

**FERNANDA FERREIRA ROSSI**

**DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO DE UMA  
BANCADA DE ROTOR FLEXÍVEL SUPORTADA POR UM  
MANCAL SEM CONTATO BASEADO EM FILME DE AR  
ESPRESMIDO**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**2021**

**FERNANDA FERREIRA ROSSI**

**DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO DE UMA BANCADA  
DE ROTOR FLEXÍVEL SUPORTADA POR UM MANCAL SEM  
CONTATO BASEADO EM FILME DE AR ESPREMIDO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Linha de Pesquisa: Dinâmica de Sistemas Mecânicos.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir Ap. Cavalini Jr.

Uberlândia – MG

2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

R831 Rossi, Fernanda Ferreira, 1995-  
2021 Desenvolvimento do modelo numérico de uma bancada de rotor flexível suportada por um mancal sem contato baseado em filme de ar espremido [recurso eletrônico] / Fernanda Ferreira Rossi. - 2021.

Orientador: Aldemir Aparecido Cavalini Junior.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica.  
Modo de acesso: Internet.  
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.557>  
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica. I. Cavalini Junior, Aldemir Aparecido ,1983-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 600, COPEM				
Data:	30/09/2021	Hora de início:	13:30	Hora de encerramento:	17:00
Matrícula do Discente:	11912EMC007				
Nome do Discente:	Fernanda Ferreira Rossi				
Título do Trabalho:	Desenvolvimento do modelo numérico de uma bancada de rotor flexível suportada por um mancal sem contato baseado em filme de ar espremido				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por meio de webconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Marcus Antonio Viana Duarte - FEMEC/UFU; Gregory Bregion Daniel/UNICAMP e Aldemir Aparecido Cavallini Júnior - FEMEC/UFU, orientador da candidata. Ressalta-se que os Prof. Marcus Antonio Viana Duarte, Aldemir Aparecido Cavallini Júnior e a Discente participaram da defesa por meio de webconferência desde a cidade de Uberlândia/MG, Prof. Gregory Bregion Daniel desde a cidade de Campinas/SP, em atendimento à Portaria nº 36, de 19 de março de 2020, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Júnior, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 30/09/2021, às 16:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcus Antonio Viana Duarte, Professor(a) do Magistério Superior**, em 30/09/2021, às 16:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **GREGORY BREGION DANIEL, Usuário Externo**, em 30/09/2021, às 16:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3074041** e o código CRC **C3FA2370**.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por tudo.

Aos meus pais, Alfredo Rossi Júnior e Marilda Ferreira de O. Rossi, por todo o amor e carinho que me foi dedicado ao longo da vida. A estrada que percorri para chegar até aqui não foi fácil, mas com vocês ao meu lado tive a coragem necessária para superar todos os obstáculos do caminho.

Ao Prof. Dr. Aldemir Ap. Cavalini Jr por ter se disposto a me orientar e fazer isso da melhor maneira possível. Agradeço principalmente por toda a sua paciência e compreensão durante a elaboração deste trabalho.

À pesquisadora Geisa Arruda Zuffi, que foi como uma coorientadora para mim, por me proporcionar a base necessária para o desenvolvimento desta pesquisa de mestrado.

Aos meus amigos e colegas do Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst), em especial à Fernanda Beatriz Aires de Freitas, à Bárbara Nara Teixeira Cunha e à Gabriella Faina Garcia, por me acompanharem ao longo desses anos de mestrado, compartilhando conhecimentos e experiências que muito contribuíram para o meu crescimento profissional e pessoal.

Aos meus amigos íntimos, em especial ao Guilherme Bernardes Rodrigues, à Mariana Leal Cunha Gomes e à Natália Morais Naves, por todos os momentos de alegria que vivemos juntos. Sem vocês a vida não teria a menor graça.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) pela oportunidade concedida de realizar o Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Mecânica.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro fornecido para a realização deste trabalho.

E por fim, a todos que de alguma forma contribuíram para a minha formação acadêmica, muito obrigada.

ROSSI, F. F. **Desenvolvimento do modelo numérico de uma bancada de rotor flexível suportada por um mancal sem contato baseado em filme de ar espremido.** 2021. 97 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

## RESUMO

A levitação acústica é um método no qual um objeto é suspenso em uma posição estável contra a gravidade por meio da força de radiação acústica gerada por intensas ondas sonoras. Esta técnica pode ser dividida em levitação acústica por ondas estacionárias e levitação acústica de campo próximo. No primeiro tipo de levitação, pequenos objetos são suspensos próximo dos nós de pressão de uma onda estacionária formada entre um transdutor e um refletor. Já na levitação acústica de campo próximo, um objeto plano é colocado perto de uma superfície vibratória, de modo que uma fina camada de ar, conhecida como filme espremido, fica presa na folga entre as duas superfícies. Embora a levitação acústica de campo próximo seja uma técnica desenvolvida recentemente, ela tem sido amplamente investigada nas últimas décadas para o desenvolvimento de um novo tipo de mancal sem contato, conhecido como mancal de filme espremido. Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo principal desenvolver um modelo numérico baseado no Método dos Elementos Finitos para simular o comportamento dinâmico de um rotor flexível suportado por dois mancais, sendo um deles o mancal a ar de filme espremido proposto por Feng et al. (2018). Para o caso em que o mancal a ar de filme espremido é representado por um modelo não linear, o comportamento dinâmico do rotor é determinado a partir da resolução simultânea das equações do movimento e de Reynolds. Já para o caso em que o mancal a ar de filme espremido é representado por um modelo linear, as forças de reação do mancal são determinadas a partir dos coeficientes de rigidez e amortecimento associados. Os resultados numéricos apresentados neste trabalho demonstram que o mancal sem contato proposto por Feng et al. (2018) é adequado para ser utilizado em máquinas rotativas que suportam baixas cargas e operam fora das velocidades críticas.

---

*Palavras-chave: Levitação acústica de campo próximo. Mancal a ar de filme espremido. Equação de Reynolds. Dinâmica de rotação. Método dos Elementos Finitos.*

ROSSI, F. F. **Development of the numerical model of a test rig containing a flexible rotor supported by a non-contact bearing based on squeeze air-film.** 2021. 97 p. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia.

## ABSTRACT

Acoustic levitation is a method in which an object is levitated at a stable position against gravity by acoustic radiation force produced by intense sound waves. This technique can be divided into standing wave acoustic levitation and near-field acoustic levitation. In the first type of levitation, small objects are suspended near the pressure nodes of a standing wave created between a transducer and a reflector. On the other hand, in the near-field acoustic levitation a planar object is placed close to a vibrating surface, so a thin layer of air, known as squeeze film, is trapped in the clearance between the two surfaces. Even though the near-field acoustic levitation is a recently developed technique, it has been widely investigated in the last few decades for the development of a new type of non-contact bearing, known as squeeze film bearing. In this context, the present work aims to develop a numerical model based on the Finite Element Method to predict the dynamic behavior of a flexible rotor supported by two bearings, one of them being the squeeze film air bearing presented by Feng et al. (2018). For the case where the squeeze film air bearing is represented by a non-linear model, the dynamic behavior of the rotor is determined from the simultaneous resolution of motion and Reynolds equations. Now for the case where the squeeze film air bearing is represented by a linear model, the bearing forces are determined from the stiffness and damping coefficients associated. The numerical results presented in this work demonstrate that the non-contact bearing proposed by Feng et al. (2018) is adequate to be used in rotating machines that support low loads and operate outside critical speeds.

---

*Keywords: Near-field acoustic levitation. Squeeze film air bearing. Reynolds equation. Rotordynamics. Finite Element Method.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Representação do princípio da levitação acústica por ondas estacionárias ..	5
Figura 1.2 – Representação do princípio da levitação acústica de campo próximo .....	6
Figura 2.1 – Elemento de disco .....	12
Figura 2.2 – Formas de acoplamento do disco ao eixo .....	14
Figura 2.3 – Elemento de eixo .....	15
Figura 2.4 – Seção transversal de uma viga submetida à flexão .....	18
Figura 2.5 – Modelo linear dos mancais .....	22
Figura 2.6 – Massa de desbalanceamento .....	24
Figura 3.1 – Representação do mancal a ar de filme espremido .....	28
Figura 3.2 – Representação das deformações elásticas do mancal a ar de filme espremido	30
Figura 3.3 – Geometria planificada do mancal .....	31
Figura 4.1 – Malha de discretização do domínio adimensional da equação de Reynolds	45
Figura 5.1 – Representação esquemática do rotor .....	55
Figura 5.2 – Modelo de elementos finitos do rotor .....	55
Figura 5.3 – Variações das forças de reação médias do mancal 1 com o refinamento da malha computacional .....	58
Figura 5.4 – Variação do tempo de simulação com o refinamento da malha computacional	59
Figura 5.5 – Amplitudes de vibração do rotor no mancal 1 .....	61
Figura 5.6 – Amplitudes de vibração do disco .....	62
Figura 5.7 – Amplitudes de vibração do rotor no mancal 2 .....	63
Figura 5.8 – Espectros das amplitudes de vibração do rotor no mancal 1 em regime permanente .....	64
Figura 5.9 – Espectros das amplitudes de vibração do disco em regime permanente ....	65
Figura 5.10 – Espectros das amplitudes de vibração do rotor no mancal 2 em regime permanente .....	66
Figura 5.11 – Forças de reação do mancal 1 .....	67
Figura 5.12 – Forças de reação do mancal 2 .....	68

Figura 5.13 – Distribuições de pressão no mancal 1 em regime permanente.....	69
Figura 5.14 – Variação da espessura do filme de ar no mancal 1 em regime permanente .	70
Figura 5.15 – Coeficientes de rigidez do mancal 1 .....	72
Figura 5.16 – Coeficientes de amortecimento do mancal 1.....	73
Figura 5.17 – Amplitudes de vibração do rotor desbalanceado no mancal 1 em regime permanente .....	75
Figura 5.18 – Amplitudes de vibração do disco desbalanceado em regime permanente...	76
Figura 5.19 – Amplitudes de vibração do rotor desbalanceado no mancal 2 em regime permanente .....	77
Figura 5.20 – Espectros das amplitudes de vibração do rotor desbalanceado no mancal 1 em regime permanente.....	78
Figura 5.21 – Espectros das amplitudes de vibração do disco desbalanceado em regime permanente .....	79
Figura 5.22 – Espectros das amplitudes de vibração do rotor desbalanceado no mancal 2 em regime permanente.....	80
Figura 5.23 – Variação da posição de equilíbrio do rotor no mancal 1 com a velocidade de rotação.....	81
Figura 5.24 – Variações das forças de reação do mancal 1 com a velocidade de rotação ..	82
Figura 5.25 – Variações dos coeficientes de rigidez do mancal 1 com a velocidade de rotação .....	83
Figura 5.26 – Variações dos coeficientes de amortecimento do mancal 1 com a velocidade de rotação.....	84
Figura 5.27 – Amplitudes de vibração do rotor desbalanceado no mancal 1 durante a partida .....	85
Figura 5.28 – Amplitudes de vibração do disco desbalanceado durante a partida .....	86
Figura 5.29 – Amplitudes de vibração do rotor desbalanceado no mancal 2 durante a partida .....	87
Figura 5.30 – Forças de reação do mancal 1 durante a partida .....	89

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Características geométricas e operacionais do mancal a ar de filme espremido	29
Tabela 5.1 – Características geométricas e propriedades dos componentes do rotor	56
Tabela 5.2 – Frequências naturais do modelo de elementos finitos do rotor	57
Tabela 5.3 – Parâmetros considerados na análise de convergência de malha	57
Tabela 5.4 – Propriedades físicas do ar	57
Tabela 5.5 – Valores médios das amplitudes de vibração do rotor e das forças de reação dos mancais em regime permanente	60
Tabela 5.6 – Parâmetros dos métodos da perturbação finita e da perturbação infinitesimal	70
Tabela 5.7 – Diferenças relativas entre os valores médios dos coeficientes dinâmicos do mancal 1 obtidos através dos métodos da perturbação finita e da perturbação infinitesimal	71

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

### Símbolos latinos:

$a$	Fator de correção
$c$	Folga radial do mancal
$\mathbf{C}$	Matriz de amortecimento
$c_{ij}$	Coefficientes de amortecimento dos mancais
$\mathbf{C}_p$	Matriz de amortecimento proporcional
$d$	Distância do centro geométrico do eixo
$E$	Módulo de elasticidade
$e_w$	Amplitude da deformação dinâmica do mancal
$e_{w0}$	Amplitude da deformação estática do mancal
$e_x, e_z$	Excentricidades do eixo
$e_{x0}, e_{z0}$	Posição de equilíbrio do eixo
$\mathbf{F}_m$	Vetor de forças de reação dos mancais
$F_{mx}, F_{mz}$	Forças de reação do mancal
$F_{mx0}, F_{mz0}$	Forças de reação do mancal na posição de equilíbrio
$F_{mX}, F_{mZ}$	Forças de reação dos mancais nas direções X e Z
$F_{qi}$	Forças generalizadas
$\mathbf{F}_u$	Vetor de forças de desbalanceamento
$F_{uX}, F_{uZ}$	Forças de desbalanceamento nas direções X e Z
$G$	Módulo de cisalhamento
$\mathbf{G}$	Matriz do efeito giroscópico
$\mathbf{G}_D$	Matriz do efeito giroscópico do disco
$\mathbf{G}_S$	Matriz do efeito giroscópico do eixo
$h$	Espessura do filme de ar
$\bar{h}$	Espessura adimensional do filme de ar
$h_D$	Espessura do disco
$h_x, h_z, h_{\dot{x}}, h_{\dot{z}}$	Espessuras dinâmicas do filme de ar

$\bar{h}_x, \bar{h}_z, \bar{h}_{x'}, \bar{h}_{z'}$	Espessuras dinâmicas adimensionais do filme de ar
$h_0$	Espessura estática do filme de ar
$\bar{h}_0$	Espessura estática adimensional do filme de ar
$I$	Momento de inércia de área do eixo
$I_D$	Momento de inércia de massa do disco
$I_{D_y}$	Momento polar de inércia do disco
$\mathbf{K}_C$	Matriz de rigidez do eixo
$\mathbf{K}_{DT}$	Matriz de enrijecimento do disco devido ao movimento transiente
$k_{ij}$	Coefficientes de rigidez dos mancais
$k_s$	Fator de cisalhamento
$\mathbf{K}_{ST}$	Matriz de enrijecimento do eixo devido ao movimento transiente
$\mathbf{K}_1$	Matriz de rigidez
$\mathbf{K}_2$	Matriz de enrijecimento devido ao movimento transiente
$L$	Comprimento do elemento de eixo ou comprimento do mancal
$\mathbf{M}$	Matriz de massa
$m_D$	Massa do disco
$\mathbf{M}_D$	Matriz de massa do disco
$\mathbf{M}_S$	Matriz clássica de massa do eixo
$\mathbf{M}_T$	Matriz do efeito secundário da inércia de rotação
$m_u$	Massa de desbalanceamento
$N$	Graus de liberdade do modelo
$n_e$	Número de elementos do modelo
$\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$	Funções de forma
$p$	Pressão do filme de ar
$\bar{p}$	Pressão adimensional do filme de ar
$p_a$	Pressão atmosférica
$p_x, p_z, p_{\dot{x}}, p_{\dot{z}}$	Pressões dinâmicas do filme de ar
$\bar{p}_x, \bar{p}_z, \bar{p}_{x'}, \bar{p}_{z'}$	Pressões dinâmicas adimensionais do filme de ar
$p_0$	Pressão estática do filme de ar
$\bar{p}_0$	Pressão estática adimensional do filme de ar
$\mathbf{q}$	Vetor de deslocamentos nodais do eixo
$\mathbf{q}_D$	Vetor de deslocamentos nodais do disco
$q_i$	Coordenadas generalizadas
$\mathbf{q}_u, \mathbf{q}_w$	Vetores de deslocamentos nodais do eixo nos planos $XY$ e $YZ$
$R$	Referencial móvel ou raio do mancal
$\mathbf{R}$	Vetor de forças residuais

$R_g$	Constante do gás
$R_0$	Referencial fixo
$S$	Área da seção transversal do eixo
$S_r$	Área reduzida da seção transversal do eixo
$t$	Tempo
$T$	Energia cinética ou temperatura absoluta
$\mathbf{T}$	Matriz de inércia tangente
$T_D$	Energia cinética do disco
$T_S$	Energia cinética do eixo
$T_u$	Energia cinética da massa de desbalanceamento
$u, v, w$	Deslocamentos nas direções $X, Y$ e $Z$ ou velocidades do fluido
$U$	Energia de deformação ou velocidade tangencial do eixo
$U_S$	Energia de deformação do eixo
$U_1, V_1, W_1$	Velocidades da superfície do mancal
$U_2, V_2, W_2$	Velocidades da superfície do eixo
$\mathbf{W}$	Vetor de força peso
$x, y, z$	Eixos do sistema de coordenadas cartesianas local
$\bar{y}$	Coordenada axial adimensional do mancal

### Símbolos gregos:

$\alpha$	Coefficiente de amortecimento proporcional à massa
$\beta$	Coefficiente de amortecimento proporcional à rigidez ou parâmetro do método de Newmark
$\gamma$	Relação entre as frequências de perturbação do eixo e de excitação do mancal ou parâmetro do método de Newmark
$\delta_d$	Deformação dinâmica do mancal
$\delta_s$	Deformação estática do mancal
$\delta u, \delta w$	Deslocamentos virtuais nas direções $X$ e $Z$
$\delta W$	Trabalho virtual
$\Delta e_x, \Delta e_z$	Perturbações de deslocamento do eixo
$\Delta \dot{e}_x, \Delta \dot{e}_z$	Perturbações de velocidade do eixo
$\Delta \mathbf{q}$	Vetor de correção dos deslocamentos
$\Delta t$	Passo de tempo
$\Delta \bar{y}$	Espaçamento adimensional da malha na direção axial

$\Delta\varepsilon_x, \Delta\varepsilon_z$	Perturbações adimensionais de deslocamento do eixo
$\Delta\varepsilon'_x, \Delta\varepsilon'_z$	Perturbações adimensionais de velocidade do eixo
$\Delta\theta$	Espaçamento da malha na direção circunferencial
$\Delta\tau$	Passo de tempo adimensional
$\varepsilon$	Deformação ou tolerância
$\theta$	Coordenada angular do mancal
$\theta, \phi, \varphi$	Ângulos de rotação em relação aos eixos $X, Y$ e $Z$
$\lambda$	Relação entre o raio e o comprimento do mancal
$\Lambda$	Número do mancal
$\mu$	Viscosidade dinâmica do ar
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\rho$	Densidade do material ou densidade do ar
$\sigma$	Tensão ou número de esmagamento
$\tau$	Tempo adimensional
$\Omega$	Velocidade de rotação do rotor
$\omega_e$	Frequência de excitação do mancal
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	Velocidades instantâneas do disco

### Abreviaturas:

PI	Proporcional-Integral
PZT	Titanato Zirconato de Chumbo

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Levitação acústica .....</b>	<b>4</b>
<b>1.2 Contextualização histórica dos mancais de filme espremido .....</b>	<b>6</b>
<b>1.3 Objetivos do estudo .....</b>	<b>9</b>
<b>1.4 Organização da dissertação.....</b>	<b>10</b>
<b>CAPÍTULO II: MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DO ROTOR .....</b>	<b>11</b>
<b>2.1 Disco .....</b>	<b>12</b>
<b>2.2 Eixo .....</b>	<b>14</b>
<b>2.3 Mancais .....</b>	<b>22</b>
<b>2.4 Massa de desbalanceamento .....</b>	<b>23</b>
<i>2.4.1 Variação da velocidade de rotação do rotor .....</i>	<i>25</i>
<b>2.5 Equação do movimento do rotor .....</b>	<b>26</b>
<b>CAPÍTULO III: MODELO MATEMÁTICO DO MANCAL A AR DE FILME ES- PREMIDO .....</b>	<b>27</b>
<b>3.1 Configuração do mancal e condições de operação .....</b>	<b>27</b>
<b>3.2 Espessura do filme de ar .....</b>	<b>29</b>
<b>3.3 Equação de Reynolds .....</b>	<b>30</b>
<i>3.3.1 Adimensionalização da equação de Reynolds .....</i>	<i>35</i>
<i>3.3.2 Condições inicial e de contorno .....</i>	<i>35</i>
<b>3.4 Forças de reação do mancal.....</b>	<b>36</b>
<b>3.5 Coeficientes dinâmicos do mancal .....</b>	<b>37</b>
<i>3.5.1 Método da perturbação finita .....</i>	<i>37</i>
<i>3.5.2 Método da perturbação infinitesimal .....</i>	<i>39</i>
<b>CAPÍTULO IV: METODOLOGIA .....</b>	<b>42</b>
<b>4.1 Resolução numérica da equação do movimento do rotor.....</b>	<b>42</b>
<b>4.2 Resolução numérica da equação de Reynolds .....</b>	<b>45</b>

4.3	Resolução numérica das equações perturbadas de Reynolds .....	49
<b>CAPÍTULO V: RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>		<b>54</b>
5.1	Modelo de elementos finitos do rotor .....	54
5.2	Análise de convergência de malha .....	57
5.3	Posição de equilíbrio do rotor .....	59
5.4	Coefficientes dinâmicos do mancal a ar de filme espremido .....	70
5.5	Resposta de vibração do rotor ao desbalanceamento .....	74
5.6	Movimento transiente do rotor .....	81
<b>CAPÍTULO VI: CONCLUSÕES .....</b>		<b>90</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>		<b>92</b>

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

Máquinas rotativas são sistemas mecânicos que possuem inúmeras aplicações, como em motores e geradores elétricos, turbinas hidráulicas, a vapor e a gás, bombas, compressores, ventiladores, entre outros (SOUTO, 2000). Devido ao constante aumento das exigências destes equipamentos quanto ao seu desempenho, mesmo em condições desfavoráveis de operação, como elevadas temperaturas, altas velocidades de rotação e grandes carregamentos, o estudo do comportamento dinâmico de máquinas rotativas é um tema de grande interesse na engenharia (RUSSO, 2000).

Grande parte dos sistemas mecânicos presentes no cotidiano do homem é formada por componentes que apresentam movimento relativo entre si. Os mancais são os elementos responsáveis pela conexão entre a parte móvel e a estrutura fixa de uma máquina rotativa (OLIVEIRA, 1999). Segundo Vance (1988), as características dinâmicas de um sistema rotativo são fortemente influenciadas pelos mancais. Isto porque a rigidez do sistema depende principalmente da flexibilidade do eixo e da rigidez dos mancais, e o amortecimento do sistema é em grande parte fornecido pelos mesmos. Dessa forma, os mancais são componentes muito importantes para a caracterização do comportamento dinâmico de máquinas rotativas.

Os mancais de rolamento constituem uma classe de elementos de máquinas de ampla aplicação industrial devido a sua grande disponibilidade, versatilidade e excelente desempenho. Nestes mancais, as superfícies com movimento relativo são separadas por elementos rolantes, que podem ser esferas ou rolos. O movimento relativo das pistas faz com que os elementos rolantes rodem com pouco deslizamento e baixa resistência ao giro (HARRIS, 2001). A aplicação generalizada deste tipo de mancal pode ser explicada principalmente pelo seu baixo custo e alto grau de padronização internacional (a maioria dos mancais de rolamento é intercambiável e pode ser facilmente substituída). No entanto, os mancais de rolamento têm uma vida útil limitada pela fadiga do material. Isto porque a carga é exercida em uma área muito pequena, resultando em tensões de contato relativamente altas que podem causar a falha do mancal (DURAZO-CARDENAS, 2003). Além disso, os mancais de rolamento apresentam baixa capacidade de amortecimento devido ao contato

metal-metal entre os elementos, não sendo muito adequados para condições de sobrecarga e choque (IDE, 1995).

Nos últimos anos, a crescente demanda por alta precisão e alta velocidade de rotação em áreas de aplicação como discos rígidos de computadores e máquinas-ferramentas para micro e nanousinagem, deu origem ao rápido desenvolvimento dos mancais sem contato (FENG et al., 2018). Estes mancais podem alcançar maior precisão do que os mancais convencionais de rolamento devido à ausência de contato entre as superfícies em interação (ATHERTON; MARES; STOLARSKI, 2014). De acordo com Zhao (2010), os mancais sem contato mais populares são os mancais de filme fluido, que utilizam uma fina camada de fluido (líquido ou gás) para separar as superfícies. A capacidade de carga destes mancais é resultante da pressão do filme de lubrificante, que pode ser gerada pelo movimento relativo das superfícies (mancais hidrodinâmicos e aerodinâmicos), pela pressurização externa do fluido (mancais hidrostáticos e aerostáticos) ou pela combinação desses dois mecanismos (mancais híbridos).

Nos mancais hidrodinâmicos, as superfícies estão separadas por um filme relativamente espesso de lubrificante, que evita o contato direto entre elas. É o próprio movimento relativo das superfícies, ao arrastar o lubrificante para uma região em forma de cunha a uma velocidade suficientemente alta, que gera a pressão necessária no filme de fluido para separar as superfícies em contato e suportar a carga aplicada (BUDYNAS; NISBETT, 2011). Devido às suas características de baixo custo, alta capacidade de carga, longa vida útil e boa capacidade de amortecimento, os mancais hidrodinâmicos são amplamente utilizados em vários tipos de máquinas rotativas, como turbinas a vapor, motores elétricos, geradores, bombas, compressores e motores de combustão interna (MACHADO, 2006). Porém, uma grande desvantagem deste tipo de mancal é a necessidade de uma velocidade mínima de operação para gerar um filme de fluido com espessura suficiente para separar completamente as superfícies deslizantes. Abaixo dessa velocidade, o mancal opera no regime de lubrificação mista ou limite, havendo o contato direto entre as asperezas das superfícies. Mesmo que o mancal seja bem projetado e opere em altas velocidades, ele pode estar sujeito ao atrito excessivo e ao desgaste durante a partida e parada da máquina (HARNOY, 2002).

Outra desvantagem dos mancais hidrodinâmicos é o aparecimento de instabilidades fluido-induzidas em altas velocidades, conhecidas como *oil whirl* e *oil whip*. Segundo Meggiolaro (1996), o fenômeno de *oil whirl* ocorre quando o centro do eixo gira em torno de uma posição de equilíbrio a uma frequência aproximadamente igual à metade da velocidade de rotação do rotor. Já o fenômeno de *oil whip* ocorre quando a velocidade de rotação atinge o dobro da primeira velocidade crítica do rotor. Neste caso, a frequência de vibração é igual à primeira frequência natural do rotor e esta condição não se altera mesmo que a velocidade de rotação seja aumentada.

O princípio de funcionamento dos mancais aerodinâmicos é semelhante ao dos mancais hidrodinâmicos, exceto que eles utilizam um gás (normalmente ar) como fluido lubrificante. Nos mancais

aerodinâmicos, o movimento relativo das superfícies provoca a formação de um filme de gás, cuja pressão depende essencialmente da velocidade do movimento. Devido à baixa viscosidade dos gases, o atrito entre as superfícies é significativamente reduzido, permitindo que estes mancais operem em altas velocidades sem superaquecimento. Além disso, como os gases são termicamente estáveis, os mancais aerodinâmicos podem operar em uma ampla faixa de temperaturas sem sofrer grandes mudanças nas propriedades do lubrificante (NIELSEN, 2017). Entretanto, a baixa viscosidade dos gases e a sua natureza compressível limita tanto a capacidade de carga quanto o amortecimento deste tipo de mancal, que juntamente com o comportamento de acoplamento cruzado do filme de gás pode causar instabilidades dinâmicas (WAUMANS et al., 2011). Consequentemente, as folgas entre as superfícies devem ser muito pequenas para que os mancais aerodinâmicos possam gerar uma capacidade de carga adequada, aumentando as dificuldades e os custos de fabricação desses componentes (NIELSEN, 2017).

Nos mancais hidrostáticos, as superfícies com movimento relativo são separadas por um filme de fluido lubrificante introduzido na folga entre elas sob alta pressão, que é fornecida por uma bomba externa. Desde que o fornecimento externo de lubrificante pressurizado seja contínuo, a separação completa das superfícies pode ser mantida mesmo quando a velocidade é nula (KHONSARI; BOOSER, 2017). Dessa forma, os mancais hidrostáticos podem ser utilizados em aplicações com cargas pesadas e baixas velocidades, como em moinhos de minério, máquinas-ferramentas, telescópios e antenas de radar (ADAMS, 2018). Estes mancais apresentam uma grande suavidade de movimento, boas características de amortecimento de vibrações, elevada rigidez do filme fluido, alta precisão de movimento, atrito inicial nulo e bom desempenho dinâmico (TSUKAMOTO, 2003). No entanto, as principais desvantagens dos mancais hidrostáticos são a complexidade e o custo relativamente alto do sistema de lubrificação, a necessidade de instalação de equipamentos auxiliares para a filtragem e o resfriamento do fluido lubrificante e o alto consumo de energia devido às perdas por bombeamento (MOROZ et al., 2020).

Os mancais aerostáticos utilizam um fino filme de gás a alta pressão para evitar o contato direto entre as superfícies com movimento relativo, permitindo que elas se movimentem com suavidade e precisão, além de suportar as cargas atuantes sobre elas (DA SILVA, 2015). Devido às suas características de baixo atrito, baixa geração de calor, alta precisão de movimento e longa vida útil, os mancais aerostáticos têm sido amplamente utilizados em máquinas-ferramentas, instrumentos de medição, sistemas de posicionamento e equipamentos médicos (RAPARELLI et al., 2016). Além disso, eles também são empregados na fabricação de semicondutores, principalmente por causa da sua compatibilidade com salas limpas (KWAN; POST, 2000). Entretanto, os mancais aerostáticos requerem um fornecimento contínuo de gás pressurizado e são suscetíveis a uma instabilidade dinâmica conhecida como martelo pneumático, que está associada com a compressibilidade dos gases e o consequente atraso entre as mudanças na folga do mancal e a resposta a estas mudanças

através de variações na pressão no rebaixo do orifício (STOUT; SWEENEY, 1984).

Além dos mancais de filme fluido, os mancais magnéticos são outro tipo de mancal sem contato que utilizam forças magnéticas para suspender um rotor em uma posição fixa (WU; ZHU, 2020). Devido à sua natureza de suspensão sem contato, os mancais magnéticos apresentam várias vantagens em relação aos mancais convencionais, como a ausência de atrito e desgaste mecânico, a eliminação da necessidade de lubrificação, a capacidade de operação em altas velocidades e em condições extremas de temperatura e pressão, o baixo nível de ruído, a reduzida manutenção e a elevada vida útil (ABREU, 1998). No entanto, estes mancais são excessivamente caros quando projetados para máquinas rotativas de grande porte, pois as forças envolvidas são elevadas, tornando o sistema magnético complexo e pouco compacto. Além disso, as máquinas rotativas suportadas por mancais magnéticos devem ser equipadas com mancais auxiliares para proteger o rotor em caso de sobrecarga ou falha do sistema elétrico (NICOLETTI, 2003).

Portanto, é interessante buscar conceitos alternativos para o desenvolvimento de novas tecnologias que possam superar as limitações dos mancais tradicionais existentes. A levitação acústica é uma técnica que tem se mostrado promissora no desenvolvimento de um novo tipo de mancal sem contato, conhecido como mancal de filme espremido. É neste contexto que será desenvolvida esta dissertação de mestrado.

## 1.1 Levitação acústica

A levitação acústica é um método no qual um objeto é suspenso em uma posição estável contra a gravidade por meio da força de radiação acústica gerada por intensas ondas sonoras (BOULLOSA; PÉREZ-LÓPEZ; DORANTES-ESCAMILLA, 2013). Segundo Ramos (2017), esta técnica é relevante para aplicações em que se deseja manipular e transportar objetos sem contato, proporcionando a suspensão de objetos frágeis que necessitam manter a sua integridade física ou química. Além disso, a levitação acústica possui importante aplicação em processos que requerem materiais de alta pureza ou reações químicas muito rigorosas para serem realizadas dentro de recipientes (DÍAZ GARCÍA, 2008).

A principal vantagem da levitação acústica em relação a outras técnicas de levitação, como a levitação magnética, eletrostática e óptica, é que qualquer material, seja ele isolante ou condutor, magnético ou não magnético, pode ser manipulado e transportado sem nenhum contato físico (VANDAELE; LAMBERT; DELCHAMBRE, 2005). Devido à sua versatilidade, a levitação acústica tem sido amplamente utilizada em diversas áreas, como na biologia, química analítica, ciência dos materiais, farmácia e micromontagem (ANDRADE; PÉREZ; ADAMOWSKI, 2018). Além disso, esta técnica também pode ser aplicada em combinação com métodos de espectroscopia para analisar diferentes tipos de substâncias sem que elas sejam afetadas pelas paredes do recipiente

(THOMAS et al., 2017).

Basicamente, existem dois tipos de levitação acústica: a levitação por ondas estacionárias e a levitação de campo próximo. No primeiro tipo de levitação, pequenos objetos são suspensos próximo dos nós de pressão de uma onda estacionária formada entre um transdutor ultrassônico e um refletor, conforme mostra a Fig. 1.1. O transdutor ultrassônico é responsável por gerar as ondas sonoras de alta frequência (acima de 20 kHz) que vão se propagar na direção do refletor e serão refletidas pelo mesmo de volta para o transdutor. Quando a distância entre o transdutor e o refletor é um múltiplo inteiro de meio comprimento de onda, as ondas sonoras emitidas interferem com as ondas sonoras refletidas, criando uma onda estacionária com regiões de alta pressão (anti-nós) e regiões de baixa pressão (nós). Conseqüentemente, os objetos inseridos dentro desse campo acústico tendem a se mover em direção a uma posição de equilíbrio estável localizada ligeiramente abaixo dos nós de pressão da onda estacionária criada, de modo que a força gravitacional é contrabalanceada pela força de radiação acústica (ANDRADE; PÉREZ; ADAMOWSKI, 2018).

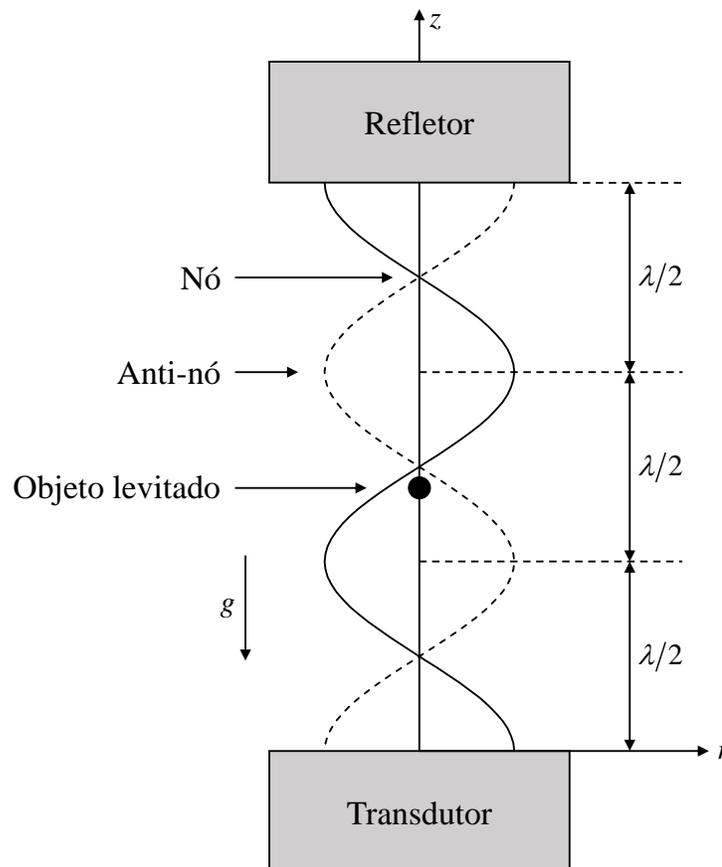


Figura 1.1 – Representação do princípio da levitação acústica por ondas estacionárias. Adaptado de Andrade, Pérez e Adamowski (2018).

Já a levitação acústica de campo próximo ocorre quando um objeto plano é colocado perto

da superfície vibratória de um transdutor, de modo que uma fina camada de ar, conhecida como filme espremido, fica presa na folga entre as duas superfícies. Graças ao seu comportamento viscoso, o filme de ar não pode ser imediatamente espremido para fora da folga. Além disso, devido à compressibilidade do ar aprisionado, as rápidas oscilações da superfície vibratória provocam variações na pressão do filme, cujo valor médio é superior à pressão ambiente. Então, como consequência do campo de pressão gerado, surge uma força de levitação no filme de ar que é capaz de suspender o objeto acima da superfície vibratória (ILSSAR; BUCHER, 2017). A Fig. 1.2 apresenta a representação do princípio da levitação acústica de campo próximo.

