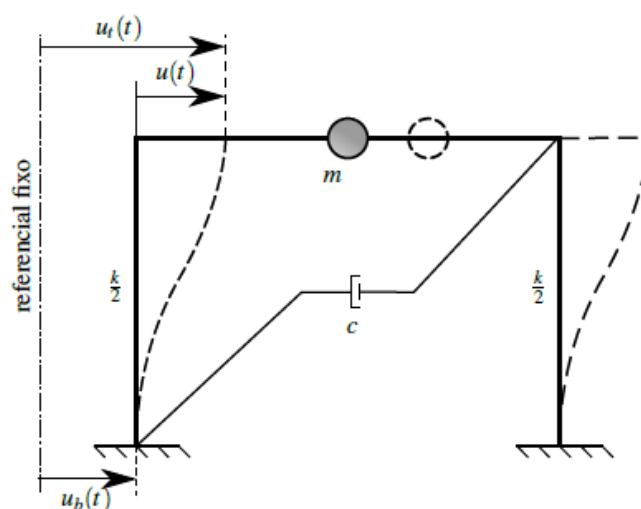


Figura 5.4 – Sistema com movimentação da base (Adaptado de Clough e Penzien, 1993)

As forças de inércia desenvolvidas na estrutura são função do deslocamento total da mesma em relação a um referencial fixo. Enquanto isso, as forças elásticas e de amortecimento são função apenas do deslocamento relativo entre a massa e a base (SORIANO, 2009). Assim, a equação de equilíbrio dinâmico pode ser escrita como segue:

$$m\ddot{u}_t + c\dot{u} + ku = 0 \quad (5.1)$$

onde  $u_t$  significa o deslocamento total da estrutura em relação a um referencial fixo, ou seja, a soma do deslocamento da estrutura relativo à base ( $u$ ) mais o deslocamento da base ( $u_b$ ), como mostrado na Eq (5.2).

$$u_t = u + u_b \quad (5.2)$$

Diferenciando a Eq.(5.2) duas vezes e considerando que os deslocamentos  $u$  e  $u_b$  são independentes obtém-se que:

$$\ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_b \quad (5.3)$$

Substituindo a Eq.(5.3) em (5.1), resulta em:

$$m(\ddot{u} + \ddot{u}_b) + c\dot{u} + ku = 0 \quad (5.4)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_b \quad (5.5)$$

Observa-se que a ação do movimento da base pode ser introduzida como uma força externa equivalente a  $f = -m\ddot{u}_b$ .

Considerando uma estrutura submetida a uma excitação sísmica, onde a base se move como um corpo rígido, os nós restringidos, isto é, os nós junto à base sofrerão um deslocamento igual ao do solo (OLIVEIRA, 2016). Sobre esses nós, os deslocamentos, velocidades e acelerações podem ser descritos como:

$$d_{br} = I_b u_b \quad (5.6)$$

$$\dot{d}_{br} = I_b \dot{u}_b \quad (5.7)$$

$$\ddot{d}_{br} = I_b \ddot{u}_b \quad (5.8)$$

em que  $I_b$  é um vetor que determina que os deslocamentos horizontais do solo interferem apenas os graus de liberdade horizontais dos nós restringentes, representada por:

$$I_b^T = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (5.9)$$

De maneira similar ao oscilador simples, os deslocamentos dos nós livres serão a soma entre um deslocamento devido ao movimento de corpo rígido ( $d_{ar}$ ) e um deslocamento devido à ação sísmica ( $d_a$ ) (OLIVEIRA, 2016). A equação de movimento pode ser reescrita por:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_a + \ddot{d}_{ar} \\ I_b \ddot{u}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ab} \\ C_{ba} & C_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_a + \dot{d}_{ar} \\ I_b \dot{u}_b \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_a + d_{ar} \\ I_b u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

A primeira linha é desenvolvida como mostra a seguir:

$$\begin{aligned} M_{aa} \ddot{d}_a + M_{aa} \ddot{d}_{ar} + M_{ab} I_b \ddot{u}_b + C_{aa} \dot{d}_a + C_{aa} \dot{d}_{ar} + C_{ab} I_b \dot{u}_b \\ + K_{aa} d_a + K_{aa} d_{ar} + K_{ab} I_b u_b = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

O terceiro e o sexto termos serão iguais a zero, pois nos nós livres não há aplicação direta da aceleração e velocidade do solo.

$$M_{ab} I_b \ddot{u}_b = C_{ab} I_b \dot{u}_b = 0 \quad (5.12)$$

Os últimos termos também serão iguais a zero, pois não há forças externas diretamente aplicadas aos nós livres.

$$K_{aa} d_{ar} + K_{ab} I_b u_b = 0 \quad (5.13)$$

$$d_{ar} = K_{aa}^{-1} K_{ab} I_b u_b \quad (5.14)$$

$$\ddot{d}_{ar} = K_{aa}^{-1} K_{ab} I_b \ddot{u}_b = I_a \ddot{u}_b \quad (5.15)$$

onde  $I_a = K_{aa}^{-1} K_{ab} I_b$ .

Os efeitos viscosos são desprezíveis em relação aos efeitos inerciais da ação sísmica:



$$C_{aa}I_a\ddot{u}_b \ll M_{aa}I_{aa}\ddot{u}_b \quad (5.16)$$

Assim, conclui-se que a equação do movimento para o excitação na base para o método de particionamento completo é dada como segue:

$$M_{aa}\ddot{d}_a + C_{aa}\dot{d}_a + K_{aa}d_a = -M_{aa}I_{aa}\ddot{u}_b \quad (5.17)$$

A Tabela 5.4 mostra os resultados obtidos pelos códigos desenvolvidos no MATLAB<sup>®</sup> e no ANSYS<sup>®</sup> em termos dos ciclos de fadiga da viga-base (sem tratamento viscoelástico). De imediato, pode-se notar uma boa correlação entre os resultados obtidos, o que permite verificar a implementação das técnicas de análise de fadiga no tempo implementadas neste trabalho. A diferença observada se deve principalmente ao modelo estrutural de viga empregado de um código para o outro, uma vez que o ANSYS<sup>®</sup> utiliza uma formulação mais abrangente 3D. O erro relativo é de aproximadamente 10%.

Tabela 5.4 – Vida em fadiga da viga-base

	MATLAB <sup>®</sup>	ANSYS <sup>®</sup>
Ciclos	6,13x10 <sup>7</sup>	5,57x10 <sup>7</sup>

A título de ilustração, a Fig. 5.5 mostra o resultado da análise de fadiga no domínio do tempo da viga-base obtido com o código ANSYS<sup>®</sup>.

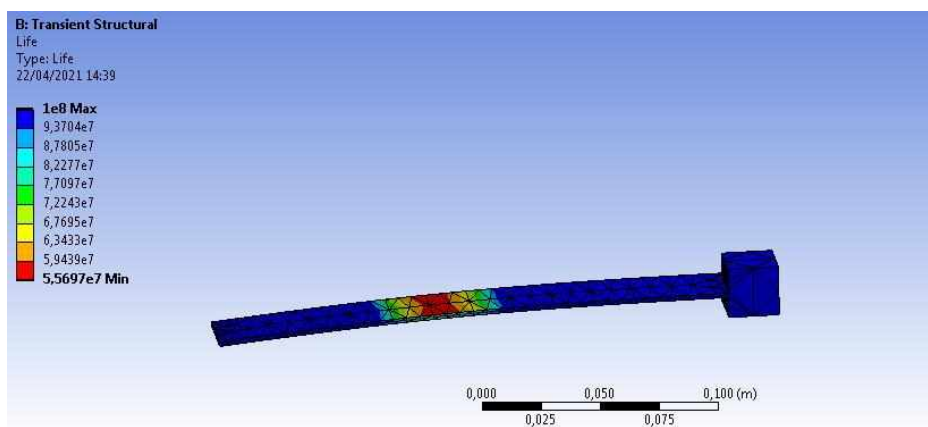


Figura 5.5– Resultado da vida em fadiga da viga-base obtida com o ANSYS<sup>®</sup>.

## 5.5 VIDA EM FADIGA DA VIGA SANDUÍCHE VISCOELÁSTICA

Nesta seção, é apresentado os resultados da vida em fadiga da viga tratada com material viscoelástico. Nesta aplicação, além de considerar a massa pontual na extremidade livre da viga sanduíche, também foi considerado a presença de entalhes para facilitar futuras investigações experimentais envolvendo a fadiga de sistemas viscoelásticos. Em termos do comportamento viscoelástico, foi assumido que o sistema está operando à temperatura constante de 27°C.

