



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA



Rafael Yuri Medeiros Barbosa

Determinação de Parâmetros Ótimos no Processo de Deságue em Peneiras Vibratórias

Uberlândia - MG

2021

Rafael Yuri Medeiros Barbosa

Determinação de Parâmetros Ótimos no Processo de Deságue em Peneiras Vibratórias

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Química

Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Engenharia Química

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química

Orientador: Prof. Dr. Rubens Gedraite

Uberlândia - MG

2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

B238 Barbosa, Rafael Yuri Medeiros, 1996-
2021 Determinação de Parâmetros Ótimos no Processo de
Deságue em Peneiras Vibratórias [recurso eletrônico] /
Rafael Yuri Medeiros Barbosa. - 2021.

Orientador: Rubens Gedraite.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Química.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.676>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Engenharia química. I. Gedraite, Rubens, 1958-,
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-
graduação em Engenharia Química. III. Título.

CDU: 66.0

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

Rafael Yuri Medeiros Barbosa

Determinação de Parâmetros Ótimos no Processo de Deságue em Peneiras Vibratórias

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Química

Trabalho aprovado. Uberlândia - MG, 23 de dezembro de 2021:

Prof. Dr. Rubens Gedraite (Orientador)
FEQUI - UFU

Prof. Dr. Luiz Gustavo Martins Vieira
FEQUI-UFU

Prof. Dr. Claudio Garcia
POLI-USP

Uberlândia - MG
2021



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Química				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado, 24/2021, PPGEQ				
Data:	23 de dezembro de 2021	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	17:18
Matrícula do Discente:	11922EQU011				
Nome do Discente:	Rafael Yuri Medeiros Barbosa				
Título do Trabalho:	Determinação de parâmetros operacionais ótimos no processo de deságue por meio de peneiras vibratórias				
Área de concentração:	Desenvolvimento de Processos Químicos				
Linha de pesquisa:	Modelagem, controle e otimização de processos químicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Controle preditivo não-linear para transições operacionais robustas				

Reuniu-se por meio de webconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Química, assim composta: Professores Doutores: Claudio Garcia - LAC/USP; Luiz Gustavo Martins Vieira - PPGEQ/UFU e Rubens Gedraite - PPGEQ/UFU.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Prof. Dr. Rubens Gedraite, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Rubens Gedraite, Professor(a) do Magistério Superior**, em 23/12/2021, às 17:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luiz Gustavo Martins Vieira, Professor(a) do Magistério Superior**, em 23/12/2021, às 17:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Claudio Garcia, Usuário Externo**, em 23/12/2021, às 17:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3278542** e o código CRC **D7615FE1**.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, que por meio de sua inteligência infinita, conduziu-me nessa pesquisa, renovando-me as energias nos momentos de dificuldade, dando-me condições para superar os obstáculos que apareceram.

Agradeço a minha mãe, Alexsandra, por todo apoio e motivação que me deu, em especial nos momentos mais difíceis. Ao meu irmão Leandro, agradeço pelo incentivo e ajuda que me forneceu na reta final da presente dissertação.

Agradeço também aos meus amigos Aldimiro e Leonardo pelo companheirismo ao longo do curso de mestrado, pelas discussões de conteúdos complexos das disciplinas que cursamos, ao apoio nos estudos e aos momentos de descontração que tivemos.

Deixo também um agradecimento ao meu orientador, professor Rubens, não só pela orientação, mas por todos os conselhos e pela preocupação que teve comigo ao longo desse projeto, fornecendo-me todo o apoio necessário para a realização dessa dissertação.

Agradeço aos colegas do laboratório de otimização e modelagem de processos químicos, pelas conversas descontraídas nos momentos tensos, pelos ensinamentos que me transmitiram e por todo apoio na realização da minha pesquisa.

Deixo um agradecimento especial a minha amiga Marcella Almeida, pelo companheirismo nos momentos da pandemia, pelos conselhos, pelas dicas e por suas palavras de otimismo.

Por fim, agradeço à PETROBRAS S.A. e à CAPES pelo suporte financeiro concedido a esse projeto de mestrado.

Resumo

A etapa de controle de sólidos na indústria petrolífera tem como principais objetivos a recuperação do fluido de perfuração para reutilizá-lo no processo e adequação do material sólido para um descarte seguro obedecendo às leis ambientais vigentes. Na etapa de controle de sólidos, as peneiras vibratórias são os primeiros equipamentos utilizados e esse equipamento tem como função recuperar o máximo de fluido de perfuração possível, dessa forma, reduzindo o teor de fluido do sólido residual para as demais etapas do sistema de controle de sólidos. Por se tratar do primeiro equipamento do controle de sólidos, o funcionamento otimizado das peneiras vibratórias otimiza todo o processo de controle de sólidos. Nesse trabalho é apresentada uma proposta de modelo matemático de base fenomenológica que descreve a operação de uma peneira vibratória, também são apresentadas simulações para um cenário de alimentação isenta de sólidos, resultados experimentais obtidos em uma peneira vibratória de escala industrial e parâmetros ótimos de operação que reduzem o teor de líquido do material sólido. Os resultados indicaram que maiores tempos de residência do material sobre a tela da peneira favorecem a redução do teor de líquido no sólido residual.

Palavras-chaves: Peneiras vibratórias. Otimização. Modelagem matemática.

Abstract

The main objectives of the solids control stage in the oil industry are to recover the drilling fluid to reuse it in the process and adapt the solid material for safe disposal, in compliance with current environmental laws. In the solids control step, shale shakers are the first equipment used and this equipment has the function of recovering as much drilling fluid as possible, thus reducing the fluid content of the residual solid for the other steps of the solids control system . As this is the first equipment in solids control, the optimized operation of shale shakers optimizes the entire solids control process. This work presents a proposal of a mathematical model of phenomenological basis that describes the operation of a shale shaker, and it also presents simulations for a scenario of solid-free feeding, experimental results obtained in an industrial-scale vibratory sieve and optimal operating parameters that reduce the liquid content of the solid material. The results indicated that longer residence times of the material on the shale shaker screen favor the reduction of the liquid content in the residual solid.

Key-words: Shale shakers. Optimization. Mathematical modeling.

*“Tudo que a mente humana
pode conceber e acreditar,
ela pode conquistar.”
(Napoleon Hill)*

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Esquema de uma unidade de controle de sólidos.	4
Figura 2.2 – Equipamentos que compõem uma unidade de controle de sólidos e suas capacidades de remoção.	5
Figura 2.3 – Dispositivo removedor de gumbo.	5
Figura 2.4 – Peneira vibratória <i>Mongoose Pro Shaker</i>	6
Figura 2.5 – Exemplificação de um <i>desander</i>	7
Figura 2.6 – Exemplificação de um <i>desilter</i>	7
Figura 2.7 – Exemplificação de um <i>mud cleaner</i>	7
Figura 2.8 – Esquematisação de uma centrífuga decantadora.	8
Figura 2.9 – Tendência da aceleração do sistema.	9
Figura 2.10 – Forças que atuam na cinética do pistão de líquido.	9
Figura 2.11 – Cinética simultânea do filme e do pistão de líquido no processo de deságue em peneiras vibratórias.	11
Figura 2.12 – Diagrama da seção de formação de torta.	12
Figura 3.1 – Esquematisação de uma peneira vibratória.	15
Figura 3.2 – Coeficiente de descarga (C_D) em função do número de Reynolds (Re).	19
Figura 4.1 – Representação de um domínio unidimensional.	24
Figura 4.2 – Representação esquemática da unidade experimental utilizada.	38
Figura 5.1 – Comportamento do fluido sobre a tela da peneira no processo de deságue.	45
Figura 5.2 – Comportamento da altura em estado estacionário para uma vazão de alimentação $Q_A = 0,01 \frac{m^3}{s}$	46

Lista de tabelas

Tabela 4.1 – Número de volumes de controle (NVC) em cada malha de teste unidimensional.	31
Tabela 4.2 – Ordem nominal e ordem observada para o problema apresentado na Equação 4.33.	32
Tabela 5.1 – Parâmetros utilizados nas simulações do processo de deságue em peneiras vibratórias.	44
Tabela 5.2 – Valores codificados referentes a cada variável analisada no PCC.	47
Tabela 5.3 – Concentração mássica de líquido para cada condição operacional analisada.	48
Tabela 5.4 – Valores de função de probabilidade para cada coeficiente da superfície de resposta da Equação 5.5.	49
Tabela 5.5 – Valores ótimos de parâmetro g e inclinação que minimizam a concentração mássica de água na saída da tela da peneira ($x = L$).	50

Lista de símbolos

Romanos

A_x, A_z	Amplitude do movimento dos motovibradores na direção x e z [m]
a_x, a_z	Componentes da aceleração imposta pelos motovibradores da peneira nas direções x e z [$\frac{m}{s^2}$]
C_D	Coefficiente de descarga [-]
c_l	Concentração mássica de líquido [-]
C_p	Capacitância da tela da peneira [m]
c_s	Concentração mássica de sólidos [-]
c_{sA}	Concentração mássica de sólidos na alimentação [-]
c_{v_l}	Concentração volumétrica de líquido [-]
c_{v_s}	Concentração volumétrica de sólidos [-]
f	Frequência imposta aos motovibradores [$\frac{1}{s} = Hz$]
f_a	Fração de área aberta da tela da peneira [-]
F_g	Fator g , adimensional referente a quantas vezes a aceleração máxima de um sistema é superior à aceleração da gravidade [-]
F_{g_z}	Componente do fator g obtida a partir da aceleração na direção z [-]
\vec{g}	Vetor da aceleração da gravidade [$\frac{m}{s^2}$]
H	Altura de lama (mistura fluido+sólido) sobre a tela da peneira [m]
L	Comprimento total da tela da peneira [m]
P	Pressão [$\frac{kg}{ms^2} = Pa$]

Q_A	Vazão volumétrica da mistura sólido-líquido que alimenta a peneira [m^3]
r^2	Coefficiente de determinação [-]
Re	Número de Reynolds [-]
\vec{v}	Vetor velocidade [$\frac{m}{s}$]
v_x, v_z	Componentes do vetor velocidade nas direções x e z [$\frac{m}{s}$]
W	Largura da tela da peneira [m]
x	Direção paralela à superfície da tela da peneira vibratória [m]
x_i	Coordenada do centroide do volume de controle i [m]
\bar{x}_i^n	Momento geométrico associado ao volume de controle i [m^n]
\widehat{x}_{ij}^n	Termo geométrico associado ao volume de controle i e ao j -ésimo elemento do seu estêncil [m^n]
z	Direção perpendicular à superfície da tela da peneira vibratória [m]

Gregos

α	Inclinação da tela da peneira em relação ao plano horizontal [$^\circ$]
δ	Delta de Kronecker [-]
Δx_i	Tamanho do passo na direção x para o volume de controle i [m]
Δt	Tamanho do passo no tempo [s]
ϕ	diâmetro do fio da tela da peneira [m]
γ	Ângulo de fase associado ao tipo de movimento imposto à tela da peneira pelos motovibradores [$^\circ$]
κ	Viscosidade dilatacional [$\frac{kg}{ms}$]
μ	Viscosidade dinâmica da mistura sólido-fluido [$\frac{kg}{ms}$]
μ_l	Viscosidade dinâmica do líquido [$\frac{kg}{ms}$]
$\vec{\eta}$	Vetor normal em relação à face de um volume de controle [m]
ω	Velocidade angular dos motovibradores [s^{-1}]
ρ	Massa específica da mistura sólido-líquido [$\frac{kg}{m^3}$]
ρ_A	Massa específica da mistura sólido-líquido na alimentação [$\frac{kg}{m^3}$]

ρ_s, ρ_l	Massa específica do sólido e do líquido $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
τ	Tensor viscoso $\left[\frac{kg}{ms^2}\right]$
ξ	Fator de eficiência relacionada à aceleração real transmitida à tela da peneira vibratória [-]
Outros	
∇	Operador diferencial $[m^{-1}]$

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Contextualização	1
1.2	Objetivos	2
1.3	Organização da dissertação	2
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1	Controle de sólidos	4
2.1.1	Removedor de gumbo	5
2.1.2	Peneiras vibratórias	6
2.1.3	Hidrociclones	6
2.1.4	Centrífugas decantadoras	7
2.2	Estudos referentes à modelagem do deságue em peneiras vibratórias	8
2.2.1	Modelo de Keller e Stahl	8
2.2.2	Modelo de Raja et al	11
3	MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROCESSO DE DESÁGUE EM PENEIRAS VIBRATÓRIAS	14
3.1	Equações que definem o modelo	14
3.2	Propriedades da mistura	20
4	METODOLOGIAS NUMÉRICAS E UNIDADE EXPERIMENTAL	22
4.1	Método dos volumes finitos (MVF) com reconstrução de alta ordem por mínimos quadrados unidimensional	22
4.2	Metodologia de integração no tempo	28
4.3	Verificação computacional	30
4.3.1	Verificação do MVF com reconstrução de alta ordem unidimensional	31
4.4	Aplicação do método dos volumes finitos ao modelo de deságue em peneiras vibratórias	32
4.5	Unidade experimental	37
4.6	Metodologia de otimização	39
4.6.1	Método da evolução diferencial	40
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	43
5.1	Resultados referentes ao modelo proposto	43
5.2	Resultados experimentais	47
5.3	Parâmetros ótimos para o processo de deságue em peneiras vibratórias	49

	6 CONCLUSÕES E PROPOSTAS FUTURAS	51
6.1	Conclusões	51
6.2	Propostas futuras	52
	REFERÊNCIAS	53

Introdução

1.1 Contextualização

O processo de perfuração é uma das etapas iniciais do processo de exploração de petróleo. Os fragmentos de rocha oriundos da perfuração são continuamente retirados pelo fluido de perfuração. Geralmente, esse fluido é injetado no reservatório por meio de bombas pelo interior da coluna de perfuração e volta à superfície através do espaço anular entre as paredes do reservatório e a coluna de perfuração (THOMAS, 2004).

Quando não retirados, os sólidos resultantes da perfuração (também denominados de cascalho) podem comprometer as propriedades desejadas do fluido de perfuração. A remoção desse cascalho é feita por um processo de controle de sólidos, que deixa o fluido apropriado para reinjeção no reservatório e também é uma alternativa mais viável economicamente que a diluição desse fluido (AMERICAN ASSOCIATION OF DRILLING ENGINEERS, 1999). Os equipamentos utilizados para promover a separação são as peneiras vibratórias, os hidrociclones e as centrífugas decantadoras.

Além do viés econômico, o controle de sólidos é necessário devido às rígidas políticas ambientais vigentes. Segundo a agência de proteção ambiental americana, o teor de fluido sintético aderido aos cascalhos descartados em plataformas *offshore* não pode ultrapassar 6,9% em massa e o descarte de cascalhos contaminados com fluido de base oleosa é proibido (WHITE, 2000).

As peneiras vibratórias (*shale shakers*) são os primeiros equipamentos de um sistema de controle de sólidos, sendo responsáveis por recuperar uma grande quantidade de fluido de perfuração, que passa pelas aberturas da tela da peneira, e deixar o sólido residual com um teor de fluido de perfuração menor para as etapas seguintes do controle de sólidos (NASCENTES, 2019).

A eficiência da separação do fluido de perfuração das partículas sólidas é influenciada pelas características da tela, pela concentração de sólidos na alimentação, pela forma e

distribuição granulométrica das partículas, pela vazão de alimentação, inclinação do cesto e intensidade de vibração.

A peneira vibratória é o primeiro equipamento do controle de sólidos, portanto a eficiência do processo depende do bom funcionamento desse equipamento. Logo, se esse equipamento operar na sua condição ótima, todo processo de controle de sólidos será de certa forma otimizado (ASME, 2005).

O processo de otimização de um problema exige a elaboração de uma função objetivo. Para o caso da otimização do funcionamento de uma peneira vibratória, seria necessário conhecer como o teor de umidade do sólido residual varia em função das condições operacionais, cujo valor ótimo é desejado.