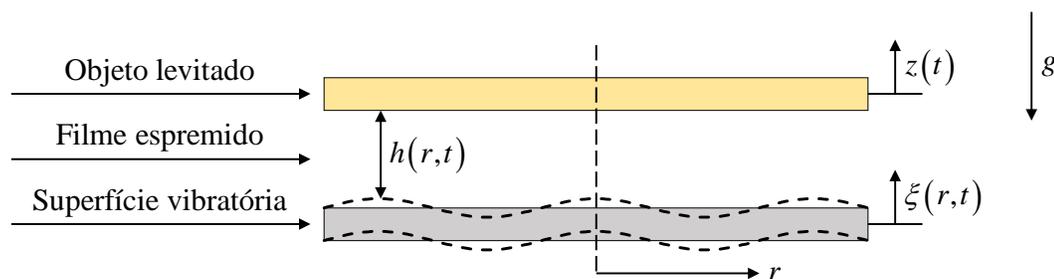


Figura 1.2 – Representação do princípio da levitação acústica de campo próximo. Adaptado de Ilssar, Bucher e Flashner (2017).

Embora a levitação acústica de campo próximo seja uma técnica desenvolvida recentemente, ela tem sido amplamente investigada nas últimas décadas para o desenvolvimento de um novo tipo de mancal sem contato, conhecido como mancal de filme espremido, que possa superar algumas das limitações dos mancais tradicionais existentes (ZHAO, 2010).

## 1.2 Contextualização histórica dos mancais de filme espremido

Salbu (1964) foi o primeiro a descrever o conceito de construção de um mancal sem contato que utilizava a ação de filme espremido. O mancal era excitado por atuadores magnéticos que operavam em uma frequência na faixa audível, o que tornava o dispositivo extremamente ruidoso (ZHAO, 2010). Os resultados mostraram que o efeito de filme espremido introduziu uma pressão média no filme de gás superior à pressão ambiente, de modo que o mancal poderia operar apenas com este efeito.

Nas publicações posteriores sobre os mancais de filme espremido, transdutores piezoelétricos de várias formas foram usados para gerar a ação de esmagamento de forma mais efetiva. De acordo com Zhao (2010), alguns projetos de mancais de filme espremido que utilizavam cerâmicas piezoelétricas volumosas podem ser encontrados nas patentes americanas registradas por Warnock Jr (1967), Emmerich (1967) e Farron e Teitelbaum (1969). Entretanto, os transdutores usados nestes

projetos ocupavam bastante espaço e exigiam uma grande quantidade de energia para criar uma amplitude de vibração uniforme em toda a superfície do mancal. Scranton (1987) sugeriu utilizar elementos piezoelétricos de flexão para excitar um modo de vibração flexural do mancal, resultando em um sistema mais compacto com uma menor dissipação de energia. No entanto, na sua patente apenas o conceito básico foi esboçado, não sendo apresentada nenhuma implementação concreta (ZHAO, 2010).

Seguindo a ideia de Scranton, Wiesendanger (2001) desenvolveu uma guia linear utilizando elementos piezoelétricos de flexão em forma de disco. Os transdutores foram colocados na parte inferior do carro deslizante, que podia se mover livremente sobre um trilho em forma de V feito de duas placas de vidro. Wiesendanger também apresentou um mancal rotativo que utilizava um elemento piezoelétrico de flexão em forma de tubo. Tanto a guia como o mancal foram operados em uma frequência de ressonância na faixa ultrassônica. Apesar da suspensão sem contato ter sido realizada com sucesso, a capacidade de carga em ambos os casos era bastante limitada.

Oiwa e Kato (2004) propuseram um mancal ativo de filme espremido lubrificado a ar baseado na oscilação ultrassônica que utilizava um conversor direcional para transmitir a vibração do transdutor para as superfícies superior e lateral do mancal, gerando um filme de ar em cada superfície. O filme de ar gerado na superfície superior do conversor era responsável por suspender o rotor na direção axial, enquanto o filme de ar gerado na superfície lateral era responsável por restringir o movimento radial do rotor. Além disso, o mancal utilizava um controlador Proporcional-Integral (PI) com um sensor de deslocamento para regular a posição axial do rotor através da variação da amplitude de vibração do transdutor. Os resultados mostraram que o controle PI diminuiu o batimento repetitivo axial do rotor de  $0,232 \mu\text{m}_{\text{p-p}}$  para  $0,118 \mu\text{m}_{\text{p-p}}$ .

Ha, Stolarski e Yoshimoto (2005) apresentaram um mancal aerodinâmico com geometria ajustável que utilizava atuadores piezoelétricos e “articulações elásticas” para deformar elasticamente a superfície interna do mancal. A alteração cíclica do furo cilíndrico para uma geometria de três lóbulos gerava uma pressão de filme espremido na folga entre o eixo e o mancal que era capaz de separar as duas superfícies e eliminar o atrito entre elas em baixas velocidades de rotação. Os resultados numéricos e experimentais mostraram que apesar do mancal ter uma capacidade de carga de filme espremido relativamente baixa, ele era viável para ser aplicado na prática. Mais tarde, as características dinâmicas do mancal apresentado por Ha, Stolarski e Yoshimoto (2005) foram investigadas por Stolarski (2011), demonstrando que o efeito de filme espremido poderia aumentar a velocidade limite de instabilidade do mancal.

Zhao (2010) propôs um novo mancal ativo sem contato baseado na levitação de filme espremido que utilizava três transdutores ultrassônicos do tipo Langevin para gerar a ação de esmagamento. Cada transdutor apresentava uma superfície de radiação côncava que formava o anel interno do mancal. Quando os transdutores eram excitados para vibrar na sua primeira frequência de ressonância

longitudinal, o efeito de filme espremido que ocorria entre o anel interno do mancal e a superfície do eixo gerava uma força repulsiva na folga do mancal que era capaz de suspender o eixo e de mantê-lo automaticamente na posição de equilíbrio. Como o mancal era um sistema naturalmente estável, o controle ativo dos transdutores não era mais necessário. Os resultados mostraram que o mancal foi capaz de suspender um eixo de aço com 50 mm de diâmetro. Além disso, a máxima capacidade de carga alcançada pelo mancal (51 N) foi consideravelmente maior do que a capacidade de carga dos mancais de filme espremido apresentados anteriormente na literatura.

Shou, Yoshimoto e Stolarski (2013) apresentaram estudos teóricos e experimentais sobre o desempenho de um mancal aerodinâmico que operava utilizando a levitação ultrassônica de filme espremido. Segundo os autores, o efeito de filme espremido poderia não apenas separar as superfícies do eixo e do mancal nas fases de operação de partida e parada, mas também contribuir significativamente para a estabilidade dinâmica do mancal quando ele operasse com velocidade. Os resultados experimentais mostraram que sem o efeito de filme espremido o mancal se tornava instável na velocidade de 5000 rpm, enquanto com o efeito de filme espremido a instabilidade era observada somente na velocidade de 20 000 rpm. Consequentemente, a levitação ultrassônica de filme espremido provou ser uma ferramenta poderosa para melhorar a estabilidade dinâmica de mancais lubrificados a gás levemente carregados.

Li et al. (2016) desenvolveram um mancal ultrassônico sem contato acionado por três transdutores piezoelétricos que tinha a capacidade de se auto alinhar e suportar cargas radiais e axiais simultaneamente. A estrutura do transdutor era formada por um radiador que apresentava ranhuras ao longo da sua seção lateral para transformar a vibração unidirecional do transdutor em uma vibração bidirecional. A capacidade de carga axial do mancal resultava da força de levitação acústica gerada pela vibração flexural das superfícies laterais do radiador, enquanto a capacidade de carga radial do mancal derivava da força de levitação acústica produzida pela vibração longitudinal da superfície côncava do radiador. Os experimentos revelaram que o mancal apresentou uma máxima capacidade de carga de 15 N na direção radial e de 6 N na direção axial, quando os transdutores foram operados em uma frequência de 16,11 kHz e uma tensão de 150 V<sub>p-p</sub>.

Feng et al. (2017) propuseram um novo mancal de filme espremido lubrificado a ar baseado na levitação acústica de campo próximo. Ao contrário dos mancais anteriores de filme espremido, o mancal proposto por Feng et al. (2017) utilizava sapatas pivotadas flexíveis como superfícies vibratórias, proporcionando uma maior amplitude de vibração e uma melhor estabilidade para sistemas rotativos. Além disso, o mancal se adaptava bem às ações de esmagamento devido à existência de uma haste flexível e uma viga reta conectando as sapatas ao alojamento do mancal. Os autores também apresentaram um modelo teórico para investigar o mecanismo de geração de pressão de filme espremido e o movimento das sapatas. Os resultados numéricos e experimentais mostraram que o mancal proposto por Feng et al. (2017) era um mancal sem contato viável para

máquinas rotativas de alta velocidade e alta precisão.

Li e Deng (2018) estudaram as características de atrito e a estabilidade de operação do mancal desenvolvido por Li et al. (2016). Os torques de atrito em baixas e altas velocidades foram medidos pelos métodos do pêndulo em equilíbrio e da corrente de *feedback*, respectivamente. Por meio da análise do espectro tempo-frequência das órbitas do centro do rotor, a estabilidade de operação do mancal foi estudada durante a aceleração e desaceleração do rotor. Os resultados experimentais mostraram que o torque de atrito do mancal foi cerca de  $120 \mu\text{N}\cdot\text{m}$  quando a velocidade de rotação do rotor alcançou 20 000 rpm e que o mancal poderia operar de forma estável durante a aceleração e desaceleração se a máxima velocidade de rotação do rotor estivesse abaixo da velocidade limite do mancal.

Shi et al. (2018) investigaram o efeito das características do material sobre a capacidade de carga do mancal proposto por Feng et al. (2017), comparando o desempenho de levitação de três mancais que apresentavam a mesma estrutura e dimensão, mas eram feitos de materiais diferentes (alumínio, bronze comercial e aço mola). Devido à sua baixa rigidez estrutural e grande amplitude de vibração, o mancal feito de alumínio obteve um melhor desempenho de levitação do que os mancais feitos com os outros materiais. Portanto, o estudo demonstrou que as características do material, que estavam relacionadas com a forma modal e a frequência de ressonância dos mancais de filme espremido, foram os principais fatores que afetaram o seu desempenho e que o alumínio foi o material mais adequado entre os testados para os mancais de filme espremido.

Feng et al. (2018) estudaram a influência dos mecanismos aerodinâmico e de filme espremido nas características estática e dinâmica de um mancal híbrido lubrificado a gás baseado na levitação acústica de campo próximo. Neste estudo, os campos de pressão sem e com o efeito de filme espremido foram comparados para analisar o acoplamento dos efeitos aerodinâmico e de filme espremido. Além disso, as influências das deformações elásticas estática e dinâmica e da velocidade de rotação na capacidade de carga e na estabilidade do mancal híbrido lubrificado a gás foram estudadas utilizando os métodos das diferenças finitas e da órbita não linear. Os resultados mostraram que o efeito de filme espremido contribuiu para melhorar a capacidade de carga do mancal e também para promover a sua estabilidade dinâmica.

### 1.3 Objetivos do estudo

Neste contexto, o objetivo principal desta dissertação é desenvolver um modelo numérico baseado no Método dos Elementos Finitos para simular o comportamento dinâmico de um rotor flexível suportado por dois mancais, sendo um deles o mancal a ar de filme espremido apresentado por Feng et al. (2018). Para isso, os objetivos secundários do presente trabalho são:

- Desenvolver o modelo matemático do mancal a ar de filme espremido a partir da teoria de

lubrificação hidrodinâmica;

- Determinar as forças de reação do mancal a ar de filme espremido através da resolução numérica da equação de Reynolds pelo método das diferenças finitas;
- Determinar os coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal a ar de filme espremido por meio dos métodos da perturbação finita e da perturbação infinitesimal;
- Analisar o comportamento dinâmico do rotor considerando o mancal a ar de filme espremido representado por um modelo linear, onde as forças de reação são determinadas a partir dos coeficientes de rigidez e amortecimento associados;
- Analisar o comportamento dinâmico do rotor considerando o mancal a ar de filme espremido representado por um modelo não linear, onde as forças de reação são determinadas a partir do campo de pressão fornecido pela equação de Reynolds.

## 1.4 Organização da dissertação

Para facilitar o entendimento do trabalho desenvolvido, esta dissertação se encontra dividida em seis capítulos, que são organizados da seguinte forma:

O Capítulo I apresenta uma breve introdução sobre a levitação acústica de campo próximo, destacando a sua aplicação no desenvolvimento de um novo tipo de mancal sem contato, conhecido como mancal de filme espremido.

O Capítulo II aborda sobre os principais conceitos da dinâmica de máquinas rotativas para a modelagem do comportamento dinâmico de um rotor flexível a partir da aplicação do Método dos Elementos Finitos e das equações de Lagrange.

No Capítulo III é desenvolvido o modelo matemático do mancal a ar de filme espremido proposto por Feng et al. (2018) com base na teoria de lubrificação hidrodinâmica apresentada por Reynolds (1886).

O Capítulo IV apresenta o procedimento numérico para a resolução da equação do movimento do rotor utilizando o método de integração de Newmark em conjunto com o método iterativo de Newton-Raphson. Além disso, este capítulo também apresenta a metodologia para a resolução numérica da equação de Reynolds e das equações perturbadas de Reynolds a partir da aplicação do método das diferenças finitas e do método iterativo de Gauss-Seidel, respectivamente.

O Capítulo V é dedicado à apresentação e discussão dos resultados obtidos com as simulações computacionais.

O Capítulo VI apresenta as principais conclusões alcançadas com a realização deste trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

## CAPÍTULO II

### MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DO ROTOR

Segundo Lalanne e Ferraris (1998), os elementos básicos de um rotor são o disco, o eixo e os mancais. A massa de desbalanceamento, que é uma das principais fontes de excitação em máquinas rotativas, também deve ser considerada. Sendo assim, os principais passos a serem seguidos para a obtenção da equação geral do movimento do rotor são:

- Calcular as energias cinética e potencial de todos os componentes do sistema, assim como o trabalho virtual das forças externas. As expressões da energia cinética são necessárias para caracterizar o disco, o eixo e a massa de desbalanceamento, enquanto a energia de deformação é necessária para caracterizar o eixo. A contribuição dos mancais no comportamento dinâmico do rotor é considerada a partir do cálculo do trabalho virtual das forças exercidas por eles, que podem ser linearizadas e representadas através de coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento ou determinadas diretamente a partir da integração numérica do campo de pressão fornecido pela equação de Reynolds (ver Capítulo III);
- Escolher um método numérico para a modelagem do sistema. Na literatura existem vários métodos para modelar o comportamento dinâmico de sistemas rotativos, destacando-se os métodos das matrizes de transferência, de Rayleigh-Ritz e dos elementos finitos. Para rotores mais complexos, a análise dinâmica geralmente é feita utilizando o Método dos Elementos Finitos, que consiste em discretizar um sistema contínuo em um conjunto de elementos que, individualmente, são considerados contínuos. Dessa forma, os deslocamentos em qualquer ponto do elemento podem ser expressos em termos dos deslocamentos de um conjunto finito de pontos, denominados nós, através de funções de interpolação (SILVEIRA, 2001);
- Aplicar as equações de Lagrange, que são dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

onde  $N$  é o número de graus de liberdade do sistema,  $q_i$  são as coordenadas generalizadas,  $F_{q_i}$  são as forças generalizadas e  $T$  e  $U$  são as energias cinética e potencial dos componentes do sistema, respectivamente.

Nas próximas seções serão apresentadas as formulações matemáticas para a obtenção das matrizes elementares de cada componente do rotor.

## 2.1 Disco

O disco é considerado como sendo um elemento rígido e, por isso, é caracterizado apenas pela sua energia cinética. A Fig. 2.1 apresenta a representação de um elemento de disco de massa  $m_D$  e seus respectivos sistemas de coordenadas, que são: o referencial inercial  $R_0 (X, Y, Z)$  e o referencial móvel  $R (x, y, z)$ . As coordenadas do sistema móvel  $xyz$  se relacionam com as do sistema inercial  $XYZ$  através dos ângulos de rotação  $\theta$ ,  $\varphi$  e  $\phi$ .

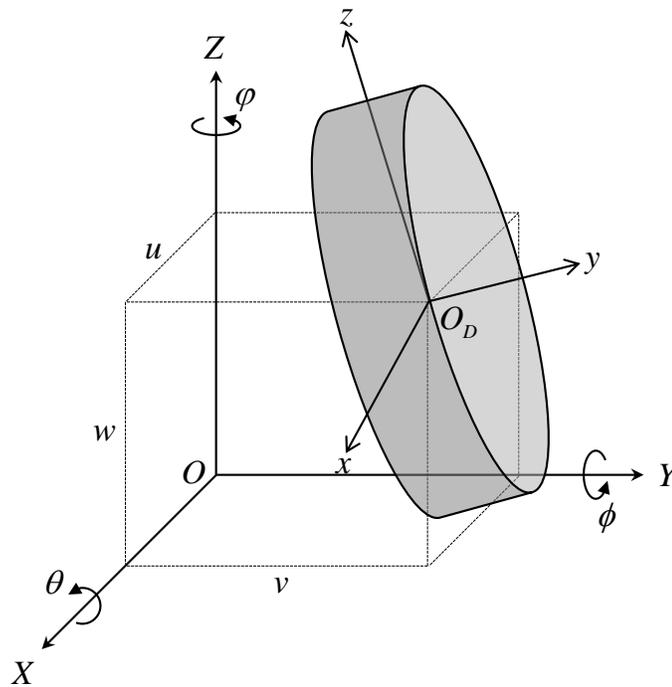


Figura 2.1 – Elemento de disco. Adaptado de Cavalini Jr (2013).

De acordo com Lalanne e Ferraris (1998), a energia cinética do disco é calculada por:

$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{D_x} \omega_x^2 + I_{D_y} \omega_y^2 + I_{D_z} \omega_z^2) \quad (2.2)$$

onde  $u$  e  $w$  são as coordenadas do centro de massa do disco no referencial inercial,  $I_{D_x}$  e  $I_{D_z}$  são os momentos de inércia de massa do disco em relação aos eixos  $x$  e  $z$ , respectivamente,  $I_{D_y}$

é o momento polar de inércia do disco e  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  são as velocidades angulares do disco no referencial móvel. Na forma vetorial, estas velocidades são representadas por:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

A Eq. (2.2) pode ser simplificada considerando que o disco é simétrico ( $I_{D_x} = I_{D_z} = I_D$ ) e os ângulos  $\theta$  e  $\varphi$  são pequenos. Sendo assim, a energia cinética do disco pode ser escrita como:

$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_D (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} I_{D_y} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\varphi}\theta) \quad (2.4)$$

onde  $\dot{\phi} = \Omega$  representa a velocidade de rotação do rotor, o termo  $I_{D_y} \Omega^2 / 2$  não tem influência nas equações de Lagrange e o termo  $I_{D_y} \Omega \dot{\varphi} \theta$  representa o efeito giroscópico.

O movimento do elemento de disco é descrito por quatro graus de liberdade, sendo dois deslocamentos ( $u$  e  $w$ ) e duas rotações ( $\theta$  e  $\varphi$ ). Dessa forma, o vetor de coordenadas generalizadas do centro do disco é definido como:

$$\mathbf{q}_D = \begin{bmatrix} u & w & \theta & \varphi \end{bmatrix}^T \quad (2.5)$$

Aplicando as equações de Lagrange na Eq. (2.4), obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_D} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \mathbf{q}_D} = \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}}_D + \Omega \mathbf{G}_D \dot{\mathbf{q}}_D + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{DT} \mathbf{q}_D \quad (2.6)$$

onde:

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{G}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{D_y} \\ 0 & 0 & I_{D_y} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{K}_{DT} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

são as matrizes de massa, do efeito giroscópico e de enrijecimento do disco devido ao movimento transiente, respectivamente.

Segundo Lalanne e Ferraris (1998), o disco pode ser acoplado ao eixo no modelo de elementos finitos do rotor de três formas diferentes, conforme mostra a Fig. 2.2. O modelo 1 assume que o disco não altera a rigidez do eixo e as características de inércia do disco são concentradas no nó 1. No modelo 2, o disco aumenta a rigidez do eixo e, para representar esse efeito, o raio do eixo é acrescido de  $h_D/2$ , onde  $h_D$  é a espessura do disco. Neste modelo, as características do disco são concentradas no nó 2. Já o modelo 3 considera que se a espessura do disco for suficientemente grande, as suas características de inércia podem ser distribuídas nos três nós do modelo. No presente trabalho, o modelo 2 será utilizado para realizar o acoplamento do disco ao eixo.

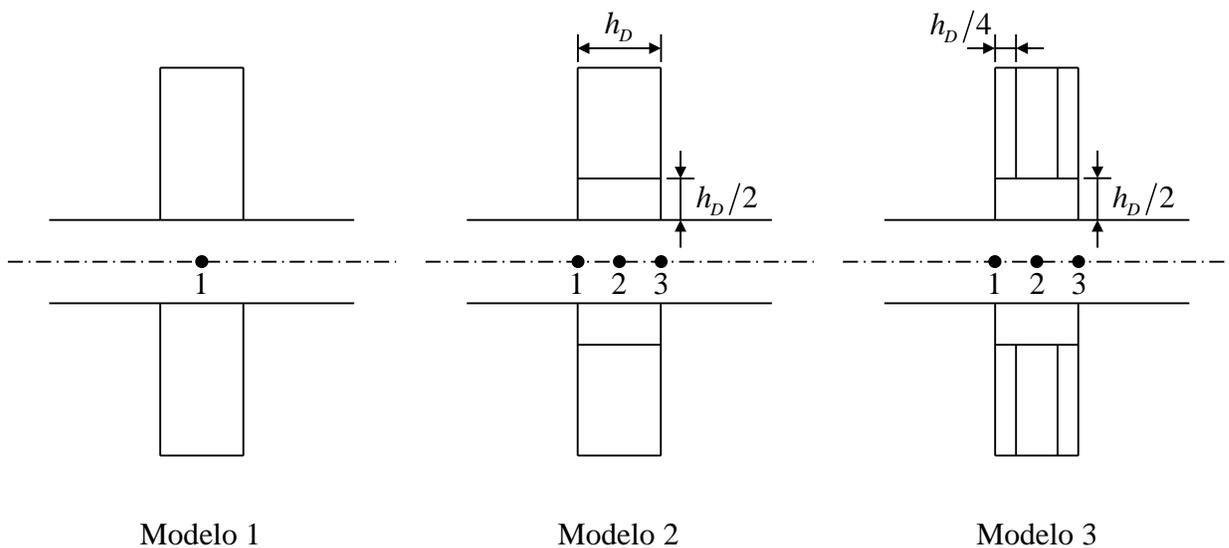


Figura 2.2 – Formas de acoplamento do disco ao eixo. Adaptado de Lalanne e Ferraris (1998).

## 2.2 Eixo

O eixo é modelado como um elemento de viga de seção transversal circular constante, que possui dois nós e quatro graus de liberdade por nó, conforme mostra a Fig. 2.3. Este elemento é caracterizado tanto pela sua energia cinética como pela sua energia potencial de deformação.

A formulação da energia cinética do eixo é uma extensão da expressão obtida para a energia

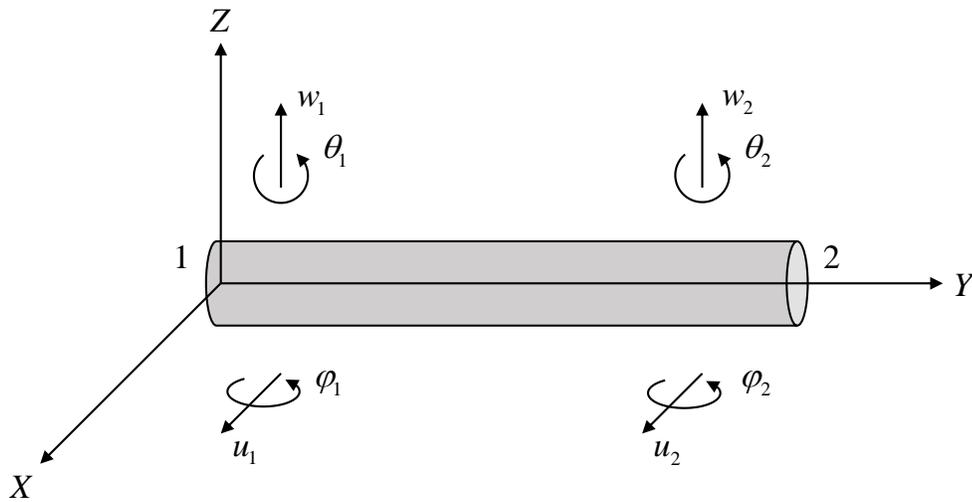


Figura 2.3 – Elemento de eixo. Adaptado de Cavalini Jr (2013).

cinética do disco, dada pela Eq. (2.4). Sendo assim, a energia cinética para um elemento de eixo de comprimento  $L$  é dada por:

$$T_S = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\varphi} \theta dy \quad (2.10)$$

onde  $\rho$  é a densidade do material,  $S$  é a área da seção transversal e  $I$  é o momento de inércia de área da seção transversal da viga em relação à linha neutra.

Na Eq. (2.10), observa-se que a primeira integral representa a expressão clássica para a energia cinética de uma viga em flexão e a segunda integral representa o efeito secundário da inércia de rotação. O termo  $\rho I L \Omega^2$  é uma constante e não tem influência nas equações de Lagrange e a última integral representa o efeito giroscópico.

A partir da Fig. 2.3, o vetor de deslocamentos nodais do elemento de eixo pode ser definido como:

$$\mathbf{q} = \left[ u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \varphi_2 \right]^T \quad (2.11)$$

onde as relações entre os deslocamentos e as rotações são dadas por:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.12)$$

$$\varphi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.13)$$

Alternativamente, a Eq. (2.11) pode ser escrita como:

$$\mathbf{q}_u = \begin{bmatrix} u_1 & \varphi_1 & u_2 & \varphi_2 \end{bmatrix}^T \quad (2.14)$$

$$\mathbf{q}_w = \begin{bmatrix} w_1 & \theta_1 & w_2 & \theta_2 \end{bmatrix}^T \quad (2.15)$$

onde os vetores  $\mathbf{q}_u$  e  $\mathbf{q}_w$  correspondem aos movimentos nos planos  $XY$  e  $YZ$ , respectivamente.

De acordo com Lalanne e Ferraris (1998), os deslocamentos transversais  $u$  e  $w$  em qualquer ponto no interior do elemento de eixo podem ser aproximados por:

$$u = \mathbf{N}_1(y) \mathbf{q}_u \quad (2.16)$$

$$w = \mathbf{N}_2(y) \mathbf{q}_w \quad (2.17)$$

onde  $\mathbf{N}_1(y)$  e  $\mathbf{N}_2(y)$  são as funções de forma do elemento, que normalmente são representadas pelos polinômios cúbicos de Hermite (IMBERT, 1979), conforme mostram as Eqs. (2.18) e (2.19).

$$\mathbf{N}_1(y) = \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; \quad -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \quad \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (2.18)$$

$$\mathbf{N}_2(y) = \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; \quad y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \quad -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (2.19)$$

Substituindo as Eqs. (2.16) e (2.17) na Eq. (2.10) e obedecendo as relações dadas pelas Eqs. (2.12) e (2.13), a energia cinética do eixo torna-se:

$$\begin{aligned} T_S = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[ \dot{\mathbf{q}}_u^T \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^T \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 \dot{\mathbf{q}}_w \right] dy \\ & + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[ \dot{\mathbf{q}}_u^T \frac{d\mathbf{N}_1^T}{dy} \frac{d\mathbf{N}_1}{dy} \dot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^T \frac{d\mathbf{N}_2^T}{dy} \frac{d\mathbf{N}_2}{dy} \dot{\mathbf{q}}_w \right] dy \\ & - 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\mathbf{q}}_u^T \frac{d\mathbf{N}_1^T}{dy} \frac{d\mathbf{N}_2}{dy} \mathbf{q}_w dy + \rho I L \Omega^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Na forma matricial, a Eq. (2.20) pode ser escrita como:

$$T_S = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_u^T \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}}_u + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_w^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{q}}_w + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_u^T \mathbf{M}_3 \dot{\mathbf{q}}_u + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_w^T \mathbf{M}_4 \dot{\mathbf{q}}_w + \Omega \dot{\mathbf{q}}_u^T \mathbf{M}_5 \mathbf{q}_w + \rho I L \Omega^2 \quad (2.21)$$

onde  $\mathbf{M}_1$  e  $\mathbf{M}_2$  são as matrizes de massa clássicas,  $\mathbf{M}_3$  e  $\mathbf{M}_4$  representam a influência do efeito secundário da inércia de rotação e  $\mathbf{M}_5$  é a matriz do efeito giroscópico.

Aplicando as equações de Lagrange na Eq. (2.21), chega-se em:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_S}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T_S}{\partial \mathbf{q}} = (\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_T) \ddot{\mathbf{q}} + \Omega \mathbf{G}_S \dot{\mathbf{q}} + \dot{\Omega} \mathbf{K}_{ST} \mathbf{q} \quad (2.22)$$

onde as matrizes  $\mathbf{M}_S$ ,  $\mathbf{M}_T$ ,  $\mathbf{G}_S$  e  $\mathbf{K}_{ST}$  são dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{M}_S = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{M}_T = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{G}_S = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{K}_{ST} = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

A matriz elementar de rigidez do eixo é formulada a partir da sua energia potencial de deformação. A Fig. 2.4 apresenta a seção transversal de uma viga submetida à flexão. O ponto  $C$  representa o centro geométrico da viga e o ponto  $B$  é um ponto arbitrário da seção transversal. Os deslocamentos do centro geométrico da viga em relação aos eixos  $x$  e  $z$  são dados, respectivamente, por  $u^*$  e  $w^*$ .

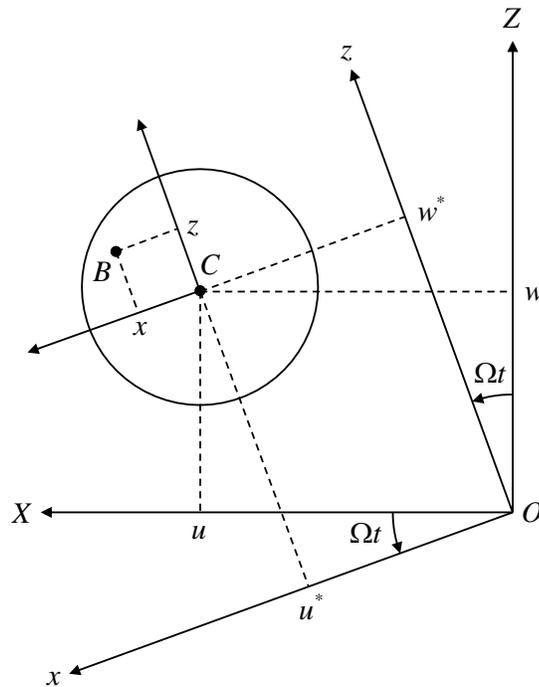


Figura 2.4 – Seção transversal de uma viga submetida à flexão. Adaptado de Lalanne e Ferraris (1998).

Considerando os termos de segunda ordem, a deformação longitudinal do ponto  $B$  pode ser

escrita como:

$$\varepsilon = \underbrace{-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}}_{\varepsilon_l} + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2}_{\varepsilon_{nl}} \quad (2.27)$$

onde  $\varepsilon_l$  e  $\varepsilon_{nl}$  são as parcelas linear e não linear da Eq. (2.27), respectivamente.

Segundo Lalande e Ferraris (1998), a energia de deformação do eixo é definida como:

$$U_S = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^T \sigma d\tau \quad (2.28)$$

onde  $\sigma$  é a tensão e  $\tau$  é o volume do elemento.

De acordo com a lei de Hooke, a relação entre a tensão e a deformação é dada por:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (2.29)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material.

Substituindo as Eqs. (2.27) e (2.29) na Eq. (2.28), chega-se em:

$$U_S = \frac{E}{2} \int_{\tau} \left( \varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2 \right) d\tau \quad (2.30)$$

Devido à simetria da seção transversal da viga em relação aos eixos  $x$  e  $z$ , o segundo termo na integral da Eq. (2.30) é nulo. Além disso, como o terceiro termo na integral é de segunda ordem, ele pode ser desprezado. Assim, substituindo a parcela linear da Eq. (2.27) na Eq. (2.30), obtém-se:

$$U_S = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[ x^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \quad (2.31)$$

A Eq. (2.31) pode ser simplificada para:

$$U_S = \frac{E}{2} \int_0^L \left[ I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (2.32)$$

onde:

$$I_x = \int_S z^2 dS \quad (2.33)$$

$$I_z = \int_S x^2 dS \quad (2.34)$$

são os momentos de inércia de área da seção transversal da viga em relação aos eixos  $x$  e  $z$ , respectivamente.

A partir da Fig. 2.4, as coordenadas  $u^*$  e  $w^*$  podem ser representadas no referencial inercial como:

$$u^* = u \cos(\Omega t) - w \sin(\Omega t) \quad (2.35)$$

$$w^* = u \sin(\Omega t) + w \cos(\Omega t) \quad (2.36)$$

Dessa forma, substituindo as Eqs. (2.35) e (2.36) na Eq. (2.32) e considerando que o eixo é simétrico ( $I_x = I_z = I$ ), a expressão final para a energia de deformação do eixo é dada por:

$$U_S = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (2.37)$$

Introduzindo as Eqs. (2.16) e (2.17) na Eq. (2.37), obtém-se:

$$U_S = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \mathbf{q}_u^T \frac{d^2 \mathbf{N}_1^T}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} \mathbf{q}_u + \mathbf{q}_w^T \frac{d^2 \mathbf{N}_2^T}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \mathbf{q}_w \right] dy \quad (2.38)$$

A matriz de rigidez do elemento de eixo é determinada a partir da integração da Eq. (2.38), que resulta em:

$$U_S = \frac{1}{2} \mathbf{q}_u^T \mathbf{K}_1 \mathbf{q}_u + \frac{1}{2} \mathbf{q}_w^T \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_w \quad (2.39)$$

onde  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  são as matrizes de rigidez clássicas, que são representadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{K}_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Apesar da Eq. (2.39) não levar em consideração a deformação por cisalhamento que a seção transversal da viga sofre durante a sua flexão, o efeito do cisalhamento pode ser incluído na matriz

de rigidez do eixo a partir da definição do seguinte fator de correção:

$$a = \frac{12EI}{GS_r L^2} \quad (2.42)$$

onde  $G$  é o módulo de cisalhamento do material e  $S_r$  é a área reduzida da seção transversal da viga. Estes dois parâmetros são calculados, respectivamente, por:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.43)$$

$$S_r = k_s S \quad (2.44)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $k_s$  é o fator de cisalhamento.

Segundo Cowper (1966), o fator de cisalhamento para uma viga maciça de seção transversal circular é dado por:

$$k_s = \frac{6(1 + \nu)}{7 + 6\nu} \quad (2.45)$$

Introduzindo o efeito do cisalhamento na formulação da energia potencial do eixo, a Eq. (2.39) pode ser escrita como (OLIVEIRA, 1999):

$$U_S = \frac{1}{2} \mathbf{q}_u^T \mathbf{K}_1^* \mathbf{q}_u + \frac{1}{2} \mathbf{q}_w^T \mathbf{K}_2^* \mathbf{q}_w \quad (2.46)$$

onde:

$$\mathbf{K}_1^* = \frac{EI}{(1 + a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & (4 + a)L^2 & 6L & (2 - a)L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & (2 - a)L^2 & 6L & (4 + a)L^2 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{K}_2^* = \frac{EI}{(1 + a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4 + a)L^2 & -6L & (2 - a)L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2 - a)L^2 & -6L & (4 + a)L^2 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Aplicando as equações de Lagrange na Eq. (2.46), obtém-se:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K}_C \mathbf{q} \quad (2.49)$$

onde  $\mathbf{K}_C$  é a matriz elementar de rigidez do eixo, que é dada por:

$$\mathbf{K}_C = \frac{EI}{(1+a)L^3} \mathbf{K} \quad (2.50)$$

sendo:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

### 2.3 Mancais

De forma simplificada, os mancais podem ser representados por um conjunto de molas e amortecedores lineares, conforme mostra a Fig. 2.5, onde os termos  $k_{ij}$  e  $c_{ij}$  ( $i, j = x, z$ ) são, respectivamente, os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais.