Ressalta-se que o código feito em MATLAB<sup>®</sup> para o estudo da fadiga no tempo de sistemas viscoelásticos incorpora o modelo de viga sanduíche combinado com o FDM e a fórmula da recorrência, conforme apresentado no Capítulo 3. Além disso, o entalhe é incluído no modelo através do seguinte fator de concentração de tensões (SHIGLEY, 1984):

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \quad (5.18)$$

onde  $K_t$  deve ser extraído de gráficos padrões de fadiga como o da Fig. 5.6 para o caso de uma barra retangular com entalhe, similar ao que será considerado neste trabalho.  $q$  é a sensibilidade ao entalhe, definido pela seguinte expressão:

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{\rho}} \quad (5.5)$$

onde  $\alpha$  é uma constante que leva em conta a geometria do entalhe e  $\rho$  é a densidade do material.

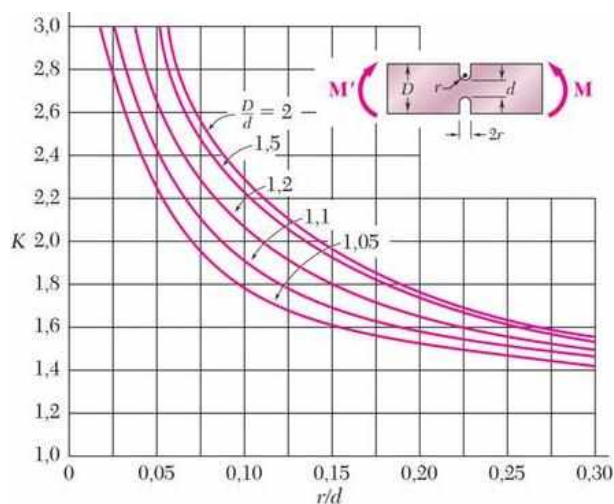


Figura 5.6 – Fator  $K_t$  para uma barra retangular com entalhe (Adaptado de SHIGLEY, 2004).

Neste caso, o diâmetro do entalhe circular considerado possui 20% da largura da viga e o centro do mesmo, como recomendado pela literatura, está a 0,027m da base da viga sanduíche.

A Tabela 5.5 mostra claramente que há um aumento significativo da vida em fadiga da viga pela presença do tratamento viscoelástico superficial. Isso se deve à capacidade que estes materiais possuem de absorver parte da energia vibratória indesejável e dissipá-la sob a forma de calor. Portanto, quanto menor as vibrações produzidas, menor são os esforços cíclicos e, conseqüentemente, maior será o tempo que a viga suportará o carregamento. Além disso, pode-se perceber a grande influência do entalhe na redução da vida em fadiga da viga sem e com tratamento, como esperado, uma vez que o concentrador de tensão tem a função de acelerar o processo da fadiga. Em termos quantitativos, a viga com tratamento apresenta uma eficiência três vezes maior em relação a viga sem tratamento, tanto no que tange o efeito sem e com entalhe.

Tabela 5.5 – Vida em fadiga da viga sem e com tratamento viscoelástico e sem e com entalhe

Viga	Sem entalhe	Com entalhe
Sem tratamento	$5,42 \times 10^7$ ciclos	20435 ciclos
Com tratamento	$1,61 \times 10^8$ ciclos	60000 ciclos

## 5.6 INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA NA VIDA EM FADIGA

É sabido que o comportamento dos materiais viscoelásticos e, portanto, sua eficiência em mitigar as vibrações, depende fortemente da temperatura de operação do mesmo, como discutido no Capítulo 3. Para a análise da influência da temperatura de operação do material viscoelástico na vida em fadiga da viga sanduíche em questão, foi utilizado aqui o material ISD112<sup>©</sup> da 3M. A Tabela 5.6 mostra os parâmetros do módulo complexo do modelo FDM com recorrência obtidos por Filho (2018) para este material viscoelástico. Vale ressaltar que estes parâmetros são normalmente obtidos por métodos de ajuste de curvas entre o modelo FDM e os dados experimentais fornecidos pelo fabricante para várias temperaturas de interesse e banda de frequência.

As Figs. 5.7 e 5.8 mostram, respectivamente, os resultados obtidos em termos da vida em fadiga da viga sanduíche viscoelástica sem e com entalhe em função da temperatura de operação do material viscoelástico.

Tabela 5.6 – Parâmetros ajustados do modelo FDM com recorrência (extraído de FILHO, 2019)

Temperatura(°C)	$G_0(Pa)$	$G_\infty(Pa s^a)$	$a_G(s^a)$	$\alpha(-)$
10	412887	147864	0.0008217	0.66714
15	403531	95061	0.0004680	0.66091
20	419582	57563	0.0003162	0.66780
25	427808	35483	0.0002541	0.67643
27	423716	31293	0.0001723	0.67107
30	425301	24489	0.0001388	0.67273
35	429484	16272	0.0001302	0.67902

Como esperado, para ambas as vigas sanduíches sem e com entalhe, nota-se uma forte redução na vida em fadiga do sistema com o aumento da temperatura de operação do sistema. Isto se deve em função da redução na capacidade de amortecimento do material viscoelástico à medida em que ocorre um aumento na sua temperatura de atuação. Além disso, como observado anteriormente, no caso da viga sanduíche com entalhe, há uma aceleração do processo de fadiga, reduzindo ainda mais o tempo de vida do sistema, principalmente para temperaturas mais altas.

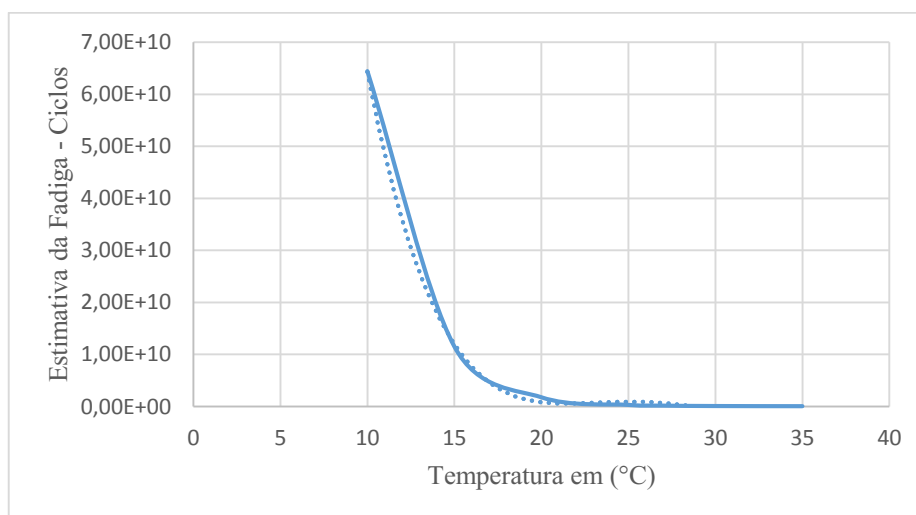


Figura 5.7 – Influência da temperatura na vida em fadiga da viga sanduíche sem entalhe

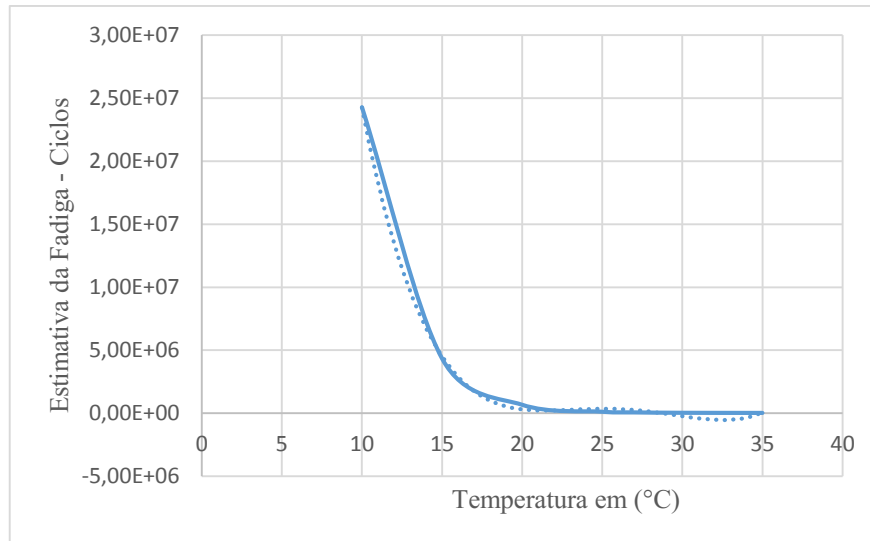


Figura 5.8 – Influência da Temperatura na vida em fadiga da viga sanduíche com entalhe

## 5.7 INFLUÊNCIA DA ESPESSURA DA CAMADA RESTRINGENTE

Nesta seção, é apresentado o estudo sobre a influência de variações nas espessuras das camadas viscoelástica e restringente do tratamento superficial. Neste caso, a temperatura de operação do sistema é assumida constante e igual a 27°C. Foram aplicados aumentos gradativos de 5%, 10% e 15% nos valores nominais das espessuras das cada camadas de interesse e feito o cálculo da vida em fadiga, conforme resultados apresentados nas Tabelas 5.7 e 5.8.