1.2 Objetivos

Esta dissertação de mestrado apresenta como objetivo geral:

- a determinação de condições ótimas de operação de uma peneira vibratória que minimizem o teor de fluido no sólido residual ao final da tela de peneiramento.

Como objetivos específicos, essa dissertação tem:

- a elaboração de um modelo fenomenológico que determine o teor de fluido no sólido residual do deságue em peneiras vibratórias;
- a utilização e/ou desenvolvimento de métodos numéricos adequados para a resolução de equações associadas ao modelo fenomenológico desenvolvido;
- a determinação, por meio de um método de otimização adequado, das condições ótimas do fator g e da inclinação da tela da peneira vibratória;
- implementação das etapas anteriores em linguagem de programação C++.

1.3 Organização da dissertação

Os capítulos seguintes estão organizados da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica a respeito da etapa de controle de sólidos e de duas abordagens de modelagem de deságue em peneiras vibratórias disponíveis na literatura, no Capítulo 3 é apresentada a proposta de modelo desenvolvida nesse trabalho, no Capítulo 4 são apresentados os métodos numéricos utilizados nesse trabalho e os equipamentos disponíveis para ensaios experimentais, no Capítulo 5 são apresentados os resultados referentes à

resolução do modelo proposto, os resultados experimentais obtidos e o resultado do processo de otimização e por fim no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e propostas de trabalhos futuros.

Revisão bibliográfica

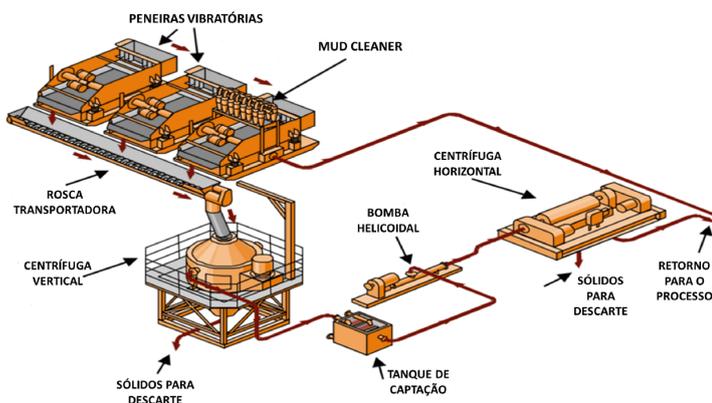
Este capítulo tem por objetivo realizar uma revisão bibliográfica a respeito da etapa de controle de sólidos relacionados à indústria petrolífera e apresentar brevemente alguns trabalhos relevantes no que tange à modelagem do deságue em peneiras vibratórias.

2.1 Controle de sólidos

A unidade de controle de sólidos é uma importante etapa no que tange à recuperação do fluido de perfuração para reutilização do mesmo e também para a adequação dos sólidos retirados dos poços para o descarte.

Uma unidade de controle de sólidos é exemplificada na Figura 2.1.

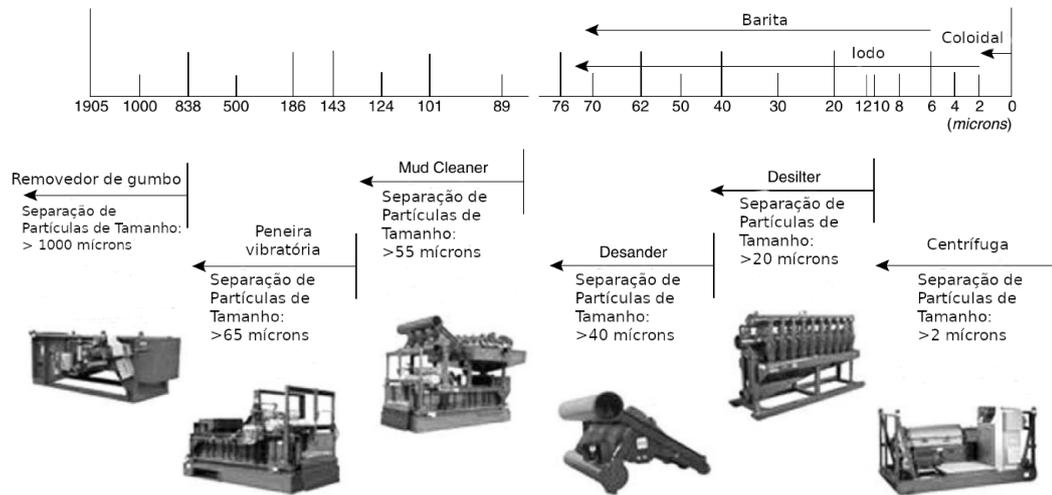
Figura 2.1 – Esquema de uma unidade de controle de sólidos.



Fonte: Adaptado de [Sanzone et al. \(2016\)](#).

Não existe um padrão para os equipamentos que constituem uma unidade de controle de sólidos, entretanto, as unidades de controle de sólidos são compostas normalmente por peneiras vibratórias, *mud cleaner*, baterias de hidrociclones e centrífugas, conforme apresentado na Figura 2.2.

Figura 2.2 – Equipamentos que compõem uma unidade de controle de sólidos e suas capacidades de remoção.



Fonte: Adaptado de ASME (2005).

Nas subseções seguintes são descritos de maneira breve os equipamentos apresentados na Figura 2.2.

2.1.1 Removedor de gumbo

O gumbo é uma mistura úmida e pegajosa composta de argila, mas também pode ser formada por partículas finas de calcário. Essa massa pegajosa é difícil de filtrar, por isso em áreas onde ocorre formação de gumbo, é necessário removê-lo antes que esse gumbo atinja as peneiras vibratórias (ASME, 2005). Um exemplo de removedor de gumbo é apresentado na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Dispositivo removedor de gumbo.



Fonte: Adaptado de ASME (2005).

2.1.2 Peneiras vibratórias

Peneiras vibratórias são de modo geral um dispositivo vibratório que tem por finalidade separar sólidos de um fluido de perfuração.

As peneiras vibratórias são os equipamentos de remoção de sólidos mais importantes e fáceis de serem utilizados em um sistema de controle de sólidos. Isso porque elas são os primeiros equipamentos do controle de sólidos, uma vez que o fluido de perfuração está retornando diretamente do poço. Além disso, na maioria dos casos, as peneiras vibratórias são equipamentos altamente econômicos. Por serem os primeiros equipamentos do controle de sólidos, caso as peneiras vibratórias não estejam funcionando adequadamente, todos os equipamentos da sequência terão eficiência comprometida (ASME, 2005).

Na Figura 2.4, é apresentada uma peneira vibratória do modelo *Mongoose Pro Shaker* fabricada pela *M-i Swaco* do grupo *Schlumberger*, que é o mesmo modelo que foi estudado nesse trabalho.

Figura 2.4 – Peneira vibratória *Mongoose Pro Shaker*.



Fonte: Adaptado de slb.com/drilling/drilling-fluids-and-well-cementing/solids-control/shale-shakers/mongoose-pro-shale-shaker.

2.1.3 Hidrociclones

Hidrociclones são equipamentos simples que convertem a pressão gerada do escoamento em força centrífuga, promovendo a separação do líquido e dos sólidos contidos na lama. Essa separação é um assentamento acelerado devido ao aumento da força radial causada pela ação da aceleração centrífuga dentro do cone. A ação dentro do hidrociclone produz forças de até 200 vezes maiores que a força gravitacional. Os hidrociclones operam separando partículas com faixa de tamanho de, em média, 15 a 80 microns do fluido de perfuração. O fluido de perfuração carregado de partículas sólidas maiores e mais densas é

descarregado no *underflow* do hidrociclone e o fluido de perfuração com menor teor de partículas sólidas é descarregado no *overflow* do hidrociclone (ASME, 2005).

Os hidrociclones são utilizados nos *desanders*, *desilters* e nos *mud cleaners*.

Desanders (Figura 2.5) nada mais são do que uma bateria de hidrociclones utilizados para separação de areias do fluido de perfuração, enquanto que *desilters* (Figura 2.6) são também uma bateria de hidrociclones, porém utilizados para a separação de areias finas.

Figura 2.5 – Exemplificação de um *de-* Figura 2.6 – Exemplificação de um *desil-*
sander. *ter*.



Fonte: <derrick.com/Products/desanders>. Fonte: <derrick.com/Products/desilters/>.

Mud cleaners (Figura 2.7) são nada mais que uma combinação de *desanders* e/ou *desilters* com peneiras vibratórias.

Figura 2.7 – Exemplificação de um *mud cleaner*.



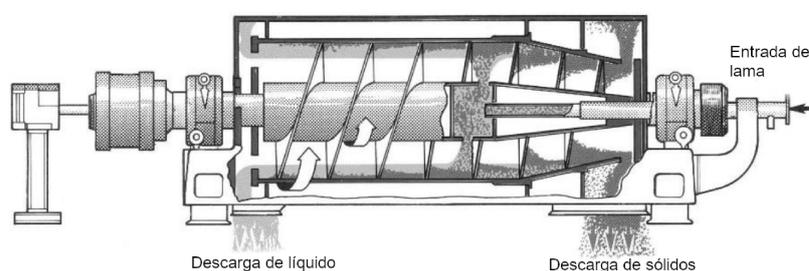
Fonte: <gnsolidscontrol.com/mud-cleaner>.

2.1.4 Centrífugas decantadoras

As centrífugas decantadoras (Figura 2.8) são equipamentos utilizados para a separação de sólidos de lamas em diversos processos industriais. Na exploração de poços de petróleo, as centrífugas são utilizadas para adequar o fluido de perfuração, dividindo-o

em fluxos de alta e de baixa densidade, possibilitando que um seja separado do outro. A divisão é feita por processo de sedimentação acelerada. À medida que o fluido de perfuração é passado através de um cesto em alta rotação, a força centrífuga move as partículas mais pesadas para a parede do cesto, onde são raspadas em direção às portas de descarga do *underflow* por uma broca concêntrica, também chamada de *scroll* ou transportador, que gira em uma taxa ligeiramente mais lenta que a do cesto. Esse processo de separação das partículas mais pesadas divide o fluido processado em duas correntes, uma fase pesada (*underflow* ou torta) e uma fase leve (*overflow* ou efluente) (ASME, 2005).

Figura 2.8 – Esquemática de uma centrífuga decantadora.



Fonte: Adaptado de ASME (2005).

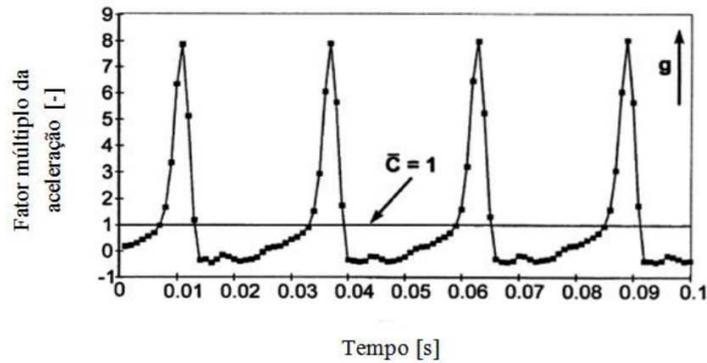
2.2 Estudos referentes à modelagem do deságue em peneiras vibratórias

Nesta seção são discutidos os principais aspectos de dois dos principais trabalhos disponíveis na literatura cuja temática é a modelagem do deságue em peneiras vibratórias.

2.2.1 Modelo de Keller e Stahl

Keller e Stahl (1997) propuseram que uma peneira vibratória operasse de maneira análoga a uma centrífuga descontínua em curtos intervalos de tempo. Dessa forma, a aceleração envolvida no processo de deságue não se mantém constante, conforme pode ser observado na Figura 2.9.

Figura 2.9 – Tendência da aceleração do sistema.

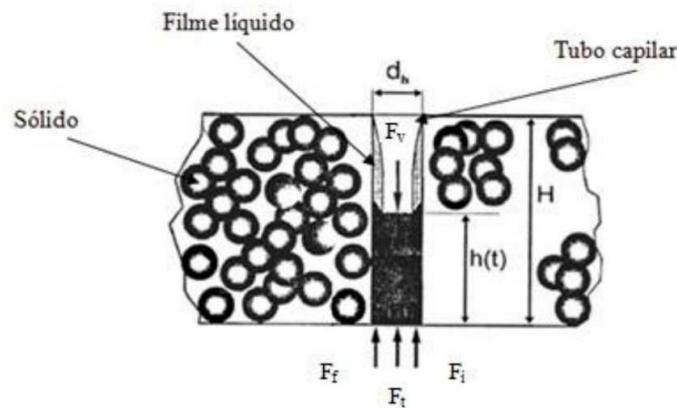


Fonte: Adaptado de Keller e Stahl (1997).

É proposto pelos autores que o deságue em peneiras vibratórias pode ser modelado por um escoamento em tubos capilares paralelos e de mesmo diâmetro ao longo da tela da peneira. De acordo com Keller e Stahl (1997), o processo de deságue inicia-se com o escoamento do fluido em fluxo pistão (*plug flow*), em seguida ocorre a formação de um filme líquido na superfície do material sólido acima do pistão de líquido. Porém, o escoamento do filme ocorre em taxas mais lentas devido às forças de interação com o sólido. Durante o deságue ocorre de forma simultânea esses dois fatores, o escoamento em fluxo pistão do líquido e o escoamento do filme líquido.

Para a modelagem da cinética do pistão de líquido, Keller e Stahl (1997) propõem um balanço de forças, mostrado na Equação 2.1, conforme observado na Figura 2.10. O balanço apresentado na Equação 2.1 dá origem a uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes não constantes, conforme apresentado na Equação 2.2.

Figura 2.10 – Forças que atuam na cinética do pistão de líquido.



Fonte: Adaptado de Keller e Stahl (1997).

$$\vec{F}_v + \vec{F}_f + \vec{F}_t + \vec{F}_i = 0. \tag{2.1}$$

$$-\rho_l h(t) \pi \frac{d_h^2}{4} g C(t, H) - 8\pi \eta h(t) \frac{dh}{dt} + \sigma \cos \delta \pi d_h - \rho_l \pi \frac{d_h^2}{4} h(t) \frac{d^2 h}{dt^2} = 0. \quad (2.2)$$

Em que:

- \vec{F}_v : força aplicada pela peneira vibratória ao sistema [N];
- \vec{F}_f : força de atrito viscoso [N];
- \vec{F}_t : força capilar [N];
- \vec{F}_i : força inercial [N];
- ρ_l : massa específica do líquido [kg/m^3];
- $h(t)$: magnitude de transição entre uma fase simples [m];
- d_h : diâmetro do tubo capilar [m];
- $C(t, H)$: valor múltiplo da aceleração [-];
- H : altura do tubo capilar [m];
- g : aceleração da gravidade [m/s^2];
- η : viscosidade dinâmica [$Pa \cdot s$];
- σ : tensão superficial [N/m];
- δ : ângulo de contato [$^\circ$].

A Equação 2.2 não apresenta solução analítica, porém pode ser resolvida numericamente obtendo-se, de maneira experimental, $C(t, H)$ (KELLER; STAHL, 1997).

Uma vez determinada $C(t, H)$, é possível determinar o parâmetro cinético λ , que segundo os autores é um adimensional que descreve a cinética de deságue. A Equação 2.3 define esse parâmetro.

$$\lambda = \frac{\eta_l H}{\rho_l C g \left(\frac{d_h}{2}\right)^2 t}, \quad (2.3)$$

Calculado λ é possível determinar a cinética do filme, que é dada pela equação de saturação do filme (S_F) conforme visto na Equação 2.4.

$$S_F = a\lambda^b, \quad (2.4)$$

sendo $a = \frac{4}{3}$ e $b = \frac{1}{2}$.

