

ALVARO DANIEL HERRERA ARROYO

**MODELAGEM, SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UMA NOVA
PROPOSTA DE AERONAVE TRICÓPTERO TILT-WING-COAXIAL-
ROTOR**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

2021

ALVARO DANIEL HERRERA ARROYO

**MODELAGEM, SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UMA AERONAVE
TRICÓPTERO TILT-WING-COAXIAL-ROTOR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM CIÊNCIAS**

Banca examinadora:

Aniel Silva de Moraes, Dr. (Orientador) – UFU

Gabriela Vieira Lima, Dra. (Co-orientadora) – UFU

Daniel Costa Ramos, Dr. – UFU

Mauricio Andrés Varela Morales, Dr. – ITA

Aniel Silva de Moraes, Dr.
Orientador

Luis Carlos Gomes de Freitas, Dr.
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

UBERLÂNDIA – MG

2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

A779 Arroyo, Alvaro Daniel Herrera, 1993-
2021 MODELAGEM, SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UMA NOVA PROPOSTA
DE AERONAVE TRICÓPTERO TILT-WING-COAXIAL-ROTOR [recurso
eletrônico] / Alvaro Daniel Herrera Arroyo. - 2021.

Orientador: Aniel Silva de Morais.

Coorientadora: Gabriela Vieira Lima.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Elétrica.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.716>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Engenharia elétrica. I. Morais, Aniel Silva de,
1979-, (Orient.). II. Lima, Gabriela Vieira, 1990-,
(Coorient.). III. Universidade Federal de Uberlândia.
Pós-graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título.

CDU: 621.3

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 3N - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4707 - www.posgrad.feelt.ufu.br - copel@ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Elétrica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 765, PPGEELT				
Data:	Catorze de dezembro de dois mil e vinte e um	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:46
Matrícula do Discente:	11922EEL004				
Nome do Discente:	Alvaro Daniel Herrera Arroyo				
Título do Trabalho:	Modelagem, Simulação e Controle de uma nova proposta de Aeronave Tricóptero Tilt-Wing-Coaxial-Rotor				
Área de concentração:	Sistemas de energia elétrica				
Linha de pesquisa:	Controle e automação				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Coordenador do projeto vinculado ao programa: Aniel Silva de Moraes. Agência financiadora: Projeto aprovado no CONFEELT Sem agência de fomento. Número do processo na agência financiadora: Sem agência de fomento. Vigência do projeto: 22/11/2019 a 21/11/2023.				

Reuniu-se por meio de videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, assim composta: Professores Doutores: Gabriela Vieira Lima - FEELT/UFU (Coorientadora); Daniel Costa Ramos- FEELT/UFU, Maurício Andrés Varela Morales - ITA; Aniel Silva de Moraes - FEELT/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o(a) presidente da mesa, Dr(a). Aniel Silva de Moraes, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato(a), agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aniel Silva de Moraes, Professor(a) do Magistério Superior**, em 14/12/2021, às 16:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Daniel Costa Ramos, Professor(a) do Magistério Superior**, em 14/12/2021, às 16:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gabriela Vieira Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 14/12/2021, às 16:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maurício Andrés Varela Morales, Usuário Externo**, em 17/12/2021, às 20:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3257284** e o código CRC **4E4EBC18**.

Dedico este trabalho aos meus pais por todo o apoio e as forças que me dão todo dia desde o Equador e à Hellen pelo carinho e cuidado que me ajudaram a me manter firme.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a **Deus** por sempre cuidar de mim e me fortalecer todos os dias, me guiando sempre no caminho certo para alcançar meus sonhos.

Agradeço aos professores **Aniel Silva de Moraes** e **Gabriela Vieira Lima** pela oportunidade, paciência, guia e compreensão. Sou muito grato por terem acreditado no meu potencial e nas minhas ideias.

Agradeço meus pais **Gonçalo Alvaro** e **Maria Elena** e a toda minha família, pois são eles meu pilar de sustento e a razão de sempre seguir em frente, por mais difícil que o caminho seja. Vocês são o motor da minha vida.

Agradeço ao meu avô **José (Pépe)** por ter sido sempre um enorme apoio emocional e ter sido um exemplo a seguir como o excelente médico que foi. Sem seu apoio querido “vô”, muitas vezes econômico dada a difícil situação, não poderia ter continuado em diversas ocasiões. Por isso, este trabalho é mérito seu também, espero que o deixe orgulhoso desde o céu.

Agradeço, por fim, à **Pós-graduação em Engenharia Elétrica** da Universidade Federal de Uberlândia pela oportunidade e à **CAPES** (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

RESUMO

Na última década, com o desenvolvimento contínuo de Drones ou Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs), uma grande variedade de modelos foi testada e criada, destacando dois tipos de Drones: multicópteros e asas fixas. Contudo, recentemente, tem havido uma demanda crescente por explorar a combinação entre esses dois tipos de veículos, levando aos modelos de decolagem e pouso vertical (*Vertical Take Off and Landing* - VTOL), que buscam produzir uma aeronave capaz de ter as características de estabilidade de um multicóptero no modo de voo pairado no ar (*hover*) e a velocidade e autonomia de voo elevada que uma asa fixa geralmente fornece no modo de voo cruzeiro (voo reto nivelado). Em contrapartida às vantagens do VTOL, o desafio com esta classe de aeronaves é que estas estão sujeitas a um alto grau de não-linearidade, próprio da mistura entre duas arquiteturas de aeronave diferentes. Adicionalmente, como todo veículo aéreo, devem ser capazes de lidar com perturbações atmosféricas no ar.

O objetivo principal deste trabalho é o de propor uma nova arquitetura de VANT VTOL com topologia tricóptero. Esta aeronave conta com inclinação independente de rotores em conjunto com asas, vetorizando forças de propulsão e forças aerodinâmicas, com o objetivo de auxiliar no controle da aeronave, diminuir o impacto de *downwash* e aproveitar uma mesma estrutura de rotores para exercer movimento do veículo em várias direções. O veículo usa rotores-coaxiais para balancear o torque induzido entre os rotores para todo ângulo de inclinação dos mesmos e, adicionalmente, aumentar a força de tração.

A modelagem dinâmica foi desenvolvida tomando como base as leis físicas que regem sobre os princípios propulsivos, aerodinâmicos e inerciais. Destacando especialmente o centro de gravidade (CG) móvel devido ao veículo se caracterizar por ser um sistema multi corpo, com capacidade de assumir uma morfologia não simétrica.

O *design* da aeronave foi feito através do software de desenho 3D SolidWorks®, considerando componentes elétricos e mecânicos reais de forma a obter um modelo teórico da aeronave o mais próximo da realidade. O tensor de inércia do veículo foi validado através da comparação do tensor de inércia gerado pelo modelo matemático e o tensor de inércia gerado pelo SolidWorks®.

Para a simulação, o modelo da aeronave foi linearizado nas condições de voo *hover* e cruzeiro e o controle da aeronave foi implementado através de uma estratégia de controle em cascata. Um controlador regulador linear quadrático com integração de estados (LQRI) foi utilizado para controlar as velocidades lineares e angulares da aeronave, enquanto que um controlador proporcional integral derivativo (PID) foi usado para controlar a posição e atitude da aeronave no espaço. A estratégia de controle adotada permitiu realizar o seguimento de trajetórias de forma satisfatória, mesmo na presença de perturbações atmosféricas.

PALAVRAS-CHAVE: Controle ótimo, Controle PID, Mecânica do voo, Modelagem dinâmica, Rastreamento de trajetória, Rotor-coaxial, *Tilt-rotor*, VTOL.

ABSTRACT

In the last decade, with the continuous development of Drones or Unmanned Aerial Vehicles (UAVs), a wide variety of models were tested and created, highlighting two types of Drones: multicopters and fixed wings. However, recently, there has been a growing demand to explore the “mixture” between these two types of vehicles. Leading to Vertical Take Off and Landing (VTOL) models, which seek to produce an aircraft capable of having the stability characteristics of a multicopter in hover flight mode, and the speed and high flight time that a fixed wing typically provides in cruise mode (straight level flight). In contrast to the advantages of VTOLs, the challenge with this class of aircraft is that they are subject to a high degree of non-linearity, typical of the mixture between two different aircraft architectures. Additionally, like all air vehicles, they must be able to deal with aerodynamic disturbances in the air.

The main objective of this work is to propose a new UAV VTOL architecture with tricopter topology. This aircraft has independent rotor inclination together with wings, vectoring propulsion forces and aerodynamic forces, in order to help control the aircraft, reduce the downwash impact and take advantage of the same rotor structure to exert vehicle movement in several directions. The vehicle uses coaxial-rotors to balance the induced torque between the rotors for every tilting angle and, additionally, to increase the thrust force.

The dynamic modeling was developed based on the physical laws that govern the propulsive, aerodynamic and inertial principles. Especially highlighting the mobile center of gravity (CG) due to the fact that the vehicle is characterized as a multi-body system, capable of assuming a non-symmetrical morphology.

The aircraft design was made using SolidWorks® 3D design software, considering real electrical and mechanical components in order to obtain a theoretical model of the aircraft as close to reality. The vehicle's inertia tensor was validated by comparing the inertia tensor generated by the mathematical model and the inertia tensor generated by SolidWorks®.

For the simulation, the aircraft model was linearized under the hover and cruise flight conditions and the aircraft control was implemented through a cascade control strategy. A state-integrated linear quadratic regulator controller (LQRI) was used to control the linear and angular velocities of the aircraft, while a proportional derivative integral controller (PID) was used to control the aircraft's position and attitude in space. The control strategy adopted allowed for the tracking of trajectories in a satisfactory manner, even in the presence of aerodynamic disturbances.

KEY-WORDS: Coaxial-rotor, Dynamic Modelling, Flight Mechanics, Optimal Control, PID control, Trajectory tracking, Tilt-rotor, VTOL.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Modelos de VANT's	2
Figura 1.2 – Exemplos de VTOLs.....	4
Figura 1.3 – Montagem de um rotor-coaxial.....	6
Figura 1.4 – Fluxo de ar sobre um rotor-coaxial.....	6
Figura 1.5 – Brinquedo voador tradicional chinês	7
Figura 1.6 – Parafuso-aéreo de Da Vinci	8
Figure 1.7 – Carruagem aérea de George Cayley.....	8
Figura 1.8 – Aeródromo de Langley	9
Figura 1.9 – Kettering Bug.....	10
Figura 1.10 – Helicóptero de Bothezat.....	10
Figura 1.11 – Fa-61 de Focke e Achgelis.....	11
Figura 1.12 – Os helicópteros VS-300 e VS-300 ^a de Igor Sikorsky	12
Figura 1.13 – V-1 “Buzz Bomb”	12
Figura 1.14 – Spitfire PR.XIX.....	13
Figure 1.15 – Aeronaves de ponta com rotores-coaxiais.....	16
Figura 1.16 – VTOL TWUAV de AUTENRIEB et al (2019)	16
Figura 1.17 – VTOL TRANSITION da companhia ALTI.....	17
Figura 1.18 – VTOL Vector da companhia Quantum Systems.....	18
Figura 1.19 – VTOL NAURU 500C da companhia XMobots.....	18
Figura 1.20 – VTOL DRARGO 150A da companhia XMobots.....	19
Figura 1.21 – Modelo VTOL proposto por XINHUA e LILONG (2015).....	19
Figura 1.22 – Taxis-aéreos VTOL	20
Figura 1.23 – Aeronaves de assalto com inclinação de rotores ou uso de rotores-coaxiais.....	20
Figura 2.1 – Interferência do fluxo de ar das hélices	24
Figura 2.2 – Quad-tilt-wing.....	25
Figura 2.3 – Asa-voadora tricóptero.....	26
Figura 2.4 – Tricóptero com inclinação independente de rotores.	27
Figura 2.5 – Gradiente de velocidade em quadricóptero-coaxial.....	29

Figura 2.6 – Hexacóptero coaxial-tilt-rotor.....	29
Figura 2.7 – Diagrama de blocos do controlador LQRI.....	35
Figura 2.8 – Diagrama de controle do quad-tilt-wing com LQR	36
Figura 2.9 – Diagrama de controle do quad-tilt-wing com LQR. Controlador translacional Controlador rotacional.....	36
Figura 2.10 – Diagrama de blocos do Sistema em malha fechada com controle PID.....	39
Figura 2.11 – Ação do controle PID.....	40
Figura 2.12 – Controle PID longitudinal do quad-tilt-wing.....	42
Figura 3.1 – Montagem generalizada da aeronave.....	43
Figura 3.2 – Condição de voo assimétrica da aeronave.	45
Figura 3.3 – Rotação de acordo com os ângulos de inclinação.....	46
Figura 3.4 - Perspectivas do TWUAV.	46
Figura 3.5 – Distribuição dos sistemas de referência A , B e Pb usados no sistema.	49
Figura 3.6 – Relação angular entre os sistemas r e Pb para cada um dos rotores-coaxiais.....	50
Figura 3.7 – Vento incidente sobre as hélices de um rotor-coaxial lateral.....	73
Figura 3.8 – Coeficiente de tração por razão de avanço.....	80
Figura 3.9 – Ângulo de ataque e dinâmica do perfil.	82
Figura 3.10 – Distribuição das seções aerodinâmicas da asa direita.	83
Figure 3.11 – Coeficientes de sustentação C_l e de arrasto C_d 2D. Interpolação para ângulos de ataque elevados, a partir dos dados experimentais do perfil NACA0012.	86
Figure 3.12 – Comparativo entre os coeficientes e derivadas dos coeficientes de sustentação 2D C_l e 3D C_L	89
Figura 3.13 – Coeficiente de torque por razão de avanço.	93
Figura 3.14 – Coeficiente de momento C_m 2D. Interpolação para ângulos de ataque elevados, a partir dos dados experimentais do perfil NACA0012.	97
Figura 4.1 – Formato dos rotores-coaxiais da aeronave.....	102
Figura 4.2 – Formato da asa da aeronave	103
Figura 4.3 – Formato da fuselagem da aeronave.....	104
Figura 4.4 – Componentes eletrônicos no interior da fuselagem	104
Figura 4.5 – Vista lateral da aeronave montada	106
Figura 4.6 – Vista superior da aeronave montada	106

Figure 4.7 – Aeronave completa em voo cruzeiro.....	107
Figura 5.1 – Rotina iterativa para cálculo da velocidade de rotação da hélice inferior	114
Figura 5.2 – Velocidade de rotação da hélice inferior, em função da velocidade de rotação da hélice superior e da velocidade axialmente incidente sobre a hélice superior	116
Figure 5.3 – Valores singulares do modo <i>hover</i> em função da frequência.....	124
Figura 5.4 – Valores singulares do modo cruzeiro em função da frequência.	133
Figura 5.5 – Diagrama de blocos LQRI para o controle de velocidades lineares e angulares da aeronave relativas ao sistema fixo ao corpo <i>B</i>	135
Figura 5.6 – Diagrama de blocos generalizado da malha de controle do sistema.....	139
Figura 5.7 – Diagrama de blocos do controlador PID utilizado.....	140
Figure 6.1 – Diagrama de blocos final do sistema VTOL.....	143
Figura 6.2 – Resposta das velocidades lineares aos degraus de velocidade em voo cruzeiro....	152
Figura 6.3 – Resposta das velocidades angulares aos degraus de velocidade em voo cruzeiro.	153
Figura 6.4 – Variação dos ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais para, os degraus de velocidade em voo cruzeiro.....	153
Figura 6.5 – Variação das velocidades de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais, para os degraus de velocidade em voo cruzeiro	154
Figura 6.6 – Trajetória circular-diagonal em modo <i>hover</i>	156
Figura 6.7 – Coordenadas de posição para a trajetória circular-diagonal em modo <i>hover</i>	157
Figura 6.8 – Coordenadas de atitude para a trajetória circular-diagonal em modo <i>hover</i>	158
Figura 6.9 – Ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais para a trajetória circular-diagonal em modo <i>hover</i>	158
Figura 6.10 – Velocidades de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais, para a trajetória circular-diagonal em modo <i>hover</i>	159
Figura 6.11 – Trajetória helicoidal em modo <i>hover</i>	161
Figura 6.12 – Coordenadas de posição para a trajetória helicoidal em modo <i>hover</i>	161
Figura 6.13 – Coordenadas de atitude para a trajetória helicoidal em modo <i>hover</i>	162
Figura 6.14 – Ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais, para a trajetória helicoidal em modo <i>hover</i>	163
Figura 6.15 – Velocidade de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais, para a trajetória helicoidal em modo <i>hover</i>	163

Figura 6.16 – Trajetória helicoidal em modo <i>hover</i> , com rajadas de vento	165
Figura 6.17 – Coordenadas de posição para a trajetória helicoidal em modo <i>hover</i> , com rajadas de vento	166
Figura 6.18 – Coordenadas de atitude para a trajetória helicoidal em modo <i>hover</i> , com rajadas de vento	167
Figura 6.19 – Ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais, para a trajetória helicoidal em modo <i>hover</i> , com rajadas de vento	167
Figure 6.20 – Velocidade de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais, para a trajetória helicoidal em modo <i>hover</i> , com rajadas de vento	168
Figura 6.21 – Trajetória helicoidal em modo cruzeiro	170
Figura 6.22 – Coordenadas de posição para a trajetória helicoidal em modo cruzeiro.....	170
Figura 6.23 – Coordenadas de atitude para a trajetória helicoidal em modo cruzeiro	172
Figure 6.24 – Ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais, para a trajetória helicoidal em modo cruzeiro	172
Figure 6.25 – Velocidade de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais, para a trajetória helicoidal em modo cruzeiro	173
Figura 6.26 – Perspectiva da trajetória personalizada em modo cruzeiro	177
Figura 6.27 – Vista superior da trajetória personalizada em modo cruzeiro.....	178
Figura 6.28 – Coordenadas de posição para a trajetória personalizada em modo cruzeiro.....	178
Figura 6.29 – Coordenadas de atitude para a trajetória personalizada em modo cruzeiro.....	179
Figura 6.30 – Ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais, para a trajetória customizada em modo cruzeiro	180
Figura 6.31 – Velocidade de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais, para a trajetória personalizada em modo cruzeiro	180
Figura 6.32 – Perspectiva da trajetória personalizada em modo cruzeiro, com rajadas de vento	182
Figura 6.33 – Vista superior da trajetória personalizada em modo cruzeiro, com rajadas de vento	182
Figura 6.34 – Coordenadas de posição para a trajetória personalizada em modo cruzeiro, com rajadas de vento	183

Figura 6.35 – Coordenadas de atitude para a trajetória personalizada em modo cruzeiro, com rajadas de vento	184
Figura 6.36 – Ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais, para a trajetória customizada em modo cruzeiro, com rajadas de vento	184
Figura 6.37 – Velocidade de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais, para a trajetória personalizada em modo cruzeiro, com rajadas de vento	185
Figura A1.1 – Relação entre os sistemas A , Pb e a junta de giro C_1 do rotor-coaxial direito R_1	194
Figura A1.2 – Relação entre os sistemas A , Pb e a junta de giro C_3 do rotor-coaxial traseiro R_3	196
Figura A1.3 – Perfil aerodinâmico NACA0012.....	235
Figura A1.4 – Localização dos centros aerodinâmicos das seções da asa direita W_1 no plano XY.....	236

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Efeito de incrementar as contastes do controlador PID para uma entrada degrau ...	41
Tabela 3.1 – Recomendação de hélices oferecida pelo fabricante do motor <i>brushless</i> escolhido.	79
Tabela 4.1 – Componentes eletrônicos da aeronave.....	108
Tabela 4.2 – Comparativo de tensor de inércia para ângulos de inclinação $\phi_{E1} = \phi_{E2} = 15^\circ$ e $\phi_{E3} = 90^\circ$ (configuração simétrica).....	109
Tabela 4.3 – Comparativo de tensor de inércia para ângulos de inclinação $\phi_{E1} = 120^\circ, \phi_{E2} = 45^\circ$ e $\phi_{E3} = 65^\circ$ (configuração assimétrica)	109
Tabela 4.4 – Comparativo de tensor de inércia para ângulos de inclinação $\phi_{E1} = 120^\circ$ e $\phi_{E2} = \phi_{E3} = 90^\circ$ (configuração assimétrica).....	110
Tabela 5.1 – Valores das variáveis de estado e de entrada para a condição de equilíbrio em voo pairado	120
Tabela 5.2 – Componentes de força e momento totais para voo pairado	122
Tabela 5.3 – Valores das variáveis de estado e de entrada para a condição de equilíbrio em voo cruzeiro	128
Tabela 5.4 – Componentes de força e momento totais para voo cruzeiro	130
Tabela 6.1 – Ganhos dos controladores PID para cada uma das variáveis de posição e atitude para a trajetória circular-diagonal em modo <i>hover</i>	146
Tabela 6.2 – Ganhos dos controladores PID para cada uma das variáveis de posição e atitude para a trajetória helicoidal em modo <i>hover</i>	146
Tabela 6.3 – Ganhos dos controladores PID para cada uma das variáveis de posição e atitude para a trajetória helicoidal em modo <i>hover</i> , com rajadas de vento	148
Tabela 6.4 – Ganhos dos controladores PID para cada uma das variáveis de posição e atitude para a trajetória helicoidal em modo cruzeiro	149
Tabela 6.5 – Ganhos dos controladores PID para cada uma das variáveis de posição e atitude para a trajetória personalizada em modo cruzeiro, com rajadas de vento	150
Tabela B1.1 – Parâmetros da fuselagem.....	243

Tabela B1.2 – Parâmetros do rotor-coaxial direito.....	244
Tabela B1.3 – Parâmetros do rotor-coaxial esquerdo.....	245
Tabela B1.4 – Parâmetros do rotor-coaxial traseiro.....	247
Tabela B1.5 – Parâmetros da asa direita.....	248
Tabela B1.6 – Parâmetros da asa esquerda.....	249
Tabela B1.7 – Parâmetros adicionais do modelo da aeronave.....	251

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Ângulo de ataque
\vec{a}	Vetor de aceleração linear
A	Sistema de coordenadas fixo ao nariz da aeronave
A_D	Área do disco de hélice
A_{Fi}	Área projetada da fuselagem
$A_{n \times n}$	Matriz da ação natural do modelo linear do sistema, sem ação de controle
A_{wiSj}	Área da seção da asa
AC	Centro aerodinâmico
AR	Razão de alongamento
B	Sistema de coordenadas fixo ao centro de gravidade da aeronave
$B_{m \times m}$	Matriz da ação controlada do modelo linear do sistema
C_d	Coefficiente de arrasto 2D do perfil aerodinâmico
C_D	Coefficiente de arrasto 3D da asa
C_{DFi}	Coefficiente de arrasto da fuselagem
C_i	Junta de giro
C_l	Coefficiente de sustentação 2D do perfil aerodinâmico
C_{l_α}	Derivada do coeficiente de sustentação 2D do perfil aerodinâmico
C_L	Coefficiente de sustentação 3D da asa
C_{L_α}	Derivada do coeficiente de sustentação 3D da asa
C_m	Coefficiente de momento 2D do perfil aerodinâmico
$C_{n \times n}$	Matriz de saída de estados do sistema
Cq	Coefficiente de torque da hélice
Ct	Coefficiente de tração da hélice

dX_{Pb_R, C_i}	Distância em X entre o sistema paralelo ao corpo de um rotor-coaxial e sua respectiva junta de giro
$dX_{r_i, hl}$	Distância em X entre o CG do rotor-coaxial e a hélice inferior
$dX_{r_i, hu}$	Distância em X entre o CG do rotor-coaxial e a hélice superior
$dXZ_{AC, W_i S_j, C_i}$	Raio de giro no plano XZ entre o AC de uma seção de asa e a respectiva junta de giro
dXZ_{Pb_R, C_i}	Raio de giro no plano XZ entre o CG de um rotor-coaxial e a respectiva junta de giro
dXZ_{Pb_W, C_i}	Raio de giro no plano XZ entre o CG de uma asa e a respectiva junta de giro
$dY_{r_3, hl}$	Distância em Y entre o CG do rotor-coaxial e a hélice inferior
$dY_{r_3, hu}$	Distância em Y entre o CG do rotor-coaxial e a hélice superior
dY_{Pb_R, C_i}	Distância em Y entre o CG de um rotor-coaxial e sua respectiva junta de giro
dY_{Pb_W, C_i}	Distância em Y entre o CG de uma asa e sua respectiva junta de giro
dYZ_{Pb_R, C_i}	Raio de giro no plano YZ entre o CG de um rotor-coaxial e sua respectiva junta de giro
D	Diâmetro da hélice
D_{rg}	Força de Arrasto 3D
$D_{rg, W_i S_j}$	Força de arrasto 3D da seção da asa
e_{osw}	Fator de Oswald
$e(t)$	Erro entre referência e estado atual
\vec{F}	Vetor força externa
F_A	Força aerodinâmica da asa
F_{DF}	Força de arrasto aerodinâmico da fuselagem

F_G	Força gravitacional
F_T	Força de tração do rotor-coaxial
g	Aceleração da gravidade
γ	Número condicional
\bar{G}	Matriz de ganho estático
hu	Hélice superior
hl	Hélice Inferior
\vec{H}	Vetor de momento angular
I	Sistema de coordenadas Inercial
I_h	Inércia da hélice
I_{XX}	Momento de inércia em torno do eixo X
I_{XY}	Produto de inércia no plano XY
I_{XZ}	Produto de inércia no plano XZ
I_{YX}	Produto de inércia no plano YX
I_{YY}	Momento de inércia em torno do eixo Y
I_{YZ}	Produto de inércia no plano YZ
I_{ZX}	Produto de inércia no plano ZX
I_{ZY}	Produto de inércia no plano ZY
I_{ZZ}	Produto de inércia no plano ZZ
J_{avn}	Razão de avanço
J_{custo}	Função de custo
J_F	Tensor de inércia da fuselagem
J_{Ri}	Tensor de inércia do rotor-coaxial
J_T	Tensor de inércia total
J_{Wi}	Tensor de inércia da asa
k_p	Coefficiente de ganho proporcional do controlador PID
k_i	Coefficiente de ganho integrativo do controlador PID
k_d	Coefficiente de ganho derivativo do controlador PID

K_{mxn}	Matriz de ganho do controlador LQR
Ki_{mxn}	Matriz de ganho dos estados aumentados do controlador LQRI
Ko_{mxn}	Matriz de ganho dos estados do controlador LQRI
λ	Vetor de autovalores
L_{wisj}	Força de sustentação da seção da asa
m_F	Massa da fuselagem
m_{Ri}	Massa do rotor-coaxial
m_T	Massa total da aeronave
m_{Wi}	Massa da asa
\vec{M}	Vetor Momento externo
M_A	Momento aerodinâmico da asa
$M_{AC_{wisj}}$	Momento aerodinâmico do perfil da asa
M_G	Momento giroscópico do rotor-coaxial
M_Q	Momento induzido do rotor-coaxial
M_T	Momento de tração do rotor-coaxial
MAC	Corda média aerodinâmica
Ω	Velocidade de rotação da hélice
ψ	Ângulo de guinada no espaço
ϕ	Ângulo de rolagem no espaço
ϕ_{Ei}	Ângulo de inclinação do rotor-coaxial
P	Velocidade de rotação de rolagem em relação ao corpo
Pb_F	Sistema de coordenadas paralelo ao corpo e fixo ao CG da fuselagem
Pb_{Ri}	Sistema de coordenadas paralelo ao corpo e fixo ao CG do rotor-coaxial
Pb_{Wi}	Sistema de coordenadas paralelo ao corpo e fixo ao CG da asa
Q	Velocidade de rotação de arfagem em relação ao corpo

Q_{hi}	Torque da hélice
$Q_{n \times n}$	Matriz de ponderação de estados do controlador LQR
ρ	Densidade do ar
r_i	Sistema de coordenadas fixo ao rotor-coaxial
$r(t)$	Referência
R	Velocidade de rotação de guinada em relação ao corpo
$R_{m \times m}$	Matriz de ponderação de entradas do controlador LQR
R_1	Rotor-coaxial direito
R_2	Rotor-coaxial esquerdo
R_3	Rotor-coaxial traseiro
$R_{XYZ} \Big _I^B$	Matriz de transformação de I para B
Rot_Y	Matriz de rotação em torno do eixo Y
Rot_X	Matriz de rotação em torno do eixo X
Sc	Matriz de valores de singulares da matriz de controlabilidade
So	Matriz de valores de singulares da matriz de observabilidade
Sj	Seção da asa
θ	Ângulo de arfagem no espaço
t	Tempo
T_d	Constante de tempo do termo derivativo
T_{hi}	Força de tração da hélice
$u(t)$	Entrada ao sistema
U	Velocidade horizontal em relação ao corpo
\vec{v}	Vetor de velocidades lineares em relação ao corpo
V	Velocidade lateral em relação ao corpo
V_{inc}	Velocidade incidente
V_{ind}	Velocidade induzida

V_{∞}	Velocidade de vento relativo
\vec{w}	Vetor de velocidades angulares em relação ao corpo
w_i	Sistema de coordenadas fixo à asa
W	Velocidade vertical em relação ao corpo
W_1	Asa direita
W_2	Asa esquerda
$x(t)$	Estado
X	Abscissa
X_I	Coordenada de posição da abscissa em relação à Terra
$y(t)$	Saída
Y	Ordenada
Y_I	Coordenada de posição da ordenada em relação à Terra
Z	Cota
Z_I	Coordenada de posição da cota em relação à Terra

LISTA DE ABREVIATURAS

CAD	<i>Computed Aided Design</i>
CG	Centro de Gravidade
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
LQRI	<i>Linear Quadratic Regulator Integrator</i>
PID	Proporcional Integrativo Derivativo
RNA	Rede Neural Artificial
RGA	<i>Relative Gain Array</i>
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>
TRUAV	<i>Tilt-Rotor Unmanned Aerial Vehicle</i>
TWUAV	<i>Tilt-Wing Unmanned Aerial Vehicle</i>
UAV	<i>Unmanned Aerial Vehicle</i>
VANT	Veículos Aéreo Não Tripulados
VTOL	<i>Vertical-Take-Off-and-Landing</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	O VTOL.....	3
1.2	O ROTOR COAXIAL.....	5
1.3	HISTÓRICO.....	7
1.4	MOTIVAÇÃO.....	14
1.5	ESTADO DA ARTE.....	15
1.6	OBEJTIVOS.....	21
1.7	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO.....	22
1.8	PUBLICAÇÕES.....	23
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	24
2.1	VTOL TILT-ROTOR E TILT-WING.....	24
2.2	CARATERÍSTICAS DO ROTOR-COAXIAL.....	27
2.3	CONTROLE REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO – LQR.....	30
2.3.1	Realimentação de estados.....	30
2.3.2	Integrador de estados.....	33
2.3.3	Aplicação de controladores LQR para aeronaves VTOL.....	35
2.4	CONTROLE PROPORCIONAL INTEGRAL DERIVATIVO – PID.....	37
2.4.1	Estratégia do controle PID.....	38
2.4.2	Aplicação de controladores PID para aeronaves VTOL.....	41
3	MODELAGEM DINÂMICA	43
3.1	DESCRIÇÃO DA AERONAVE.....	43
3.2	SISTEMAS DE REFERÊNCIA.....	47

3.3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO	51
3.3.1	Equações do Movimento	51
3.3.2	Posição Relativa e Centro de Gravidade	53
3.3.3	Tensor de Inércia	57
3.3.4	Derivada do Tensor de Inércia.....	63
3.3.5	Forças Atuantes no Sistema.....	70
3.3.6	Momentos Atuantes no Sistema	90
3.3.7	Relações Cinemáticas	98
3.4	CONCLUSÕES	99
4	DESIGN DA AERONAVE.....	101
4.1	COMPONENTES UTILIZADOS	101
4.2	PARÂMETROS DO DRONE	107
4.3	VALIDAÇÃO DO TENSOR DE INÉRCIA.....	108
4.4	CONCLUSÕES	110
5	ESTRATÉGIA DE CONTROLE	112
5.1	TRATAMENTO DA SOBRE ATUAÇÃO.....	112
5.2	LINEARIZAÇÃO.....	117
5.2.1	Linearização em condição de voo pairado (<i>hover</i>).....	120
5.2.2	Linearização em condição de voo reto-nivelado (cruzeiro)	127
5.3	CONTROLE LQRI DE VELOCIDADE RELATIVA AO CORPO DA AERONAVE.....	134
5.4	CONTROLE PID DE POSIÇÃO E ATITUDE NO ESPAÇO	138
5.5	CONCLUSÕES	141
6	SIMULAÇÃO E RESULTADOS	142
6.1	SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	142

6.2	PARÂMETROS DOS CONTROLADORES.....	144
6.2.1	Parâmetros do Controlador LQRI para Controle de Velocidades Relativas ao Corpo.....	144
6.2.2	Parâmetros dos Controladores PID e LQRI para Controle de Trajetória Circular-Diagonal em Modo <i>Hover</i>	145
6.2.3	Parâmetros dos Controladores PID e LQRI para Controle de Trajetória Helicoidal em Modo <i>Hover</i>	146
6.2.4	Parâmetros dos Controladores PID e LQRI para Controle de Trajetória Helicoidal em Modo <i>Hover</i> com Rajadas de Vento	147
6.2.5	Parâmetros dos Controladores PID e LQRI para Controle de Trajetória Helicoidal em Modo Cruzeiro	148
6.2.6	Parâmetros dos Controladores PID e LQRI para Controle de Trajetória Personalizada em Modo Cruzeiro	149
6.2.7	Parâmetros dos Controladores PID e LQRI para Controle de Trajetória Personalizada em Modo Cruzeiro, com Rajadas de Vento	150
6.3	RESULTADOS	151
6.3.1	Resposta ao Degrau de Velocidade em Modo Cruzeiro.....	151
6.3.2	Rastreamento de Trajetória Circular-Diagonal em Modo <i>Hover</i>	155
6.3.3	Rastreamento de Trajetória Helicoidal em Modo <i>Hover</i>	159
6.3.4	Rastreamento de Trajetória Helicoidal em Modo <i>Hover</i> , com Rajadas de Vento	164
6.3.5	Rastreamento de Trajetória Helicoidal em Modo Cruzeiro.....	168
6.3.6	Rastreamento de Trajetória Personalizada em Modo Cruzeiro	173
6.3.7	Rastreamento de Trajetória Personalizada em Modo Cruzeiro, com Rajadas de Vento.....	181
6.4	CONCLUSÕES	185
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	187
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	190

APÊNDICE A1	194
APÊNDICE B1	243

1 INTRODUÇÃO

Veículos-Aéreos-Não-Tripulados (VANT) ou *Unmanned-Aerial-Vehicles* (UAV), por suas siglas em inglês, mais comumente conhecidos como “Drones”, tem ganhado espaço no dia a dia da nossa sociedade e o conceito de uma máquina voadora capaz de realizar tarefas no ar como filmagens recreativas ou profissionais, inspeção, mapeamento, pulverização agrícola, dentre outras; nas áreas civil, industrial e até militar tomou forma na última década. Hoje em dia, com uma aparente demanda em crescimento por esta classe de tecnologia e com novas aplicações surgindo, é muito provável que todo mundo tenha ouvido pelo menos falar do conceito de Drone.

“A demanda do mercado mundial por Veículos-Aéreos-Não-Tripulados (VANTs) aumentou nos últimos anos. O potencial campo de aplicações para veículos de voo autônomo abrange desde operações na área comercial, tais como inspeções agrícolas ou de construção, até um uso amplo no setor militar em que drones autônomos são usados para atividades de vigilância, transporte e proteção” (*United Nations Office for Disarmament Affairs*, 2015, tradução própria).

De acordo com GUNDLACH (2012), o Departamento de Defesa dos Estados Unidos (DOD) define uma aeronave não tripulada como:

“Um veículo motorizado que não transporta um operador humano, que pode ser operado de forma autônoma ou remota, pode ser dispensável ou recuperável, e pode transportar uma carga letal ou não letal. Um veículo balístico ou semibalístico, mísseis de cruzeiro, projéteis de artilharia, torpedos, minas, satélites e sensores autônomos (sem forma de propulsão) não são considerados veículos não tripulados. Veículos não tripulados são o principal componente de sistemas não tripulados”

Adicionalmente, o autor acrescenta:

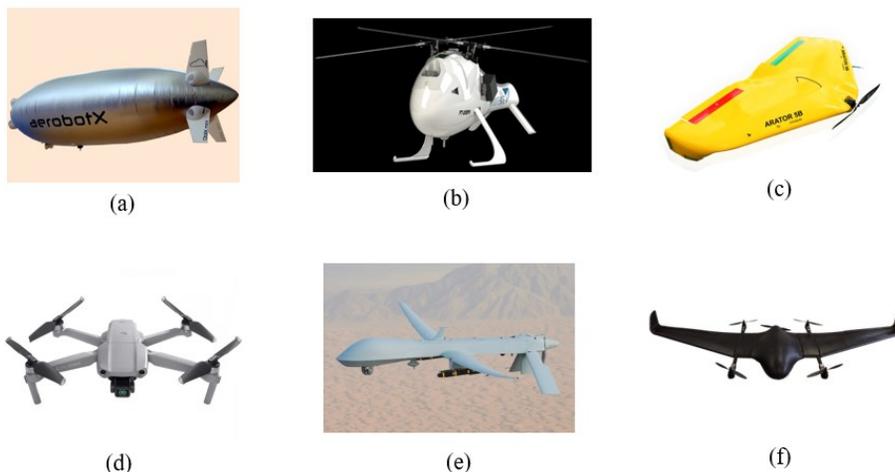
“[...] sistemas de aeronaves não tripuladas tem um componente aerotransportado que desempenha pelo menos uma função de missão sem um piloto a bordo. Além disso, aeronaves não tripuladas devem ser capazes de voo controlado e sustentado” (GUNDLACH, 2012, p. 2, Cap. 1, tradução própria).

Isto quer dizer que se entende um VANT como todo veículo aéreo sem piloto a bordo, que pode ser controlado e que é capaz de voar por propulsão própria, com o objetivo de executar uma determinada missão.

Tomando como base a concepção descrita previamente, existem diversos tipos de aeronaves que se encaixam neste conceito. Como exemplo, a Figura 1.1 apresenta diferentes arquiteturas de drones usadas hoje em dia para propósitos diversos, dentre os que se incluem: filmagens

recreativas, inspeção, mapeamento agrícola e missões relacionadas com defesa e segurança. Em (a) é mostrado o “Oblix” da companhia aerobotX, cuja forma de sustentação é baseada em gases menos densos que o ar (não especificados pelo fabricante) e é propulsado e controlado por 9 rotores. Em (b) é apresentado o modelo FT 100H da companhia brasileira FT Sistemas e usa o conceito de um helicóptero de rotação síncrona de dois pares de hélices. Em (c) observa-se um drone em formato de “asa-voadora”, o “Arator”, da empresa brasileira XMobots, líder de mercado em drones para mapeamento agrícola. Em (d) observa-se a arquitetura de VANT provavelmente mais conhecida do mundo, o quadricóptero. Neste caso sendo apresentado o modelo Mavic Air 2 da chinesa DJI, líder em vendas de drones “multirrotores” no mundo. Em (e) observa-se um drone com arquitetura de “asa-fixa” ou formato “clássico” de avião. Neste caso trata-se do conhecido (e polêmico) MQ-1 “Predator”, aeronave desenvolvida pela empresa General Atomics para uso militar. Por fim, em (f) observa-se um drone que mistura o formato de uma asa-fixa e a arquitetura de um multirrotor quadricóptero. Esta classe de aeronave é conhecida ou classificada como *Vertical-Take-Off-and-Landing* (VTOL) e busca aproveitar as vantagens que ambas arquiteturas (asa-fixa e multirrotor) possuem.