Tabela 5.7 – Influência das espessuras das camadas na vida em fadiga – sem entalhe

Camada	Estimativa da vida (ciclos)			
	Nominal	+5%	+10%	+15%
Restringente	1,61x10 <sup>8</sup>	2,46x10 <sup>8</sup>	4,28x10 <sup>8</sup>	8,20x10 <sup>8</sup>
Viscoelástica		1,63x10 <sup>8</sup>	1,64x10 <sup>8</sup>	1,65x10 <sup>8</sup>

Tabela 5.8 – Influência das espessuras das camadas na vida em fadiga – com entalhe

Camada	Estimativa da vida (ciclos)			
	Nominal	+5%	+10%	+15%
Restringente	6x10 <sup>4</sup>	9,30x10 <sup>4</sup>	16,1x10 <sup>4</sup>	30,9x10 <sup>4</sup>
Viscoelástica		6,20x10 <sup>4</sup>	6,21x10 <sup>4</sup>	6,23x10 <sup>4</sup>

De uma maneira geral, os resultados das Tabelas 5.7 e 5.8 demonstram que a maior influência da vida em fadiga da viga sanduíche ocorre quando há variações na espessura da camada restringente quando comparado às variações dadas na camada viscoelástica. Isto pode ser explicado pelo fato de que é a camada restringente a maior responsável pelo aumento das deformações cisalhantes induzidas no núcleo viscoelástico, como discutido por de Lima *et al.* (2006). Portanto, isto leva a um aumento significativo da dissipação de energia vibratório pelo tratamento viscoelástico superficial e, portanto, aumento da vida em fadiga.

Além disso, nota-se que o entalhe reduz a resistência à fadiga, sendo observado a mesma análise para o aumento da espessura da viga sanduíche sem entalhe.

# CAPÍTULO VI

## VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL

Este capítulo é dedicado à verificação experimental do modelo de viga sanduíche de três camadas incorporando o modelo FDM com recorrência para a estimação da vida em fadiga de sistemas viscoelásticos. Para isto, utiliza-se, num primeiro momento, uma estrutura simples composta por uma viga sem tratamento com entalhe próximo ao engaste e uma massa pontual na sua extremidade livre. Num segundo momento, passe-se ao estudo experimental com uma viga tratada com camada restrita passiva com o objetivo de verificar não somente os procedimentos de modelagem no tempo da vida em fadiga de tal sistema, mas também verificar a eficiência do tratamento viscoelástico para o aumento da vida em fadiga do sistema.

### 6.1 EQUIPAMENTOS UTILIZADOS NOS ENSAIOS

Para os ensaios, foi utilizado um gerador de sinal que permite ajustar a frequência da excitação harmônica da ordem de 13 Hz, utilizada tanto no experimento da viga sem tratamento como no da viga tratada. A escolha da frequência de 13 Hz se deve ao fato desta estar próxima da primeira frequência natural da viga sem tratamento. O gerador de sinal envia os dados para um amplificador, que é responsável por gerar uma corrente em Amperes. Neles, é possível regular a amplitude pico a pico do sinal da excitação através de um programa feito em ambiente *LabView*. Essa corrente do amplificador é então enviada ao *shaker* conectado à base da viga. A placa da *National Instruments* em conjunto com o programa *LabView*, são os responsáveis por medir e armazenar, respectivamente, as deformações e a aceleração do sistema, convertendo a corrente do amplificador em deformação e aceleração.

#### 6.1.1 Gerador de sinal

A Figura 6.1 mostra o equipamento responsável por gerar uma excitação de origem senoidal com frequência de 13 Hz (aproximadamente). Para a frequência se aproximar de 13 Hz, foi necessário utilizar o botão de ajuste fino disponível no mesmo.



Figura 6.1 – Gerador de Sinal ajustado na frequência de 13 Hz

### 6.1.2 Amplificador de sinal

Na Figura 6.2, tem-se a foto do amplificador (Power Amplifier Type 2732) utilizado nos ensaios. Segundo o manual do fabricante, o Amplificador tipo 2732 fornece uma resposta harmônica de baixa distorção em uma ampla faixa de frequência. Além disso, ele possui um amplo controle e capacidade de monitoramento do sinal.



Figura 6.2 – Amplificador de sinal tipo 2732 (Retirado do Manual do Fabricante)

### 6.1.3 Shaker

Na Figura 6.3, nota-se o *shaker* (Modal Exciter Type 4824) usado nos ensaios. Segundo o fabricante, a faixa de frequência suportada por ele é de 2 a 5000 Hz com amplitude de até 25,4 mm (1 in). Nos ensaios, foi utilizado uma amplitude de 20 mm pico a pico e uma frequência de 13 Hz.

A escolha do *shaker* foi extremamente importante para o sucesso do ensaio, uma vez que como havia o interesse de realizar uma excitação pela base da viga, teve-se a preocupação em dimensionar a mesma tendo como base as dimensões e características deste equipamento para não danificá-lo.





Figura 6.3 – *Shaker* tipo 4824 (Retirado do Manual do Fabricante)

#### 6.1.4 Placa de aquisição de dados da National Instruments (NI)

A Figura 6.4 mostra a placa de aquisição da NI (cDAQ-9174 CompactDAQ Chassis) usada para a medição da deformação e da aceleração tanto do fixador como da aceleração da extremidade da viga. Para medir a deformação, foi necessário o uso de extensômetros elétricos ou *strain gauges* do tipo PA-13-500BA-12OS, disponíveis no LMEst. O primeiro é relacionado com a medição da deformação da viga, colocado próximo ao suporte ou fixador e o segundo é relacionado ao compensador de temperatura. Além dos extensômetros, foram utilizados acelerômetros (PCB 352C22) para a medição da aceleração a serem fixados no suporte ou fixador e o outro na extremidade livre da viga. Para a leitura e processamento dos dados advindos da placa de aquisição da NI, utilizou-se um programa desenvolvido em *LabView*.



Figura 6.4 – Placa de aquisição da NI (cDAQ-9174 CompactDAQ Chassis)

O *LabView* (*Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench*) é uma linguagem de programação gráfica feita pela *National Instruments*. As principais aplicações do *LabView* são realizações de medições e a automação. A programação é feita baseada no modelo de fluxo de dados, com vantagens para a aquisição de dados e para a sua manipulação. Os programas em *LabView* são compostos pelo painel frontal, que apresenta a interface, e pelo diagrama de blocos, que representa o código gráfico do programa. Nas Figuras 6.5 a 6.7, é possível ver a interface e o diagrama de blocos necessários para fazer a aquisição de dados do experimento, de maneira correta.

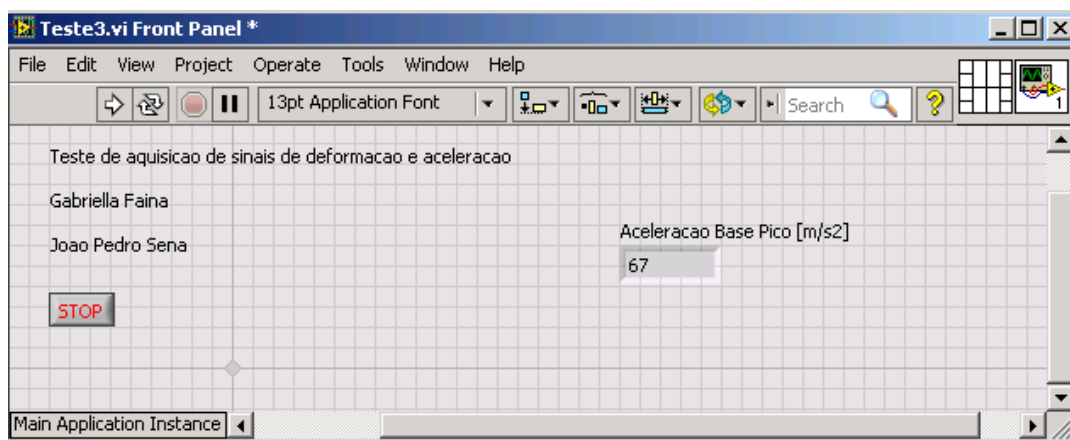


Figura 6.5 – Ilustração da interface do programa *LabView*

Na Figura 6.5, pode-se perceber a interface do *LabView*, em que é possível regular a aceleração da base ou do pico máximo do suporte, localizado no meio da viga. Essa regulagem é feita em conjunto com o amplificador. Considerando, que a frequência utilizada é de 13 Hz e a amplitude pico a pico é de 20 mm, conclui-se que a amplitude de aceleração é de aproximadamente  $67 \text{ m/s}^2$ . Sabe-se que as Eqs. 6.1 a 6.3 representam, respectivamente, o deslocamento, velocidade e aceleração do sinal.