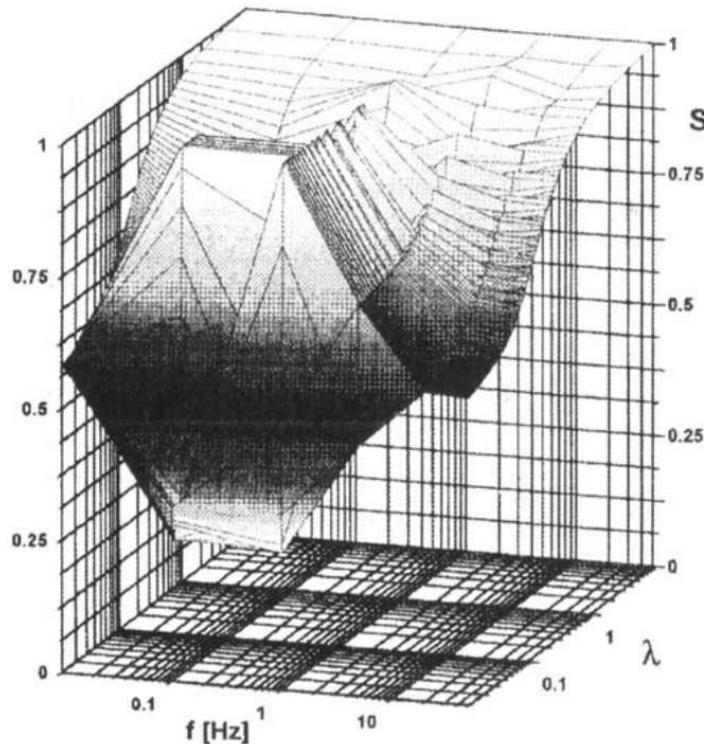
Considerando a cinética simultânea do filme e do pistão de líquido, obtém-se a Equação 2.5 (KELLER; STAHL, 1997).

$$S = \frac{h}{H} + \left(1 - \frac{h}{H}\right) \left(S_{lb} + (1 - S_{lb})a \left(\lambda \left(1 - \frac{h}{H}\right) \right)^b \right), \quad (2.5)$$

em que S_{lb} é a saturação da ponte de líquido, que representa a umidade contida entre as partículas sólidas e varia entre 8% e 20%, de acordo com cada sistema.

Na Figura 2.11, é demonstrado como a saturação (S) se comporta em função da frequência de vibração (f) e do parâmetro cinético (λ). Com base na análise do comportamento da saturação, os autores concluíram que menores frequências e maiores amplitudes de vibração contribuem para um melhor deságue, fato que é também observado experimentalmente.

Figura 2.11 – Cinética simultânea do filme e do pistão de líquido no processo de deságue em peneiras vibratórias.



Fonte: Reproduzido de Keller e Stahl (1997).

2.2.2 Modelo de Raja et al

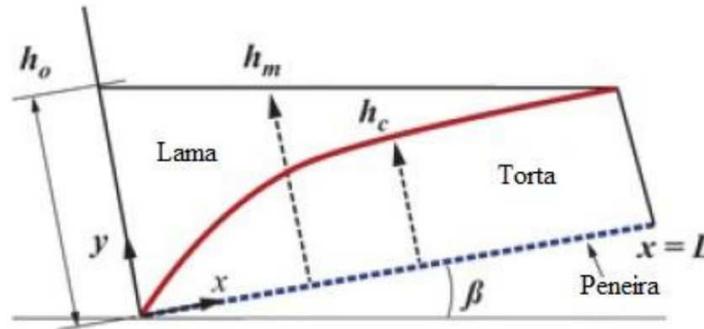
O trabalho de Raja et al. (2010) foi desenvolvido por pesquisadores da Universidade de Akron em parceria com a fabricante de peneiras vibratórias (e também outros

equipamentos associados ao controle de sólidos) *M-I Swaco*.

O modelo proposto nesse trabalho é dividido na análise de duas seções: a primeira relacionada à formação de torta que utiliza um modelo de filtragem da torta para descrição do fenômeno e uma segunda análise relacionada à drenagem da torta por um processo dominado por forças capilares. Porém, no artigo de [Raja et al. \(2010\)](#) é apresentado um estudo referente apenas à primeira análise.

No desenvolvimento do modelo, os autores utilizaram princípios de conservação de massa e quantidade de movimento para as fases sólida e líquida. Também foi estabelecido pelos autores o uso do sistema cartesiano de coordenadas, em que x é a direção paralela à superfície da tela da peneira e y é a direção perpendicular à superfície da tela, como pode ser observado na Figura 2.12.

Figura 2.12 – Diagrama da seção de formação de torta.



Fonte: Adaptado de [Raja et al. \(2010\)](#).

Na Figura 2.12, β é o ângulo de inclinação da tela da peneira, h_m é a altura da lama sobre a tela da peneira, h_c é a altura da torta formada que é função da posição x . Conforme pode ser observado, em $x = 0$, $h_c = h_0$ e em $x = L$, $h_c = h_m$.

A partir das equações de conservação de massa e de quantidade de movimento bem como de correlações relacionadas à queda de pressão em meios porosos, [Raja et al. \(2010\)](#) definiram a expressão para a velocidade na direção y para a fase líquida (v_y^L) apresentada na Equação 2.6.

$$v_y^L = \frac{-g \cos \beta \left(\rho^L (h_c + h_{scr}) + \rho^m (h_m - h_c) \right)}{\varepsilon^L \mu \left(\frac{h_c}{k_c} + \frac{h_{scr}}{k_{scr}} \right)}, \quad (2.6)$$

sendo:

- g : aceleração da gravidade;
- h_{scr} : espessura da tela;

- k_c, k_{scr} : permeabilidade da torta e da tela;
- L : comprimento da tela na região de formação da torta;
- ε^L : fração volumétrica de líquido na torta;
- ρ^L, ρ^m : massa específica do líquido e da lama;
- μ : viscosidade do líquido.

Para o cálculo da vazão de fluido passante (Q) pelas aberturas da tela da peneira na seção de formação da torta, utiliza-se a Equação 2.7.

$$Q = b \int_0^L \varepsilon^L v_y^L dx, \quad (2.7)$$

em que b é a largura da tela.

Os autores, por fim, concluem que os parâmetros que mais influenciam o modelo são a inclinação da tela, o diâmetro das partículas e a porosidade da torta. Porém, ainda deixam como sugestões de trabalhos posteriores a análise dos efeitos de outras variáveis, o desenvolvimento de outros submodelos para análise da velocidade na direção x e também sugerem o desenvolvimento de um modelo para a região de drenagem da torta.

Capítulo 3

Modelagem matemática do processo de deságue em peneiras vibratórias

Neste capítulo é abordada uma nova proposta de um modelo matemático que represente o processo de deságue em peneiras vibratórias. Esse equacionamento é baseado em leis de conservação de massa, conservação de quantidade de movimento e balanços volumétricos. O modelo proposto é formado por quatro equações diferenciais parciais e seu desenvolvimento é apresentado nas seções seguintes.

3.1 Equações que definem o modelo

Todo desenvolvimento da proposta para o modelo que representa o deságue em peneiras vibratórias é feito a partir de três princípios: conservação de massa, conservação de quantidade de movimento e conservação do volume (visto que a mistura de líquido e sólido é incompressível).

Um ponto importante na proposta do modelo matemático proposto é que, devido ao fato da geometria do domínio em questão ser formada pelo volume da mistura (líquido e sólido) e esse variar em função do tempo, a formulação diferencial que define os princípios de conservação, como amplamente apresentados na literatura, não é válida, portanto, todo princípio de conservação utilizado no desenvolvimento do modelo é apresentado em sua formulação integral (BIRD et al., 2002).

O princípio da conservação de massa é expresso matematicamente pela equação da continuidade (Equação 3.1). Essa equação define a variação de massa de um sistema em função das entradas e saídas de massa (BIRD et al., 2002).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{\eta} dS \quad (3.1)$$

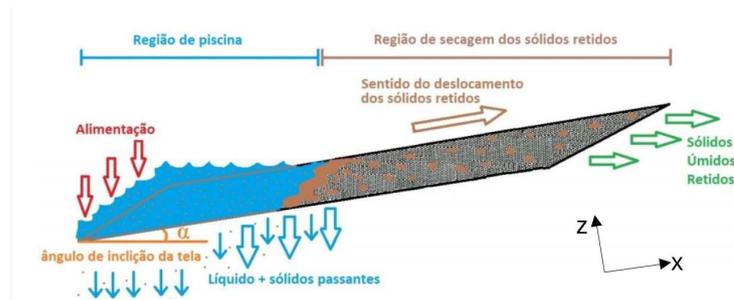
O princípio da conservação da quantidade de movimento é expresso pela equação do movimento (Equação 3.2). Essa equação representa a variação da quantidade de movimento devido à ação de forças de aceleração externas ao fluido, taxa de momento adicionado por convecção e taxas de momento adicionadas por transporte molecular (BIRD et al., 2002).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \vec{v}) dV = - \oint_S (\rho \vec{v} \vec{v}) \cdot \vec{\eta} dS - \int_V \nabla P dV - \oint_S \tau \cdot \vec{\eta} dS + \int_V \rho(\vec{g} - \vec{a}) dV \quad (3.2)$$

em que \vec{a} é a aceleração imposta pelos motovibradores da peneira vibratória, essa aceleração é definida pela Equação 3.3 nas direções x e z , como visto na Figura 3.1.

$$\begin{cases} a_x = -\xi\omega^2 A_x \sin(\omega t - \gamma) \\ a_z = -\xi\omega^2 A_z \sin(\omega t) \\ \omega = 2\pi f \end{cases} \quad (3.3)$$

Figura 3.1 – Esquematização de uma peneira vibratória.



Fonte: Adaptado de Barbosa (2018).

Nesse trabalho, assumiu-se que a massa específica da mistura é uma média aritmética entre a massa específica do líquido e do sólido ponderada pela concentração volumétrica das espécies, sendo essa relação definida pela Equação 3.4.

$$\rho = c_{v_s} \rho_s + c_{v_l} \rho_l \quad (3.4)$$

Porém, a soma da concentração volumétrica das espécies do sistema é sempre igual a 1, portanto, a Equação 3.4 pode ser escrita em função de qualquer uma das espécies, optando-se pela espécie sólida como referência, a massa específica do sistema passa a ser definida pela Equação 3.5.

$$\rho = c_{v_s} \rho_s + (1 - c_{v_s}) \rho_l \quad (3.5)$$

Como a massa específica das espécies é constante, então a partir da Equação 3.1 e da Equação 3.5 é possível descrever o princípio de conservação de massa em termos

da concentração volumétrica de uma espécie, conforme apresentado na Equação 3.6 e na Equação 3.7.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V c_{v_s} dV = - \oint_S c_{v_s} \vec{v} \cdot \vec{\eta} dS \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V c_{v_l} dV = - \oint_S c_{v_l} \vec{v} \cdot \vec{\eta} dS \quad (3.7)$$

Facilmente, percebe-se que ao multiplicar a Equação 3.6 por ρ_s e a Equação 3.7 por ρ_l e somar ambas as equações, retorna-se à Equação 3.1. Entretanto, ao somar as equações que definem a variação das concentrações volumétricas de líquido e sólido, obtém-se a equação que define a variação do volume do sistema de interesse (Equação 3.8), visto que a soma das concentrações volumétricas é constante e igual a 1.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV = - \oint_S \vec{v} \cdot \vec{\eta} dS \quad (3.8)$$

A Equação 3.1 (bem como as equações deduzidas a partir dessa), Equação 3.2 e a Equação 3.8 estão apresentadas de forma geral, ou seja, sem nenhuma simplificação. A resolução dessas equações nessa forma é praticamente inviável, portanto, faz-se necessário realizar algumas simplificações.

Considerando a mistura de líquido e sólido sobre a tela da peneira vibratória como o sistema de interesse, inicialmente as seguintes hipóteses simplificadoras foram assumidas para o desenvolvimento do modelo:

- não há perfis de velocidade ou variações de propriedade na direção y da tela da peneira (dimensão relativa à largura da tela da peneira);
- como a quantidade de líquido que passa pelas aberturas da peneira é muito superior à quantidade de sólidos, assume-se que apenas o líquido passe pelas aberturas da tela da peneira;
- as interações fluido-partículas podem ser desprezadas;
- a mistura (líquido + sólido) sobre a tela da peneira acompanha a inclinação da mesma enquanto submetida à aceleração dos motovibradores, ou seja, a inclinação da tela da peneira não afeta o nível da mistura sobre a tela;
- não há entradas ou saídas de qualquer propriedade no limite superior do domínio em z , ou seja, para H sendo o limite superior do domínio em z , $v_z(t, x, H) = 0$;

- $\rho = \rho(t, x)$ e $v_x = v_x(t, x)$, ou seja, a massa específica da mistura e a velocidade na direção x não dependem da variável z , isso se deve ao efeito da vibração sobre o sistema. Já $v_z = v_z(t, x, z)$, isso implica que para que a ρ não seja função de z e a Equação 3.1 seja satisfeita, v_z é uma função linear de z .

Antes de prosseguir, é necessário substituir o termo de tensão viscosa, τ , na equação do movimento. Para esse propósito utiliza-se a lei da viscosidade de Newton (BIRD et al., 2002), que é definida pela Equação 3.9.

$$\tau = -\mu(\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^T) + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa\right)(\nabla \cdot \vec{v})\delta \quad (3.9)$$

Para o caso deste trabalho, a viscosidade dilatacional foi desprezada, visto que essa propriedade é mais utilizada no estudo da absorção de som por gases poliatômicos e na descrição da dinâmica do escoamento de líquidos que contenham bolhas de gás.

Aplicando as hipóteses citadas, substituindo a Equação 3.9 na Equação 3.2, decompondo a equação do movimento (Equação 3.1) nas direções x e z e aplicando o teorema da divergência de Gauss, têm-se as Equações (3.10), (3.11), (3.12) e (3.13). Por conveniência, optou-se por realizar o desenvolvimento do modelo utilizando a Equação 3.6 ao invés da Equação 3.1.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V c_{v_s} dV = - \int_V \frac{\partial (c_{v_s} v_x)}{\partial x} dV \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho v_x) dV = \int_V \left(- \left(\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x^2) + \rho v_x \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4}{3} \mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \rho (g \sin \alpha + a_x) \right) dV \quad (3.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho v_z) dV = \int_V \left(- \left(\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z^2) \right) - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. - \rho (g \cos \alpha + a_z) \right) dV \quad (3.12) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV = - \int_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV \quad (3.13)$$

Nas Equações (3.11) e (3.12), o vetor gravidade foi decomposto em função do ângulo de inclinação da tela da peneira. No caso da Equação 3.11, o termo de gradiente de pressão foi desconsiderado, pois o escoamento na direção x ocorre em canal aberto, não

justificando variações de pressão ao longo do escoamento. Para o caso da Equação 3.12, a variação de pressão se deve à passagem do fluido pelas aberturas da tela da peneira e fatores que envolvem interações fluido-partículas e tensões superficiais, mas para essa abordagem realizada, apenas o efeito da passagem do fluido pela abertura da tela da peneira é considerado. Na Equação 3.10, como não há entrada ou saída de sólido na direção z e v_z é uma função linear de z , o termo relativo à variação em z é nulo.

O modelo matemático proposto até este ponto é composto por uma equação diferencial parcial unidimensional e três equações diferenciais parciais bidimensionais, entretanto, sabe-se que somente v_z é função de z , sendo essa relação linear, também é considerada como hipótese que $v_z(t, x, H) = 0$, logo apenas $v_z(t, x, 0)$ é desconhecida e esse ponto é o mais importante, visto que nesse ponto ($z = 0$) ocorre a saída de líquido. Assim, todas as equações diferenciais bidimensionais podem ser convertidas em equações diferenciais unidimensionais, realizando a resolução das mesmas avaliando v_z apenas na fronteira inferior ($x, 0$). As derivadas de v_z em relação a z podem ser substituídas pela seguinte relação descrita na Equação 3.14, advinda das hipóteses tomadas.

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{v_z(t, x, H) - v_z(t, x, 0)}{H - 0} = \frac{-v_z(t, x, 0)}{H} \quad (3.14)$$

Por conveniência, $v_z(t, x, 0)$ continuará sendo referida apenas como v_z ao longo do texto da presente dissertação.