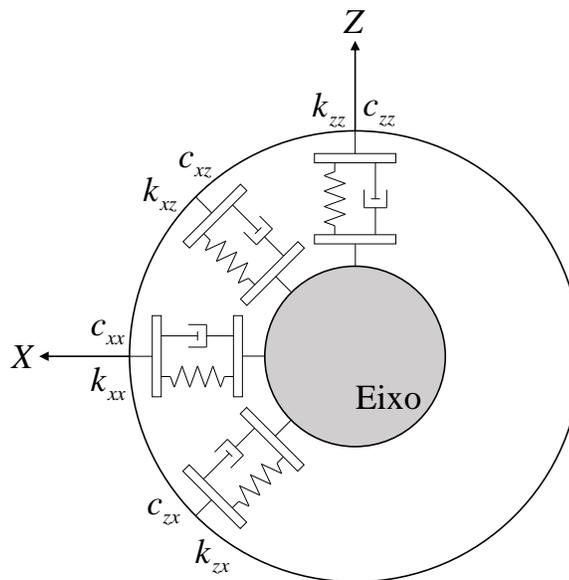


Figura 2.5 – Modelo linear dos mancais. Adaptado de Cavalini Jr (2013).

De acordo com Lalanne e Ferraris (1998), o trabalho virtual das forças que atuam sobre o eixo

é calculado por:

$$\begin{aligned} \delta W = & -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w \\ & - c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w - c_{zx}\dot{u}\delta w \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde  $\delta u$  e  $\delta w$  são os deslocamentos virtuais nas direções  $X$  e  $Z$ , respectivamente.

A Eq. (2.52) também pode ser escrita como:

$$\delta W = F_{mX}\delta u + F_{mZ}\delta w \quad (2.53)$$

onde:

$$F_{mX} = -k_{xx}u - k_{xz}w - c_{xx}\dot{u} - c_{xz}\dot{w} \quad (2.54)$$

$$F_{mZ} = -k_{zx}u - k_{zz}w - c_{zx}\dot{u} - c_{zz}\dot{w} \quad (2.55)$$

são as forças de reação dos mancais nas direções  $X$  e  $Z$ , respectivamente.

Na forma matricial, as Eqs. (2.54) e (2.55) podem ser expressas como:

$$\begin{bmatrix} F_{mX} \\ F_{mZ} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

onde a primeira matriz representa a matriz de rigidez dos mancais e a segunda matriz representa a matriz de amortecimento.

Alternativamente, o mancal a ar de filme espremido proposto por Feng et al. (2018) pode ser representado por um modelo não linear. Neste caso, ao invés das forças de reação serem linearizadas e representadas através de coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento, elas são determinadas a partir da integração numérica do campo de pressão fornecido pela equação de Reynolds e inseridas diretamente na equação do movimento do rotor como forças externas. No entanto, devido à necessidade de procedimentos numéricos para a resolução da equação de Reynolds a cada instante de tempo, a análise dinâmica do rotor utilizando o modelo não linear do mancal a ar de filme espremido gera um alto custo computacional.

## 2.4 Massa de desbalanceamento

O desbalanceamento é uma das principais fontes de excitação em máquinas rotativas, sendo caracterizado por uma massa  $m_u$  localizada a uma distância  $d$  do centro geométrico do eixo, conforme mostra a Fig. 2.6. Nesta figura, a massa  $m_u$  permanece sempre no plano  $XZ$  e a sua

coordenada em relação ao eixo  $Y$  é considerada constante.

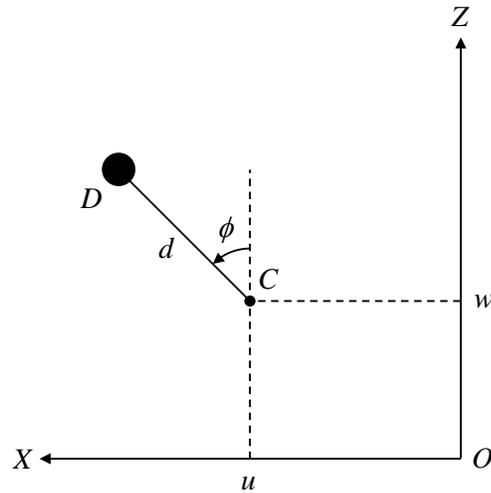


Figura 2.6 – Massa de desbalanceamento. Adaptado de Lalanne e Ferraris (1998).

Segundo Lalanne e Ferraris (1998), a posição da massa de desbalanceamento no referencial inercial é dada por:

$$\mathbf{OD} = \begin{bmatrix} u + d \sin \phi \\ v \\ w + d \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

onde  $\phi$  é a posição angular da massa de desbalanceamento.

A velocidade da massa  $m_u$  é obtida derivando a Eq. (2.57) em relação ao tempo, conforme é mostrado a seguir:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{OD}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{u} + d\dot{\Omega} \cos \phi \\ 0 \\ \dot{w} - d\dot{\Omega} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Dessa forma, a energia cinética da massa de desbalanceamento é calculada por:

$$T_u = \frac{1}{2} m_u \left( \dot{u}^2 + \dot{w}^2 + d^2 \dot{\Omega}^2 + 2d\dot{\Omega}\dot{u} \cos \phi - 2d\dot{\Omega}\dot{w} \sin \phi \right) \quad (2.59)$$

Como a massa  $m_u$  é muito menor do que a massa do rotor e o termo  $m_u d^2 \Omega^2 / 2$  não tem influência nas equações de Lagrange, a Eq. (2.59) pode ser aproximada por:

$$T_u \approx m_u d \dot{\Omega} (\dot{u} \cos \phi - \dot{w} \sin \phi) \quad (2.60)$$

Aplicando as equações de Lagrange na Eq. (2.60), obtêm-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_u}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial u} = -m_u d\Omega^2 \sin \phi + m_u d\dot{\Omega} \cos \phi \quad (2.61)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_u}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial w} = -m_u d\Omega^2 \cos \phi - m_u d\dot{\Omega} \sin \phi \quad (2.62)$$

Portanto, as forças de desbalanceamento podem ser expressas na forma vetorial como:

$$\begin{bmatrix} F_{uX} \\ F_{uZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_u d\Omega^2 \sin \phi - m_u d\dot{\Omega} \cos \phi \\ m_u d\Omega^2 \cos \phi + m_u d\dot{\Omega} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

### 2.4.1 Variação da velocidade de rotação do rotor

Lalanne e Ferraris (1998) apresentaram duas leis de variação da velocidade de rotação do rotor em função do tempo, sendo uma linear e a outra exponencial. Em aplicações industriais, geralmente considera-se que a velocidade de rotação de máquinas rotativas varia de acordo com uma função exponencial. Isto significa que a velocidade de rotação aumenta rapidamente durante a partida do rotor, e a aceleração é reduzida à medida que o rotor se aproxima da sua velocidade de operação. Já a função linear, que é de interesse mais teórico, é caracterizada por uma aceleração constante desde a partida até a velocidade de operação do rotor. Nesta dissertação, a função linear será utilizada para descrever a variação da velocidade de rotação do rotor com o tempo.

A expressão para a variação linear da velocidade de rotação do rotor é dada por:

$$\Omega(t) = A + Bt \quad (2.64)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes.

Considerando que no instante inicial  $t_0$  a velocidade de rotação do rotor é igual a  $\Omega_0$  e no instante final  $t_f$  a velocidade de rotação é igual a  $\Omega_f$ , as constantes  $A$  e  $B$  podem ser escritas como:

$$A = \frac{\Omega_0 t_f - \Omega_f t_0}{t_f - t_0} \quad (2.65)$$

$$B = \frac{\Omega_0 - \Omega_f}{t_0 - t_f} \quad (2.66)$$

A expressão para a aceleração do rotor é obtida derivando a Eq. (2.64) em relação ao tempo:

$$\dot{\Omega}(t) = B \quad (2.67)$$

Integrando a Eq. (2.64) em relação ao tempo, obtém-se a posição angular da massa de desbalanceamento:

$$\phi(t) = At + \frac{Bt^2}{2} + C \quad (2.68)$$

onde  $C$  é uma constante de integração.

Considerando que no instante inicial  $t_0$  a posição angular da massa de desbalanceamento é igual a  $\phi_0$ , tem-se:

$$C = \phi_0 - At_0 - \frac{Bt_0^2}{2} \quad (2.69)$$

## 2.5 Equação do movimento do rotor

O sistema de equações diferenciais que descreve o comportamento dinâmico do rotor é obtido a partir da montagem das matrizes elementares do disco, do eixo e dos mancais, e pode ser representado na forma matricial como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \Omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_1 + \dot{\Omega}\mathbf{K}_2)\mathbf{q} = \mathbf{W} + \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_m \quad (2.70)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{C}$  é a matriz de amortecimento<sup>1</sup>,  $\mathbf{G}$  é a matriz do efeito giroscópico,  $\mathbf{K}_1$  é a matriz de rigidez,  $\mathbf{K}_2$  é a matriz de enrijecimento devido ao movimento transiente e  $\mathbf{q}$  é o vetor de deslocamentos nodais. As forças peso, de desbalanceamento e de reação dos mancais são representadas pelos vetores  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{F}_u$  e  $\mathbf{F}_m$ , respectivamente.

As matrizes globais do sistema são obtidas a partir da sobreposição das matrizes elementares do disco, do eixo e dos mancais nos respectivos graus de liberdade do modelo do rotor. Como cada nó do modelo possui quatro graus de liberdade, o vetor de deslocamentos nodais tem dimensão  $4(n_e + 1)$ , onde  $n_e$  é o número de elementos do modelo. Por sua vez, as matrizes globais do sistema são quadradas de ordem  $4(n_e + 1)$  e os vetores das forças que atuam sobre o sistema têm a mesma dimensão do vetor de deslocamentos nodais.

---

<sup>1</sup>Esta matriz é obtida a partir da soma das matrizes de amortecimento dos mancais e da matriz de amortecimento estrutural do rotor, que é considerada proporcional às matrizes de massa e rigidez:

$$\mathbf{C}_p = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}_1 \quad (2.71)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes.

# CAPÍTULO III

## MODELO MATEMÁTICO DO MANCAL A AR DE FILME ESPREMIDO

Este capítulo apresenta o desenvolvimento do modelo matemático do mancal a ar de filme espremido proposto por Feng et al. (2018) com base na teoria de lubrificação hidrodinâmica apresentada por Reynolds (1886). A partir da resolução da equação de Reynolds, as forças de reação do mancal são determinadas pela integração do campo de pressão no filme de ar sobre a superfície do mancal. Para pequenas amplitudes de movimento do rotor em torno da sua posição de equilíbrio, as forças de reação do mancal podem ser linearizadas e representadas através de coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento.

### 3.1 Configuração do mancal e condições de operação

A representação esquemática do mancal a ar de filme espremido proposto por Feng et al. (2018) é mostrada na Fig. 3.1. O mancal consiste em três atuadores piezoelétricos do tipo *stack* que estão fixados espaçados de  $120^\circ$  em volta da carcaça do mancal (feita de aço inoxidável), e um arranjo de “articulações elásticas” que permite a deformação elástica do furo cilíndrico do mancal para uma geometria de três lóbulos (FENG et al., 2018).

A deformação estática inicial do mancal é produzida por uma tensão contínua aplicada aos PZTs, que é ajustada para controlar a configuração do furo de três lóbulos. Quando uma tensão alternada é aplicada aos PZTs, eles tendem a se expandir e a se contrair na mesma frequência da excitação, resultando em um movimento oscilante do mancal. A alteração cíclica do furo cilíndrico para uma geometria de três lóbulos gera uma pressão de filme espremido na folga do mancal que é capaz de suspender o eixo durante a partida. Após a separação das superfícies do eixo e do mancal, a velocidade de rotação é introduzida, e quando o eixo atinge uma velocidade que assegura a sua suspensão aerodinâmica, o mancal passa a operar sem o efeito de filme espremido. Apenas a deformação estática do mancal é mantida para conservar a configuração do furo de três lóbulos (FENG et al., 2018).

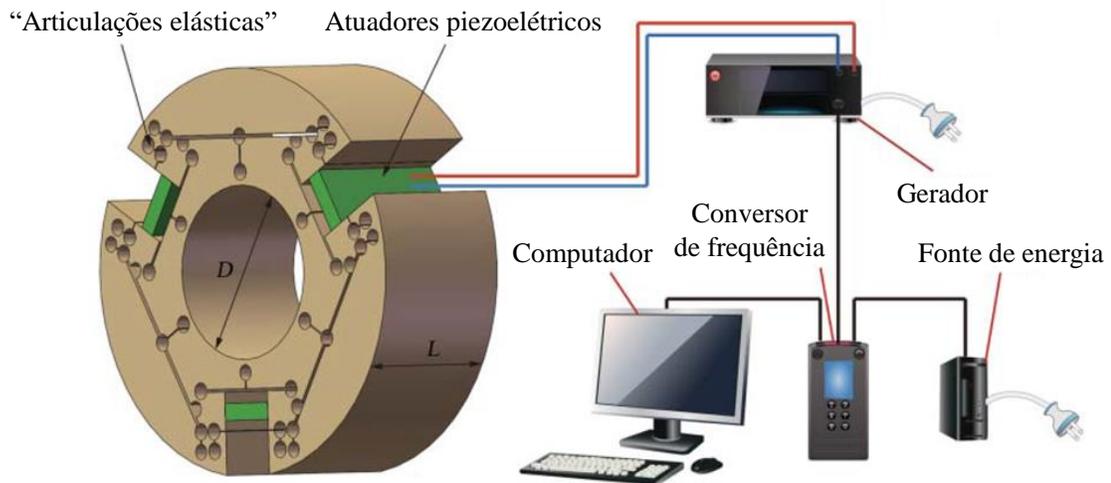


Figura 3.1 – Representação do mancal a ar de filme espremido. Adaptado de Feng et al. (2018).

De acordo com Feng et al. (2018), o mancal a ar de filme espremido foi projetado para operar em uma frequência de ressonância na qual a estrutura poderia obter uma amplitude de vibração máxima e gerar uma maior pressão de filme espremido. Para determinar as frequências naturais e os correspondentes modos de vibrar do mancal, os autores realizaram uma análise modal da estrutura utilizando o *software ANSYS*<sup>®</sup>. A partir desta análise, as duas primeiras frequências de ressonância obtidas para o mancal foram 3,2 kHz e 4,3 kHz, respectivamente. No entanto, como as deformações elásticas do primeiro e do segundo modo de vibrar do mancal não eram simétricas, essas duas frequências não poderiam ser utilizadas para gerar o efeito de filme espremido. O terceiro modo de vibrar do mancal correspondia à frequência de 9,3 kHz. Nesta frequência, a deformação elástica do mancal era perfeitamente simétrica e a amplitude de vibração era grande o suficiente. Portanto, a frequência de excitação do mancal a ar de filme espremido foi ajustada em 9,3 kHz.

As características geométricas e operacionais do mancal a ar de filme espremido proposto por Feng et al. (2018) são apresentadas na Tab. 3.1.

Tabela 3.1 – Características geométricas e operacionais do mancal a ar de filme espremido (FENG et al., 2018).

Parâmetros	Valores
Raio (mm)	15
Comprimento (mm)	25
Folga radial ( $\mu\text{m}$ )	30
Tensão contínua (V)	60
Amplitude da deformação estática ( $\mu\text{m}$ )	1,77
Tensão alternada (V)	50
Amplitude da deformação dinâmica ( $\mu\text{m}$ )	5,75
Frequência de excitação (kHz)	9,3

### 3.2 Espessura do filme de ar

A Fig. 3.2 apresenta a representação das deformações elásticas sofridas pela superfície interna do mancal a ar de filme espremido devido ao efeito das tensões aplicadas nos PZTs. A partir desta figura, a espessura do filme de ar pode ser escrita como (FENG et al., 2018):

$$h = c - e_x \sin \theta - e_z \cos \theta + \delta_s + \delta_d \quad (3.1)$$

onde  $c$  é a folga radial do mancal,  $e_x$  e  $e_z$  são as excentricidades do centro do eixo nas direções  $x$  e  $z$ , respectivamente,  $\theta$  é a coordenada angular do mancal (com origem no eixo  $z$ ) e os termos  $\delta_s$  e  $\delta_d$  representam as deformações elásticas estática e dinâmica do mancal.

Segundo Feng et al. (2018), a expressão que descreve a deformação elástica estática do mancal é dada por:

$$\delta_s = e_{w_0} \sin(3\theta) + |0,07986e_{w_0} \sin(3\theta)| \quad (3.2)$$

onde  $e_{w_0}$  é a amplitude da deformação estática.

Já a espessura dinâmica do filme de ar pode ser representada por (FENG et al., 2018):

$$\delta_d = A \sin(\omega_e t) \quad (3.3)$$

onde  $\omega_e$  é a frequência angular de excitação do mancal e  $t$  é o tempo.

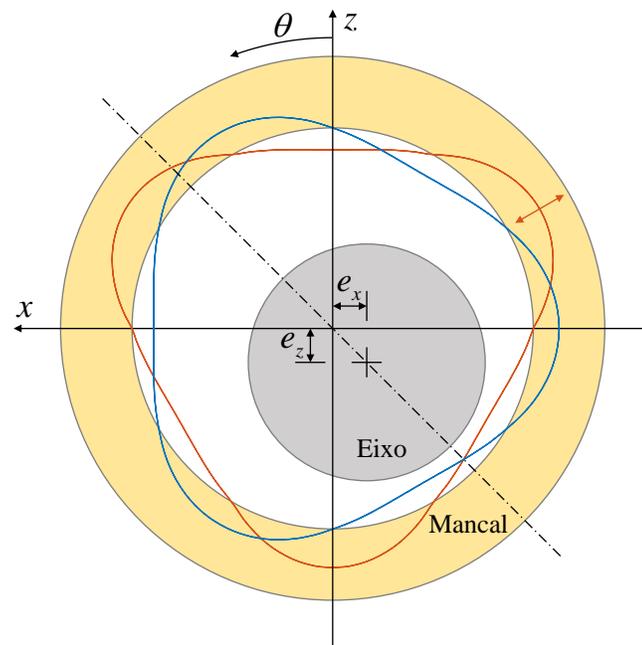


Figura 3.2 – Representação das deformações elásticas do mancal a ar de filme espremido. — Deformação estática ( $\delta_s$ ); — Deformação dinâmica ( $\delta_d$ ). Adaptado de Feng et al. (2018).

Por meio do ajuste dos resultados numéricos obtidos da análise harmônica do mancal no ANSYS<sup>®</sup>, o termo  $A$  na Eq. (3.3) pode ser estimado por (FENG et al., 2018):

$$A = -0,783e_w \cos(3\theta) + |0,2174e_w \cos(3\theta)| \quad (3.4)$$

sendo  $e_w$  a amplitude da deformação dinâmica.

### 3.3 Equação de Reynolds

A equação diferencial que governa a distribuição de pressão em um mancal de filme fluido é conhecida como equação de Reynolds. Esta equação foi derivada pela primeira vez em um artigo publicado por Osborne Reynolds em 1886 (REYNOLDS, 1886), que continha não apenas a equação diferencial básica da lubrificação de filme fluido, mas também uma comparação direta entre as previsões teóricas de Reynolds e os resultados experimentais obtidos por Tower (1883). No entanto, Reynolds restringiu sua análise a fluidos incompressíveis e os efeitos da compressibilidade somente foram incluídos na equação da lubrificação hidrodinâmica por Harrison (1913).

De acordo com Hamrock, Schmid e Jacobson (2004), a equação de Reynolds pode ser derivada a partir das equações de Navier-Stokes e da continuidade, considerando as seguintes hipóteses simplificadoras:

1. O escoamento é laminar e isotérmico;
2. O lubrificante se comporta como um fluido Newtoniano;
3. As forças de corpo e de inércia são desprezíveis quando comparadas com as forças de pressão e viscosas;
4. As variações do campo de velocidades através da espessura do filme de fluido são muito maiores do que as variações nas outras direções;
5. A viscosidade do fluido é constante;
6. A pressão é constante através da espessura do filme de fluido;
7. Não ocorre deslizamento na interface entre o fluido e as superfícies do mancal e do eixo;
8. A espessura do filme de fluido é muito pequena em relação ao diâmetro e ao comprimento do mancal. Portanto, os efeitos de curvatura podem ser desprezados e o mancal pode ser desenvolvido em um plano, conforme mostra a Fig. 3.3.

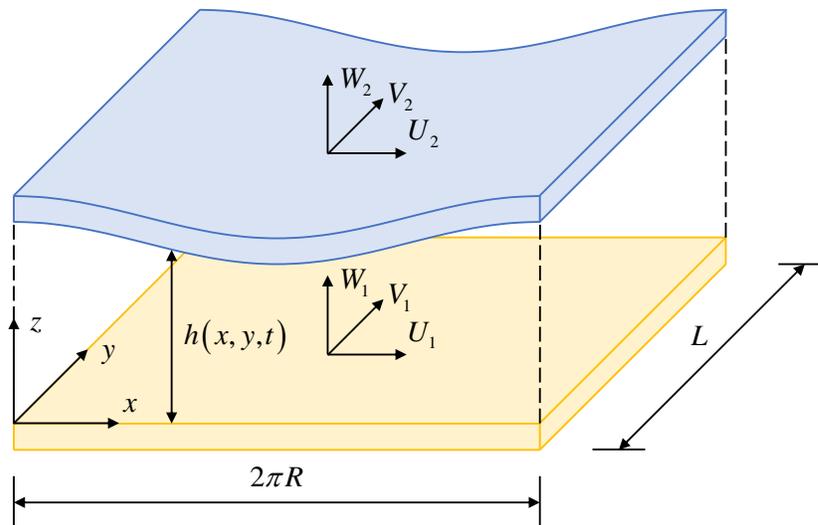


Figura 3.3 – Geometria planificada do mancal. Adaptado de Merelli et al. (2019).

A partir das hipóteses anteriores, as equações de Navier-Stokes podem ser escritas como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \end{array} \right. \quad (3.5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.5b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \end{array} \right. \quad (3.5c)$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as velocidades do fluido nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente,  $p$  é a pressão no filme de fluido e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido.

Integrando duas vezes as Eqs. (3.5a) a (3.5c) em relação a  $z$ , obtêm-se:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z^2 + C_1 z + C_2 \quad (3.6)$$

$$v = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} z^2 + C_3 z + C_4 \quad (3.7)$$

$$w = C_5 z + C_6 \quad (3.8)$$

As constantes de integração  $C_1$  a  $C_6$  são determinadas a partir da aplicação das seguintes condições de contorno:

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad u = U_1, \quad v = V_1, \quad w = W_1 \quad (3.9)$$

$$z = h \quad \Rightarrow \quad u = U_2, \quad v = V_2, \quad w = W_2 \quad (3.10)$$

onde  $h$  é a espessura do filme de fluido e  $U$ ,  $V$  e  $W$  são, respectivamente, as velocidades das superfícies do mancal (subscrito 1) e do eixo (subscrito 2) nas direções circunferencial, axial e radial.

Aplicando estas condições de contorno nas Eqs. (3.6) a (3.8), obtêm-se:

$$C_1 = \frac{U_2 - U_1}{h} - \frac{h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad C_2 = U_1 \quad (3.11)$$

$$C_3 = \frac{V_2 - V_1}{h} - \frac{h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad C_4 = V_1 \quad (3.12)$$

$$C_5 = \frac{W_2 - W_1}{h}, \quad C_6 = W_1 \quad (3.13)$$

Então, substituindo as expressões anteriores nas Eqs. (3.6) a (3.8), chega-se em:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - hz) + \left( \frac{U_2 - U_1}{h} \right) z + U_1 \quad (3.14)$$

$$v = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} (z^2 - hz) + \left( \frac{V_2 - V_1}{h} \right) z + V_1 \quad (3.15)$$

$$w = \left( \frac{W_2 - W_1}{h} \right) z + W_1 \quad (3.16)$$

As Eqs. (3.14) a (3.16) são utilizadas juntamente com a equação da continuidade, que é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.17)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido.

Integrando a Eq. (3.17) através da espessura do filme de fluido, chega-se em:

$$\int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + \int_0^h \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} dz + \int_0^h \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} dz + \int_0^h \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} dz = 0 \quad (3.18)$$

Aplicando a regra de Leibniz<sup>1</sup> para diferenciação de integrais na Eq. (3.18), obtém-se:

$$h \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \int_0^h u dz \right) - \rho V_2 \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \int_0^h v dz \right) + \rho (W_2 - W_1) = 0 \quad (3.20)$$

onde:

$$\int_0^h u dz = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{U_2 + U_1}{2} \right) h \quad (3.21)$$

$$\int_0^h v dz = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} + \left( \frac{V_2 + V_1}{2} \right) h \quad (3.22)$$

Por fim, substituindo as Eqs. (3.21) e (3.22) na Eq. (3.20) e rearranjando os termos da equação resultante, chega-se na equação generalizada de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho h (U_2 + U_1)}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\rho h (V_2 + V_1)}{2} \right] + \frac{\partial (\rho h)}{\partial t} \quad (3.23)$$

---

<sup>1</sup>  $\frac{d}{d\alpha} \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} f(\alpha, \beta) d\beta = \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} d\beta + f(\alpha, \phi_2) \frac{d\phi_2}{d\alpha} - f(\alpha, \phi_1) \frac{d\phi_1}{d\alpha}$  (3.19)

onde:

$$\frac{\partial (\rho h)}{\partial t} = \rho \left( W_2 - W_1 - U_2 \frac{\partial h}{\partial x} - V_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) + h \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.24)$$

Como o mancal a ar de filme espremido proposto por Feng et al. (2018) é fixo nas direções circunferencial e axial ( $U_1 = V_1 = 0$ ) e o eixo não possui movimento axial ( $V_2 = 0$ ), a Eq. (3.23) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{U}{2} \frac{\partial (\rho h)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho h)}{\partial t} \quad (3.25)$$

onde  $U$  é a velocidade tangencial do eixo ( $U \approx \Omega R$ , onde  $\Omega$  é a velocidade de rotação do eixo e  $R$  é o raio do mancal).

Na Eq. (3.25), a densidade do fluido varia tanto em função das coordenadas  $x$  e  $y$  como do tempo  $t$ . Para o caso de fluidos incompressíveis, a densidade pode ser considerada constante. No entanto, para fluidos compressíveis, como é o caso dos mancais lubrificados a gás, a densidade é altamente dependente da pressão. Nestes casos, considera-se que o fluido se comporta como um gás ideal e a densidade pode ser expressa por (HOOGEBOOM, 2016):

$$\rho = \frac{p}{R_g T} \quad (3.26)$$

onde  $R_g$  é a constante do gás e  $T$  é a temperatura absoluta.

Então, substituindo a Eq. (3.26) na Eq. (3.25) e considerando as hipóteses de escoamento isotérmico e viscosidade constante, a equação de Reynolds torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( p h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\mu U \frac{\partial (p h)}{\partial x} + 12\mu \frac{\partial (p h)}{\partial t} \quad (3.27)$$

A partir da análise da Eq. (3.27), observa-se que os mecanismos de geração de pressão no filme de fluido estão representados no lado direito da equação, onde o primeiro termo corresponde ao efeito cunha e o segundo termo corresponde ao efeito de filme espremido. De acordo com Chieh (2007), o efeito cunha está relacionado com o escoamento de um fluido lubrificante entre duas superfícies convergentes entre si que apresentam movimento tangencial relativo. Devido à diminuição da seção transversal disponível para o escoamento do lubrificante, a pressão é elevada gerando uma força de sustentação da carga. Já o efeito de filme espremido ocorre quando duas superfícies separadas por um filme de fluido viscoso são forçadas a se aproximarem. Devido à dificuldade do lubrificante escoar lateralmente, um gradiente de pressão é formado no filme de fluido que proporciona uma força hidrodinâmica perpendicular ao escoamento.

### 3.3.1 Adimensionalização da equação de Reynolds

Para assegurar uma maior robustez e eficiência da solução numérica, a equação de Reynolds pode ser adimensionalizada a partir da definição dos seguintes parâmetros:

$$\bar{p} = \frac{p}{p_a}, \quad \bar{h} = \frac{h}{c}, \quad \theta = \frac{x}{R}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \lambda = \frac{R}{L}, \quad \tau = \omega_e t \quad (3.28)$$

onde  $p_a$  é a pressão atmosférica e  $L$  é o comprimento do mancal.

Substituindo estes parâmetros na Eq. (3.27), obtém-se a equação adimensional de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \bar{p} \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \bar{p} \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) = \Lambda \frac{\partial (\bar{p} \bar{h})}{\partial \theta} + \sigma \frac{\partial (\bar{p} \bar{h})}{\partial \tau} \quad (3.29)$$

onde:

$$\Lambda = \frac{6\mu\Omega}{p_a} \left( \frac{R}{c} \right)^2 \quad (3.30)$$

$$\sigma = \frac{12\mu\omega_e}{p_a} \left( \frac{R}{c} \right)^2 \quad (3.31)$$

são conhecidos como número do mancal e número de esmagamento, respectivamente (LANGLOIS, 1962).

Alternativamente, a Eq. (3.29) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}^2}{\partial \theta} \right) + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}^2}{\partial \bar{y}} \right) = 2\Lambda \frac{\partial (\bar{p} \bar{h})}{\partial \theta} + 2\sigma \frac{\partial (\bar{p} \bar{h})}{\partial \tau} \quad (3.32)$$

### 3.3.2 Condições inicial e de contorno

Como a Eq. (3.32) é uma equação diferencial parcial de primeira ordem em relação à variável  $\tau$  e de segunda ordem em relação às variáveis  $\theta$  e  $\bar{y}$ , para resolvê-la é necessário especificar uma condição inicial e quatro condições de contorno, sendo duas em cada direção. Devido à simetria axial do problema, a Eq. (3.32) pode ser resolvida apenas para metade da superfície do mancal ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $0 \leq \bar{y} \leq 1/2$ ). Sendo assim, a distribuição de pressão na folga do mancal deve satisfazer as seguintes condições adimensionais:

1. No instante inicial, a pressão é igual à atmosférica;

$$\bar{p}|_{\tau=0} = 1 \quad (3.33)$$

2. Na extremidade lateral do mancal, a pressão é igual à atmosférica. Além disso, o gradiente de pressão na direção axial é nulo no plano médio do mancal;

$$\bar{p}|_{\bar{y}=0} = 1 \quad (3.34)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=1/2} = 0 \quad (3.35)$$

3. A pressão é contínua na direção circunferencial do mancal.

$$\bar{p}|_{\theta=0} = \bar{p}|_{\theta=2\pi} \quad (3.36)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right|_{\theta=2\pi} \quad (3.37)$$

O procedimento numérico para a obtenção do campo de pressão no filme de ar será discutido com mais detalhes no Capítulo IV.

### 3.4 Forças de reação do mancal

Depois que a equação de Reynolds é resolvida, as forças de reação do mancal são determinadas pela integração do campo de pressão sobre a superfície do mancal, conforme mostram as Eqs. (3.38) e (3.39).

$$F_{mx} = -2p_a RL \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} \bar{p} \sin \theta d\theta d\bar{y} \quad (3.38)$$

$$F_{mz} = -2p_a RL \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} \bar{p} \cos \theta d\theta d\bar{y} \quad (3.39)$$

Devido às não linearidades das forças de reação do mancal, a análise dinâmica do rotor exige a solução da equação de Reynolds a cada instante de tempo, demandando um grande esforço computacional. No entanto, para pequenas amplitudes de movimento do rotor em torno da sua posição de equilíbrio, as forças de reação do mancal podem ser linearizadas e representadas através de coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento (CUNHA, 2019).

### 3.5 Coeficientes dinâmicos do mancal

Nesta dissertação, os coeficientes dinâmicos do mancal a ar de filme espremido serão calculados utilizando o método da perturbação finita (QIU; TIEU, 1996) e o método da perturbação infinitesimal (LUND, 1987). No primeiro método, o eixo é perturbado por pequenos deslocamentos e velocidades em torno da sua posição de equilíbrio, de modo que os coeficientes são calculados pela diferenciação numérica das forças de reação do mancal em relação às perturbações aplicadas sobre o eixo. Já no segundo método, a solução da equação de Reynolds é perturbada e os coeficientes são determinados a partir da integração das pressões dinâmicas sobre a superfície do mancal.

#### 3.5.1 Método da perturbação finita

De acordo com Lund (1987), para uma determinada velocidade de rotação do eixo, as forças de reação do mancal dependem da posição e da velocidade instantânea do centro do eixo. Consequentemente, quando o eixo está sujeito a pequenas perturbações de deslocamento ( $\Delta e_x, \Delta e_z$ ) e de velocidade ( $\Delta \dot{e}_x, \Delta \dot{e}_z$ ) em torno da sua posição de equilíbrio ( $e_{x0}, e_{z0}$ ), as forças de reação do mancal podem ser expressas por uma expansão em série de Taylor de primeira ordem:

$$F_{mx} = F_{mx0} + \left. \frac{\partial F_{mx}}{\partial e_x} \right|_0 \Delta e_x + \left. \frac{\partial F_{mx}}{\partial e_z} \right|_0 \Delta e_z + \left. \frac{\partial F_{mx}}{\partial \dot{e}_x} \right|_0 \Delta \dot{e}_x + \left. \frac{\partial F_{mx}}{\partial \dot{e}_z} \right|_0 \Delta \dot{e}_z \quad (3.40)$$

$$F_{mz} = F_{mz0} + \left. \frac{\partial F_{mz}}{\partial e_x} \right|_0 \Delta e_x + \left. \frac{\partial F_{mz}}{\partial e_z} \right|_0 \Delta e_z + \left. \frac{\partial F_{mz}}{\partial \dot{e}_x} \right|_0 \Delta \dot{e}_x + \left. \frac{\partial F_{mz}}{\partial \dot{e}_z} \right|_0 \Delta \dot{e}_z \quad (3.41)$$

onde o subscrito 0 indica que as forças e as derivadas parciais são avaliadas na posição de equilíbrio.

Reescrevendo as Eqs. (3.40) e (3.41) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} F_{mx} \\ F_{mz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{mx0} \\ F_{mz0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_x \\ \Delta e_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{e}_x \\ \Delta \dot{e}_z \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

onde:

$$k_{xx} = - \left. \frac{\partial F_{mx}}{\partial e_x} \right|_0, \quad k_{xz} = - \left. \frac{\partial F_{mx}}{\partial e_z} \right|_0, \quad k_{zx} = - \left. \frac{\partial F_{mz}}{\partial e_x} \right|_0, \quad k_{zz} = - \left. \frac{\partial F_{mz}}{\partial e_z} \right|_0 \quad (3.43)$$

$$c_{xx} = - \left. \frac{\partial F_{mx}}{\partial \dot{e}_x} \right|_0, \quad c_{xz} = - \left. \frac{\partial F_{mx}}{\partial \dot{e}_z} \right|_0, \quad c_{zx} = - \left. \frac{\partial F_{mz}}{\partial \dot{e}_x} \right|_0, \quad c_{zz} = - \left. \frac{\partial F_{mz}}{\partial \dot{e}_z} \right|_0 \quad (3.44)$$

são, respectivamente, os coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal (o primeiro índice dos coeficientes representa a direção da força do mancal, enquanto o segundo índice representa a

direção da perturbação do eixo). Os termos  $k_{xx}$ ,  $k_{zz}$ ,  $c_{xx}$  e  $c_{zz}$  são conhecidos como coeficientes diretos e os termos  $k_{xz}$ ,  $k_{zx}$ ,  $c_{xz}$  e  $c_{zx}$  são conhecidos como coeficientes cruzados.