$$x = X_0 \cdot \text{sen } w \cdot t \quad (6.1)$$

$$\dot{x} = X_0 \cdot w \cdot \text{cos } w \cdot t \quad (6.2)$$

$$\ddot{x} = -X_0 \cdot w^2 \cdot \text{sen } w \cdot t \quad (6.3)$$

Sendo a frequência angular representada na Eq. 6.4.

$$w = 2. \Pi. f \tag{6.4}$$

onde  $f$  é a frequência em Hz. Assim, utilizando a frequência de 13 Hz ( $f$ ) e a amplitude de 10 mm ( $X_0$ ) ou 20 mm pico a pico, obtém a amplitude de aceleração como segue:

$$A_c = X_0. w^2 = 0,010. (2. \Pi. 13)^2 = 67,14 \text{ m/s}^2 \tag{6.5}$$

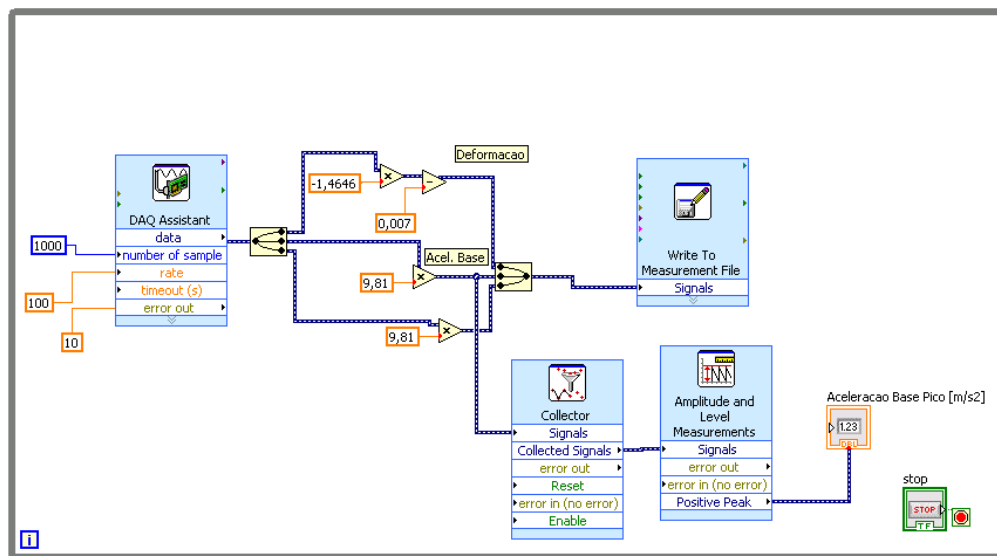


Figura 6.6 – Diagrama de Blocos da viga com tratamento viscoelástico.

A Figura 6.6 mostra o diagrama de blocos para a viga tratada, ou seja, a programação gráfica através da interface apresentada na Figura 6.5. Primeiramente, utiliza-se a função *DAQ Assistant*, que é uma interface gráfica fácil de usar para configurar tarefas relacionadas a canais de medição e para personalizar temporização, disparo e escalas sem programação. Em seguida, a calibração é feita no *LabView* para ajustar a deformação experimental com a deformação teórica. Todo o processo de calibração dos extensômetros nas vigas sem e com tratamento são mostradas logo a seguir. A função *Collector* coleta a deformação e a aceleração do suporte e da extremidade em cada etapa de tempo predeterminado da simulação. A função *Amplitude and Level Measurements* utiliza o pico máximo dos sinais gerados pela deformação e aceleração. Gera-se, a partir da função *Write to Measurement File*, vários arquivos (.lvm) contendo quatro colunas, sendo, o tempo, a deformação, a aceleração no suporte ou fixador e a aceleração na extremidade da viga, respectivamente.

## 6.2 CARACTERÍSTICAS DA VIGA SEM E COM TRATAMENTO COM ENTALHE

Foi utilizada, primeiramente, uma viga de alumínio sem tratamento com massa nas extremidades livres, conforme mostrado na Figura 6.7 da viga instrumentada no *LMEst*. A Figura 6.8 mostra um desenho esquemático da viga sem tratamento com os entalhes, devidamente dimensionados. A massa pontual é de 0,076 Kg. Na Tabela 6.1 estão as características e dimensões da viga de alumínio sem tratamento.

Vale lembrar que a viga sem tratamento, na verdade, é a viga-base. E a viga sanduíche, é a adição do material viscoelástico e da camada restringente, na viga-base. O objetivo seria analisar a performance da viga-base em relação ao material viscoelástico, no processo de fadiga, como mostrado na Figura 6.8. Apenas na viga-base, adicionou o entalhe circular.



Figura 6.7 – Viga de alumínio sem tratamento instrumentada.

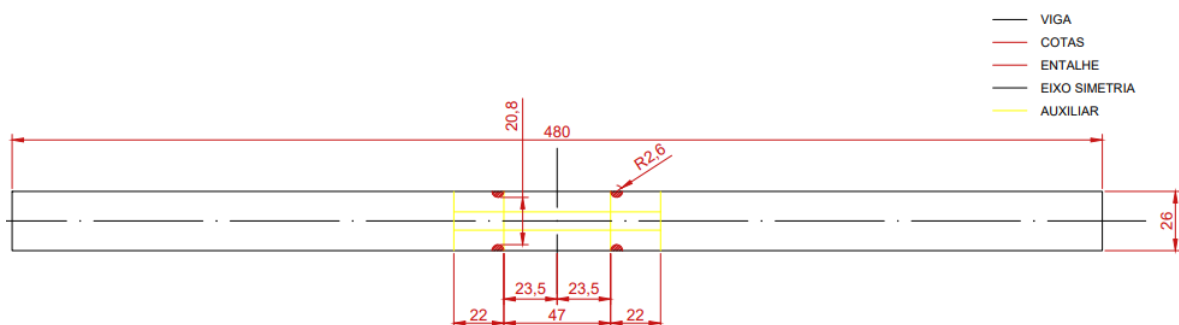


Figura 6.8 – Desenho da viga sem tratamento feita no AutoCad em [mm] na escala 1:2

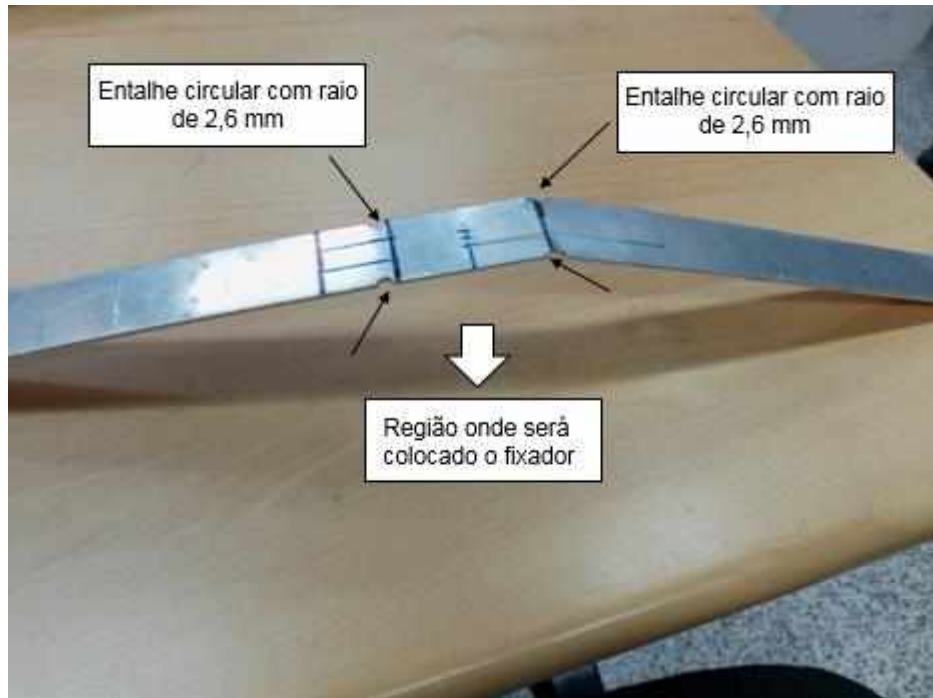


Figura 6.9 – Viga sem tratamento com a ruptura após o experimento, salientando a posição dos entalhes.

Tabela 6.1 – Propriedades da viga de alumínio sem tratamento

	Viga-Base
Material	Alumínio
Comprimento (L)	0,24[m]
Largura (b)	0,026 [m]
Espessura (h)	0,002 [m]
Módulo de Elasticidade (E)	$7 \cdot 10^{10}$ [Pa]
Massa em cada extremidade	0,076 [Kg]

Foi utilizada, posteriormente, uma viga de alumínio com tratamento e com as massas pontuais e o entalhe aplicado somente na viga-base. O mesmo procedimento adotado para a viga sem tratamento é adotado para a viga com tratamento. A diferença foi a adição das camadas viscoelástica e restringente, conforme a Tabela 6.2. Na Figura 6.10, é mostrada a viga com tratamento já instrumentada e com as duas massas nas extremidades livres. E na Figura 6.11, é possível perceber na viga já rompida, a existência das três camadas, a camada base, a camada viscoelástica e a camada restringente, respectivamente.