Assumindo que a pressão varie linearmente com a posição z , então tem-se que

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\Delta P}{\Delta z} = \frac{\Delta P}{H} \quad (3.15)$$

De acordo com [Tilton \(2008\)](#), a queda de pressão em peneiras de malha quadrada pode ser calculada pela Equação 3.16.

$$\Delta P = -K_\phi \frac{\rho_l v_z^2}{2} \quad (3.16)$$

em que K_ϕ é o coeficiente de perda de carga da peneira.

O coeficiente de perda de carga pode ser calculado através da Equação 3.17.

$$K_\phi = \left(\frac{1}{C_D^2} \right) \left(\frac{1 - f_a^2}{f_a^2} \right) \quad (3.17)$$

em que C_D é o coeficiente de descarga e f_a é a fração de área aberta da tela da peneira.

Para o caso de $Re < 20$, obtém-se C_D pela Equação 3.18.

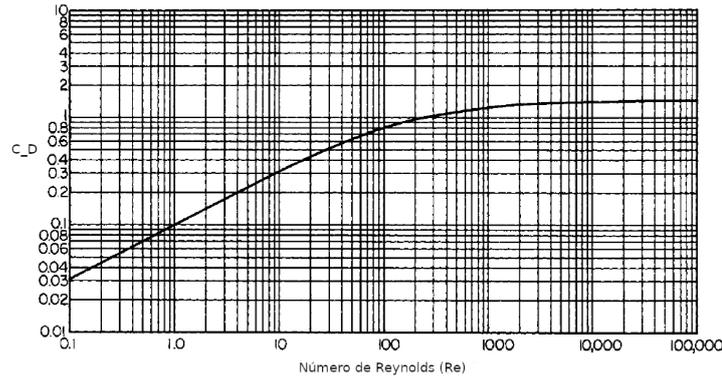
$$C_D = 0,1 \sqrt{Re_\phi} \quad (3.18)$$

$$Re_\phi = \frac{\phi \rho l v_z}{f_a \mu_l} \quad (3.19)$$

Para o caso de $Re > 500$, $f_a < 0,97$ e $0^\circ < \alpha < 45^\circ$, utiliza-se $C_D = 1,26$.

Tilton (2008) apresenta um diagrama para $0,14 \leq f_a \leq 0,79$ capaz de ajustar a maioria dos dados experimentais com precisão de $\pm 20\%$ (Figura 3.2).

Figura 3.2 – Coeficiente de descarga (C_D) em função do número de Reynolds (Re).



Fonte: Adaptado de Tilton (2008).

Utilizando a ferramenta *WebPlotDigitizer*¹, extraíram-se os dados contidos na Figura 3.2 para a faixa de Reynolds $20 \leq Re \leq 500$ e realizou-se o melhor ajuste para os dados, que, das funções analisadas, foi a função logarítmica com $r^2 = 0,9955$. A expressão é apresentada na Equação 3.20.

$$C_D = 0,2161 \ln(Re) - 0,21 \quad (3.20)$$

Embora a metodologia proposta por Tilton (2008) dependa apenas de parâmetros de construção da tela da peneira vibratória e de propriedades do fluido passante, novas tecnologias desenvolvidas por fabricantes de telas, geram imprecisões na metodologia apresentada. Alternativamente à metodologia proposta por Tilton (2008), alguns fabricantes de tela disponibilizam valores obtidos experimentalmente da capacitância da tela C_p (Equação 3.21).

$$C_p = \frac{\kappa_\phi}{\varepsilon_\phi} \quad (3.21)$$

Na Equação 3.21, κ_ϕ é a permeabilidade da tela e ε_ϕ é a espessura da tela. A queda de pressão se relaciona com a capacitância da tela a partir da Equação 3.22.

$$-\Delta P = -\frac{\mu_l C_{v_l} v_z}{C_p} \quad (3.22)$$

¹ <<https://automeris.io/WebPlotDigitizer>>

Na Equação 3.15, ΔP é obtido pela Equação 3.16 quando não há informações da capacitância da tela fornecidas pelo fabricante ou pela Equação 3.22, quando a capacitância é fornecida.

3.2 Propriedades da mistura

Um ponto complementar ao estudo da modelagem matemática do processo de deságue é como variam as composições de fluido e sólido e como a viscosidade do fluido varia. Para isso, observando-se o aspecto de lama da mistura alimentada, utilizaram-se equações características para predição de propriedades de lamas, porém com o diferencial de que essas propriedades variam com a posição e com o tempo, de acordo com suas dependências funcionais.

Como a composição varia ao longo do comprimento da peneira, a viscosidade também varia. Uma forma de representar essa variação é dada pela Equação 3.23 (MENON, 2004), que relaciona a viscosidade dinâmica da mistura com a concentração volumétrica de sólidos.

$$\mu = \mu_l \left(1 + 2,5c_{v_s} + 10,05c_{v_s}^2 + 0,00273e^{16,6c_{v_s}} \right) \quad (3.23)$$

Em se tratando da análise da eficiência do processo de deságue em peneiras vibratórias, é comum utilizar a concentração mássica das espécies em detrimento da concentração volumétrica. A concentração mássica das espécies se relaciona com a concentração volumétrica e a massa específica da mistura, a partir da relação definida na Equação 3.24.

$$c_j = \frac{c_{v_j} \rho_j}{\rho} \quad (3.24)$$

Na alimentação do processo, geralmente, conhece-se a concentração mássica de sólidos (c_{s_A}) e nesse caso, a massa específica da mistura na alimentação (ρ_A) é determinada a partir da Equação 3.25 (MENON, 2004).

$$\rho_A = \frac{1}{\frac{c_{s_A}}{\rho_s} + \frac{1 - c_{s_A}}{\rho_l}} \quad (3.25)$$

A concentração volumétrica das espécies na alimentação é então obtida a partir das Equações (3.24) e (3.25).

Um fato importante a ser destacado, refere-se à Equação 3.23. Um dos desafios enfrentados ao desenvolver um modelo que represente o deságue é que pode haver um momento em que o material desaguado passe a apresentar características de sólidos,

portanto, a partir desse ponto, seu movimento não seria mais definido pela mecânica dos fluídos e sim pela mecânica dos sólidos. Porém, analisando a Equação 3.23, percebe-se que à medida que a concentração volumétrica de sólidos aumenta, a viscosidade aumenta muito devido ao termo exponencial, principalmente. Mesmo não sendo a terminologia correta, sólidos podem ser representados idealmente como fluidos com viscosidade infinita, o que se assemelha ao comportamento da Equação 3.23, dando ao modelo desenvolvido uma boa predição do processo de deságue em todo o comprimento da tela da peneira.

O equacionamento proposto nesse capítulo é retomado no Capítulo 4, em que a metodologia de resolução para as equações diferenciais apresentadas nesse capítulo será apresentada, discutindo também as condições iniciais e de contorno envolvidas no problema.

Capítulo 4

Metodologias Numéricas e Unidade Experimental

Este capítulo tem por objetivo apresentar a metodologia de resolução das equações diferenciais anteriormente apresentadas no Capítulo 3, a metodologia experimental adotada e a metodologia de otimização empregada.

4.1 Método dos volumes finitos (MVF) com reconstrução de alta ordem por mínimos quadrados unidimensional

Em termos de domínio espacial, as equações propostas para modelagem do processo de deságue em peneiras vibratórias são equações diferenciais parciais unidimensionais. Para a resolução dessas equações, um método da família de volumes finitos com reconstrução de alta ordem por mínimos quadrados foi desenvolvido.

A metodologia apresentada nessa seção é uma releitura e adaptação dos trabalhos propostos pelo grupo de pesquisa do professor Carl Ollivier-Gooch da Universidade da Colúmbia Britânica (UBC, sigla em inglês) (ALTENA, 1999; OLLIVIER-GOOCH; ALTENA, 2002; MICHALAK, 2009; OLLIVIER-GOOCH et al., 2009).

Para fins de generalização, o desenvolvimento do método utilizará a letra grega ψ para designação da função incógnita.

Um método baseado em reconstrução de alta ordem consiste em representar a função incógnita ψ por uma série de Taylor, série que também recebe o nome de polinômio de reconstrução, em um volume de controle i em cada instante de tempo. Assim, para um instante de tempo qualquer, o polinômio de reconstrução que expressa a variação de ψ no espaço para o i -ésimo volume de controle é representado pela Equação 4.1.

$$\psi_i^R(x) = \psi|_i + \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_i (x - x_i) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Big|_i (x - x_i)^2 + \dots \quad (4.1)$$

em que $\left. \frac{\partial^k \psi}{\partial x^k} \right|_i$ são as derivadas parciais de ψ avaliadas no centroide do volume de controle i .

Para o caso de uma reconstrução unidimensional, a ordem do método desejada é equivalente ao número de coeficientes do polinômio de reconstrução. É intuitivo perceber que quanto maior for o número de termos do polinômio de reconstrução, mais próximo ψ_i^R estará de ψ_i .

Segundo [Ollivier-Gooch e Altena \(2002\)](#), o polinômio de reconstrução (ψ_i^R) deve satisfazer dois princípios, são eles:

- a conservação da média no próprio volume de controle i e;
- a conservação da média nos volumes de controle j vizinhos pertencentes ao estêncil do volume de controle i .

A conservação da média no próprio volume de controle i é expressa conforme a Equação 4.2 ([BARTH; FREDERICKSON, 1990](#)).

$$\bar{\psi}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\Delta x_i} \psi_i^R dx. \quad (4.2)$$

Substituindo a Equação 4.1 na Equação 4.2, obtém-se a Equação 4.3.

$$\bar{\psi}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\Delta x_i} \left(\psi|_i + \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_i (x - x_i) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_i (x - x_i)^2 + \dots \right) dx. \quad (4.3)$$

A partir de manipulações algébricas na Equação 4.3, obtém-se a equação de momentos (Equação 4.4)

$$\bar{\psi}_i = \psi|_i + \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_i \bar{x}_i + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_i \bar{x}_i^2 + \dots \quad (4.4)$$

em que

$$\bar{x}^n_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\Delta x_i} (x - x_i)^n dx = \frac{1}{(n+1)\Delta x_i} \left((x_{i+\frac{1}{2}} - x_i)^{n+1} - (x_{i-\frac{1}{2}} - x_i)^{n+1} \right) \quad (4.5)$$

O segundo princípio que deve ser satisfeito pelo polinômio de reconstrução é a conservação da média nos volumes de controle j vizinhos, pertencentes ao estêncil do volume de controle i .

A conservação da média nos volumes de controle vizinhos é expressa pela Equação 4.6.

$$\bar{\psi}_j = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{\Delta x_j} \psi_i^R dx. \quad (4.6)$$

De maneira análoga ao procedimento realizado na obtenção da Equação 4.4, substitui-se o polinômio de reconstrução (Equação 4.1) na Equação 4.6 e após um simples procedimento algébrico, obtém-se a equação dos termos geométricos (Equação 4.7).

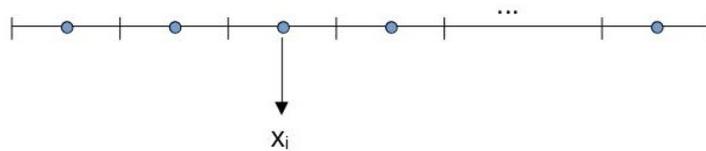
$$\bar{\psi}_j = \psi|_i + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_i \widehat{x}_{ij} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_i \widehat{x}_{ij}^2 + \dots \quad (4.7)$$

em que

$$\widehat{x}_{ij}^n = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{\Delta x_j} (x - x_i)^n dx = \frac{1}{(n + 1)\Delta x_j} \left((x_{j+\frac{1}{2}} - x_i)^{n+1} - (x_{j-\frac{1}{2}} - x_i)^{n+1} \right) \quad (4.8)$$

O número de elementos do estêncil de um volume de controle i é relacionado com a ordem da reconstrução desejada. Para uma reconstrução de ordem 2, utilizam-se os volumes de controle adjacentes ao volume de controle i , ou seja, $i - 1$ e $i + 1$. Para uma reconstrução de ordem 3, utiliza-se, além dos volumes adjacentes ao volume de controle i , os volumes adjacentes aos volumes vizinhos utilizados para a reconstrução de ordem 2, ou seja, o estêncil de terceira ordem é composto por $i - 1$, $i + 1$, $i - 2$ e $i + 2$. A Figura 4.1 representa, simplificadamente, um domínio unidimensional.

Figura 4.1 – Representação de um domínio unidimensional.



Fonte: O autor, 2021.

A partir da equação dos momentos (Equação 4.4) e das equações dos termos geométricos (Equação 4.7), para os volumes de controle que estão no interior do domínio, ou seja, para $1 < i < N$, é montado um sistema de equações sobredeterminado (Equação 4.9), cuja solução fornece os coeficientes do polinômio de reconstrução (Equação 4.1).

$$\begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_i & \bar{x}_i^2 & \dots \\ w_{i1} & w_{i1}\widehat{x}_{i1} & w_{i1}\widehat{x}_{i1}^2 & \dots \\ w_{i2} & w_{i2}\widehat{x}_{i2} & w_{i2}\widehat{x}_{i2}^2 & \dots \\ w_{i3} & w_{i3}\widehat{x}_{i3} & w_{i3}\widehat{x}_{i3}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ w_{iN} & w_{iN}\widehat{x}_{iN} & w_{iN}\widehat{x}_{iN}^2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \psi_x \\ \frac{1}{2!}\psi_{xx} \\ \vdots \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_i \\ w_{i1}\bar{\psi}_{i1} \\ w_{i2}\bar{\psi}_{i2} \\ w_{i3}\bar{\psi}_{i3} \\ \vdots \\ w_{iN}\bar{\psi}_{iN} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

em que w_{ij} são os pesos geométricos, que, segundo [Ollivier-Gooch e Altena \(2002\)](#), são usados para especificar a importância relativa de um volume de controle no estêncil para uma boa predição. Esses pesos se baseiam na distância relativa entre o centroide do volume de controle i e do volume de controle j vizinho de seu estêncil ponderado por um fator β , esse fator β deve ser escolhido empiricamente, alguns testes realizados por [Ollivier-Gooch e Altena \(2002\)](#) mostraram que para escoamentos de fluidos invíscidos, $\beta = 1$ apresentou melhores resultados. Matematicamente, os pesos geométricos são definidos pela Equação 4.10.

$$w_{ij} = \frac{1}{|x_j - x_i|^\beta} \quad (4.10)$$

Para os volumes de controle que estão na fronteira ($i = 1$ e $i = N$), além das equações da conservação da média no volume de controle e nos volumes de controle pertencentes ao estêncil, também faz-se necessária a adição de linhas de restrição referentes às condições de contorno.