Figura 1.1 - Modelos de VANT's. (a) Aeronave mais leve que o ar Oblix; (b) Helicóptero síncrono FT 100H; (c) Asa voadora Arator; (d) Quadricóptero Mavic Air 2; (e) Asa-fixa MQ-1 Predator; (f) VTOL



Fonte: Compilação do autor

Montagem a partir de imagens coletadas nos sites da aerobotX, FT Sistemas, Xmobots, DJI, General Atomics e da internet

1.1 O VTOL

Pelo entendimento literal da frase “*Vertical-Take-Off-and-Landing (VTOL)*”, entende-se que toda aeronave capaz de decolar e pousar verticalmente é de fato um VTOL (e.g. um helicóptero ou um multirroto), porém, o modelo apresentado na Figura 1.1 (f) é o consenso aceito academicamente falando para o tipo de aeronave (tripulada ou não) que mistura as asas de um avião e os rotores de um multirroto, tornando à aeronave capaz de ter as características de estabilidade de um multicóptero em modo de voo pairado no ar (*hover*), e a velocidade e tempo de voo elevado que uma aeronave asa-fixa geralmente fornece em modo de voo cruzeiro (voo reto nivelado). Assim, VTOLs são capazes de decolar verticalmente, pairar no ar, voar horizontalmente (gerando sustentação em suas asas) e então pousar verticalmente. Infelizmente, isto vem com o custo da complexidade, aumentando significativamente o grau não linear da dinâmica do sistema.

No universo das aeronaves VTOL existem subdivisões e, dentre elas, é possível encontrar arquiteturas com rotores inclináveis conhecidos como “*Tilt-rotor*” e com asas inclináveis, conhecidos como “*Tilt-wing*”.

“Uma configuração de aeronave que apresenta enorme potencial para mobilidade urbana no futuro é a configuração *Tilt-wing*. Este sistema de aeronave combina os benefícios de um sistema multicóptero e os de uma aeronave convencional. Isso permite que o sistema opere em ambientes compactos e imprevisíveis, mas também pode voar eficientemente em longo alcance [...] operando em regimes de voo altamente não lineares e, portanto, sistemas de controle de voo que considerem condições de voo não lineares são necessários.” (AUTENRIEB et. al, 2019, tradução própria).

De acordo com ZHONG et al. (2016) a classificação e distinção de VTOLs nas categorias *Tilt-Rotor Unmanned Aerial Vehicle (TRUAV)* e *Tilt-Wing Unmanned Aerial Vehicle (TWUAV)* se deve à exploração de novas configurações de aeronaves por cientistas e engenheiros do mundo todo ao longo da última década. A Figura 1.2 apresenta uma série de exemplos de VTOLs com inclinação de rotores e asas que ZHONG et al. (2016) recopilam no seu trabalho. Em (a) observa-se a aeronave tripulada V22 – Osprey da marinha dos Estados Unidos, considerado o projeto precursor das pesquisas sobre VTOLs. Em (b) observa-se o TRUAV Eagle Eye desenvolvido para operações de resgate da guarda costeira dos Estados Unidos. Em (c) observa-se um TRUAV semelhante desenvolvido pela Korean Aerospace Research Institute (KARI). Em (d) aparece o “Quad-tilt-wing”, um TWUAV desenvolvido pela Japan Aerospace Exploration Agency (JAXA) e nele observa-se que os rotores giram junto com as asas para reduzir o efeito de “*downwash*”. Em

(e) é apresentado um modelo “Tri-TRUAV” desenvolvido pela Universidade de Patras na Grécia em conjunto com o Federal Institute of Technology Zurich (ETH) da Suíça. Neste modelo dois rotores frontais-laterais (para reduzir a interferência de vento com as asas) giram sobre um mesmo eixo lateral, enquanto que um terceiro rotor traseiro gira individualmente em torno de um eixo longitudinal à fuselagem da aeronave. Finalmente, em (f), é apresentado um modelo “Quad-TRUAV”, desenvolvido pelo Shenyang Institute of Automation (SIA) da China. Neste modelo, para diminuir a interferência de vento entre rotores e asas, dois pares de rotores-tilt são montados na frente das asas e dois pares de rotores-tilt são montados por trás das asas.

Figura 1.2 – Exemplos de VTOLs



(a) “Osprey” tilt rotor aircraft⁵



(b) Eagle Eye VTOL UAV¹²



(c) TR-60 TRUAV¹⁵



(d) AKITSU TWUAV²³



(e) Tri-TRUAV³²



(f) Quad-TRUAV

Fonte: ZHONG et al. (2016)

Em todos os modelos VTOL apresentados até agora, é possível observar o uso de superfícies clássicas de controle de voo como: ailerons, leme e profundor. Estas superfícies de comando são efetivas para o momento em que a aeronave passa da transição de voo pairado para voo acelerado para frente (em modo avião), já que dependem do escoamento de vento sobre elas para funcionarem. Mas, fora deste modo de voo, as superfícies aerodinâmicas-clássicas de comando tornam-se praticamente ineficientes no momento em que a aeronave assume o modo de voo pairado.

Ao usar um rotor em uma aeronave, é necessário considerar o torque induzido do rotor no corpo ou base onde está montado, devido à terceira lei de Newton causada pela interação do fluxo de ar que passa pelas hélices. Assim, toda aeronave que utiliza rotores deve fazer uso de algum mecanismo que garanta o equilíbrio ou cancelamento desse torque induzido e, conseqüentemente, controlar a atitude da aeronave. No caso de um helicóptero, por exemplo, um rotor traseiro compensa esse torque ao mesmo tempo que fornece controle de guinada. Para as aeronaves VTOL, algumas das estratégias para equilibrar ou cancelar o torque induzido de um determinado rotor podem incluir: inclinação de rotores, contra-aceleração de hélices e o uso de superfícies clássicas de controle de voo (efetivas quando há suficiente escoamento de vento incidente).

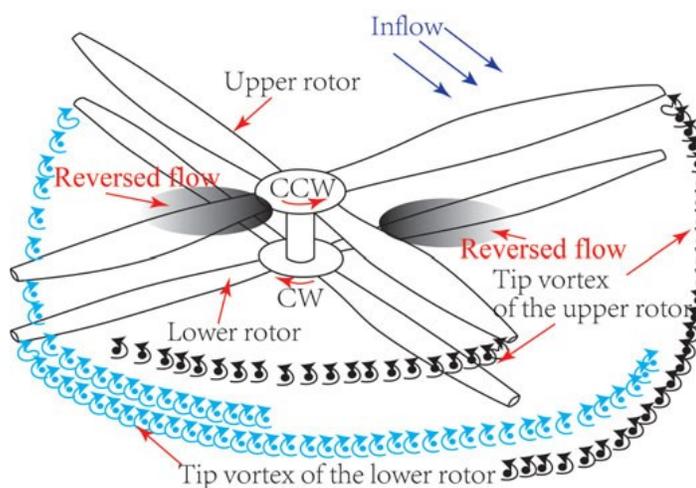
1.2 O ROTOR COAXIAL

Uma estratégia diferente para equilibrar o torque induzido por rotores é através do uso de rotores-coaxiais. Seu princípio de funcionamento é baseado na contrarotação de duas hélices (superior e inferior) sobre um mesmo eixo, podendo cancelar o torque induzido entre as hélices enquanto gera-se força de tração de ambas as hélices em um mesmo sentido. A Figura 1.3 apresenta o sistema do rotor-coaxial e a Figura 1.4 mostra um esquemático do fluxo de ar passando através de um rotor-coaxial, onde as hélices superior e inferior encontram-se bastante afastadas entre elas.

Rotores-coaxiais podem ser uma solução interessante quando é necessário que uma aeronave opere com grande carregamento de disco (*disk-loading*), i.e., quando a aeronave carregar mais peso ou acelerar contra o vento (precisando acelerar mais a hélice do rotor e, conseqüentemente, exigindo mais potência para isto).

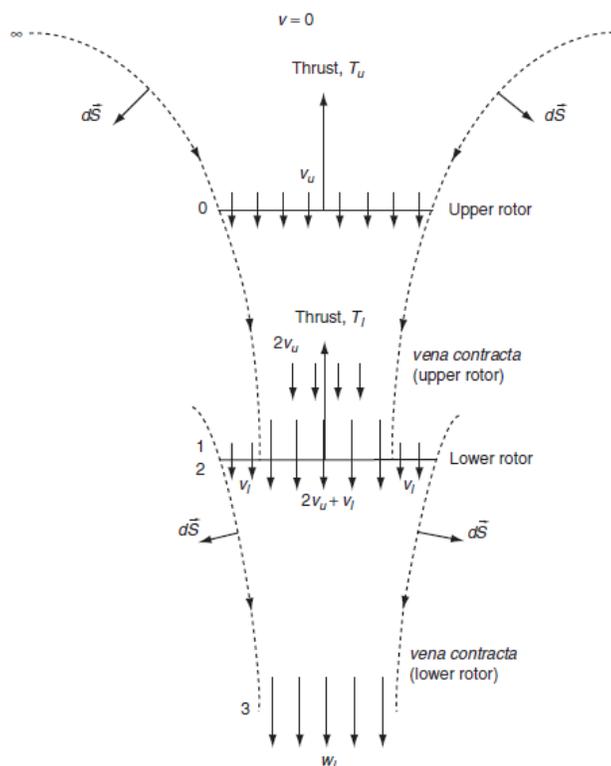
“[...] é claro que as hélices coaxiais podem ser também interessantes em termos de eficiência quando carregamentos de disco elevados são necessários, por exemplo, se o VANT tiver que ser compacto ou resistente ao vento.” (THEYS, 2016, tradução própria).

Figura 1.3 – Montagem de um rotor-coaxial



Fonte: TAN; SUN (2018)

Figura 1.4 – Fluxo de ar sobre um rotor-coaxial

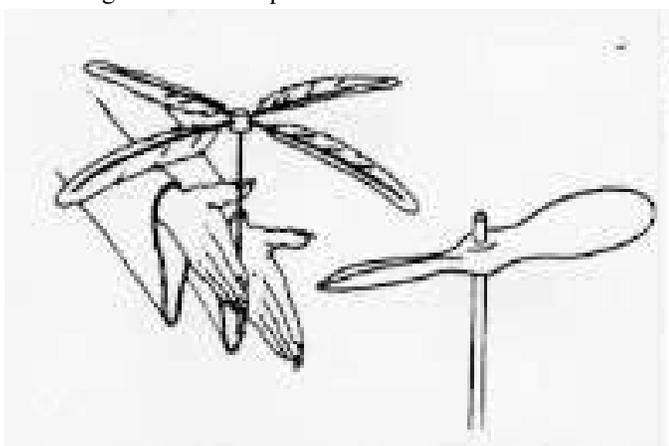


Fonte: LEISHMAN (2006)

1.3 HISTÓRICO

De acordo com CASTILLO et al. (2005, p. 3, Cap. 1), o surgimento dos primeiros conceitos de aeronaves de decolagem vertical pode-se remontar ao ano 400 a.C. na China com o brinquedo de hélice tradicional apresentado na Figura 1.5, feito de penas e de um pedaço de bambu. Acredita-se que o brinquedo foi bioinspirado nas sementes voadoras da árvore sicômoro.

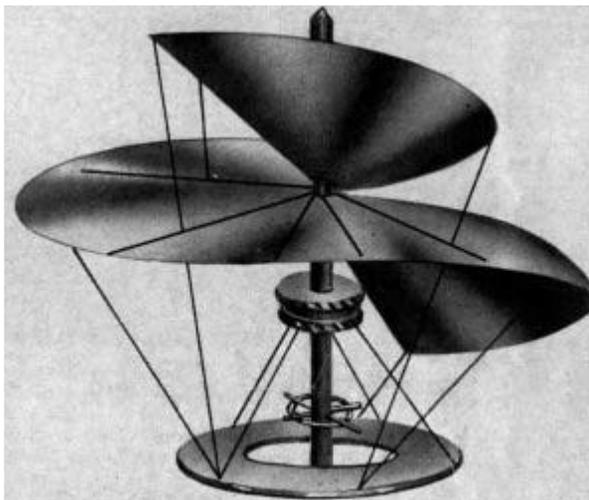
Figura 1.5 – Brinquedo voador tradicional chinês



Fonte: CASTILLO et al. (2005)

Séculos mais tarde, Leonardo Da Vinci projeta seu “parafuso aéreo” em 1483 (Figura 1.6), conhecido como precursor do helicóptero (CASTILLO et a. 2005, p. 4, Cap 1). Com um diâmetro de 5 metros, devia ser operado por quatro pessoas girando a manivela no meio da estrutura. Não existem registros factíveis de que a invenção foi testada.

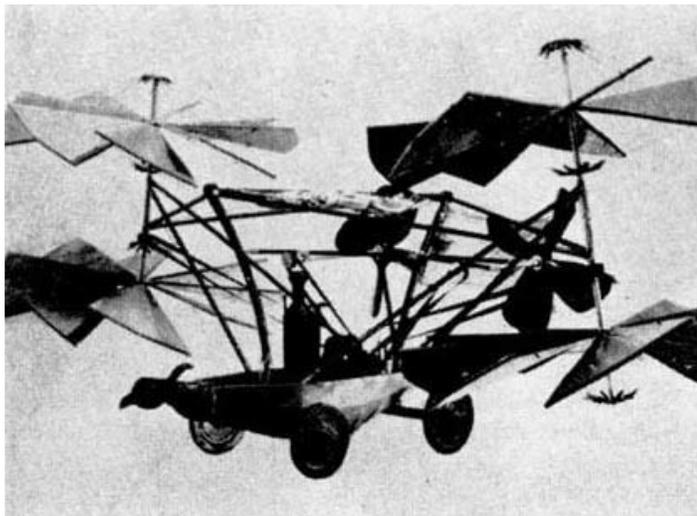
Figura 1.6 – Parafuso-aéreo de Da Vinci



Fonte: Extraído de CASTILLO et al. (2005)

Um dos primeiros avanços no modelo do helicóptero foi por George Cayley que produziu uma espécie de carruagem com hélices em 1843. Cayley projetou uma aeronave capaz de pairar que ele chamou de “carruagem aérea”. No entanto, o dispositivo de Cayley permaneceu apenas como uma ideia porque os únicos motores disponíveis na época eram máquinas a vapor, e estas tinham uma razão peso/potência baixa demais para permitir um voo motorizado bem-sucedido (CASTILLO et al., 2005, p. 5, Cap 1). A Figura 1.7 mostra seu projeto.

Figure 1.7 – Carruagem aérea de George Cayley



Fonte: Extraído de CASTILLO et al. (2005)

Em 1896 Samuel Pierpont Langley lançou uma aeronave com motor a vapor não tripulada sobre o Rio Potomac com o uso de uma catapulta localizada no meio do rio. A aeronave não tripulada, apelidada de “Aeródromo”, voou por quase uma milha e não tinha sistema de orientação (Figura 1.8). O Aeródromo serviu de inspiração para que em 1918 Elmer Sperry criasse o giroscópio como o primeiro mecanismo de piloto automático para controle de aeronaves (GUNDLACH, 2012, p. 12, Cap 1).

Figura 1.8 – Aeródromo de Langley



Fonte: Smithsonian Air and Space Museum

Disponível em: <https://airandspace.si.edu/collection-objects/langley-aerodrome/nasm_A19180001000>. Acesso em: 15 out. 2021.

Para a primeira guerra mundial (1914-1918), o interesse por usar máquinas como helicópteros para dominar os campos de batalha motivou vários aviadores a testarem diversos protótipos, mas sem motores a combustão e peças ainda pesadas demais, todos os projetos da época falharam para decolar.

Por outro lado, durante a primeira guerra mundial, a primeira tentativa de uso efetivo de um VANT apareceu com o programa “Kettering Bug” (Figura 1.9). Era basicamente um biplano que decolava de um trilho para trem, carregando uma bomba de 180 libras de explosivos, e era capaz de voar autonomamente (graças ao seu giroscópio) por até 40 milhas até seu objetivo. A guerra terminou antes do projeto ser concluído (GUNDLACH, 2012, p. 12, Cap 1).

Figura 1.9 – Kettering Bug



Fonte: National Museum of the United States Air Force

Disponível em: <<https://www.nationalmuseum.af.mil/Visit/Museum-Exhibits/Fact-Sheets/Display/Article/198095/kettering-aerial-torpedo-bug/>>. Acesso em: 9 out. 2021

Levaria até 1922, com avanços na tecnologia de materiais e motores, que o primeiro helicóptero levantaria voo (Figura 1.10).

“Em 1922, George de Bothezat construiu um helicóptero com quatro rotores, sob o patrocínio do Exército dos EUA. O helicóptero tinha quatro hélices de seis pás, montadas sobre rotores nas extremidades das vigas de 18 m de comprimento, formando uma cruz [...] Além dos rotores com pás de passo variável, o helicóptero tinha duas hélices horizontais chamadas parafusos de direção, bem como dois pequenos parafusos colocados acima da caixa de engrenagens e atuando como reguladores para o motor de 220 cv. Pronto para o voo, o helicóptero pesava 1.700 kg.” (Castillo et al., 2005, p. 8, Cáp. 1).

Figura 1.10 – Helicóptero de Bothezat



Fonte: Extraído de CASTILLO et al. (2005)

Em 1936 Heinrich Focke e Gert Achgelis criariam o Fa-61, o mais próximo do primeiro VTOL tilt-rotor da história (Figura 1.11). Com dois rotores inclináveis nas extremidades da fuselagem de um biplano (sem asas) e com leme e profundor, esta aeronave foi capaz de voar, ser estável e controlável no ar (CASTILLO et al., 2005, p. 9, Cap. 1).

Figura 1.11 – Fa-61 de Focke e Achgelis

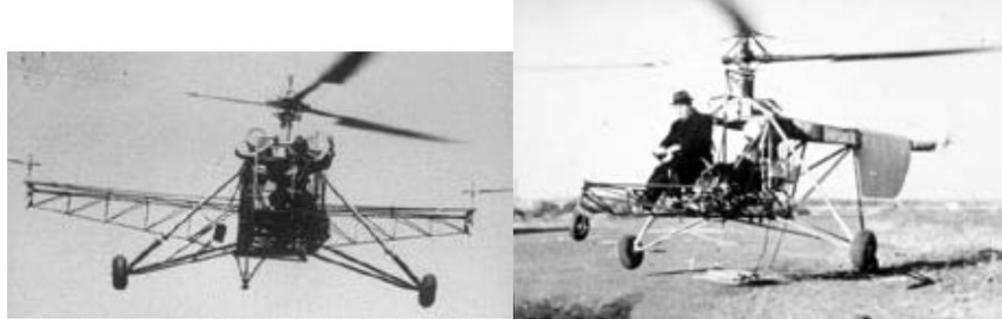


Fonte: Extraído de CASTILLO et al. (2005)

Seria então na segunda guerra mundial (1939-1945) que tanto as aeronaves rotativas (helicópteros), quanto os primeiros VANTs totalmente controlados remotamente surgiriam.

Igor Sikorsky criaria em 1939 seu modelo VS-300 (Figura 1.12 (a)) com uma composição de um rotor principal no centro para sustentar a aeronave no ar e três rotores de apoio para controlar a guinada desta. O rotor traseiro seria fixo e com sua aceleração auxiliaria no controle de arfagem. Os dois rotores frontais-laterais seriam capazes de inclinar para controlar a guinada. O sistema era capaz de voar graças a um único motor de 75 hp e constatou-se ser capaz de pairar no ar, voar para frente e para trás, para os lados, além de decolar e pousar verticalmente em segurança. Seu modelo VS-300A (Figura 1.12 (b)), uma evolução do anterior, retiraria os dois rotores frontais e o rotor traseiro o inclinaria em 90°, apenas para auxiliar com a guinada. Resumidamente, o padrão de helicóptero de hoje tinha sido criado (Castillo et al., 2005, p. 10, Cáp. 1).

Figura 1.12 – Os helicópteros VS-300 e VS-300^a de Igor Sikorsky. (a) VS-300; (b) VS-300A.



(a)

(b)

Fonte: Sikorsky Aircraft Corp.

Disponível em: < https://sikorskyarchives.com/VS-300_Helicopter.php>. Acesso em: 11 out. 2021

Em contrapartida, os alemães criavam durante a segunda guerra mundial o projeto Fiesler V-1 “Buzz Bomb” (Figura 1.13). A força aérea alemã Luftwaffe usava a aeronave radio-controlada para carregar explosivos e atingir navios aliados com o propósito de afundá-los. Graças a esta tecnologia, os Estados Unidos iniciaram seu programa espacial após a guerra (Gundlach, 2012, p. 13, Cap 1).

Figura 1.13 – V-1 “Buzz Bomb”



Fonte: The Museum of Flight

Disponível em: < <https://www.museumofflight.org/Exhibits/fieseler-fi-103-v1>>. Acesso em: 10 out. 2021

Rotores-coaxiais foram sendo testados para diversos projetos de helicópteros antes de Igor Sikorsky, sem nenhum destes projetos obter muito sucesso. Mas já durante a segunda guerra mundial, os britânicos desenvolveriam o “Spitfire PR.XIX” (Figura 1.14) (modelo com rotores-

coaxiais). O que seria considerado uma obra de arte para aquela época, devido ao fato de ser um caça de combate extremadamente ágil e eficiente, capaz de servir em missões multi propósito.

Figura 1.14 – Spitfire PR.XIX



Fonte: Royal Air Force Museum

Disponível em: < <https://www.rafmuseum.org.uk/research/collections/supermarine-spitfire-prxix/>>. Acesso em: 13 out. 2021

Da segunda Guerra mundial em diante, a tecnologia por trás de aeronaves tripuladas como não tripuladas continuaria sendo explorada e desenvolvida no mundo todo, cada vez mais. Seriam novamente conflitos bélicos que motivariam a pesquisa e desenvolvimento de novas tecnologias em drones. Finalmente, através dos anos e a partir do surgimento dos circuitos eletrônicos digitais na década de 1990, é que aparecem os primeiros micro controladores, o *Global Positioning System* – GPS, links de dados digitais e a comunicação via satélite. Sendo estas tecnologias essenciais para o desenvolvimento, construção e uso de VANTs.

Como apresentado previamente nas Figuras 1.1 e 1.2, estas aeronaves atuais existem graças ao esforço e desenvolvimento de mais de 2000 anos de história humana, quando as civilizações antigas olharam para uma semente voando (planando) e se inspiraram nela para criar um brinquedo. E, talvez, graças a esse objeto “simples” é que nossa civilização conte hoje com uma das ferramentas mais importantes de hoje em dia e que promete moldar o futuro.

1.4 MOTIVAÇÃO

A demanda por drones cada vez mais eficientes e com maior tempo de voo, mais rápidos, mais ágeis e também mais seguros tem fomentado a pesquisa em diversas áreas ou sistemas de um VANT. Desde o aperfeiçoamento da eletrônica e controladores de voo, passando pelo desenvolvimento de novas baterias, melhores e mais eficiente hélices e motores, até o aprimoramento da aerodinâmica e da estrutura das aeronaves.

Com essa tendência por melhorar os sistemas de aeronaves e por testar novas ideias como, por exemplo, arquiteturas VTOL, surge a primeira pergunta: é possível criar uma nova arquitetura ou novo projeto de VTOL mais ágil (e controlável), diferente dos *designs* usados até agora, porém que conserve as características de misturar a estabilidade de um multicóptero e o uso de superfícies aerodinâmicas para auxiliar na sustentação, aumentando assim sua eficiência em voo e consequentemente seu tempo no ar?

“Os veículos aéreos com inclinação nos seus rotores são aeronaves que dependem de asas e rotores para gerar sustentação. Eles têm três modos de voo: modo de helicóptero, transição e avião [...] Por causa do ângulo variável de inclinação dos rotores, a característica mais atraente dos veículos aéreos com inclinação nos seus rotores é que eles possuem a capacidade de pairar no lugar, como helicópteros, enquanto alcançam um cruzeiro com velocidades muito mais altas do que o convencional helicóptero, em modo avião.” (ZHONG et al., 2016).

Talvez, a resposta para esta pergunta pode partir das arquiteturas VTOL TRUAV ou TWUAV como apresentado por ZHONG et al. (2016). Porém, se for analisada a quantidade de comandos necessários para controlar uma das aeronaves apresentadas pelos autores e mostradas na Figura 1.2, é possível perceber que são necessários três comandos para os atuadores aerodinâmicos (ailerons, leme e profundor; que são funcionais apenas em condições de voo próximas das de um avião), n comandos para os rotores presentes no sistema (onde n representa o número de rotores) e, se a aeronave tiver inclinação nos seus rotores e se seus rotores forem livres de girar independentemente entre eles, então seria necessário acrescentar mais n comandos (um total de $2n+3$, onde 3 pode ou não estar presente, a depender do escoamento aerodinâmico sobre as superfícies clássicas de controle aerodinâmico).

Devido a isto, e com o intuito de equilibrar o torque induzido pelos rotores sob qualquer condição de inclinação dos mesmos, muitas configurações TRUAV e TWUAV optam por “aferrar” ou sincronizar a todo momento a inclinação entre dois rotores “paralelos” (enquanto suas hélices

giram em sentidos opostos). Como exemplo, o “Osprey” da marinha americana (Figura 1.2 (a)) deflete seus rotores juntos, passando da posição vertical na decolagem ou pouso, para horizontal no voo para frente. De forma análoga, o “Quad-TWUAV” da JAXA na Figura 1.2 (d) deflete seus quatro rotores juntos para transicionar de uma condição de voo pairado para um voo para frente. Este condicional na deflexão dos rotores diminui e simplifica o número de comandos disponíveis para controlar a aeronave, mas também significa que retira graus de liberdade aos comandos, tornando o *design* menos ágil ou manobrável.

Tomando como base a primeira pergunta e, conhecendo o potencial dos rotores-coaxiais para balancear torques induzidos entre hélices, ao mesmo tempo que são eficientes com o aumento do carregamento de disco (*diskloading*) sobre as hélices; surge o segundo questionamento: é possível usar rotores-coaxiais para balancear o torque de uma nova arquitetura de VTOL e com isto tornar o sistema ágil?

“Um sistema de rotor coaxial é definido como tendo um rotor superior e um inferior que giram em direções opostas. Em um helicóptero convencional que tem uma combinação de rotor principal / rotor de cauda, o torque gerado pelo rotor principal é neutralizado pelo impulso do rotor de cauda. Uma vez que os momentos reativos dos rotores coaxiais devem ser cancelados por contrarotação, nenhum rotor de cauda é necessário para contrabalancear o torque. Ao contrário do projeto de rotor principal único que distribui energia para ambos os rotores principal e de cauda, toda a potência dos rotores coaxiais é usada para o empuxo vertical. Assim, nenhuma energia é desperdiçada por anti torque ou controle direcional. A energia economizada ajuda a aeronave com rotores coaxiais a atingir um teto de voo em modo *hover* mais alto do que um helicóptero com um único rotor. Outra vantagem dos rotores coaxiais é que o diâmetro geral do rotor pode ser reduzido para um determinado peso bruto do veículo, porque cada rotor fornece uma contribuição máxima para o empuxo vertical para superar o peso total do veículo” (SEOKKWAN et al., 2017)

1.5 ESTADO DA ARTE

Através de pesquisas como a de SEOKKWAN et al. (2017) sobre rotores-coaxiais, é possível conhecer sobre modelos de aeronaves de ponta que usem sistemas coaxiais. Como é visto na Figura 1.15, os autores apresentam duas aeronaves, uma tripulada e outra não. Em (a) observa-se o Ehang 184, aeronave quadricóptero-coaxial autônoma que está sendo desenvolvida para transporte humano entre cidades (taxi aéreo). Por outro lado, em (b) observa-se o modelo Tern da

Defense Advanced Research Projects Agency – DARPA, um VTOL em configuração “*tail-sitter*” destinado a decolar desde navios de combate para missões de reconhecimento e observação.

Figure 1.15 – Aeronaves de ponta com rotores-coaxiais. (a) Ehang 184; (b) Tern.



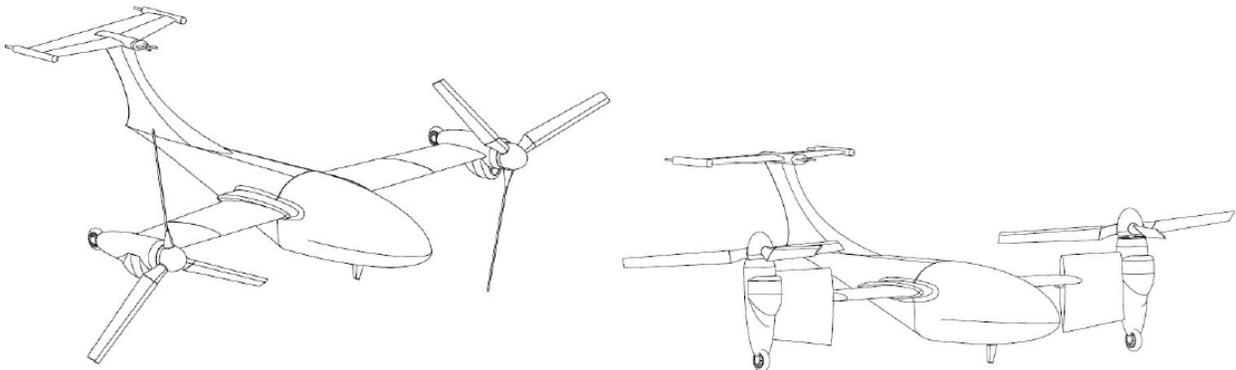
(a)

(b)

Fonte: YOON et al. (2017)

Outra proposta atual que chama muito a atenção vem da pesquisa de AUTENRIEB et al. (2019), cuja aeronave TWUAV, inspirada no projeto Osprey V22, é controlada nos modos *hover*, transição e cruzeiro através do uso de Redes Neurais Artificiais - RNA. Várias pesquisas, incluindo a de SEONGHUN et al. (2014) com seu modelo TWUAV, apontam ao uso de RNAs como uma forma muito eficiente para controlar esta classe de aeronaves em todos seus modos de voo, devido ao alto grau de não linearidade do sistema.

Figura 1.16 – VTOL TWUAV de AUTENRIEB et al (2019)



Fonte: AUTENRIEB et al. (2019)

Mas para entender o estado da arte de aeronaves VTOL é necessário também considerar o que a indústria possui atualmente de mais avançado e o que é que está em desenvolvimento. Portanto, através de uma pesquisa feita sobre companhias no mundo que usem esta classe de tecnologia em drones, vários resultados foram encontrados. Em primeiro lugar é apresentada a empresa da África do Sul: *Advanced Unmanned VTOL Aircraft* “ALTI”:

“Todos os sistemas VTOL não tripulados da ALTI seguem nosso projeto confiável e comprovado. Uma aeronave avançada de decolagem e pouso vertical com formato de asa-fixa e sistema quadricóptero, combinado com um motor de combustão otimizado para o voo para a frente, tudo montado sobre uma fuselagem composta de carbono reforçado forte e leve. ”

Na Figura 1.17 é possível observar o modelo TRANSITION, destinado a inspeção e mapeamento aéreo, com maior detalhe. É possível destacar neste modelo a otimização aerodinâmica da estrutura da aeronave.

Figura 1.17 – VTOL TRANSITION da companhia ALTI



Fonte: ALTI UAS LTD.

Disponível em: < <https://www.suasnews.com/2018/11/alti-uas-launches-enhanced-vtol-uav-for-search-and-rescue-operations/>>. Acesso em: 12 dez 2019

Na Alemanha aparece a empresa “Quantum Systems” com suas aeronaves VTOL TRUAV, i.e, com inclinação dos rotores. Na Figura 1.18 pode-se observar o modelo Vector com maior

detalhe. É interessante observar que esta aeronave faz uso de três rotores (dois sobre as asas e um sobre a cauda) e os três são usados verticalmente para decolar e depois inclinam-se juntos para prosseguir com o voo reto horizontal da aeronave.

Figura 1.18 – VTOL Vector da companhia Quantum Systems



Fonte: Quantum Systems LTD.

Disponível em: < <https://www.quantum-systems.com/project/vector/>>. Acesso em 22 nov 2019

Dentro do Brasil, destaca-se a empresa Xrobots com suas aeronaves VTOL NAURU 500C ISR (Figura 1.19), aplicada em operações de vigilância e segurança, e o VTOL DRARGO 150A (Figura 1.20), recentemente anunciado para transporte de cargas de 41 kg em um raio de 100 km, até 17 kg em um raio de 700 km. Nesta última aeronave, observa-se o uso de rotores-coaxiais, provavelmente por causa do peso destinado a ser carregado.

Figura 1.19 – VTOL NAURU 500C da companhia Xrobots



Fonte: Xrobots LTDA.

Disponível em: < <https://xrobots.com.br/nauru-500c-vtol/>>. Acesso em: 29 nov 2019

Figura 1.20 – VTOL DRARGO 150A da companhia XMobots

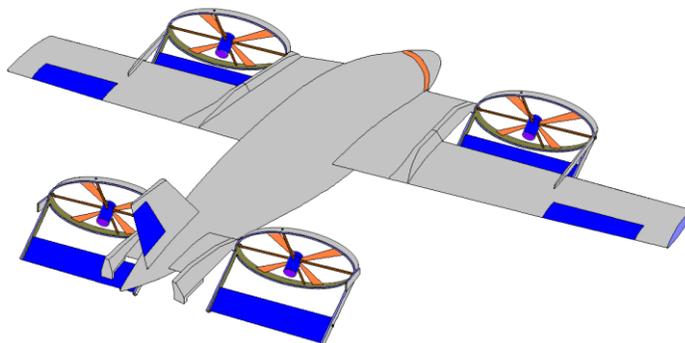


Fonte: XMobots LTDA.

Disponível em: < <https://www.infodefensa.com/texto-diario/mostrar/2964214/brasileira-xmobots-lanca-seu-drone-fw-150-drargo-no-mercado>>. Acesso em 15 out 2021

Mas, dentro do ramo das aeronaves tripuladas, há um grande destaque para os modelos civis de transporte aéreo de pessoas. De acordo com a pesquisa de XINHUA e LILONG (2015), o modelo matemático de uma aeronave tripulada com inclinação de quatro rotores, junto com inclinação de superfícies aerodinâmicas não convencionais (diferentes dos ailerons, leme ou profundor), é possível de ser controlada através do uso de uma função de Lyapunov para estabilização do sistema e um observador de estados. O controlador em questão é variável a depender do modo de voo em que aeronave se encontra (*hover*, transição ou cruzeiro). O esquemático da aeronave é apresentado na Figura 1.21.

Figura 1.21 – Modelo VTOL proposto por XINHUA e LILONG (2015)



Fonte: XINHUA e LILONG (2015)

Por fim, grandes companhias como, por exemplo, Embraer (em parceria com a Uber) e AIR usam arquitetura VTOL na corrida tecnológica por ofertar sua solução de taxi-aéreo (Figura 1.22). Já dentro do ramo militar, empresas como a Bell (usando rotores-tilt) e Sikorsky (usando rotores coaxiais) concorrem por ofertar suas aeronaves de última tecnologia para o exército dos Estados Unidos (Figura 1.23).

Figura 1.22 – Taxis-aéreos VTOL. (a) EVE da companhia Embraer; (b) Air One da companhia AIR.



- (a) – Fonte: <www.eveairmobility.com/evtol> Acesso em 12 out 2021
 (b) – Fonte: <www.airv.aero> Acesso em 12 out 2021

Figura 1.23 – Aeronaves de assalto com inclinação de rotores ou uso de rotores-coaxiais. (a) V-280 “VALOR” da empresa Bell; (b) “Defiant X” da empresa Sikorsky-Lockheed Martin.



- (a) – Fonte: <www.bellflight.com/products/bell-v-280>. Acesso em 12 out 2021
 (b) – Fonte: <www.lockheedmartin.com/en-us/products/flraa-defiant-x>. Acesso em 12 out 2021

1.6 OBEJTIVOS

Tomando como base os diferentes projetos de aeronaves VTOL encontradas e apresentadas ao longo da pesquisa deste projeto, considerando o estado da arte que mostra que o uso de rotores com inclinação (rotores-tilt) pode ser uma proposta promissora, assim como também o uso de rotores-coaxiais; destaca-se, então, como objetivo principal deste trabalho contribuir com a modelagem, *design* e simulação de uma nova arquitetura de VANT VTOL com inclinação de rotores em conjunto com suas asas (TWUAV) e que faça uso de rotores-coaxiais para equilibrar o torque induzido entre o par de hélices de um mesmo rotor-coaxial.

Para o modelo e *design* da aeronave será considerada uma fuselagem central sobre a qual girarão independentemente três rotores-coaxiais, dois frontais-laterais e um traseiro. Os rotores laterais irão conectados à fuselagem através de asas que giram junto com seu respectivo rotor-coaxial, localizado na ponta da asa. Desta forma, o formato da aeronave será semelhante ao da letra “T” ou ao de uma cruz. Os rotores junto com suas asas começarão inclinados verticalmente apontando para cima e se inclinarão a medida que o VANT começar a voar para frente.

Em modo de voo pairado (*hover*) o controle de arfagem será dado pela diferença nas forças de tração entre os rotores-coaxiais frontais-laterais e a força de tração do rotor-coaxial traseiro. O controle de rolagem será dado pela diferença nas forças de tração entre os rotores-coaxiais laterais e, finalmente para o modo *hover*, o controle de guinada será dado pela inclinação junto com aceleração dos três rotores.

No modo avião ou cruzeiro, para evitar o uso de superfícies clássicas de comando como ailerons, leme e profundor, o giro das asas será considerado independente entre elas, de tal forma que a diferença nas forças de sustentação das asas (com inclinações diferentes) contribuirá para o controle de rolagem e guinada da aeronave junto com as forças de tração dos rotores laterais, além da inclinação e força de tração do rotor-coaxial traseiro. O controle de arfagem será dado pela diferença de forças de sustentação das asas, em conjunto com as forças de tração dos rotores laterais, e a força de tração do rotor-coaxial traseiro.

O VANT será tratado como um sistema “multi corpo” e o modelo matemático que define a dinâmica não linear do sistema será criado levando em consideração forças e torques relacionados

aos princípios aerodinâmicos, propulsivos e inerciais; destacando que, devido ao movimento independente entre os rotores, o centro de gravidade da aeronave será considerado móvel e consequentemente o tensor de inércia do veículo será variável em função dos ângulos de inclinação. A aeronave poderá assumir uma morfologia assimétrica.

O seguinte passo será criar o projeto da aeronave, considerando dimensões e massas de componentes reais, buscando fazer com que o modelo teórico se aproxime o melhor possível de uma estrutura real. Para isto será usado o software de auxílio para desenho de peças 3D (*Computed Aided Design – CAD*) Solidworks e com os resultados gerados pelo software para o tensor de inércia do sistema, em função dos ângulos de inclinação, será possível validar o tensor de inércia gerado pelos resultados das equações do modelo matemático que descreve a inércia do VANT.