A partir da diferenciação numérica das Eqs. (3.43) e (3.44) utilizando o método das diferenças finitas centradas<sup>2</sup>, os coeficientes dinâmicos do mancal podem ser aproximados por:

$$k_{xx} \approx - \left[ \frac{F_{mx}(e_{x_0} + \Delta e_x, e_{z_0}, 0, 0) - F_{mx}(e_{x_0} - \Delta e_x, e_{z_0}, 0, 0)}{2\Delta e_x} \right] \quad (3.46a)$$

$$k_{xz} \approx - \left[ \frac{F_{mx}(e_{x_0}, e_{z_0} + \Delta e_z, 0, 0) - F_{mx}(e_{x_0}, e_{z_0} - \Delta e_z, 0, 0)}{2\Delta e_z} \right] \quad (3.46b)$$

$$k_{zx} \approx - \left[ \frac{F_{mz}(e_{x_0} + \Delta e_x, e_{z_0}, 0, 0) - F_{mz}(e_{x_0} - \Delta e_x, e_{z_0}, 0, 0)}{2\Delta e_x} \right] \quad (3.46c)$$

$$k_{zz} \approx - \left[ \frac{F_{mz}(e_{x_0}, e_{z_0} + \Delta e_z, 0, 0) - F_{mz}(e_{x_0}, e_{z_0} - \Delta e_z, 0, 0)}{2\Delta e_z} \right] \quad (3.46d)$$

$$c_{xx} \approx - \left[ \frac{F_{mx}(e_{x_0}, e_{z_0}, \Delta \dot{e}_x, 0) - F_{mx}(e_{x_0}, e_{z_0}, -\Delta \dot{e}_x, 0)}{2\Delta \dot{e}_x} \right] \quad (3.47a)$$

$$c_{xz} \approx - \left[ \frac{F_{mx}(e_{x_0}, e_{z_0}, 0, \Delta \dot{e}_z) - F_{mx}(e_{x_0}, e_{z_0}, 0, -\Delta \dot{e}_z)}{2\Delta \dot{e}_z} \right] \quad (3.47b)$$

$$c_{zx} \approx - \left[ \frac{F_{mz}(e_{x_0}, e_{z_0}, \Delta \dot{e}_x, 0) - F_{mz}(e_{x_0}, e_{z_0}, -\Delta \dot{e}_x, 0)}{2\Delta \dot{e}_x} \right] \quad (3.47c)$$

$$c_{zz} \approx - \left[ \frac{F_{mz}(e_{x_0}, e_{z_0}, 0, \Delta \dot{e}_z) - F_{mz}(e_{x_0}, e_{z_0}, 0, -\Delta \dot{e}_z)}{2\Delta \dot{e}_z} \right] \quad (3.47d)$$

Apesar da simplicidade de implementação do método da perturbação finita, a precisão dos resultados depende significativamente das amplitudes de perturbação do eixo. Amplitudes muito pequenas podem levar a imprecisões no cálculo, enquanto amplitudes muito grandes podem invalidar a análise linear (CHONG, 1985). Além disso, para calcular todos os coeficientes do mancal a equação de Reynolds precisa ser resolvida oito vezes (DU; LIANG, 2020). Por essas razões, o método da perturbação infinitesimal será também utilizado nesta dissertação para calcular os coeficientes dinâmicos do mancal a ar de filme espremido.

---

<sup>2</sup>  
 $\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (3.45)$

### 3.5.2 Método da perturbação infinitesimal

No método da perturbação infinitesimal, os coeficientes dinâmicos do mancal são determinados a partir da perturbação da solução da equação de Reynolds. Sendo pequenas as amplitudes de movimento do eixo em torno da sua posição de equilíbrio, a pressão e a espessura do filme de ar podem ser expandidas linearmente em série de Taylor, conforme mostram as equações a seguir:

$$p = p_0 + p_x \Delta e_x + p_z \Delta e_z + p_{\dot{x}} \Delta \dot{e}_x + p_{\dot{z}} \Delta \dot{e}_z \quad (3.48)$$

$$h = h_0 + h_x \Delta e_x + h_z \Delta e_z + h_{\dot{x}} \Delta \dot{e}_x + h_{\dot{z}} \Delta \dot{e}_z \quad (3.49)$$

onde:

$$p_x = \left. \frac{\partial p}{\partial e_x} \right|_0, \quad p_z = \left. \frac{\partial p}{\partial e_z} \right|_0, \quad p_{\dot{x}} = \left. \frac{\partial p}{\partial \dot{e}_x} \right|_0, \quad p_{\dot{z}} = \left. \frac{\partial p}{\partial \dot{e}_z} \right|_0 \quad (3.50)$$

$$h_x = \left. \frac{\partial h}{\partial e_x} \right|_0, \quad h_z = \left. \frac{\partial h}{\partial e_z} \right|_0, \quad h_{\dot{x}} = \left. \frac{\partial h}{\partial \dot{e}_x} \right|_0, \quad h_{\dot{z}} = \left. \frac{\partial h}{\partial \dot{e}_z} \right|_0 \quad (3.51)$$

A partir da Eq. (3.1), as derivadas parciais da espessura do filme de ar são dadas por:

$$h_x = -\sin \theta, \quad h_z = -\cos \theta, \quad h_{\dot{x}} = 0, \quad h_{\dot{z}} = 0 \quad (3.52)$$

Adimensionalizando as Eqs. (3.48) e (3.49), têm-se:

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \bar{p}_x \Delta \varepsilon_x + \bar{p}_z \Delta \varepsilon_z + \bar{p}_{x'} \Delta \varepsilon'_x + \bar{p}_{z'} \Delta \varepsilon'_z \quad (3.53)$$

$$\bar{h} = \bar{h}_0 + \bar{h}_x \Delta \varepsilon_x + \bar{h}_z \Delta \varepsilon_z + \bar{h}_{x'} \Delta \varepsilon'_x + \bar{h}_{z'} \Delta \varepsilon'_z \quad (3.54)$$

onde:

$$\Delta \varepsilon_x = \frac{\Delta e_x}{c}, \quad \Delta \varepsilon_z = \frac{\Delta e_z}{c}, \quad \Delta \varepsilon'_x = \frac{\Delta \dot{e}_x}{c\omega_e}, \quad \Delta \varepsilon'_z = \frac{\Delta \dot{e}_z}{c\omega_e} \quad (3.55)$$

$$\bar{p}_x = \frac{cp_x}{pa}, \quad \bar{p}_z = \frac{cp_z}{pa}, \quad \bar{p}_{x'} = \frac{c\omega_e p_{\dot{x}}}{pa}, \quad \bar{p}_{z'} = \frac{c\omega_e p_{\dot{z}}}{pa} \quad (3.56)$$

$$\bar{h}_x = h_x, \quad \bar{h}_z = h_z, \quad \bar{h}_{x'} = \omega_e h_{\dot{x}}, \quad \bar{h}_{z'} = \omega_e h_{\dot{z}} \quad (3.57)$$

Considerando que as perturbações são harmônicas, o movimento do eixo em torno da sua posição de equilíbrio pode ser descrito na forma adimensional por:

$$\Delta \varepsilon_x = \Delta \varepsilon_x^* e^{i\gamma\tau}, \quad \Delta \varepsilon_z = \Delta \varepsilon_z^* e^{i\gamma\tau} \quad (3.58)$$

onde  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\Delta\varepsilon_x^*$  e  $\Delta\varepsilon_z^*$  são as amplitudes das perturbações do eixo nas direções  $x$  e  $z$ , respectivamente, e  $\gamma = \omega_p/\omega_e$  é a relação entre as frequências de perturbação do eixo e de excitação do mancal.

Derivando a Eq. (3.58) em relação ao tempo adimensional, obtêm-se:

$$\Delta\varepsilon'_x = i\gamma\Delta\varepsilon_x, \quad \Delta\varepsilon'_z = i\gamma\Delta\varepsilon_z \quad (3.59)$$

$$\Delta\varepsilon''_x = -\gamma^2\Delta\varepsilon_x, \quad \Delta\varepsilon''_z = -\gamma^2\Delta\varepsilon_z \quad (3.60)$$

Substituindo as Eqs. (3.53) e (3.54) na Eq. (3.32), considerando apenas os termos de ordem zero e de primeira ordem e agrupando os termos de mesma ordem, chega-se em (PENG; CARPINO, 1993):

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \left( \bar{h}_0^{-3} \frac{\partial \bar{p}_0^2}{\partial\theta} \right) + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial\bar{y}} \left( \bar{h}_0^{-3} \frac{\partial \bar{p}_0^2}{\partial\bar{y}} \right) = 2\Lambda \frac{\partial (\bar{p}_0 \bar{h}_0)}{\partial\theta} + 2\sigma \frac{\partial (\bar{p}_0 \bar{h}_0)}{\partial\tau} \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \left[ \bar{h}_0^{-3} \frac{\partial (\bar{p}_0 \bar{p}_\xi)}{\partial\theta} + \frac{3}{2} \bar{h}_0^{-2} \bar{h}_\xi \frac{\partial \bar{p}_0^2}{\partial\theta} \right] + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial\bar{y}} \left[ \bar{h}_0^{-3} \frac{\partial (\bar{p}_0 \bar{p}_\xi)}{\partial\bar{y}} + \frac{3}{2} \bar{h}_0^{-2} \bar{h}_\xi \frac{\partial \bar{p}_0^2}{\partial\bar{y}} \right] = \quad (3.62)$$

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial\theta} (\bar{p}_\xi \bar{h}_0 + \bar{p}_0 \bar{h}_\xi) + \sigma \left[ \frac{\partial}{\partial\tau} (\bar{p}_\xi \bar{h}_0 + \bar{p}_0 \bar{h}_\xi) - \gamma^2 \bar{p}_{\xi'} \bar{h}_0 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \left[ \bar{h}_0^{-3} \frac{\partial (\bar{p}_0 \bar{p}_{\xi'})}{\partial\theta} \right] + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial\bar{y}} \left[ \bar{h}_0^{-3} \frac{\partial (\bar{p}_0 \bar{p}_{\xi'})}{\partial\bar{y}} \right] = \Lambda \frac{\partial (\bar{p}_{\xi'} \bar{h}_0)}{\partial\theta} + \sigma \left[ \frac{\partial (\bar{p}_{\xi'} \bar{h}_0)}{\partial\tau} + \bar{p}_{\xi'} \bar{h}_0 \right. \quad (3.63)$$

$$\left. + \bar{p}_0 \bar{h}_\xi \right]$$

onde  $\xi = x, z$ .

De posse da pressão e da espessura do filme de ar na condição de equilíbrio, as pressões dinâmicas podem ser calculadas a partir da resolução simultânea das Eqs. (3.62) e (3.63), considerando as seguintes condições inicial e de contorno:

$$\bar{p}_\xi|_{\tau=0} = \bar{p}_{\xi'}|_{\tau=0} = 0 \quad (3.64)$$

$$\bar{p}_\xi|_{\bar{y}=0} = \bar{p}_{\xi'}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial \bar{p}_\xi}{\partial\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=1/2} = \frac{\partial \bar{p}_{\xi'}}{\partial\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=1/2} = 0 \quad (3.66)$$

$$\bar{p}_\xi|_{\theta=0} = \bar{p}_\xi|_{\theta=2\pi}, \quad \bar{p}_{\xi'}|_{\theta=0} = \bar{p}_{\xi'}|_{\theta=2\pi} \quad (3.67)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{p}_\xi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial \bar{p}_\xi}{\partial \theta} \right|_{\theta=2\pi}, \quad \left. \frac{\partial \bar{p}_{\xi'}}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial \bar{p}_{\xi'}}{\partial \theta} \right|_{\theta=2\pi} \quad (3.68)$$

onde  $\xi = x, z$ .

Assim, os coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal são determinados, respectivamente, por (PENG; CARPINO, 1993):

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} = \frac{2p_a RL}{c} \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \bar{p}_x \sin \theta & \bar{p}_z \sin \theta \\ \bar{p}_x \cos \theta & \bar{p}_z \cos \theta \end{bmatrix} d\theta d\bar{y} \quad (3.69)$$

$$\begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} = \frac{2p_a RL}{c\omega_e} \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \bar{p}_{x'} \sin \theta & \bar{p}_{z'} \sin \theta \\ \bar{p}_{x'} \cos \theta & \bar{p}_{z'} \cos \theta \end{bmatrix} d\theta d\bar{y} \quad (3.70)$$

# CAPÍTULO IV

## METODOLOGIA

Neste capítulo é apresentado o procedimento numérico para a resolução da equação do movimento do rotor utilizando o método de integração de Newmark em conjunto com o método iterativo de Newton-Raphson. Além disso, este capítulo também apresenta a metodologia para a resolução numérica da equação de Reynolds e das equações perturbadas de Reynolds a partir da aplicação do método das diferenças finitas e do método iterativo de Gauss-Seidel, respectivamente.

### 4.1 Resolução numérica da equação do movimento do rotor

De acordo com Rocha (1992), existem duas abordagens para a determinação da resposta dinâmica de um sistema rotativo submetido a excitações externas arbitrárias: a superposição modal, que consiste na representação da resposta do sistema como uma combinação linear dos seus modos naturais de vibração; e a integração direta, que consiste na resolução numérica da equação do movimento do sistema passo-a-passo. Os métodos de integração direta podem ser classificados em dois grupos (WRIGGERS, 2008):

- Métodos explícitos: São de fácil implementação, pois a solução no instante de tempo  $t_{n+1}$  depende apenas dos valores conhecidos no instante de tempo  $t_n$ . Estes métodos são eficientes quando a matriz de massa é obtida de forma diagonal, desacoplando a solução do sistema de equações. No entanto, os métodos explícitos geralmente precisam de passos de tempo muito pequenos para evitar problemas de instabilidade numérica;
- Métodos implícitos: A solução depende dos valores conhecidos no instante de tempo  $t_n$  e também dos valores não conhecidos no instante de tempo  $t_{n+1}$ . Dessa forma, os métodos implícitos requerem a solução de um sistema de equações algébricas não lineares a cada passo de tempo. A vantagem destes métodos é que eles geralmente são incondicionalmente estáveis para qualquer passo de tempo.

Nesta dissertação, a equação do movimento do rotor, dada pela Eq. (2.70), será resolvida utilizando o método implícito de Newmark, que é baseado nas seguintes aproximações para as velocidades e os deslocamentos no instante de tempo  $t_{n+1}$  (WRIGGERS, 2008):

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + [(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}] \Delta t \quad (4.1)$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \dot{\mathbf{q}}_n \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{q}}_n + \beta \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \right] \Delta t^2 \quad (4.2)$$

onde  $\gamma$  e  $\beta$  são parâmetros que determinam a precisão e a estabilidade do método. Quando  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ , as Eqs. (4.1) e (4.2) correspondem ao método da aceleração média constante, que também é conhecido como regra trapezoidal (LA ROVERE, 1983).

Discretizando a Eq. (2.70) e representando-a no instante de tempo  $t_{n+1}$ , tem-se (CAVALINI JR et al., 2015):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + (\mathbf{C} + \Omega_{n+1}\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + (\mathbf{K}_1 + \dot{\Omega}_{n+1}\mathbf{K}_2)\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{W} + (\mathbf{F}_u)_{n+1} + (\mathbf{F}_m)_{n+1} \quad (4.3)$$

Alternativamente, a Eq. (4.3) pode ser escrita na forma residual como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}) &= \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + (\mathbf{C} + \Omega_{n+1}\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + (\mathbf{K}_1 + \dot{\Omega}_{n+1}\mathbf{K}_2)\mathbf{q}_{n+1} \\ &\quad - \mathbf{W} - (\mathbf{F}_u)_{n+1} - (\mathbf{F}_m)_{n+1} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{R}$  é o vetor de forças residuais, que deve ser nulo quando a solução exata da Eq. (4.3) for encontrada.

Devido às características não lineares das forças de reação do mancal a ar de filme espremido, a Eq. (4.4) pode ser resolvida utilizando o método iterativo de Newton-Raphson, que tem como objetivo encontrar uma solução aproximada para esta equação, de tal forma que, ao final do processo iterativo, o vetor de forças residuais seja suficientemente próximo de zero, satisfazendo o critério de convergência pré-estabelecido (PANTOJA ROSERO, 2018).

Expandindo o vetor de forças residuais em série de Taylor e considerando apenas os termos de primeira ordem, chega-se em (CAVALINI JR et al., 2015):

$$\mathbf{R}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{R}_{n+1}^k + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \right|_{n+1}^k (\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{k+1} - \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^k) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

onde o sobrescrito  $k$  representa a iteração atual.

A Eq. (4.5) também pode ser escrita como:

$$\mathbf{R}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{R}_{n+1}^k + \mathbf{T}_{n+1}^k \Delta \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^k = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz de inércia tangente e  $\Delta\ddot{\mathbf{q}}$  é o vetor de correção das acelerações.

Derivando a Eq. (4.4) em relação as acelerações, obtém-se (CAVALINI JR et al., 2015):

$$\mathbf{T}_{n+1}^k = \mathbf{M} + \left( \mathbf{C} + \Omega_{n+1} \mathbf{G} - \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \Big|_{n+1}^k \right) \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \Big|_{n+1}^k + \left( \mathbf{K}_1 + \dot{\Omega}_{n+1} \mathbf{K}_2 - \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{n+1}^k \right) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \Big|_{n+1}^k \quad (4.7)$$

sendo:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \Big|_{n+1}^k = \gamma \Delta t \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \Big|_{n+1}^k = \beta \Delta t^2 \quad (4.9)$$

A partir da Eq. (4.6), o vetor de correção das acelerações é calculado por:

$$\Delta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^k = - [\mathbf{T}_{n+1}^k]^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^k \quad (4.10)$$

Assim, ao final de cada iteração as acelerações são atualizadas da seguinte forma:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{k+1} = \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^k + \Delta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^k \quad (4.11)$$

Analogamente, as velocidades e os deslocamentos para as próximas iterações são calculados, respectivamente, por:

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{k+1} = \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^k + \Delta\dot{\mathbf{q}}_{n+1}^k \quad (4.12)$$

$$\mathbf{q}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{q}_{n+1}^k + \Delta\mathbf{q}_{n+1}^k \quad (4.13)$$

onde:

$$\Delta\dot{\mathbf{q}}_{n+1}^k = \gamma \Delta t \Delta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^k \quad (4.14)$$

$$\Delta\mathbf{q}_{n+1}^k = \beta \Delta t^2 \Delta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^k \quad (4.15)$$

A convergência da solução é verificada a cada iteração a partir do cálculo da norma do vetor de forças residuais, conforme mostra a Eq. (4.16), onde  $\varepsilon$  é a tolerância especificada (neste trabalho, a tolerância foi considerada igual a  $1 \times 10^{-6}$ ). Caso o critério de convergência seja satisfeito, a condição de equilíbrio dinâmico do rotor no passo de tempo atual é obtida e o processo de integração avança para o próximo passo de tempo. Caso contrário, o processo iterativo continua até que haja

a convergência da solução.

$$\|\mathbf{R}_{n+1}^{k+1}\| < \varepsilon \quad (4.16)$$

## 4.2 Resolução numérica da equação de Reynolds

A princípio, as equações diferenciais parciais podem ser resolvidas utilizando métodos analíticos ou métodos numéricos. No entanto, para problemas com geometrias arbitrárias e condições de contorno complexas, os métodos analíticos podem não ser aplicáveis, sendo necessária a utilização de métodos numéricos para a obtenção das soluções dessas equações (NEVES, 1998).

Dentre os vários métodos numéricos existentes na literatura, o método das diferenças finitas é bastante utilizado para a resolução de equações diferenciais parciais (ROLNIK, 1998). A ideia básica deste método consiste em transformar uma equação diferencial em um sistema de equações algébricas por meio da discretização do domínio e da substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações de diferenças finitas, que são obtidas através da expansão em série de Taylor (FORTUNA, 2000). Nesta dissertação, a equação de Reynolds será discretizada utilizando o método das diferenças finitas com formulação implícita.

A Fig. 4.1 apresenta a representação da malha de discretização do domínio adimensional da equação de Reynolds. O domínio é discretizado por uma malha com  $(M + 1) \times (N + 1)$  pontos nas direções circunferencial e axial, respectivamente, onde os índices  $(i, j)$  representam a posição de cada ponto na malha.

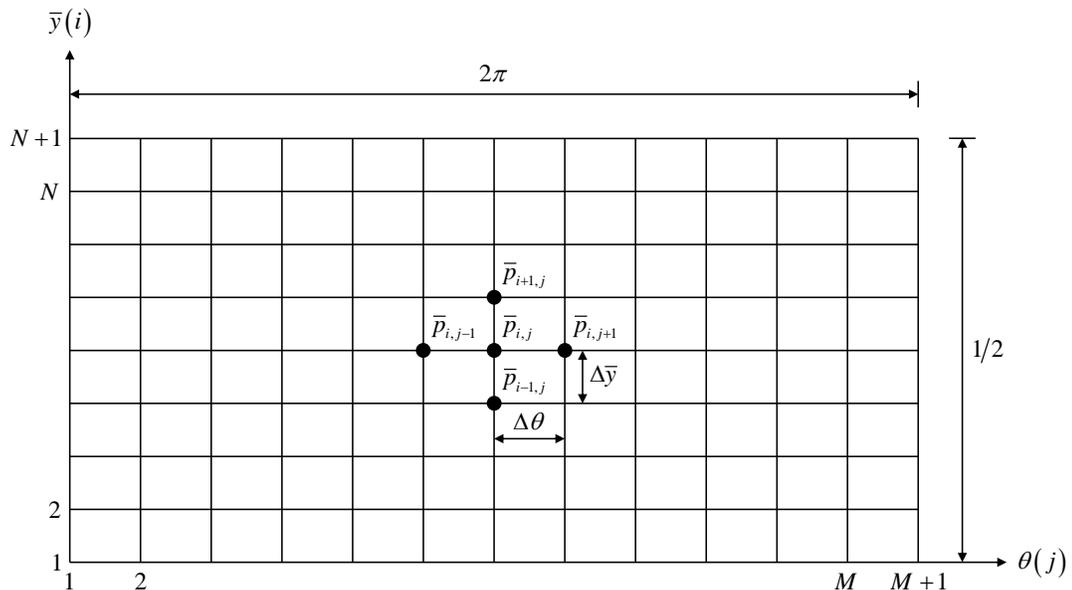


Figura 4.1 – Malha de discretização do domínio adimensional da equação de Reynolds.

Antes das derivadas serem aproximadas por diferenças finitas, a Eq. (3.32) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \bar{h}^{-3} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \theta} \right) + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \bar{h}^{-3} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{y}} \right) = 2\Lambda \frac{\partial (\bar{p}\bar{h})}{\partial \theta} + 2\sigma \frac{\partial (\bar{p}\bar{h})}{\partial \tau} \quad (4.17)$$

onde:

$$\bar{q} = \bar{p}^2 \quad (4.18)$$

Desenvolvendo os termos da Eq. (4.17), chega-se em:

$$\bar{h}^{-3} \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial \theta^2} + 3\bar{h}^{-2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \theta} + \lambda^2 \bar{h}^{-3} \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial \bar{y}^2} = 2\Lambda \left( \bar{p} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \bar{h} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + 2\sigma \left( \bar{p} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau} + \bar{h} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} \right) \quad (4.19)$$

Derivando a Eq. (4.18) e fazendo algumas manipulações, obtêm-se as seguintes relações:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} = \frac{1}{2\bar{p}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \theta} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} = \frac{1}{2\bar{p}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \tau} \quad (4.21)$$

A substituição das Eqs. (4.20) e (4.21) na Eq. (4.19) resulta em:

$$\bar{h}^{-3} \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial \theta^2} + 3\bar{h}^{-2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \theta} + \lambda^2 \bar{h}^{-3} \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{2\Lambda}{\bar{p}} \left( \bar{q} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{\bar{h}}{2} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \theta} \right) + \frac{2\sigma}{\bar{p}} \left( \bar{q} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau} + \frac{\bar{h}}{2} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \tau} \right) \quad (4.22)$$

Aproximando as derivadas espaciais da pressão na Eq. (4.22) por diferenças finitas centrais de segunda ordem, obtêm-se (FORTUNA, 2000):

$$\left. \frac{\partial \bar{q}}{\partial \theta} \right|_{i,j}^{n+1} \approx \frac{\bar{q}_{i,j+1}^{n+1} - \bar{q}_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\theta} \quad (4.23)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial \theta^2} \right|_{i,j}^{n+1} \approx \frac{\bar{q}_{i,j+1}^{n+1} - 2\bar{q}_{i,j}^{n+1} + \bar{q}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta\theta^2} \quad (4.24)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial \bar{y}^2} \right|_{i,j}^{n+1} \approx \frac{\bar{q}_{i+1,j}^{n+1} - 2\bar{q}_{i,j}^{n+1} + \bar{q}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta\bar{y}^2} \quad (4.25)$$

onde  $\Delta\theta$  e  $\Delta\bar{y}$  são os espaçamentos da malha nas direções circunferencial e axial, respectivamente.

A derivada temporal da pressão na Eq. (4.22) pode ser aproximada por diferenças finitas

regressivas de primeira ordem (FORTUNA, 2000):

$$\left. \frac{\partial \bar{q}}{\partial \tau} \right|_{i,j}^{n+1} \approx \frac{\bar{q}_{i,j}^{n+1} - \bar{q}_{i,j}^n}{\Delta \tau} \quad (4.26)$$

sendo  $\Delta \tau$  o incremento adimensional de tempo.

Então, substituindo as Eqs. (4.23) a (4.26) na Eq. (4.22), obtém-se a equação discretizada de Reynolds:

$$\begin{aligned} & \left( \bar{h}_j^{n+1} \right)^3 \left( \frac{\bar{q}_{i,j+1}^{n+1} - 2\bar{q}_{i,j}^{n+1} + \bar{q}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \theta^2} \right) + 3 \left( \bar{h}_j^{n+1} \right)^2 \left. \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \right|_j^{n+1} \left( \frac{\bar{q}_{i,j+1}^{n+1} - \bar{q}_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta \theta} \right) \\ & + \lambda^2 \left( \bar{h}_j^{n+1} \right)^3 \left( \frac{\bar{q}_{i+1,j}^{n+1} - 2\bar{q}_{i,j}^{n+1} + \bar{q}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \bar{y}^2} \right) = \frac{2\Lambda^{n+1}}{\bar{p}_{i,j}^{n+1}} \left[ \bar{q}_{i,j}^{n+1} \left. \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \right|_j^{n+1} + \frac{\bar{h}_j^{n+1}}{2} \left( \frac{\bar{q}_{i,j+1}^{n+1} - \bar{q}_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta \theta} \right) \right] \\ & + \frac{2\sigma}{\bar{p}_{i,j}^{n+1}} \left[ \bar{q}_{i,j}^{n+1} \left. \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau} \right|_j^{n+1} + \frac{\bar{h}_j^{n+1}}{2} \left( \frac{\bar{q}_{i,j}^{n+1} - \bar{q}_{i,j}^n}{\Delta \tau} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde:

$$\left. \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \right|_j^{n+1} = \frac{1}{c} \left. \frac{\partial h}{\partial \theta} \right|_j^{n+1} \quad (4.28a)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial \theta} \right|_j^{n+1} = -e_x^{n+1} \cos \theta_j + e_z^{n+1} \sin \theta_j + \left. \frac{d\delta_s}{d\theta} \right|_j + \left. \frac{\partial \delta_d}{\partial \theta} \right|_j^{n+1} \quad (4.28b)$$

$$\left. \frac{d\delta_s}{d\theta} \right|_j = \begin{cases} 3e_{w_0} \cos(3\theta_j) \left[ 1 + 0,07986 \frac{|\sin(3\theta_j)|}{\sin(3\theta_j)} \right], & \text{para } \sin(3\theta_j) \neq 0 \\ 3e_{w_0} \cos(3\theta_j), & \text{para } \sin(3\theta_j) = 0 \end{cases} \quad (4.28c)$$

$$\left. \frac{\partial \delta_d}{\partial \theta} \right|_j^{n+1} = \left. \frac{dA}{d\theta} \right|_j \sin(\omega_e t_{n+1}) \quad (4.28d)$$

$$\left. \frac{dA}{d\theta} \right|_j = \begin{cases} 3e_w \sin(3\theta_j) \left[ 0,783 - 0,2174 \frac{|\cos(3\theta_j)|}{\cos(3\theta_j)} \right], & \text{para } \cos(3\theta_j) \neq 0 \\ 2,349e_w \sin(3\theta_j), & \text{para } \cos(3\theta_j) = 0 \end{cases} \quad (4.28e)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau} \right|_j^{n+1} = \frac{1}{c\omega_e} \left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_j^{n+1} \quad (4.29a)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_j^{n+1} = -\dot{e}_x^{n+1} \text{sen } \theta_j - \dot{e}_z^{n+1} \cos \theta_j + \left. \frac{\partial \delta_d}{\partial t} \right|_j^{n+1} \quad (4.29b)$$

$$\left. \frac{\partial \delta_d}{\partial t} \right|_j^{n+1} = \omega_e A_j \cos(\omega_e t_{n+1}) \quad (4.29c)$$

$$A_j = -0,783e_w \cos(3\theta_j) + |0,2174e_w \cos(3\theta_j)| \quad (4.29d)$$

Alternativamente, a Eq. (4.27) pode ser escrita na forma compacta como:

$$a_{i,j}^{n+1} \bar{q}_{i,j+1}^{n+1} + b_{i,j}^{n+1} \bar{q}_{i,j-1}^{n+1} + c_j^{n+1} (\bar{q}_{i+1,j}^{n+1} + \bar{q}_{i-1,j}^{n+1}) + d_{i,j}^{n+1} \bar{q}_{i,j}^{n+1} = e_{i,j}^{n+1} \quad (4.30)$$

sendo:

$$a_{i,j}^{n+1} = \frac{(\bar{h}_j^{n+1})^3}{\Delta\theta^2} + \frac{3(\bar{h}_j^{n+1})^2}{2\Delta\theta} \left. \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \right|_j^{n+1} - \frac{\Lambda^{n+1} \bar{h}_j^{n+1}}{2\Delta\theta \bar{p}_{i,j}^{n+1}} \quad (4.31a)$$

$$b_{i,j}^{n+1} = \frac{(\bar{h}_j^{n+1})^3}{\Delta\theta^2} - \frac{3(\bar{h}_j^{n+1})^2}{2\Delta\theta} \left. \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \right|_j^{n+1} + \frac{\Lambda^{n+1} \bar{h}_j^{n+1}}{2\Delta\theta \bar{p}_{i,j}^{n+1}} \quad (4.31b)$$

$$c_j^{n+1} = \frac{\lambda^2 (\bar{h}_j^{n+1})^3}{\Delta\bar{y}^2} \quad (4.31c)$$

$$d_{i,j}^{n+1} = -2(\bar{h}_j^{n+1})^3 \left( \frac{1}{\Delta\theta^2} + \frac{\lambda^2}{\Delta\bar{y}^2} \right) - \frac{2\Lambda^{n+1}}{\bar{p}_{i,j}^{n+1}} \left. \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \right|_j^{n+1} - \frac{2\sigma}{\bar{p}_{i,j}^{n+1}} \left( \left. \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau} \right|_j^{n+1} + \frac{\bar{h}_j^{n+1}}{2\Delta\tau} \right) \quad (4.31d)$$

$$e_{i,j}^{n+1} = -\frac{\sigma \bar{h}_j^{n+1} \bar{q}_{i,j}^n}{\Delta\tau \bar{p}_{i,j}^{n+1}} \quad (4.31e)$$

Isolando o termo  $\bar{q}_{i,j}^{n+1}$  na Eq. (4.30) e utilizando a Eq. (4.18), tem-se:

$$\bar{p}_{i,j}^{n+1} = \left[ \frac{e_{i,j}^{n+1} - a_{i,j}^{n+1} \bar{q}_{i,j+1}^{n+1} - b_{i,j}^{n+1} \bar{q}_{i,j-1}^{n+1} - c_j^{n+1} (\bar{q}_{i+1,j}^{n+1} + \bar{q}_{i-1,j}^{n+1})}{d_{i,j}^{n+1}} \right]^{1/2} \quad (4.32)$$

onde  $2 \leq i \leq N$  e  $2 \leq j \leq M$ .

Para os pontos localizados nas fronteiras da malha, a pressão é determinada pela aplicação das condições de contorno dadas pelas Eqs. (3.34) a (3.37), que são representadas na forma discreta

por:

$$\bar{p}_{1,j}^{n+1} = 1 \quad (4.33)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right|_{N+1,j}^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_{N+2,j}^{n+1} = \bar{p}_{N,j}^{n+1} \quad (4.34)$$

$$\bar{p}_{i,1}^{n+1} = \bar{p}_{i,M+1}^{n+1} \quad (4.35)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right|_{i,1}^{n+1} = \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right|_{i,M+1}^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_{i,0}^{n+1} = \bar{p}_{i,M}^{n+1} \quad (4.36)$$

onde  $1 \leq i \leq N + 1$  e  $1 \leq j \leq M + 1$ .

A partir da condição inicial dada pela Eq. (3.33), a Eq. (4.32) pode ser resolvida a cada passo de tempo utilizando o método iterativo de Gauss-Seidel. Ao final de cada iteração, a convergência da solução é verificada pela seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{M+1} \left| \left( \bar{p}_{i,j}^{n+1} \right)^{k+1} - \left( \bar{p}_{i,j}^{n+1} \right)^k \right| < \varepsilon \quad (4.37)$$

Depois que o campo de pressão é calculado, as forças de reação do mancal a ar de filme espremido são determinadas pela integração numérica das Eqs. (3.38) e (3.39) utilizando a regra dos trapézios.

### 4.3 Resolução numérica das equações perturbadas de Reynolds

Assim como a equação de Reynolds, as equações perturbadas de Reynolds também podem ser discretizadas utilizando o método das diferenças finitas com formulação implícita. Dessa forma, desenvolvendo os termos das Eqs. (3.62) e (3.63), obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \bar{h}_0^{-3} \left( \bar{p}_0 \frac{\partial^2 \bar{p}_\xi}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{p}_\xi}{\partial \theta} + \bar{p}_\xi \frac{\partial^2 \bar{p}_0}{\partial \theta^2} \right) + 3 \bar{h}_0^{-2} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} \left( \bar{p}_0 \frac{\partial \bar{p}_\xi}{\partial \theta} + \bar{p}_\xi \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{3}{2} \bar{h}_0^{-2} \bar{h}_\xi \frac{\partial^2 \bar{q}_0}{\partial \theta^2} + 3 \bar{h}_0 \bar{h}_\xi \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{q}_0}{\partial \theta} + \frac{3}{2} \bar{h}_0^{-2} \frac{d \bar{h}_\xi}{d \theta} \frac{\partial \bar{q}_0}{\partial \theta} + \lambda^2 \left[ \bar{h}_0^{-3} \left( \bar{p}_0 \frac{\partial^2 \bar{p}_\xi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial y} \frac{\partial \bar{p}_\xi}{\partial y} \right. \right. \\ & \left. \left. + \bar{p}_\xi \frac{\partial^2 \bar{p}_0}{\partial y^2} \right) + \frac{3}{2} \bar{h}_0^{-2} \bar{h}_\xi \frac{\partial^2 \bar{q}_0}{\partial y^2} \right] = \Lambda \left( \bar{p}_\xi \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} + \bar{h}_0 \frac{\partial \bar{p}_\xi}{\partial \theta} + \bar{p}_0 \frac{d \bar{h}_\xi}{d \theta} + \bar{h}_\xi \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} \right) \\ & + \sigma \left( \bar{p}_\xi \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \tau} + \bar{h}_0 \frac{\partial \bar{p}_\xi}{\partial \tau} + \bar{h}_\xi \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tau} - \gamma^2 \bar{p}_\xi \bar{h}_0 \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}
& \bar{h}_0^{-3} \left( \bar{p}_0 \frac{\partial^2 \bar{p}_{\xi'}}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{p}_{\xi'}}{\partial \theta} + \bar{p}_{\xi'} \frac{\partial^2 \bar{p}_0}{\partial \theta^2} \right) + 3 \bar{h}_0^{-2} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} \left( \bar{p}_0 \frac{\partial \bar{p}_{\xi'}}{\partial \theta} + \bar{p}_{\xi'} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} \right) \\
& + \lambda^2 \bar{h}_0^{-3} \left( \bar{p}_0 \frac{\partial^2 \bar{p}_{\xi'}}{\partial \bar{y}^2} + 2 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{p}_{\xi'}}{\partial \bar{y}} + \bar{p}_{\xi'} \frac{\partial^2 \bar{p}_0}{\partial \bar{y}^2} \right) = \Lambda \left( \bar{p}_{\xi'} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} + \bar{h}_0 \frac{\partial \bar{p}_{\xi'}}{\partial \theta} \right) \\
& + \sigma \left( \bar{p}_{\xi'} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \tau} + \bar{h}_0 \frac{\partial \bar{p}_{\xi'}}{\partial \tau} + \bar{p}_{\xi'} \bar{h}_0 + \bar{p}_0 \bar{h}_{\xi} \right)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

onde  $\bar{q}_0 = \bar{p}_0^2$  e  $\xi = x, z$ .