Com relação ao contorno do problema físico, têm-se contornos sob condição de Dirichlet, condição de Neumann ou condição de Robin. Esses casos são representados, respectivamente, pelas Equações (4.11), (4.12) e (4.13).

$$\psi(x) = Di(x^*) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = Ne(x^*) \quad (4.12)$$

$$r_1\psi(x) + r_2\frac{\partial \psi}{\partial x} = Ro(x^*) \quad (4.13)$$

Para o caso de contornos sob a condição de Dirichlet, o valor de ψ é conhecido no contorno, e a equação para restrição é obtida ao igualar-se ψ_i do volume i no contorno ao valor do polinômio de reconstrução ψ_i^R (Equação 4.1) avaliado no valor de $x = x^*$, que se refere ao valor de x no contorno à esquerda ou à direita, dessa forma, obtém-se a Equação 4.14.

$$\psi|_i + \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_i (x^* - x_i) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Big|_i (x^* - x_i)^2 + \dots = Di(x^*) \quad (4.14)$$

Para o caso dos volumes de controle que estão sob a condição de Neumann, o valor da derivada de ψ é conhecido no contorno, logo, para de maneira análoga ao que foi feito no contorno sob restrição de Dirichlet, substitui-se a derivada da função ψ pela derivada do polinômio de reconstrução avaliada no valor do contorno ($x = x^*$), obtendo-se a Equação 4.15.

$$0 \cdot \psi|_i + \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_i + 2 \cdot \frac{1}{2!} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Big|_i (x^* - x_i) + \dots = Ne(x^*) \quad (4.15)$$

Já para os casos dos volumes de controle que estão sob a condição de Robin, o valor da combinação linear entre a função ψ e sua derivada é conhecido no contorno, assim, de maneira análoga ao que foi apresentado para os casos das condições de Dirichlet e Neumann, tem-se a Equação 4.16.

$$r_1 \psi|_i + \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_i (r_1 (x^* - x_i) + r_2) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Big|_i (r_1 (x^* - x_i)^2 + 2r_2 (x^* - x_i)) + \dots = Ro(x^*) \quad (4.16)$$

Apresentadas as equações de restrições de contorno para as três condições (Dirichlet, Neumann e Robin), monta-se um sistema sobredeterminado semelhante ao da Equação 4.9, mas com a equação de restrição adicionada imediatamente abaixo da equação relativa à conservação da média no volume de controle, ou equação de momentos (Equação 4.4). Esse sistema sobredeterminado é apresentado pela Equação 4.17.

$$\begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_i & \bar{x}_i^2 & \dots \\ w_i^* & w_i^* \Delta x^* & w_i^* \Delta^2 x^* & \dots \\ 0 & w_i^* & 2w_i^* \Delta x^* & \dots \\ w_i^* r_1 & w_i^* (r_1 \Delta x^* + r_2) & w_i^* (r_1 \Delta^2 x^* + 2r_2 \Delta x^*) & \dots \\ \hline w_{i1} & w_{i1} \hat{x}_{i1} & w_{i1} \hat{x}_{i1}^2 & \dots \\ w_{i2} & w_{i2} \hat{x}_{i2} & w_{i2} \hat{x}_{i2}^2 & \dots \\ w_{i3} & w_{i3} \hat{x}_{i3} & w_{i3} \hat{x}_{i3}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ w_{iN} & w_{iN} \hat{x}_{iN} & w_{iN} \hat{x}_{iN}^2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \psi_x \\ \frac{1}{2!} \psi_{xx} \\ \vdots \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_i \\ w_i^* Di \\ w_i^* Ne \\ w_i^* Ro \\ \hline w_{i1} \bar{\psi}_{i1} \\ w_{i2} \bar{\psi}_{i2} \\ w_{i3} \bar{\psi}_{i3} \\ \vdots \\ w_{iN} \bar{\psi}_{iN} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Na Equação 4.17, $\Delta^n x^* = (x^* - x_i)^n$ e w_i^* , de maneira semelhante aos pesos geométricos, é a distância entre a posição do centroide do volume de controle no contorno com a

posição do contorno (x^*). Segundo [Michalak \(2009\)](#) esse valor é expresso pela Equação 4.18, em que o parâmetro β é o mesmo apresentado para os pesos geométricos.

$$w_i^* = \frac{6}{|x^* - x_i|^\beta} \quad (4.18)$$

A obtenção dos parâmetros do polinômio de reconstrução através dos sistemas lineares apresentados constitui um problema de mínimos quadrados. Os coeficientes do polinômio de reconstrução (Equação 4.1) são obtidos a partir dos seguintes passos:

1. na primeira linha, referente à conservação da média no volume de controle (Equação 4.4), encontra-se o maior elemento e divide-se toda a linha pelo valor desse elemento, incluindo o lado direito (vetor dos termos independentes), em seguida, pivoteia-se a coluna do maior elemento com a primeira coluna, se necessário, lembrando que esta troca de colunas causa a mudança na ordem do vetor das soluções;
2. realizado o item anterior, o elemento pivô da primeira linha será 1, em seguida, aplica-se o processo de eliminação gaussiana em todos os elementos abaixo desse pivô;
3. no sistema sobredeterminado resultante, aplica-se a transformação QR com transformada de Householder, que, por trabalhar com transformações ortogonais, é inerentemente estável ([LEON, 2010](#)), gerando uma matriz triangularizada, então a solução do sistema linear resultante, e conseqüentemente obtenção dos coeficientes, é realizada pelo método das substituições regressivas.

Uma vez realizados os passos descritos anteriormente, obtém-se os coeficientes do polinômio de reconstrução para cada volume de controle, sendo assim possível representar a função original ψ no domínio espacial por uma representação polinomial dessa função em cada volume de controle.

Uma das essências do método dos volumes finitos é a utilização da formulação integral das equações diferenciais associadas ao problema a ser resolvido, tomando como exemplo a equação de advecção difusão (4.19) e integrando-a no volume de controle i , tem-se a Equação 4.20.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = S(t, x) - \frac{\partial(v \psi)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (4.19)$$

$$\int_{\Delta x_i} \frac{\partial \psi}{\partial t} dx = \int_{\Delta x_i} S(t, x) dx - \int_{\Delta x_i} \frac{\partial(v \psi)}{\partial x} dx + \int_{\Delta x_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx \quad (4.20)$$

Nas Equações (4.19) e (4.20), a velocidade v e coeficiente de difusão Γ podem apresentar dependência funcional de x , por isso permanecem contidos no operador diferencial, $S(t, x)$ é um termo fonte, que representa a geração ou consumo no volume de controle.

Retornando na Equação 4.20, divide-se toda a equação por Δx_i e comuta-se o operador diferencial no tempo com o operador integral, obtendo-se a Equação 4.21.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\Delta x_i} \int_{\Delta x_i} \psi dx \right) = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\Delta x_i} S(t, x) dx - \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\Delta x_i} \frac{\partial(v\psi)}{\partial x} dx + \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\Delta x_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx \quad (4.21)$$

O termo entre parênteses no primeiro membro da Equação 4.21 é a definição de $\bar{\psi}_i$. Após a realização de algebrismos não muito complexos, obtém-se a Equação 4.22.

$$\frac{d\bar{\psi}_i}{dt} = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\Delta x_i} S(t, x) dx - \frac{1}{\Delta x_i} (v\psi) \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\Delta x_i} \left(\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \quad (4.22)$$

Reescrevendo a Equação 4.22, tem-se a Equação 4.23.

$$\frac{d\bar{\psi}_i}{dt} = \frac{1}{\Delta x_i} R(\psi, t, x), \quad (4.23)$$

em que $R(\psi, t, x)$ é o resíduo e é definido pela Equação 4.24.

$$R(\psi, t, x) = \int_{\Delta x_i} S(t, x) dx - (v\psi) \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} + \left(\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}. \quad (4.24)$$

No resíduo a integral do termo fonte é realizada por técnicas de quadratura gaussiana (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965; FRANCO, 2006).

A Equação 4.23 quando aplicada a todos os volumes de controle do domínio do problema, forma um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs), que é resolvido utilizando qualquer metodologia disponível para a resolução dessa classe de problemas. Na seção 4.2 é apresentada a metodologia empregada neste trabalho.

4.2 Metodologia de integração no tempo

Dentre as metodologias de integração no tempo disponíveis na literatura, provavelmente as mais versáteis são as metodologias explícitas, isso porque dependem apenas de informações do nível de tempo anterior ao estágio de tempo do qual deseja-se tomar conhecimento.

Alguns dos motivos que tornam as metodologias explícitas atrativas são a facilidade de implementação das mesmas, o baixo custo computacional por passo no tempo e a menor quantidade de armazenamento de variáveis por passo no tempo, se comparado a metodologias implícitas.

A principal desvantagem das metodologias explícitas é que essa classe de métodos é condicionalmente estável com relação ao tamanho do passo no tempo, ou seja, para que o método forneça uma resposta coerente para a equação diferencial transiente, o tamanho do passo no tempo (Δt) deve satisfazer uma determinada característica específica da metodologia explícita utilizada.

Dentre as metodologias explícitas disponíveis na literatura, optou-se nesse trabalho por utilizar o método de Runge-Kutta clássico de quarta ordem, que é um método da família Runge-Kutta, de quatro passos e quarta ordem.

O método de Runge-Kutta de quarta ordem aplicado na Equação 4.23 é representado pela Equação 4.25.

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^{(0)} = \bar{\psi}_i^n, \\ R_1 = R(\psi^{(0)}, t), \\ \psi^{(1)} = \psi^{(0)} + \frac{\Delta t}{2 \Delta x_i} R_1, \\ R_2 = R(\psi^{(1)}, t + 0.5 \Delta t), \\ \psi^{(2)} = \psi^{(0)} + \frac{\Delta t}{2 \Delta x_i} R_2, \\ R_3 = R(\psi^{(2)}, t + 0.5 \Delta t), \\ \psi^{(3)} = \psi^{(0)} + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} R_3, \\ R_4 = R(\psi^{(3)}, t + \Delta t), \\ \bar{\psi}_i^{n+1} = \psi^{(0)} + \frac{\Delta t}{6 \Delta x_i} (R_1 + 2 R_2 + 2 R_3 + R_4). \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Por se tratar de uma metodologia explícita, o método de Runge-Kutta de quarta ordem é estável se as condições (4.26) e (4.27) forem satisfeitas.

$$\max_i \left\{ \frac{|\vec{v}_i| \Delta t}{\Delta x_i} \right\} \leq 1. \quad (4.26)$$

$$\max_i \left\{ \frac{4 \Gamma_i \Delta t}{\Delta x_i^2} \right\} \leq 1. \quad (4.27)$$

4.3 Verificação computacional

Uma etapa importante no que tange à implementação de métodos numéricos é realizar a verificação do método implementado. Realizar a verificação computacional de um método, como o próprio nome sugere, é analisar se a metodologia implementada está funcionando da forma como foi concebida teoricamente.

Como o método dos volumes finitos (MVF) com reconstrução de alta ordem por mínimos quadrados unidimensional apresentado na seção anterior foi desenvolvido neste trabalho utilizando como base os princípios apresentados por [Altena \(1999\)](#), [Ollivier-Gooch e Altena \(2002\)](#) e [Michalak \(2009\)](#), faz-se necessário verificar se os métodos desenvolvidos neste trabalho realmente fornecem alta ordem de precisão.

Uma das maneiras de verificar a ordem de precisão de um método é realizando a análise das normas dos erros utilizando uma solução conhecida. As normas dos erros mais exploradas na literatura são as normas dos erros L_1 , L_2 e L_∞ , representadas, respectivamente, pela Equação 4.28, Equação 4.29 e Equação 4.30.

$$\text{Norma}_{L_1} = \frac{\sum_i |\psi_i^{\text{exata}} - \bar{\psi}_i| \cdot V_i}{\sum_i V_i}. \quad (4.28)$$

$$\text{Norma}_{L_2} = \sqrt{\frac{\sum_i (\psi_i^{\text{exata}} - \bar{\psi}_i)^2 \cdot V_i}{\sum_i V_i}}. \quad (4.29)$$

$$\text{Norma}_{L_\infty} = \max_i \{|\psi_i^{\text{exata}} - \bar{\psi}_i|\}. \quad (4.30)$$

Sendo que nas normas ψ^{exata} refere-se a uma solução conhecida de ψ que é utilizada para validação da metodologia e V_i é equivalente à dimensão característica do volume de controle, no caso Δx_i para o caso unidimensional.

Para um método de ordem k , espera-se que

$$\text{Norma do erro} \propto h^k \propto \left(\frac{1}{\sqrt[n]{\text{NVC}}}\right)^k, \quad (4.31)$$

em que h é o tamanho característico do domínio, NVC é o número de volumes de controle da malha e n é a quantidade de dimensões espaciais do problema. Reescrevendo a Equação 4.31 em termos logarítmicos, obtém-se a Equação 4.32.

$$\log(\text{Erro}) = \log(C) - \frac{k}{n} \log(\text{NVC}). \quad (4.32)$$

Variando-se o número de volumes de controle do domínio analisado para o problema e computando-se os erros equivalentes, a partir da Equação 4.32 é possível realizar uma regressão linear e obter a ordem k do método.

Na subseção seguinte, é apresentado um problema simples no intuito de apenas verificar se os métodos implementados fornecem a ordem nominal proposta.

Toda a metodologia foi implementada em linguagem de programação C++, utilizando o compilador *GNU-GCC* combinado com a biblioteca de processamento paralelo *OpenMP*.

4.3.1 Verificação do MVF com reconstrução de alta ordem unidimensional

Para verificação do MVF com reconstrução de alta ordem unidimensional, utilizou-se o problema de teste expresso pela Equação 4.33.

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = S(t, x) + \Gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ \psi(0, x) = x^4(x - L) \\ \psi(t, 0) = \psi(t, L) = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

Com relação ao domínio, tem-se que $x \in [0, L]$ sendo L o comprimento total do domínio e para realização da verificação $L = 1$. Em relação ao tempo, tem-se que $t \in [0, 1]$. O coeficiente de difusão utilizado foi $\Gamma = 1 \cdot 10^{-8}$. Todas as unidades adotadas no problema de teste seguem o sistema internacional de unidades (SI), assume-se ψ como adimensional.

Por se tratar de um problema de teste de verificação, a solução de ψ foi manufaturada, ou seja, a solução foi proposta e os demais parâmetros e condições foram deduzidos a partir da solução proposta na Equação 4.34. O termo fonte $S(t, x)$ foi obtido substituindo-se a função conhecida de ψ na equação diferencial.

$$\psi(t, x) = e^{-t} x^4(x - L) \quad (4.34)$$

Para a realização dos testes foram consideradas as malhas apresentadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Número de volumes de controle (NVC) em cada malha de teste unidimensional.

	malha 1	malha 2	malha 3	malha 4
NVC	10	20	30	40

Fonte: O autor, 2021.

A partir da regressão linear dos dados dos erros e da quantidade de volumes de controle em cada malha, obtém-se a Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Ordem nominal e ordem observada para o problema apresentado na Equação 4.33.

Ordem nominal	Ordem observada		
	L_1	L_2	L_∞
2	2,13	2,17	2,08
3	4,04	3,65	3,17
4	3,99	4,06	4,01

Fonte: O autor, 2021.

Como observado na Tabela 4.2, o método implementado para o caso unidimensional forneceu a ordem coerente com a ordem nominal para todas as normas analisadas.

4.4 Aplicação do método dos volumes finitos ao modelo de deságue em peneiras vibratórias

Como já discutido, uma das essências do método dos volumes finitos é a resolução da formulação integral das equações diferenciais associadas ao problema físico. Como observado no Capítulo 3, as equações diferenciais que foram propostas para descrever o comportamento do deságue em peneiras vibratórias já se encontram em suas formulações integrais, visto que devido à variação do volume do sistema com o tempo, não é possível obter a formulação diferencial das mesmas. Essa seção tem por objetivo retomar o equacionamento discutido no capítulo anterior, adaptando as equações à metodologia de resolução apresentada bem como apresentar propostas de condições iniciais e de contorno.

Antes de analisar as equações que constituem o modelo proposto para o processo de deságue em peneiras vibratórias, é importante enfatizar uma propriedade do processo de integração, essa propriedade diz que a integral de uma função é igual ao produto da média da função que está sendo integrada no domínio de integração pelo domínio de integração. Essa propriedade é de fácil dedução, conforme demonstrado pela Equação 4.35.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{b-a} \int_a^b f(x) dx = (b-a) \bar{f} \quad (4.35)$$

em que $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Dada ênfase a essa propriedade, primeiramente, analisa-se a equação que representa a conservação do volume do sistema, expressa pela Equação 3.13, em um volume de controle i . O primeiro membro da Equação 3.13 pode ser reescrito conforme a Equação 4.36.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta x_i} \int_{\Delta y_i} \int_{\Delta z_i} dx dy dz = W \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta x_i} H dx \quad (4.36)$$

Sendo que $\Delta y_i = W$, referindo-se à largura da tela e $\Delta z_i = H$, referindo-se à altura da mistura sobre a tela, lembrando que $H = H(x)$.