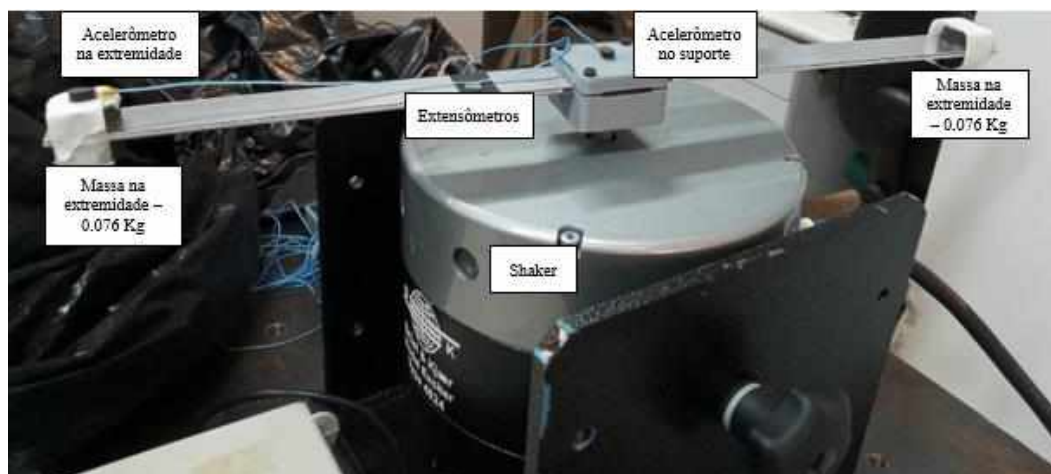


Figura 6.10 – Viga de alumínio tratada com camada restrita passiva instrumentada.

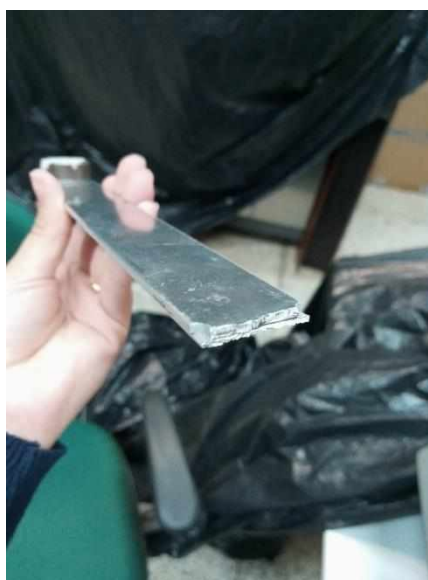


Figura 6.11 – Viga de alumínio tratada em que mostra sua ruptura e as camadas da viga sanduíche vistas de perto

Tabela 6.2 – Propriedades da viga sanduíche viscoelástica

Viga com Tratamento	Viga-Base	Camada Viscoelástica	Camada Restringente
Material	Alumínio	3M ISD-112	Alumínio
Comprimento (L)	0,24 [m]	0,24 [m]	0,24 [m]
Largura (b)	0,026 [m]	0,026 [m]	0,026 [m]
Espessura (h)	0,002 [m]	0,00015 [m]	0,00105 [m]
Módulo de Elasticidade (E)	$7 \cdot 10^{10}$ [Pa]	----	$7 \cdot 10^{10}$ [Pa]

### 6.3 CALIBRAÇÃO DOS EXTENSÔMETROS

Antes da realização dos ensaios experimentais, foi feita a calibração dos extensômetros. Os acelerômetros já estavam calibrados. A calibração é fundamental para a justar os dados experimentais com os dados reais e diminuir os erros no experimento.

#### 6.3.1 Massas utilizadas na calibração

Neste caso, foram utilizadas massas de valores conhecidos de tarugos  $T_1, T_2, T_3$  e  $T_4$ , arruelas ( $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  e  $A_7$ ) e pesos ( $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ ). Na Tabela 6.3, estão os valores das massas referentes às peças utilizadas.

Tabela 6.3 – Descrição das massas utilizadas na calibração

Descrição	Massa [g]
T1	38,03
T2	37,12
T3	37,92
T4	38,54
A1	14,46
A2	12,65
A3	14,44
A4	14,72
A5	13,38
A6	14,66
A7	13, 53
P1	166,07
P2	178,72
P3	193,13
P4	207,88

#### 6.3.2 Calibração para a viga sem tratamento

Antes de começar o experimento, foi necessário fazer a calibração dos extensômetros. A calibração tem o objetivo de ajustar os dados experimentais aos dados teóricos. Para isso, coletou-se as deformações experimentais das seguintes situações: (1) viga sem massa na extremidade; (2) viga com tarugo T1 na sua extremidade; (3) viga com tarugos T1 e T2 na sua

extremidade; (4) viga com tarugos T1, T2 e T3. O mesmo procedimento foi feito com as arruelas (A). E assim, sucessivamente, sendo feitas dez leituras para cada situação.

Feito isso, foi possível encontrar a deformação experimental de cada situação. O próximo passo foi encontrar a deformação teórica. Para isso, foi utilizada a Eq. (6.1) que descreve a tensão de flexão da viga sujeita a um momento de flexão dado pela Eq. (6.2), onde  $L$  é o comprimento da viga e  $F$  é a força peso na borda livre. A primeira parcela da Eq. (6.2) refere-se ao momento gerado pela massa na extremidade da viga e a segunda parcela refere-se ao momento gerado pela carga distribuída da massa da viga (peso próprio), como mostrada na Eq. (6.3).

Substituindo a Eq. (6.3) na (6.2) e, em seguida, substituindo o resultado na Eq. (6.1) e utilizando a Lei de Hooke, obtém-se a Eq. (6.4).

$$\sigma = \frac{M \cdot c}{I} \quad (6.1)$$

onde  $I = \frac{a \cdot b^3}{12}$ ,  $c = \frac{b}{2}$  e o momento de flexão é dado por

$$M = F \cdot L + q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = F \cdot L + q \cdot \frac{L^2}{2} \quad (6.2)$$

$$q = \rho \cdot A \cdot g = \rho \cdot a \cdot b \cdot g \quad (6.3)$$

A Eq. (6.4) representa a deformação teórica de uma viga engastada com uma carga distribuída (peso próprio) e com uma massa pontual na sua extremidade livre.

$$\varepsilon_t = \frac{3 \cdot L \cdot (2 \cdot F + L \cdot a \cdot b \cdot \rho \cdot g)}{E \cdot a \cdot b^2} \quad (6.4)$$

O erro é dado por:

$$e_L = \varepsilon_T - \varepsilon_L \quad (6.5)$$

onde  $\varepsilon_T$  é a deformação teórica e  $\varepsilon_L$  é a deformação experimental.



Desta forma, fazendo uma regressão linear é possível encontrar o gráfico da Figura 6.12. Nota-se que o coeficiente de determinação  $R^2$ , medida de ajuste de um modelo estatístico linear, ficou bem próximo de 1, demonstrando um boa qualidade do ajuste e, portanto, da calibração.

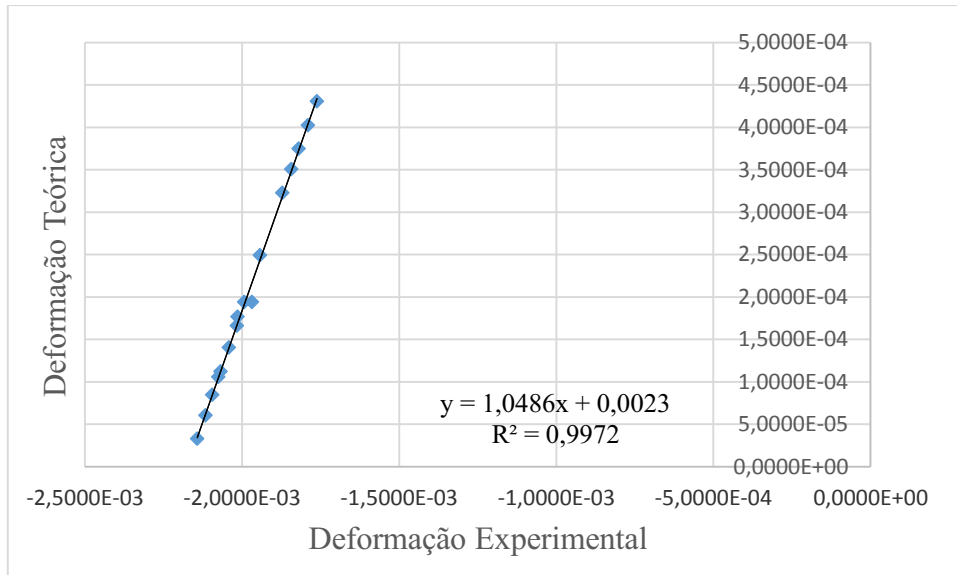


Figura 6.12 – Deformação experimental versus deformação teórica

A equação obtida por esse gráfico é a seguinte:

$$\varepsilon_T = m \cdot \varepsilon_L + b = 2,0486 \cdot \varepsilon_L + 0,0023 \quad (6.6)$$

Substituindo a Eq. (6.6) na relação,  $\varepsilon_T = \varepsilon_L + e_L$ , tem-se a seguinte expressão:

$$\varepsilon_T = (1 + m) \cdot \varepsilon_L + b = 2,04 \cdot \varepsilon_L + 0,0023 \quad (6.7)$$

#### 6.4.3 Calibração para a viga com tratamento

Na calibração para a viga com tratamento, foi feito o mesmo procedimento da viga sem tratamento. O gráfico de regressão é mostrado na Figura 6.13.