Para a simulação do sistema, será usada a plataforma Matlab-Simulink com a linearização do modelo nos modos de voo *hover* e *cruzeiro*. Para cada um destes dois modos, três missões diferentes de seguimento de trajetória (seis em total) serão alcançadas com a estratégia de controle em cascata entre um controlador Proporcional Integrativo Derivativo – PID e um controlador ótimo *Linear Quadratic Regulator – LQR* com realimentação de estados e ação integrativa, também conhecido como *Linear Quadratic Regulator Integrator – LQRI*.

1.7 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A dissertação será organizada da seguinte maneira:

- **Capítulo 2:** Este capítulo apresentará a revisão bibliográfica realizada sobre veículos VTOLs, rotores-coaxiais e sobre as técnicas de controle PID e LQR usadas para o controle deste modelo de aeronave.
- **Capítulo 3:** Este capítulo apresenta as equações do movimento do VTOL. Inicialmente é apresentada a descrição da aeronave e as premissas consideradas para modelar o veículo. Como seguinte passo, são apresentados os sistemas de referência usados para definir a dinâmica de cada um dos componentes do sistema multi corpo, sendo estes as duas asas, os três rotores-coaxiais e a fuselagem. Finalmente, a formulação matemática do modelo dinâmico do sistema é apresentada com base nos princípios de Newton-Euler.

- **Capítulo 4:** Esta seção mostra como foi projetada a aeronave, considerando para isto dimensões, massas e materiais de componentes eletrônicos e elementos mecânicos. Na primeira seção é apresentado o formato das asas, dos rotores-coaxiais e da fuselagem, além de mostrar como foi escolhida a localização de asas e rotores em torno à fuselagem. A seguinte seção apresentará os parâmetros considerados para o sistema e que “alimentarão” as equações do modelo matemático. Por fim, no final é apresentada a validação do tensor de inércia entre o modelo matemático e o modelo CAD do software Solidworks.
- **Capítulo 5:** Neste capítulo começa-se mostrando a estratégia escolhida para passar de um sistema sobre atuado de 9 entradas e 6 graus de liberdade, para um sistema quadrado 6x6. O seguinte passo será apresentar a linearização utilizada para os modos de voo pairado (*hover*) e voo cruzeiro; para depois apresentar o controlador LQRI utilizado para controlar as velocidades da aeronave relativas ao corpo e o controlador PID para controlar a posição do veículo no espaço.
- **Capítulo 6:** O capítulo de simulações e resultados inicia apresentando o esquemático dos controladores PID e LQRI em formato de diagramas de blocos no software Simulink, que será utilizado para realizar o controle de 6 missões de seguimento de trajetória, sendo três para o modo *hover* e três para o modo cruzeiro. A seguir serão apresentados os parâmetros considerados para os controladores e, por fim, são apresentados os resultados das 6 missões de voo escolhidas.
- **Capítulo 7:** Este capítulo é destinado a apresentar as principais conclusões do trabalho e as propostas para trabalhos futuros.
- **Referências Bibliográficas:** Aqui serão apresentadas as referências bibliográficas citadas ao longo da dissertação.

1.8 PUBLICAÇÕES

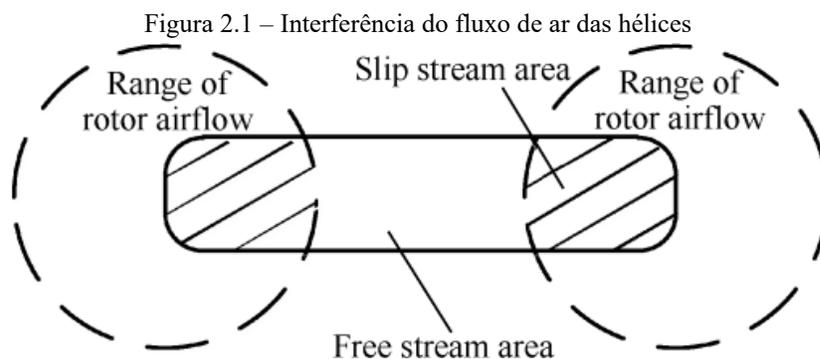
1. Arroyo, A. D. H.; Morais, A. S.; Lima, G. V.; Ribeiro, L. **Modeling and Simulation of a Novel Tilt-Wing-Coaxial-Rotor Tricopter**. Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente – SBAI, Outubro 17-20, Online, 2021. (No prelo 2021).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta os principais tópicos que compõem este trabalho e que servirão como base para a decorrente discussão dos resultados. Os temas em questão são: veículos *vertical take off and landing* - VTOL, rotores-coaxiais, controle regulador linear quadrático -LQR e controle proporcional integral derivativo - PID.

2.1 VTOL TILT-ROTOR E TILT-WING

Um dos principais problemas que enfrentam as aeronaves com arquitetura VTOL é a interferência causada pelo fluxo de ar das hélices sobre as asas do veículo. Quando os rotores têm a capacidade de inclinar, como no caso dos TRUAV, o fluxo de ar gerado pelas hélices afeta significativamente o desempenho aerodinâmico das asas. Este é o caso do VTOL TRUAV Osprey observado na Figura 1.2 (a) e, de acordo com ZHONG et al. (2016), enquanto os rotores se encontrarem orientados verticalmente para cima, as asas produzirão uma elevada força de arrasto, já que elas são fixas à fuselagem da aeronave. De forma complementar, a asa pode ser considerada dividida em duas seções: uma seção com interferência do fluxo de ar gerado pela hélice e outra seção sem esta interferência. A Figura 2.1 ajuda a ilustrar esta abordagem.



Fonte: ZHONG et al. (2016)

Adicionalmente, MAQSOOD et al. (2010), em seu trabalho com uma aeronave com ângulo de incidência variável nas asas, considera que o fluxo de ar gerado por uma hélice pode ser

assumido como limitado ao “tubo” de ar gerado pela rotação da hélice, no qual o ar não sofre compressão radial e age exclusivamente sobre a seção da asa que intersecciona o “tubo” ou cilindro de ar. As seções ou regiões subsequentes da asa são consideradas inalteradas pelo fluxo de ar vindo da hélice. Esta consideração será usada na modelagem da aeronave deste trabalho.

Para diminuir a força de arrasto sobre as asas no projeto que aqui será proposto, optou-se por usar a estratégia de asa e rotor com inclinação conjunta, isto é, obtendo uma configuração TWUAV. Esta é uma estratégia inspirada e semelhante à adotada pela Japan Aerospace Exploration Agency – JAXA, no seu modelo apresentado na Figura 1.2 (d), e por MIKAMI e UCHIYAMA (2015) no seu modelo quad-tilt-wing, observado na Figura 2.2.

Figura 2.2 – Quad-tilt-wing

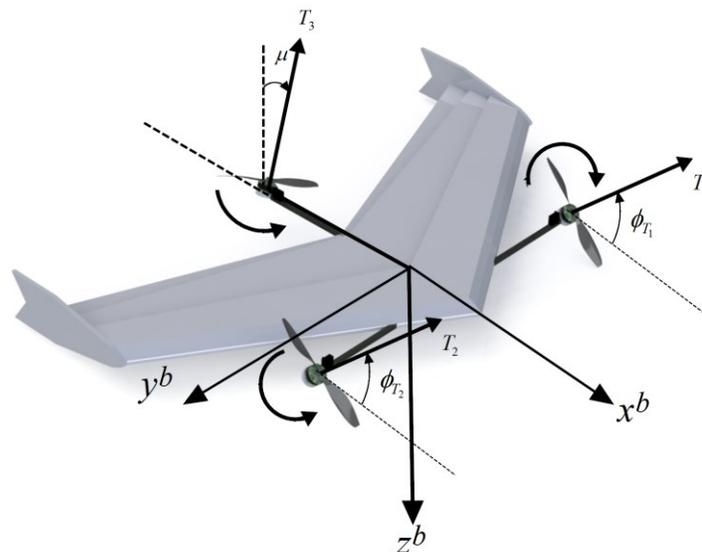


Fonte: MIKAMI e UCHIYAMA (2015)

De acordo com ZHONG et al. (2016), a maioria de pesquisas revisadas pelos autores sobre aeronaves VTOL TRUAV e TWUAV mostram que é matematicamente difícil modelar a interação aerodinâmica entre rotores e asas. Devido a isto, a maioria dos modelos matemáticos que eles citam no trabalho consideram as asas e os rotores como elementos separados e independentes, ignorando a interação entre estes dois tipos de componentes e deixando eventuais disparidades entre o modelo teórico e o real sobre a responsabilidade do controlador. Alguns trabalhos buscam melhorar o modelo matemático aerodinâmico através da realização de testes (e obtenção de dados para os coeficientes aerodinâmicos) em túneis de vento. Para o trabalho aqui proposto, não será ignorada a interação entre hélices e rotores e, na modelagem matemática do capítulo 3, será apresentada uma solução baseada na Teoria de Disco Atuador ao longo do eixo de rotação das hélices.

Dentre as pesquisas encontradas e, à medida que a ideia ou formato da aeronave VTOL proposta neste trabalho ia tomando forma, duas referências apareceram e mostraram que o uso de uma configuração tricóptero com rotores ou até asas inclináveis, representava uma configuração promissora. Na Figura 2.3 é apresentada a proposta de BAUTISTA et. al (2017), onde é possível observar uma asa voadora com um rotor traseiro, com giro em torno do eixo longitudinal da aeronave (eixo X), e dois rotores laterais, de frente à superfície aerodinâmica da asa-voadora, para evitar interferência com as hélices.

Figura 2.3 – Asa-voadora tricóptero



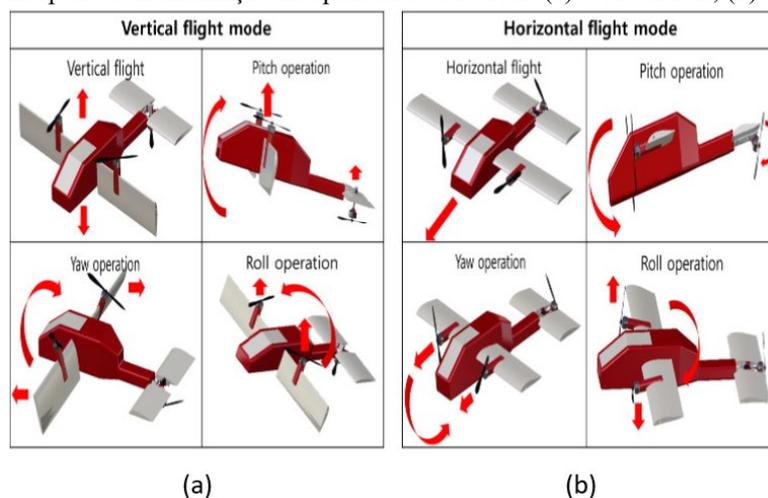
Fonte: BAUTISTA et al. (2017)

A segunda referência que alentava o uso de uma configuração tricóptero em conjunto com rotores inclináveis (neste caso, até com asas inclináveis) é a pesquisa e KYUNG-JAE et al. (2020). Na Figura 2.4 é possível observar o tricóptero proposto pelos autores nos voos vertical e horizontal.

É destacável nesta última configuração que a aeronave ainda faz uso de ailerons, mesmo quando as asas possuem a capacidade de girar independentemente entre elas, graças ao uso de servo motores. Adicionalmente, a arquitetura usa um estabilizador horizontal sem superfície de comando aerodinâmico (profundor) e, no meio do estabilizador, encontra-se um rotor que gira no mesmo plano de giro dos rotores da frente. Isto é, passa de uma posição vertical para horizontal, auxiliando o empuxo de voo para frente. Os autores explicam que o uso de asas com giro independente se

deve ao fato de que, por ser um tricóptero, o rotor traseiro constantemente gerará torque induzido sobre o corpo da aeronave, podendo ser corrigido através da inclinação das asas junto com seus respectivos rotores. Os autores chegaram inclusive a realizar um protótipo do drone, obtendo sucesso no controle de atitude da aeronave ao longo de uma operação de voo pairado, transição e voo para frente.

Figura 2.4 – Tricóptero com inclinação independente de rotores. (a) Voo vertical; (b) Voo horizontal.



Fonte: KYUNG-JAE et al. (2020)

A configuração proposta para este trabalho é semelhante ao modelo de KYUNG-JAE et al. (2020), com a diferença de que os rotores usados são coaxiais, os rotores laterais estarão alojados nas pontas das asas, o rotor traseiro girará em torno do eixo longitudinal da aeronave e o drone não possuirá profundor ou ailerons.

2.2 CARACTERÍSTICAS DO ROTOR-COAXIAL

Existem diversas teorias para modelar matematicamente a dinâmica de um rotor e sua hélice. Os mais precisos fazem uso de análises computacionais através de gradientes de velocidade e pressão em softwares *Computational Fluid Dynamics* – CFD.

Por outro lado, McCRINK e GREGORY (2015) mostram a implementação do modelo *Blade Element Theory* – BEM para hélices aplicadas em VANTs com correções para perdas de sustentação nas pontas das hélices, efeitos de Mach, componentes de fluxo tridimensionais e variações no número de Reynolds. Este é um modelo analítico bastante completo, sua implementação exige uma boa estimativa das velocidades axial e radial sobre a hélice, o que de acordo com os autores é bastante variável de acordo com as condições de operação da hélice e até da própria geometria da hélice, tornando esta abordagem muito mais complicada do que parece.

A pesquisa de THEYS et. al (2016) mostra o comparativo de eficiência de rotores-coaxiais frente a outras configurações de rotor, e.g. monorrotor ou dois rotores com sobreposição parcial. Segundo os autores, a configuração coaxial se destaca quando se espera que o veículo seja compacto, precise levantar bastante peso e seja necessário que alcance altas velocidades. Para a modelagem de cada um dos rotores-coaxiais eles usam a teoria do disco-atuador proposta por Rankine-Freud. A teoria é uma simplificação da aerodinâmica presente na hélice do rotor, considerando apenas o fluxo de ar axial e paralelo ao eixo de giro da hélice do rotor. De acordo com esta teoria, uma hélice acelerará o ar atravessando por ela, agregando velocidade ao vento incidente sobre a hélice. A equação (2.1) apresenta a expressão para o vento induzido pela hélice de um rotor, onde T_{hi} representa a força de tração da hélice, $V_{inc\epsilon hi}$ é o vento incidente (axialmente) sobre a hélice, $V_{ind\epsilon hi}$ é o vento induzido pela hélice, A_D é a área do “disco” formado pela rotação da hélice e ρ representa a densidade do ar.

$$V_{ind\epsilon hi} = \frac{-V_{inc\epsilon hi} + \sqrt{V_{inc\epsilon hi}^2 + \frac{2T_{hi}}{\rho A_D}}}{2} \quad (2.1)$$

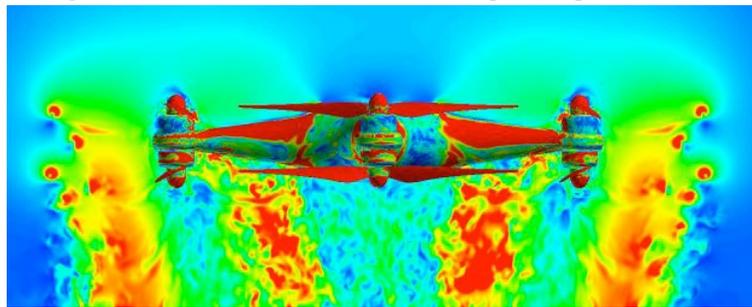
No projeto proposto para este trabalho, a teoria do disco-atuador será considerada para modelar o vento induzido pela hélice superior de um rotor-coaxial, agindo sobre a hélice inferior do mesmo rotor.

No trabalho realizado por SEOKKWAN et al. (2017) os autores compararam o desempenho e a força de tração produzida por um quadricóptero comum e o mesmo quadricóptero com rotores-coaxiais, onde suas hélices são balanceadas entre elas, i.e., obrigando a hélice inferior a balancear o torque gerado pela hélice superior em um mesmo rotor-coaxial. De acordo com os autores, um quadricóptero usando quatro rotores-coaxiais desbalanceados, ao invés de quatro monorrotos, é

gera um aumento de 66% na força total de empuxo (considerando perdas causada pela interação com a fuselagem do drone). Já se as hélices forem balanceadas, o aumento de força de tração nos rotores-coaxiais sobe para 82%, em comparação a uma configuração de quadricóptero com rotores simples.

A Figura 2.5 mostra o gradiente de velocidade através de simulação computacional CFD para o quadricóptero com rotores-coaxiais.

Figura 2.5 – Gradiente de velocidade em quadricóptero-coaxial



Fonte: SEOKKWAN et al. (2017)

Um trabalho que chama bastante a atenção por causa do uso de rotores-coaxiais é o de ALLENSPACH et al. (2020), no qual os autores usam uma arquitetura multirrotor hexacóptero, onde cada rotor é coaxial e com capacidade de inclinação. Portanto o drone possui seis rotores-coaxiais, cada um com rotação independente. Isto permite à aeronave atingir um bom desempenho quando o objetivo é o movimento omnidirecional. A Figura 2.6 apresenta a aeronave proposta.

Figura 2.6 – Hexacóptero coaxial-tilt-rotor



Fonte: ALLENSPACH et al. (2020)

“A implementação do tilt-rotor no design de um hexacóptero padrão promete uma solução versátil e capaz, graças à sua morfologia. Peso e complexidade adicionais podem ser justificados por métricas de desempenho significativamente aprimoradas. A inclinação independente de cada rotor resulta em sobre atuação: 12 entradas para controlar 6 graus de liberdade. [...] Nós podemos justificar ainda mais a versão hexacóptero padrão com acréscimo de rotores-tilt, já que sua morfologia para aplicações de percepção permite um grande campo de visão desobstruído. [...] Como tal, optamos por acrescentar ao sistema um duplo grupo de hélices para aumentar o empuxo total de cada rotor e para equilibrar a inércia rotacional em torno do eixo de inclinação. A técnica de contra-rotação de hélices em cada rotor reduz ainda mais o efeito giroscópico total do sistema. As direções de rotação do rotor superior alternam com os braços adjacentes para reduzir os efeitos não modelados de rotores contra rotativos (coaxiais). ” (ALLENSPACH et. al, 2020).

2.3 CONTROLE REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO – LQR

O desempenho de um sistema de controle pode ser representado por índices de desempenho integral, como é o caso do índice da integral do erro quadrático (ISE), apresentado na equação (2.2) como uma função de custo. Sistemas que são ajustados com o objetivo de obter um mínimo índice de desempenho são conhecidos geralmente como sistemas de controle ótimo (DORF e BISHOP, 2010, p. 859).

$$J_{custo} = \int_0^t x(t)^T x(t) dt \quad (2.2)$$

Tal que x representa o vetor de estados do sistema.

2.3.1 Realimentação de estados

Considerando um sistema em espaço de estados definido pela equação (2.3), no qual a variação instantânea dos estados \dot{x} é considerada uma função do valor instantâneo dos estados x e das entradas u , tal que a matriz A de dimensão $n \times n$ (com n o número de estados do sistema) é considerada a matriz de resposta natural do sistema, i.e., sem ação de entradas (os autovalores da matriz A serão os polos do sistema em malha aberta). A matriz B tem dimensão $n \times m$ (com m como o número de entradas) e é considerada a matriz de ação externa já que multiplica o vetor de entradas

u . O vetor y representa o vetor de saídas do sistema, a matriz C representa a matriz de modificação dos estados na saída (e dependerá da dimensão desta matriz para poder obter todos estados como saídas). Finalmente, a matriz D representa a matriz de ação direta entre entradas e saídas.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Como estratégia de controle, pode-se gerar um sistema em malha fechada através da realimentação dos estados do sistema, definindo o vetor de entradas u como uma função do vetor de estados x multiplicado por uma matriz de ganhos K de dimensão $m \times n$, como observado na equação (2.4).

$$\begin{aligned}u_{m \times 1}(t) &= -K_{m \times n} x_{n \times 1}(t) \\ \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & \\ \vdots & & \\ L^{m \times 1} & \cdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2.4}$$

Substituindo (2.4) em (2.3), tem-se:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t) = (A - BK)x(t)\tag{2.5}$$

Nesta última equação, os autovalores do termo $(A - BK)$ representarão os polos em malha fechada do sistema.

O controle regulador linear quadrático – LQR é considerado um tipo de controle ótimo já que se baseia em uma variação do índice de desempenho ISE, junto com a realimentação de estados do sistema na entrada.

A função de custo do controlador LQR considera os estados do sistema e as entradas do mesmo, quando a varável de tempo t tende para o infinito e considera-se que o sistema poderá entrar em equilíbrio, alcançando um regime permanente. A função de custo do controlador LQR é apresentada na equação (2.6), tal que u representa o vetor de entradas do sistema, Q é uma matriz de pesos ou ponderação dos estados e R é uma matriz de ponderação das entradas.

$$J_{custo} = \min_{u(t)} \int_0^{\infty} \left(x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \right) dt \quad (2.6)$$

O vetor de entradas u é considerado na função de custo do controlador LQR já que o objetivo é contabilizar e diminuir/otimizar o gasto de energia do sinal controle. Por exemplo, em sistemas de controle de veículos elétricos, é necessário considerar o gasto de energia que o sinal de controle gera. Para isto, o termo $u(t)^T u(t)$ representa o gasto de energia da bateria e deve ser restrito para conservar a energia por longos períodos de viagem (DORF e BISHOP, 2010, p. 866).

Para o controlador LQR, a matriz de ganhos K apresentada na equação (2.4) é dada pela expressão (2.7). Tal que a matriz P é uma matriz de dimensão nxn , simétrica e positiva-definida.

$$K = R^{-1} B P \quad (2.7)$$

Se o sistema é controlável, existirá uma única solução positiva-definida para a matriz P , que tornará o sistema em malha fechada estável. Para determinar o valor da matriz P , a equação algébrica de Riccati é usada:

$$\begin{aligned} A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q &= 0 \\ \rightarrow Q &\geq 0 \\ \rightarrow R &> 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Uma solução simples para determinar as matrizes Q e R é considerar elas diagonais como observado na equação (2.9), onde os coeficientes q e ρ descrevem quanto, individualmente, um estado ou entrada (ao quadrado) deve contribuir com o custo total. Para tornar uma determinada variável menor (estado ou entrada), seu respectivo coeficiente no índice de custo de controle deve ser aumentado e, analogamente, para aumentar a contribuição de uma variável, seu respectivo coeficiente no índice de custo de controle deve ser diminuído.

$$Q_{nxn} = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \rho_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_m \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

2.3.2 Integrador de estados

Os controladores com base na realimentação de estados alcançam a resposta de estado estacionário correta para sinais de comando através de uma calibração cuidadosa do ganho K . No entanto, um dos principais usos da realimentação é a de permitir um bom desempenho na presença de incertezas e para isto exige-se que se tenha um modelo exato do processo. Uma alternativa à calibração é fazer uso de realimentação integral dos estados, em que o controlador usa um integrador para fornecer um erro em regime estacionário igual a zero (ASTROM e MURRAY, 2020, p. 252).

A abordagem do controlador com integrador de estados é a de acrescentar à expressão da entrada no sistema, observada na equação (2.6), um segundo termo de ganho que multiplica o vetor de integrais do erro entre o estado atual (dado pela saída y) e a referência comandada r .

$$u_{m \times 1}(t) = -K o_{m \times n} x_{n \times 1}(t) - K i_{m \times n} \int [y(t) - r(t)]_{n \times 1} dt$$

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{o11} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ k_{om1} & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int (y_1(t) - r_1(t)) dt \\ \int (y_2(t) - r_2(t)) dt \\ \vdots \\ \int (y_n(t) - r_n(t)) dt \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Por outro lado, o sistema passa a ter o dobro de estados, aumentado para $2n$. De tal forma que a equação do sistema em espaço de estados é reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) - r(t) \\ Ax(t) + Bu(t) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Ou em forma matricial expandida, substituindo $y(t) = Cx(t) + Du(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{Xe}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} u(t) - \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \\ \rightarrow z(t) &= \int [y(t) - r(t)] dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

Desta maneira, as novas matrizes A e B passam a ser:

$$A_{Nova} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix}, B_{Nova} = \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

As novas matrizes A e B podem ser usadas para a aplicação do controlador LQR, chamado agora de controlador regulador linear quadrático integrador - “LQRI”, e assim obter o ganho K que será dividido em duas matrizes de tamanhos iguais K_o e K_i .

A matriz Q de ponderação dos estados agora terá dimensão $2n \times 2n$ por causa do aumento dos integradores em cada estado. Porém, a matriz R não é alterada já que esta pondera as entradas que continuam com a mesma dimensão m .

Portanto, com as novas matrizes A e B , a equação algébrica de Riccati se torna:

$$\begin{aligned} A_{Nova}^T P + P A_{Nova} - P B_{Nova} R^{-1} B_{Nova}^T P + Q_{Nova} &= 0 \\ \rightarrow Q_{Nova} &\geq 0 \\ \rightarrow R &> 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

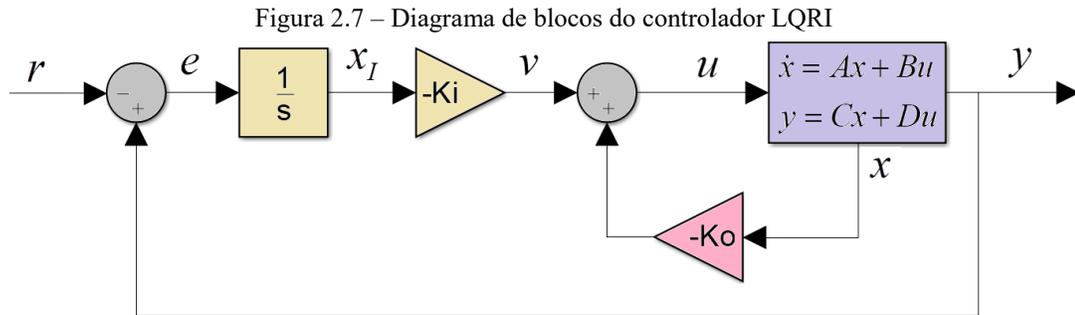
E as matrizes de ganho:

$$\begin{aligned} K_{mx2n} &= R^{-1} B_{Nova}^T P \\ K_{i_{mxn}} &= \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ k_{m1} & \cdots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{1(n+1)} & \cdots & & \\ \vdots & \ddots & & \\ & & \cdots & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Por fim, a função de custo passa a ter a forma:

$$J_{custo} = \min_{u(t)} \int_0^{\infty} (Xe(t)^T Q_{Nova} Xe(t) + u(t)^T Ru(t)) dt \quad (2.16)$$

A Figura 2.7 apresenta o diagrama de blocos correspondente ao controle com o estado aumentado:



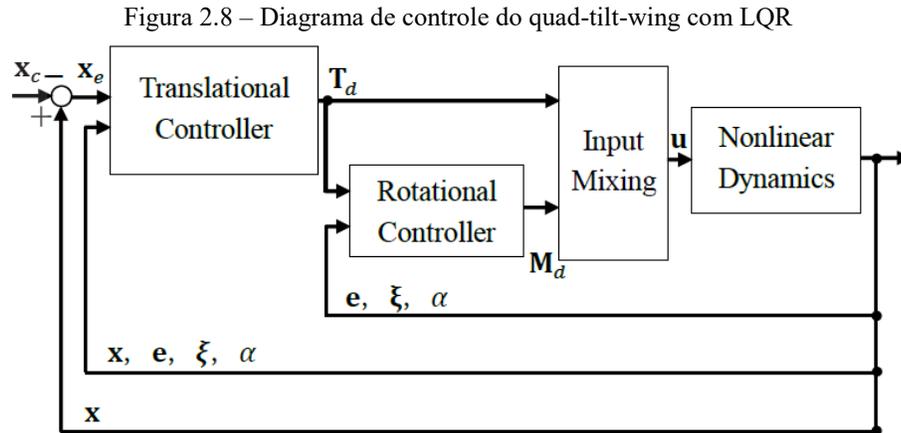
2.3.3 Aplicação de controladores LQR para aeronaves VTOL

Graças a que o controlador LQR é um método de controle de domínio no tempo, baseado em espaço de estados, a resolução de problemas por este método de controle consegue ir além dos métodos de controle clássico e, de acordo com ZHONG et. al (2016), é um método mais adequado para cálculos feitos por computador.

ONER et al. (2008) usaram o método LQR para estudar o controle de um TWUAV sob diferentes ângulos de inclinação dos rotores do sistema, de forma a estabilizar o modelo não linear da aeronave perto de um ponto de equilíbrio (*trim*). Portanto, o controle de voo com base no controle ótimo exige um modelo linear preciso da planta controlada, que é adquirida através da linearização do modelo não linear correspondente. Para um modelo não linear da planta, a faixa de controle de um controlador ótimo é limitada a uma faixa de operação próxima de um ponto de equilíbrio.

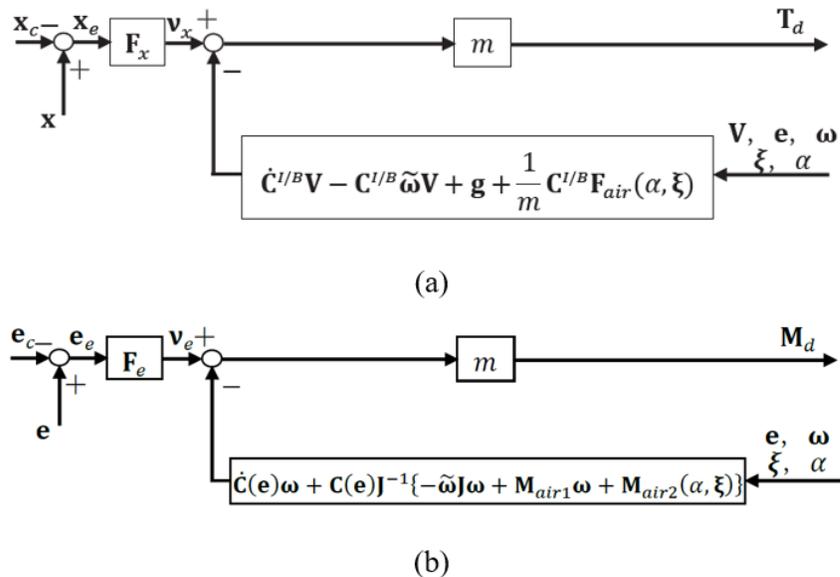
MIKAMI e UCHIYAMA (2015) aplicam o método de controle ótimo LQR para encontrar os ganhos que multiplicam os erros de posição e atitude no espaço (referencial inercial) dos blocos de controle translacional e rotacional, que permitem achar as forças de tração e momentos requeridos, através de uma inversão dinâmica da planta em um determinado ponto de operação. A tração e momentos requeridos para estabilizar o sistema são então passados para o bloco de atuadores e estes por sua vez servem de entrada para a planta não-linear do veículo. A Figura 2.8 mostra o diagrama de controle utilizado pelos autores e a Figura 2.9 mostra os diagramas dos blocos

de controle translacional e rotacional. Nas Figuras 2.9 (a) e (b) as matrizes F_x e F_e representam as matrizes de ganhos geradas pela aplicação do controle LQR.



Fonte: MIKAMI e UCHIYAMA (2015)

Figura 2.9 – Diagrama de controle do quad-tilt-wing com LQR. (a) Controlador translacional; (b) Controlador rotacional.



Fonte: MIKAMI e UCHIYAMA (2015)

BAUTISTA et al. (2017) linearizam a planta da sua asa voadora com rotores inclináveis e aplicam o método LQR para controlar o movimento longitudinal da aeronave, ou seja, seu deslocamento para frente, sua altitude e seu ângulo de arfagem. Os resultados são comparados com

um controlador proporcional derivativo - PD para o mesmo modo de voo, mostrando uma convergência mais rápida do objetivo quando é usado o controlador LQR.

ALLENSPACH et al. (2020) usam um controlador LQR com realimentação integral de estados (LQRI) para otimizar a dinâmica do sistema, minimizando o erro através da função de custo apresentada na equação (2.17). O modelo dinâmico é usado em nível de *jerk* (derivada da aceleração) para o movimento linear e angular.

$$\begin{aligned} \min_{\bar{u}(t)} \int_0^{\infty} e(t)^T Q e(t) + \bar{u}(t)^T R \bar{u}(t) dt \\ \dot{e}(t) = f(e(t), \bar{u}(t)) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Tal que $e(t)$ representa o vetor de erros que é minimizado, $\bar{u}(t)$ é a entrada de controle no sistema e $f(\cdot)$ representa a função de evolução dos erros.

O controlador de atitude lineariza a planta não linear a cada instante de tempo tanto na realimentação, quanto no bloco seguinte ao cálculo do erro. Depois, através de uma inversão dinâmica, são encontrados os comandos de aceleração e inclinação dos rotores-coaxiais e enviados como entradas à planta não linear do sistema.

De forma paralela, um controlador PID é usado também para auxiliar o controlador LQRI no controle da dinâmica em nível de *jerks*. Este controlador é usado de forma “intercambiável” com o controlador LQRI a depender de um bloco de seleção chamado de “*differential allocator*” e que tem por objetivo selecionar qual das duas estratégias de controle é mais adequada para uma determinada condição de voo e referência.

2.4 CONTROLE PROPORCIONAL INTEGRAL DERIVATIVO – PID

Conhecido como a técnica de controle mais utilizada por causa da sua praticidade, relativa fácil implementação e alta confiabilidade quando se trata de eliminar erros em regime permanente e conseguir trabalhar com regimes transitórios; o controlador PID representa a “porta de entrada” ou primeira alternativa a considerar para todo projeto que requeira controle de rastreamento.

“O controle proporcional-integral-derivativo (PID) é de longe a forma mais comum de usar realimentação em sistemas aplicados à engenharia.” (ASTROM e MURRAY, 2020, p. 375).

“Baseado em uma pesquisa sobre 11.000 controladores aplicados às indústrias de refinaria, químicos e de papel, observa-se que 97% dos controladores de regulação usam um algoritmo de controle com realimentação PID” (DESBOROUGH e MILLER, 2002).

Os controladores PID são classificados como “clássicos” e acredita-se que tenham sido concebidos inicialmente em 1911, quando inventor Elmer Sperry projetou este controlador para a marinha dos Estados Unidos. Seu objetivo era automatizar a direção do navio e emular o comportamento de um timoneiro, que era capaz de compensar variações persistentes e prever variações futuras em alto mar. Em 1922, o engenheiro Nicolas Minorsky publicou a primeira análise teórica do controle PID, descrevendo seu comportamento em uma fórmula matemática que serve de base de cálculo até hoje. No entanto, somente em 1942, quando as regras de ajuste de Ziegler e Nichols foram introduzidas, foi possível encontrar e definir os parâmetros apropriados dos controladores PID (BENNET, 1996).

2.4.1 Estratégia do controle PID

O controlador PID é, como seu nome indica, a soma de três parcelas de controle: “proporcional, integral e derivativo”. Cada uma destas parcelas contribui de certa forma para controlar um determinado sistema e conseguir fazer com que a saída esperada deste, seja condicente com a entrada de referência entregue a ele. Matematicamente, o controlador PID no domínio do tempo, e no domínio da frequência, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \underbrace{K_p e(t)}_{\text{proporcional}} + \underbrace{K_i \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{integral}} + \underbrace{K_d \frac{de(t)}{dt}}_{\text{derivativo}} \\
 u(s) &= \underbrace{K_p e(s)}_{\text{proporcional}} + \underbrace{K_i \frac{e(s)}{s}}_{\text{integral}} + \underbrace{K_d s e(s)}_{\text{derivativo}}
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

Tal que u representa a entrada que irá para a planta e e representa o erro entre a referência esperada e a saída obtida do sistema. As constantes k_p , k_i e k_d representam, respectivamente na ordem, os coeficientes proporcional, integral e derivativo.

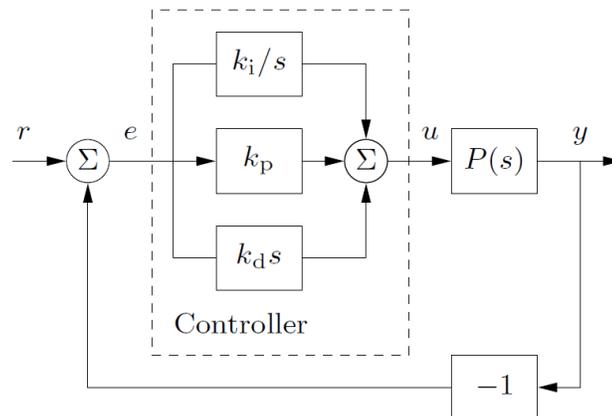
De acordo com ASTROM e MURRAY (2020, p. 378), na equação (2.18) o termo derivativo na representação de Laplace na verdade deveria ser escrito como apresentado na equação (2.19). Onde T_d representa a constante de tempo da parcela derivativa e que, por ser geralmente muito menor que a constante de tempo do sistema completo, é geralmente desprezada na teoria (gerando o formato visto na equação (2.18)).

$$u_d(s) = \frac{k_d s}{T_d s + 1} e(s) \quad (2.19)$$

Porém, na prática, desprezar este termo significaria que com altas frequências a saída do controlador $u(s)$ (e entrada para a planta) tenderia para o infinito e, na prática, isto causaria danos ao sistema. Por isto o formato da parcela derivativa apresentada na equação (2.19) age como um filtro passa baixa.

A Figura 2.10 mostra o diagrama de blocos do sistema com o controlador PID acoplado, no domínio da frequência. Observa-se nesta figura a ação de realimentação da qual depende o controlador para atuar. Desta figura é possível obter a função de transferência na equação (2.20), entre o erro e e a referência r como entrada.

Figure 2.10 – Diagrama de blocos do Sistema em malha fechada com controle PID



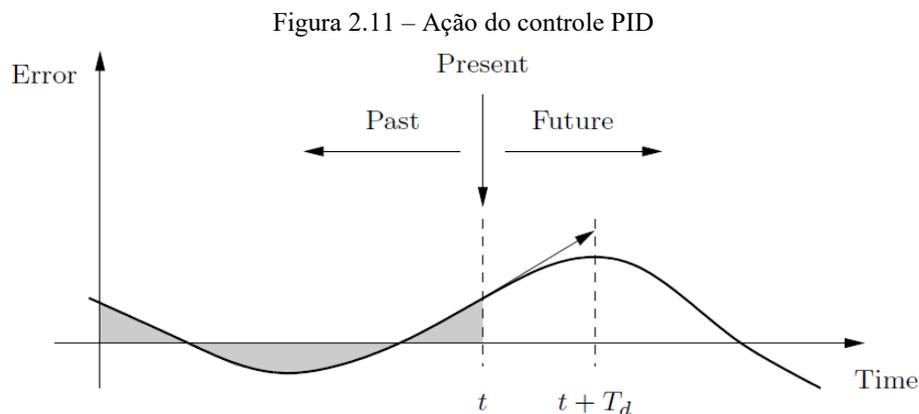
Fonte: ASTROM e MURRAY (2020, p. 376)

$$G_{erro}(s) = \frac{e(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} \quad (2.20)$$

$$\rightarrow C(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

A Figura 2.11 apresenta como cada componente da equação (2.18) contribui com o controlador. No tempo t , o termo proporcional depende do erro instantâneo do sistema, ou seja, no presente. A porção integral da realimentação é baseada na integral do erro até o tempo t (área sombreada), ou seja, considera o passado. O termo derivativo fornece uma estimativa do crescimento ou decaimento do erro sobre o tempo olhando para a taxa de variação do erro, ou seja, é uma forma preditiva do futuro. O tempo de predição aproximado que o erro será projetado para frente é representado por T_d , que é justamente a constante de tempo do termo derivativo visto na equação (2.19).