Discretizando as Eqs. (4.38) e (4.39) e substituindo as derivadas por aproximações de diferenças finitas, chega-se em:

$$\begin{aligned}
& \left( \bar{h}_{0_j}^{n+1} \right)^3 \left[ \bar{p}_{0_{i,j}}^{n+1} \left( \frac{\bar{p}_{\xi_{i,j+1}}^{n+1} - 2\bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1} + \bar{p}_{\xi_{i,j-1}}^{n+1}}{\Delta \theta^2} \right) + 2 \left( \frac{\bar{p}_{0_{i,j+1}}^{n+1} - \bar{p}_{0_{i,j-1}}^{n+1}}{2\Delta \theta} \right) \left( \frac{\bar{p}_{\xi_{i,j+1}}^{n+1} - \bar{p}_{\xi_{i,j-1}}^{n+1}}{2\Delta \theta} \right) \right. \\
& \left. + \bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1} \left( \frac{\bar{p}_{0_{i,j+1}}^{n+1} - 2\bar{p}_{0_{i,j}}^{n+1} + \bar{p}_{0_{i,j-1}}^{n+1}}{\Delta \theta^2} \right) \right] + 3 \left( \bar{h}_{0_j}^{n+1} \right)^2 \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} \Big|_j^{n+1} \left[ \bar{p}_{0_{i,j}}^{n+1} \left( \frac{\bar{p}_{\xi_{i,j+1}}^{n+1} - \bar{p}_{\xi_{i,j-1}}^{n+1}}{2\Delta \theta} \right) \right. \\
& \left. + \bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1} \left( \frac{\bar{p}_{0_{i,j+1}}^{n+1} - \bar{p}_{0_{i,j-1}}^{n+1}}{2\Delta \theta} \right) \right] + \frac{3}{2} \left( \bar{h}_{0_j}^{n+1} \right)^2 \bar{h}_{\xi_j} \left( \frac{\bar{q}_{0_{i,j+1}}^{n+1} - 2\bar{q}_{0_{i,j}}^{n+1} + \bar{q}_{0_{i,j-1}}^{n+1}}{\Delta \theta^2} \right) \\
& + 3 \bar{h}_{0_j}^{n+1} \bar{h}_{\xi_j} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} \Big|_j^{n+1} \left( \frac{\bar{q}_{0_{i,j+1}}^{n+1} - \bar{q}_{0_{i,j-1}}^{n+1}}{2\Delta \theta} \right) + \frac{3}{2} \left( \bar{h}_{0_j}^{n+1} \right)^2 \frac{d\bar{h}_{\xi}}{d\theta} \Big|_j \left( \frac{\bar{q}_{0_{i,j+1}}^{n+1} - \bar{q}_{0_{i,j-1}}^{n+1}}{2\Delta \theta} \right) \\
& + \lambda^2 \left\{ \left( \bar{h}_{0_j}^{n+1} \right)^3 \left[ \bar{p}_{0_{i,j}}^{n+1} \left( \frac{\bar{p}_{\xi_{i+1,j}}^{n+1} - 2\bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1} + \bar{p}_{\xi_{i-1,j}}^{n+1}}{\Delta \bar{y}^2} \right) + 2 \left( \frac{\bar{p}_{0_{i+1,j}}^{n+1} - \bar{p}_{0_{i-1,j}}^{n+1}}{2\Delta \bar{y}} \right) \left( \frac{\bar{p}_{\xi_{i+1,j}}^{n+1} - \bar{p}_{\xi_{i-1,j}}^{n+1}}{2\Delta \bar{y}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1} \left( \frac{\bar{p}_{0_{i+1,j}}^{n+1} - 2\bar{p}_{0_{i,j}}^{n+1} + \bar{p}_{0_{i-1,j}}^{n+1}}{\Delta \bar{y}^2} \right) \right] + \frac{3}{2} \left( \bar{h}_{0_j}^{n+1} \right)^2 \bar{h}_{\xi_j} \left( \frac{\bar{q}_{0_{i+1,j}}^{n+1} - 2\bar{q}_{0_{i,j}}^{n+1} + \bar{q}_{0_{i-1,j}}^{n+1}}{\Delta \bar{y}^2} \right) \right\} = \\
& \Lambda \left[ \bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} \Big|_j^{n+1} + \bar{h}_{0_j}^{n+1} \left( \frac{\bar{p}_{\xi_{i,j+1}}^{n+1} - \bar{p}_{\xi_{i,j-1}}^{n+1}}{2\Delta \theta} \right) + \bar{p}_{0_{i,j}}^{n+1} \frac{d\bar{h}_{\xi}}{d\theta} \Big|_j + \bar{h}_{\xi_j} \left( \frac{\bar{p}_{0_{i,j+1}}^{n+1} - \bar{p}_{0_{i,j-1}}^{n+1}}{2\Delta \theta} \right) \right] \\
& + \sigma \left[ \bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \tau} \Big|_j^{n+1} + \bar{h}_{0_j}^{n+1} \left( \frac{\bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1} - \bar{p}_{\xi_{i,j}}^n}{\Delta \tau} \right) + \bar{h}_{\xi_j} \left( \frac{\bar{p}_{0_{i,j}}^{n+1} - \bar{p}_{0_{i,j}}^n}{\Delta \tau} \right) - \gamma^2 \bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1} \bar{h}_{0_j}^{n+1} \right]
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\bar{h}_{0j}^{n+1}\right)^3 \left[ \frac{\bar{p}_{0i,j}^{n+1}}{\Delta\theta^2} \left( \frac{\bar{p}_{\xi'_{i,j+1}}^{n+1} - 2\bar{p}_{\xi'_{i,j}}^{n+1} + \bar{p}_{\xi'_{i,j-1}}^{n+1}}{\Delta\theta^2} \right) + 2 \left( \frac{\bar{p}_{0i,j+1}^{n+1} - \bar{p}_{0i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\theta} \right) \left( \frac{\bar{p}_{\xi'_{i,j+1}}^{n+1} - \bar{p}_{\xi'_{i,j-1}}^{n+1}}{2\Delta\theta} \right) \right. \\
& \left. + \bar{p}_{\xi'_{i,j}}^{n+1} \left( \frac{\bar{p}_{0i,j+1}^{n+1} - 2\bar{p}_{0i,j}^{n+1} + \bar{p}_{0i,j-1}^{n+1}}{\Delta\theta^2} \right) \right] + 3 \left(\bar{h}_{0j}^{n+1}\right)^2 \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} \Big|_j^{n+1} \left[ \frac{\bar{p}_{0i,j}^{n+1}}{2\Delta\theta} \left( \frac{\bar{p}_{\xi'_{i,j+1}}^{n+1} - \bar{p}_{\xi'_{i,j-1}}^{n+1}}{2\Delta\theta} \right) \right. \\
& \left. + \bar{p}_{\xi'_{i,j}}^{n+1} \left( \frac{\bar{p}_{0i,j+1}^{n+1} - \bar{p}_{0i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\theta} \right) \right] + \lambda^2 \left(\bar{h}_{0j}^{n+1}\right)^3 \left[ \frac{\bar{p}_{0i,j}^{n+1}}{\Delta\bar{y}^2} \left( \frac{\bar{p}_{\xi'_{i+1,j}}^{n+1} - 2\bar{p}_{\xi'_{i,j}}^{n+1} + \bar{p}_{\xi'_{i-1,j}}^{n+1}}{\Delta\bar{y}^2} \right) \right. \\
& \left. + 2 \left( \frac{\bar{p}_{0i+1,j}^{n+1} - \bar{p}_{0i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\bar{y}} \right) \left( \frac{\bar{p}_{\xi'_{i+1,j}}^{n+1} - \bar{p}_{\xi'_{i-1,j}}^{n+1}}{2\Delta\bar{y}} \right) + \bar{p}_{\xi'_{i,j}}^{n+1} \left( \frac{\bar{p}_{0i+1,j}^{n+1} - 2\bar{p}_{0i,j}^{n+1} + \bar{p}_{0i-1,j}^{n+1}}{\Delta\bar{y}^2} \right) \right] = \\
& \Lambda \left[ \frac{\bar{p}_{0i,j}^{n+1}}{\Delta\theta} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} \Big|_j^{n+1} + \bar{h}_{0j}^{n+1} \left( \frac{\bar{p}_{\xi'_{i,j+1}}^{n+1} - \bar{p}_{\xi'_{i,j-1}}^{n+1}}{2\Delta\theta} \right) \right] + \sigma \left[ \frac{\bar{p}_{0i,j}^{n+1}}{\Delta\tau} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \tau} \Big|_j^{n+1} + \bar{h}_{0j}^{n+1} \left( \frac{\bar{p}_{\xi'_{i,j}}^{n+1} - \bar{p}_{\xi'_{i,j}}^n}{\Delta\tau} \right) \right. \\
& \left. + \bar{p}_{\xi'_{i,j}}^{n+1} \bar{h}_{0j}^{n+1} + \bar{p}_{0i,j}^{n+1} \bar{h}_{\xi_j} \right]
\end{aligned} \tag{4.41}$$

sendo:

$$\bar{h}_{\xi_j} = \begin{cases} -\text{sen } \theta_j, & \text{para } \xi = x \\ -\text{cos } \theta_j, & \text{para } \xi = z \end{cases} \tag{4.42}$$

$$\frac{d\bar{h}_\xi}{d\theta} \Big|_j = \begin{cases} -\text{cos } \theta_j, & \text{para } \xi = x \\ \text{sen } \theta_j, & \text{para } \xi = z \end{cases} \tag{4.43}$$

Alternativamente, as Eqs. (4.40) e (4.41) podem ser escritas como:

$$A_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi_{i,j+1}}^{n+1} + B_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi_{i,j-1}}^{n+1} + C_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi_{i+1,j}}^{n+1} + D_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi_{i-1,j}}^{n+1} + E_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1} + F_{1j}^{n+1} \bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1} = G_{1i,j}^{n+1} \tag{4.44}$$

$$A_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi'_{i,j+1}}^{n+1} + B_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi'_{i,j-1}}^{n+1} + C_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi'_{i+1,j}}^{n+1} + D_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi'_{i-1,j}}^{n+1} + E_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi'_{i,j}}^{n+1} + F_{2j}^{n+1} \bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1} = G_{2i,j}^{n+1} \tag{4.45}$$

onde:

$$A_{i,j}^{n+1} = \frac{\left(\bar{h}_{0j}^{n+1}\right)^3}{2\Delta\theta^2} \left( \bar{p}_{0i,j+1}^{n+1} + 2\bar{p}_{0i,j}^{n+1} - \bar{p}_{0i,j-1}^{n+1} \right) + \frac{3 \left(\bar{h}_{0j}^{n+1}\right)^2 \bar{p}_{0i,j}^{n+1}}{2\Delta\theta} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} \Big|_j^{n+1} - \frac{\Lambda \bar{h}_{0j}^{n+1}}{2\Delta\theta} \tag{4.46a}$$

$$B_{i,j}^{n+1} = -\frac{\left(\bar{h}_{0j}^{n+1}\right)^3}{2\Delta\theta^2} \left( \bar{p}_{0i,j+1}^{n+1} - 2\bar{p}_{0i,j}^{n+1} - \bar{p}_{0i,j-1}^{n+1} \right) - \frac{3 \left(\bar{h}_{0j}^{n+1}\right)^2 \bar{p}_{0i,j}^{n+1}}{2\Delta\theta} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} \Big|_j^{n+1} + \frac{\Lambda \bar{h}_{0j}^{n+1}}{2\Delta\theta} \tag{4.46b}$$

$$C_{i,j}^{n+1} = \frac{\lambda^2 (\bar{h}_{0j}^{n+1})^3}{2\Delta\bar{y}^2} (\bar{p}_{0_{i+1,j}}^{n+1} + 2\bar{p}_{0_{i,j}}^{n+1} - \bar{p}_{0_{i-1,j}}^{n+1}) \quad (4.46c)$$

$$D_{i,j}^{n+1} = -\frac{\lambda^2 (\bar{h}_{0j}^{n+1})^3}{2\Delta\bar{y}^2} (\bar{p}_{0_{i+1,j}}^{n+1} - 2\bar{p}_{0_{i,j}}^{n+1} - \bar{p}_{0_{i-1,j}}^{n+1}) \quad (4.46d)$$

$$E_{i,j}^{n+1} = \frac{(\bar{h}_{0j}^{n+1})^3}{\Delta\theta^2} (\bar{p}_{0_{i,j+1}}^{n+1} - 4\bar{p}_{0_{i,j}}^{n+1} + \bar{p}_{0_{i,j-1}}^{n+1}) + \frac{3(\bar{h}_{0j}^{n+1})^2}{2\Delta\theta} (\bar{p}_{0_{i,j+1}}^{n+1} - \bar{p}_{0_{i,j-1}}^{n+1}) \left. \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} \right|_j^{n+1} \quad (4.46e)$$

$$+ \frac{\lambda^2 (\bar{h}_{0j}^{n+1})^3}{\Delta\bar{y}^2} (\bar{p}_{0_{i+1,j}}^{n+1} - 4\bar{p}_{0_{i,j}}^{n+1} + \bar{p}_{0_{i-1,j}}^{n+1}) - \Lambda \left. \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} \right|_j^{n+1} - \sigma \left( \left. \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \tau} \right|_j^{n+1} + \frac{\bar{h}_{0j}^{n+1}}{\Delta\tau} \right)$$

$$F_{1j}^{n+1} = \sigma\gamma^2 \bar{h}_{0j}^{n+1} \quad (4.46f)$$

$$F_{2j}^{n+1} = -\sigma \bar{h}_{0j}^{n+1} \quad (4.46g)$$

$$G_{1,i,j}^{n+1} = -\frac{3(\bar{h}_{0j}^{n+1})^2 \bar{h}_{\xi_j}}{2\Delta\theta^2} (\bar{q}_{0_{i,j+1}}^{n+1} - 2\bar{q}_{0_{i,j}}^{n+1} + \bar{q}_{0_{i,j-1}}^{n+1}) - \frac{3\bar{h}_{0j}^{n+1}}{2\Delta\theta} (\bar{q}_{0_{i,j+1}}^{n+1} - \bar{q}_{0_{i,j-1}}^{n+1}) \left( \bar{h}_{\xi_j} \left. \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \theta} \right|_j^{n+1} \right. \quad (4.46h)$$

$$+ \left. \frac{\bar{h}_{0j}^{n+1}}{2} \left. \frac{d\bar{h}_\xi}{d\theta} \right|_j \right) - \frac{3\lambda^2 (\bar{h}_{0j}^{n+1})^2 \bar{h}_{\xi_j}}{2\Delta\bar{y}^2} (\bar{q}_{0_{i+1,j}}^{n+1} - 2\bar{q}_{0_{i,j}}^{n+1} + \bar{q}_{0_{i-1,j}}^{n+1}) + \Lambda \left[ \bar{p}_{0_{i,j}}^{n+1} \left. \frac{d\bar{h}_\xi}{d\theta} \right|_j \right. \quad (4.46h)$$

$$+ \left. \frac{\bar{h}_{\xi_j}}{2\Delta\theta} (\bar{p}_{0_{i,j+1}}^{n+1} - \bar{p}_{0_{i,j-1}}^{n+1}) \right] - \frac{\sigma}{\Delta\tau} \left[ \bar{h}_{0j}^{n+1} \bar{p}_{\xi_{i,j}}^n - \bar{h}_{\xi_j} (\bar{p}_{0_{i,j}}^{n+1} - \bar{p}_{0_{i,j}}^n) \right]$$

$$G_{2,i,j}^{n+1} = -\sigma \left( \frac{\bar{h}_{0j}^{n+1} \bar{p}_{\xi_{i,j}}^n}{\Delta\tau} - \bar{p}_{0_{i,j}}^{n+1} \bar{h}_{\xi_j} \right) \quad (4.46i)$$

Portanto, isolando os termos  $\bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1}$  e  $\bar{p}_{\xi'_{i,j}}^{n+1}$  nas Eqs. (4.44) e (4.45), respectivamente, obtêm-se:

$$\bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1} = \frac{G_{1,i,j}^{n+1} - A_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi_{i,j+1}}^{n+1} - B_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi_{i,j-1}}^{n+1} - C_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi_{i+1,j}}^{n+1} - D_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi_{i-1,j}}^{n+1} - F_{1j}^{n+1} \bar{p}_{\xi'_{i,j}}^{n+1}}{E_{i,j}^{n+1}} \quad (4.47)$$

$$\bar{p}_{\xi'_{i,j}}^{n+1} = \frac{G_{2,i,j}^{n+1} - A_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi'_{i,j+1}}^{n+1} - B_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi'_{i,j-1}}^{n+1} - C_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi'_{i+1,j}}^{n+1} - D_{i,j}^{n+1} \bar{p}_{\xi'_{i-1,j}}^{n+1} - F_{2j}^{n+1} \bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1}}{E_{i,j}^{n+1}} \quad (4.48)$$

onde  $2 \leq i \leq N$ ,  $2 \leq j \leq M$  e  $\xi = x, z$ .

Para os pontos localizados nas fronteiras da malha, as pressões dinâmicas são determinadas pela aplicação das condições de contorno dadas pelas Eqs. (3.65) a (3.68), que são representadas na forma discreta por:

$$\bar{p}_{\xi_{1,j}}^{n+1} = \bar{p}_{\xi'_{1,j}}^{n+1} = 0 \quad (4.49)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{p}_{\xi}}{\partial \bar{y}} \right|_{N+1,j}^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_{\xi_{N+2,j}}^{n+1} = \bar{p}_{\xi_{N,j}}^{n+1} \quad (4.50a)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{p}_{\xi'}}{\partial \bar{y}} \right|_{N+1,j}^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_{\xi'_{N+2,j}}^{n+1} = \bar{p}_{\xi'_{N,j}}^{n+1} \quad (4.50b)$$

$$\bar{p}_{\xi_{i,1}}^{n+1} = \bar{p}_{\xi_{i,M+1}}^{n+1} \quad (4.51a)$$

$$\bar{p}_{\xi'_{i,1}}^{n+1} = \bar{p}_{\xi'_{i,M+1}}^{n+1} \quad (4.51b)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{p}_{\xi}}{\partial \theta} \right|_{i,1}^{n+1} = \left. \frac{\partial \bar{p}_{\xi}}{\partial \theta} \right|_{i,M+1}^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_{\xi_{i,0}}^{n+1} = \bar{p}_{\xi_{i,M}}^{n+1} \quad (4.52a)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{p}_{\xi'}}{\partial \theta} \right|_{i,1}^{n+1} = \left. \frac{\partial \bar{p}_{\xi'}}{\partial \theta} \right|_{i,M+1}^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_{\xi'_{i,0}}^{n+1} = \bar{p}_{\xi'_{i,M}}^{n+1} \quad (4.52b)$$

onde  $1 \leq i \leq N + 1$ ,  $1 \leq j \leq M + 1$  e  $\xi = x, z$ .

A partir da condição inicial dada pela Eq. (3.64), as Eqs. (4.47) e (4.48) são resolvidas simultaneamente a cada passo de tempo utilizando o método iterativo de Gauss-Seidel. Ao final de cada iteração, a convergência das soluções é verificada pelas seguintes equações:

$$\sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{M+1} \left| \left( \bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1} \right)^{k+1} - \left( \bar{p}_{\xi_{i,j}}^{n+1} \right)^k \right| < \varepsilon \quad (4.53)$$

$$\sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{M+1} \left| \left( \bar{p}_{\xi'_{i,j}}^{n+1} \right)^{k+1} - \left( \bar{p}_{\xi'_{i,j}}^{n+1} \right)^k \right| < \varepsilon \quad (4.54)$$

onde  $\xi = x, z$ .

Após as pressões dinâmicas serem calculadas, os coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal a ar de filme espremido são determinados pela integração numérica das Eqs. (3.69) e (3.70) utilizando a regra dos trapézios.

# CAPÍTULO V

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com as simulações computacionais e as suas respectivas discussões. A partir do modelo de elementos finitos do rotor, a posição de equilíbrio do eixo para uma determinada velocidade de rotação é encontrada e os coeficientes dinâmicos do mancal a ar de filme espremido são determinados utilizando os métodos da perturbação finita e da perturbação infinitesimal. Além disso, as respostas de vibração do rotor desbalanceado para uma velocidade de rotação constante e durante a operação de partida são também investigadas neste capítulo.

### 5.1 Modelo de elementos finitos do rotor

A Fig. 5.1 apresenta a representação esquemática do rotor a ser analisado nas simulações computacionais, que é constituído por um eixo de aço com 8 mm de diâmetro e 450 mm de comprimento, e um disco também feito de aço com 100 mm de diâmetro e 10 mm de espessura. O eixo é suportado por dois mancais, sendo o mancal da esquerda ( $M_1$ ) o mancal a ar de filme espremido proposto por Feng et al. (2018) e o mancal da direita ( $M_2$ ) um mancal de rolamento.

As características geométricas e propriedades dos componentes do rotor são mostradas na Tab. 5.1. Nesta tabela, os coeficientes dinâmicos do mancal a ar de filme espremido são referentes a uma velocidade de rotação de 1200 rpm (ver Seção 5.4).

A Fig. 5.2 apresenta o modelo de elementos finitos utilizado para representar o comportamento dinâmico do rotor da Fig. 5.1. Neste modelo, o eixo é discretizado em 30 elementos, de modo que os mancais estão localizados sobre os nós #5 (mancal a ar de filme espremido) e #29 (mancal de rolamento) e o disco está posicionado sobre o nó #23. As frequências naturais do modelo de elementos finitos do rotor são mostradas na Tab. 5.2.

É importante ressaltar que na construção do modelo de elementos finitos do rotor, os coeficientes de amortecimento proporcional utilizados foram  $\alpha = 1$  e  $\beta = 1 \times 10^{-5}$  (CAVALINI JR, 2013). Além

disso, a aceleração da gravidade foi considerada igual a  $9,81 \text{ m/s}^2$ .

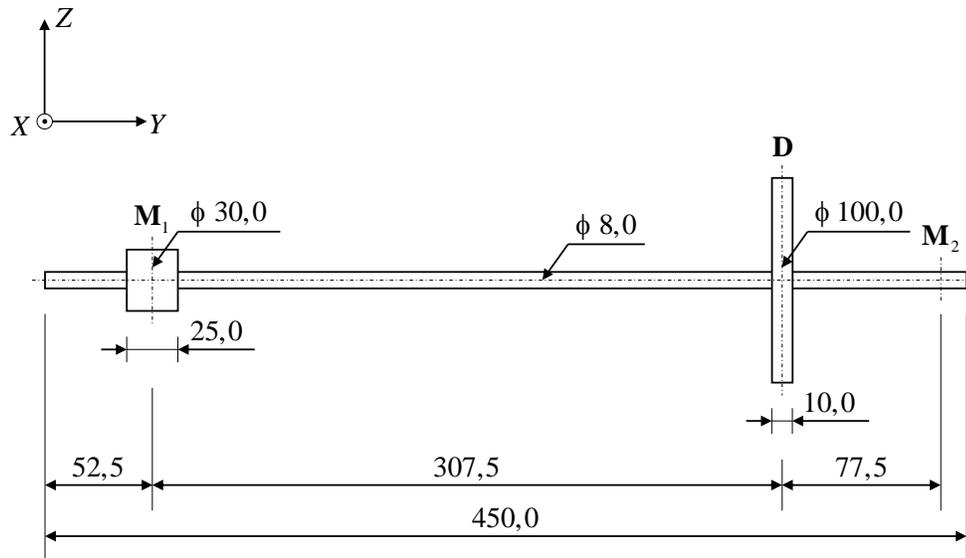


Figura 5.1 – Representação esquemática do rotor (dimensões em mm).

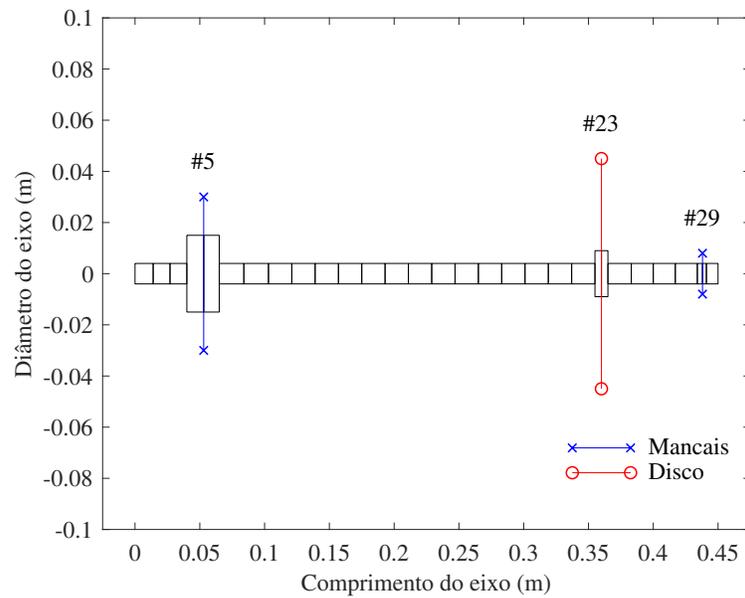


Figura 5.2 – Modelo de elementos finitos do rotor.

Tabela 5.1 – Características geométricas e propriedades dos componentes do rotor.

Componentes	Propriedades	Valores
<b>Eixo</b>	Diâmetro (mm)	8
	Comprimento (mm)	450
	Módulo de elasticidade (GPa)	205
	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	7850
	Coefficiente de Poisson	0,3
<b>Disco</b>	Diâmetro (mm)	100
	Espessura (mm)	10
	Módulo de elasticidade (GPa)	205
	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	7850
	Desbalanceamento (g·mm)	125
	Ângulo de fase (°)	0
<b>Mancal 1</b>	Coeficientes de rigidez <sup>1</sup> (N/m)	$k_{xx} = 1,216 \times 10^5$
		$k_{xz} = -3,418 \times 10^4$
		$k_{zx} = 5,295 \times 10^4$
		$k_{zz} = 4,163 \times 10^5$
	Coeficientes de amortecimento <sup>1</sup> (N·s/m)	$c_{xx} = 551,915$
		$c_{xz} = 161,095$
$c_{zx} = 116,230$		
	$c_{zz} = 1,077 \times 10^3$	
<b>Mancal 2</b>	Massa (g)	14
	Coeficientes de rigidez (N/m)	$k_{xx} = k_{zz} = 1 \times 10^7$
		$k_{xz} = k_{zx} = 0$
Coeficientes de amortecimento (N·s/m)	$c_{xx} = c_{zz} = 100$	
	$c_{xz} = c_{zx} = 0$	

<sup>1</sup> Valores médios.

Tabela 5.2 – Frequências naturais do modelo de elementos finitos do rotor.

<b>Frequências naturais (Hz)</b>	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	5 <sup>a</sup>	...	124 <sup>a</sup>
	50,556	51,452	131,516	224,497	249,008	...	$6,613 \times 10^5$

## 5.2 Análise de convergência de malha

Para definir a malha computacional a ser utilizada nas simulações, é necessário realizar uma análise de convergência das forças de reação médias do mancal a ar de filme espremido para uma determinada posição e velocidade de rotação do eixo, conforme mostra a Tab. 5.3.

Tabela 5.3 – Parâmetros considerados na análise de convergência de malha.

<b>Parâmetros</b>	<b>Valores</b>
Excentricidade do eixo na direção $X$ (m)	$-3 \times 10^{-6}$ (-0, 1c)
Excentricidade do eixo na direção $Z$ (m)	$-1,5 \times 10^{-5}$ (-0, 5c)
Velocidade de rotação do eixo (rpm)	1200

As características do mancal a ar de filme espremido a serem utilizadas nas simulações computacionais são as mesmas da Tab. 3.1. Já as propriedades físicas do ar são apresentadas na Tab. 5.4.

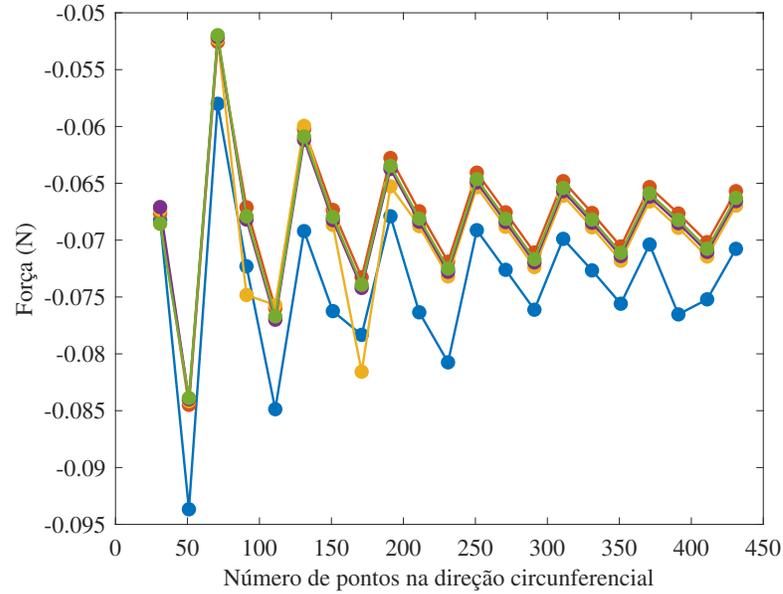
Tabela 5.4 – Propriedades físicas do ar.

<b>Propriedades</b>	<b>Valores</b>
Pressão atmosférica (kPa)	101,325
Viscosidade dinâmica (Pa·s)	$1,825 \times 10^{-5}$

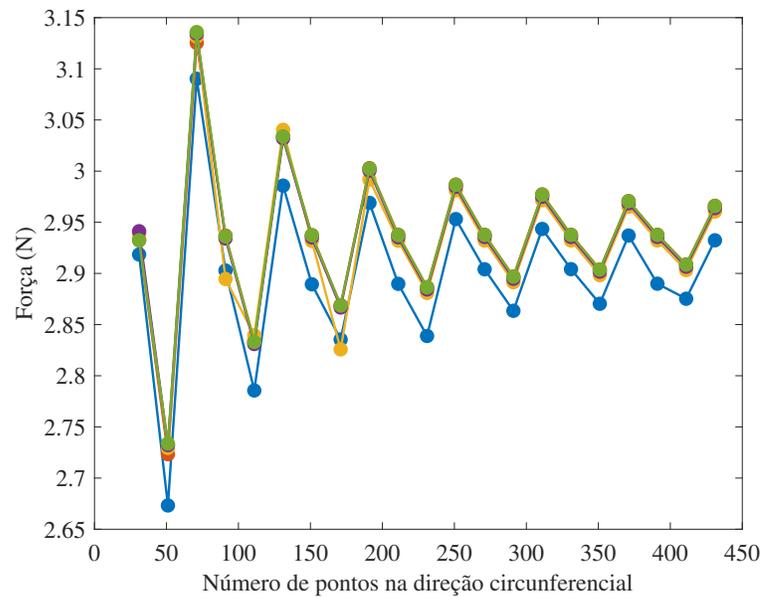
A Fig. 5.3 mostra as variações das forças de reação médias do mancal a ar de filme espremido com o refinamento da malha computacional, tanto na direção circunferencial, onde são analisadas malhas com 31 a 431 pontos nesta direção, variando de 20 em 20 pontos, como na direção axial, onde são analisadas malhas com 21 a 61 pontos nesta direção<sup>1</sup>, variando de 10 em 10 pontos.

<sup>1</sup>Referentes à discretização de todo o comprimento do mancal.

A variação do tempo de simulação com o refinamento da malha computacional é apresentada na Fig. 5.4.



(a) Força na direção X.



(b) Força na direção Z.

Figura 5.3 – Variações das forças de reação médias do mancal 1 com o refinamento da malha computacional. — 21 pontos na direção axial; — 31 pontos na direção axial; — 41 pontos na direção axial; — 51 pontos na direção axial; — 61 pontos na direção axial.

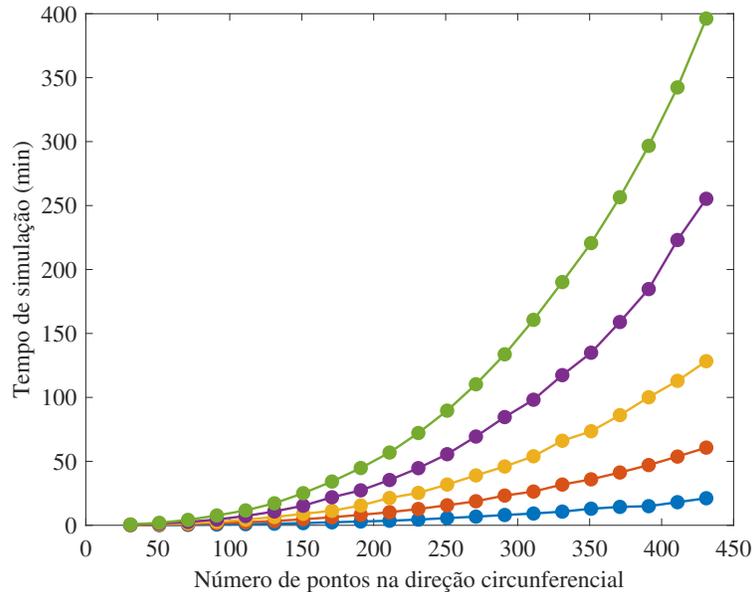


Figura 5.4 – Variação do tempo de simulação com o refinamento da malha computacional. — 21 pontos na direção axial; — 31 pontos na direção axial; — 41 pontos na direção axial; — 51 pontos na direção axial; — 61 pontos na direção axial.

A partir das Figs. 5.3 e 5.4, observa-se que a máxima diferença relativa entre os resultados obtidos com uma malha mais grosseira (31 pontos nas direções circunferencial e axial) e os resultados obtidos com uma malha mais refinada (431 pontos na direção circunferencial e 61 pontos na direção axial) é inferior a 2,5 %. Além disso, o tempo de simulação da malha mais grosseira (aproximadamente 8 s) é consideravelmente menor do que o tempo de simulação da malha mais refinada (cerca de 6,5 h). Portanto, a malha computacional a ser utilizada nas próximas simulações é definida como tendo 31 pontos em cada direção.

### 5.3 Posição de equilíbrio do rotor<sup>2</sup>

Nesta seção, a posição de equilíbrio do rotor é determinada para uma velocidade de rotação de 1200 rpm. As equações do movimento e de Reynolds são resolvidas simultaneamente em um intervalo de tempo que varia de 0 a 10 s, sendo o passo de tempo considerado igual a  $1,075 \times 10^{-7}$  s ( $\Delta\tau = 0,002\pi$  rad). Além disso, as condições iniciais para resolver a equação do movimento do rotor são consideradas nulas.

As Figs. 5.5 a 5.7 apresentam o comportamento dinâmico do rotor no domínio do tempo. A partir destes resultados, é possível observar o movimento oscilatório amortecido que o rotor descreve até

<sup>2</sup>Desconsiderando o desbalanceamento de massa no disco.

alcançar a condição de regime permanente. Nesta condição, o rotor continua a oscilar em torno da sua posição de equilíbrio, mas com amplitudes de vibração muito pequenas.

As amplitudes de vibração do rotor em regime permanente podem ser representadas no domínio da frequência através da transformada de Fourier, conforme mostram as Figs. 5.8 a 5.10. Nestas figuras, as frequências que apresentam maior influência na composição da resposta de vibração do rotor são as frequências múltiplas da frequência de excitação do mancal a ar de filme espremido (9,3 kHz). Isto porque na condição de regime permanente, o movimento oscilatório do rotor é devido à deformação dinâmica sofrida pela superfície interna deste mancal.

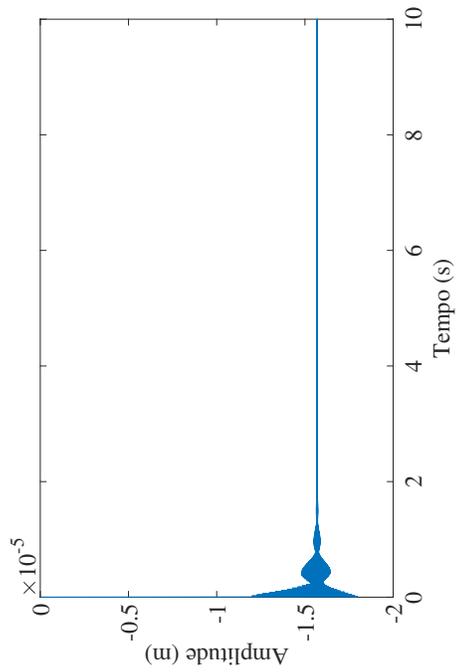
O comportamento dinâmico das forças de reação dos mancais no domínio do tempo é apresentado nas Figs. 5.11 e 5.12. Assim como as amplitudes de vibração do rotor, as forças de reação dos mancais apresentam um movimento oscilatório amortecido até alcançar a condição de regime permanente, que é caracterizada pelo equilíbrio entre as forças médias exercidas pelos mancais e o peso do rotor (-9,310 N).