Utilizando as mesmas condições da calibração da viga sem tratamento, obteve-se a seguinte expressão para a calibração:

$$\varepsilon_T = (1 + m) \cdot \varepsilon_L + b = 2,4646 \cdot \varepsilon_L - 0,007 \quad (6.8)$$

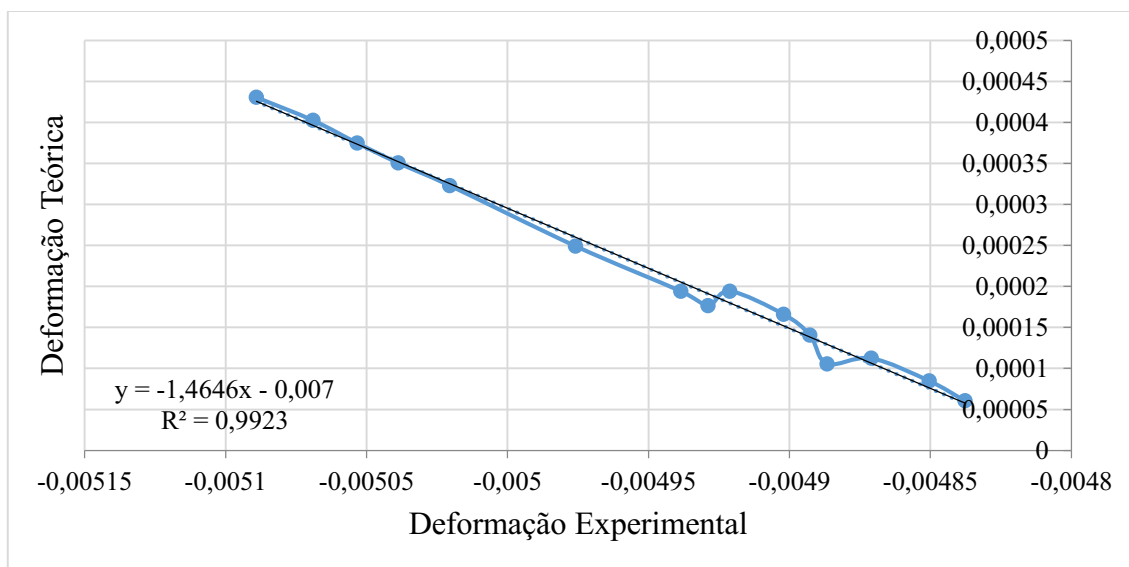


Figura 6.13 – Deformação experimental versus deformação teórica

#### 6.4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS EM TERMOS DO TEMPO DE FALHA

A Tabela 6.6 permite comparar o tempo numérico e experimental até a ruptura da viga com tratamento viscoelástico, à temperatura ambiente e controlada de 20°C. A Tabela 6.4 define os parâmetros utilizados para a construção do modelo de elementos finitos da viga tratada sujeitas à uma excitação pela base a uma frequência de 13 Hz e com uma amplitude de 20 mm pico a pico. Neste caso, conforme a geometria do entalhe da viga, utilizou-se o  $K_f = 2$ .

Tabela 6.4 – Tempos de ruptura numérico e experimental da viga com tratamento.

Viga	Tempo da ruptura [min]	
	Numérico	Experimental
Com tratamento	42	~39*

\* o termo '~' representa um valor aproximado

Além disso, no modelo numérico de fadiga, foi utilizado a Eq. 6.9 da curva S-N, onde N é o número de ciclos óbitos,  $\sigma$  é a tensão normal de flexão do ponto crítico, e o coeficiente de resistência à fadiga,  $S' = 1324MPa$  e o parâmetro  $b = -0190$  foram os obtidos para o material de alumínio da viga com tratamento que é o Al 7175-T73611.

$$N = \left(\frac{\sigma}{S'}\right)^{1/b} \quad (6.9)$$

Os resultados da Tabela 6.4 permite concluir sobre a eficiência do tratamento viscoelástico em aumentar a vida em fadiga da viga-base. Isto é visto tanto pelo modelo numérico quanto pelo experimento. Portanto, fica comprovado experimentalmente que os materiais viscoelásticos podem ser aplicados para mitigar vibrações indesejáveis (já estudado largamente na literatura aberta) e aumentar a vida em fadiga de sistemas dinâmicos (pouco investigado na literatura, principalmente no domínio do tempo). Em termos da verificação do modelo proposto, através dos ensaios experimentais, nota-se uma boa correlação entre os resultados numérico e experimental para a viga com tratamento viscoelástico. Com isto, fica validado os procedimentos de modelagem de estrutura sanduíche do tipo viga combinada com o FDM e com recorrência para o estudo da fadiga no domínio do tempo de sistemas amortecidos viscoelasticamente.

A Figura 6.14 mostra as acelerações obtidas experimentalmente para a viga com tratamento. Nota-se claramente as variações nos sinais da vibrações da viga no início do ensaio, durante o experimento e na iminência da falha da viga. Ressalta-se aqui que o procedimento de armazenamento de dados foi realizado para a viga tratada a cada 300s.

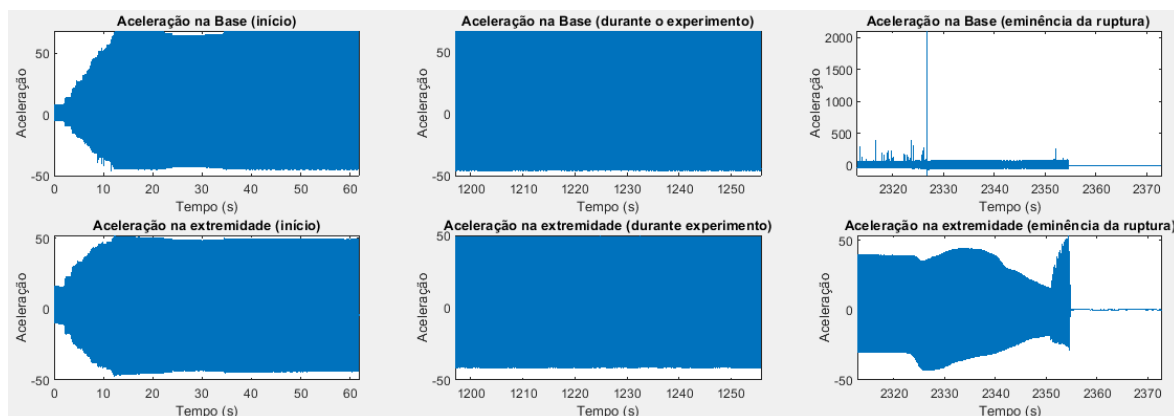


Figura 6.14 – Acelerações no tempo para a viga com tratamento até a ruptura

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

Esta Dissertação representa uma contribuição aos desenvolvimentos recentes sobre o estudo numérico-computacional e verificação experimental da viabilidade do emprego de tratamento viscoelástico superficial a sistemas dinâmicos sujeitos a carregamentos mecânicos cíclicos para o aumento da vida em fadiga dos mesmos.

O aspecto original do procedimento apresentado neste trabalho envolve a aplicação do modelo FDM com uma fórmula da recorrência para a predição da vida em fadiga no domínio do tempo de sistemas amortecidos viscoelasticamente, onde as propriedades dinâmicas variam fortemente com a frequência da excitação e com a temperatura de operação. Além disso, um procedimento numérico-computacional baseado no uso do método *Rainflow* com a regra de *Palmgren-Miner* para a contagem de ciclos foi proposto com o objetivo de estimar a vida em fadiga no tempo do sistema viscoelástico. Uma das grandes vantagens da metodologia proposta via emprego do modelo FDM com recorrência é a sua eficiência, permitindo sua extensão para o estudo da fadiga de sistemas mais complexos de interesse industrial.