A parcela proporcional do controlador PID tem por objetivo estabilizar o sinal da variável de processo frente a uma variação na entrada, buscando aproximar a saída y da referência r (Figura 2.10), corrigindo o erro entre ambas. Porém, se o sistema não possuir polos na origem, quando o sistema voltar ao equilíbrio este poderá apresentar um erro entre a referência e a saída em regime permanente que não poderá ser corrigido exclusivamente pela ação da parcela proporcional do controlador. O aumento ou diminuição do coeficiente k_p alterará a velocidade de resposta do sistema e o valor do erro em regime permanente.



Fonte: Extraído de ASTROM e MURRAY (2020, p. 32)

Para corrigir o erro em regime permanente, é usada a parcela integral do controlador já que esta fornece um polo na origem e, observando à equação (2.19), um polo quando s tende a zero, o ganho do controlador C tende ao infinito e, conseqüentemente, a função de transferência do erro tende a zero.

Por fim, a parcela derivativa do controlador tem como objetivo obter uma resposta transitória do sistema em malha fechada mais rápida. Em regime permanente, quando o valor de s tende a zero, a parcela derivativa desaparece na equação (2.18). Portanto de fato esta parcela não atua em regime permanente.

A Tabela 2.1 apresenta como o incremento das constantes k_p , k_i e k_d geralmente altera a resposta em malha fechada do sistema frente a uma entrada degrau, de acordo com DORF e BISHOP (2010, p 483).

Tabela 2.1– Efeito de incrementar as constantes do controlador PID para uma entrada degrau

Ganho PID	Porcentagem de <i>Overshoot</i>	Tempo de Acomodação	Erro em Regime Estacionário
Incrementando K_p	Aumenta	Impacto Mínimo	Diminui
Incrementando K_i	Aumenta	Aumenta	Erro nulo em regime estacionário
Incrementando K_d	Diminui	Diminui	Sem impacto

Fonte: Adaptado de DORF e BISHOP (2010, p. 483)

2.4.2 Aplicação de controladores PID para aeronaves VTOL

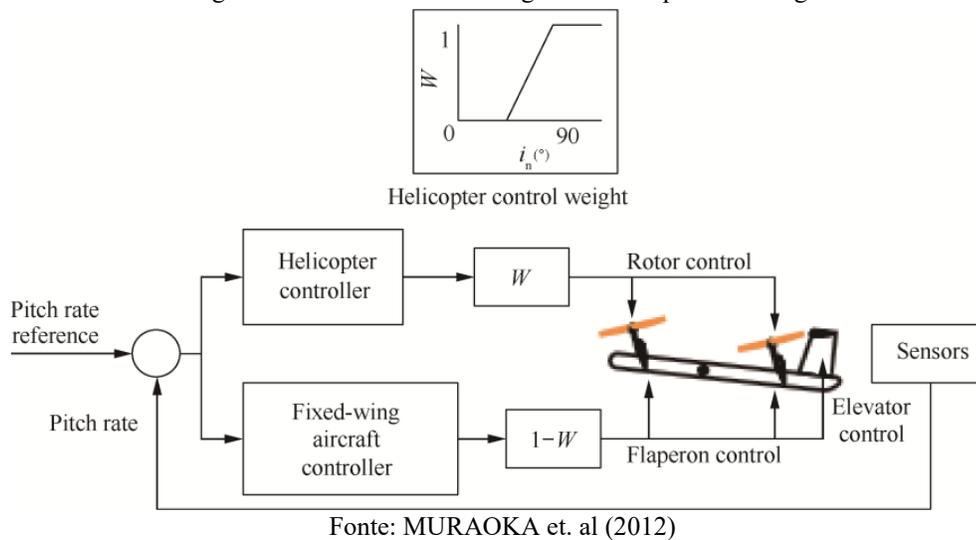
Por ser um método muito conhecido e prático, baseado na resposta do sistema no domínio da frequência e através do método do lugar das raízes (root-locus), além de não depender de modelos dinâmicos precisos; muitos pesquisadores construíram estruturas de controlador com base em controle PID, e os voos estáveis de TRUAVs em plataformas experimentais foram alcançados em diferentes modos (ZHONG et. al, 2016).

Os controladores baseados em PID, segundo ZHONG et al. (2016), têm sido muito aplicados no controle de atitude das arquiteturas VTOL TRUAV e TWUAV, i.e., no controle dos ângulos de rolagem, arfagem e guinada do veículo. Porém, devido ao baixo desempenho do

controlador PID quando usado com uma planta com acoplamento não linear, uma análise de desacoplamento é necessária para o TRUAV ou TWUAV, que geralmente é um sistema subatuado e de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO). Além disso, o modo de transição requer a coordenação de vários conjuntos de controladores.

Desta forma, MURAOKA et al. (2012), em seu modelo “quad-tilt-wing”, apresentam um conjunto de controladores PID para o modo *hover*, outro conjunto de controladores PID para o modo avião e um bloco controlador de pesos “ W ” que decide qual controlador será usado a depender do ângulo de inclinação dos rotores. Durante o modo de voo de transição, ambos controladores são usados através da técnica de ajuste de ganhos (*gain scheduling*). A Figura 2.12 mostra o diagrama de blocos do controlados longitudinal desta aeronave.

Figura 2.12 – Controle PID longitudinal do quad-tilt-wing

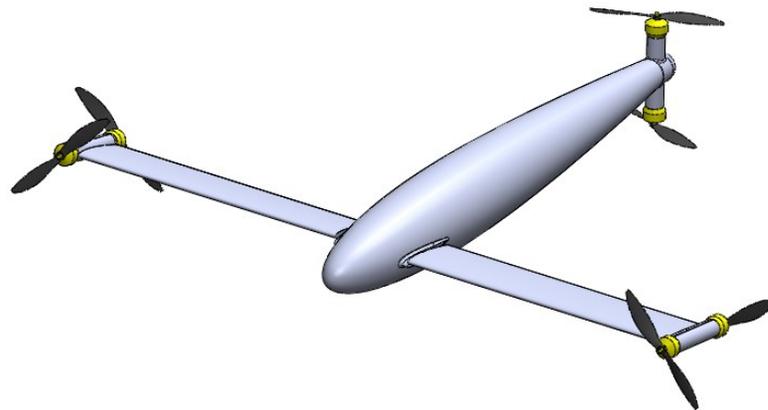


Adicionalmente, a técnica de múltiplos controladores PID para os modos *hover* e avião, em conjunto com ajuste de ganhos durante o voo de transição, é praticada também por KYUNG-JAE et. al (2020), conseguindo bons resultados tanto em simulação quanto na prática.

3 MODELAGEM DINÂMICA

Neste capítulo será apresentada a modelagem dinâmica de um veículo aéreo não tripulado que utiliza tanto asas com ângulo de incidência variável quanto rotores coaxiais capazes de girar independentemente entre si. O modelo dinâmico aqui apresentado corresponde ao aprimoramento de um modelo prévio, exposto no trabalho de conclusão de curso (TCC) intitulado “Modelagem e Simulação de uma Aeronave Multirrotor não Convencional” e que foi elaborado pelo autor deste trabalho em 2018 (ARROYO, 2018). A Figura 3.1 apresenta uma montagem generalizada no software CAD Solidworks da aeronave, que servirá como fonte para descrever seu funcionamento e formato.

Figura 3.1 – Montagem generalizada da aeronave.



Fonte: Autoria própria

3.1 DESCRIÇÃO DA AERONAVE

Como pode ser observado na Figura 3.1, a aeronave corresponde à associação de um modelo multirrotor e uma aeronave de asa fixa. Sua estrutura é composta por seis elementos acoplados entre eles, sendo estes: duas asas (direita e esquerda), dois rotores-coaxiais laterais acoplados respectivamente na ponta de cada asa, um rotor-coaxial traseiro e o corpo principal ou

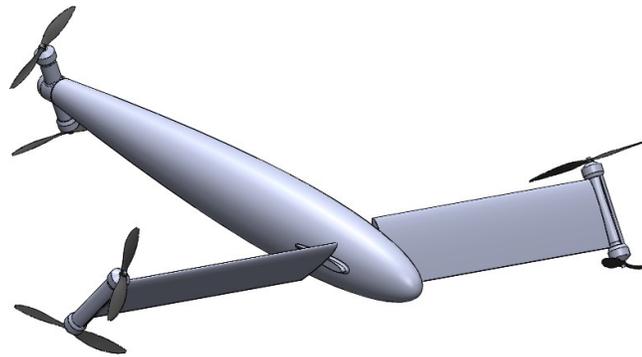
fuselagem da aeronave, onde vão acopladas as duas asas e o rotor-coaxial traseiro. O formato da aeronave foi concebido desta forma já que se considera que cada asa (junto ao seu respectivo rotor-coaxial) possui a capacidade de girar independentemente uma da outra, assim como também o rotor-coaxial traseiro. Desta maneira espera-se que a aeronave seja manobrável e controlável a partir da deflexão das suas asas e do rotor-coaxial traseiro, junto com a aceleração dos três rotores-coaxiais. É necessário ressaltar que a aeronave não possui superfícies de comando “clássicas” como ailerons, flaps ou empenagens vertical e/ou horizontal.

De agora em diante, ao longo do texto, cada um dos seis componentes descritos anteriormente será abreviado da seguinte maneira:

- Fuselagem: F
- Asa direita: W_1
- Asa esquerda: W_2
- Rotor-coaxial direito: R_1
- Rotor-coaxial esquerdo: R_2
- Rotor-coaxial traseiro: R_3

A capacidade da aeronave de girar ou defletir suas duas asas e seu rotor traseiro de forma independente, tem como consequência que o formato da aeronave seja assimétrico para uma determinada condição de voo, alterando diretamente o tensor de inércia da aeronave. Devido a isto, a formulação matemática do modelo da aeronave levará em consideração a mudança na sua simetria. A Figura 3.2 mostra uma condição de voo onde a aeronave encontra-se assimétrica (em relação à fuselagem) devido a inclinação distinta entre asas e rotor traseiro.

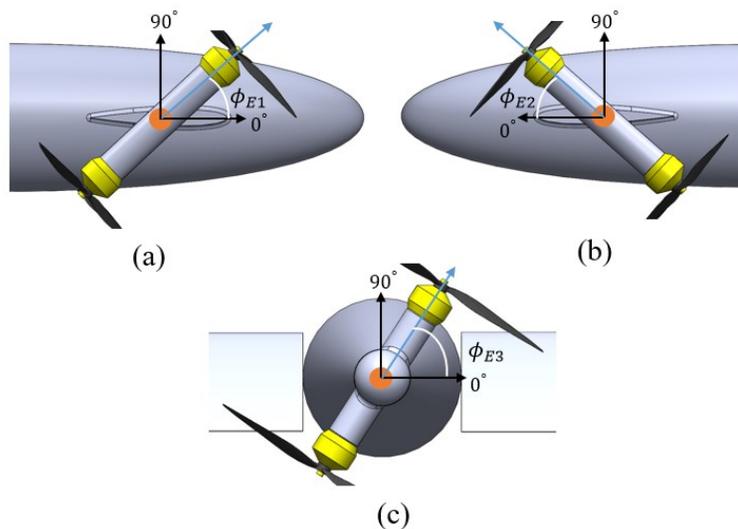
Figura 3.2 – Condição de voo assimétrica da aeronave.



Fonte: Autoria própria

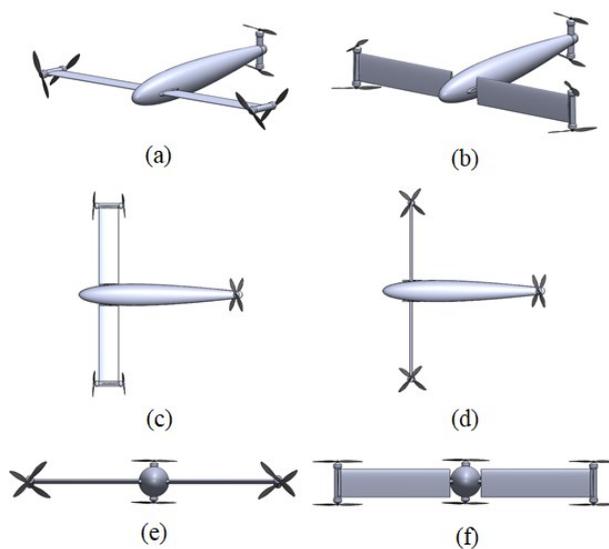
O objetivo do design desta aeronave é o de funcionar como um veículo VTOL (Vertical-Take-Off-and-Landing), capaz de decolar e pousar verticalmente, pairar no ar e então passar para uma condição de voo reto-nivelado ou “cruzeiro”, característico das aeronaves do tipo asa-fixa (aviões). Por ser uma aeronave VTOL capaz de defletir suas asas em conjunto com seus rotores, ela pode ser classificada como “TWUAV” ou “Tilt-Wing-Unmanned-Air-Vehicle” (ZHONG et al., 2016). A deflexão das asas e do rotor traseiro depende do respectivo ângulo de inclinação ϕ_{Ei} ($i = 1, 2, 3$) e este pode ser observado na Figura 3.3, na qual observa-se que um dado rotor-coaxial é considerado orientado horizontalmente quando seu ângulo de inclinação é 0° e orientado verticalmente quando o ângulo de inclinação alcança 90° . A Figura 3.4 apresenta a aeronave através de várias perspectivas nas condições voo pairado (*hover*) e voo reto-nivelado (cruzeiro).

Figura 3.3 – Rotação de acordo com os ângulos de inclinação. (a) Ângulo de inclinação do conjunto asa-rotor-coaxial direito, (b) Ângulo de inclinação do conjunto asa-rotor-coaxial esquerdo, (c) Ângulo de inclinação do rotor-coaxial traseiro.



Fonte: Autoria própria

Figura 3.4 - Perspectivas do TWUAV. (a) Voo para frente em perspectiva, (b) Voo pairado em perspectiva, (c) Vista superior de voo para frente, (d) Vista superior de voo pairado, (e) Vista frontal de voo para frente, (d) Vista frontal de voo pairado.



Fonte: Autoria própria

Para a modelagem dinâmica, algumas premissas são consideradas:

- Asas, rotores, fuselagem e hélices são considerados corpos rígidos;
- A aeronave é considerada um sistema multicorpo;
- O centro de massa ou centro de gravidade do veículo coincide com a origem do sistema de coordenadas fixo ao corpo;
- O sistema de coordenadas fixo ao corpo é considerado variável no espaço em função da inclinação das asas e do rotor-coaxial traseiro;
- A morfologia da aeronave é considerada variável e pode ser assimétrica a depender da inclinação das asas e do rotor-coaxial traseiro.
- O centro de pressão aerodinâmica da fuselagem é considerado fixo, sem variação devido ao C.G. da aeronave. Desprezando, então, os momentos aerodinâmicos causados pela fuselagem.

3.2 SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Para descrever corretamente a variação do centro de gravidade da aeronave em função dos ângulos de inclinação, determinar os momentos e produtos de inércia a cada instante do sistema multicorpo e definir os momentos e forças atuantes sobre o veículo, é preciso de uma série de sistemas de referência.

- **Referência Inercial: I**

Referencial fixo à Terra com a coordenada Z_I apontando para o centro da Terra, X_I aponta para o Norte e Y_I para o Leste.

- **Referencial Fixo ao Corpo: B**

Referencial que tem por origem o centro de gravidade da aeronave que é móvel e dependente dos ângulos de inclinação ϕ_{Ei} . X_B aponta para o nariz da aeronave ao longo do eixo longitudinal da fuselagem. O eixo Y_B aponta para a asa direita e o eixo Z_B aponta para baixo, conforme a regra da mão direita.

É sobre este sistema de referência que serão determinadas as forças, momentos e o tensor de inércia da aeronave.

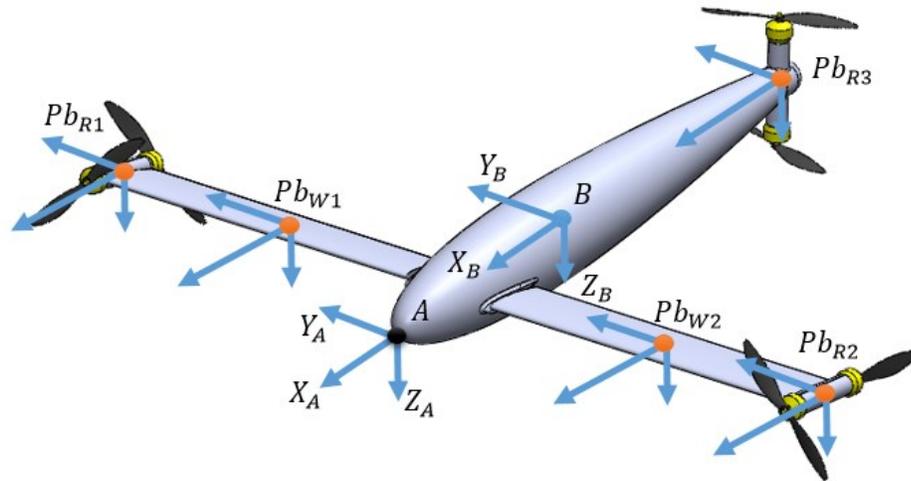
- **Referencial Fixo ao Nariz: A**

Referencial que tem como origem um ponto fixo (constante) na aeronave. Neste caso foi escolhido o nariz do veículo e sua função é servir como ponto de referência para se determinar a posição relativa do sistema B em relação a ele. Seus eixos $[X, Y, Z]_A$ são sempre paralelos aos eixos $[X, Y, Z]_B$.

- **Referencial Paralelo ao Corpo e Fixo ao Componente: $Pb_{R1}, Pb_{R2}, Pb_{R3}, Pb_{W1}, Pb_{W2}, Pb_F$**

Sistema de referência que tem como origem o centro de gravidade de cada componente (asas, rotores-coaxiais e fuselagem) e que possui seus eixos $[X, Y, Z]_{Pb}$ sempre paralelos aos eixos $[X, Y, Z]_B$. A função de cada um destes referenciais é o de permitir transferir eventos ou sinais que aconteçam ou tenham como origem um determinado componente para o sistema fixo ao corpo B , como forças, momentos e até tensores de inércia de cada componente. Por sua vez, eventos ou sinais que tenham origem no centro de gravidade da aeronave e que afetem um componente, podem ser transferidos para o sistema Pb , como por exemplo, velocidades lineares e angulares (definidas originalmente no sistema B) que podem afetar a dinâmica de uma asa ou de um rotor-coaxial. A Figura 3.5 apresenta a distribuição dos sistemas A , B e Pb descritos até agora, onde apenas o sistema Pb fixo ao centro de gravidade da fuselagem não é apresentado.

Figura 3.5 – Distribuição dos sistemas de referência A , B e Pb usados no sistema.



Fonte: Autoria própria

- **Referencial Fixo aos Rotores-Coaxiais e às Asas:** r_1, r_2, r_3, w_1, w_2

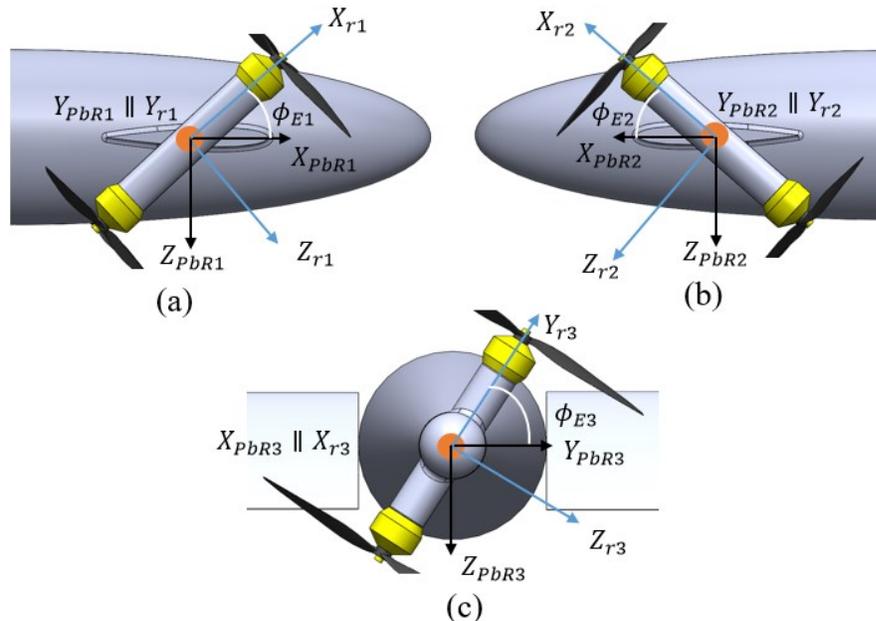
Sistema de referência que tem como origem o centro de gravidade de cada rotor-coaxial e de cada asa. Para um determinado componente (asa ou rotor-coaxial), seus eixos encontram-se deslocados angularmente dos eixos do respectivo sistema Pb através de uma determinada rotação em função do ângulo de inclinação ϕ_{Ei} . Como mostra a Figura 3.6, para os três rotores-coaxiais, cada um encontra-se deslocado do seu respectivo ângulo de inclinação em relação aos sistemas Pb . Observa-se que para os rotores-coaxiais laterais, os eixos Y entre os sistemas r e Pb são paralelos, enquanto que para o rotor-coaxial traseiro o eixo X é paralelo entre os sistemas r e Pb . Deve-se ressaltar que de acordo com a regra da mão direita e pela orientação dos eixos coordenados escolhidos para os sistemas Pb , a Figura 3.3 (c) apresenta uma rotação de ϕ_{E3} que na verdade é considerada negativa e que será levada em consideração como tal para a formulação matemática da dinâmica do veículo.

A função destes sistemas é a de permitir transferir os momentos e produtos de inércia de um determinado rotor-coaxial ou de uma asa para o respectivo sistema Pb através de uma rotação angular. Posteriormente, o teorema dos eixos paralelos permitirá transferir os momentos e produtos de inércia de cada componente entre os sistemas Pb e o sistema fixo ao corpo B . Adicionalmente, forças e momentos produzidos pelos rotores ou pelas asas requerem que sejam transferidos do seu

sistema de origem r_1, r_2, r_3, w_1, w_2 para o respectivo sistema Pb para serem considerados nas equações dinâmicas em relação ao corpo, que serão vistas a seguir.

Particularmente no caso das asas, os sistemas w_1, w_2 permitirão não somente transferir os momentos e produtos de inércia para os sistemas Pb e posteriormente para o sistema B , mas, também, permitirão determinar a localização do centro aerodinâmico da asa (onde atuam as forças e momentos aerodinâmicos obre ela) em relação ao sistema fixo ao corpo B .

Figure 3.6 – Relação angular entre os sistemas r e Pb para cada um dos rotores-coaxiais. (a) Sistemas r_1 e Pb_{r1} do rotor-coaxial direito; (b) Sistemas r_2 e Pb_{r2} do rotor-coaxial esquerdo; (c) Sistemas r_3 e Pb_{r3} do rotor-coaxial traseiro.



Fonte: Autoria própria.

3.3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO

A formulação matemática a seguir parte dos princípios de Newton-Euler e é usada para descrever as equações do movimento da aeronave inicialmente em relação ao corpo, já que forças, momentos e matrizes de inércia são definidas em relação ao sistema fixo ao corpo B . Posteriormente, as equações cinemáticas, em função de três coordenadas lineares de posição e dos três ângulos de Euler para determinar a orientação da aeronave, são usadas para definir a localização e atitude da aeronave no espaço, isto é, em relação ao referencial inercial I .

Sabe-se que a segunda lei de Newton apenas é válida com respeito ao referencial inercial. Porém, as equações dinâmicas podem ser expressas no sistema de referência fixo ao corpo, sempre que se levar em consideração o fato de que o sistema pode se transladar e girar com respeito a um referencial inercial.

De acordo com HIBBELER (2010), a derivada temporal de qualquer vetor \vec{A} , observado no referencial inercial I é igual à taxa temporal de mudança do vetor \vec{A} observado no referencial de translação-rotação B , mais a parcela $\vec{\Omega} \times \vec{A}$ que refere-se à mudança de \vec{A} provocada pela rotação do sistema B , quando observada desde o referencial inercial I . Isto é:

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_I = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_B + \vec{\Omega}_B \times \vec{A}_B \quad (3.1)$$

3.3.1 Equações do Movimento

Definindo os vetores $\vec{v} = [U \ V \ W]^T$ e $\vec{w} = [P \ Q \ R]^T$ como vetores de velocidade linear e angular, respectivamente, em relação ao sistema fixo ao corpo B , a equação (3.2) mostra a segunda lei de Newton para o movimento linear causado por forças externas:

$$m_T \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_I = m_T \vec{a}_I = \vec{F} \quad (3.2)$$

Com m_T como a massa total da aeronave. Na equação (3.2), aplicando a relação (3.1) para a aceleração, temos na equação (3.3) a aceleração da aeronave vista desde o sistema fixo ao corpo:

$$\left(\vec{a}_I \right)_B = \dot{\vec{v}} + \vec{w} \times \vec{v} \quad (3.3)$$

Portanto, o somatório de forças para a segunda lei de Newton passa a ter a forma da equação (3.4):

$$m_T \left(\dot{\vec{v}} + \vec{w} \times \vec{v} \right) = m_T \begin{bmatrix} \dot{U} + QW - RV \\ \dot{V} + RU - PW \\ \dot{W} + PV - QU \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix}_B = \sum F_B \quad (3.4)$$

Agora, da segunda lei de Newton para o movimento angular causado por momentos externos em relação ao sistema fixo ao corpo B , e da relação (3.1), a soma de momentos será igual à derivada no tempo do momento angular, na equação (3.5), tal que H representa o momento angular.

$$\left[\left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right) \right]_I \Big|_B = \left(\dot{\vec{H}} \right)_B + \vec{w} \times \vec{H}_B = \vec{\tau} \quad (3.5)$$

Sabendo que o momento angular pode ser descrito como a multiplicação entre inércia e velocidade angular, a equação (3.6) apresenta esta relação:

$$\vec{H}_B = J_T \cdot \vec{w}$$

$$\vec{H}_B = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int (xy) dm & -\int (xz) dm \\ -\int (yx) dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int (yz) dm \\ -\int (zx) dm & -\int (zy) dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{XX} & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{YX} & I_{YY} & -I_{YZ} \\ -I_{ZX} & -I_{ZY} & I_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Com $J_T \in \mathbb{R}$ como a matriz tensor de inércia total da aeronave. Portanto, a derivada no tempo da equação (3.5) dará a equação (3.7):

$$\dot{\vec{H}}_B = \dot{J}_T \cdot w + J_T \cdot \dot{w} \quad (3.7)$$

Portanto, substituindo as equações (3.6) e (3.7) em (3.5), temos:

$$\dot{J}_T \cdot w + J_T \cdot \dot{w} + w \times (J_T \cdot w) = \sum M_B \quad (3.8)$$

Observa-se na equação (3.8) que o primeiro termo do lado esquerdo, que possui a derivada do tensor de inércia total da aeronave \dot{J}_T , é levado em consideração já que o tensor de inércia do conjunto multicorpo é variável a depender dos ângulos de inclinação ϕ_{Ei} . Comumente, o modelo dinâmico de uma aeronave despreza este termo já que considera que a inércia total da aeronave será invariável. Para este projeto é apresentada a formulação matemática para determinar os valores das matrizes J_T e \dot{J}_T a cada instante de tempo.

3.3.2 Posição Relativa e Centro de Gravidade

Com uma base de referência fixa localizada no nariz da aeronave $(X_A \ Y_A \ Z_A)$, a posição do C.G. da aeronave em relação à base A , será dada pela equação (3.9), onde o índice i refere-se a cada um dos componentes do sistema multicorpo.

$$\begin{bmatrix} X_{B_A} \\ Y_{B_A} \\ Z_{B_A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{CG_A} \\ Y_{CG_A} \\ Z_{CG_A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum m_i X_{i_A}}{m_T} \\ \frac{\sum m_i Y_{i_A}}{m_T} \\ \frac{\sum m_i Z_{i_A}}{m_T} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Portanto, o primeiro passo corresponde a encontrar as expressões dos centros de gravidade de cada um dos componentes (asas, rotores-coaxiais e fuselagem) em relação ao sistema fixo ao nariz da aeronave A . Isto é, encontrar as coordenadas $(X_{Pb} \ Y_{Pb} \ Z_{Pb})_A$ de cada um dos componentes.

Nas equações a seguir serão apresentados apenas os resultados finais das equações de posição relativa de cada um dos componentes em relação ao sistema fixo ao nariz da aeronave A . A formulação completa para cada um dos componentes pode ser encontrada na seção i do apêndice A1.

- **Posição Relativa do Rotor-Coaxial Direito R_1**

As coordenadas do sistema Pb do rotor-coaxial direito em relação ao sistema A , são dadas pela equação (3.10), como função do ângulo de inclinação ϕ_{E1} . A expressão $dXZ_{Pb_{R1}C_1}$ representa o raio de giro (constante) no plano $X_A Z_A$ entre o sistema Pb_{R1} e a junta de giro do rotor-coaxial direito C_1 . Por outro lado, a expressão $dY_{Pb_{R1}C_1}$ representa a distância em Y_A entre o sistema Pb_{R1} e a junta C_1 . A base $(X_{C1_A} \ Y_{C1_A} \ Z_{C1_A})$ representa as coordenadas (constantes) da junta C_1 relativas ao sistema fixo ao nariz A .

$$\begin{bmatrix} X_{PbR1_A} \\ Y_{PbR1_A} \\ Z_{PbR1_A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{C1_A} + (dXZ_{Pb_{R1}C_1}) \cos(\phi_{E1}) \\ Y_{C1_A} + dY_{Pb_{R1}C_1} \\ Z_{C1_A} - (dXZ_{Pb_{R1}C_1}) \sin(\phi_{E1}) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

▪ **Posição Relativa do Rotor-Coaxial Esquerdo R_2**

Analogamente ao procedimento realizado para determinar a localização do sistema Pb do rotor-coaxial direito R_1 , a localização do sistema Pb do rotor-coaxial esquerdo R_2 é dada pela equação (3.11), em função do ângulo de inclinação ϕ_{E2} . A expressão $dXZ_{PbR_2C_2}$ representa o raio de giro (constante) no plano $X_A Z_A$ entre o sistema Pb_{R_2} e a junta de giro do rotor-coaxial esquerdo C_2 . Por outro lado, a expressão $dY_{PbR_2C_2}$ representa a distância em Y_A entre o sistema Pb_{R_2} e a junta C_2 . A base $(X_{C2_A} \ Y_{C2_A} \ Z_{C2_A})$ representa as coordenadas (constantes) da junta C_2 relativas ao sistema fixo ao nariz A .

$$\begin{bmatrix} X_{PbR2_A} \\ Y_{PbR2_A} \\ Z_{PbR2_A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{C2_A} + (dXZ_{PbR_2C_2}) \cos(\phi_{E2}) \\ Y_{C2_A} + dY_{PbR_2C_2} \\ Z_{C2_A} - (dXZ_{PbR_2C_2}) \sin(\phi_{E2}) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

▪ **Posição Relativa do Rotor-Coaxial Traseiro R_3**

As coordenadas do sistema Pb do rotor-coaxial traseiro em relação ao sistema A , são dadas pela equação (3.12), como função do ângulo de inclinação ϕ_{E3} . a expressão $dYZ_{PbR_3C_3}$ representa o raio de giro (constante) no plano $Y_A Z_A$ entre o sistema Pb_{R_3} e a junta de giro do rotor-coaxial traseiro C_3 . Por outro lado, a expressão $dX_{PbR_3C_3}$ representa a distância em X_A entre o sistema Pb_{R_3} e a junta C_3 . Observa-se também que a base $(X_{C3_A} \ Y_{C3_A} = 0 \ Z_{C3_A})$ representa as coordenadas (constantes) da junta C_3 relativas ao sistema fixo ao nariz A . É necessário ressaltar que a junta de giro traseira é considerada alinhada ao eixo X_A no plano $X_A Y_A$, portanto a distância Y_{C3_A} é igual a zero.

$$\begin{bmatrix} X_{PbR3_A} \\ Y_{PbR3_A} \\ Z_{PbR3_A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{C3_A} + dX_{PbR_3C_3} \\ Y_{C3_A} + (dYZ_{PbR_3C_3}) \cos(\phi_{E3}) \\ Z_{C3_A} + (dYZ_{PbR_3C_3}) \sin(\phi_{E3}) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

- **Posição Relativa da Asa direita W_1**

Seguindo um processo análogo ao do rotor-coaxial direito R_1 , a equação (3.13) mostra a posição relativa da a asa direita em relação ao sistema fixo ao nariz A :

$$\begin{bmatrix} X_{PbW1_A} \\ Y_{PbW1_A} \\ Z_{PbW1_A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{C1_A} + (dXZ_{PbW1C1})\cos(\phi_{E1}) \\ Y_{C1_A} + dY_{PbW1C1} \\ Z_{C1_A} - (dXZ_{PbW1C1})\sin(\phi_{E1}) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

- **Posição Relativa da Asa esquerda W_2**

Seguindo um processo análogo ao do rotor-coaxial esquerdo R_2 , a equação (3.14) mostra a posição relativa para a asa esquerda em relação ao sistema fixo ao nariz A :

$$\begin{bmatrix} X_{PbW2_A} \\ Y_{PbW2_A} \\ Z_{PbW2_A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{C2_A} + (dXZ_{PbW2C2})\cos(\phi_{E2}) \\ Y_{C2_A} + dY_{PbW2C2} \\ Z_{C2_A} - (dXZ_{PbW2C2})\sin(\phi_{E2}) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

- **Posição Relativa da Fuselagem F**

Para a fuselagem, seu sistema Pb encontra-se em uma posição fixa em relação ao sistema fixo ao nariz da aeronave A . Portanto, as coordenadas $(X_{PbF} \ Y_{PbF} \ Z_{PbF})_A$ são consideradas fixas e conhecidas.

- **Posição Relativa do Centro de Gravidade da Aeronave B**

Portanto, partindo da equação (3.9), havendo encontrado as expressões dos centros de gravidade de cada um dos componentes (asas, rotores-coaxiais e fuselagem) em relação ao sistema fixo ao nariz da aeronave A , temos que as coordenadas do sistema fixo ao corpo B , correspondente

às coordenadas do centro de gravidade da aeronave em relação ao sistema A , são dadas pela expressão (3.15):

$$\begin{bmatrix} X_{B_A} & Y_{B_A} & Z_{B_A} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{m_T} \begin{bmatrix} X_{PbR1_A} & X_{PbR2_A} & X_{PbR3_A} & X_{PbW1_A} & X_{PbW2_A} & X_{PbF_A} \\ Y_{PbR1_A} & Y_{PbR2_A} & Y_{PbR3_A} & Y_{PbW1_A} & Y_{PbW2_A} & Y_{PbF_A} \\ Z_{PbR1_A} & Z_{PbR2_A} & Z_{PbR3_A} & Z_{PbW1_A} & Z_{PbW2_A} & Z_{PbF_A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{R_1} \\ m_{R_2} \\ m_{R_3} \\ m_{W_1} \\ m_{W_2} \\ m_F \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

▪ Posição Relativa das Coordenadas em Relação ao C.G. da Aeronave

Agora, para determinar as coordenadas de qualquer um dos componentes (asas, rotores ou fuselagem) em relação ao sistema fixo ao corpo B , é necessário apenas aplicar a subtração vetorial apresentada na equação (3.16). Observemos que o sistema A funciona como “ponte” para determinar a posição relativa (variável) entre os componentes e o centro de gravidade do veículo.

$$\begin{bmatrix} X_{Pbi_B} \\ Y_{Pbi_B} \\ Z_{Pbi_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{Pbi_A} \\ Y_{Pbi_A} \\ Z_{Pbi_A} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{B_A} \\ Y_{B_A} \\ Z_{B_A} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

A posição relativa de cada componente (asas, rotores e fuselagem) em relação ao sistema fixo ao corpo B , permite determinar os tensores de inércia de cada componente e os momentos ou torques, respectivos a cada componente.

3.3.3 Tensor de Inércia

O tensor de inércia da aeronave será representado pela soma dos tensores de inércia de cada um dos componentes através da equação (3.17). Cada um dos tensores de inércia deverá ser representado em relação ao sistema fixo ao corpo B .

$$J_T = J_{R1_B} + J_{R2_B} + J_{R3_B} + J_{W1_B} + J_{W2_B} + J_{F_B} \quad (3.17)$$

A formulação completa para o equacionamento de cada um dos tensores de inércia dos componentes descritos na equação (3.17) é apresentada com detalhe na seção ii do apêndice A1. Aqui serão apresentados apenas os resultados finais dos tensores de inércia, relativos ao sistema fixo ao corpo B .

▪ **Tensor de Inércia do Rotor-Coaxial Direito R_1**

O tensor de inércia do rotor-coaxial direito R_1 , observado no sistema B pode ser descrito como na equação (3.18), com a aplicação do teorema dos eixos paralelos. O símbolo \odot representa uma multiplicação matricial elemento-a-elemento.

$$J_{R1_B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} I_{XX_{R1_PbR1}} & I_{XY_{R1_PbR1}} & I_{XZ_{R1_PbR1}} \\ & I_{YY_{R1_PbR1}} & I_{YZ_{R1_PbR1}} \\ & & I_{ZZ_{R1_PbR1}} \end{bmatrix} + m_{R1} \left[\begin{array}{ccc} (Y_{PbR1_B}^2 + Z_{PbR1_B}^2) & (X_{PbR1_B} Y_{PbR1_B}) & (X_{PbR1_B} Z_{PbR1_B}) \\ (Y_{PbR1_B} X_{PbR1_B}) & (X_{PbR1_B}^2 + Z_{PbR1_B}^2) & (Y_{PbR1_B} Z_{PbR1_B}) \\ (Z_{PbR1_B} X_{PbR1_B}) & (Z_{PbR1_B} Y_{PbR1_B}) & (X_{PbR1_B}^2 + Y_{PbR1_B}^2) \end{array} \right] \quad (3.18)$$

Na equação (3.18), a primeira matriz dentro das chaves tem como elementos os momentos e produtos de inércia do rotor-coaxial direito R_1 em relação ao respectivo sistema fixo ao corpo Pb_{R1} . Estes momentos e produtos de inércia são apresentados na equação (3.19). Nesta equação, os momentos e produtos de inércia do lado direito dos sinais de igualdade (com o subscrito $R1_{r1}$) referem-se, respectivamente, aos momentos e ao produto de inércia do rotor-coaxial R_1 em relação ao sistema fixo ao rotor-coaxial direito r_1 . O interessante nesta abordagem é que estes momentos e produto de inércia podem ser calculados diretamente sobre a peça desenhada, por exemplo, usando o software CAD Solidworks e seguindo uma orientação de eixos de acordo com a base r_1 .