As distribuições de pressão no mancal a ar de filme espremido e a variação da espessura do filme de ar em regime permanente são mostradas nas Figs. 5.13 e 5.14, respectivamente. Nestas figuras, a pressão máxima alcançada pelo mancal é aproximadamente 1,8 vezes maior do que a pressão atmosférica e a espessura mínima do filme de ar é cerca de 3,6 vezes menor do que a folga radial do mancal.

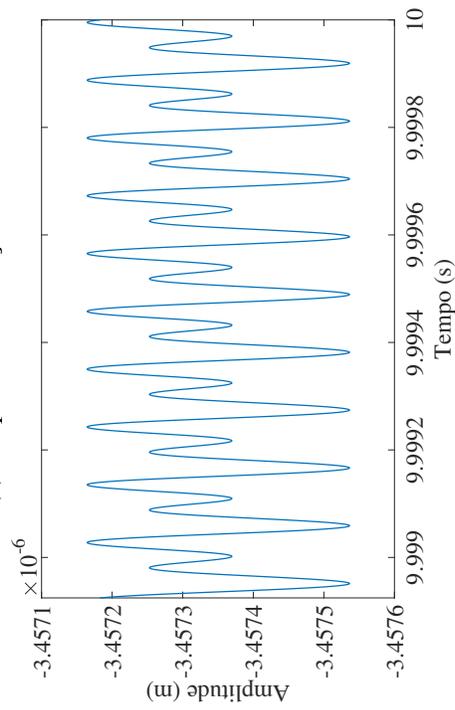
Resumidamente, a Tab. 5.5 apresenta os valores médios das amplitudes de vibração do rotor e das forças de reação dos mancais em regime permanente. A partir desta tabela, é possível observar que as forças de reação dos mancais em regime permanente são equivalentes às forças obtidas na condição de equilíbrio estático do eixo, que são  $F_X = 0$  N e  $F_Z = 3,467$  N para o mancal 1 e  $F_X = 0$  N e  $F_Z = 5,843$  N para o mancal 2.

Tabela 5.5 – Valores médios das amplitudes de vibração do rotor e das forças de reação dos mancais em regime permanente.

Componentes	Amplitudes (m)		Forças (N)	
	Direção X	Direção Z	Direção X	Direção Z
<b>Mancal 1</b>	$-3,457 \times 10^{-6}$	$-1,569 \times 10^{-5}$	$-6,072 \times 10^{-7}$	3,479
<b>Disco</b>	$-7,004 \times 10^{-7}$	$-8,743 \times 10^{-5}$	–	–
<b>Mancal 2</b>	$1,152 \times 10^{-20}$	$-5,831 \times 10^{-7}$	$-1,542 \times 10^{-13}$	5,831

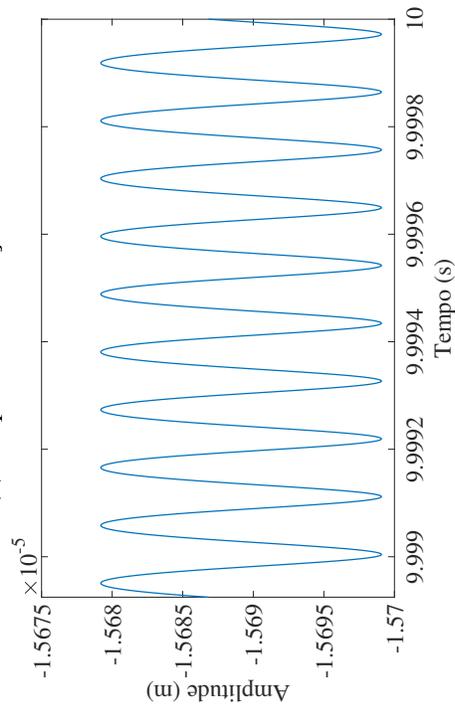


(a) Amplitude na direção X.



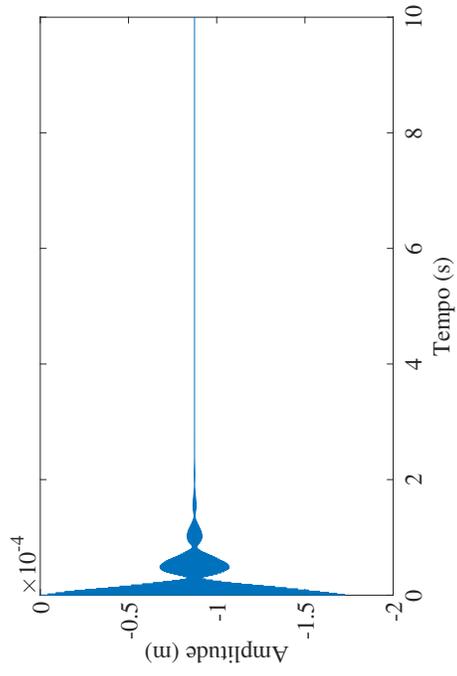
(c) Ampliação da amplitude na direção X.

(b) Amplitude na direção Z.

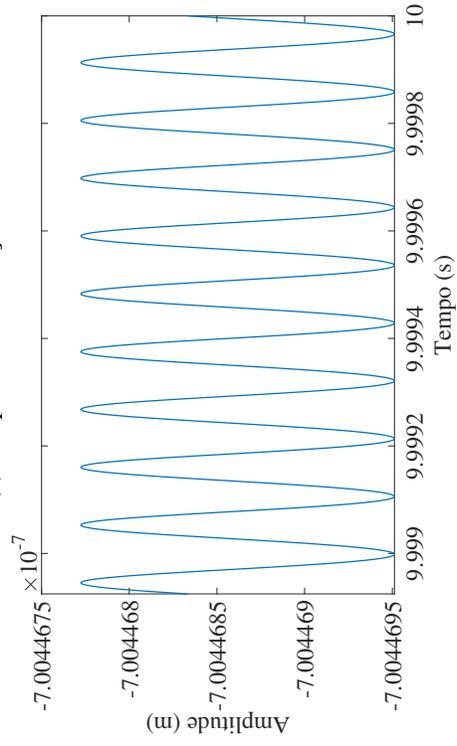


(d) Ampliação da amplitude na direção Z.

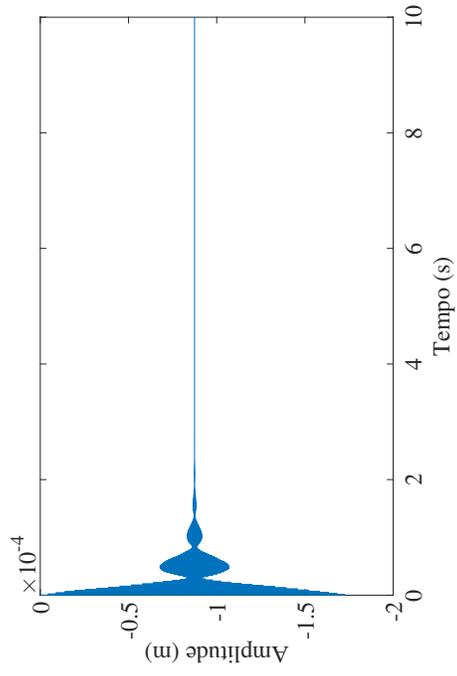
Figura 5.5 – Amplitudes de vibração do rotor no mancal I.



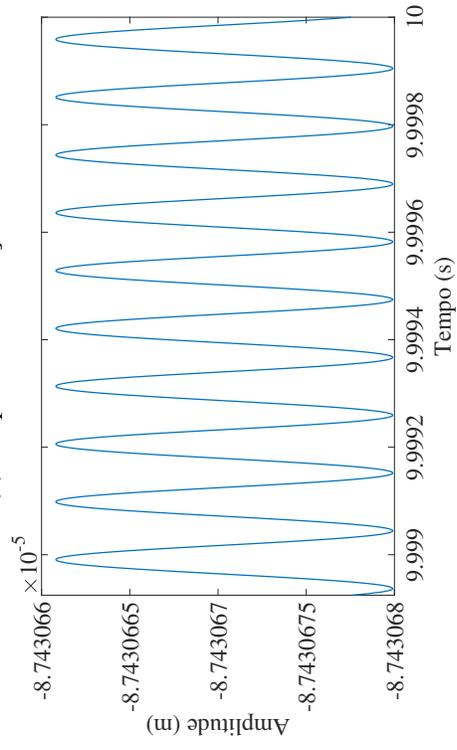
(a) Amplitude na direção X.



(c) Ampliação da amplitude na direção X.

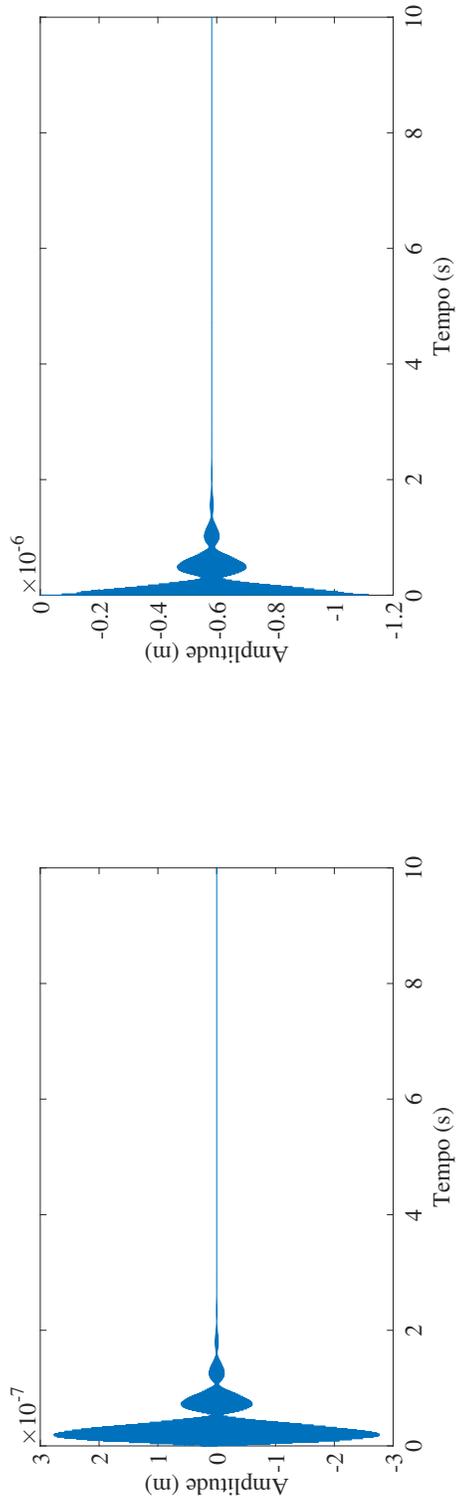


(b) Amplitude na direção Z.

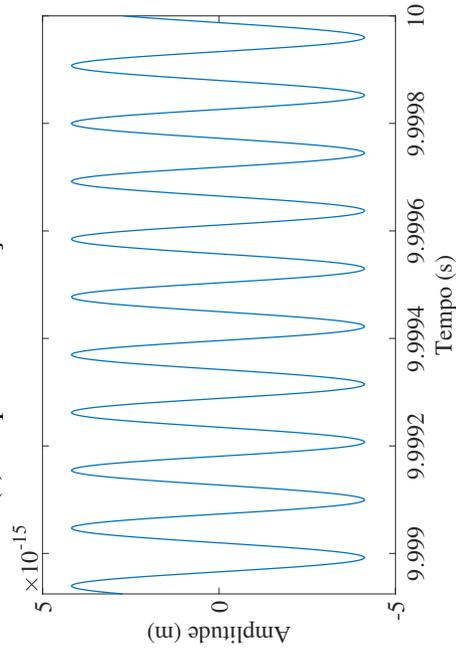


(d) Ampliação da amplitude na direção Z.

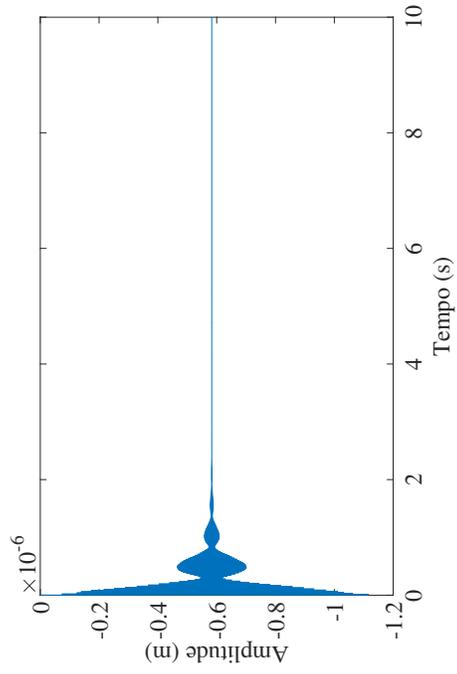
Figura 5.6 – Amplitudes de vibração do disco.



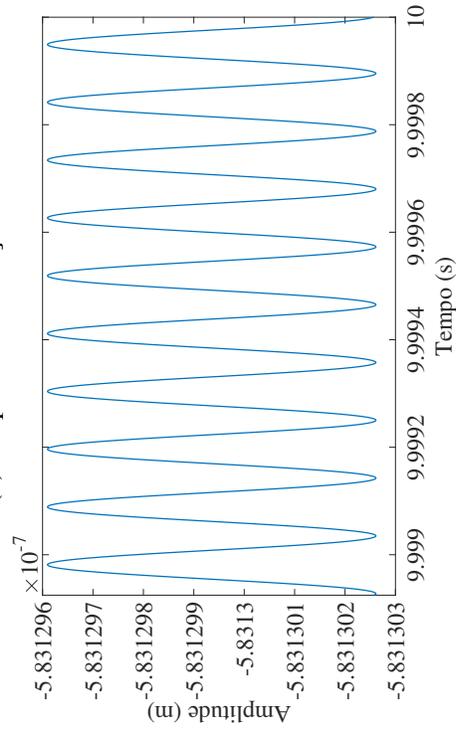
(a) Amplitude na direção X.



(c) Ampliação da amplitude na direção X.

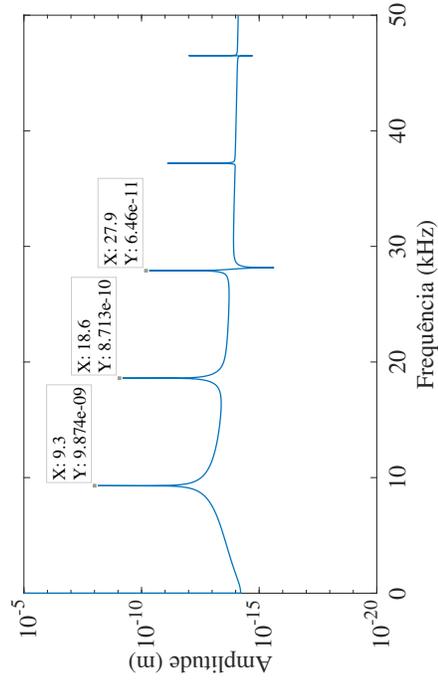


(b) Amplitude na direção Z.

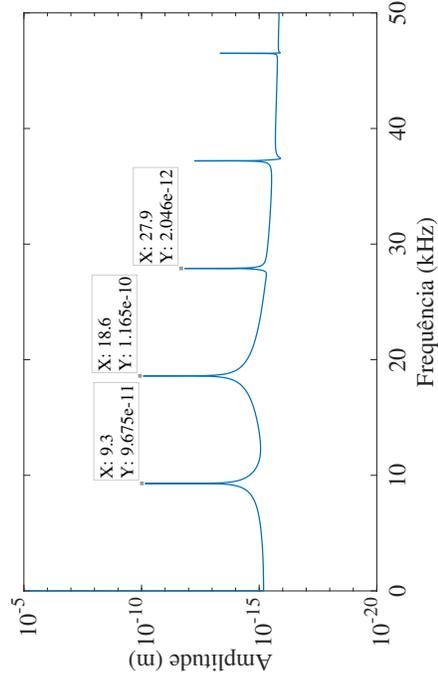


(d) Ampliação da amplitude na direção Z.

Figura 5.7 – Amplitudes de vibração do rotor no mancal 2.

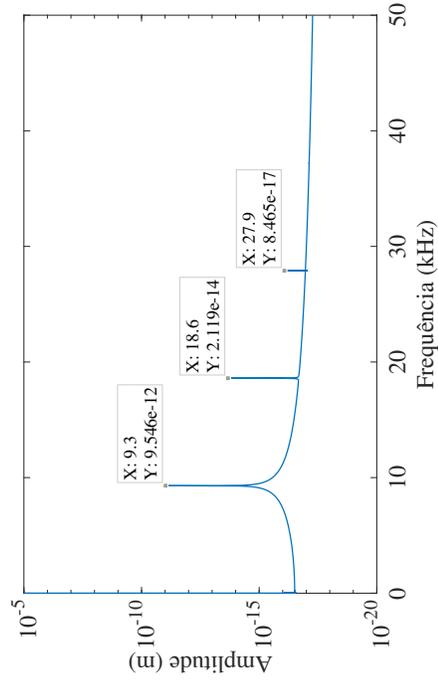


(a) Espectro da amplitude na direção X.

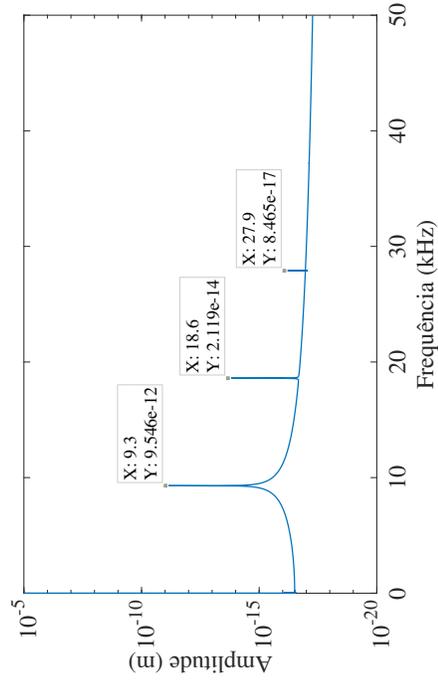


(b) Espectro da amplitude na direção Z.

Figura 5.8 – Espectros das amplitudes de vibração do rotor no mancal I em regime permanente.

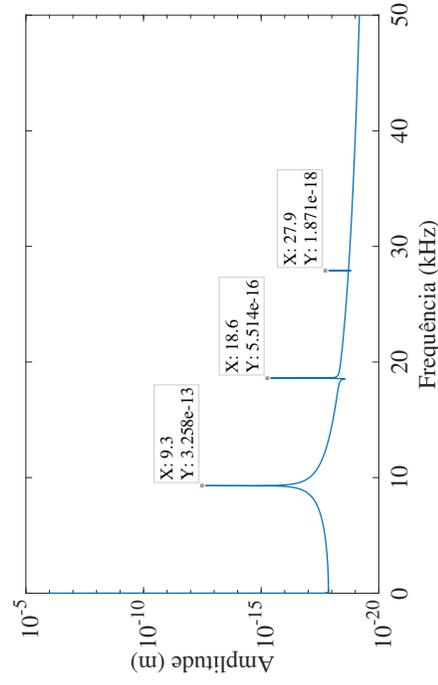


(a) Espectro da amplitude na direção X.

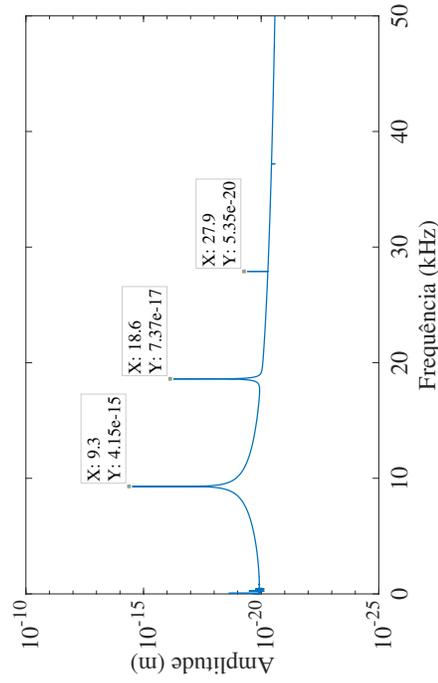


(b) Espectro da amplitude na direção Z.

Figura 5.9 – Espectros das amplitudes de vibração do disco em regime permanente.

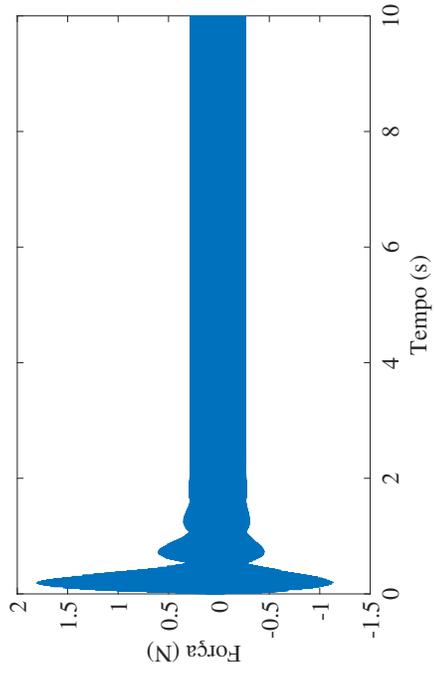


(a) Espectro da amplitude na direção X.

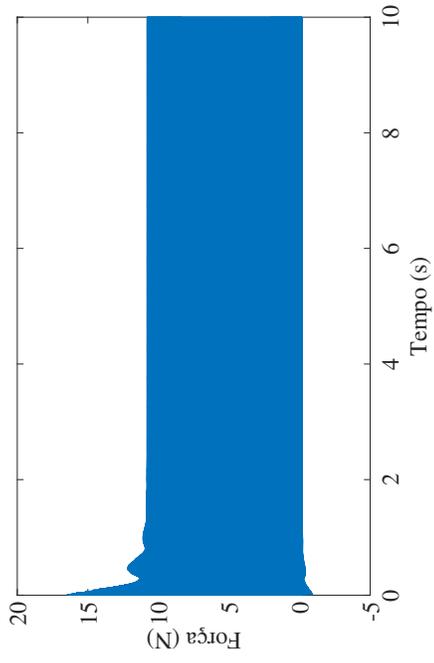


(b) Espectro da amplitude na direção Z.

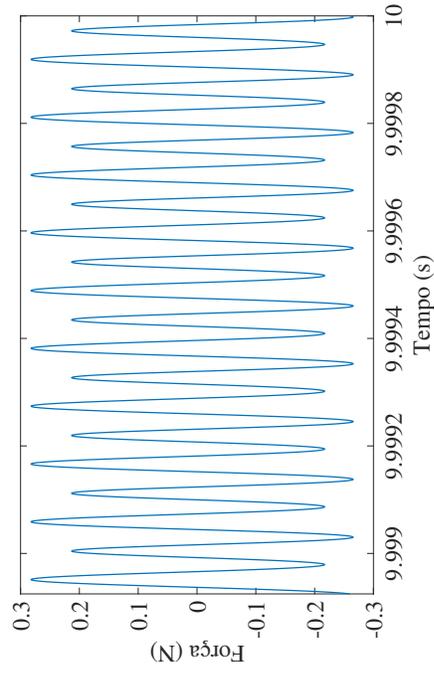
Figura 5.10 – Espectros das amplitudes de vibração do rotor no mancal 2 em regime permanente.



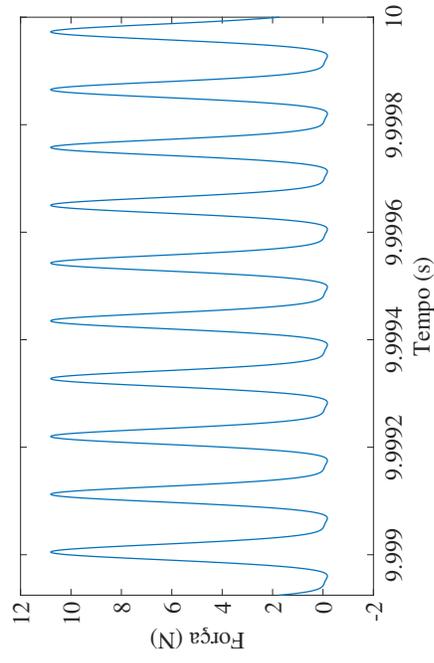
(a) Força na direção X.



(b) Força na direção Z.

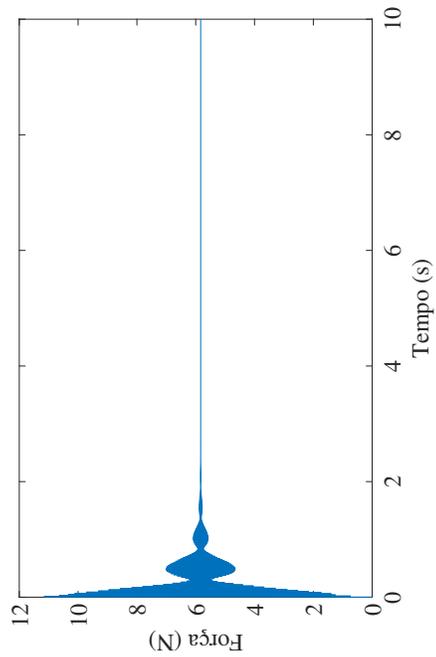


(c) Ampliação da reação da força na direção X.

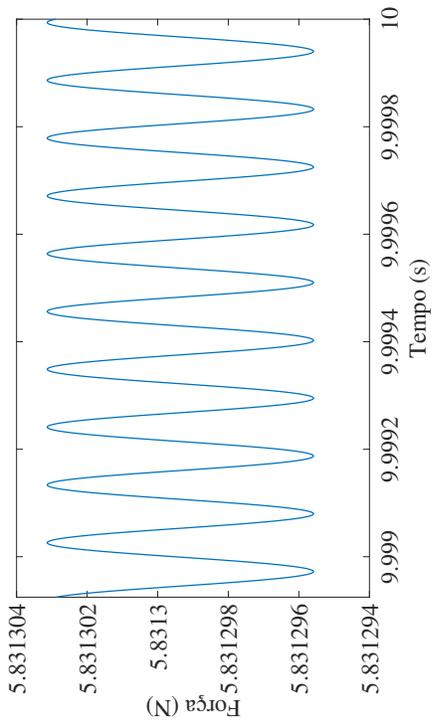


(d) Ampliação da força na direção Z.

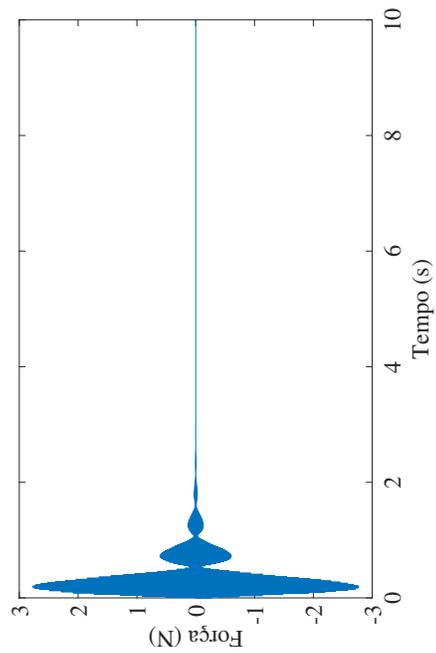
Figura 5.11 – Forças de reação do mancal 1.



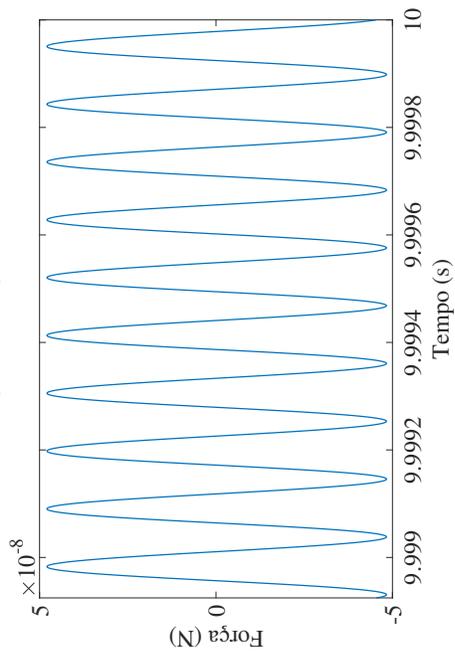
(b) Força na direção Z.



(d) Ampliação da força na direção Z.

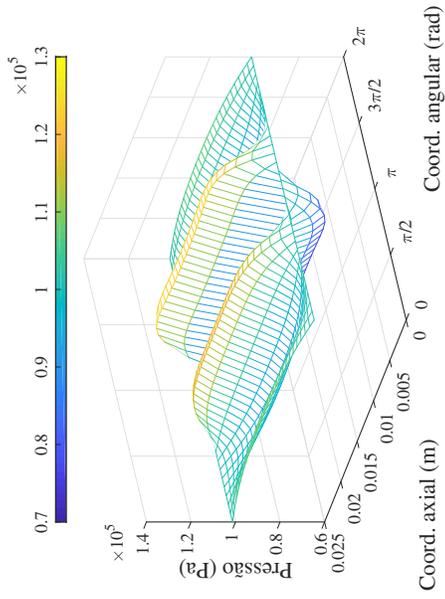


(a) Força na direção X.

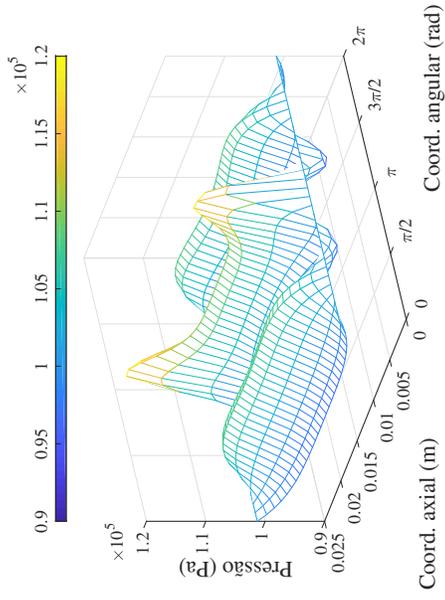


(c) Ampliação da força na direção X.

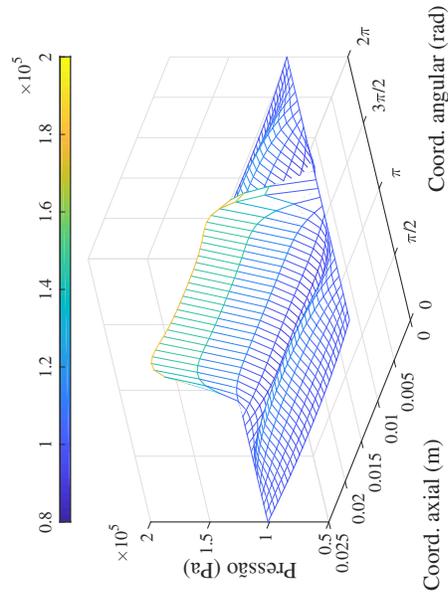
Figura 5.12 – Forças de reação do mancal 2.



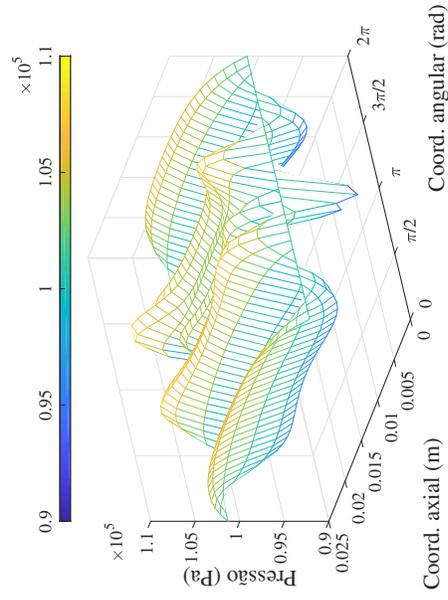
(a) Distribuição de pressão em  $\tau = \pi/2$  rad.



(b) Distribuição de pressão em  $\tau = \pi$  rad.



(c) Distribuição de pressão em  $\tau = 3\pi/2$  rad.



(d) Distribuição de pressão em  $\tau = 2\pi$  rad.

Figura 5.13 – Distribuições de pressão no mancal 1 em regime permanente.

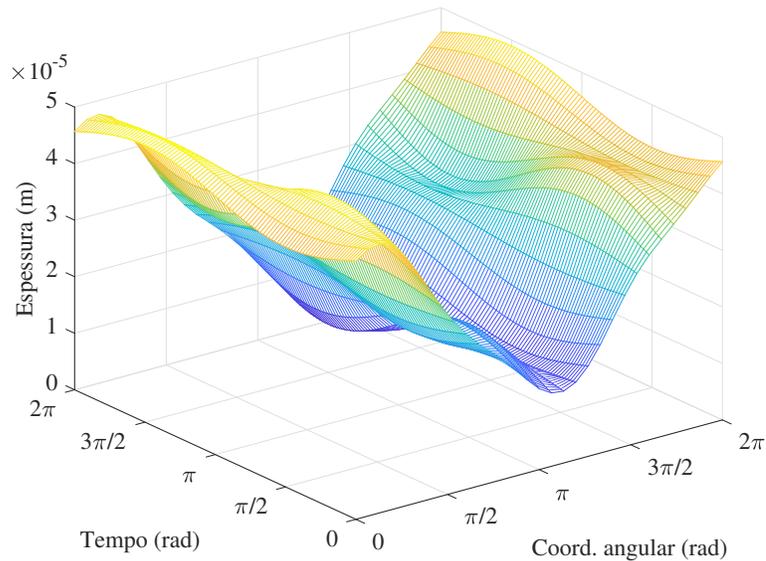


Figura 5.14 – Variação da espessura do filme de ar no mancal 1 em regime permanente.

#### 5.4 Coeficientes dinâmicos do mancal a ar de filme espremido

Depois que a posição de equilíbrio do eixo para uma velocidade de rotação de 1200 rpm é encontrada, os coeficientes dinâmicos do mancal a ar de filme espremido são determinados utilizando os métodos da perturbação finita e da perturbação infinitesimal, cujos parâmetros são especificados na Tab. 5.6. Nesta tabela, os valores das amplitudes de perturbação do eixo foram escolhidos com base no artigo publicado por Qiu e Tieu (1996).

Tabela 5.6 – Parâmetros dos métodos da perturbação finita e da perturbação infinitesimal.