Um exemplo acadêmico formado por uma viga sanduíche de três camadas foi proposto para ilustrar toda a metodologia proposta. Neste sentido, foram estimados os ciclos de vida em fadiga dos sistemas sem e com tratamento viscoelástico superficial, além de um estudo sobre a influência da temperatura de operação do material viscoelástico e das espessuras do tratamento superficial (camadas viscoelástica e restringente) na eficiência do mesmo. Com relação à temperatura que é considerado o parâmetro mais crítico de tratamentos viscoelásticos, quando ela aumenta, uma redução significativa na capacidade de amortecimento é esperada, resultando num aumento dos níveis de tensão da estrutura amortecida. Como consequência, é esperado uma redução na vida em fadiga da viga. Já para as espessuras das camadas viscoelástica e restringente, de uma forma geral, os resultados obtidos permitiram concluir que na medida em que ocorrem aumentos das espessuras dessas camadas, há uma aumento da vida em fadiga, sendo mais significativo para o caso da camada restringente. Isto ocorre em virtude do aumento das dissipações induzidas na camada viscoelástica.

Foram apresentados também os resultados experimentais preliminares para verificar toda a metodologia proposta para uma da condição de operação e ambiental da viga com tratamento. Através da comparação entre os tempos de ruptura numérico e experimental, pôde-se concluir acerca da acurácia do modelo FDM com recorrência para o estudo da vida em fadiga de sistemas viscoelásticos, além da comprovação experimental da eficiência do tratamento.

De uma maneira geral, os resultados obtidos através das inúmeras simulações numéricas e dos ensaios experimentais confirmaram que o emprego dos materiais viscoelásticos aplicados sob a forma de tratamentos superficiais pode aumentar significativamente a vida em fadiga de sistemas dinâmicos. Além disso, ficou comprovado que a metodologia proposta é adequada para tratar tal situação. A relevância de tal conclusão no tocante ao projeto da vida em fadiga de estruturas mecânicas submetidas a carregamentos transientes deve ser enfatizada. Portanto, toda a metodologia proposta tem um grande potencial de aplicabilidade para lidar com situações mais complexas de interesse industrial para a estimação da vida em fadiga no tempo de sistemas amortecidos viscoelasticamente.

## **PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS**

São as seguintes as perspectivas de trabalhos futuros:

- Realização de ensaios experimentais utilizando uma câmera térmica para controle rigoroso da temperatura de operação do material viscoelástico, já que ela influi significativamente na vida em fadiga do sistema;
- Extensão da metodologia proposta para outros tipos de sistemas sanduíches de interesse prático como placas e cascas contendo tratamento viscoelástico superficial;
- Proposição de um modelo de fadiga termomecânico para levar em conta os efeitos do auto-aquecimento inerente dos materiais viscoelástico quando submetidos a carregamentos cíclicos;
- Estudo das incertezas que influem no sistema e proposição de um modelo de fadiga estocástico viscoelástico para lidar com tal situação.

## TRABALHOS PUBLICADOS

CILAMCE (XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering)

- *Numerical analysis of a beam with and without viscoelastic treatment subject to cyclic loading in the time domain* (Garcia et al., 2020), em que se utiliza o MDF da recorrência na predição da vida em fadiga de vigas metálicas tratadas com material viscoelástico.
- *Use of an improved fractional derivative model for transient analyses of viscoelastic systems* (Nunes et al., 2020), em que se aplica o tratamento com material viscoelástico no controle de vibrações de uma estrutura de viga, analisando as respostas temporais por meio do MDF com recorrência;
- *Fatigue life estimation in a beam subject to random loads using probabilistic methods in the frequency domain* (Sena et al., 2020), em que utiliza aplicação da estimativa da fadiga no domínio da frequência.

COBEM 2021 (26<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering)

- *Transient analyses of viselastic systems based on an improved fractional derivative model and a reduction technique* (Nunes et al., 2020), em que retrada uma nova técnica de redução de modelos de MEF.

## REFERÊNCIAS

- ARIDURU, S. **Fatigue life calculation by rainflow Cicle counting method**. 2004. 119 f. Dissertação (Engenharia em Engenharia Mecânica) – The Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University, Ancara, Turquia, 2004.
- BAGLEY, R. L. P. J. A generalized derivative model for an elastomer damper. **The Shock and Vibration Bulletin**, London, v. 2, n. 49, p. 135–143, set. 1979.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. Fractional calculus: a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. **AIAA Journal**, New York, v. 21, n. 5, p. 741–748, maio 1983a. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/3.8142>.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. **Journal of Rheology**, New York, v. 27, n. 3, p. 201–210, jun. 1983b. Disponível em: <https://doi.org/10.1122/1.549724>.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. **Journal of Rheology**, New York, v. 30, n. 1, p. 133–155, fev. 1986. Disponível em: <https://doi.org/10.1122/1.549887>.
- BAPTISTA, C. A. R. P. **Fadiga dos Materiais Metálicos**. São Paulo: USP, [20--]. Apostila do Departamento de Engenharia de Materiais – Universidade de São Paulo.ac
- BARCANOV E., Transient response analysis of structures made from viscoelastic materials. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Chichester, Inglaterra, v. 44, n. 3, jan. 1999. Disponível em: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990130\)44:3<393::AID-NME511>3.0.CO;2-P](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990130)44:3<393::AID-NME511>3.0.CO;2-P).
- BOSCO J, R., **Análise numérico-experimental de componentes sujeitos à fadiga por solicitações aleatórias**: avaliação de modelos. 2007. 274 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia mecânica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

CALLISTER, J. R.; WILLIAM, D. **Ciência e engenharia dos materiais: uma introdução**. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

CARVALHO, M. D.; OTTONI, J. E. Introdução ao cálculo fracionário com aplicações. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, Ouro Preto, v. 5, n. 1, p. 50–77, 2018.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. 2nd. ed. New York: McGrawHill, 1993.

CUNHA FILHO, A. G. **Abordagem transiente sobre os efeitos do amortecimento viscoelástico na estabilidade aeroelástica de estruturas aeronáuticas**. 2019. 183 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2019.2208>.

CUNHA FILHO, A. G.; BRIEND, Y. P. J.; LIMA, A. M. G. de; DONADO, M. V. An efficient iterative model reduction method for aeroviscoelastic panel flutter analysis in the supersonic regime. **Mechanical System and Signal Processing**, v. 104, p. 575–588, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.11.018>.

CUNHA FILHO, A. G. **A influência do amortecimento viscoelástico na estabilidade aeroelástica de painéis aeronáuticos**. 2015. 106 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015.

CUNHA FILHO, A. G.; LIMA, A. M. G.; DONADO, M. V., LEÃO, L. S. Flutter suppression of plates subjected to supersonic flow using passive constrained viscoelastic layers and golla-hughes-mctavish method. **Aerospace Science and Technology**, Paris, v. 52, p. 70-80, maio 2016.

DELGADO-VELÁZQUEZ, I. **Nonlinear vibration of a cantilever beam**. 2007. 91 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Rochester Institute of Technology, New York, USA. 2007.



DOWLING, N. E. **Comportamento mecânico dos materiais**. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018.

DOWLING, N. E. **Mechanical behavior of materials**: engineering methods for deformation. Fracture, and fatigue. 4. ed. Pearson Education: Harlow, 2013.

EMS – EFTEC. Products & Application: damping. Disponível em: <https://www.eftec.ch/en/products-applications/products-applications/damping>. Acesso em: 9 fev. 2021.

FLÜGGE, W. **Viscoelasticity**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1975.

GALUCIO, A. C.; DEÜ, J. F.; OHAYON, R. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. **Computational Mechanics**, Berlin, v. 33, n. 4, p. 282–291, mar. 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00466-003-0529-x>.

GARCIA, G. F. *et al.* Numerical analysis of a beam with and without viscoelastic treatment subject to cyclic request in the time domain. *In*: IBERO-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 41., 2020, Foz do Iguaçu, PR. **Anais [...]**. Foz do Iguaçu, PR: ABMEC, 2020.

GONÇALVES, L. K. S.; LIMA R., U.; LIMA, A. M. Iterative condensation strategy to fatigue analysis of viscoelastically damped structures. *In*: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 25., 2019, Uberlândia, MG. **Anais [...]**. Uberlândia, MG: ABCM, 2019.

GONÇALVES, L. K. S. **Análise de fadiga de sistemas estocásticos incorporando materiais viscoelásticos**. 2018. 99 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2018.817>.

GRÜNWALD A. K., Derivationen und deren Anwendung. **Z. Angew. Math. Phys**, v. 12, p. 441-480, 1867.

GUARALDO-NETO, B. **Modelagem de sistemas dinâmicos contendo materiais viscoelásticos e ligas com memória de forma para o controle passivo de vibrações**. 2012. 121 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2012.

HUGHES, T. J. R. **The finite element method**: linear static and dynamic finite element analysis. New Jersey: Prentice-Hall, 1987.