Aplicando a propriedade demonstrada na Equação 4.35, substituindo a Equação 4.36 na Equação 3.13 e realizando algumas manipulações algébricas, chega-se à Equação 4.37.

$$\frac{d\bar{H}_i}{dt} = \frac{1}{\Delta x_i} \left(-(H v_x) \Big|_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \int_{\Delta x_i} c_{v_l} v_z dx + \frac{\tilde{Q}_A}{W} \right) \quad (4.37)$$

Na Equação 4.37, foram realizadas algumas considerações que também são utilizadas nas demais equações que são apresentadas. Primeiro, as derivadas de v_z em relação a z foram substituídas, conforme apresentado na Equação 3.14, depois desprezou-se todas as variações de H em relação a x nos cálculos, de forma a simplificar a resolução das equações que definem o modelo. O termo \tilde{Q}_A (Equação 4.38), referente à vazão volumétrica da alimentação, é um pseudo termo fonte, utilizado como artifício matemático para desvincular a alimentação da fronteira à esquerda do domínio, dessa forma “suavizando” o processo de resolução da equação.

$$\tilde{Q}_A = \begin{cases} Q_A, & \text{se } i = 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.38)$$

Embora demonstrada para um caso unidimensional, a propriedade descrita na Equação 4.35 também se aplica para integrais de área e volume. Sendo assim, de maneira análoga à obtenção da Equação 4.37, obtém-se as Equações (4.39), (4.40) e (4.41).

$$\frac{d}{dt} (\bar{c}_{v_s} V)_i = -W(H c_{v_s} v_x) \Big|_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + c_{v_s,A} \tilde{Q}_A \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\bar{\rho} v_x V)_i = & W \left(-(H \rho v_x^2) \Big|_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \int_{\Delta x_i} \rho_l c_{v_l} v_x v_z dx + \left(\frac{2}{3} H \mu \left(2 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_z}{H} \right) \right) \Big|_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. - (\mu_l v_z) \Big|_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - (g \text{sen} \alpha + a_x) \int_{\Delta x_i} \rho H dx \right) + \rho_A \tilde{Q}_A v_{x,A} \quad (4.40) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} (\overline{\rho v_x} V)_i = W \left(- (H \rho v_x v_z) \Big|_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \int_{\Delta x_i} 2 \rho_l c_{v_l} v_z^2 dx - \int_{\Delta x_i} \Delta P dx + \left(H \mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \Big|_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. - (g \cos \alpha + a_z) \int_{\Delta x_i} \rho H dx \right) \quad (4.41)$$

Na Equação 4.39, o termo $c_{v_s,A} \tilde{Q}_A$ refere-se à vazão volumétrica de sólidos, na Equação 4.40, o termo $\rho_A \tilde{Q}_A v_{x,A}$ refere-se à quantidade de movimento na direção x que entra no sistema devido à vazão de alimentação, $v_{x,A}$ é a velocidade na direção x da alimentação. Nessa proposta de modelo, assume-se que toda a quantidade de movimento inserida no sistema devido à alimentação possui apenas a componente na direção x .

Nas Equações (4.39), (4.40) e (4.41), no lado esquerdo das equações, tem-se a derivada em relação ao tempo do produto da propriedade média pelo volume de controle i , porém ao resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias gerado a partir de cada equação, o que se deseja é obter o valor da propriedade média em um estágio de tempo superior, não do produto dessa propriedade pelo volume. Entretanto, o que os métodos de integração no tempo fazem, nada mais é do que obter aproximações mais precisas para a Equação 4.42.

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{dy}{dt} dt = \int_t^{t+\Delta t} f(t, y) dt \Rightarrow y(t + \Delta t) = y(t) + \int_t^{t+\Delta t} f(t, y) dt \quad (4.42)$$

Assumindo que $y = (\overline{\psi} V)_i$, sendo $\overline{\psi}$ uma das propriedades médias envolvidas na modelagem do problema, então o método de Runge-Kutta de quarta ordem para esse caso é definido pela Equação 4.43.

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^{(0)} = \bar{\psi}_i^n \quad V^{(0)} = V_i^n, \\ R_1 = R(\psi^{(0)}, t), \\ \psi^{(1)} = \frac{\psi^{(0)} V^{(0)} + \frac{\Delta t}{2} R_1}{V^{(1)}}, \\ R_2 = R(\psi^{(1)}, t + 0.5\Delta t), \\ \psi^{(2)} = \frac{\psi^{(0)} V^{(0)} + \frac{\Delta t}{2} R_2}{V^{(2)}}, \\ R_3 = R(\psi^{(2)}, t + 0.5\Delta t), \\ \psi^{(3)} = \frac{\psi^{(0)} V^{(0)} + \Delta t R_3}{V^{(3)}}, \\ R_4 = R(\psi^{(3)}, t + \Delta t), \\ \bar{\psi}_i^{n+1} = \frac{\psi^{(0)} V^{(0)} + \frac{\Delta t}{6} (R_1 + 2R_2 + 2R_3 + R_4)}{V_i^{n+1}}. \end{array} \right. \quad (4.43)$$

Na Equação 4.43, $V^{(j)}$ é referente ao j -ésimo passo para o volume do processo de Runge-Kutta descrito na Equação 4.25, lembrando que $V_i = W \Delta x \bar{H}_i$. Observa-se que, embora as quatro equações devam ser resolvidas simultaneamente, a Equação 4.37 deve ser resolvida primeiro, visto que o volume é calculado a partir da altura média. Outro detalhe é que, caso o volume em um estágio de tempo superior, seja nulo, a referida propriedade média deve ser nula também, visto que a ausência de volume implica na ausência de matéria e, conseqüentemente, de quantidade de movimento e frações volumétricas de qualquer espécie.

As Equações (4.40) e (4.41) fornecem os valores da quantidade de movimento no processo de reconstrução da solução, porém é mais interessante para o processo de resolução conhecer as velocidades nas direções x e z . Essas velocidades são obtidas a partir da relação da Equação 4.44.

$$v_k = \frac{\rho v_k}{\rho} \quad (4.44)$$

em que ρv_k é a quantidade de movimento na direção k reconstruída a partir das equações diferenciais para as respectivas quantidades de movimento e ρ é a massa específica obtida a partir da Equação 3.5, utilizando a concentração volumétrica de sólidos reconstruída.

Nas Equações (4.40) e (4.41), todos os termos referentes às saídas através da fronteira $(x, 0)$ foram ponderados pela concentração volumétrica de líquido quando relativos às vazões volumétricas em sua forma integral. As propriedades físicas da mistura, nesse caso, também foram substituídas pelas propriedades do líquido puro, uma vez que adotou-se a hipótese de que apenas o líquido passa pelas aberturas da peneira.

Ainda resta discutir-se as condições inicial e de contorno associadas a cada equação diferencial referente ao problema de deságue em peneiras vibratórias.

Com relação à conservação de massa, em que optou-se por utilizar a Equação 4.39, em $t = 0$, tem-se que analisar três cenários, no primeiro cenário não há material sobre a tela da peneira, nesse caso a concentração inicial de sólidos é nula, em um segundo cenário, considera-se que toda a tela da peneira foi completamente preenchida de forma instantânea, evitando assim o deságue e conseqüentemente variações de composição ao longo do comprimento da peneira, nesse caso a concentração inicial de sólidos é igual à concentração volumétrica de sólidos na alimentação e em um terceiro cenário, tem-se que devido a uma variação de algum parâmetro operacional, alterou-se a condição de estado estacionário e tem-se uma nova condição dinâmica em direção a um novo estado estacionário, nesse caso, a condição inicial é igual ao estado estacionário anterior à variação que gerou a nova condição dinâmica. De forma a generalizar esses cenários, a condição inicial é nomeada $c_{v_s,S}$, conforme expresso na Equação 4.45.

$$c_{v_s}(0, x) = c_{v_s,S} \quad (4.45)$$

Com relação às condições de contorno da Equação 4.39, admite-se que tanto para $x = 0$ quanto para $x = L$ as derivadas da concentração volumétrica de sólido é nula (Equação 4.46). No caso de $x = 0$ indicando uma ausência de fluxo e no caso de $x = L$ indicando que esse ponto é a máxima concentração de sólidos no sistema (para quando a tela da peneira está preenchida nesse ponto) ou também ausência de fluxo (para quando a tela da peneira não está preenchida nesse ponto).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c_{v_s}}{\partial x}(t, 0) = 0 \\ \frac{\partial c_{v_s}}{\partial x}(t, L) = 0 \end{array} \right. \quad (4.46)$$

Com relação à altura de fluido sobre a tela, representada pela Equação 4.37, a abordagem para as condições inicial e de contorno é análoga à descrita para a Equação 4.39. Assim as condições inicial e de contorno são definidas pela Equação 4.47.

$$\left\{ \begin{array}{l} H(0, x) = H_S \\ \frac{\partial H}{\partial x}(t, 0) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x}(t, L) = 0 \end{array} \right. \quad (4.47)$$

Com relação à quantidade de movimento na direção x , descrita pela Equação 4.40, além dos cenários análogos descritos para a altura e concentração volumétrica de sólidos na condição inicial, tem-se um cenário em que a tela da peneira está preenchida, porém a mistura está parada, ou seja, $v_x(0, x) = 0$, o que implica em uma quantidade de movimento

nula nessa direção. De modo geral, esse cenário será descrito por $(\rho v_x)_S$. No caso das condições de contorno, a condição de contorno à esquerda é do tipo Dirichlet e a quantidade de movimento é nula em $x = 0$, devido ao fato de $v_x(t, 0) = 0$. Essa condição de contorno decorre da adoção do pseudotermo fonte presente na Equação 4.40, utilizado para suavizar o processo de resolução. Em $x = L$, a derivada da quantidade de movimento é nula, devido à ausência de fluxo de quantidade de movimento (para o caso da tela da peneira não estar completamente preenchida) ou por se tratar de um ponto de mínima quantidade de movimento em x (para o caso da peneira estar completamente preenchida). As condições inicial e de contorno são apresentadas na Equação 4.48.

$$\begin{cases} (\rho v_x)(0, x) = (\rho v_x)_S \\ (\rho v_x)(t, 0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)(t, L) = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

Para o caso da quantidade de movimento na direção z (Equação 4.41), as condições inicial e de contorno são análogas às descritas para a quantidade de movimento na direção x . As condições inicial e de contorno para a quantidade de movimento em z são apresentadas na Equação 4.49.

$$\begin{cases} (\rho v_z)(0, x) = (\rho v_z)_S \\ (\rho v_z)(t, 0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_z)(t, L) = 0 \end{cases} \quad (4.49)$$

4.5 Unidade experimental

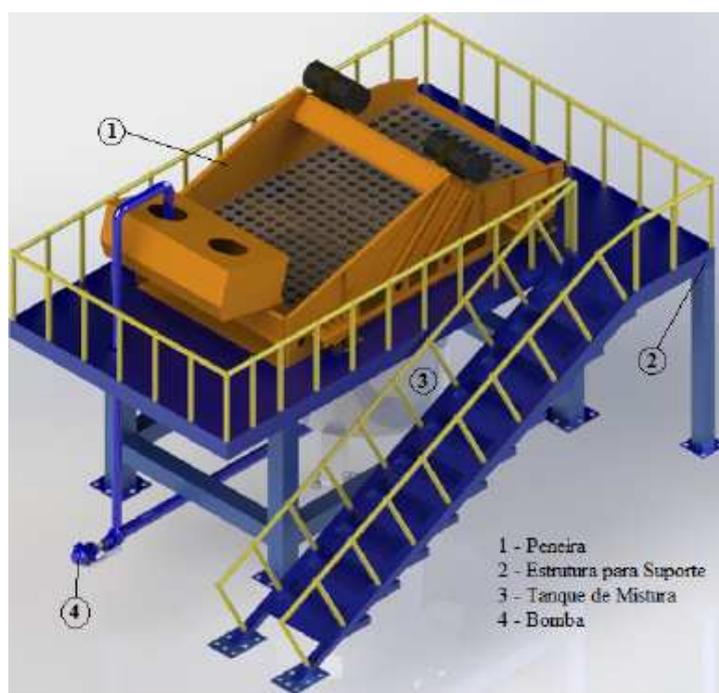
A unidade experimental utilizada é composta por uma peneira vibratória industrial *MONGOOSE PRO Shaker* composta por 4 telas de peneiramento, sendo cada tela com comprimento de 0,585 metros e largura de 1,165 metros, sendo sua área total de peneiramento aproximadamente igual a $2,73 \text{ m}^2$, dois motovibradores com 1800 RPM e 2,5 hp operando em contrarotação, segundo o guia do fabricante¹, a peneira pode operar em modo *normal* com fator g (F_g) de até 6,5 enquanto que no modo *capacity*, o valor de F_g pode atingir até 7,5. O fator g é o módulo da razão das acelerações definidas pela Equação 3.3 pela gravidade local para quando os valores da função seno atingem seu valor máximo, ou seja, $\text{sen}(\omega t) = 1$ e $\text{sen}(\omega t - \gamma) = 1$. Com relação à inclinação da tela, ainda segundo o guia do fabricante, a inclinação pode variar de 2° a 8° . A peneira encontra-se

¹ Disponível para *download* em <https://www.slb.com/-/media/files/mi/brochure/mongoose-pro-shaker-brochure.ashx>

instalada na Unidade de Pesquisa da Engenharia Química (UPEQ), anexo da Faculdade de Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia.

A peneira vibratória é suspensa a três metros de altura do chão por meio de uma estrutura metálica e embaixo dessa se encontra um tanque de mistura com agitador com capacidade de 3000 litros. A mistura (água e areia) é bombeada por uma bomba de lama *Warman Weir 4/3C – AH* com motor *WEG* de 15 CV. Uma representação da unidade utilizada pode ser vista na Figura 4.2.

Figura 4.2 – Representação esquemática da unidade experimental utilizada.



Fonte: *Print* do programa de controle da peneira vibratória implementada no *software LabviewTM*, 2021.

O programa de operação da peneira vibratória feito no *software LabViewTM* possui implementado uma malha de controle que atua na frequência dos motovibradores por meio de um inversor de frequência modelo *CFW700*, da marca *WEG*, para manter o valor da componente normal do fator g (F_{g_z}) em torno de um *setpoint* fornecido pelo usuário. Os valores normais do fator g são obtidos por meio de um sensor piezoelétrico da marca *PCB Piezoelectronic* modelo 646B00. Toda a comunicação entre o computador utilizado e os equipamentos é feita por uma placa de aquisição de dados da *National Instruments* modelo NI-6008.

A peneira ainda conta com um sensor ultrassônico modelo *HC-SR04* do tipo *Arduino*. Esse sensor é utilizado para a determinação da vazão de alimentação a partir da correlação de medição de vazão em vertedouros (sistema utilizado pela peneira vibratória em sua caixa de alimentação para amortecer dados devido às altas vazões e distribuir de maneira homogênea o fluido sobre a tela da peneira). Seja h' a altura do fluido passante

pelo vertedouro, a vazão de alimentação é determinada a partir da Equação 4.50 (TILTON, 2008).

$$Q_A = \frac{2}{3} c w' \sqrt{2g} h^{3/2} \quad (4.50)$$

em que c é o coeficiente de descarga e foi adotado o valor de 0,6 para esse parâmetro, valor esse sugerido na literatura. O parâmetro w' é referente à largura do vertedouro, para a peneira citada $w' = 0,75 \text{ m}$ e g refere-se à aceleração da gravidade.

Com relação à mistura utilizada (água e areia), devido a facilidade para realização dos experimentos, adicionou-se areia no tanque contendo água de forma a gerar uma mistura com baixo teor de sólidos na alimentação, após a adição do sólido, determinou-se, por meio de secagem em estufa, a composição mássica de areia sendo $c_{s_A} = 1,688\%$. É importante destacar que essa concentração mássica de sólidos na alimentação da peneira não reflete necessariamente a condição observada na indústria petrolífera.

4.6 Metodologia de otimização

O objetivo principal deste trabalho é a determinação de condições operacionais ótimas para o processo de deságue em peneiras vibratórias. Esses parâmetros são a inclinação da tela da peneira (α) e o fator g (F_g).

Esse problema de otimização é caracterizado por ser um problema de otimização restrita, isso porque os parâmetros ótimos devem estar em uma faixa de projeto, ou seja, compreendidos entre um valor mínimo e um valor máximo estipulados pelas condições de operação do processo.