A segunda matriz dentro das chaves da equação (3.18), tem como elementos as distâncias entre o sistema paralelo ao corpo Pb_{R1} e o sistema fixo ao corpo B . Estas distâncias são encontradas aplicando a equação (3.16) para cada um dos componentes.

$$\begin{aligned}
I_{XX_{R1PbR1}} &= I_{ZZ_{R1r1}} \sin^2(\phi_{E1}) + I_{XX_{R1r1}} \cos^2(\phi_{E1}) - I_{XZ_{R1r1}} \sin(2\phi_{E1}) \\
I_{XY_{R1PbR1}} &= I_{XY_{R1r1}} \cos(\phi_{E1}) + I_{YZ_{R1r1}} \sin(\phi_{E1}) \\
I_{XZ_{R1PbR1}} &= \left(I_{XX_{R1r1}} - I_{ZZ_{R1r1}} \right) \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} + I_{XZ_{R1r1}} (\cos(2\phi_{E1}) - 1) \\
I_{YX_{R1PbR1}} &= I_{XY_{R1PbR1}} \\
I_{YY_{R1PbR1}} &= I_{YY_{R1r1}} \\
I_{YZ_{R1PbR1}} &= I_{YZ_{R1r1}} \cos(\phi_{E1}) - I_{XY_{R1r1}} \sin(\phi_{E1}) \\
I_{ZX_{R1PbR1}} &= I_{XZ_{R1PbR1}} \\
I_{ZY_{R1PbR1}} &= I_{YZ_{R1PbR1}} \\
I_{ZZ_{R1PbR1}} &= I_{XX_{R1r1}} \sin^2(\phi_{E1}) + I_{ZZ_{R1r1}} \cos^2(\phi_{E1}) + I_{XZ_{R1r1}} \sin(2\phi_{E1})
\end{aligned} \tag{3.19}$$

▪ **Tensor de Inércia do Rotor-Coaxial Esquerdo R_2**

Analogamente ao rotor-coaxial R_1 , a equação (3.20) mostra o tensor de inércia do rotor-coaxial esquerdo R_2 observado desde o sistema fixo ao corpo B :

$$\begin{aligned}
J_{R2_B} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} I_{XX_{R2PbR2}} & I_{XY_{R2PbR2}} & I_{XZ_{R2PbR2}} \\ I_{YY_{R2PbR2}} & I_{YZ_{R2PbR2}} & \\ I_{ZX_{R2PbR2}} & I_{ZY_{R2PbR2}} & I_{ZZ_{R2PbR2}} \end{bmatrix} \\
&+ m_{R2} \left[\begin{array}{ccc} \left(Y_{PbR2_B}^2 + Z_{PbR2_B}^2 \right) & \left(X_{PbR2_B} Y_{PbR2_B} \right) & \left(X_{PbR2_B} Z_{PbR2_B} \right) \\ \left(Y_{PbR2_B} X_{PbR2_B} \right) & \left(X_{PbR2_B}^2 + Z_{PbR2_B}^2 \right) & \left(Y_{PbR2_B} Z_{PbR2_B} \right) \\ \left(Z_{PbR2_B} X_{PbR2_B} \right) & \left(Z_{PbR2_B} Y_{PbR2_B} \right) & \left(X_{PbR2_B}^2 + Y_{PbR2_B}^2 \right) \end{array} \right] \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Os produtos de inércia em relação ao sistema paralelo ao corpo do rotor-coaxial esquerdo Pb_{R2} , são apresentados na equação (3.21).

$$\begin{aligned}
I_{XX_{R2PbR2}} &= I_{ZZ_{R2r2}} \sin^2(\phi_{E2}) + I_{XX_{R2r2}} \cos^2(\phi_{E2}) - I_{XZ_{R2r2}} \sin(2\phi_{E2}) \\
I_{XY_{R2PbR2}} &= I_{XY_{R2r2}} \cos(\phi_{E2}) + I_{YZ_{R2r2}} \sin(\phi_{E2}) \\
I_{XZ_{R2PbR2}} &= \left(I_{XX_{R2r2}} - I_{ZZ_{R2r2}} \right) \frac{\sin(2\phi_{E2})}{2} + I_{XZ_{R2r2}} (\cos(2\phi_{E2}) - 1) \\
I_{YX_{R2PbR2}} &= I_{XY_{R2PbR2}} \\
I_{YY_{R2PbR2}} &= I_{YY_{R2r2}} \\
I_{YZ_{R2PbR2}} &= I_{YZ_{R2r2}} \cos(\phi_{E2}) - I_{XY_{R2r2}} \sin(\phi_{E2}) \\
I_{ZX_{R2PbR2}} &= I_{XZ_{R2PbR2}} \\
I_{ZY_{R2PbR2}} &= I_{YZ_{R2PbR2}} \\
I_{ZZ_{R2PbR2}} &= I_{XX_{R2r2}} \sin^2(\phi_{E2}) + I_{ZZ_{R2r2}} \cos^2(\phi_{E2}) + I_{XZ_{R2r2}} \sin(2\phi_{E2})
\end{aligned} \tag{3.21}$$

▪ **Tensor de Inércia do Rotor-Coaxial Traseiro R_3**

Analogamente ao rotor-coaxial R_1 , a equação (3.22) mostra o tensor de inércia do rotor-coaxial traseiro R_3 observado desde o sistema fixo ao corpo B :

$$\begin{aligned}
J_{R3_B} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} I_{XX_{R3PbR3}} & I_{XY_{R3PbR3}} & I_{XZ_{R3PbR3}} \\ & I_{YY_{R3PbR3}} & I_{YZ_{R3PbR3}} \\ & & I_{ZZ_{R3PbR3}} \end{bmatrix} \\
&+ m_{R3} \left[\begin{array}{ccc} \left(Y_{PbR3_B}^2 + Z_{PbR3_B}^2 \right) & \left(X_{PbR3_B} Y_{PbR3_B} \right) & \left(X_{PbR3_B} Z_{PbR3_B} \right) \\ \left(Y_{PbR3_B} X_{PbR3_B} \right) & \left(X_{PbR3_B}^2 + Z_{PbR3_B}^2 \right) & \left(Y_{PbR3_B} Z_{PbR3_B} \right) \\ \left(Z_{PbR3_B} X_{PbR3_B} \right) & \left(Z_{PbR3_B} Y_{PbR3_B} \right) & \left(X_{PbR3_B}^2 + Y_{PbR3_B}^2 \right) \end{array} \right] \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Os produtos de inércia em relação ao sistema paralelo ao corpo do rotor-coaxial traseiro Pb_{R3} , são apresentados na equação (3.23).

$$\begin{aligned}
I_{XX_{R3PbR3}} &= I_{XX_{R3r3}} \\
I_{XY_{R3PbR3}} &= I_{XY_{R3r3}} \cos(\phi_{E3}) - I_{XZ_{R3r3}} \sin(\phi_{E3}) \\
I_{XZ_{R3PbR3}} &= I_{XY_{R3r3}} \sin(\phi_{E3}) + I_{XZ_{R3r3}} \cos(\phi_{E3}) \\
I_{YX_{R3PbR3}} &= I_{XY_{R3PbR3}} \\
I_{YY_{R3PbR3}} &= I_{YY_{R3r3}} \cos^2(\phi_{E3}) + I_{ZZ_{R3r3}} \sin^2(\phi_{E3}) + I_{YZ_{R3r3}} \sin(2\phi_{E3}) \\
I_{YZ_{R3PbR3}} &= \left(I_{ZZ_{R3PbR3}} - I_{YY_{R3PbR3}} \right) \frac{\sin(2\phi_{E3})}{2} + I_{YZ_{R3PbR3}} [\cos(2\phi_{E3}) - 1] \\
I_{ZX_{R3PbR3}} &= I_{XZ_{R3PbR3}} \\
I_{ZY_{R3PbR3}} &= I_{YZ_{R3PbR3}} \\
I_{ZZ_{R3PbR3}} &= I_{YY_{R3r3}} \sin^2(\phi_{E3}) + I_{ZZ_{R3r3}} \cos^2(\phi_{E3}) - I_{YZ_{R3r3}} \sin(2\phi_{E3})
\end{aligned} \tag{3.23}$$

▪ **Tensor de Inércia da Asa Direita W_1**

Analogamente ao rotor-coaxial R_1 , a equação (3.24) mostra o tensor de inércia da asa direita em relação ao sistema fixo ao corpo B .

$$\begin{aligned}
J_{W_1B} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} I_{XX_{W_1PbW_1}} & I_{XY_{W_1PbW_1}} & I_{XZ_{W_1PbW_1}} \\ & I_{YY_{W_1PbW_1}} & I_{YZ_{W_1PbW_1}} \\ I_{ZX_{W_1PbW_1}} & I_{ZY_{W_1PbW_1}} & I_{ZZ_{W_1PbW_1}} \end{bmatrix} \\
&+ m_{W_1} \left[\begin{array}{ccc} \left(Y_{PbW_1B}^2 + Z_{PbW_1B}^2 \right) & \left(X_{PbW_1B} Y_{PbW_1B} \right) & \left(X_{PbW_1B} Z_{PbW_1B} \right) \\ \left(Y_{PbW_1B} X_{PbW_1B} \right) & \left(X_{PbW_1B}^2 + Z_{PbW_1B}^2 \right) & \left(Y_{PbW_1B} Z_{PbW_1B} \right) \\ \left(Z_{PbW_1B} X_{PbW_1B} \right) & \left(Z_{PbW_1B} Y_{PbW_1B} \right) & \left(X_{PbW_1B}^2 + Y_{PbW_1B}^2 \right) \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Os momentos e produtos de inércia em relação ao sistema paralelo ao corpo da asa direita Pb_{W_1} são mostrados na equação (3.25):

$$\begin{aligned}
I_{XX_{W^1PbW^1}} &= I_{ZZ_{W^1w^1}} \sin^2(\phi_{E1}) + I_{XX_{W^1w^1}} \cos^2(\phi_{E1}) - I_{XZ_{W^1w^1}} \sin(2\phi_{E1}) \\
I_{XY_{W^1PbW^1}} &= I_{XY_{W^1w^1}} \cos(\phi_{E1}) + I_{YZ_{W^1w^1}} \sin(\phi_{E1}) \\
I_{XZ_{W^1PbW^1}} &= \left(I_{XX_{W^1w^1}} - I_{ZZ_{W^1w^1}} \right) \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} + I_{XZ_{W^1w^1}} (\cos(2\phi_{E1}) - 1) \\
I_{YX_{W^1PbW^1}} &= I_{XY_{W^1PbW^1}} \\
I_{YY_{W^1PbW^1}} &= I_{YY_{W^1w^1}} \\
I_{YZ_{W^1PbW^1}} &= I_{YZ_{W^1w^1}} \cos(\phi_{E1}) - I_{XY_{W^1w^1}} \sin(\phi_{E1}) \\
I_{ZX_{W^1PbW^1}} &= I_{XZ_{W^1PbW^1}} \\
I_{ZY_{W^1PbW^1}} &= I_{YZ_{W^1PbW^1}} \\
I_{ZZ_{W^1PbW^1}} &= I_{XX_{W^1w^1}} \sin^2(\phi_{E1}) + I_{ZZ_{W^1w^1}} \cos^2(\phi_{E1}) + I_{XZ_{W^1w^1}} \sin(2\phi_{E1})
\end{aligned} \tag{3.25}$$

▪ **Tensor de Inércia da Asa Esquerda W_2**

Analogamente ao rotor-coaxial R_1 , a equação (3.26) mostra o tensor de inércia da asa esquerda em relação ao sistema fixo ao corpo B .

$$\begin{aligned}
J_{W_2_B} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} I_{XX_{W_2PbW_2}} & I_{XY_{W_2PbW_2}} & I_{XZ_{W_2PbW_2}} \\ & I_{YY_{W_2PbW_2}} & I_{YZ_{W_2PbW_2}} \\ I_{ZX_{W_2PbW_2}} & I_{ZY_{W_2PbW_2}} & I_{ZZ_{W_2PbW_2}} \end{bmatrix} \\
&+ m_{W_2} \left[\begin{array}{ccc} \left(Y_{PbW_2_B}^2 + Z_{PbW_2_B}^2 \right) & \left(X_{PbW_2_B} Y_{PbW_2_B} \right) & \left(X_{PbW_2_B} Z_{PbW_2_B} \right) \\ \left(Y_{PbW_2_B} X_{PbW_2_B} \right) & \left(X_{PbW_2_B}^2 + Z_{PbW_2_B}^2 \right) & \left(Y_{PbW_2_B} Z_{PbW_2_B} \right) \\ \left(Z_{PbW_2_B} X_{PbW_2_B} \right) & \left(Z_{PbW_2_B} Y_{PbW_2_B} \right) & \left(X_{PbW_2_B}^2 + Y_{PbW_2_B}^2 \right) \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Os momentos e produtos de inércia em relação ao sistema paralelo ao corpo da asa esquerda Pb_{W_2} são mostrados na equação (3.27):

$$\begin{aligned}
I_{XX_{W^2PbW^2}} &= I_{ZZ_{W^2w^2}} \sin^2(\phi_{E2}) + I_{XX_{W^2w^2}} \cos^2(\phi_{E2}) - I_{XZ_{W^2w^2}} \sin(2\phi_{E2}) \\
I_{XY_{W^2PbW^2}} &= I_{XY_{W^2w^2}} \cos(\phi_{E2}) + I_{YZ_{W^2w^2}} \sin(\phi_{E2}) \\
I_{XZ_{W^2PbW^2}} &= \left(I_{XX_{W^2w^2}} - I_{ZZ_{W^2w^2}} \right) \frac{\sin(2\phi_{E2})}{2} + I_{XZ_{W^2w^2}} (\cos(2\phi_{E2}) - 1) \\
I_{YX_{W^2PbW^2}} &= I_{XY_{W^2PbW^2}} \\
I_{YY_{W^2PbW^2}} &= I_{YY_{W^2w^2}} \\
I_{YZ_{W^2PbW^2}} &= I_{YZ_{W^2w^2}} \cos(\phi_{E2}) - I_{XY_{W^2w^2}} \sin(\phi_{E2}) \\
I_{ZX_{W^2PbW^2}} &= I_{XZ_{W^2PbW^2}} \\
I_{ZY_{W^2PbW^2}} &= I_{YZ_{W^2PbW^2}} \\
I_{ZZ_{W^2PbW^2}} &= I_{XX_{W^2w^2}} \sin^2(\phi_{E2}) + I_{ZZ_{W^2w^2}} \cos^2(\phi_{E2}) + I_{XZ_{W^2w^2}} \sin(2\phi_{E2})
\end{aligned} \tag{3.27}$$

▪ Tensor de Inércia da Fuselagem F

Para a fuselagem o processo é mais direto já que por ser um componente/peça fixo e considerado rígido, seu tensor de inércia em relação ao sistema Pb_F é obtido diretamente da peça que o conforma, possível de ser obtido através do software CAD Solidworks. Portanto a equação (3.28) mostra o tensor de inércia da fuselagem em relação ao sistema fixo ao corpo B :

$$\begin{aligned}
J_{F_B} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} I_{XX_{FpbF}} & I_{XY_{FpbF}} & I_{XZ_{FpbF}} \\ & I_{YY_{FpbF}} & I_{YZ_{FpbF}} \\ I_{ZX_{FpbF}} & I_{ZY_{FpbF}} & I_{ZZ_{FpbF}} \end{bmatrix} \\
&+ m_F \left[\begin{array}{ccc} (Y_{PbF_B}^2 + Z_{PbF_B}^2) & (X_{PbF_B} Y_{PbF_B}) & (X_{PbF_B} Z_{PbF_B}) \\ (Y_{PbF_B} X_{PbF_B}) & (X_{PbF_B}^2 + Z_{PbF_B}^2) & (Y_{PbF_B} Z_{PbF_B}) \\ (Z_{PbF_B} X_{PbF_B}) & (Z_{PbF_B} Y_{PbW^2_B}) & (X_{PbF_B}^2 + Y_{PbF_B}^2) \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{3.28}$$

3.3.4 Derivada do Tensor de Inércia

Da equação (3.17), derivando a expressão do tensor de inércia da aeronave no tempo, obtém-se a equação (3.29). Observa-se que a derivada do tensor de inércia total da aeronave é igual

à derivada no tempo de cada um dos tensores de inércia dos componentes, com relação ao sistema fixo ao corpo B .

$$\dot{J}_T = \dot{J}_{R1_B} + \dot{J}_{R2_B} + \dot{J}_{R3_B} + \dot{J}_{W1_B} + \dot{J}_{W2_B} + \dot{J}_{F_B} \quad (3.29)$$

Portanto, partindo da equação do tensor de inércia de um determinado componente em relação a B , observa-se que a derivada do tensor de inércia será descrita pela equação (3.30) (com $i = R_1, R_2, R_3, W_1, W_2, F$):

$$\dot{J}_{i_B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \odot \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \dot{I}_{XX_{ipbi}} & \dot{I}_{XY_{ipbi}} & \dot{I}_{XZ_{ipbi}} \\ \dot{I}_{YY_{ipbi}} & \dot{I}_{YZ_{ipbi}} \\ \dot{I}_{ZX_{ipbi}} & \dot{I}_{ZY_{ipbi}} & \dot{I}_{ZZ_{ipbi}} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} d(Y_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2)/dt & d(X_{Pbi_B} Y_{Pbi_B})/dt & d(X_{Pbi_B} Z_{Pbi_B})/dt \\ d(Y_{Pbi_B} X_{Pbi_B})/dt & d(X_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2)/dt & d(Y_{Pbi_B} Z_{Pbi_B})/dt \\ d(Z_{Pbi_B} X_{Pbi_B})/dt & d(Z_{Pbi_B} Y_{Pbi_B})/dt & d(X_{Pbi_B}^2 + Y_{Pbi_B}^2)/dt \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (3.30)$$

Da equação (3.30) observamos que para um determinado componente, é necessário determinar a expressão da derivada de cada um dos produtos e momentos de inércia em relação a um sistema paralelo ao corpo Pb , assim como também a derivada de cada um dos termos dentro da matriz de distâncias quadráticas que multiplica a massa do componente.

Por causa da semelhança nas equações de momentos e produtos de inércia das asas W_1, W_2 e dos rotores-coaxiais laterais R_1, R_2 , o procedimento para encontrar as expressões das derivadas dos momentos e produtos de inércia destes componentes é o mesmo. Para o rotor traseiro R_3 e para a fuselagem F , o procedimento é um pouco diferente.

Aqui serão apresentados apenas os resultados para as derivadas dos tensores de inércia dos componentes da aeronave. A formulação detalhada para chegar nos resultados do equacionamento das derivadas dos tensores de inércia é apresentada na seção iii do apêndice A1.

- **Derivada dos Momentos e Produtos de Inércia das Asas e dos Rotores-coaxiais Laterais: W_1, W_2, R_1, R_2 , em relação aos sistemas paralelos ao corpo $Pb_{(W_i/R_i)}$**

A equação (3.31) mostra a derivada dos momentos e produtos de inércia das asas W_1, W_2 ou dos rotores-coaxiais laterais R_1, R_2 , em relação ao respectivo sistema paralelo ao corpo $Pb_{(W_i/R_i)}$.

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_{XX_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} &= \dot{\phi}_{Ei} \left[\left(I_{ZZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} - I_{XX_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \right) \sin(2\phi_{Ei}) - 2I_{XZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \cos(2\phi_{Ei}) \right] \\
 \dot{I}_{XY_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} &= \dot{\phi}_{Ei} \left[I_{YZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \cos(\phi_{Ei}) - I_{XY_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \sin(\phi_{Ei}) \right] \\
 \dot{I}_{XZ_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} &= \dot{\phi}_{Ei} \left[\left(I_{XX_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} - I_{ZZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \right) \cos(2\phi_{Ei}) - 2I_{XZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \sin(2\phi_{Ei}) \right] \\
 \dot{I}_{YX_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} &= \dot{I}_{XY_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} \\
 \dot{I}_{YY_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} &= 0 \\
 \dot{I}_{YZ_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} &= -\dot{\phi}_{Ei} \left[I_{XY_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \cos(\phi_{Ei}) + I_{YZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \sin(\phi_{Ei}) \right] \\
 \dot{I}_{ZX_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} &= \dot{I}_{XZ_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} \\
 \dot{I}_{ZY_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} &= \dot{I}_{YZ_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} \\
 \dot{I}_{ZZ_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} &= \dot{\phi}_{Ei} \left[\left(I_{XX_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} - I_{ZZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \right) \sin(2\phi_{Ei}) + 2I_{XZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \cos(2\phi_{Ei}) \right]
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Portanto, da equação (3.31), observa-se que a derivada dos momentos e produtos de inércia de um determinado rotor-coaxial R_i ou asa W_i , em relação ao respectivo sistema paralelo ao corpo Pb , se torna uma função do respectivo ângulo de inclinação ϕ_{Ei} e da derivada desse ângulo de inclinação $\dot{\phi}_{Ei}$.

- **Derivada dos Momentos e Produtos de Inércia do Rotor-coaxial Traseiro: R_3 , em relação aos sistemas paralelos ao corpo Pb_{R_3}**

A equação (3.32) mostra a derivada dos momentos e produtos do rotor-coaxial traseiro R_3 , em relação ao sistema paralelo ao corpo Pb_{R_3} .

$$\begin{aligned}
\dot{I}_{XX_{R^3PbR^3}} &= 0 \\
\dot{I}_{XY_{R^3PbR^3}} &= -\dot{\phi}_{E3} \left[I_{XY_{R^3r^3}} \sin(\phi_{E3}) + I_{XZ_{R^3r^3}} \cos(\phi_{E3}) \right] \\
\dot{I}_{XZ_{R^3PbR^3}} &= \dot{\phi}_{E3} \left[I_{XY_{R^3r^3}} \cos(\phi_{E3}) - I_{XZ_{R^3r^3}} \sin(\phi_{E3}) \right] \\
\dot{I}_{YX_{R^3PbR^3}} &= \dot{I}_{XY_{R^3PbR^3}} \\
\dot{I}_{YY_{R^3PbR^3}} &= \dot{\phi}_{E3} \left[(I_{ZZ_{R^3r^3}} - I_{YY_{R^3r^3}}) \sin(2\phi_{E3}) + 2I_{YZ_{R^3r^3}} \cos(2\phi_{E3}) \right] \dot{\phi}_{E3} \\
\dot{I}_{YZ_{R^3PbR^3}} &= \dot{\phi}_{E3} \left[(I_{ZZ_{R^3r^3}} - I_{YY_{R^3r^3}}) \cos(2\phi_{E3}) - 2I_{YZ_{R^3r^3}} \sin(2\phi_{E3}) \right] \\
\dot{I}_{ZX_{R^3PbR^3}} &= \dot{I}_{XZ_{R^3PbR^3}} \\
\dot{I}_{ZY_{R^3PbR^3}} &= \dot{I}_{YZ_{R^3PbR^3}} \\
\dot{I}_{ZZ_{R^3PbR^3}} &= \dot{\phi}_{E3} \left[(I_{XX_{R^3r^3}} - I_{ZZ_{R^3r^3}}) \sin(2\phi_{E3}) - 2I_{YZ_{R^3r^3}} \cos(2\phi_{E3}) \right]
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Portanto, da equação (3.32), observa-se que a derivada dos momentos e produtos de inércia do rotor-coaxial R_3 , em relação ao respectivo sistema paralelo ao corpo Pb , se torna uma função do ângulo de inclinação ϕ_{E3} e da derivada desse ângulo de inclinação $\dot{\phi}_{E3}$.

- **Derivada dos Momentos e Produtos de Inércia da Fuselagem: F**

Como comentado anteriormente, já que a fuselagem não muda de formato e é considerada rígida, seus produtos e momentos de inércia em relação ao seu sistema Pb_F são constantes. Portanto, suas derivadas são nulas na equação (3.33):

$$\dot{I}_{XX_F} = \dot{I}_{XY_F} = \dot{I}_{XZ_F} = \dot{I}_{YX_F} = \dot{I}_{YY_F} = \dot{I}_{YZ_F} = \dot{I}_{ZX_F} = \dot{I}_{ZY_F} = \dot{I}_{ZZ_F} = 0 \tag{3.33}$$

- **Derivada dos Termos da Matriz de Distâncias Quadráticas:**

Agora, como observado na relação da derivada no tempo do tensor de inércia de um determinado componente em (3.30), é necessário encontrar a derivada de cada um dos termos

dentro da matriz de distâncias quadráticas que multiplica a massa do componente, apresentadas na equação (3.31).

$$m_i \begin{bmatrix} d(Y_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2)/dt & d(X_{Pbi_B} Y_{Pbi_B})/dt & d(X_{Pbi_B} Z_{Pbi_B})/dt \\ d(Y_{Pbi_B} X_{Pbi_B})/dt & d(X_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2)/dt & d(Y_{Pbi_B} Z_{Pbi_B})/dt \\ d(Z_{Pbi_B} X_{Pbi_B})/dt & d(Z_{Pbi_B} Y_{Pbi_B})/dt & d(X_{Pbi_B}^2 + Y_{Pbi_B}^2)/dt \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Portanto, a equação (3.32) mostra as derivadas de cada um dos termos da matriz de distâncias na equação (3.31).

$$\begin{aligned} d(Y_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2)/dt &= 2Y_{Pbi_B} \dot{Y}_{Pbi_B} + 2Z_{Pbi_B} \dot{Z}_{Pbi_B} \\ d(X_{Pbi_B} Y_{Pbi_B})/dt &= \dot{X}_{Pbi_B} Y_{Pbi_B} + X_{Pbi_B} \dot{Y}_{Pbi_B} \\ d(X_{Pbi_B} Z_{Pbi_B})/dt &= \dot{X}_{Pbi_B} Z_{Pbi_B} + X_{Pbi_B} \dot{Z}_{Pbi_B} \\ d(Y_{Pbi_B} X_{Pbi_B})/dt &= d(X_{Pbi_B} Y_{Pbi_B})/dt \\ d(X_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2)/dt &= 2X_{Pbi_B} \dot{X}_{Pbi_B} + 2Z_{Pbi_B} \dot{Z}_{Pbi_B} \\ d(Y_{Pbi_B} Z_{Pbi_B})/dt &= \dot{Y}_{Pbi_B} Z_{Pbi_B} + Y_{Pbi_B} \dot{Z}_{Pbi_B} \\ d(Z_{Pbi_B} X_{Pbi_B})/dt &= d(X_{Pbi_B} Z_{Pbi_B})/dt \\ d(Z_{Pbi_B} Y_{Pbi_B})/dt &= d(Y_{Pbi_B} Z_{Pbi_B})/dt \\ d(X_{Pbi_B}^2 + Y_{Pbi_B}^2)/dt &= 2X_{Pbi_B} \dot{X}_{Pbi_B} + 2Y_{Pbi_B} \dot{Y}_{Pbi_B} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Consequentemente, da equação (3.32), observa-se que a derivada de cada um dos termos dentro da matriz de distâncias quadráticas é função das coordenadas $(X_{Pbi_B}, Y_{Pbi_B}, Z_{Pbi_B})$, encontradas através da equação (3.16), e de suas derivadas $(\dot{X}_{Pbi_B}, \dot{Y}_{Pbi_B}, \dot{Z}_{Pbi_B})$. Logo, derivando a equação (3.16) tem-se a equação (3.33).

$$\begin{bmatrix} \dot{X}^{Pbi_B} & | & \dot{X}^{Pbi_A} & | & \dot{X}^{B_A} \\ \dot{Y}^{Pbi_B} & | & \dot{Y}^{Pbi_A} & | & \dot{Y}^{B_A} \\ \dot{Z}^{Pbi_B} & | & \dot{Z}^{Pbi_A} & | & \dot{Z}^{B_A} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Deste modo, se torna necessário encontrar as expressões para as derivadas $(\dot{X}^{Pbi_A}, \dot{Y}^{Pbi_A}, \dot{Z}^{Pbi_A})$ de um determinado componente e das derivadas $(\dot{X}^{B_A}, \dot{Y}^{B_A}, \dot{Z}^{B_A})$ do sistema fixo ao C.G. da aeronave B . Portanto, derivando a equação (3.15), obtém-se a equação (3.34)

$$\begin{bmatrix} \dot{X}^{B_A} & \dot{Y}^{B_A} & \dot{Z}^{B_A} \end{bmatrix} = \frac{1}{m_T} \begin{bmatrix} \dot{X}^{PbR1_A} & \dot{X}^{PbR2_A} & \dot{X}^{PbR3_A} & \dot{X}^{PbW1_A} & \dot{X}^{PbW2_A} & \dot{X}^{PbF_A} & \left[\begin{matrix} m_{R_1} \\ \dots R_2 \\ \dots R_3 \\ \dots V_1 \\ m_{W_2} \\ m_F \end{matrix} \right] \\ \dot{Y}^{PbR1_A} & \dot{Y}^{PbR2_A} & \dot{Y}^{PbR3_A} & \dot{Y}^{PbW1_A} & \dot{Y}^{PbW2_A} & \dot{Y}^{PbF_A} \\ \dot{Z}^{PbR1_A} & \dot{Z}^{PbR2_A} & \dot{Z}^{PbR3_A} & \dot{Z}^{PbW1_A} & \dot{Z}^{PbW2_A} & \dot{Z}^{PbF_A} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Novamente, se faz necessário determinar a expressão das derivadas $(\dot{X}^{Pbi_A}, \dot{Y}^{Pbi_A}, \dot{Z}^{Pbi_A})$ para cada componente. Portanto, aplicando a equação (3.33) para o rotor-coaxial direito R_1 , obtém-se a equação (3.35):

$$\begin{bmatrix} \dot{X}^{PbR1_B} & | & | & -(dXZ_{Pb_{\dots}C_1}) \sin(\phi_{E1}) \dot{\phi}_{E1} & | & \dot{X}^{B_A} \\ \dot{Y}^{PbR1_B} & | & | & 0 & | & \dot{Y}^{B_A} \\ \dot{Z}^{PbR1_B} & | & | & -(dXZ_{Pb_{R_1}C_1}) \cos(\phi_{E1}) \dot{\phi}_{E1} & | & \dot{Z}^{B_A} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Aplicando a equação (3.33) para o rotor-coaxial esquerdo R_2 , obtém-se a equação (3.36):

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{PbR2_B} \\ \dot{Y}_{PbR2_B} \\ \dot{Z}_{PbR2_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(dXZ_{PbR2_C}) \sin(\phi_{E2}) \dot{\phi}_{E2} \\ 0 \\ -(dXZ_{PbR2_C}) \cos(\phi_{E2}) \dot{\phi}_{E2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{X}_{B_A} \\ \dot{Y}_{B_A} \\ \dot{Z}_{B_A} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Aplicando a equação (3.33) para o rotor-coaxial traseiro R_3 , obtém-se a equação (3.37):

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{PbR3_B} \\ \dot{Y}_{PbR3_B} \\ \dot{Z}_{PbR3_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(dYZ_{PbR3_C}) \sin(\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} \\ (dYZ_{PbR3_C}) \cos(\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{X}_{B_A} \\ \dot{Y}_{B_A} \\ \dot{Z}_{B_A} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Aplicando a equação (3.33) para a asa direita W_1 , obtém-se a equação (3.38):

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{PbW1_B} \\ \dot{Y}_{PbW1_B} \\ \dot{Z}_{PbW1_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(dXZ_{PbW1_C}) \sin(\phi_{E1}) \dot{\phi}_{E1} \\ 0 \\ -(dXZ_{PbW1_C}) \cos(\phi_{E1}) \dot{\phi}_{E1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{X}_{B_A} \\ \dot{Y}_{B_A} \\ \dot{Z}_{B_A} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Aplicando a equação (3.33) para a asa esquerda W_2 , obtém-se a equação (3.39):

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{PbW2_B} \\ \dot{Y}_{PbW2_B} \\ \dot{Z}_{PbW2_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(dXZ_{PbW2_C}) \sin(\phi_{E2}) \dot{\phi}_{E2} \\ 0 \\ -(dXZ_{PbW2_C}) \cos(\phi_{E2}) \dot{\phi}_{E2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{X}_{B_A} \\ \dot{Y}_{B_A} \\ \dot{Z}_{B_A} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Finalmente, as derivadas das coordenadas $\left(\dot{X}_{PbF_A}, \dot{Y}_{PbF_A}, \dot{Z}_{PbF_A} \right)$ da fuselagem são nulas já que as coordenadas $\left(X_{PbF_A}, Y_{PbF_A}, Z_{PbF_A} \right)$ são constantes em relação ao sistema fixo ao nariz A . Portanto, aplicando a equação (3.33) para a fuselagem, obtém-se a equação (3.40).

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{PbF_B} \\ \dot{Y}_{PbF_B} \\ \dot{Z}_{PbF_B} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dot{X}_{B_A} \\ \dot{Y}_{B_A} \\ \dot{Z}_{B_A} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

3.3.5 Forças Atuantes no Sistema

Observando a equação (3.4), é necessário definir quais serão as forças que atuam na aeronave e suas componentes $\left[F_{X_B}, F_{Y_B}, F_{Z_B} \right]^T$. Para isto, é considerado que sobre o veículo agem as forças: gravitacional F_{G_B} , arrasto aerodinâmico da fuselagem F_{DF_B} , empuxo dos rotores-coaxiais F_{T_B} e forças aerodinâmicas das asas F_{A_B} , todas em relação ao sistema fixo ao C.G. da aeronave B . A equação (3.108) apresenta cada uma destas forças.

$$\sum F_B = F_{G_B} + F_{DF_B} + F_{T_B} + F_{A_B} \quad (3.41)$$

- **Força Gravitacional:** F_{G_B}

Originalmente definida no sistema inercial I , a força gravitacional é transferida para o sistema fixo ao corpo B , através de uma matriz de rotação em função dos ângulos de Euler: ϕ (rolagem), θ (arfagem) e ψ (guinada). Os ângulos de Euler definem a orientação (atitude) da aeronave no espaço, com relação ao sistema inercial I . A equação (3.42) apresenta a matriz de transformação de um vetor definido no sistema I e transferido para o sistema B .

$$R_{XYZ}|_I^B = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\psi c\theta & -s\theta \\ c\psi s\phi s\theta - c\phi s\psi & s\theta s\psi s\phi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\psi c\phi s\theta + s\phi s\psi & c\phi s\psi s\theta - s\phi c\psi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Portanto, a força gravitacional é definida no sistema fixo ao corpo através da equação (3.43). Com g como a aceleração da gravidade.

$$F_{G_B} = R_{XYZ}|_I^B \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_T g \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

- **Força de Arrasto da Fuselagem:** F_{DF_B}

Considerada definida já no sistema B , a força de arrasto aerodinâmico produzida pela fuselagem é dada pela equação (3.44). Onde ρ representa a densidade do ar, A_{Fi} representa a área projetada da fuselagem com relação a cada um dos eixos do sistema B (X_B, Y_B, Z_B) e C_{DFi} o coeficiente de arrasto correspondente a cada área projetada. Observa-se que a força de arrasto é considerada como função do quadrado dos componentes da velocidade linear da aeronave com relação ao sistema fixo ao corpo B .

$$F_{DF_B} = -\frac{1}{2}\rho \left[A_{FX} C_{DFX} U^2 \quad A_{FY} C_{DFY} V^2 \quad A_{FZ} C_{DFZ} W^2 \right]^T \quad (3.44)$$

- **Força de Tração dos Rotores-Coaxiais:** F_{T_B}

Um rotor-coaxial é composto por dois rotores que giram em sentidos contrários, sobre um mesmo eixo de rotação, contudo, gerando força de tração em um único sentido. Portanto, sobre o eixo de rotação, existirá uma força de tração composta pela soma das forças de tração de cada uma das hélices dos rotores que compõem o rotor-coaxial, como observado na equação (3.45). Aqui, o subscrito hu refere-se à hélice superior e hl à hélice inferior.

$$T_{Ri} = T_{hu} + T_{hl} \quad (3.45)$$

Para determinar o valor da força de tração que uma determinada hélice gera, de acordo com GUDMUNDSSON (2014), a força de tração pode ser concebida através da equação (3.46). Onde Ct representa o coeficiente de tração da hélice, Ω representa a velocidade de rotação da hélice e D seu diâmetro.

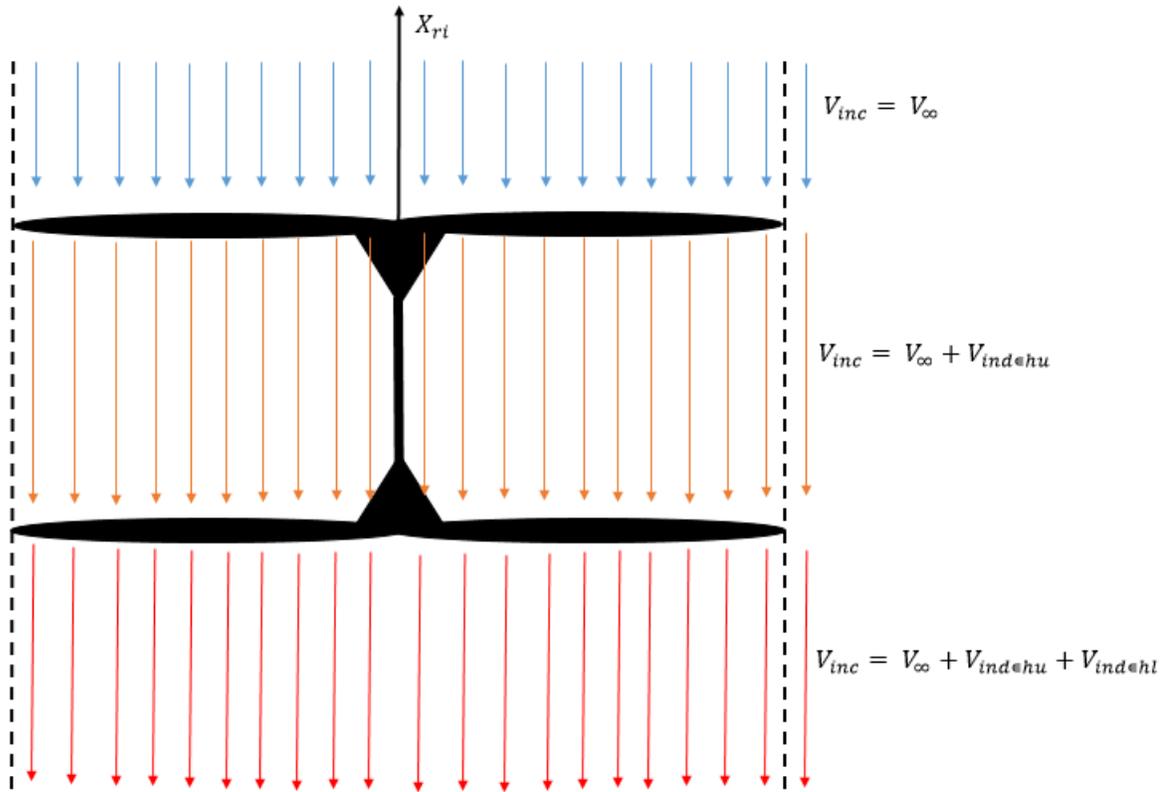
$$T_h = \rho Ct \Omega^2 D^4 \quad (3.46)$$

Encontrar o valor de Ct pode ser uma tarefa desafiadora, porém, de acordo com GUDMUNDSSON (2014), se o modelo da hélice a ser usada for conhecido, oferecido geralmente por um fabricante, então é provável que este fabricante forneça os dados da hélice para diferentes condições de velocidade de rotação Ω , velocidade de vento incidente V_{inc} e razão de avanço J_{avn} . De fato, o termo “razão de avanço” é apresentado na equação (3.47), (GUDMUNDSSON, 2014).

$$J_{avn} = \frac{V_{inc}}{\Omega D} \quad (3.47)$$

A Figura 3.7 mostra o conceito do vento incidente V_{inc} sobre as hélices superior e inferior de um rotor-coaxial lateral (R_1, R_2). O fluxo de ar é considerado limitado ao “tubo/cilindro” de ar gerado pela hélice superior e este não possui compressão radial (MAQSOOD et al. 2010). Na Figura 3.7 é possível observar que a velocidade do vento incidente para a hélice superior V_{inc} é a velocidade do vento relativo V_∞ que age ortogonalmente ao plano de giro da hélice e paralelo ao eixo de rotação X_{ri} . Uma vez que o vento incidente passa pelo “disco de giro” formado pela hélice superior, este é acelerado de uma velocidade “induzida” $V_{ind \in hu}$, gerando um vento com velocidade resultante $V_\infty + V_{ind \in hu}$ na região entre as hélices. Da mesma forma, esta velocidade acelerada pela hélice superior age como o vento incidente sobre a hélice inferior e, após passar por ela, o vento é novamente acelerado gerando um vento com velocidade resultante de $V_\infty + V_{ind \in hu} + V_{ind \in hl}$.