Métodos	Parâmetros	Valores
<i>Perturbação finita</i>	Amplitude de perturbação da posição do eixo (m)	$6 \times 10^{-7}$ (0,02c)
	Amplitude de perturbação da velocidade do eixo (m/s)	$3,506 \times 10^{-2}$ (0,02c $\omega_e$ )
<i>Perturbação infinitesimal</i>	Frequência de perturbação do eixo (Hz)	0

Os coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal a ar de filme espremido obtidos através dos métodos da perturbação finita e da perturbação infinitesimal são mostrados nas Figs. 5.15 e 5.16,

respectivamente. Para facilitar a comparação destes resultados, a Tab. 5.7 apresenta as diferenças relativas entre os valores médios dos coeficientes dinâmicos do mancal, que são calculadas pela seguinte equação:

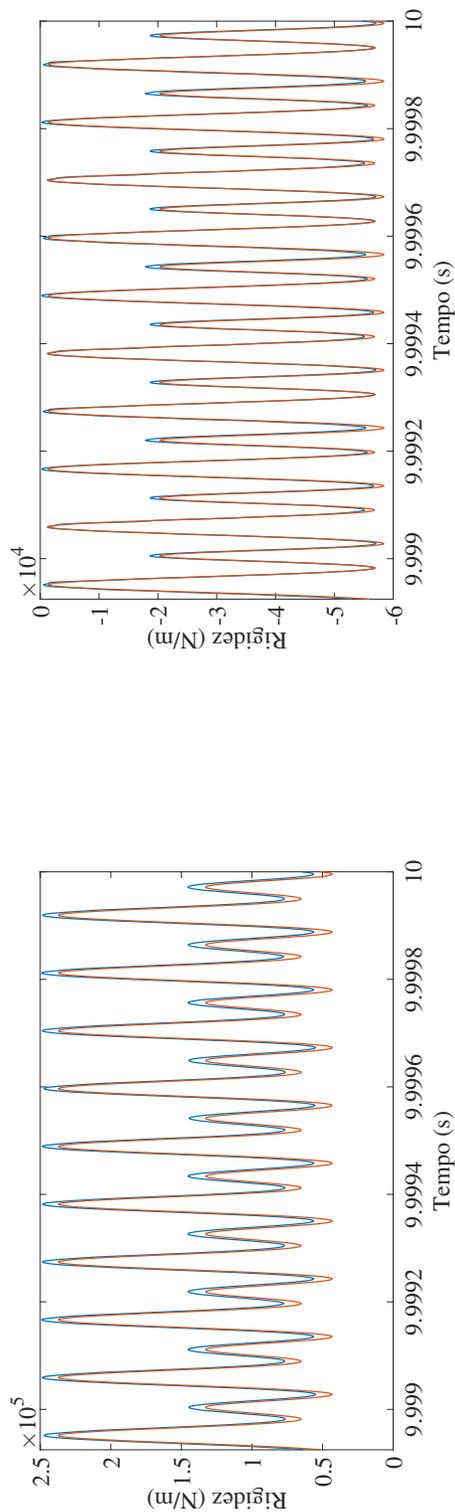
$$dif = \frac{x_{PF} - x_{PI}}{|x_{PI}|} \times 100 \quad (5.1)$$

onde  $x_{PF}$  e  $x_{PI}$  são os valores dos coeficientes obtidos através dos métodos da perturbação finita e da perturbação infinitesimal, respectivamente.

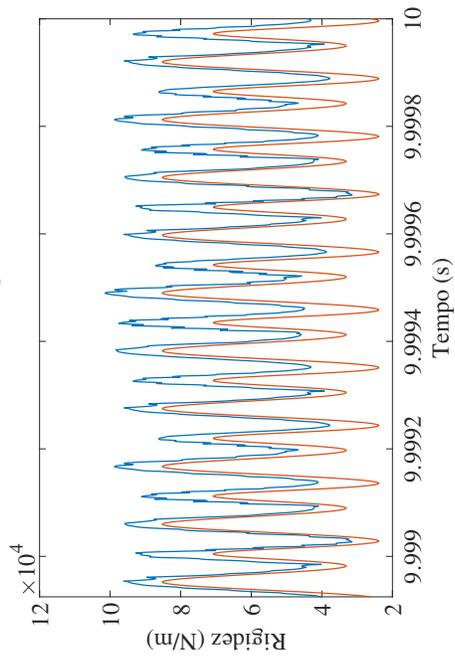
Tabela 5.7 – Diferenças relativas entre os valores médios dos coeficientes dinâmicos do mancal 1 obtidos através dos métodos da perturbação finita e da perturbação infinitesimal.

Coeficientes	Métodos		Diferenças (%)	
	<i>Perturbação finita</i>	<i>Perturbação infinitesimal</i>		
<b>Rigidez</b> (N/m)	$k_{xx}$	$1,336 \times 10^5$	$1,216 \times 10^5$	9,858
	$k_{xz}$	$-3,285 \times 10^4$	$-3,418 \times 10^4$	3,900
	$k_{zx}$	$6,761 \times 10^4$	$5,295 \times 10^4$	27,676
	$k_{zz}$	$4,286 \times 10^5$	$4,163 \times 10^5$	2,944
<b>Amortecimento</b> (N·s/m)	$c_{xx}$	567,701	551,915	2,860
	$c_{xz}$	153,766	161,095	-4,549
	$c_{zx}$	130,529	116,230	12,303
	$c_{zz}$	$1,139 \times 10^3$	$1,077 \times 10^3$	5,816

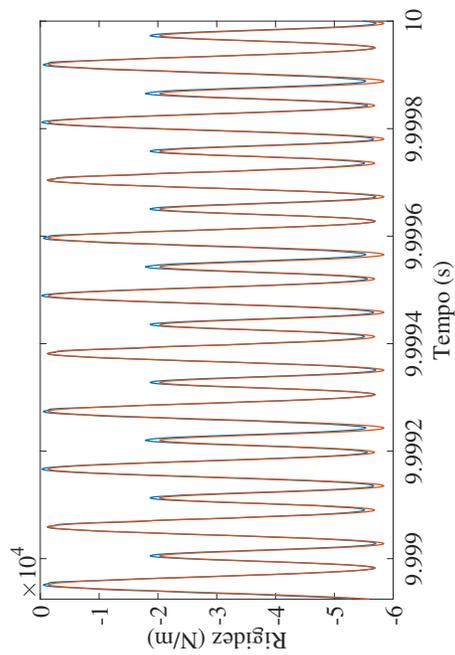
A partir da Tab. 5.7, observa-se que as maiores diferenças entre os resultados obtidos através dos métodos da perturbação finita e da perturbação infinitesimal estão associadas com os coeficientes cruzados de rigidez  $k_{zx}$  (27,676 %) e de amortecimento  $c_{zx}$  (12,303 %) do mancal a ar de filme espremido.



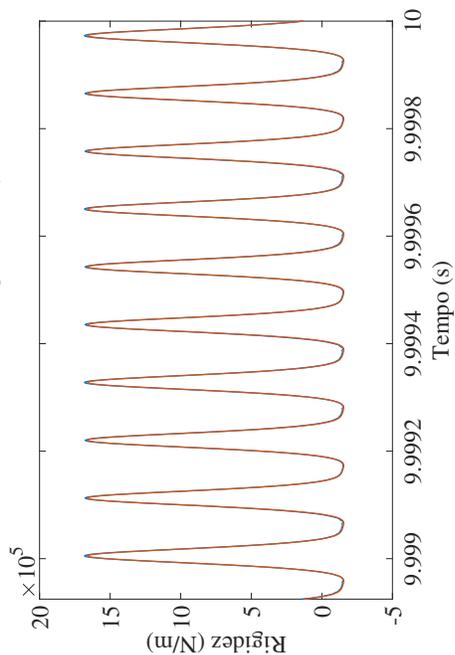
(a) Coeficiente de rigidez  $k_{xx}$ .



(c) Coeficiente de rigidez  $k_{zx}$ .

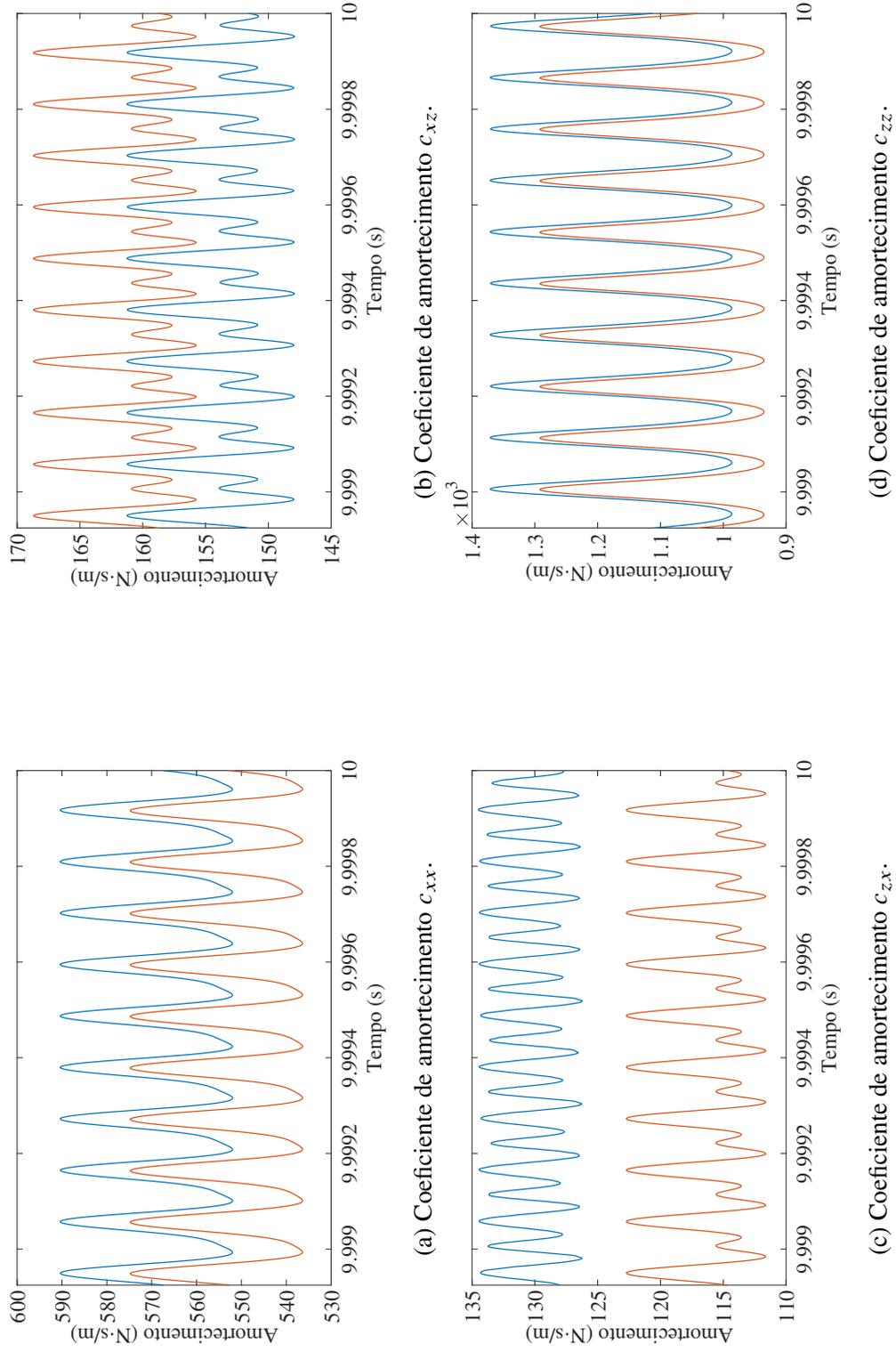


(b) Coeficiente de rigidez  $k_{xz}$ .



(d) Coeficiente de rigidez  $k_{zz}$ .

Figura 5.15 – Coeficientes de rigidez do mancal 1. — Método da perturbação infinitesimal. — Método da perturbação finita; — Método da perturbação infinitesimal.

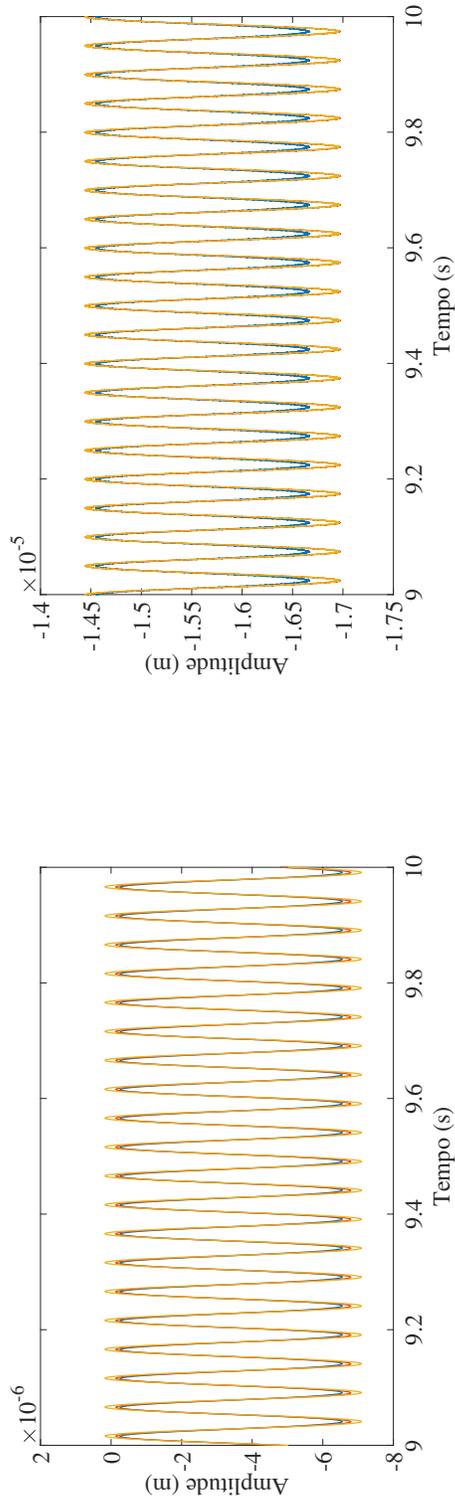


## 5.5 Resposta de vibração do rotor ao desbalanceamento

Nesta seção, o comportamento dinâmico do rotor sujeito a um desbalanceamento de massa no disco, cujas características são apresentadas na Tab. 5.1, é investigado para uma velocidade de rotação constante de 1200 rpm. As Figs. 5.17 a 5.19 mostram as respostas de vibração do rotor desbalanceado em regime permanente para o caso em que o mancal a ar de filme espremido é representado por um modelo não linear e para o caso em que ele é representado por um modelo linear, onde os coeficientes dinâmicos do mancal são determinados pelos métodos da perturbação finita e da perturbação infinitesimal.

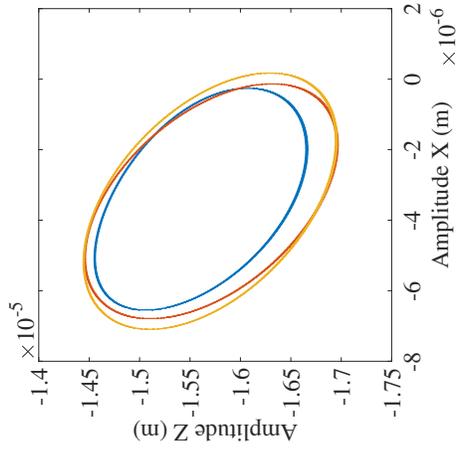
A partir das Figs. 5.17 a 5.19, observa-se que as respostas de vibração obtidas através dos modelos lineares do mancal a ar de filme espremido são bastante próximas entre si. No entanto, estes resultados apresentam algumas diferenças quando comparados com os resultados obtidos através do modelo não linear do mancal. Isto já era esperado, pois os modelos lineares são adequados para representar o comportamento dinâmico das forças de reação do mancal a ar de filme espremido apenas para pequenas amplitudes de vibração do rotor em torno da sua posição de equilíbrio. À medida que estas amplitudes aumentam, as componentes não lineares passam a ter maior influência na caracterização das forças do mancal, sendo mais adequada a utilização de um modelo não linear para representar o comportamento dinâmico do mancal a ar de filme espremido.

Os espectros das amplitudes de vibração do rotor desbalanceado em regime permanente são apresentados nas Figs. 5.20 a 5.22. Nestas figuras, além dos picos correspondentes às frequências múltiplas da frequência de excitação do mancal a ar de filme espremido (9,3 kHz), também são observados os picos correspondentes às frequências múltiplas da velocidade de rotação do rotor (20 Hz).



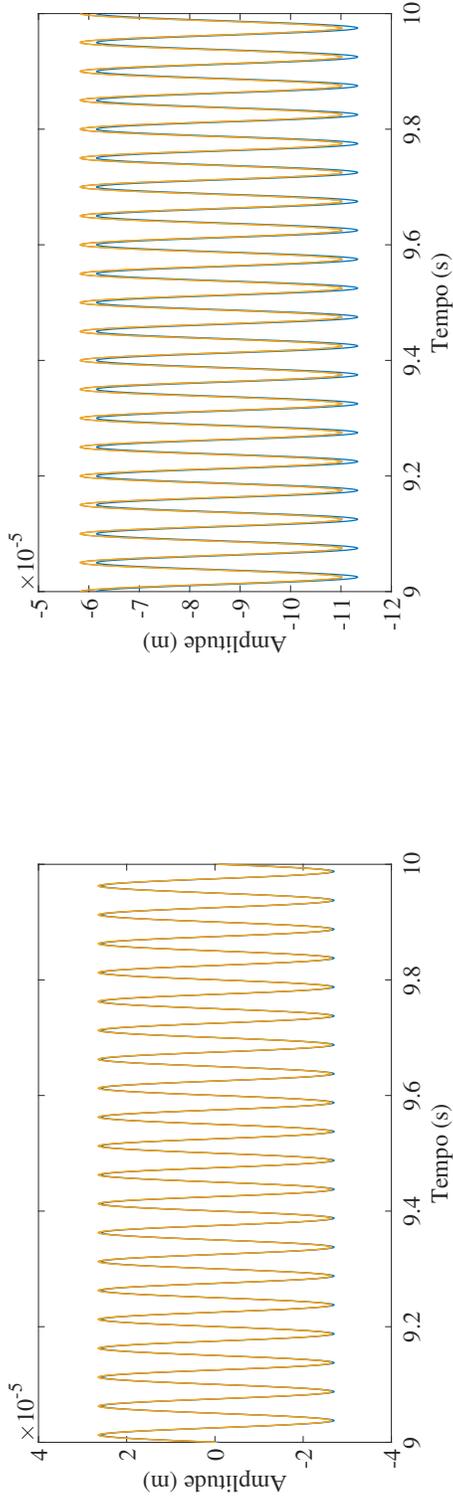
(a) Amplitude na direção X.

(b) Amplitude na direção Z.



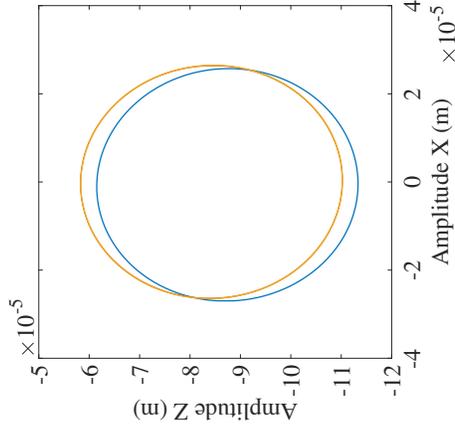
(c) Órbita no plano XZ.

Figura 5.17 – Amplitudes de vibração do rotor desbalanceado no mancal 1 em regime permanente. — Modelo não linear; — Modelo linear – método da perturbação infinitesimal.



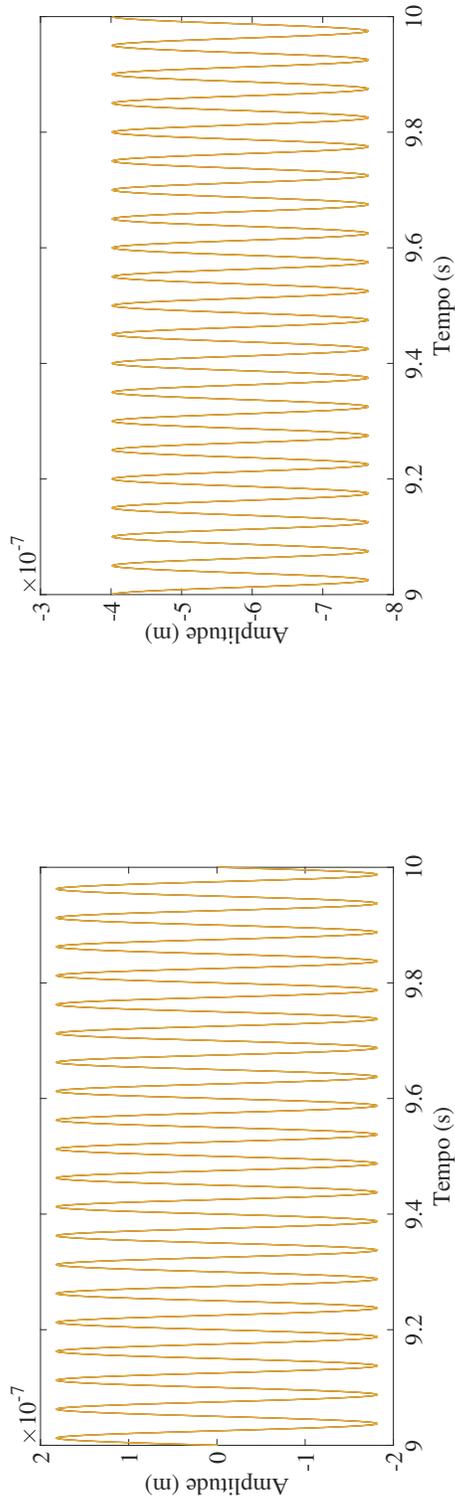
(a) Amplitude na direção X.

(b) Amplitude na direção Z.



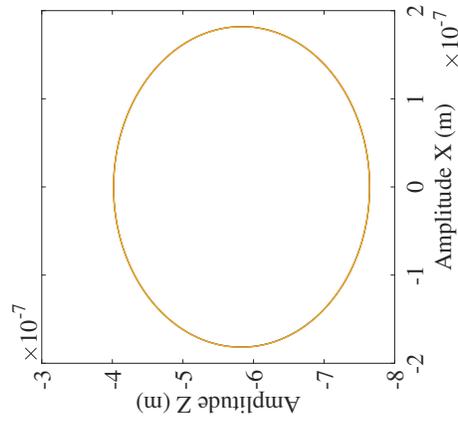
(c) Órbita no plano XZ.

Figura 5.18 – Amplitudes de vibração do disco desbalanceado em regime permanente. — Modelo não linear; — Modelo linear – método da perturbação finita; — Modelo linear – método da perturbação infinitesimal.



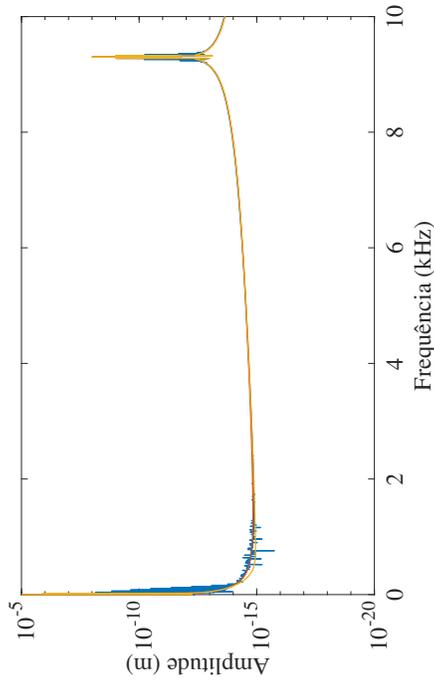
(a) Amplitude na direção X.

(b) Amplitude na direção Z.

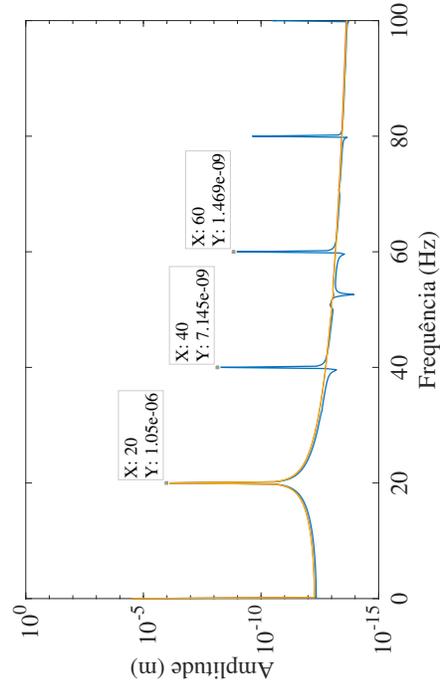


(c) Órbita no plano XZ.

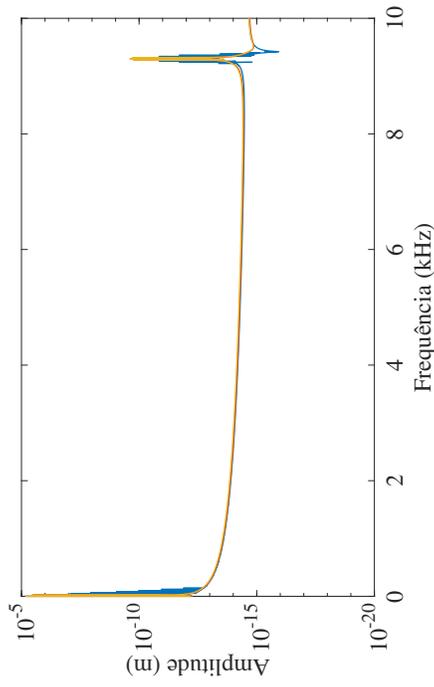
Figura 5.19 – Amplitudes de vibração do rotor desbalanceado no mancal 2 em regime permanente. — Modelo não linear; — Modelo linear – método da perturbação infinitesimal.



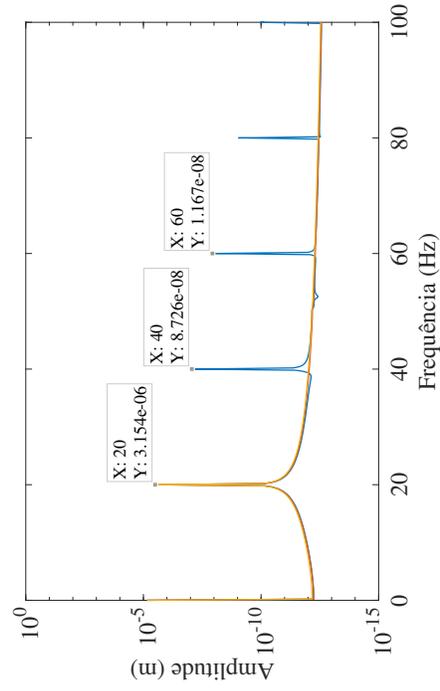
(b) Espectro da amplitude na direção Z.



(d) Ampliação do espectro da amplitude na direção Z.

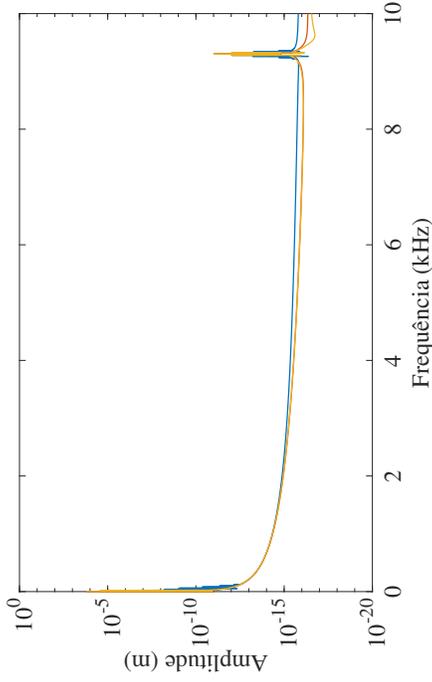


(a) Espectro da amplitude na direção X.

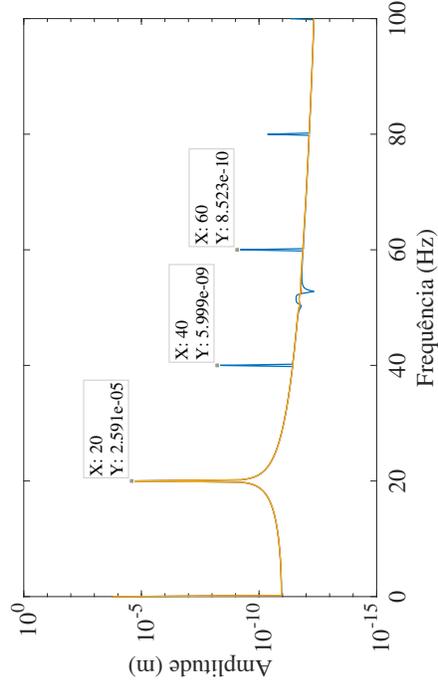


(c) Ampliação do espectro da amplitude na direção X.

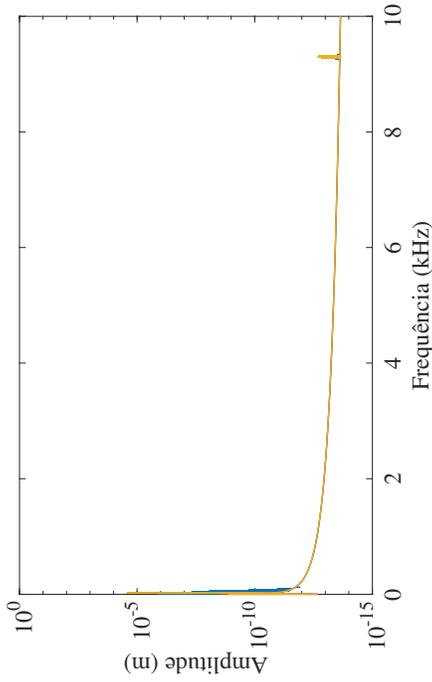
Figura 5.20 – Espectros das amplitudes de vibração do rotor desbalanceado no mancal 1 em regime permanente. — Modelo não linear; — Modelo linear – método da perturbação finita; — Modelo linear – método da perturbação infinitesimal.



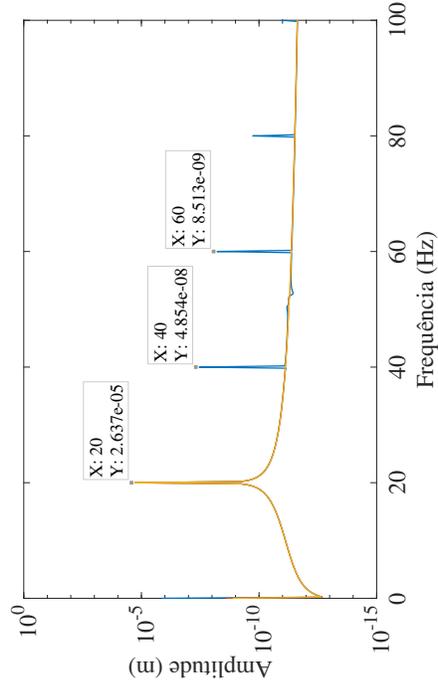
(b) Espectro da amplitude na direção Z.



(d) Ampliação do espectro da amplitude na direção Z.

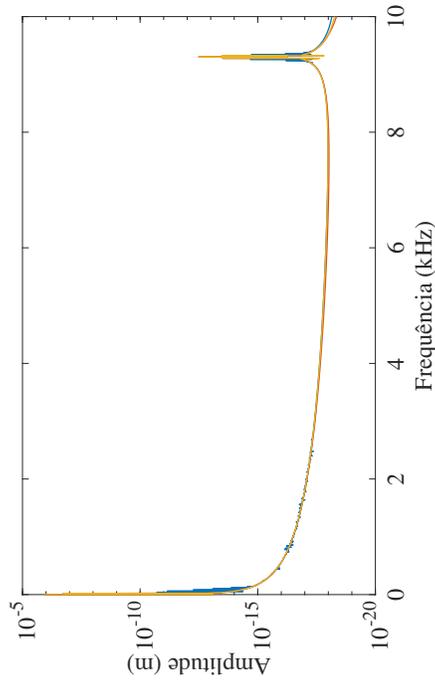


(a) Espectro da amplitude na direção X.

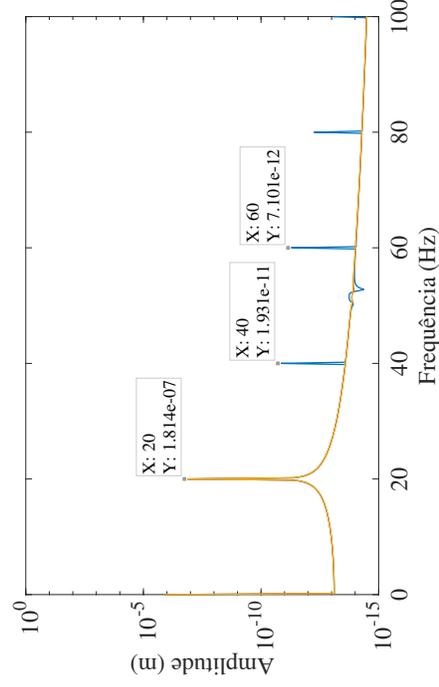


(c) Ampliação do espectro da amplitude na direção X.

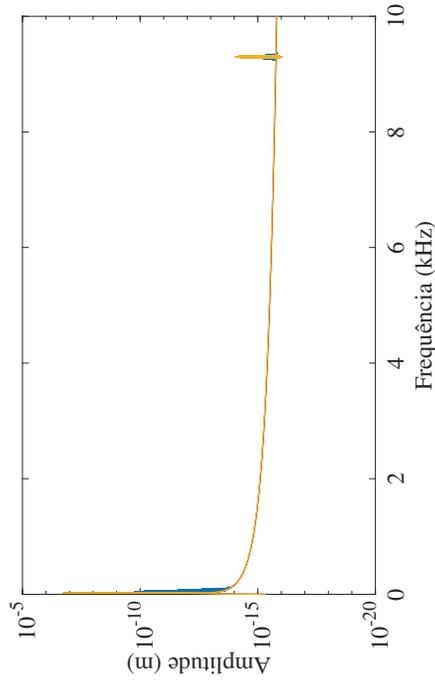
Figura 5.21 – Espectros das amplitudes de vibração do disco desbalanceado em regime permanente. — Modelo não linear; — Modelo linear – método da perturbação infinitesimal.



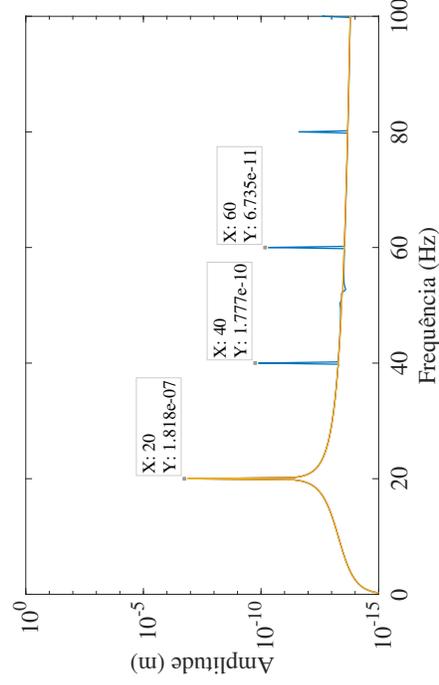
(b) Espectro da amplitude na direção Z.



(d) Ampliação do espectro da amplitude na direção Z.



(a) Espectro da amplitude na direção X.



(c) Ampliação do espectro da amplitude na direção X.

Figura 5.22 – Espectros das amplitudes de vibração do rotor desbalanceado no mancal 2 em regime permanente. — Modelo não linear; — Modelo linear – método da perturbação finita; — Modelo linear – método da perturbação infinitesimal.

## 5.6 Movimento transiente do rotor

Por último, o comportamento dinâmico do rotor desbalanceado é analisado durante a operação de partida. Nesta condição, considera-se que o rotor parte do repouso até uma velocidade de rotação de 2800 rpm em um intervalo de tempo de 10 s, sendo a aceleração angular constante e igual a  $29,322 \text{ rad/s}^2$ .

A Fig. 5.23 mostra a variação da posição de equilíbrio do rotor no mancal a ar de filme espremido com a velocidade de rotação. Nesta figura, é possível observar que à medida que a velocidade de rotação aumenta, o centro do eixo se movimenta nas direções negativa do eixo  $X$  e positiva do eixo  $Z$ .

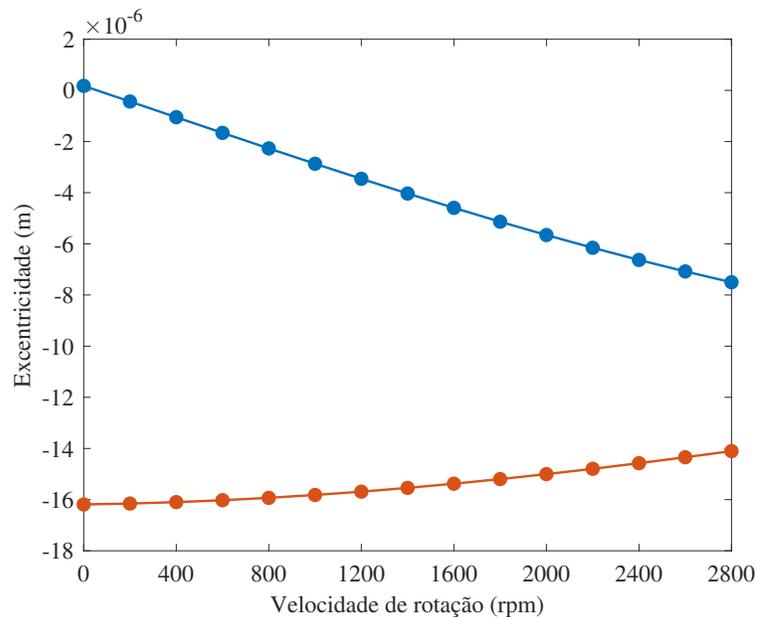


Figura 5.23 – Variação da posição de equilíbrio do rotor no mancal 1 com a velocidade de rotação. — Excentricidade na direção  $X$ ; — Excentricidade na direção  $Z$ .