Assim o problema de otimização é expresso pela Equação 4.51.

$$\begin{cases} \min[\alpha, F_g] : c_{l,EE}(L) \\ F_{g_{min}} \leq F_g \leq F_{g_{max}} \\ \alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max} \end{cases} \quad (4.51)$$

No problema de otimização definido por Equação 4.51, $c_{l,EE}(L)$ refere-se à concentração mássica de líquido no estado estacionário e na saída dos sólidos ao fim da tela.

Dentre as metodologias de otimização disponíveis na literatura, neste trabalho será utilizado o método da evolução diferencial, apresentado na subseção 4.6.1.

4.6.1 Método da evolução diferencial

O método da evolução diferencial foi inicialmente proposto por [Storn e Price \(1997\)](#). O método da evolução diferencial consiste em um algoritmo meta-heurístico baseado em operações vetoriais.

A evolução diferencial é uma metodologia baseada em populações e assim como outros métodos meta-heurísticos, não possui dependência da avaliação das derivadas da função objetivo (função que se deseja otimizar) ([YANG, 2014](#)).

Dentre as diversas variantes do método da evolução diferencial disponíveis na literatura, optou-se neste trabalho pela implementação da variante *DE/rand-to-best/1/Bin*, que significa o uso do algoritmo de evolução diferencial (*Differential Evolution*). O esquema de mutação utiliza um vetor aleatório (*rand*) e o melhor indivíduo da geração atual (*best*), é utilizada apenas uma diferença de vetores (1) e utilizou-se um esquema de cruzamento binário (*Binary*). Esses termos são explicados adiante.

Para um problema de otimização d -dimensional com d parâmetros, uma população aleatória com n (usualmente, utiliza-se $n = 5 \cdot d$) vetores é inicialmente gerada em um intervalo de busca. Nesta subseção, para uma geração t , a seguinte notação é utilizada:

$$\vec{x}_i = (x_{1,i}^t, x_{2,i}^t, \dots, x_{d,i}^t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.52)$$

O método da evolução diferencial é composto de três etapas principais: mutação, cruzamento e seleção.

No esquema de mutação *rand-to-best*, para cada vetor \vec{x}_i de uma geração t , selecionam-se outros três vetores aleatórios \vec{x}_{k_1} , \vec{x}_{k_2} e \vec{x}_{k_3} e o melhor elemento \vec{x}_{best} da geração t , entende-se por melhor elemento aquele que apresenta menor valor de função objetivo. Então gera-se o vetor doador para o esquema de mutação definido pela Equação 4.53.

$$\vec{v}_i^{t+1} = \lambda \vec{x}_{best}^t + (1 - \lambda) \vec{x}_{k_1}^t + F(\vec{x}_{k_2}^t - \vec{x}_{k_3}^t), \quad (4.53)$$

em que λ é um peso para o vetor do melhor elemento da geração, sendo $\lambda = 0,5$ adotado nesse trabalho e $F \in [0, 2]$ é comumente referenciado como peso diferencial, para este trabalho adotou-se $F = 0,8$.

A etapa de cruzamento é controlada pelo fator de cruzamento $C_R \in [0, 1]$, responsável pela taxa ou probabilidade de cruzamento ([YANG, 2014](#)). O esquema de cruzamento utilizado, esquema binomial, executa o cruzamento em cada uma das d componentes do vetor \vec{x}_i . É utilizada também na etapa de cruzamento um número aleatório $r_i \in [0, 1]$ e

um índice aleatório $J_r \in [1, 2, \dots, n]$. Assim, gera-se o vetor de teste para o esquema de cruzamento definido pela Equação 4.54. Para este trabalho, utilizou-se $C_R = 0, 9$.

$$\vec{u}_{j,i}^{t+1} = \begin{cases} \vec{v}_{j,i}^{t+1} & \text{se } r_i \leq C_r \text{ ou } j = J_r, \\ \vec{x}_{j,i}^t & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.54)$$

A última etapa, etapa de seleção, é definida pela avaliação da função objetivo, $f(\vec{x})$, no vetor de teste e comparando com o valor da função objetivo no vetor \vec{x}_i^t . Assim, a atualização dos indivíduos da geração t para a geração $t + 1$ é realizada conforme a Equação 4.55.

$$\vec{x}_i^{t+1} = \begin{cases} \vec{u}_i^{t+1} & \text{se } f(\vec{u}_i^{t+1}) \leq f(\vec{x}_i^t), \\ \vec{x}_i^t & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.55)$$

As etapas de mutação, cruzamento e seleção devem ser repetidas até que algum critério de parada pré-estabelecido seja alcançado. Diversos são os métodos que podem ser utilizados. Pode-se definir uma quantidade máxima de gerações, um tempo máximo de execução, intervenção externa do usuário, dentre outros. Para este trabalho, utilizou-se o critério da estagnação, ou seja, se o melhor indivíduo de uma geração permanecer inalterado, ou seja, se a diferença do melhor indivíduo de duas gerações consecutivas se mantiver menor que uma tolerância por uma quantidade pré-definida de gerações, então o processo é encerrado e o melhor indivíduo daquela geração corrente é assumido como sendo o valor ótimo do problema.

O algoritmo da evolução diferencial apresentado até o momento é definido para uma função objetivo sem restrições. O tratamento das restrições, para este trabalho, será feito pelo método da penalidade exterior (VANDERPLAATS, 1999). Nessa metodologia, uma função pseudo-objetivo é definida no intuito de transformar o problema original com restrições em um problema equivalente sem restrições. A função pseudo-objetivo é definida pela Equação 4.56 (VANDERPLAATS, 1999).

$$\Phi(\vec{x}, r_p) = f(\vec{x}) + r_p P(\vec{x}), \quad (4.56)$$

em que $f(\vec{x})$ é a função objetivo original, \vec{x} é o vetor das variáveis, r_p é o parâmetro de penalidade e $P(\vec{x})$ é a função de penalidade definida pela Equação 4.57.

$$P(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m (\max(0, g_j(\vec{x})))^2 + \sum_{k=1}^l (h_k(\vec{x}))^2, \quad (4.57)$$

sendo que m é a quantidade de restrições de desigualdade e l é a quantidade de restrições de igualdade. A metodologia da penalidade exterior é aplicável apenas para restrições de desigualdade do tipo $g(\vec{x}) \leq 0$, sendo assim, para restrições de desigualdade diferentes

desse formato, deve-se antes da aplicação do método transformar a função de desigualdade em uma função de desigualdade que obedeça o formato necessário.

Na Equação 4.56, a função de penalidade é ponderada pelo fator r_p , que amplifica o efeito da Equação 4.57 no valor da função objetivo original. De acordo com [Vanderplaats \(1999\)](#), quando $r_p \rightarrow \infty$, o valor numérico da função pseudo-objetivo (Equação 4.56) tende ao valor da função do problema de otimização original com restrições. Para este trabalho, adotou-se $r_p = 1 \cdot 10^{10}$.

Capítulo 5

Resultados e Discussões

Neste capítulo são apresentados os resultados referentes à proposta de modelagem iniciada no Capítulo 3 e encerrada no Capítulo 4. Também são apresentados resultados referentes ao comportamento da concentração mássica de líquido obtido experimentalmente. Ao fim desse capítulo são apresentados os valores ótimos de inclinação e fator g para o processo de deságue em uma peneira vibratória real, sendo esses parâmetros ótimos obtidos a partir do comportamento obtido experimentalmente.

5.1 Resultados referentes ao modelo proposto

Na presente dissertação, considerou-se um cenário em que a peneira é alimentada apenas com líquido, isso ocorreu devido ao alto custo computacional para realização das simulações de uma alimentação contendo sólidos, o que inviabilizou a obtenção de resultados no prazo estipulado para conclusão dessa dissertação. Nesse cenário a concentração volumétrica de sólidos é igual a zero e o modelo é composto pelas Equações (4.37), (4.40) e (4.41).

Para todos os casos simulados referentes ao modelo, alguns parâmetros são mantidos constantes, esses parâmetros são referentes à peneira vibratória utilizada nos trabalhos experimentais e às propriedades físicas do sólido e do líquido. Esses parâmetros estão exibidos na Tabela 5.1.

Nesse cenário, considerou-se que no instante inicial a tela da peneira está vazia. Sendo assim, as condições iniciais para altura e quantidades de movimento nas direções x e z são inicialmente nulas. Para esses cenários, a vazão de alimentação é dada por $Q_A = 0,01 \frac{m^3}{s}$, a vazão de alimentação foi mantida constante em especial devido ao alto custo computacional na simulação de cada cenário. Em todas as simulações realizadas, utilizou-se a capacitância da tela para o cálculo da queda de pressão, sendo o valor da capacitância definido por $C_p = 3,5529 \cdot 10^{-8} m$.

Tabela 5.1 – Parâmetros utilizados nas simulações do processo de deságue em peneiras vibratórias.

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Comprimento da tela	L	2,34	m
Largura da tela	W	1,165	m
Amplitude de vibração em x	A_x	$1,27 \cdot 10^{-3}$	m
Amplitude de vibração em z	A_z	$1,27 \cdot 10^{-3}$	m
Ângulo de fase	γ	0	–
Fator de eficiência dos motovibradores	ξ	0,8492	–
Aceleração da gravidade	g	9,81	$m s^{-2}$
Massa específica do líquido	ρ_l	1000	$kg m^{-3}$
Viscosidade dinâmica do líquido	μ_l	$9,0 \cdot 10^{-4}$	$kg m^{-1} s^{-1}$

Fonte: O autor, 2021.

A velocidade na direção x da alimentação ($v_{x,A}$) foi obtida a partir da relação da Equação 5.1.

$$v_{x,A} = 0,2 \frac{Q_A}{h' w'} \quad (5.1)$$

sendo h' calculado a partir da Equação 4.50. O valor de 0,2 foi adotado empiricamente, sendo que em estudos futuros esse valor será melhor avaliado baseado em estudos experimentais.

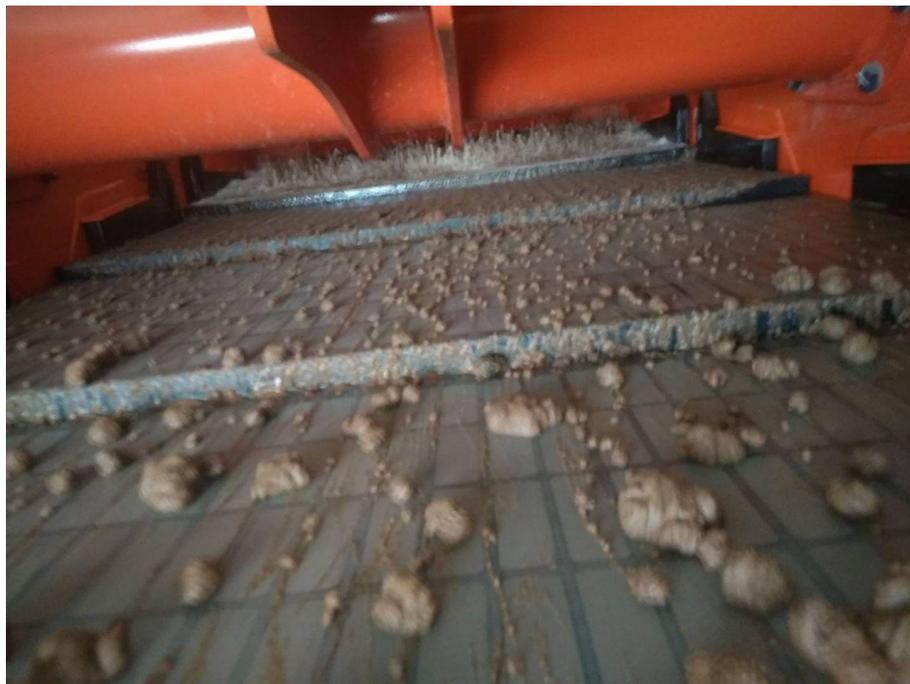
No processo de resolução do modelo, utilizaram-se duas condições de saturação para as velocidades nas direções x (Equação 5.2) e z (Equação 5.3). A saturação da velocidade na direção x se justifica devido a uma condição da geometria da tela da peneira, que redireciona o fluxo sobre a tela, convertendo velocidades negativas em velocidades positivas na posição $x = 0$, admitindo que as quantidades de movimento na direção x se anulem devido a esse fato. A Equação 5.2 se torna uma hipótese plausível, entretanto, essa hipótese não leva em consideração perdas de carga no redirecionamento do fluxo ou diferenças de quantidade de movimento devido a menores quantidades de massa sobre a tela da peneira ao longo de seu comprimento. A segunda consideração, relativa à saturação para a velocidade na direção z (Equação 5.3), apresenta maiores erros em relação ao comportamento real do processo de deságue, porém é uma condição necessária ao modelo, visto que velocidades positivas implicariam, matematicamente, em entradas através da fronteira $(x, 0)$, o que é fisicamente incoerente. Misturas com composição majoritariamente formada por líquidos quando submetidas à aceleração dos motovibradores, desprendem-se

da tela da peneira e a modelagem desse comportamento exigiria o acréscimo de uma fase gasosa composta pelo ar, que se encontra acima da camada de fluido sobre a tela. Esse comportamento de desprendimento do fluido da tela da peneira durante o processo de deságue é exibido pela Figura 5.1, sendo possível observar esse comportamento apenas na região em que a mistura sobre a tela da peneira é predominantemente composta de líquido.

$$v_x(t, x) = \begin{cases} v_x^R(x), & \text{se } v_x^R(x) > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$v_z(t, x) = \begin{cases} v_z^R(x), & \text{se } v_z^R(x) < 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.3)$$

Figura 5.1 – Comportamento do fluido sobre a tela da peneira no processo de deságue.

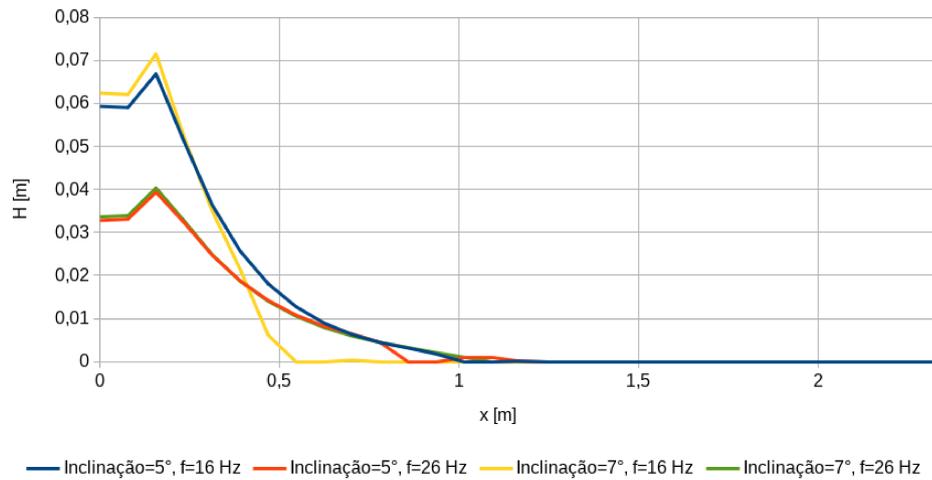


Fonte: O autor, 2021.

Para a simulação, utilizou-se uma reconstrução de ordem 3, em uma malha com 30 volumes de controle, utilizou-se $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$. Toda a metodologia de resolução foi implementada em linguagem de programação C++ combinada com a biblioteca de processamento paralelo *OpenMP*.

Na Figura 5.2 estão apresentados os comportamentos para a altura nos estados estacionários para as inclinações de 5° e 7° e frequências de vibração dos motovibradores de 16 e 26 Hz.

Figura 5.2 – Comportamento da altura em estado estacionário para uma vazão de alimentação $Q_A = 0,01 \frac{m^3}{s}$.