Figura 3.7 – Vento incidente sobre as hélices de um rotor-coaxial lateral.



Fonte: Autoria própria

Portanto, tomando como base a equação (3.47), a razão de avanço para a hélice superior de um rotor-coaxial é dada pela equação (3.48):

$$J_{avn\in hu} = \frac{V_{inc\in hu}}{\Omega_{hu} D} = \frac{V_{\infty}}{\Omega_{hu} D} \quad (3.48)$$

E para a corresponde hélice inferior, é dada pela equação (3.49):

$$J_{avn\in hl} = \frac{V_{inc\in hl}}{\Omega_{hl} D} = \frac{V_{ind\in hu} + V_{\infty}}{\Omega_{hl} D} \quad (3.49)$$

Para determinar o valor da velocidade induzida por uma determinada hélice, a teoria do *Disco-Atuador* é considerada em VAN KUIK (2020). Através dela, considera-se que a velocidade induzida $V_{ind\in hi}$ da hélice é dada por (3.50).

$$V_{ind\in hi} = \frac{-V_{inc\in hi} + \sqrt{V_{inc\in hi}^2 + \frac{2T_{hi}}{\rho A_D}}}{2} \quad (3.50)$$

Observa-se que a velocidade induzida pela hélice é uma função do vento incidente $V_{inc\in hi}$, da tração T_{hi} gerada pela hélice e da área circular do disco A_D , gerada pela rotação da hélice.

Portanto, para solucionar as equações (3.47) até (3.50) resta saber o valor da velocidade do vento relativo V_∞ agindo sobre o determinado rotor-coaxial R_i . Esta variável de velocidade será função do vetor velocidade relativa do C.G. do rotor-coaxial (sistema Pb) e deverá ser transferida para o respectivo sistema r_i (fixo ao rotor-coaxial) para coincidir com o eixo de rotação das hélices do rotor, veja a Figura 3.7.

A seguir serão apresentados os resultados para as equações que definem as velocidades incidentes sobre os três rotores-coaxiais. A formulação detalhada para este procedimento é apresentada na seção iv do apêndice A1.

▪ Velocidade Incidente Sobre o Rotor-Coaxial Direito R_1

A velocidade do vento relativo observada sobre a hélice superior o rotor-coaxial direito R_1 é apresentada na equação (3.51). Esta equação representa a translação das componentes de velocidade relativa do rotor-coaxial direito (definidas no sistema paralelo ao corpo Pb_{R1}), para o sistema fixo ao rotor-coaxial r_1 , sobre o qual giram as hélices do rotor, de acordo com a Figura 3.6.

Hélice superior de R_1 :

$$V_{incR1\in hu} = [Rot_Y(\phi_{E1})]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{PbR1B} \\ Y_{PbR1B} \\ Z_{PbR1B} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{E1}(dX_{r1hu}) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Nesta última equação o termo $dX_{r_1}hu$ representa a distância entre o C.G. do rotor-coaxial direito e a hélice superior, observada desde o sistema r_1 . A multiplicação $\dot{\phi}_{E1}(dX_{r_1}hu)$ representa a velocidade que a hélice superior “observará” devido ao giro do rotor-coaxial.

Devido à convecção adotada da Teoria do Disco Atuador, apenas a componente X da equação (3.51) é usada. Esta é apresentada na equação (3.52).

$$\begin{aligned} V_{incR1\in hu} &= V_{X_{r_1}hu} \\ &= (U + QZ_{PbR1_B} - RY_{PbR1_B})\cos(\phi_{E1}) - (W + PY_{PbR1_B} - QX_{PbR1_B})\sin(\phi_{E1}) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Hélice Inferior: Para a hélice inferior do rotor-coaxial direito, o procedimento é análogo, porém, é acrescentado o termo da velocidade induzida pelo rotor superior, que age paralelo ao eixo de rotação da hélice X_{r_1} , gerando a equação (3.53):

$$V_{incR1\in hl} = \left\{ \begin{aligned} & \left[Rot_y(\phi_{E1}) \right]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{PbR1_B} \\ Y_{PbR1_B} \\ Z_{PbR1_B} \end{bmatrix} \right\} \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{E1}(dX_{r_1}hl) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{ind\in hu} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

E, novamente, considerando para o modelo apenas a componente paralela ao eixo de rotação X_{r_1} , tem-se a equação (3.54):

$$\begin{aligned} V_{incR1\in hl} &= V_{X_{r_1}hl} \\ &= (U + QZ_{PbR1_B} - RY_{PbR1_B})\cos(\phi_{E1}) - (W + PY_{PbR1_B} - QX_{PbR1_B})\sin(\phi_{E1}) + V_{ind\in hu} \end{aligned} \quad (3.54)$$

- **Velocidade Incidente Sobre o Rotor-Coaxial Esquerdo R_2**

Analogamente ao rotor-coaxial direito, a velocidade do vento relativo observada sobre a hélice superior o rotor-coaxial esquerdo R_2 é apresentada na equação (3.55).

Hélice Superior:

$$V_{incR2\in hu} = [Rot_Y(\phi_{E2})]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{PbR2_B} \\ Y_{PbR2_B} \\ Z_{PbR2_B} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{E2} (dX_{r2} hu) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Considerando para o modelo apenas a componente paralela ao eixo de rotação X_{r2} , obtém-se a equação (3.56):

$$\begin{aligned} V_{incR2\in hu} &= V_{X_{r2} hu} \\ &= (U + QZ_{PbR2_B} - RY_{PbR2_B}) \cos(\phi_{E2}) - (W + PY_{PbR2_B} - QX_{PbR2_B}) \sin(\phi_{E2}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Hélice Inferior: A velocidade do vento incidente sobre a hélice inferior será dada pela equação (3.57):

$$V_{incR2\in hl} = \left\{ \begin{array}{l} [Rot_Y(\phi_{E2})]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{PbR2_B} \\ Y_{PbR2_B} \\ Z_{PbR2_B} \end{bmatrix} \right\} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{E2} (dX_{r2} hl) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{ind\in hu} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (3.57)$$

E, novamente, considerando para o modelo apenas a componente paralela ao eixo de rotação X_{r2} , obtém-se a equação (3.58):

$$\begin{aligned} V_{incR2\in hl} &= V_{X_{r2} hl} \\ V_{incR2\in hl} &= (U + QZ_{PbR2_B} - RY_{PbR2_B}) \cos(\phi_{E2}) - (W + PY_{PbR2_B} - QX_{PbR2_B}) \sin(\phi_{E2}) + V_{ind\in hu} \end{aligned} \quad (3.58)$$

▪ **Rotor-Coaxial Traseiro R_3**

A velocidade do vento relativo para o rotor-coaxial traseiro tem um procedimento análogo, com a diferença de que se deve considerar para ele uma matriz de rotação em torno do eixo X , ao invés do eixo Y como é feito para os rotores laterais (Figura 3.6). Com isto, A velocidade do vento incidente sobre a hélice superior será dada pela equação (3.59).

Hélice superior:

$$V_{incR3\in hu} = [Rot_X(\phi_{E3})]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{PbR3_B} \\ Y_{PbR3_B} \\ Z_{PbR3_B} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{E3}(dY_{r3}hu) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Considerando para o modelo apenas a componente paralela ao eixo de rotação Y_{r3} , obtém-se a equação (3.60):

$$\begin{aligned} V_{incR3\in hu} &= Vy_{r3hu} \\ &= (V + RX_{PbR3_B} - PZ_{PbR3_B}) \cos(\phi_{E3}) + (W + PY_{PbR3_B} - QX_{PbR3_B}) \sin(\phi_{E3}) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Hélice Inferior: A velocidade do vento incidente sobre a hélice inferior será dada na equação (3.61), acrescentando o termo de velocidade induzida pela hélice superior, paralelo ao eixo de rotação Y_{r3} .

$$V_{incR3\in hl} = \left\{ \begin{array}{l} [Rot_X(\phi_{E3})]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{PbR3_B} \\ Y_{PbR3_B} \\ Z_{PbR3_B} \end{bmatrix} \right\} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{E3}(dY_{r3}hl) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ V_{ind\in hu} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (3.61)$$

E, novamente, considerando para o modelo apenas a componente paralela ao eixo de rotação Y_{r3} , obtém-se a equação (3.62):

$$\begin{aligned}
V_{incR3\in hl} &= Vy_{r3hl} \\
&= \left(V + RX_{PbR3_B} - PZ_{PbR3_B} \right) \cos(\phi_{E3}) + \left(W + PY_{PbR3_B} - QX_{PbR3_B} \right) \sin(\phi_{E3}) + V_{ind\in hu}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

De forma resumida, então, para os três conjuntos de rotores-coaxiais, as expressões das velocidades incidentes sobre cada uma das suas hélices são apresentadas na equação (3.63):

$$\begin{aligned}
V_{incR1\in hu} &= \left(U + QZ_{PbR1_B} - RY_{PbR1_B} \right) \cos(\phi_{E1}) - \left(W + PY_{PbR1_B} - QX_{PbR1_B} \right) \sin(\phi_{E1}) \\
V_{incR1\in hl} &= \left(U + QZ_{PbR1_B} - RY_{PbR1_B} \right) \cos(\phi_{E1}) - \left(W + PY_{PbR1_B} - QX_{PbR1_B} \right) \sin(\phi_{E1}) + V_{ind\in hu} \\
V_{incR2\in hu} &= \left(U + QZ_{PbR2_B} - RY_{PbR2_B} \right) \cos(\phi_{E2}) - \left(W + PY_{PbR2_B} - QX_{PbR2_B} \right) \sin(\phi_{E2}) \\
V_{incR2\in hl} &= \left(U + QZ_{PbR2_B} - RY_{PbR2_B} \right) \cos(\phi_{E2}) - \left(W + PY_{PbR2_B} - QX_{PbR2_B} \right) \sin(\phi_{E2}) + V_{ind\in hu} \\
V_{incR3\in hu} &= \left(V + RX_{PbR3_B} - PZ_{PbR3_B} \right) \cos(\phi_{E3}) + \left(W + PY_{PbR3_B} - QX_{PbR3_B} \right) \sin(\phi_{E3}) \\
V_{incR3\in hl} &= \left(V + RX_{PbR3_B} - PZ_{PbR3_B} \right) \cos(\phi_{E3}) + \left(W + PY_{PbR3_B} - QX_{PbR3_B} \right) \sin(\phi_{E3}) + V_{ind\in hu}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Portanto, agora tendo à disposição as velocidades incidentes do vento sobre cada uma das seis hélices no veículo, é possível determinar a razão de avanço J_{avn} para cada uma destas hélices. Através da equação (3.48) para uma hélice superior e através da equação (3.49) para uma hélice inferior. Com a razão de avanço a cada instante de tempo de uma determinada hélice, pode-se encontrar o coeficiente de tração Ct correspondente, como é apresentado a seguir.

O conjunto motor-hélice escolhido para cada um dos rotores que compõem um mesmo rotor-coaxial (dois mono rotores formam um rotor-coaxial), foi escolhido de acordo com a massa estimada total da aeronave, veja a Tabela 3.1 abaixo. Com uma estimativa de m_T igual a 4,5 kg, o motor *brushless* escolhido foi o SCORPION M-3011-760KV, junto com a hélice APC 10x3.8-SF, recomendada pelo fabricante do motor. Vale ressaltar que para esta escolha considera-se que a aeronave usará uma bateria LiPo de pelo menos quatro células 4S e que o veículo pode ser considerado um “hexacóptero” já que possui três rotores-coaxiais ou seis monorrotores. Como será visto no próximo capítulo, a bateria escolhida foi de fato uma bateria de seis células (6S) por possuir uma capacidade de carga maior para alimentar os componentes eletrônicos que serão considerados no sistema e porque o motor escolhido é capaz de suportar até baterias 6S, de acordo com as especificações fornecidas pelo fabricante.

Tabela 3.1 – Recomendação de hélices oferecida pelo fabricante do motor *brushless* escolhido.

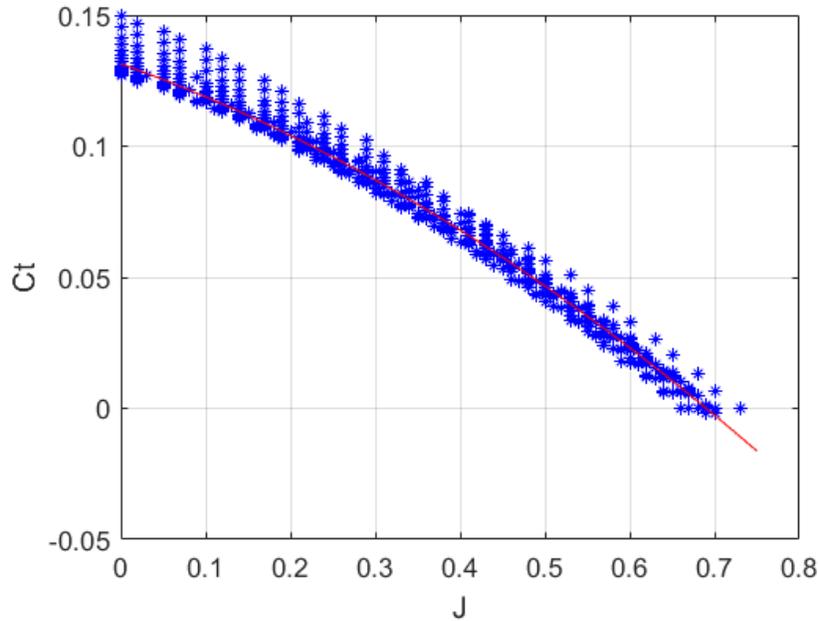
	M-3011-760KV				
		Recommend flight weight (g)	Recommend flight weight (g)	Recommend flight weight (g)	Recommend flight weight (g)
3S	APC 10*3.8	1275	1700	2550	3400
	APC 12*3.8	1875	2500	3750	5000
	TL2827 1155 Carbon Fibre Propeller	1200	1600	2400	3200
	TL2828 1255 Carbon Fibre Propeller	1500	2000	3000	4000
4S	APC 9*4.7	1387.5	1850	2775	3700
	APC 10*3.8	2137.5	2850	4275	5700
	TL2827 1155 Carbon Fibre Propeller	1987.5	2650	3975	5300

Fonte: SCORPION POWER SYSTEM LTD.

Disponível em: < https://www.scorpionsystem.com/catalog/multicopter/motor_5/m-30/m_3011_760/>. Acesso em 15 jun. 2020

Havendo escolhido uma mesma hélice para cada monorrotor (superiores e inferiores), o fabricante da hélice, a empresa *Advanced Precision Composites* (APC), fornece os dados de desempenho do modelo escolhido APC 10x3.8-SF. A Figura 3.8 apresenta a interpolação polinomial que relaciona o coeficiente de tração da hélice C_t em função da razão de avanço J . Em vermelho observa-se a curva interpolada para diferentes condições de velocidade de rotação da hélice entre 2000 e 20000 RPM. As curvas azuis-pontilhadas representam as curvas geradas pelos valores experimentais obtidos pelo fabricante

Figura 3.8 – Coeficiente de tração por razão de avanço.



Fonte: Autoria Própria

Através da interpolação polinomial gerada para o coeficiente de tração, a equação (3.64) permite encontrar a função usada para determinar o valor de Ct em função da razão de avanço.

$$Ct = (-0,1098)J_{avn}^2 + (-0,1146)J_{avn} + (0,1314) \quad (3.64)$$

Retornando então às equações (3.48) e (3.49), a força de tração total para cada um dos rotores-coaxiais, será observada paralela ao seu respectivo eixo de rotação das hélices, através da equação (3.65):

$$\begin{aligned} T_{R1} &= T_{R1hu} + T_{R1hl} = \left[\rho D^4 \left(Ct_{R1hu} \Omega_{R1hu}^2 + Ct_{R1hl} \Omega_{R1hl}^2 \right) \right]_{X_{r1}} \\ T_{R2} &= T_{R2hu} + T_{R2hl} = \left[\rho D^4 \left(Ct_{R2hu} \Omega_{R2hu}^2 + Ct_{R2hl} \Omega_{R2hl}^2 \right) \right]_{X_{r2}} \\ T_{R3} &= T_{R3hu} + T_{R3hl} = \left[\rho D^4 \left(Ct_{R3hu} \Omega_{R3hu}^2 + Ct_{R3hl} \Omega_{R3hl}^2 \right) \right]_{Y_{r3}} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Agora, para que cada uma destas forças de tração possa ser avaliada em relação ao centro de gravidade da aeronave, é necessário aplicar a respectiva matriz de rotação (em torno de X ou Y).

Desta forma o vetor força de tração de um rotor-coaxial passará do sistema r_i para o sistema Pb_{ri} e, conseqüentemente, para o sistema B .

Logo, a força de tração total será dada pela equação (3.66):

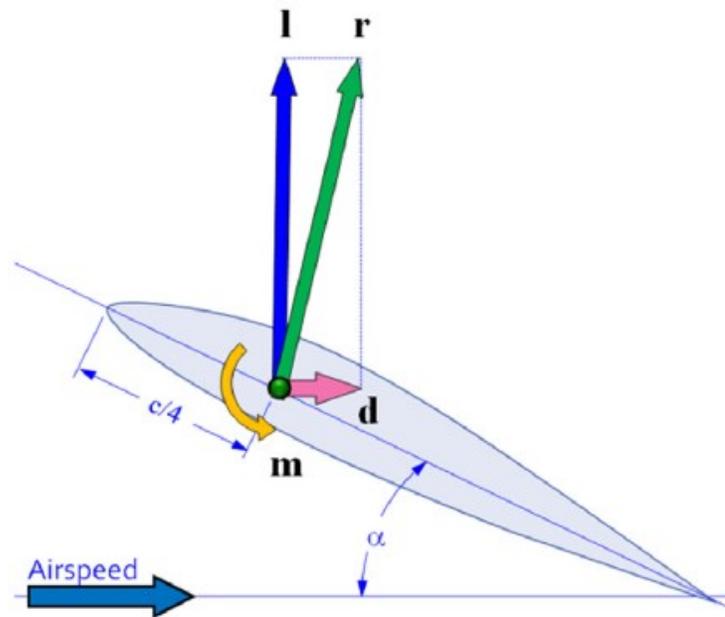
$$F_{T_B} = \underbrace{Rot_Y(\phi_{E1}) \begin{bmatrix} T_{R1} \\ 0 \\ \hat{} \end{bmatrix}}_{{}^1TR1_B} + \underbrace{Rot_Y(\phi_{E2}) \begin{bmatrix} T_{R2} \\ 0 \\ \hat{} \end{bmatrix}}_{{}^1TR2_B} + \underbrace{Rot_X(\phi_{E3}) \begin{bmatrix} 0 \\ T_{R3} \\ \hat{} \end{bmatrix}}_{{}^1TR3_B} \quad (3.66)$$

▪ **Forças Aerodinâmicas das Asas:** F_{A_B}

Cada uma das asas W_1, W_2 é considerada retangular, sem ângulo de torção, sem diedro, sem ailerons ou flaps e com um perfil aerodinâmico simétrico. Para o projeto, o perfil escolhido foi o NACA0012. Adicionalmente, cada asa é analisada como uma composição de duas seções diferentes, cada seção possui um ângulo de ataque correspondente.

Da Figura 3.9, observa-se que o ângulo de ataque se define como o ângulo α entre o vetor de velocidade relativa do vento e a corda-média do perfil aerodinâmico. Adicionalmente, dependendo do ângulo de ataque e do módulo do vetor de velocidade relativa do vento, estarão presentes forças de sustentação L , de arrasto D_{rg} e o momento aerodinâmico M , produzidas pela superfície aerodinâmica (asa), sobre o centro-aerodinâmico (AC), considerado localizado a 1/4 da corda-média-aerodinâmica, desde o bordo de ataque da asa. No caso da Figura 3.9, as forças e momento aerodinâmico são apresentadas em letras minúsculas (l, d, m) pois fazem referência à dinâmica em duas dimensões. Isto se deve ao fato de que o perfil aerodinâmico produz forças e momento aerodinâmico que precisam ser corrigidos quando a asa inteira em 3D é levada em consideração. Esta correção será feita posteriormente.

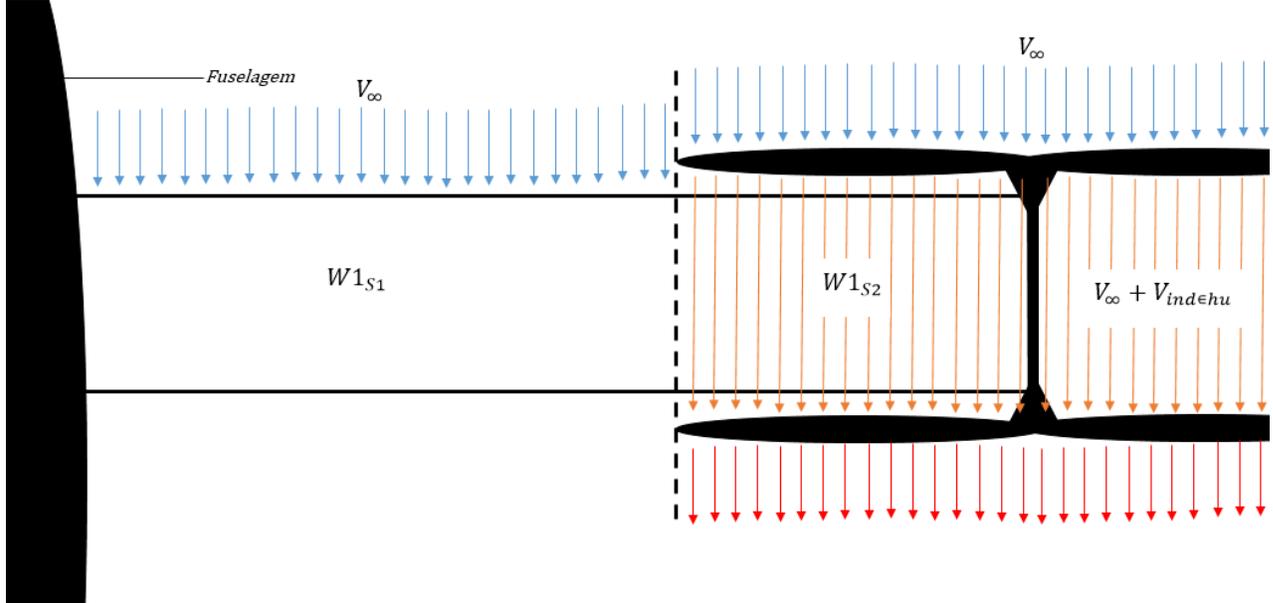
Figura 3.9 – Ângulo de ataque e dinâmica do perfil.



Fonte: GUDMUNDSSON (2014)

Em relação às seções de cada uma das asas, a Figura 3.10 apresenta a distribuição destas para a asa direita W_1 (aplicável analogamente à asa esquerda W_2). A seção 1 encontra-se próxima à raiz da asa (perto da fuselagem) e é considerada livre do efeito de vento induzido pela hélice superior do rotor-coaxial. A seção 2, perto da ponta da asa e conectada ao rotor-coaxial, é considerada afetada de fato pelo vento induzido pela hélice superior do rotor-coaxial. Ressalta-se que o ar atravessando a hélice superior é considerado limitado ao “tubo/cilindro” formado pelo giro da hélice superior, não sofre compressão radial e não altera o fluxo de ar na seção contigua (MAQSOOD et al. 2010).

Figura 3.10 – Distribuição das seções aerodinâmicas da asa direita.



Fonte: Autoria Própria

Como mencionado, cada seção de uma asa terá um ângulo de ataque “local” e este pode ser encontrado através da equação (3.67). Nela observa-se que o ângulo de ataque será função das componentes horizontal e vertical do vetor vento relativo agindo sobre a “j-ésima” seção da “i-ésima” asa.

$$\alpha_{W_{iSj}} = \arctan \left(\frac{V_{z_{W_{iSj}}}}{V_{x_{W_{iSj}}}} \right) \quad (3.67)$$

Portanto, como primeiro passo para determinar as forças aerodinâmicas das asas, é necessário encontrar a expressão que define a velocidade relativa do vento (e suas componentes horizontal e vertical) sobre uma determinada seção de uma asa.

Serão apresentados aqui apenas as equações finais que descrevem as velocidades incidentes sobre as seções das asas. A formulação completa para estas equações é encontrada na seção iv do Apêndice A1.

A equação (3.68) mostra a velocidade do vento incidente sobre a seção “1” de uma asa “i” (seção próxima à fuselagem/raiz da asa e sem interferência do vento induzido pela hélice superior

do rotor-coaxial), com as coordenadas $\begin{bmatrix} X_{AC_{wIS1B}} & Y_{AC_{wIS1B}} & Z_{AC_{wIS1B}} \end{bmatrix}^T$ descrevendo a localização do centro aerodinâmico da seção “1” em relação ao sistema fixo ao corpo B .

$$V_{inc_{wIS1}} = [Rot_y(\phi_{Ei})]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{AC_{wIS1B}} \\ Y_{AC_{wIS1B}} \\ Z_{AC_{wIS1B}} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{Ei} (dXZ_{AC_{wIS1C_i}}) \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

O termo em Z “ $\dot{\phi}_{Ei} (dXZ_{AC_{wIS1C_i}})$ ”, representa a velocidade que a seção “observará” devido ao giro do rotor-coaxial.

Como são necessárias apenas as componentes $V_{x_{wIS1}}$ e $V_{z_{wIS1}}$ para determinar o ângulo de ataque local da seção “1” de uma asa através da equação (3.67), então, da equação anterior é obtida a equação (3.69):

$$\begin{aligned} V_{x_{wIS1}} &= (U + QZ_{AC_{wIS1B}} - RY_{AC_{wIS1B}}) \cos(\phi_{Ei}) - (W + PY_{AC_{wIS1B}} - QX_{AC_{wIS1B}}) \sin(\phi_{Ei}) \\ V_{z_{wIS1}} &= \\ & (U + QZ_{AC_{wIS1B}} - RY_{AC_{wIS1B}}) \sin(\phi_{Ei}) + (W + PY_{AC_{wIS1B}} - QX_{AC_{wIS1B}}) \cos(\phi_{Ei}) + \dot{\phi}_{Ei} (dXZ_{AC_{wIS1C_i}}) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Para a seção “2”, próxima do rotor-coaxial e sofrendo a interferência de vento induzido pela hélice superior, o procedimento é similar, com a exceção de que deve ser acrescentado o termo de vento induzido pela hélice superior do rotor-coaxial à componente $V_{x_{wIS2}}$. A expressão para o vento induzido foi encontrada na equação (3.50). Desta forma, o vento incidente sobre a seção 2 da “i-ésima” asa é dada pela equação (3.70):

$$V_{incWIS2} = \left\{ \begin{array}{l} \left[Rot_Y(\phi_{Ei}) \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{ACWIS2B} \\ Y_{ACWIS2B} \\ Z_{ACWIS2B} \end{bmatrix} \end{array} \right\} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{Ei} (dXZ_{ACWIS2Ci}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{ind\in hu} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (3.70)$$

Como são necessárias apenas as componentes Vx_{WIS2} e Vz_{WIS2} para determinar o ângulo de ataque local da seção “2” de uma asa através da equação (3.57), então, da equação anterior é obtida a equação (3.71):

$$\begin{aligned} Vx_{WIS2} &= \left(U + QZ_{ACWIS2B} - RY_{ACWIS2B} \right) \cos(\phi_{Ei}) - \left(W + PY_{ACWIS2B} - QX_{ACWIS2B} \right) \sin(\phi_{Ei}) + V_{ind\in hu} \\ Vz_{WIS2} &= \\ & \left(U + QZ_{ACWIS2B} - RY_{ACWIS2B} \right) \sin(\phi_{Ei}) + \left(W + PY_{ACWIS2B} - QX_{ACWIS2B} \right) \cos(\phi_{Ei}) + \dot{\phi}_{Ei} (dXZ_{ACWIS2Ci}) \end{aligned} \quad (3.71)$$

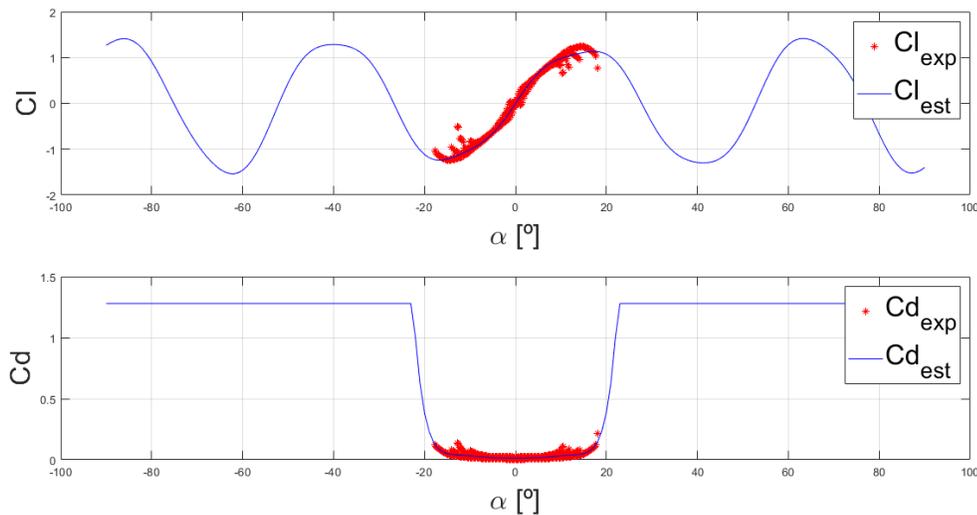
Portanto, agora que é possível determinar os ângulos de ataque locais de cada seção de uma asa através da equação (3.57), então podemos definir as forças aerodinâmicas. A equação (3.72) apresenta as forças de sustentação L_{WiSj} e arrasto D_{rgWiSj} para uma determinada seção de asa. Nesta equação, a variável A_{WiSj} representa a área retangular da seção da asa, C_L representa o coeficiente de sustentação 3D e C_D o coeficiente de arrasto 3D.

$$\begin{aligned} L_{WiSj} &= \frac{1}{2} \rho C_L A_{WiSj} \left(Vx_{WiSj}^2 + Vz_{WiSj}^2 \right) \\ D_{rgWiSj} &= \frac{1}{2} \rho C_D A_{WiSj} \left(Vx_{WiSj}^2 + Vz_{WiSj}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.72)$$

Os coeficientes de sustentação e arrasto 3D (C_L, C_D) são encontrados definindo primeiramente suas versões em 2D (C_l, C_d), graças aos dados do perfil aerodinâmico escolhido, o NACA0012. Os dados do perfil são de acesso livre e disponíveis pela *National Advisory Committee for Aeronautics airfoils* (NACA), mas os valores dos coeficientes em 2D (C_l, C_d) são considerados

apenas para valores de ângulos de ataque “baixos”, i.e., entre -10° e 20° . Porém, para este projeto, já que as asas giram, considera-se a possibilidade de ter ângulos de ataque sobre as seções de cada asa que possam ultrapassar estes limites. Devido a isto, de forma análoga a como foi feito com o coeficiente de tração C_t das hélices dos rotores-coaxiais, uma expressão interpolada a partir dos dados experimentais foi usada para definir os coeficientes (C_l, C_d) . A Figura 3.11 mostra a curva estimada-interpolada (em azul) e os dados experimentais (em vermelho) para os coeficientes aerodinâmicos 2D. O coeficiente de sustentação C_l foi aproximado como uma soma de senos, enquanto que o coeficiente de arrasto C_d foi aproximado através de um polinômio. Porém foi limitado propositalmente em um valor máximo de 1,28 para ângulos de ataque acima de $|20^\circ|$, já que a partir deste ponto é considerada a asa como uma chapa plana contra o vento. As equações (3.73) e (3.74) apresentam as relações polinomiais encontradas para descrever os coeficientes (C_l, C_d) , respectivamente.

Figure 3.11 – Coeficientes de sustentação C_l e de arrasto C_d 2D. Interpolação para ângulos de ataque elevados, a partir dos dados experimentais do perfil NACA0012.



Fonte: Autoria Própria

$$C_l = \begin{bmatrix} a1 \sin(b1\alpha + c1) + a2 \sin(b2\alpha + c2) + a3 \sin(b3\alpha + c3) \\ a4 \sin(b4\alpha + c4) + a5 \sin(b5\alpha + c5) + a2 \sin(b6\alpha + c6) \\ a7 \sin(b7\alpha + c7) + a8 \sin(b8\alpha + c8) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a1 &= 6.684; b1 = 0.1289; c1 = -0.08342; \\ a2 &= 0.1046; b2 = 0.07723; c2 = 0.08943; \\ a3 &= 5.437; b3 = 0.1305; c3 = 3.049; \\ a4 &= 0.2055; b4 = 0.1772; c4 = 2.916; \\ a5 &= 0.2986; b5 = 0.2698; c5 = 1.628; \\ a6 &= 0.2892; b6 = 0.2724; c6 = -1.643; \\ a7 &= -593.2; b7 = 0.3541; c7 = -0.1756; \\ a8 &= 593.3; b8 = 0.3541; c8 = -0.1756; \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$C_d = \begin{cases} |\alpha| \leq 20^\circ \rightarrow \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{l} p1\alpha^8 + p2\alpha^7 + p3\alpha^6 + p4\alpha^5 + p5\alpha^4 + p6\alpha^3 \\ + p7\alpha^2 + p8\alpha + p9 \end{array} \right] \\ p1 = 4.98e-11; p2 = 3.189e-12; p3 = -2.084e-08; \\ p4 = -2.245e-09; p5 = 2.442e-06; p6 = 4.384e-07; \\ p7 = 0.0001046; p8 = -1.399e-05; p9 = 0.01301; \end{bmatrix} \\ |\alpha| > 20^\circ \rightarrow 1.28 \end{cases} \quad (3.74)$$

Agora, para determinar os coeficientes aerodinâmicos de sustentação e arrasto 3D (C_L, C_D), primeiro é necessário corrigir o valor dos coeficientes de sustentação 2D. De acordo com GUDMUNDSSON (2014), considerando uma “asa ideal/ótima” (aproximadamente de formato elíptico), a derivada do coeficiente de sustentação 3D pelo ângulo de ataque $\partial C_L / \partial \alpha = C_{L_\alpha}$ pode ser aproximada através da seguinte relação em (3.75):

$$C_{L_\alpha} = \frac{C_{l_\alpha}}{1 + \left(\frac{C_{l_\alpha}}{\pi AR} \right)} \quad (3.75)$$

C_{l_α} representa a derivada do coeficiente de sustentação 2D, $\partial C_l / \partial \alpha = C_{l_\alpha}$, e AR representa a razão de alongamento da asa, definida como a divisão da envergadura pela corda da asa. Portanto, observa-se que é necessário encontrar o valor de C_{l_α} e de AR . No caso da razão de alongamento, como será explicado no seguinte capítulo, foi escolhido um valor de envergadura de 0,5 m para a

envergadura de cada asa e uma corda de 0,13 m, dando como resultado $AR = 3,8462$. Para encontrar a derivada do coeficiente de sustentação 2D em relação ao ângulo de ataque, apenas é necessário derivar a equação (3.73) pelo ângulo de ataque, obtendo a equação (3.76).

$$C_{l_\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \cos(c_1 + b_1 \alpha) + a_2 b_2 \cos(c_2 + b_2 \alpha) + a_3 b_3 \cos(c_3 + b_3 \alpha) \\ + a_4 b_4 \cos(c_4 + b_4 \alpha) + a_5 b_5 \cos(c_5 + b_5 \alpha) + a_6 b_6 \cos(c_6 + b_6 \alpha) \\ + a_7 b_7 \cos(c_7 + b_7 \alpha) + a_8 b_8 \cos(c_8 + b_8 \alpha) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 6.684; b_1 = 0.1289; c_1 = -0.08342; \\ a_2 &= 0.1046; b_2 = 0.07723; c_2 = 0.08943; \\ a_3 &= 5.437; b_3 = 0.1305; c_3 = 3.049; \\ a_4 &= 0.2055; b_4 = 0.1772; c_4 = 2.916; \\ a_5 &= 0.2986; b_5 = 0.2698; c_5 = 1.628; \\ a_6 &= 0.2892; b_6 = 0.2724; c_6 = -1.643; \\ a_7 &= -593.2; b_7 = 0.3541; c_7 = -0.1756; \\ a_8 &= 593.3; b_8 = 0.3541; c_8 = -0.1756; \end{aligned} \quad (3.76)$$

Com o valor C_{l_α} em (3.76) e aplicando a equação (3.75), é encontrado o valor do coeficiente de sustentação 3D, C_{L_α} , em relação ao ângulo de ataque, dado pela equação (3.77):

$$C_{L_\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \sin(b_1 \alpha + c_1) + a_2 \sin(b_2 \alpha + c_2) + a_3 \sin(b_3 \alpha + c_3) \\ a_4 \sin(b_4 \alpha + c_4) + a_5 \sin(b_5 \alpha + c_5) + a_6 \sin(b_6 \alpha + c_6) \\ a_7 \sin(b_7 \alpha + c_7) + a_8 \sin(b_8 \alpha + c_8) \end{bmatrix}$$

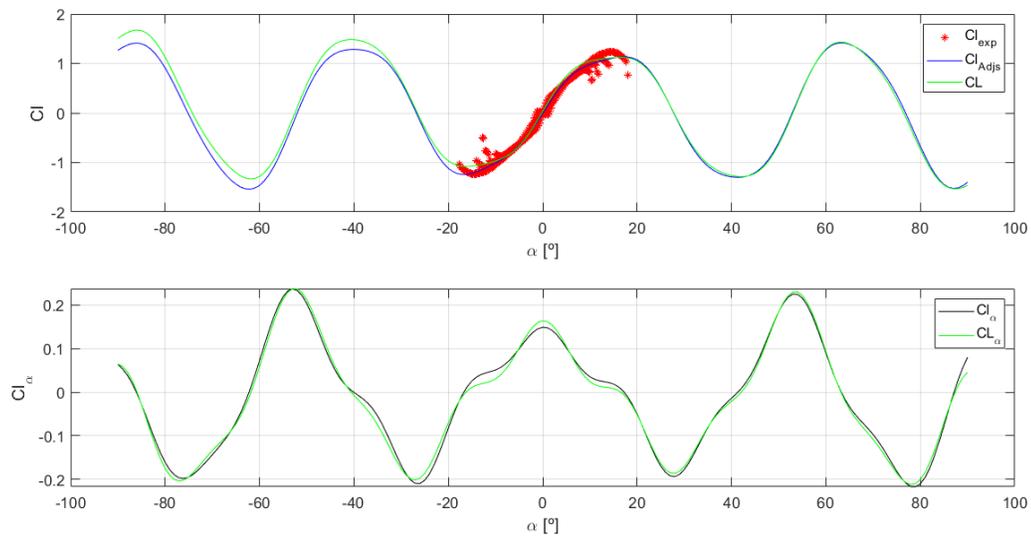
$$\begin{aligned} a_1 &= 0.1145; b_1 = 0.1069; c_1 = 1.517; \\ a_2 &= 0.09853; b_2 = 0.1401; c_2 = 1.528; \\ a_3 &= 0.07292; b_3 = 0.1702; c_3 = -1.733; \\ a_4 &= 0.03666; b_4 = 0.3533; c_4 = 1.462; \\ a_5 &= 0.03064; b_5 = 0.08015; c_5 = -1.651; \\ a_6 &= 1.373; b_6 = 0.02707; c_6 = -1.715; \\ a_7 &= 1.38; b_7 = 0.02729; c_7 = 1.427; \\ a_8 &= 0.01047; b_8 = 0.2044; c_8 = 1.384; \end{aligned} \quad (3.77)$$

Integrando a última equação, obtém-se o valor do coeficiente de sustentação 3D C_L na equação (3.78), com os mesmos coeficientes a_i , b_i e c_i , em (3.77).

$$C_L = - \left[\begin{aligned} & \frac{a1 \cos(c1 + b1\alpha)}{b1} + \frac{a2 \cos(c2 + b2\alpha)}{b2} + \frac{a3 \cos(c3 + b3\alpha)}{b3} \\ & + \frac{a4 \cos(c4 + b4\alpha)}{b4} + \frac{a5 \cos(c5 + b5\alpha)}{b5} + \frac{a6 \cos(c6 + b6\alpha)}{b6} \\ & + \frac{a7 \cos(c7 + b7\alpha)}{b7} + \frac{a8 \cos(c8 + b8\alpha)}{b8} \end{aligned} \right] \quad (3.78)$$

A Figura 3.12 apresenta um gráfico comparativo entre os coeficientes de sustentação 2D e 3D e suas respectivas derivadas.