Depois que a posição de equilíbrio do rotor é determinada para um intervalo discreto de velocidades, seguindo o mesmo procedimento apresentado na Seção 5.3, as forças de reação e os coeficientes dinâmicos do mancal a ar de filme espremido são obtidos utilizando o método da perturbação infinitesimal, conforme mostram as Figs. 5.24 a 5.26.

As Figs. 5.27 a 5.29 apresentam o comportamento transiente do rotor desbalanceado para o caso em que o mancal a ar de filme espremido é representado por um modelo não linear e para o caso em que ele é representado por um modelo linear, onde os coeficientes dinâmicos do mancal são determinados pelo método da perturbação infinitesimal.

A partir das Figs. 5.27 a 5.29, observa-se que em baixas velocidades de rotação os resultados

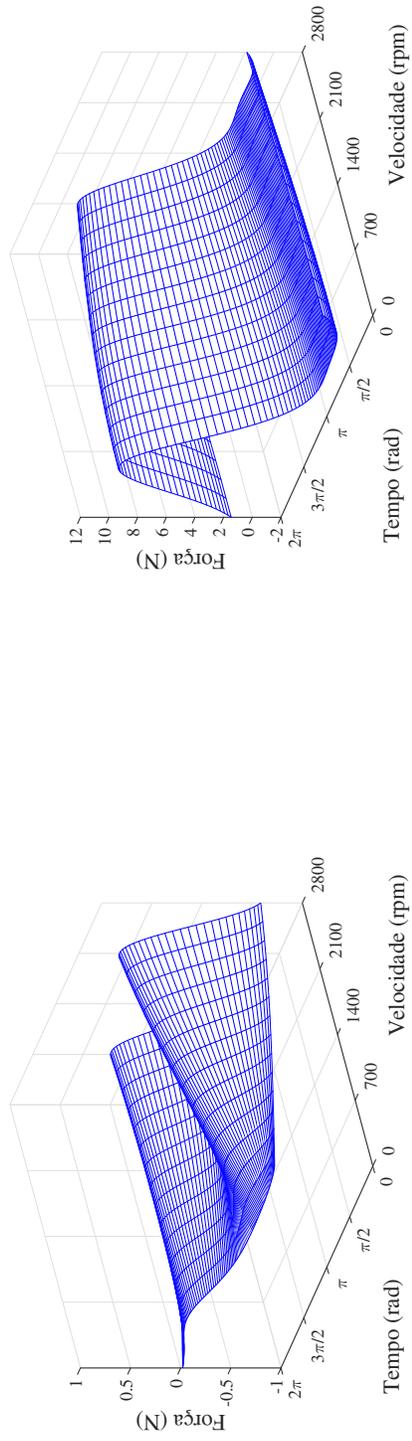
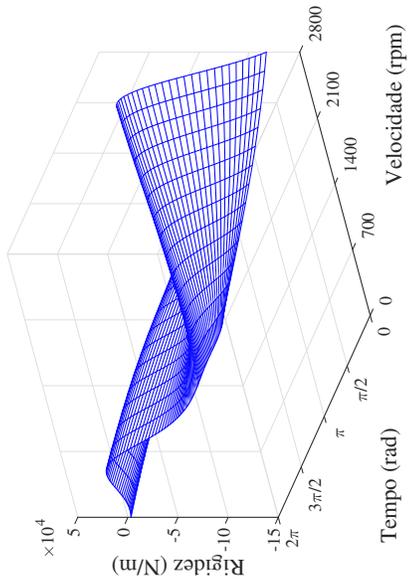
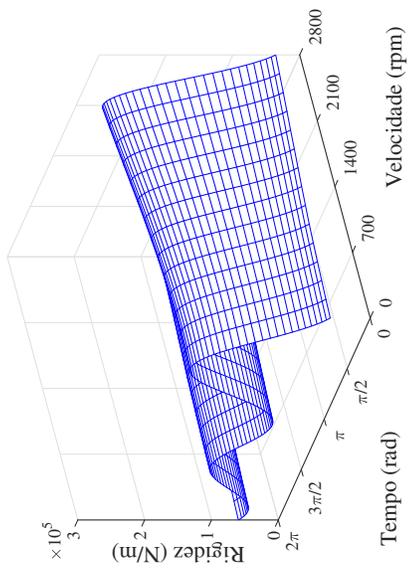


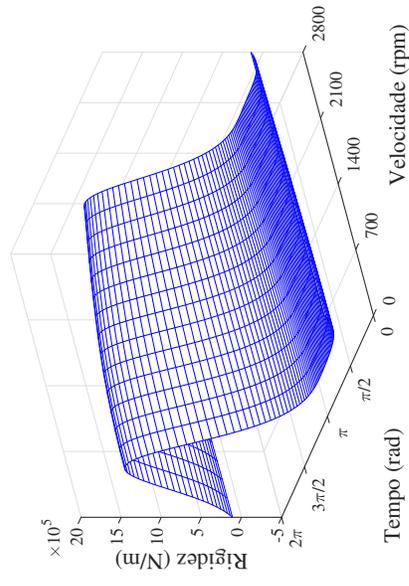
Figura 5.24 – Variações das forças de reação do mancal 1 com a velocidade de rotação.



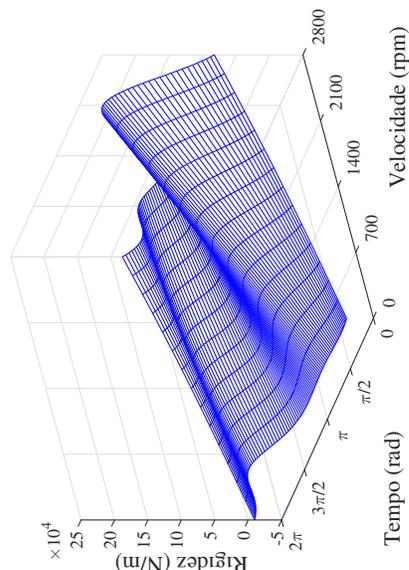
(a) Coeficiente de rigidez  $k_{xx}$ .



(b) Coeficiente de rigidez  $k_{xz}$ .



(c) Coeficiente de rigidez  $k_{zx}$ .



(d) Coeficiente de rigidez  $k_{zz}$ .

Figura 5.25 – Variações dos coeficientes de rigidez do mancal 1 com a velocidade de rotação.

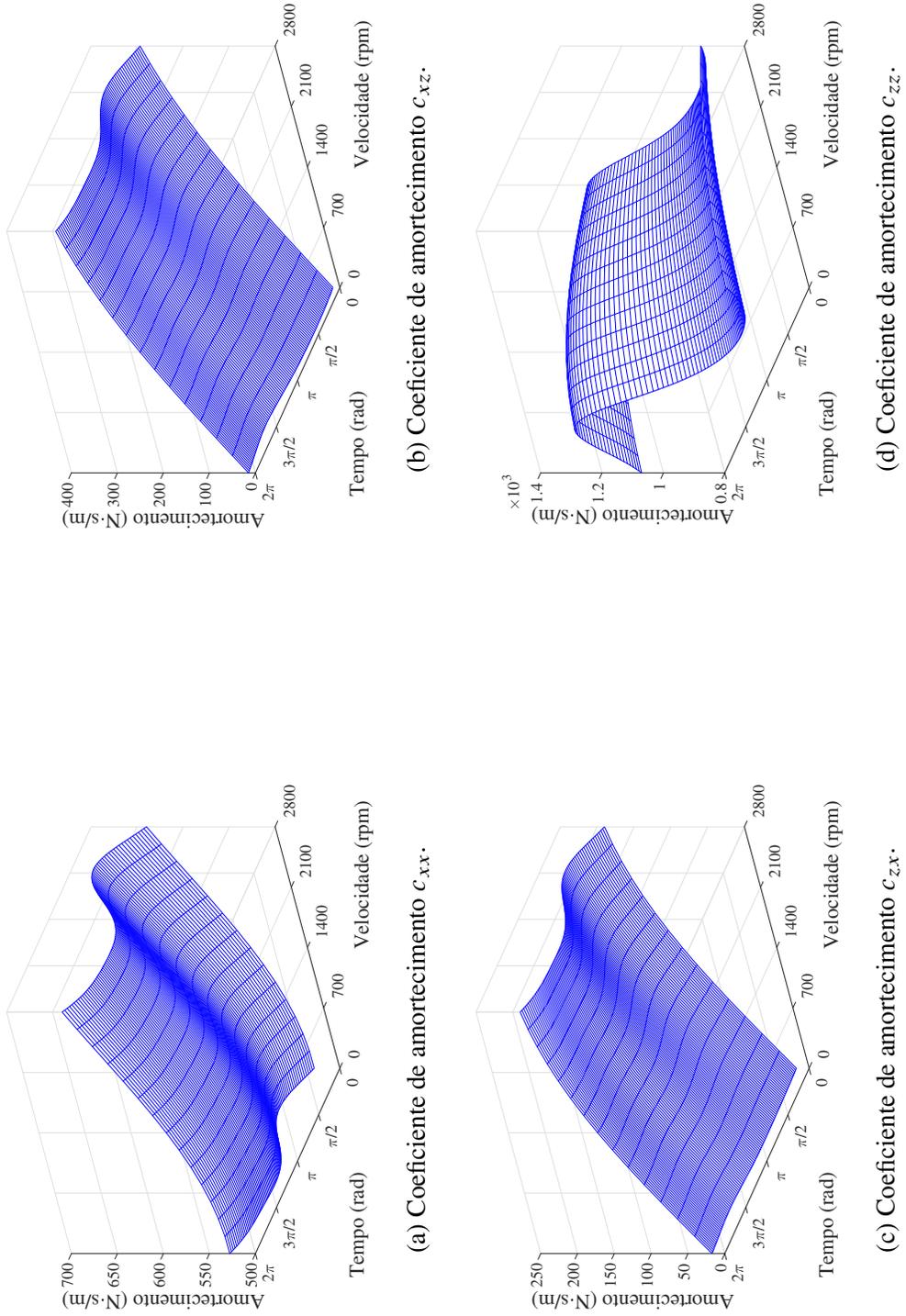
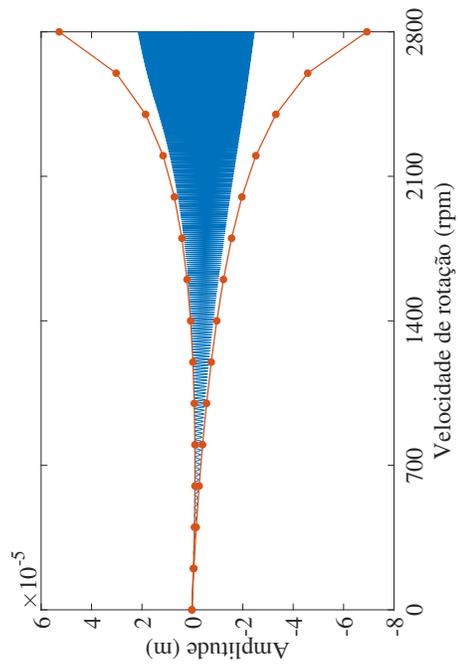
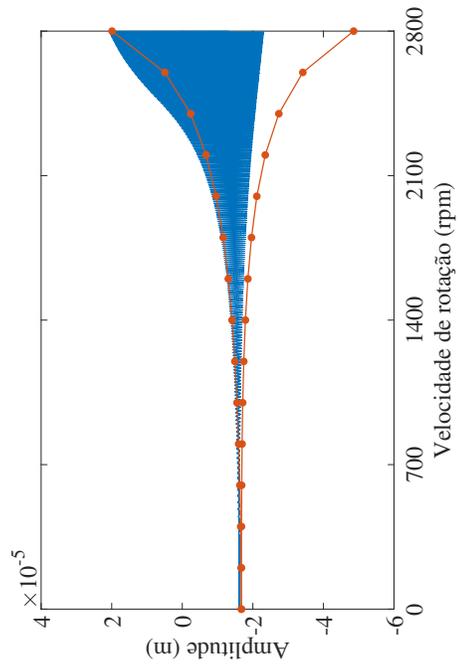


Figura 5.26 – Variações dos coeficientes de amortecimento do mancal I com a velocidade de rotação.

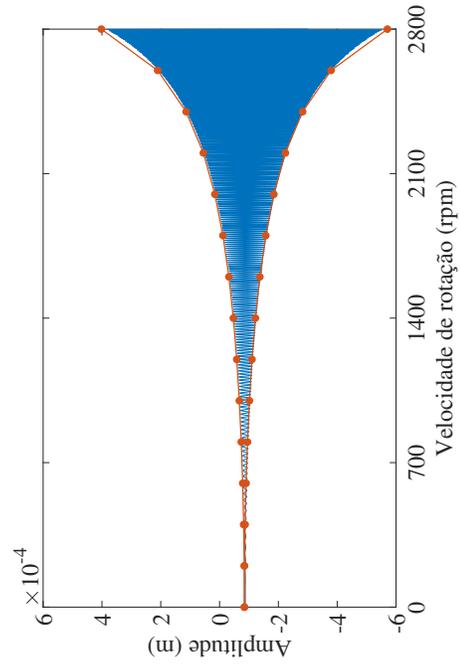


(a) Amplitude de vibração na direção X.

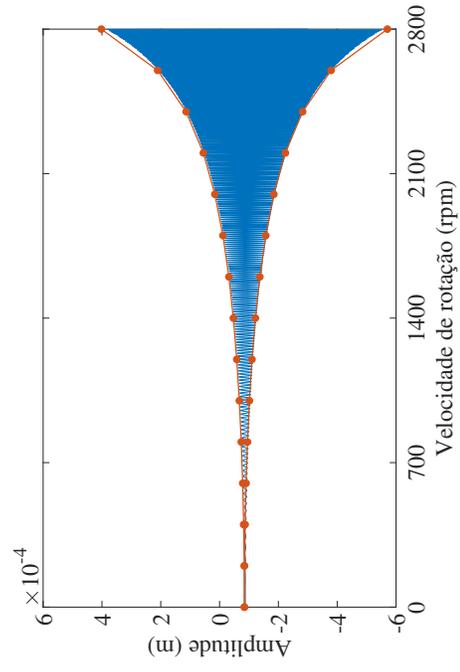


(b) Amplitude de vibração na direção Z.

Figura 5.27 – Amplitudes de vibração do rotor desbalanceado no mancal 1 durante a partida. — Modelo não linear; — Modelo linear – método da perturbação infinitesimal.

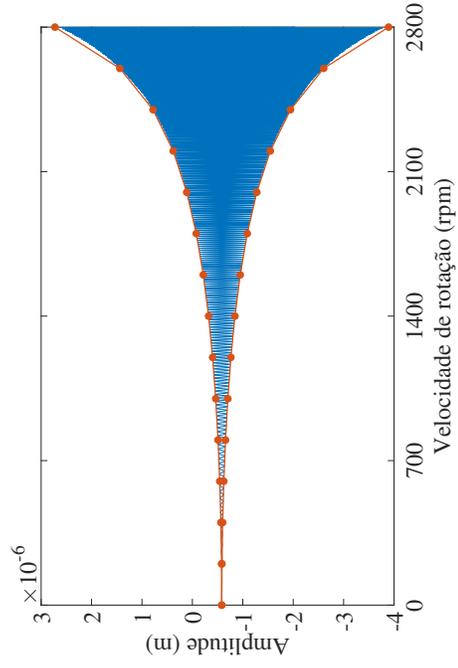


(a) Amplitude de vibração na direção X.

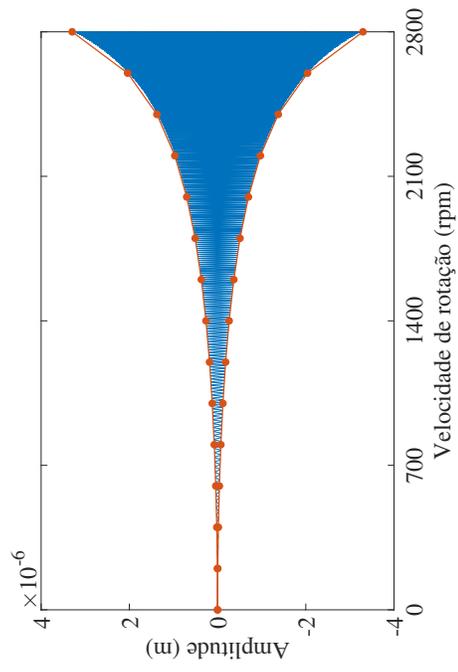


(b) Amplitude de vibração na direção Z.

Figura 5.28 – Amplitudes de vibração do disco desbalanceado durante a partida. — Modelo não linear; — Modelo linear – método da perturbação infinitesimal.



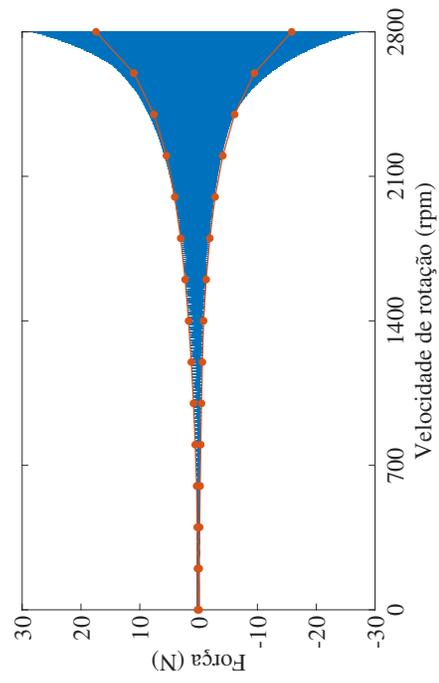
(a) Amplitude de vibração na direção X.



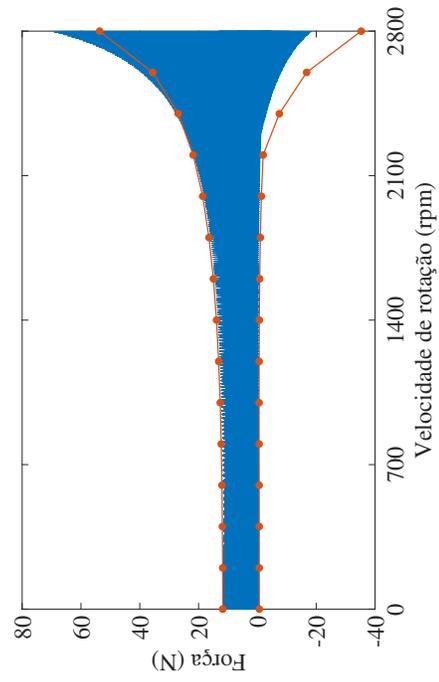
(b) Amplitude de vibração na direção Z.

Figura 5.29 – Amplitudes de vibração do rotor desbalanceado no mancal 2 durante a partida. — Modelo não linear; — Modelo linear – método da perturbação infinitesimal.

obtidos com o modelo linear do mancal a ar de filme espremido se aproximam bastante dos resultados obtidos com o modelo não linear do mancal. No entanto, à medida que a velocidade de rotação aumenta, as amplitudes de vibração do rotor também aumentam, de modo que os coeficientes lineares de rigidez e amortecimento do mancal a ar de filme espremido não são mais adequados para representar as suas forças de reação, conforme mostra a Fig. 5.30. Além disso, os resultados demonstram que devido ao baixo amortecimento e à pequena folga do mancal a ar de filme espremido, o rotor não é capaz de operar passando pela sua primeira velocidade crítica. Acima da velocidade de 2800 rpm, as amplitudes de vibração do rotor são grandes o suficiente para provocar o contato entre o eixo e a superfície interna do mancal.



(a) Força na direção X.



(b) Força na direção Z.

Figura 5.30 – Forças de reação do mancal 1 durante a partida. — Modelo linear – método da perturbação infinitesimal. — Modelo não linear; — Modelo linear – método da perturbação infinitesimal.

# CAPÍTULO VI

## CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo numérico baseado no Método dos Elementos Finitos para simular o comportamento dinâmico de um rotor flexível suportado por dois mancais, sendo um deles o mancal a ar de filme espremido apresentado por Feng et al. (2018). Na análise de elementos finitos do rotor, o mancal a ar de filme espremido foi representado por um modelo não linear, onde as forças de reação foram determinadas a partir da resolução da equação de Reynolds, e por um modelo linear, onde as forças de reação foram determinadas a partir dos coeficientes de rigidez e amortecimento associados, que foram obtidos através dos métodos da perturbação finita e da perturbação infinitesimal.

Diante de tudo o que foi exposto, as principais conclusões alcançadas com a realização deste trabalho são apresentadas a seguir:

- As frequências que mais influenciaram na resposta de vibração do rotor balanceado em regime permanente foram as frequências múltiplas da frequência de excitação do mancal a ar de filme espremido. Já quando o desbalanceamento foi considerado, além dos picos correspondentes às frequências múltiplas da frequência de excitação do mancal a ar de filme espremido, também apareceram nos espectros os picos correspondentes às frequências múltiplas da velocidade de rotação do rotor;
- Apesar das diferenças entre os coeficientes dinâmicos do mancal a ar de filme espremido determinados a partir dos métodos da perturbação finita e da perturbação infinitesimal, as respostas de vibração do rotor obtidas através destes modelos lineares foram bastante próximas entre si;
- Os modelos lineares do mancal a ar de filme espremido foram adequados para representar o comportamento dinâmico do rotor apenas em baixas velocidades de rotação;
- Devido ao baixo amortecimento e à pequena folga do mancal a ar de filme espremido, o rotor

não foi capaz de operar passando pela sua primeira velocidade crítica.

Então, como sugestões para trabalhos futuros pode-se citar:

- A concepção, o projeto e a fabricação de um novo tipo de mancal sem contato baseado na levitação acústica de campo próximo para ser utilizado em uma bancada de rotor flexível que possa operar passando pelas suas velocidades críticas;
- O desenvolvimento do modelo matemático do mancal a ar de filme espremido projetado;
- A construção da bancada e a realização de testes experimentais para validar os resultados numéricos obtidos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABREU, G. L. C. M. de. **Controle ativo de vibrações laterais em rotores flexíveis usando atuadores magnéticos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 1998. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/19590>>.
- ADAMS, M. L. **Bearings: Basic concepts and design applications**. 1. ed. Boca Raton: CRC Press, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1201/b22177>>.
- ANDRADE, M. A. B.; PÉREZ, N.; ADAMOWSKI, J. C. Review of progress in acoustic levitation. **Brazilian Journal of Physics**, v. 48, n. 2, p. 190–213, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s13538-017-0552-6>>.
- ATHERTON, M. A.; MARES, C.; STOLARSKI, T. A. Some fundamental aspects of self-levitating sliding contact bearings and their practical implementations. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology**, v. 228, n. 9, p. 916–927, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1350650113517110>>.
- BOULLOSA, R. R.; PÉREZ-LÓPEZ, A.; DORANTES-ESCAMILLA, R. An ultrasonic levitator. **Journal of Applied Research and Technology**, v. 11, n. 6, p. 857–865, 2013. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S1665-6423\(13\)71592-X](https://doi.org/10.1016/S1665-6423(13)71592-X)>.
- BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. **Elementos de máquinas de Shigley: Projeto de engenharia mecânica**. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.
- CAVALINI JR, A. A. **Deteção e identificação de trincas transversais incipientes em eixos horizontais flexíveis de máquinas rotativas**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2013. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14730>>.
- CAVALINI JR, A. A.; LARA-MOLINA, F. A.; SALES, T. de P.; KOROISHI, E. H.; STEFFEN JR, V. Uncertainty analysis of a flexible rotor supported by fluid film bearings. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 12, n. 8, p. 1487–1504, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1679-78251582>>.
- CHIEH, H. **Modelagem e análise computacional da lubrificação do conjunto eixo, biela e pistão em compressores alternativos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007. Disponível em: <<http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/90306>>.
- CHONG, F.-S. **Vibration analysis of hybrid bearings**. Tese (Doutorado) — Liverpool Polytechnic, 1985.

COWPER, G. R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. **Journal of Applied Mechanics**, v. 33, n. 2, p. 335–340, 1966. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3625046>>.

CUNHA, B. Z. **Efeitos das condições de alimentação de óleo de mancais lubrificados no comportamento dinâmico do rotor**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2019.1126289>>.

DA SILVA, L. J. **Mancais aerostáticos porosos fabricados em compósito cimentício reforçado com nanotubos de carbono**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1843/BUBD-A3QPE7>>.

DÍAZ GARCÍA, J. A. **Sistematización del diseño de dispositivos de levitación superconductor por efecto Meissner**. Tese (Doutorado) — Universidad Carlos III de Madrid, Leganés, 2008. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10016/5136>>.

DU, J.; LIANG, G. Dynamic coefficients and stability analysis of a water-lubricated hydrostatic bearing by solving the uncoupled Reynolds equation. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 33, n. 8, p. 2110–2122, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cja.2019.09.030>>.

DURAZO-CARDENAS, I. S. **Development of porous-ceramic hydrostatic bearings**. Tese (Doutorado) — Cranfield University, 2003. Disponível em: <<https://dspace.lib.cranfield.ac.uk/handle/1826/3683>>.

EMMERICH, C. L. **Piezoelectric oscillating bearing**. 1967. US Patent 3351393.

FARRON, J. R.; TEITELBAUM, B. R. **Squeeze film bearings**. 1969. US Patent 3471205.

FENG, K.; SHI, M.; GONG, T.; LIU, Y.; ZHU, J. A novel squeeze-film air bearing with flexure pivot-tilting pads: Numerical analysis and measurement. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 134, p. 41–50, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.09.051>>.

FENG, K.; SHI, M.; GONG, T.; HUANG, Z. Integrated numerical analysis on the performance of a hybrid gas-lubricated bearing utilizing near-field acoustic levitation. **Tribology Transactions**, v. 61, n. 3, p. 482–493, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10402004.2017.1359714>>.

FORTUNA, A. de O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: Conceitos básicos e aplicações**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.

HA, D. N.; STOLARSKI, T. A.; YOSHIMOTO, S. An aerodynamic bearing with adjustable geometry and self-lifting capacity. Part 1: self-lift capacity by squeeze film. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology**, v. 219, n. 1, p. 33–39, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1243/135065005X9682>>.

HAMROCK, B. J.; SCHMID, S. R.; JACOBSON, B. O. **Fundamentals of fluid film lubrication**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1201/9780203021187>>.

HARNOY, A. **Bearing design in machinery: Engineering tribology and lubrication**. 1. ed. New York: CRC Press, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1201/9780203909072>>.

HARRIS, T. A. **Rolling bearing analysis**. 4. ed. New York: John Wiley & Sons, 2001.

HARRISON, W. J. The hydrodynamical theory of lubrication with special reference to air as a lubricant. **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**, v. 22, n. 3, p. 39–54, 1913.

HOOGEBOOM, R. P. **Design and experimental validation of low stiffness aerostatic thrust bearings**. Dissertação (Mestrado) — Delft University of Technology, 2016. Disponível em: <<http://resolver.tudelft.nl/uuid:5c38b180-95a3-42ed-9162-21214fcf4204>>.

IDE, R. D. **Fluid dampened support for rolling element bearings**. 1995. US Patent 5425584.

ILSSAR, D.; BUCHER, I. The effect of acoustically levitated objects on the dynamics of ultrasonic actuators. **Journal of Applied Physics**, v. 121, n. 11, p. 114504, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4978365>>.

ILSSAR, D.; BUCHER, I.; FLASHNER, H. Modeling and closed loop control of near-field acoustically levitated objects. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 85, p. 367–381, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.08.011>>.

IMBERT, J.-F. **Analyse des structures par éléments finis**. Toulouse: Cépaduès, 1979.

KHONSARI, M. M.; BOOSER, E. R. **Applied tribology: Bearing design and lubrication**. 3. ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/9781118700280>>.

KWAN, Y.-B. P.; POST, J. B. A tolerancing procedure for inherently compensated, rectangular aerostatic thrust bearings. **Tribology International**, v. 33, n. 8, p. 581–585, 2000. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0301-679X\(00\)00109-2](https://doi.org/10.1016/S0301-679X(00)00109-2)>.

LA ROVERE, H. L. **Estudo de algoritmos de integração direta para análise dinâmica estrutural**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1983. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11422/3369>>.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics prediction in engineering**. 2. ed. Chichester, New York: John Wiley, 1998.

LANGLOIS, W. E. Isothermal squeeze films. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 20, n. 2, p. 131–150, 1962. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/qam/99963>>.

LI, H.; DENG, Z. Experimental study on friction characteristics and running stability of a novel ultrasonic levitating bearing. **IEEE Access**, v. 6, p. 21719–21730, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2826570>>.

LI, H.; QUAN, Q.; DENG, Z.; HUA, Y.; WANG, Y.; BAI, D. A novel noncontact ultrasonic levitating bearing excited by piezoelectric ceramics. **Applied Sciences**, v. 6, n. 10, p. 280, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/app6100280>>.

LUND, J. W. Review of the concept of dynamic coefficients for fluid film journal bearings. **Journal of Tribology**, v. 109, n. 1, p. 37–41, 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3261324>>.

MACHADO, L. H. J. **Análise experimental do comportamento dinâmico de mancais radiais hidrodinâmicos de geometria fixa**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1843/SBPS-7B4P9W>>.

MEGGIOLARO, M. A. **Modelagem de mancais hidrodinâmicos na simulação de sistemas rotativos**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.17771/PUCRio.acad.19287>>.

MERELLI, C. E.; BARILÁ, D. O.; VIGNOLO, G. G.; QUINZANI, L. M. Dynamic coefficients of finite length journal bearing. Evaluation using a regular perturbation method. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 151, p. 251–262, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.11.018>>.

MOROZ, L.; ROMANENKO, L.; KOCHUROV, R.; KASHTANOV, E. Load influence on hydrostatic oil film journal bearing stiffness characteristics. In: **Proceedings of the ASME Turbo Expo 2020: Turbomachinery Technical Conference and Exposition**. Virtual, Online: ASME, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/GT2020-15008>>.

NEVES, A. T. **Geração automatizada de malhas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.11606/D.55.2018.tde-13032018-090103>>.

NICOLETTI, R. **Mancais segmentados com lubrificação ativa: teoria, experimento e aplicação**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2003.281906>>.

NIELSEN, B. B. **Combining gas bearing and smart material technologies for improved machine performance: theory and experiment**. Tese (Doutorado) — Technical University of Denmark, 2017. Disponível em: <<https://orbit.dtu.dk/en/publications/combining-gas-bearing-and-smart-material-technologies-for-improve>>.

OIWA, T.; KATO, M. Squeeze air bearing based on ultrasonic oscillation: Motion error compensation using amplitude modulation. **Review of Scientific Instruments**, v. 75, n. 11, p. 4615–4620, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1765762>>.

OLIVEIRA, A. G. de. **Técnicas de caracterização de excitações em máquinas rotativas**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 1999. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14764>>.

PANTOJA ROSERO, B. G. **Análise dinâmica de estruturas de concreto armado via elementos finitos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.unb.br/handle/10482/32054>>.

PENG, J.-P.; CARPINO, M. Calculation of stiffness and damping coefficients for elastically supported gas foil bearings. **Journal of Tribology**, v. 115, n. 1, p. 20–27, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.2920982>>.

QIU, Z. L.; TIEU, A. K. The effect of perturbation amplitudes on eight force coefficients of journal bearings. **Tribology Transactions**, v. 39, n. 2, p. 469–475, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10402009608983554>>.

RAMOS, T. S. **Força de radiação acústica produzida por ondas estacionárias de ultrassom**. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.11606/T.3.2017.tde-06122017-085952>>.

RAPARELLI, T.; VIKTOROV, V.; COLOMBO, F.; LENTINI, L. Aerostatic thrust bearings active compensation: Critical review. **Precision Engineering**, v. 44, p. 1–12, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2015.11.002>>.

REYNOLDS, O. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. **Philosophical Transactions of the Royal Society**, v. 177, p. 157–234, 1886. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rstl.1886.0005>>.

ROCHA, R. de O. **Modelagem e simulação computacional em dinâmica de rotores via Método dos Elementos Finitos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1992.

ROLNIK, V. P. **Obtenção automatizada da expressão do erro de truncamento presente na discretização de equações diferenciais parciais**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.11606/D.55.2018.tde-19032018-103116>>.

RUSSO, F. H. **Identificação das propriedades dinâmicas de mancais segmentados híbridos: teoria e experimento**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.1999.199281>>.

SALBU, E. O. J. Compressible squeeze films and squeeze bearings. **Journal of Basic Engineering**, v. 86, n. 2, p. 355–364, 1964. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3653080>>.

SCRANTON, R. A. **Planar and cylindrical oscillating pneumatodynamic bearings**. 1987. US Patent 4666315.

SHI, M.; AN, L.; FENG, K.; GUO, Z.; LIU, W. Numerical and experimental study on the influence of material characteristics on the levitation performance of squeeze-film air bearing. **Tribology International**, v. 126, p. 307–316, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2018.05.030>>.

SHOU, T.; YOSHIMOTO, S.; STOLARSKI, T. Running performance of an aerodynamic journal bearing with squeeze film effect. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 77, p. 184–193, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.10.005>>.

SILVEIRA, M. E. **Análise do comportamento dinâmico de rotores em eixos bobinados**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001. Disponível em: <<http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/80127>>.

SOUTO, C. d'A. **Estudo do comportamento dinâmico de máquinas rotativas através da análise modal complexa**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2000.197834>>.

STOLARSKI, T. A. Running characteristics of aerodynamic bearing with self-lifting capability at low rotational speed. **Advances in Tribology**, v. 2011, p. 1–10, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2011/973740>>.

STOUT, K. J.; SWEENEY, F. Design of aerostatic flat pad bearings using pocketed orifice restrictors. **Tribology International**, v. 17, n. 4, p. 191–198, 1984. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0301-679X\(84\)90019-7](https://doi.org/10.1016/0301-679X(84)90019-7)>.

THOMAS, G. P. L.; ANDRADE, M. A. B.; ADAMOWSKI, J. C.; SILVA, E. C. N. Development of an acoustic levitation linear transportation system based on a ring-type structure. **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control**, v. 64, n. 5, p. 839–846, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TUFFC.2017.2673244>>.

TOWER, B. First report on friction experiments. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, v. 34, n. 1, p. 632–659, 1883. Disponível em: <[https://doi.org/10.1243/PIME\\_PROC\\_1883\\_034\\_028\\_02](https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1883_034_028_02)>.

TSUKAMOTO, R. **Estudo comparativo entre mancais aerostáticos com restritor de orifício e com elemento cerâmico poroso**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.11606/D.18.2017.tde-10042017-125439>>.

VANCE, J. M. **Rotordynamics of turbomachinery**. New York: John Wiley & Sons, 1988.

VANDAELE, V.; LAMBERT, P.; DELCHAMBRE, A. Non-contact handling in microassembly: Acoustical levitation. **Precision Engineering**, v. 29, n. 4, p. 491–505, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2005.03.003>>.

WARNOCK JR, L. F. **Dynamic gas film supported inertial instrument**. 1967. US Patent 3339421.

WAUMANS, T.; PEIRS, J.; AL-BENDER, F.; REYNAERTS, D. Aerodynamic journal bearing with a flexible, damped support operating at 7.2 million DN. **Journal of Micromechanics and Microengineering**, v. 21, n. 10, p. 104014, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0960-1317/21/10/104014>>.

WIESENDANGER, M. **Squeeze film air bearings using piezoelectric bending elements**. Tese (Doutorado) — École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2001.

WRIGGERS, P. **Nonlinear finite element methods**. Berlin: Springer, 2008.

WU, M.; ZHU, H. Backstepping control of three-pole radial hybrid magnetic bearing. **IET Electric Power Applications**, v. 14, n. 8, p. 1405–1411, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1049/iet-epa.2019.1008>>.

ZHAO, S. **Investigation of non-contact bearing systems based on ultrasonic levitation**. Tese (Doutorado) — Paderborn University, 2010.