IRVINE, T., **Vibrationdata**: shock & vibration software & tutorials, Disponível em: <https://vibrationdata.wordpress.com/2012/10/31/rainflow-fatigue-cycle-counting/>. Acesso em: 19 abr. 2021.

LEE, Y. L.; PAN, J.; HATHAWAY, R. B.; BARKEY, M. E. **Fatigue testing and analysis: theory and practice**. Amsterdam: Elsevier, 2005.

LESIEUTRE, G. A.; MINGORI, D. L. Finite element modeling of frequency-dependent material damping using augmenting thermodynamic fields. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, New York, v. 13, n. 6, p. 1040–1050, 1990. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/3.20577>.

LIMA, A. M. G. *et al.* Component mode synthesis combining robust enriched Ritz approach for viscoelastically damped structures. **Engineering Structures**, Oxford, Inglaterra, v. 32, n. 5, p. 1479–1488, maio 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.01.028>.

LIMA, A. M. G. **Modélisation et optimisation robuste de systèmes mécaniques en présence d’amortissement viscoélastique**. 2007. 197 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007.

LIMA, A. M. G. *et al.* A time-domain finite element model reduction method for viscoelastic linear and nonlinear systems. **Latin American Journal of Solids and Structures**, São Paulo, v. 12, n. 6, p. 1182–1201, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1679-78251695>.

MAGEBAUSA. **Seismic protection**. Disponível em: <https://www.magebausa.com>. Acesso em: 2 fev. 2021.

MAKRIS, N. Three-dimensional constitutive viscoelastic laws with fractional order time derivatives. **Journal of Rheology**, New York, v. 41, n. 5, p. 1007–1020, set. 1997. Disponível em: <https://doi.org/10.1122/1.550823>

MIRABELLI, J. **Damping technology revolutionizing tall building construction**. North York, CA: Urban Toronto, 2015. Disponível em: <http://urbantoronto.ca/news/2015/11/damping-technology-revolutionizing-tall-building-construction>. Acesso em: 6 fev. 2021.

NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G.; HENDERSON, J. P. **Vibration damping**. New York: John Wiley & Sons, 1985.

NEWMARK, N. M. A Method of computation for structural dynamics. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, New York, p. 67-94, jul. 1959.

NUNES, E. P. **Análise transiente de sistemas tratados com materiais viscoelásticos através de um modelo de derivadas fracionárias melhorado e uma técnica de redução**. 2020. 101 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2020.

NUNES, E. P. *et al.* Use of an improved fractional derivative model for transient analyses of viscoelastic systems. 2020. *In*: IBERO-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 41., 2020, Foz do Iguaçu, PR. **Anais [...]**. Foz do Iguaçu, PR: ABMEC, 2020.

OLIVEIRA, V. U. S. **Análise sísmica de pórticos planos metálicos utilizando o método dos elementos finitos**. 2016. 67 f. Monografia (Bacharelado em Engenharia Civil e Ambiental) – Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2016.

PASSOS, J. P. **Estimação da vida em fadiga através de análise dinâmica global-local no domínio da frequência**. 2016. 111 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

RAMOS, A. P. R.; LAMBERT, S.; LIMA, A. M. G.; RADE, D. A.; PAGNACCO, E. Fatigue Damage Analysis of Viscoelastic Structures. **International Conference of Structures Engineering Dynamics**, 2013.

RADE, D. A. **Método dos elementos finitos aplicados a engenharia mecânica**: Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2011. Apostila de Elementos Finitos.

RAO, M. D. Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 262, n. 3, p. 457–474, maio 2003. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00106-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00106-8).

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. 5. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2011.

ROSA, E. **Análise de resistência mecânica de peças e componentes estruturais**: mecânica da fratura e fadiga. Santa Catarina: Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC: Departamento de Engenharia Mecânica, 2002. Apostila da Disciplina Fadiga e Confiabilidade.

SCHÜTZ, W. A history of fatigue. **Engineering Fracture Mechanics**, New York, v. 54, n. 2, p. 263-300, maio 1996.

SHIGLEY, J. E. **Elementos de máquinas**. LTC, Rio de Janeiro, 1984. v. 1.

SORIANO, H. S. **Introdução à dinâmica das estruturas**. Ed. Ltda. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.

## APÊNDICE A

### DETALHAMENTO DA FORMULAÇÃO EM MEF

Nesse Apêndice, mostrou-se detalhadamente a formulação em MEF. Como comentado anteriormente, a viga sanduiche é constituída de três camadas, em que são utilizados quatro graus de liberdade para cada nó:  $u(x,t)$ ,  $w(x,t)$ ,  $\theta(x,t)$  e  $\beta(x,t)$ . Esses graus de liberdades podem ser aproximados através de funções interpoladoras. Para  $u(x,t)$  e  $\beta(x,t)$ , usa-se as funções interpoladoras lineares e para  $w(x,t)$ , usa-se uma função cúbica. Assim, os GDLs são mostrados pelas Eqs. A.1 a A.3, sendo  $q$ , o vetor dos graus de liberdades elementares, conforme a Eq. A.4. As matrizes  $N$  são as funções de forma, como mostradas nas Eqs. A.5 a A.7.

$$u(x, t) = [N_u] \{q(x, t)\} \quad (A.1)$$

$$w(x, t) = [N_w] \{q(x, t)\} \quad (A.2)$$

$$\beta(x, t) = [N_\beta] \{q(x, t)\} \quad (A.3)$$

$$\{q(x, t)\} = \begin{Bmatrix} u_i(x, t) \\ u_{i+1}(x, t) \\ w_i(x, t) \\ w'_i(x, t) \\ w_{i+1}(x, t) \\ w'_{i+1}(x, t) \\ \beta_i(x, t) \\ \beta_{i+1}(x, t) \end{Bmatrix} \quad (A.4)$$

$$[N_u(x)] = [N_1 \quad N_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (A.5)$$

$$[N_w(x)] = [0 \quad 0 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad 0 \quad 0] \quad (\text{A.6})$$

$$[N_\beta(x)] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_1 \quad N_2] \quad (\text{A.7})$$

com,

$$N_1 = 1 - \frac{x}{li} \quad (\text{A.8})$$

$$N_2 = \frac{x}{li} \quad (\text{A.9})$$

$$N_3 = 2\left(\frac{x}{li}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{li}\right)^2 + 1 \quad (\text{A.10})$$

$$N_4 = x\left(1 - \frac{x}{li}\right)^2 \quad (\text{A.11})$$

$$N_5 = 3\left(\frac{x}{li}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{li}\right)^3 \quad (\text{A.12})$$

$$N_6 = \frac{x^2}{li}\left(\frac{x}{li} - 1\right) \quad (\text{A.13})$$

Portando, substituindo as Eqs. A.1 a A.3 aos deslocamentos transversal, obtém-se as Eqs. A.14 a A.16. Essas equações podem ser simplificadas conforme a Eq. A.17. As matrizes,  $N_u^{(2)}(x,z)$  e  $N_u^{(3)}(x,z)$  são mostradas na Eqs. A.18 a A.20. Essas são as matrizes utilizadas na formulação apresentada na seção 4.1.

$$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, z, t) = [\mathbf{N}_u(\mathbf{x})]\{\mathbf{q}(t)\} - z \frac{\partial [\mathbf{N}_w(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \{\mathbf{q}(t)\} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, z, t) = [\mathbf{N}_u(\mathbf{x})]\{\mathbf{q}(t)\} - z \frac{\partial [\mathbf{N}_w(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \{\mathbf{q}(t)\} + z_2 [\mathbf{N}_\beta(\mathbf{x})]\{\mathbf{q}(t)\}, \quad (\text{A.15})$$

$$\text{com } z_2 = \left( z - \frac{h_1}{2} \right)$$

$$\mathbf{u}^{(3)}(\mathbf{x}, z, t) = [\mathbf{N}_u(\mathbf{x})]\{\mathbf{q}(t)\} - z \frac{\partial [\mathbf{N}_w(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}} \{\mathbf{q}(t)\} + h_2 [\mathbf{N}_\beta(\mathbf{x})]\{\mathbf{q}(t)\} \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}, z, t) = [\mathbf{N}_u^k(\mathbf{x})]\{\mathbf{q}(t)\} \quad (\text{A.17})$$

$$[\mathbf{N}_u^{(1)}] = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_3 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_4 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_5 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_6 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \quad (\text{A.18})$$

$$[\mathbf{N}_u^{(2)}] = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_3 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_4 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_5 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_6 \quad z_2 \cdot \mathbf{N}_1 \quad z_2 \cdot \mathbf{N}_2] \quad (\text{A.19})$$

$$[\mathbf{N}_u^{(3)}] = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_3 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_4 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_5 \quad -z \cdot \mathbf{N}'_6 \quad h_2 \mathbf{N}_1 \quad h_2 \mathbf{N}_2] \quad (\text{A.20})$$