Figure 3.12 – Comparativo entre os coeficientes e derivadas dos coeficientes de sustentação 2D C_l e 3D C_L .



Fonte: Autoria Própria

Agora, para determinar o coeficiente de arrasto 3D, C_D , aplica-se a equação (3.79), de acordo com GUDMUNDSSON (2014).

$$C_D = C_d + \frac{C_L^2}{\pi A R e_{osw}} \quad (3.79)$$

Tal que o termo e representa o chamado “**fator de Oswald**” e é considerado novamente como uma aproximação a uma asa de formato “ótimo” ou elíptica, mostrado na equação (3.80).

$$e_{osw} = 1.78(1 - 0.045AR^{0.68}) - 0.64 \quad (3.80)$$

Retomando a equação (3.72), as forças de sustentação L e arrasto D do modelo 3D, agora podem ser determinadas, porém, de acordo com GUDMUNDSSON (2014) e tomando como base a Figura 3.9, estas forças estão definidas inicialmente no chamado “referencial dos ventos ‘ S ’ ” e apontam em sentido oposto às componentes do vento incidente sobre a superfície aerodinâmica (ou seja, são consideradas negativas). Elas precisam ser transferidas ao referencial paralelo à corda da asa (sistema fixo à asa w_i , visto na Figura A1.3 do apêndice A1) e esta transferência é dada através de uma rotação inversa em Y de um ângulo de ataque local α_{wiSj} . Uma vez no referencial da asa, as forças devem ser transferidas ao referencial fixo ao corpo B , para serem consideradas na dinâmica da aeronave, através de uma matriz de rotação em Y em função do ângulo de inclinação da asa ϕ_{Ei} . Portanto, a equação (3.81) apresenta a força aerodinâmica de uma determinada seção de asa, em relação ao sistema fixo ao C.G. do veículo.

$$F_{AWiSj_B} = Rot_Y(\phi_{Ei})_{w_iS_j}^B \left\{ Rot_{-Y}(\alpha_{wiSj})_{S}^{w_iS_j} \begin{bmatrix} -D_{wiSj} \\ 0 \\ -L_{wiSj} \end{bmatrix} \right\} \quad (3.81)$$

Portanto, aplicando a equação (3.81) para todas as seções nas asas direita e esquerda, a força aerodinâmica total das asas será dada pela equação (3.82):

$$F_{A_B} = F_{AW1S1_B} + F_{AW1S2_B} + F_{AW2S1_B} + F_{AW2S2_B} \quad (3.82)$$

3.3.6 Momentos Atuantes no Sistema

Observando a equação (3.8), é necessário definir quais serão os momentos que atuam na aeronave e suas componentes $[M_{X_B}, M_{Y_B}, M_{Z_B}]^T$. Para isto, é considerado que sobre o veículo agem quatro tipos de momentos. Três torques ou momentos são consequência da ação dos rotores-

coaxiais sobre o veículo: momento causado pela força de tração M_{T_B} , torque induzido pelas hélices dos rotores M_{Q_B} e momento giroscópico M_{G_B} . Adicionalmente, o quarto torque ou momento aparece como consequência da aerodinâmica das asas M_{A_B} . Todos os momentos devem estar referidos ao sistema fixo ao C.G. da aeronave B . A equação (3.83) apresenta cada uma destes momentos.

$$\sum M_B = M_{T_B} + M_{Q_B} + M_{G_B} + M_{A_B} \quad (3.83)$$

▪ **Momento de Tração dos Rotores-Coaxiais:** M_{T_B}

Para o momento de tração de um rotor-coaxial é necessário conhecer as coordenadas do sistema paralelo ao corpo do rotor-coaxial em relação ao sistema B e conhecer sua força de tração sobre o veículo através da equação (3.66). Então o momento causado pela força de tração dos três rotores-coaxiais será dado pela equação (3.84), através do produto vetorial entre o braço de momento com coordenadas $[X_{PbRi_B}, Y_{PbRi_B}, Z_{PbRi_B}]^T$ e a respectiva força de tração F_{TRi_B} .

$$M_{T_B} = \begin{bmatrix} X_{PbR1_B} \\ Y_{PbR1_B} \\ Z_{PbR1_B} \end{bmatrix} \times F_{TR1_B} + \begin{bmatrix} X_{PbR2_B} \\ Y_{PbR2_B} \\ Z_{PbR2_B} \end{bmatrix} \times F_{TR2_B} + \begin{bmatrix} X_{PbR3_B} \\ Y_{PbR3_B} \\ Z_{PbR3_B} \end{bmatrix} \times F_{TR3_B} \quad (3.84)$$

▪ **Momento Induzido pelo Giro das Hélices dos Rotores-Coaxiais:** M_{Q_B}

A hélice de um rotor, no instante que gira, pela Terceira Lei de Newton da ação e reação, empurra ar ao longo do eixo de rotação gerando empuxo ou tração e, ao redor do eixo de rotação, gera torque. Desta forma, o torque chamado aqui de “induzido” é analisado analogamente ao que foi feito para a força de tração dos rotores-coaxiais. Lembrando que o rotor-coaxial é uma composição de dois mono rotores que giram em sentido contrário um do outro, porém, gerando tração em um único sentido.

Por causa do giro das hélices superior hu e inferior hl em sentidos contrários, em torno do mesmo eixo de rotação, como observado na Figura 3.7, surgirá uma diferença entre os torques produzidos pelas hélices de um rotor-coaxial, observada na equação (3.85):

$$Q_{Ri} = Q_{hu} - Q_{hl} \quad (3.85)$$

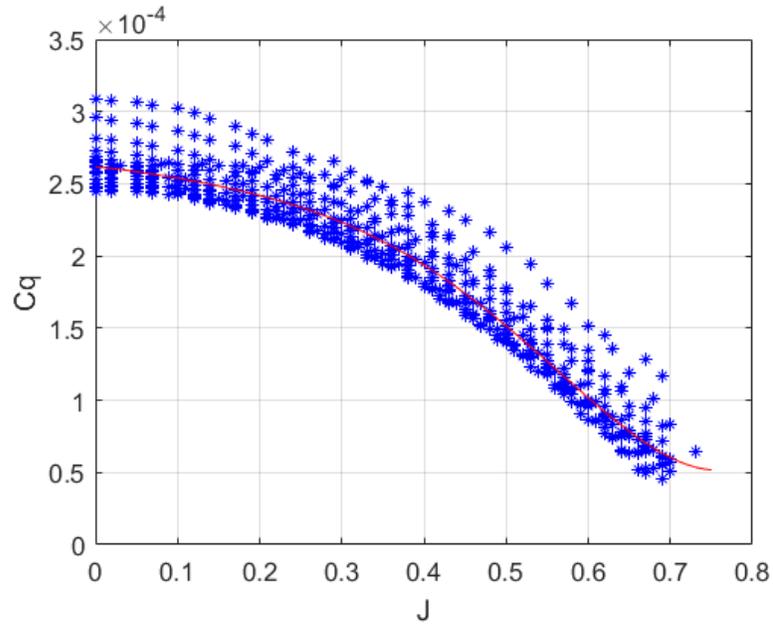
Sendo Q a representação do torque induzido pelo giro da hélice. Este pode ser descrito através da equação (3.86) de acordo com GUDMUNDSSON (2014):

$$Q_h = \rho Cq \Omega^2 D^5 \quad (3.86)$$

Onde Cq representa o coeficiente de torque da hélice (semelhante ao coeficiente de tração da hélice Ct). Novamente, através dos dados de torque oferecidos pelo fabricante da hélice escolhida, APC-10x3,8-SF, para diferentes condições de velocidade de rotação Ω , velocidade de vento incidente V_{inc} e razão de avanço J_{avn} , é possível chegar a uma relação de interpolação entre o torque induzido da hélice Q_h e a razão de avanço J_{avn} . A Figura 3.13 apresenta curva de interpolação em vermelho e as curvas experimentais, fornecidas pelo fabricante, em azul para o coeficiente de torque em função da razão de avanço. A equação (3.87) mostra a interpolação alcançada para este coeficiente.

$$\begin{aligned} Cq &= [p1J^5 + p2J^4 + p3J^3 + p4J^2 + p5J + p6] \\ p1 &= 0.0035; p2 = -0.0042; p3 = 0.0012 \\ p4 &= -3.3264e-04; p5 = -5.3859e-05; p6 = 2.6174e-04 \end{aligned} \quad (3.87)$$

Figura 3.13 – Coeficiente de torque por razão de avanço.



Fonte: Autoria Própria

Com o coeficiente de torque encontrado através da equação de interpolação (3.87), é possível determinar o torque Q_h para cada uma das hélices com a equação (3.86) e encontrar o torque induzido resultante na equação (3.85). Porém, o torque resultante em (3.85) está definido em torno do eixo de rotação de um determinado rotor-coaxial e precisa ser transferido para o sistema fixo ao corpo B para ser considerado na dinâmica do veículo. Logo, analogamente a como foi feito para a força de tração dos rotores-coaxiais, o torque induzido é transferido para o sistema B através de matrizes de rotação em X ou Y de acordo com o eixo de inclinação de cada rotor coaxial. A equação (3.88) mostra o torque induzido total sobre a aeronave.

$$M_{Q_B} = \underbrace{Rot_Y(\phi_{E1})}_{{}^{IV}QR1_B} \begin{bmatrix} Q_{R1} \\ 0 \\ \hat{} \end{bmatrix} + \underbrace{Rot_Y(\phi_{E2})}_{{}^{IV}QR2_B} \begin{bmatrix} Q_{R2} \\ 0 \\ \hat{} \end{bmatrix} + \underbrace{Rot_X(\phi_{E3})}_{{}^{IV}QR3_B} \begin{bmatrix} 0 \\ Q_{R3} \\ \hat{} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

▪ **Momento Giroscópico dos Rotores-Coaxiais:** M_{G_B}

O momento giroscópico dos rotores-coaxiais é apresentado nesta seção através das equações finais que os descrevem. A formulação detalha para alcançar estas equações é descrita na seção v do apêndice A1.

O momento giroscópico do rotor-coaxial direito R_1 é apresentado na equação (3.89). Nesta equação termo I_h representa a inércia da hélice.

$$M_{GR1_B} = \begin{bmatrix} I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \cos(\phi_{E1}) - \dot{\phi}_{E1} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E1}) \\ 0 \\ -I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \sin(\phi_{E1}) - \dot{\phi}_{E1} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E1}) \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -Q I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E1}) \\ [R \cos(\phi_{E1}) + P \sin(\phi_{E1})] I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \\ -Q I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E1}) \end{array} \right\}$$

O momento giroscópico do rotor-coaxial esquerdo R_2 é apresentado na equação (3.90), de forma análoga.

$$M_{GR2_B} = \begin{bmatrix} I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \cos(\phi_{E2}) - \dot{\phi}_{E2} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E2}) \\ 0 \\ -I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \sin(\phi_{E2}) - \dot{\phi}_{E2} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E2}) \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -Q I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E2}) \\ [R \cos(\phi_{E2}) + P \sin(\phi_{E2})] I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \\ -Q I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E2}) \end{array} \right\}$$

Por fim, o momento giroscópico do rotor-coaxial traseiro R_3 é mostrado na equação (3.91).

$$\begin{aligned}
M_{GR3_B} = & \begin{bmatrix} 0 \\ I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \cos(\phi_{E3}) - \dot{\phi}_{E3} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E3}) \\ I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \sin(\phi_{E3}) + \dot{\phi}_{E3} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E3}) \end{bmatrix} \\
& + \left\{ \begin{array}{l} [Q \sin(\phi_{E3}) - R \cos(\phi_{E3})] I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \\ -P I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E3}) \\ P I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E3}) \end{array} \right\}
\end{aligned} \quad (3.91)$$

Portanto, com os momentos giroscópicos de cada um dos rotores-coaxiais definidos no sistema B , o momento giroscópico total será dado pela equação (3.92):

$$M_{G_B} = M_{GR1_B} + M_{GR2_B} + M_{GR3_B} \quad (3.92)$$

Uma vez apresentados os momentos induzidos M_{Q_B} e giroscópicos M_{G_B} dos rotores-coaxiais, observa-se que para um determinado rotor-coaxial, estes dois momentos dependem da diferença entre as velocidades de rotação das hélices superior e inferior $(\Omega_{hu} - \Omega_{hl})$.

- **Momento Aerodinâmico das Asas:** M_{A_B}

O momento aerodinâmico das asas deve levar em consideração a força aerodinâmica das asas a uma determinada distância ou braço de momento em relação ao centro de gravidade da aeronave (sistema B), e acrescentar a este resultado o efeito do momento próprio do perfil aerodinâmico. Como foi apresentado para as forças aerodinâmicas das asas, considerando seções separadas em cada asa, para uma determinada seção de asa “ j ”, a equação (3.93) apresenta o momento aerodinâmico causado por essa seção de asa:

$$M_{AWiSj_B} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{ACWiSj_B} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{ACWiSj_B} \\ Y_{ACWiSj_B} \\ Z_{ACWiSj_B} \end{bmatrix} \times F_{AWiSj_B} \quad (3.93)$$

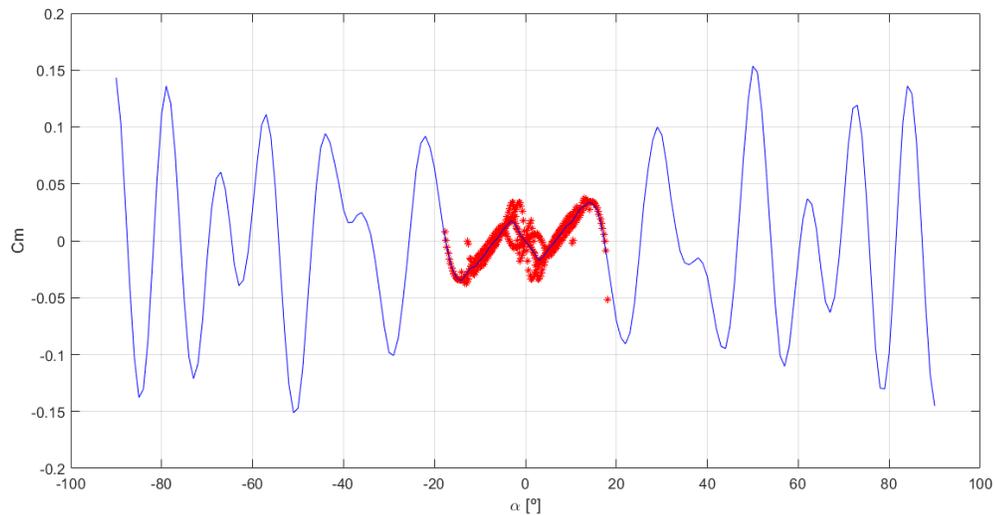
Nesta última equação o vetor $\begin{bmatrix} X_{AC_{wiSj_B}} & Y_{AC_{wiSj_B}} & Z_{AC_{wiSj_B}} \end{bmatrix}^T$ representa o braço de momento entre o centro de gravidade da aeronave o centro aerodinâmico AC da “j-ésima” seção da “i-ésima”. F_{AWiSj_B} representa o vetor força de aerodinâmica da seção da asa, encontrado através da equação (3.81), e $M_{AC_{wiSj_B}}$ representa o momento próprio do perfil aerodinâmico escolhido (NACA0012). Observa-se que este momento age exclusivamente no eixo Y_B , já que este é o eixo de giro da asa do ângulo ϕ_{Ei} .

Tomando como base GUDMUNDSSON (2014), a expressão para $M_{AC_{wiSj_B}}$ é considerada como na equação (3.94):

$$M_{AWiSj_B} = \frac{1}{2} \rho C_m A_{wiSj} (Vx_{wiSj}^2 + Vz_{wiSj}^2) MAC_{wiSj} \quad (3.94)$$

Tal que MAC_{wiSj} é a corda-média-aerodinâmica do perfil da seção da asa (lembrando que é considerada uma asa retangular) e C_m representa o coeficiente de momento do perfil aerodinâmico. Portanto, como foi feito para os coeficientes 2D de sustentação e arrasto (C_l, C_d), através dos dados do perfil NACA0012, uma curva estimada para ângulos de ataque elevados foi interpolada como uma soma de senos, a partir dos dados fornecidos pelo criador do perfil aerodinâmico (NACA). A Figura 3.14 apresenta a curva estimada-interpolada em azul e as curvas pontilhadas em vermelho representam os dados experimentais fornecidos pela instituição NACA. A equação (3.95) mostra a equação alcançada para esta interpolação.

Figura 3.14 – Coeficiente de momento C_m 2D. Interpolação para ângulos de ataque elevados, a partir dos dados experimentais do perfil NACA0012.



Fonte: Autoria Própria

$$C_m = \begin{bmatrix} a_1 \sin(b_1 \alpha + c_1) + a_2 \sin(b_2 \alpha + c_2) + a_3 \sin(b_3 \alpha + c_3) \\ a_4 \sin(b_4 \alpha + c_4) + a_5 \sin(b_5 \alpha + c_5) + a_2 \sin(b_6 \alpha + c_6) \\ a_7 \sin(b_7 \alpha + c_7) + a_8 \sin(b_8 \alpha + c_8) \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 0.05149; b_1 = 0.3477; c_1 = -3.105;$$

$$a_2 = 0.03353; b_2 = 0.2722; c_2 = 0.03703;$$

$$a_3 = 0.4789; b_3 = 0.5594; c_3 = -3.055;$$

$$a_4 = 0.001038; b_4 = 1.31; c_4 = -0.4609;$$

$$a_5 = -0.4836; b_5 = 0.5564; c_5 = 3.228;$$

$$a_6 = 0.0008204; b_6 = 1.784; c_6 = -0.6804;$$

$$a_7 = 0.0006636; b_7 = 2.629; c_7 = 2.636;$$

$$a_8 = 0.001024; b_8 = 1.518; c_8 = 0.3124;$$

(3.95)

Determinando então o valor dos momentos aerodinâmicos para cada seção das asas com as equações (3.93) a (3.95), a soma total de momentos aerodinâmicos das asas sobre o veículo será dada pela equação (3.96):

$$M_{A_B} = M_{AW1S1_B} + M_{AW1S2_B} + M_{AW2S1_B} + M_{AW2S2_B} \quad (3.96)$$

3.3.7 Relações Cinemáticas

Para finalizar a modelagem dinâmica da aeronave basta definir a cinemática desta em relação ao espaço, ou seja, em relação ao sistema inercial I . Deve-se lembrar que até agora toda a dinâmica do sistema foi definida em relação ao sistema fixo ao corpo ou fixo ao C.G. da aeronave, o sistema B .

Retomando as equações de força (3.4) e de momento (3.8):

$$m_T \left(\dot{v} + w \times v \right) = m_T \begin{bmatrix} \dot{U} + QW - RV \\ \dot{V} + KU - PW \\ \dot{W} + PV - QU \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix}_B = \sum F_B \quad (3.97)$$

$$\dot{J}_T \cdot w + J_T \cdot \dot{w} + w \times (J_T \cdot w) = \sum M_B \quad (3.98)$$

Isolando nelas as acelerações lineares \dot{v} e angulares \dot{w} nas equações anteriores, obtém-se, respectivamente, as equações (3.99) e (3.100):

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} = \frac{\sum F_B}{m_T} - w \times v \quad (3.99)$$

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = J_T^{-1} \left[\sum M_B - J_T \cdot w - w \times (J_T \cdot w) \right] \quad (3.100)$$

Desta forma, observa-se que as equações (3.99) e (3.100) descrevem os seis graus de liberdade presentes no sistema, três lineares e três angulares. Agora, para analisar as velocidades

lineares $v = [U \ V \ W]^T$ em relação ao sistema inercial, transfere-se o vetor velocidade linear em B para I , através da matriz inversa de rotações dos ângulos de Euler que foi usada na equação (3.42) para transferir o vetor força gravitacional do sistema I para B . A equação (3.101) mostra esta relação.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_I & \dot{Y}_I & \dot{Z}_I \end{bmatrix} = (R_{xyz|I}^B)^{-1} [U \ V \ W]^T \quad (3.101)$$

Para a velocidade angular em relação ao sistema inercial I , a matriz de variação dos ângulos de Euler é usada para relacionar a velocidade angular em B , $w = [P \ Q \ R]^T$, com o vetor variação dos ângulos de Euler $\begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}$. A velocidade angular da aeronave em relação ao sistema inercial I é mostrada na equação (3.102):

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}^{-1} [P \ Q \ R]^T \quad (3.102)$$

3.4 CONCLUSÕES

Portanto, das equações (3.199) a (3.102) definem-se as equações não-lineares do sistema, com doze estados (x) na equação (3.103):

$$x = [X_I \ Y_I \ Z_I \ U \ V \ W \ \phi \ \theta \ \psi \ P \ Q \ R]^T \quad (3.103)$$

E nove variáveis de entrada (u) na equação (3.104), sendo estas três ângulos de inclinação ϕ_{Ei} , três velocidades de rotação de hélices superiores Ω_{huRi} e três velocidades de rotação de hélices inferiores Ω_{hlRi} .

$$u = [\phi_{E1} \quad \phi_{E2} \quad \phi_{E3} \quad \Omega_{huR1} \quad \Omega_{hlR1} \quad \Omega_{huR2} \quad \Omega_{hlR2} \quad \Omega_{huR3} \quad \Omega_{hlR3}]^T \quad (3.104)$$

Conclui-se, portanto, que o modelo dinâmico da aeronave proposta, com formato “T” ou tricóptero (primeira do seu tipo), que mistura o uso e inclinação de rotores-coaxiais junto com asas para controlar o movimento da aeronave, foi matematicamente formulado tomando como base os princípios físicos, aerodinâmicos e propulsivos que regem sobre corpos sólidos no espaço, ou neste caso, sobre sistemas “multicorpo” no espaço.

O sistema é caracterizado por possuir seis graus de liberdade, porém possui nove entradas, o que o torna em um sistema sobre atuado. Portanto, no capítulo cinco, será apresentada a estratégia adotada para lidar com o controle deste sistema.

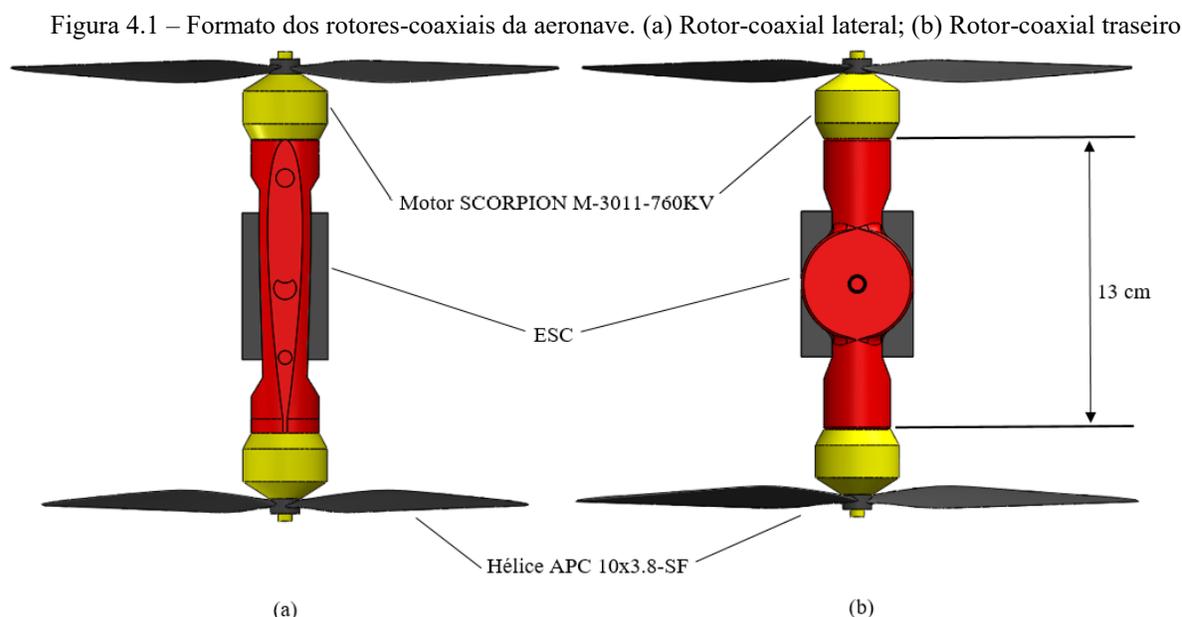
4 DESIGN DA AERONAVE

Este capítulo apresenta as características de cada um dos componentes considerados no capítulo anterior para a Modelagem Dinâmica do sistema. Aqui são descritas as dimensões, massas e elementos que compõem os rotores-coaxiais, as asas e a fuselagem da aeronave. Vale a pena ressaltar que o *design* de cada um dos componentes da aeronave foi escolhido levando em consideração peças ou elementos elétricos e mecânicos reais, de forma a analisar e simular um modelo do veículo o mais próximo da realidade possível. A aeronave aqui concebida é pensada para aplicações de monitoramento, defesa e segurança.

Com o formato estabelecido da aeronave, serão apresentados os parâmetros de cada um dos rotores-coaxiais, asas e a fuselagem, que são usados nas equações consideradas no capítulo anterior. Adicionalmente, será apresentada uma validação do tensor de inércia do veículo através da comparação entre os resultados obtidos pelo software CAD Solidworks e as equações que definem o tensor de inércia da aeronave.

4.1 COMPONENTES UTILIZADOS

Rotores-Coaxiais: Para os rotores-coaxiais, considera-se uma distância de 13 cm entre os dois motores *brushless* SCORPION M-3011-760KV e em cada um vai acoplada uma hélice APC 10x3.8-SF. A estrutura que dá suporte aos motores do rotor-coaxial é pensada em material de impressão 3D (plástico ABS vermelho) e seu formato vai de acordo à localização do rotor-coaxial. Isto é, para os rotores-coaxiais laterais, o suporte em impressão 3D acompanha o formato do perfil aerodinâmico da ponta da asa onde o rotor será encaixado. Já o rotor-coaxial traseiro acompanha o perfil no final da parte traseira da fuselagem, onde este será colocado. Adicionalmente, sobre a estrutura de impressão 3D vão montados dois controladores de velocidade (*Electronic Speed Controller – ESC*), um para cada motor do rotor-coaxial. A Figura 4.1 apresenta o formato para os rotores-coaxiais laterais e traseiro.

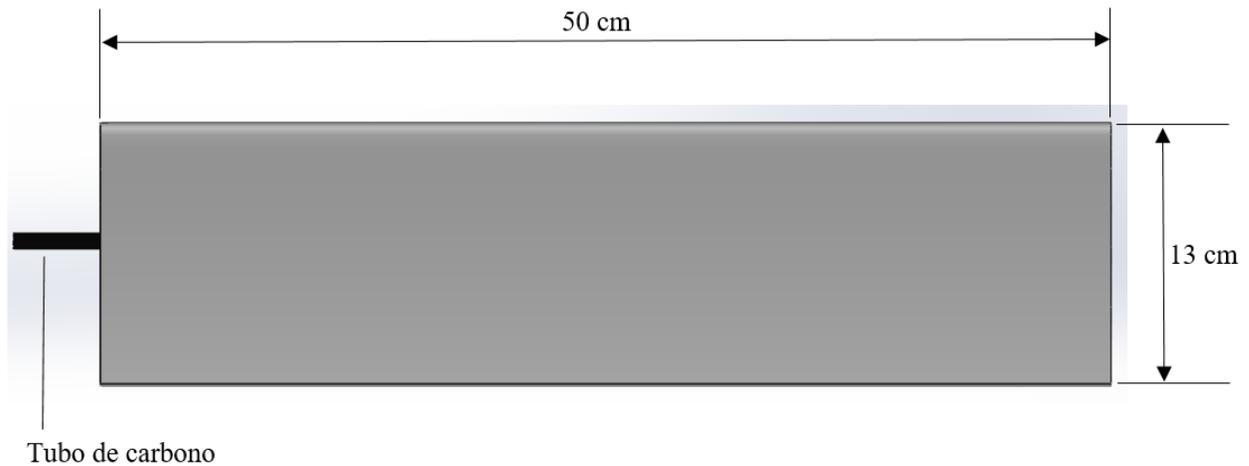


Fonte: Autoria própria.

Asas: Para as asas, sua estrutura foi pensada como uma camada oca com o formato do perfil aerodinâmico simétrico NACA0012. As nervuras e a “caverna” do perfil são pensadas novamente em impressão 3D e sobre o perfil oco de plástico ABS iria uma camada de fibra de vidro junto com resina. Finalmente, para dar resistência mecânica à estrutura da asa, um tubo de carbono oco, com diâmetro de 8 mm e espessura de 2 mm é usado como longarina. Será através do tubo de carbono que a asa e seu respectivo rotor-coaxial estarão acoplados à fuselagem da aeronave. O giro da asa, será realizado através do giro do tubo com o uso de um servo-motor.

As dimensões da asa foram escolhidas para ter uma envergadura de 50 cm e uma corda de 13 cm. A área alar de cada asa então contribuirá para gerar a força de sustentação em modo cruzeiro, à uma velocidade de 20 m/s, equivalente à força de tração de um rotor-coaxial lateral em uma condição de voo pairado (*hover*). Ou o equivalente a 1/3 da força peso da aeronave. A Figura 4.2 apresenta o formato da asa.

Figura 4.2 – Formato da asa da aeronave

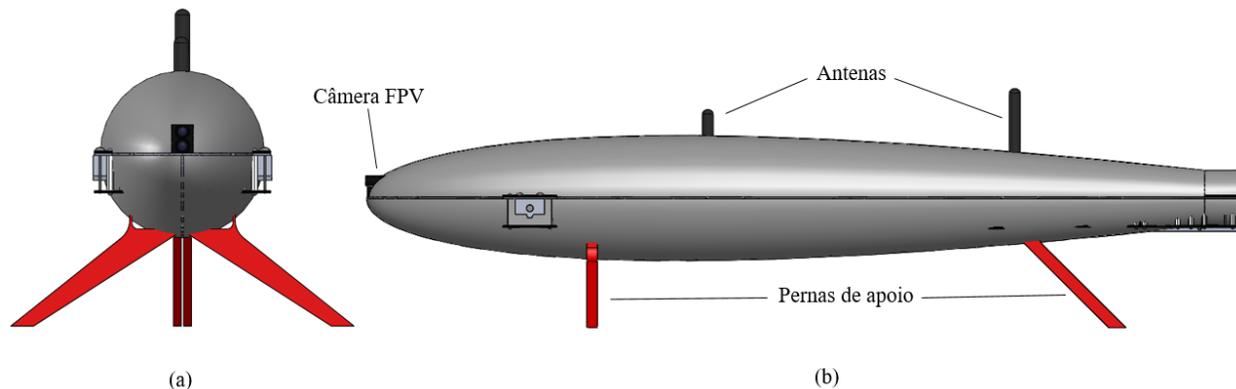


Fonte: Autoria própria.

Fuselagem: A estrutura da fuselagem é pensada como sendo uma junção de peças em impressão 3D, chapas recortadas de fibra de carbono e um revestimento aerodinâmico de fibra de vidro e resina. O revestimento aerodinâmico foi concebido tomando como base o próprio perfil aerodinâmico da asa de forma a reduzir o arrasto aerodinâmico que perfis retos de peças expostas podem provocar. A Figura 4.3 apresenta as vistas frontal e lateral da fuselagem da aeronave. A vista superior é semelhante à vista lateral.

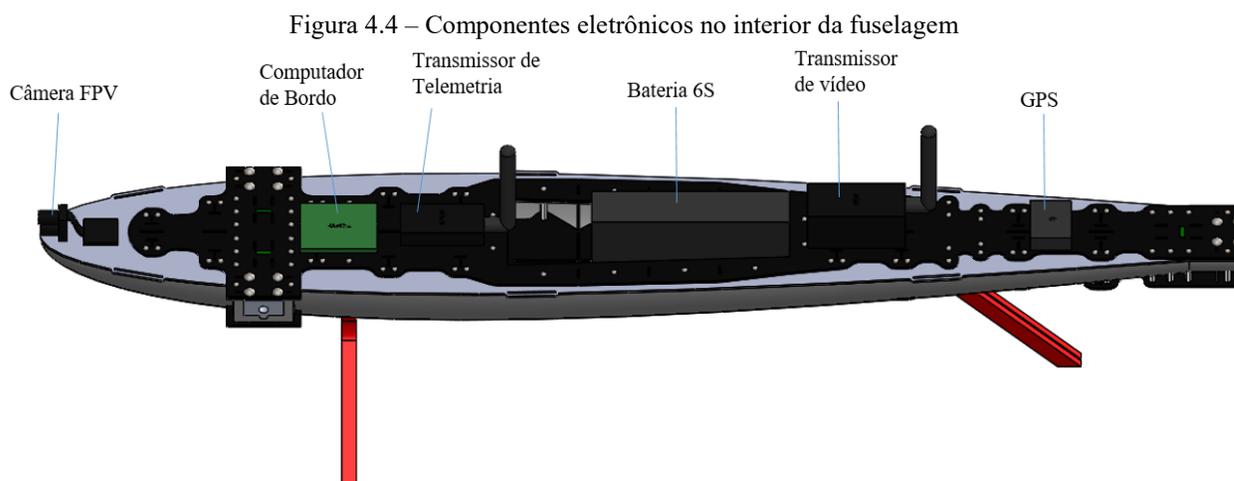
Na Figura 4.3 pode-se observar o uso de um trem de pouso em plástico ABS vermelho para apoio durante a decolagem e pouso da aeronave. Além disto é possível observar um par de antenas de transmissão de dados e na parte frontal uma câmera *First-Person-View* (FPV) para auxílio de um provável operador/piloto (remoto). Para o modelo dinâmico apresentado no capítulo anterior, o arrasto aerodinâmico provocado por elementos como as antenas ou as pernas de apoio (trem de pouso) não foi levado em consideração. A dinâmica do arrasto provocado por estes elementos exige o uso de análise de elementos finitos através de *Computational-Fluid-Dynamics* (CFD).

Figura 4.3 – Formato da fuselagem da aeronave. (a) Vista frontal da fuselagem; (b) Vista lateral da aeronave



Fonte: Autoria própria.

Adicionalmente, internamente à fuselagem encontram-se alojados o computador de bordo para controle de voo da aeronave, um transmissor de dados de telemetria, um transmissor de vídeo, um GPS, e uma bateria LiPo de seis células (6S). A Figura 4.4 apresenta a distribuição destes elementos eletrônicos no interior da fuselagem (sem o revestimento superior aerodinâmico).



Fonte: Autoria própria.