Na Figura 5.2 observa-se que maiores frequências de vibração dos motovibradores geraram menores alturas de líquido sobre a tela da peneira, ao passo que menores frequências implicaram em maiores alturas, independente da inclinação. Entretanto, uma inclinação mais elevada combinada com uma frequência mais baixa resultou em uma menor fração do comprimento da tela preenchido por fluido. Esse comportamento já era esperado, com base em uma análise qualitativa da Equação 4.37. Observa-se que maiores frequências de vibração geram maiores velocidades na direção z , o que favorece o deságue, mesmo que velocidade na direção x também tenha um acréscimo devido à alta frequência. Menores velocidades na direção x implicam em maiores tempos de residência (tempo que uma partícula – seja ela de líquido, sólido ou mistura de ambos – permanece sobre a tela da peneira), o que favorece o processo de deságue, portanto observa-se que o aumento da frequência de vibração dos motovibradores favorece o deságue em termos de maiores vazões passando pelas aberturas da tela da peneira, porém desfavorecem o deságue no sentido de reduzir o tempo de residência do fluido sobre a tela. Para o caso específico exibido na Figura 5.2, observa-se que uma maior velocidade na direção z favorece mais o processo de deságue do que um menor tempo de residência, ocasionado por uma menor velocidade na direção x .

Em relação ao efeito da inclinação ocorre algo análogo ao discutido para o efeito da frequência dos motovibradores. Menores inclinações favorecem o deságue por induzirem um efeito gravitacional mais significativo na Equação 4.41, o que acarreta em maiores velocidades na direção z e conseqüentemente maiores vazões de líquido que passa pelas aberturas da tela da peneira. Entretanto, menores inclinações aumentam a velocidade na direção x , o que reduz o tempo de residência do líquido sobre a tela da peneira, desfavorecendo o processo de deságue. Nos casos apresentados na Figura 5.2, observa-se que a inclinação pouco influenciou em casos de frequência mais elevada, porém em casos

de frequência mais baixa, a fração do comprimento da tela preenchido por fluido foi menor para a inclinação mais elevada, indiciando que para frequências mais baixas, uma maior inclinação favorece o processo de deságue.

5.2 Resultados experimentais

Para a análise da concentração mássica de líquido (c_l) no ponto $x = L$ nos estados estacionários relativos a cada conjunto de parâmetros, utilizou-se um planejamento experimental do tipo planejamento composto central (PCC) (BOX et al., 1978), avaliando a influência dos parâmetros componente normal do fator g (X_1), inclinação X_2 e vazão de alimentação (X_3). O planejamento adotado foi um planejamento composto central do tipo ortogonal com duas amostras no ponto central. Os valores codificados para a análise do planejamento experimental são apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Valores codificados referentes a cada variável analisada no PCC.

Nível	Fator g_z (X_1)	Inclinação (X_2)	Vazão de alimentação (X_3)
$-\lambda = -1, 2872$	1, 0	6, 4	0, 0014
-1	1, 3	6, 5	0, 0019
0	2, 3	7, 0	0, 0038
+1	3, 3	7, 5	0, 0057
$+\lambda = +1, 2872$	3, 6	7, 6	0, 0062

Fonte: O autor, 2021.

No caso do intervalo de inclinação adotado no planejamento experimental, optou-se por um intervalo mais elevado de forma a proporcionar maiores tempos de residências e também devido à restrições de operação da peneira vibratória utilizada em inclinações mais baixas.

Os valores da concentração mássica de líquido foram calculados através da Equação 5.4.

$$c_l = \frac{m_{s+l} - m_s}{m_{s+l}} \quad (5.4)$$

em que m_{s+l} é a massa da amostra úmida coletada no descarte de sólidos da peneira vibratória (posição $x = L$ da tela da peneira) e m_s é a massa de sólidos, obtida a partir da secagem da amostra úmida em estufa a $105^\circ C$ por um dia.

Os valores da concentração mássica de líquido obtida para cada conjunto de parâmetros estão descritos na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Concentração mássica de líquido para cada condição operacional analisada.

X_1	X_2	(X_3)	c_l
-1	-1	-1	0,1767
-1	-1	+1	0,1653
-1	+1	-1	0,1646
-1	+1	+1	0,1669
+1	-1	-1	0,1842
+1	-1	+1	0,1843
+1	+1	-1	0,1853
+1	+1	+1	0,1802
0	0	0	0,1808
0	0	0	0,1822
$-\lambda$	0	0	0,1771
$+\lambda$	0	0	0,1828
0	$-\lambda$	0	0,1826
0	$+\lambda$	0	0,1800
0	0	$-\lambda$	0,1887
0	0	$+\lambda$	0,1800

Fonte: O autor, 2021.

Todo o tratamento estatístico para os dados apresentados na Tabela 5.3 foi realizado em linguagem de programação R, utilizando a interface gráfica *RStudio*. Na linguagem R, o planejamento composto central e a obtenção da superfície de resposta são realizados a partir da biblioteca *rsm*.

O planejamento experimental realizado forneceu a superfície de resposta descrita pela Equação 5.5.

$$c_l(X_1, X_2, X_3) = 0,1840 + 0,0060 X_1 - 0,0015 X_2 - 0,0022 X_3 + 0,0009 X_1 X_2 + 0,0005 X_1 X_3 + 0,0011 X_2 X_3 - 0,0036 X_1^2 - 0,0028 X_2^2 - 0,0009 X_3^2 \quad (5.5)$$

em que $F_{g_z} = X_1 + 2,3$, $\alpha = 0,5 X_2 + 7$ e $Q_A = 0,0019 X_3 + 0,0038$.

O sumário da superfície de resposta fornecida pela biblioteca *rsm*, entretanto, indicou que a variável mais significativa para o deságue em peneiras vibratórias é a componente normal do fator g , corroborando com o comportamento obtido por simulação descrito na Figura 5.2. Os valores da função de probabilidade para cada coeficiente da superfície de resposta (Equação 5.5) estão apresentados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Valores de função de probabilidade para cada coeficiente da superfície de resposta da Equação 5.5.

Parâmetro que acompanha	Valor da função de probabilidade
–	$1,21 \cdot 10^{-9}$
X_1	0,007781
X_2	0,367636
X_3	0,193853
$X_1 X_2$	0,624507
$X_1 X_3$	0,787478
$X_2 X_3$	0,580205
X_1^2	0,152692
X_2^2	0,252463
X_3^2	0,684222

Fonte: O autor, 2021.

Para o modelo de segunda ordem completo, ou seja, o modelo com os efeitos lineares, quadráticos e interações de dois parâmetros, o valor do coeficiente de correlação $r^2 = 0,7975$. A eliminação dos efeitos sem significância estatística, entretanto, acarretaria na redução do r^2 do modelo, dessa forma reduzindo a capacidade preditiva do modelo. Como a superfície de resposta da Equação 5.5 será utilizada para o processo de otimização, neste trabalho optou-se por não eliminar os efeitos sem significância estatística.

5.3 Parâmetros ótimos para o processo de deságue em peneiras vibratórias

A partir da superfície de resposta obtida do planejamento composto central (Equação 5.5), resolveu-se o problema de otimização descrito pela Equação 4.51, sendo as restrições operacionais de fator g e inclinação definidas pelos pontos axiais do planejamento, ou seja, $\pm\lambda$.

A concentração mássica de sólidos na alimentação, como descrito no capítulo anterior, foi mantida constante nos ensaios experimentais realizados. A Tabela 5.5 traz os valores ótimos da componente normal do fator g e da inclinação para as vazões avaliadas nos níveis inferior, central e superior, mais os pontos axiais, conforme apresentado na Tabela 5.2.

Tabela 5.5 – Valores ótimos de parâmetro g e inclinação que minimizam a concentração mássica de água na saída da tela da peneira ($x = L$).

$Q_A \left(\frac{m^3}{s} \right)$	$F_{g_z} (-)$	$\alpha (^\circ)$	Valor mínimo de c_l
0,0014	1,0	7,6	0,1627
0,0019	1,0	7,6	0,1629
0,0038	1,0	7,6	0,1623
0,0057	1,0	7,6	0,1598
0,0062	1,0	7,6	0,1588

Fonte: O autor, 2021.

Conforme observado na Tabela 5.5, independentemente da vazão volumétrica de alimentação, o aumento do tempo de residência da mistura sobre a tela da peneira favorece o deságue, implicando na redução da concentração mássica de líquido.

É importante frisar que, de acordo com a Tabela 5.4, o efeito linear do fator g na direção normal foi o mais relevante, logo já era esperado que uma redução no fator g favoreceria a redução da concentração mássica de líquido.

Outro ponto importante a destacar é relacionado à obtenção dos valores experimentais, que podem não estar isentos de erros experimentais, sendo essa hipótese acentuada pelo valor de r^2 da superfície de resposta obtida e a baixa significância estatística para os parâmetros inclinação e vazão volumétrica de alimentação.

Capítulo 6

Conclusões e Propostas Futuras

Este capítulo tem por objetivo apresentar as conclusões relativas aos resultados obtidos e apresentar as próximas etapas relativas à continuidade deste estudo.

6.1 Conclusões

Embora não se tenha realizada a simulação para uma alimentação contendo sólidos, o modelo proposto apresentou resultados coerentes para o caso de uma alimentação isenta de sólidos, o que, em um primeiro momento, fornece informações importantes da posição da região inundada, influência de parâmetros operacionais, além de ser uma condição mais favorável para levantamento de parâmetros relativos à tela de peneiramento, como a capacitância da tela, por exemplo. É importante ressaltar que o valor da capacitância da tela, bem como a velocidade da alimentação ($v_{x,A}$), foram propostos e não obtidos experimentalmente, ou seja, o resultado para a simulação é um cenário hipotético, assumindo os valores definidos no capítulo anterior.

O processo de deságue avaliado a partir da superfície de resposta obtida do planejamento composto central demonstrou que a frequência de vibração dos motovibradores, avaliada a partir da componente z do fator g , foi o fator que mais influenciou o deságue, porém, ao contrário do que se observou na simulação para uma alimentação isenta de sólidos, frequências mais baixas favoreceram mais o deságue, por aumentarem o tempo de residência do material sobre a tela da peneira.

Entretanto, o comportamento da superfície de resposta não invalida os resultados obtidos por simulação, uma vez que no processo de deságue em peneiras vibratórias é comum observar duas regiões sobre a tela da peneira, uma região com características predominantemente de líquido e outra região com características predominantemente de sólido. Como a concentração de líquido na primeira região é muito maior que a concentração de sólidos, espera-se que a mistura se comporte como se estivesse isenta de sólidos nessa

região. Porém, na região com características de sólido, uma vez que a concentração de líquido é baixa, a vazão de líquido que passa pelas aberturas da tela da peneira é menor e uma vez que o aumento da frequência dos motovibradores favorece o aumento da velocidade em ambas as componentes relevantes (x e z), nessa região é mais interessante favorecer o tempo de residência do material sobre a tela, optando por baixas frequências de vibração.

6.2 Propostas futuras

Devido a restrições no tempo da pesquisa e complexidade do tema abordado, algumas etapas não foram realizadas conforme inicialmente planejadas, sendo que essas etapas serão definidas como propostas para trabalhos futuros. Essas etapas são:

- levantamento de propriedades da tela da peneira vibratória e parâmetros de construção, como diâmetro do fio, espessura da tela e fração de área aberta;
- de posse dos parâmetros do item anterior, realização de novas simulações avaliando também o caso de uma alimentação que contenha material sólido;
- validação do modelo a partir de dados experimentais;
- realização de um novo planejamento experimental, de forma a obter um modelo de superfície de resposta com melhor coeficiente de correlação (r^2), avaliando novos intervalos de valores e colhendo amostras em duplicata para o tratamento dos dados;
- obtenção dos parâmetros ótimos para o processo de deságue em peneiras vibratórias utilizando o modelo fenomenológico proposto.

Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. Handbook of mathematical function: with formulas, graphs and mathematical tables. In: *Handbook of mathematical function: with formulas, graphs and mathematical tables*. [S.l.]: Dover Publications, 1965. Citado na página 28.
- ALTENA, M. van. *High-order finite-volume discretisations for solving a modified advection-diffusion problem on unstructured triangular meshes*. Dissertação (Mestrado) — University of British Columbia, 1999. doi:10.14288/1.0080945. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 30.
- AMERICAN ASSOCIATION OF DRILLING ENGINEERS. *Shale Shaker and Drilling Fluids Systems: Techniques and Technology for Improving Solids Control Management*. [S.l.]: Elsevier Science, 1999. Citado na página 1.
- ASME. *Drilling Fluids Processing Handbook*. [S.l.]: Elsevier, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 2, 5, 6, 7 e 8.
- BARBOSA, V. P. *Avaliação de fatores operacionais em processo de peneiramento vibratório aplicado à separação sólido-líquido com auxílio de técnicas de análise de imagem*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2018. doi:10.14393/ufu.di.2018.252. Citado na página 15.
- BARTH, T.; FREDERICKSON, P. Higher order solution of the Euler equations on unstructured grids using quadratic reconstruction. In: AIAA. [S.l.], 1990. (28th Aerospace Sciences Meeting). doi:10.2514/6.1990-13. Citado na página 23.
- BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. *Transport Phenomena*. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2002. 897 p. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 17.
- BOX, G. E. P.; HUNTER, J. S.; HUNTER, W. G. *Statistics for experimenters: an introduction to design, data analysis, and model building*. [S.l.]: Wiley, 1978. Citado na página 47.
- FRANCO, N. B. *Cálculo numérico*. [S.l.]: Pearson, 2006. 340–353 p. Citado na página 28.
- KELLER, K.; STAHL, W. Vibration screens for dewatering—theory and practice. *Mining, Metallurgy & Exploration*, Springer, v. 14, n. 1, p. 27–34, 1997. doi:10.1007/BF03402748. Citado 4 vezes nas páginas 8, 9, 10 e 11.
- LEON, S. J. *Linear algebra with applications*. 8. ed. [S.l.]: Pearson, 2010. 418–439 p. Citado na página 27.

- MENON, P. E. E. S. *Piping Calculations Manual*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2004. Citado na página 20.
- MICHALAK, C. *Efficient high-order accurate unstructured finite-volume algorithms for viscous and inviscid compressible flows*. Tese (Doutorado) — University of British Columbia, 2009. doi:10.14288/1.0067108. Citado 3 vezes nas páginas 22, 27 e 30.
- NASCENTES, C. L. *Separação sólido-fluido de perfuração em peneiras vibratórias*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. Citado na página 1.
- OLLIVIER-GOOCH, C.; ALTENA, M. van. A high-order-accurate unstructured mesh finite-volume scheme for the advection–diffusion equation. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 181, n. 2, p. 729–752, 2002. doi:10.1006/jcph.2002.7159. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 25 e 30.
- OLLIVIER-GOOCH, C.; NEJAT, A.; MICHALAK, K. Obtaining and verifying high-order unstructured finite volume solutions to the Euler equations. *AIAA journal*, v. 47, n. 9, p. 2105–2120, 2009. doi:10.2514/1.40585. Citado na página 22.
- RAJA, V. et al. Continuum model of a shale shaker. In: HOUSTON, TEXAS. *AADE Fluids Conference and Exhibition*. [S.l.], 2010. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 12.
- SANZONE, D. et al. *Environmental Fates and Effects of Ocean Discharge of Drill Cuttings and Associated Drilling Fluids From Offshore Oil and Gas Operations*. [S.l.], 2016. Citado na página 4.
- STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of global optimization*, Springer, v. 11, n. 4, p. 341–359, 1997. doi:10.1023/A:1008202821328. Citado na página 40.
- THOMAS, J. E. *Fundamentos de Engenharia de Petróleo*. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2004. Citado na página 1.
- TILTON, J. N. Fluid and particle dynamics. section 6. In: PERRY, R. H.; GREEN, D. W. (Ed.). *Perry's Chemical Engineers' Handbook*. 8. ed. New York: McGraw-Hill, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 39.
- VANDERPLAATS, G. N. *Numerical optimization techniques for engineering design*. 3. ed. Colorado Springs, USA: VR D Inc., 1999. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- WHITE, C. E. Statistical analyses supporting final effluent limitations guidelines and standards for synthetic-based drilling fluids and other non-aqueous drilling fluids in the oil and gas extraction point source category. United States Environmental Protection Agency, Office of Water, 2000. Citado na página 1.
- YANG, X.-S. *Nature-inspired optimization algorithms*. [S.l.]: Elsevier, 2014. doi:10.1016/C2013-0-01368-0. Citado na página 40.