A distribuição dos componentes eletrônicos no interior da fuselagem não é aleatória, a localização de cada um dos componentes com relação à uma determinada referência, neste caso o

nariz da aeronave (sistema de referência A – capítulo 3), influi diretamente na localização do centro de gravidade da aeronave e, por sua vez, a localização do centro de gravidade de cada rotor-coaxial com relação ao sistema fixo ao C.G. da aeronave (sistema B) afeta diretamente o equilíbrio de forças e momentos do sistema. Portanto, montando toda a aeronave e escolhendo a localização precisa de cada um dos componentes eletrônicos dentro da fuselagem, a condição de equilíbrio para decolagem, pouso ou voo pairado no ar (*hover*) é satisfeita quando cada rotor-coaxial proporciona uma força de tração mínima equivalente a $1/3$ da força peso da aeronave. Ou seja:

$$F_{TRi_B} = \frac{F_{G_B}}{3} \quad (4.1)$$

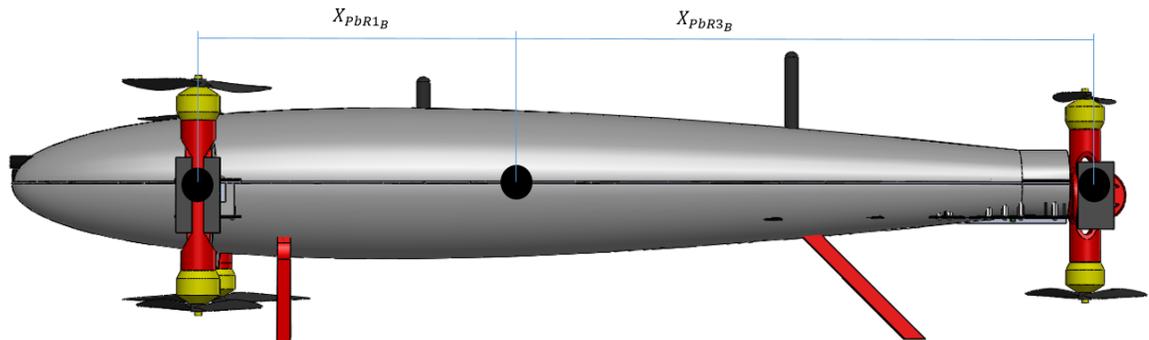
Então, se todos os rotores proporcionam uma mesma força de tração para equilibrar a força peso, para equilibrar os momentos:

$$\begin{aligned} \sum M_X = 0 &\leftrightarrow F_{TR1_B} Y_{PbR1_B} - F_{TR2_B} Y_{PbR2_B} = 0 \\ &\rightarrow F_{TR1_B} = F_{TR2_B} = F_{TRi_B} \\ &\rightarrow F_{TRi_B} (Y_{PbR1_B} - Y_{PbR2_B}) = 0 \\ &\therefore Y_{PbR1_B} = Y_{PbR2_B} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \sum M_Y = 0 &\leftrightarrow F_{TR1_B} X_{PbR1_B} + F_{TR2_B} X_{PbR2_B} - F_{TR3_B} X_{PbR3_B} = 0 \\ &\rightarrow F_{TR1_B} = F_{TR2_B} = F_{TR3_B} = F_{TRi_B} \\ &\rightarrow F_{TRi_B} (X_{PbR1_B} + X_{PbR2_B} - X_{PbR3_B}) = 0 \\ &\rightarrow X_{PbR1_B} = X_{PbR2_B} \\ &\therefore X_{PbR3_B} = 2X_{PbR1_B} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Desta forma observa-se que em relação ao plano XY do sistema B na Figura 3.5, a distância em Y entre a origem do sistema B e o C.G. de cada um dos rotores-coaxiais laterais deve ser a mesma. Por outro lado, a distância em X entre a origem do sistema B e o C.G. do rotor-coaxial traseiro, deve ser duas vezes a distância em X entre a origem do sistema B e o C.G. dos rotores-coaxiais laterais. A Figura 4.5 apresenta as distâncias em X entre os rotores-coaxiais e o C.G. da aeronave, quando os rotores encontram-se orientados na vertical, apontando o vetor força de empuxo para cima.

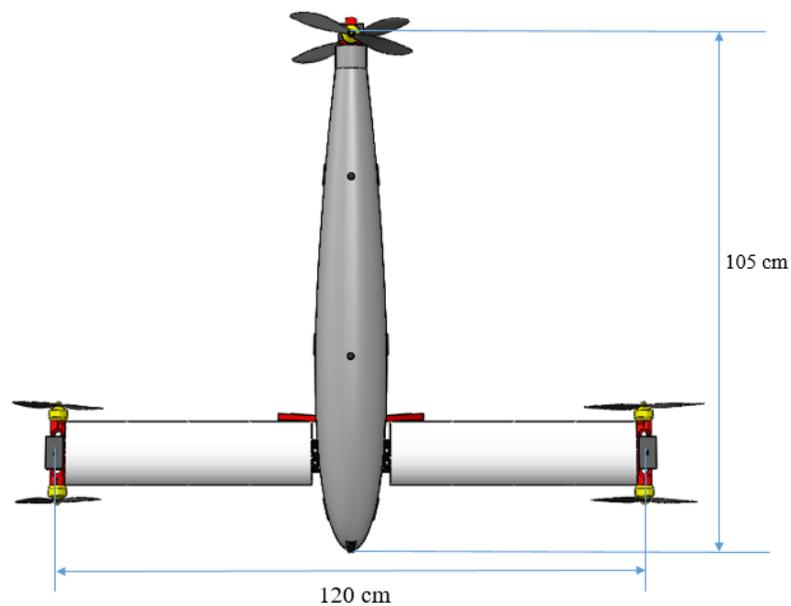
Figura 4.5 – Vista lateral da aeronave montada



Fonte: Aatoria própria.

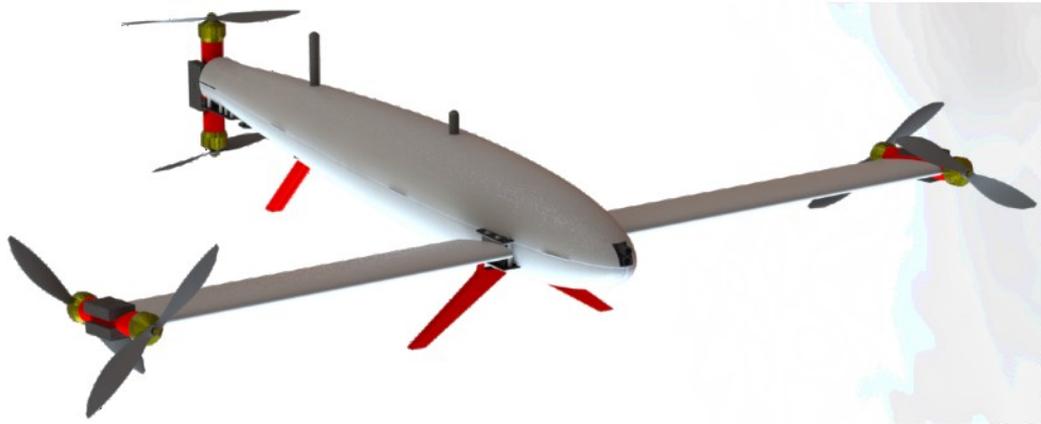
Finalmente, com todos os elementos e componentes da aeronave colocados no seu respectivo lugar, tem-se então um modelo mais realista da aeronave. A Figura 4.6 mostra uma vista superior da aeronave completamente montada com suas dimensões de comprimento e largura. A Figura 4.7 apresenta uma imagem renderizada no programa Solidworks da aeronave com seus rotores-coaxiais laterais horizontalmente inclinados para voo cruzeiro.

Figura 4.6 – Vista superior da aeronave montada



Fonte: Aatoria própria.

Figure 4.7 – Aeronave completa em voo cruzeiro



Fonte: Autoria própria.

4.2 PARÂMETROS DO DRONE

Nesta seção serão apresentados os parâmetros considerados para o modelo da aeronave, tomando como base tanto condições ambientais, como também atributos de massa e dimensões dos componentes que conformam o sistema multi-corpo do veículo.

A Tabela 4.1 apresenta os componentes eletrônicos considerados para este projeto. A massa de cada um destes elementos foi acrescentada à massa total dos macro-componentes aos quais estes elementos eletrônicos vão fixados (fuselagem, rotores ou asas).

Os parâmetros considerados para cada um dos componentes do sistema multicorpo (fuselagem, rotores-coaxiais e asas) são apresentados na forma de tabelas, junto com outros parâmetros adicionais considerados no modelo dinâmico. Estas tabelas estão disponíveis no Apêndice B1 (devido ao grande número de parâmetros).

Tabela 4.1 – Componentes eletrônicos da aeronave

Componente	Modelo do Componente	Quantidade	Massa Total [Kg]
Câmera FPV	RunCam Hybrid - Dual 4K HD & FPV Camera	1	0,0180
Transceptor de vídeo	XOSD3B Video Transceiver	1	0,0720
Antenas	Antena Wireless Omnidirecional 5dbi 2.4ghz	2	0,0400
Transceptor de telemetria	XLRS D1 Radio Control Transceiver	1	0,0470
Bateria	Titan 22.2v 10.5Ah 6S3P-GA	1	0,9080
Controladora	NAVIO 2 (raspberry pi 4)	1	0,0230
GPS	GPS/GNSS com antena MCX	1	0,0300
Servo Motor	Turnigy TGY-390DMH High Performance DS/MG Servo 5.4kg	3	0,0675
Motor Brushless	Scorpion M-3011-760kv	6	0,5220
Hélice	APC 10x3.8-SF	6	0,0714
ESC	Skywalker ESC (50A UBEC)	6	0,2460
TOTAL			2,0449

Fonte: Autoria própria

4.3 VALIDAÇÃO DO TENSOR DE INÉRCIA

As equações apresentadas no capítulo 3 para descrever o tensor de inércia da aeronave e sua variação de acordo com os ângulos de inclinação ϕ_{Ei} ($i = 1,2,3$) dos três rotores-coaxiais, permitiram chegar na equação (3.17) do tensor de inércia total da aeronave, como sendo a soma dos tensores de inércia de cada um dos componentes em relação ao sistema de coordenadas fixo ao corpo B .

Para corroborar que este modelo matemático do tensor de inércia total da aeronave está correto, já que este afeta diretamente as acelerações angulares do sistema (3.100), é feita uma comparação dos momentos e produtos de inércia obtidos através do modelo matemático e através dos resultados disponibilizados pelos software CAD Solidworks, para diversos ângulos de

inclinação ϕ_{Ei} nos rotores-coaxiais. As Tabelas 4.2 até 4.4 apresentam os resultados comparativos para angulações nos rotores-coaxiais que deixam a aeronave em morfologias simétricas e assimétricas (ver Figura 3.3).

Tabela 4.2 – Comparativo de tensor de inércia para ângulos de inclinação $\phi_{E1} = \phi_{E2} = 15^\circ$ e $\phi_{E3} = 90^\circ$ (configuração simétrica)

Momento/Produto de inércia [kgm²]	Modelo SolidWorks	Modelo Matemático
I_{XX_T}	0,2680	0,2509
I_{YY_T}	0,3782	0,3700
I_{ZZ_T}	0,6349	0,6124
$I_{XY_T} = I_{YX_T}$	$6,43 * 10^{-6}$	$8,5 * 10^{-6}$
$I_{XZ_T} = I_{ZX_T}$	0,0020	0,0032
$I_{YZ_T} = I_{ZY_T}$	$-5,9 * 10^{-6}$	$-4,65 * 10^{-6}$

Fonte: Autoria própria

Tabela 4.3 – Comparativo de tensor de inércia para ângulos de inclinação $\phi_{E1} = 120^\circ$, $\phi_{E2} = 45^\circ$ e $\phi_{E3} = 65^\circ$ (configuração assimétrica)

Momento/Produto de inércia [kgm²]	Modelo Solidworks	Modelo Matemático
I_{XX_T}	0,2694	0,2525
I_{YY_T}	0,3797	0,3683
I_{ZZ_T}	0,6355	0,6083
$I_{XY_T} = I_{YX_T}$	0,0014	0,0013
$I_{XZ_T} = I_{ZX_T}$	0,0035	0,0030
$I_{YZ_T} = I_{ZY_T}$	-0,0003	-0,0002

Fonte: Autoria própria

Tabela 4.4 – Comparativo de tensor de inércia para ângulos de inclinação $\phi_{E1} = 120^\circ$ e $\phi_{E2} = \phi_{E3} = 90^\circ$ (configuração assimétrica)

Momento/Produto de inércia [kgm ²]	Modelo Solidworks	Modelo Matemático
I_{xx_T}	0,2690	0,2522
I_{yy_T}	0,3791	0,3690
I_{zz_T}	0,6348	0,6115
$I_{xy_T} = I_{yx_T}$	-0,0011	-0,0011
$I_{xz_T} = I_{zx_T}$	0,0033	0,0026
$I_{yz_T} = I_{zy_T}$	-0,0011	-0,0011

Fonte: Autoria própria

Portanto, observa-se que os resultados do modelo matemático do tensor de inércia são de fato bastante próximos dos resultados gerados pelo modelo CAD 3D da aeronave no software Solidworks. A variação entre um e outro pode-se dever ao fato de que a inércia das hélices, que no modelo matemático é acrescentado à inércia de um respectivo rotor-coaxial, é considerada como a inércia de um disco sólido. Enquanto que a inércia das hélices no Solidworks, em relação ao sistema fixo ao C.G. da aeronave, depende do ângulo de rotação no qual a hélice estiver disposta.

4.4 CONCLUSÕES

Neste capítulo foram apresentados com maior detalhe cada um dos componentes que fazem parte do sistema multicorpo da aeronave. Para isto foram apresentadas as dimensões dos componentes, suas massas e suas localizações ao longo do corpo do veículo, assim como também foi brevemente descrito quais elementos eletrônicos foram considerados para serem usados no modelo real do drone e os materiais mecânicos para fabricar as estruturas das asas, fuselagem e rotores. Por fim, foi apresentada o formato final do drone.

Na seção 4.2 foram apresentados o grande número de parâmetros que alimentam as variáveis do modelo matemático desenvolvido no capítulo 3. Os parâmetros foram agrupados de acordo aos componentes aos quais correspondem (fuselagem, asas e rotores-coaxiais) e apresentados em tabelas.

Finalmente, com os parâmetros de massa e coordenadas dos componentes da aeronave, foi validado o modelo matemático do tensor de inércia do veículo para vários ângulos de inclinação dos seus três rotores-coaxiais, comparando-o aos resultados gerados para produtos e momentos de inércia do software CAD 3D Solidworks. Isto permite ter um modelo matemático da aeronave cujo tensor de inércia pode ser previsto a cada instante de tempo a depender dos ângulos de inclinação ϕ_{Ei} e que, como consequência, influi diretamente na previsão das acelerações angulares da aeronave como observado na equação (3.100).

5 ESTRATÉGIA DE CONTROLE

Neste capítulo será apresentada a filosofia de controle adotada para a aeronave. Para isto, inicialmente será descrito o procedimento para lidar com o sistema sobre atuado, definido no final do capítulo 3 de modelagem dinâmica. A seguir serão apresentadas as estratégias de controle para cada um dos controladores utilizados neste projeto.

5.1 TRATAMENTO DA SOBRE ATUAÇÃO

Antes de realizar a linearização do sistema, de forma a simplificá-lo, é realizado o tratamento da sobre atuação do mesmo. O sistema inicialmente conta com nove variáveis manipuladas (entradas) e seis graus de liberdade (saídas).

Como visto no capítulo 3, um determinado rotor-coaxial é controlado por três entradas: o ângulo de inclinação ϕ_{Ei} , a velocidade de rotação da hélice superior Ω_{huRi} e a velocidade de rotação da hélice inferior Ω_{hIRi} . Contudo, tomando como base os dados de desempenho da hélice APC 10x3.8-SF fornecidos pelo fabricante, é possível encontrar uma expressão polinomial para a velocidade de rotação da hélice inferior que balanceie/anule o torque total induzido do rotor-coaxial. Para isto, a velocidade de rotação da hélice inferior será função da velocidade de rotação da hélice superior e do vento axialmente incidente sobre o rotor-coaxial V_{inc} (lembrando que a velocidade do vento axialmente incidente sobre o rotor-coaxial é a mesma velocidade axial agindo sobre a hélice superior, já que sobre a hélice inferior incide a velocidade axial do vento sobre o rotor-coaxial V_{inc} mais a velocidade induzida pela hélice superior V_{ind}).

As equações (3.85) a (3.87) e a equação (3.47), requeridas para determinar o torque de um rotor-coaxial, são repetidas abaixo.

$$Q_{Ri} = Q_{hu} - Q_{hl} \quad (3.85)$$

$$Q_h = \rho C_q \Omega^2 D^5 \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned}
 Cq &= [p1J^5 + p2J^4 + p3J^3 + p4J^2 + p5J + p6] \\
 p1 &= 0.0035; p2 = -0.0042; p3 = 0.0012 \\
 p4 &= -3.3264e-04; p5 = -5.3859e-05; p6 = 2.6174e-04
 \end{aligned}
 \tag{3.87}$$

$$J_{avn} = \frac{V_{inc}}{\Omega D}
 \tag{3.47}$$

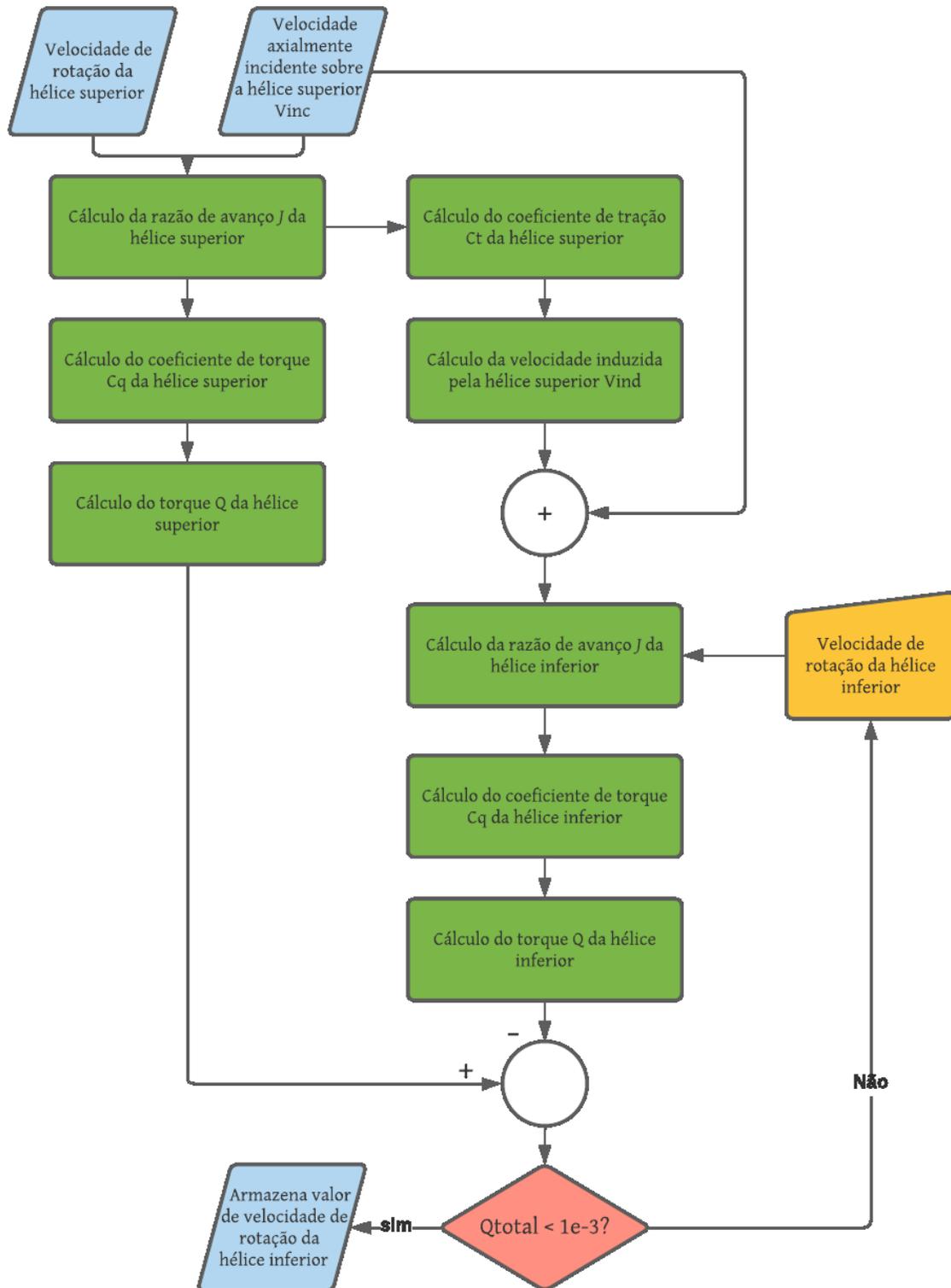
Portanto, o problema reside em encontrar o valor da velocidade de rotação da hélice inferior Ω_{hRi} que torne a equação (3.85) próxima de zero. Através das equações (3.86), (3.87) e (3.47), observa-se que esta solução não é trivial já que o torque produzido por uma hélice em (3.86) dependerá da velocidade de rotação da hélice e da velocidade axial de incidência sobre o rotor.

Um processo iterativo foi usado para determinar o valor da rotação necessária da hélice inferior Ω_{hRi} para anular o torque induzido total do rotor-coaxial Q_{Ri} , variando as velocidades de rotação da hélice superior Ω_{huRi} e da velocidade de incidência axial do vento sobre a hélice V_{inc} , de acordo com os dados experimentais do fabricante.

A Figura 5.1 apresenta a rotina iterativa para conseguir os valores necessários da velocidade de rotação de uma hélice inferior, como função da velocidade de rotação da correspondente hélice superior e da velocidade de vento axialmente incidente sobre a mesma hélice superior.

No total, 19 valores de velocidade de rotação da hélice superior Ω_{huRi} entre 2.000 e 20.000 RPM (a cada 1.000) foram considerados e, para cada valor de rotação da hélice superior, um total de 30 valores de velocidade do vento axialmente incidente foram usados, de acordo com os dados experimentais do fabricante da hélice APC 10x3.8-SF.

Figura 5.1 – Rotina iterativa para cálculo da velocidade de rotação da hélice inferior



Fonte: Autoria própria

Uma vez armazenados todos os valores da velocidade de rotação da hélice inferior que anulassem o torque total induzido de um rotor-coaxial, a interpolação entre velocidade de rotação da hélice superior, velocidade incidente sobre o rotor (sobre a hélice superior) e velocidade de rotação da hélice inferior foi realizada. A equação (5.1) apresenta a equação obtida para a velocidade de rotação da hélice inferior como função da velocidade de rotação da hélice superior e da velocidade do vento incidente sobre a hélice superior. A Figura 5.2 mostra graficamente esta relação de interpolação.

$$\Omega_{huRi} = \begin{bmatrix} p00 + p10x + p01y + p20x^2 + p11xy + p02y^2 \\ + p30x^3 + p21x^2y + p12xy^2 + p03y^3 + p40x^4 \\ + p31x^3y + p22x^2y^2 + p13xy^3 + p04y^4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow x = \frac{(\Omega_{huRi} - x_{mean})}{x_{std}}, y = \frac{(V_{inc\in hu} - y_{mean})}{y_{std}} \quad (5.1)$$

$$\rightarrow x_{mean} = 1152; x_{std} = 574.1; y_{mean} = 16.09; y_{std} = 13.45$$

$$p00 = 1233; p10 = 630.1; p01 = -26.16;$$

$$p20 = -15.93; p11 = 46.07; p02 = -36.56;$$

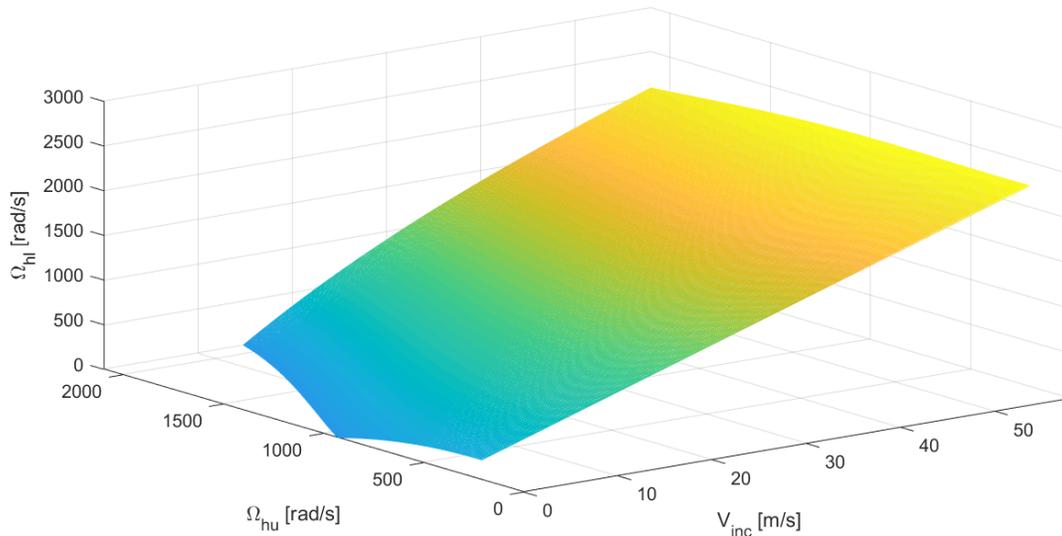
$$p30 = 7.734; p21 = -25.17; p12 = 25.47;$$

$$p03 = -5.395; p40 = -1.493; p31 = 7.411;$$

$$p22 = -5.371; p13 = -3.298; p04 = 2.341;$$

Havendo encontrado o valor de rotação da hélice inferior, constatou-se que, de fato para toda condição de velocidade de rotação da hélice inferior e vento incidente sobre o rotor, o torque resultante do rotor-coaxial era muito próximo de zero (variando a partir da terceira casa decimal). Por outro lado, constatou-se também que a diferença de velocidade de rotação entre ambas as hélices de um rotor-coaxial não superava 7%. Isto quer dizer que o impacto de “balancear” o torque do rotor-coaxial não somente diminui o efeito do torque induzido, como também diminui o efeito do torque giroscópico do rotor-coaxial (apresentado previamente nas equações (3.89) a (3.91)). Este resultado condiz com as afirmações de Allenspach et al. (2020) com o uso de rotores-coaxiais no projeto do hexacóptero-tilt-rotor omnidirecional.

Figura 5.2 – Velocidade de rotação da hélice inferior, em função da velocidade de rotação da hélice superior e da velocidade axialmente incidente sobre a hélice superior



Fonte: Autoria própria

Com a abordagem apresentada, a velocidade de rotação da hélice inferior Ω_{huRi} de cada rotor-coaxial do sistema se ajustará automaticamente, através da equação (5.1), com o objetivo de tornar o torque induzido do rotor-coaxial igual ou próximo a zero. Portanto, cada rotor-coaxial passa a ser suficientemente controlado com apenas duas entradas: o ângulo de inclinação ϕ_{Ei} e a velocidade de rotação da hélice superior Ω_{huRi} .

Desta forma o sistema anteriormente sobre atuado, por contar com sei graus de liberdade e nove entradas, agora passa a ser um sistema “quadrado” com seis graus de liberdade e seis entradas de controle:

$$u = [\phi_{E1} \quad \phi_{E2} \quad \phi_{E3} \quad \Omega_{huR1} \quad \Omega_{huR2} \quad \Omega_{huR3}]^T \quad (5.2)$$

5.2 LINEARIZAÇÃO

Para a linearização do sistema, em torno de um determinado ponto ou condição de equilíbrio, é necessário entender quais das equações dinâmicas não-lineares serão consideradas para proceder com a linearização. As equações (3.99) e (3.100) foram apresentadas como as equações dinâmicas referentes às acelerações lineares e angulares, em relação ao sistema fixo ao corpo B , respectivamente. Elas são apresentadas aqui novamente:

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} = \frac{\sum F_B}{m_T} - w \times v \quad (3.99)$$

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = J_T^{-1} \left[\sum M_B - J_T \cdot w - w \times (J_T \cdot w) \right] \quad (3.100)$$

Desta forma, observa-se que as equações (3.99) e (3.100) descrevem os seis graus de liberdade presentes no sistema, três lineares e três angulares. Portanto, estas duas últimas equações serão usadas para o controle de velocidade da aeronave e com isto, o número de estados considerados será de seis e o número de entradas também será de seis. A equação (5.3) apresenta o vetor de estados e o vetor de entradas que são usados para o controle de velocidade da aeronave. Adicionalmente é apresentado o vetor de acelerações.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \dot{U} & \dot{V} & \dot{W} & \dot{P} & \dot{Q} & \dot{R} \end{bmatrix} \\ x &= [U \quad V \quad W \quad P \quad Q \quad R]^T \\ u &= [\phi_{E1} \quad \phi_{E2} \quad \phi_{E3} \quad \Omega_{ruR1} \quad \Omega_{rlR1} \quad \Omega_{ruR2}]^T \end{aligned} \quad (5.3)$$

Estes três vetores são considerados para a formulação do modelo linear em formato de espaço de estados, apresentado na equação (5.4). Como foi apresentado no capítulo 2, a matriz A representa a matriz de coeficientes da resposta natural do sistema, que relaciona a variação dos estados em função dos próprios estados. A matriz B representa a matriz de coeficientes da resposta atuada do sistema e relaciona a variação dos estados em função das variáveis de entrada do sistema.

Já no caso da matriz C ela é considerada uma matriz identidade, já que é assumido que todos os estados serão observáveis. Por fim, a matriz D é considerada nula já que não existem entradas agindo diretamente sobre as saídas.

$$\begin{aligned}\dot{x}_{6 \times 1} &= A_{6 \times 6} x_{6 \times 1} + B_{6 \times 6} u_{6 \times 1} \\ y_{6 \times 1} &= C_{6 \times 6} x_{6 \times 1} + D_{6 \times 6} u_{6 \times 1}\end{aligned}\quad (5.4)$$

Para obter as matrizes A e B , é necessário linearizar o sistema não-linear em torno de um ponto de equilíbrio. O procedimento para a linearização é feito através do método da série de Taylor:

$$f(x, u) = \underbrace{f(\bar{x}, \bar{u})}_a + \underbrace{\left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}}_{\Delta x} + \underbrace{\left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}}_{\Delta u} \quad (5.5)$$

Tal que \bar{x} e \bar{u} representam os estados e entradas na condição de equilíbrio, Δx e Δu representam a variação dos vetores de estados e entradas de controle, a função $f(x, u)$ neste caso será igual a \dot{x} e $f(\bar{x}, \bar{u})$ representará o vetor de acelerações na condição de equilíbrio, tal que, em equilíbrio, as acelerações serão nulas. Portanto:

$$\begin{aligned}f(x, u) &= \dot{x} \\ f(\bar{x}, \bar{u}) &= 0\end{aligned}\quad (5.6)$$

O segundo termo do lado direito da equação (5.5) representa a matriz de derivadas parciais da função “ f ”, em função dos estados, aplicando as condições de equilíbrio \bar{x} e \bar{u} . Portanto, para os estados mostrados na equação (5.3), a matriz A será dada pela equação (5.7):

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial U} & \frac{\partial U}{\partial V} & \frac{\partial U}{\partial W} & \frac{\partial U}{\partial P} & \frac{\partial U}{\partial Q} & \frac{\partial U}{\partial R} \\ \frac{\partial V}{\partial U} & \frac{\partial V}{\partial V} & \frac{\partial V}{\partial W} & \frac{\partial V}{\partial P} & \frac{\partial V}{\partial Q} & \frac{\partial V}{\partial R} \\ \frac{\partial W}{\partial U} & \frac{\partial W}{\partial V} & \frac{\partial W}{\partial W} & \frac{\partial W}{\partial P} & \frac{\partial W}{\partial Q} & \frac{\partial W}{\partial R} \\ \frac{\partial P}{\partial U} & \frac{\partial P}{\partial V} & \frac{\partial P}{\partial W} & \frac{\partial P}{\partial P} & \frac{\partial P}{\partial Q} & \frac{\partial P}{\partial R} \\ \frac{\partial Q}{\partial U} & \frac{\partial Q}{\partial V} & \frac{\partial Q}{\partial W} & \frac{\partial Q}{\partial P} & \frac{\partial Q}{\partial Q} & \frac{\partial Q}{\partial R} \\ \frac{\partial R}{\partial U} & \frac{\partial R}{\partial V} & \frac{\partial R}{\partial W} & \frac{\partial R}{\partial P} & \frac{\partial R}{\partial Q} & \frac{\partial R}{\partial R} \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}} \quad (5.7)$$

Já o terceiro termo do lado direito da equação (5.5) representa a matriz de derivadas parciais da função “f”, em função das entradas, aplicando as condições de equilíbrio \bar{x} e \bar{u} . Portanto, para os estados e entradas mostradas na equação (5.3), a matriz B será dada pela equação (5.8):

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial \phi_{E1}} & \frac{\partial U}{\partial \phi_{E2}} & \frac{\partial U}{\partial \phi_{E3}} & \frac{\partial U}{\partial \Omega_{huR1}} & \frac{\partial U}{\partial \Omega_{huR2}} & \frac{\partial U}{\partial \Omega_{huR3}} \\ \frac{\partial V}{\partial \phi_{E1}} & \frac{\partial V}{\partial \phi_{E2}} & \frac{\partial V}{\partial \phi_{E3}} & \frac{\partial V}{\partial \Omega_{huR1}} & \frac{\partial V}{\partial \Omega_{huR2}} & \frac{\partial V}{\partial \Omega_{huR3}} \\ \frac{\partial W}{\partial \phi_{E1}} & \frac{\partial W}{\partial \phi_{E2}} & \frac{\partial W}{\partial \phi_{E3}} & \frac{\partial W}{\partial \Omega_{huR1}} & \frac{\partial W}{\partial \Omega_{huR2}} & \frac{\partial W}{\partial \Omega_{huR3}} \\ \frac{\partial P}{\partial \phi_{E1}} & \frac{\partial P}{\partial \phi_{E2}} & \frac{\partial P}{\partial \phi_{E3}} & \frac{\partial P}{\partial \Omega_{huR1}} & \frac{\partial P}{\partial \Omega_{huR2}} & \frac{\partial P}{\partial \Omega_{huR3}} \\ \frac{\partial Q}{\partial \phi_{E1}} & \frac{\partial Q}{\partial \phi_{E2}} & \frac{\partial Q}{\partial \phi_{E3}} & \frac{\partial Q}{\partial \Omega_{huR1}} & \frac{\partial Q}{\partial \Omega_{huR2}} & \frac{\partial Q}{\partial \Omega_{huR3}} \\ \frac{\partial R}{\partial \phi_{E1}} & \frac{\partial R}{\partial \phi_{E2}} & \frac{\partial R}{\partial \phi_{E3}} & \frac{\partial R}{\partial \Omega_{huR1}} & \frac{\partial R}{\partial \Omega_{huR2}} & \frac{\partial R}{\partial \Omega_{huR3}} \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}} \quad (5.8)$$

Com a descrição das equações necessárias para a linearização do sistema, a linearização é realizada em duas condições de voo, onde a aeronave é capaz de atingir um estado de equilíbrio.

5.2.1 Linearização em condição de voo pairado (*hover*)

De acordo com o descrito no capítulo 4, a condição de equilíbrio em modo *hover* é atingida quando os três rotores-coaxiais se encontram inclinados verticalmente para cima e as forças de tração entre eles se igualam à força peso. Isto quer dizer que cada rotor-coaxial contribui com 1/3 da força peso. Portanto, para esta condição foram encontrados os valores de velocidade de rotação das hélices superiores Ω_{huRi} , enquanto as velocidades de rotação das hélices inferiores Ω_{hIRi} foram encontradas automaticamente através da equação (5.1). A Tabela 5.1 resume os valores dos estados e das entradas para atingir esta condição de equilíbrio. Adicionalmente, foram incluídos também os valores da velocidade de rotação das hélices inferiores para mostrar a diferença de cada uma, com relação à sua respectiva hélice superior. A equação (5.9) resume as condições de equilíbrio dinâmico para este modo de voo.

$$\sum F_B = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{T_{R1BZ}} + F_{T_{R2BZ}} + F_{T_{R3BZ}} = F_{G_B} \end{bmatrix}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \left(\sum M_{BX} = 0 \rightarrow M_{T_{R1B}} + M_{T_{R2B}} = M_{T_{R3B}} \right) \\ \left(\sum M_{BY} = 0 \rightarrow M_{T_{R1B}} = M_{T_{R2B}} \right) \\ \left(\sum M_{BZ} = 0 \rightarrow M_{Q_{R1B}} = M_{Q_{R2B}} = M_{Q_{R3B}} = 0 \right) \\ \sum M_{G_B} = 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Tabela 5.1 – Valores das variáveis de estado e de entrada para a condição de equilíbrio em voo pairado

Descrição da Variável	Unidade	Valor
Velocidade horizontal (U)	$\frac{m}{s}$	0
Velocidade lateral (V)	$\frac{m}{s}$	0
Velocidade vertical (W)	$\frac{m}{s}$	0
Velocidade de rolagem (P)	$\frac{rad}{s}$	0
Velocidade arfagem (Q)	$\frac{rad}{s}$	0

Tabela 5.1 – Valores das variáveis de estado e de entrada para a condição de equilíbrio em voo pairado

(continuação)

Velocidade de guinada (R)	$\frac{rad}{s}$	0
Ângulo de inclinação do rotor direito (ϕ_{E1})	o	90
Ângulo de inclinação do rotor esquerdo (ϕ_{E2})	o	90
Ângulo de inclinação do rotor traseiro (ϕ_{E3})	o	-90
Velocidade de rotação da hélice superior do rotor-coaxial direito (Ω_{huR1})	$\frac{rad}{s}$	708,0374
Velocidade de rotação da hélice inferior do rotor-coaxial direito (Ω_{hIR1})	$\frac{rad}{s}$	755,2848
Velocidade de rotação da hélice superior do rotor-coaxial esquerdo (Ω_{huR2})	$\frac{rad}{s}$	708,0374
Velocidade de rotação da hélice inferior do rotor-coaxial esquerdo (Ω_{hIR2})	$\frac{rad}{s}$	755,2848
Velocidade de rotação da hélice superior do rotor-coaxial traseiro (Ω_{huR3})	$\frac{rad}{s}$	703,3996
Velocidade de rotação da hélice inferior do rotor-coaxial traseiro (Ω_{hIR3})	$\frac{rad}{s}$	750,3375

Fonte: Autoria própria

Dos resultados obtidos para esta condição de equilíbrio na Tabela 5.1, observa-se que as velocidades de rotação das hélices correspondentes ao rotor-coaxial traseiro são levemente inferiores às velocidades de rotação das hélices dos rotores-coaxiais frontais. Isto se deve ao fato do C.G. da aeronave estar levemente para frente, precisando de menos força no rotor-coaxial traseiro para equilibrar o momento de tração entre os rotores, juntamente ao fato de que as asas geram uma pequena (quase desprezível) parcela de força de arrasto devido ao fluxo de ar produzido pela hélice superior dos rotores-coaxiais frontais-laterais. A Tabela 5.2 apresenta as componentes de força e momento totais da aeronave para esta condição de equilíbrio.

Tabela 5.2 – Componentes de força e momento totais para voo pairado

Descrição da Componente	Unidade	Valor
Força total frontal (F_{BX})	N	$1.7 * 10^{-15}$
Força total lateral (F_{BY})	N	$8.7 * 10^{-16}$
Força total vertical (F_{BZ})	N	$-1.7 * 10^{-7}$
Momento total de rolagem (M_{BX})	Nm	$3.5 * 10^{-18}$
Momento total de arfagem (M_{BY})	Nm	$2.7 * 10^{-7}$
Momento total de guinada (M_{BZ})	Nm	$-2.8 * 10^{-4}$

Fonte: Autoria própria

Portanto, da tabela anterior é possível corroborar a condição de equilíbrio em que a aeronave se encontra para o voo pairado/*hover*.

Aplicando a equação (5.7) para linearizar o modelo na condição de *hover*, com as condições iniciais descritas pela Tabela 5.1, as matrizes A e B para este modo de voo são obtidas usando o Matlab®:

$$A_{Hover} = \begin{bmatrix} -0.3382 & 0 & 9 * 10^{-4} & 0 & 0.0070 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 * 10^{-4} & 0 & -0.2314 & 0 & -2 * 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0.0016 & -0.9465 & 0.0121 & 0.0044 \\ 0.0673 & 0 & -0.0022 & -0.0077 & -0.4454 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1329 & -0.1552 & -0.0760 & -0.6459 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$B_{Hover} = \begin{bmatrix} -3.2710 & -3.2710 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.2303 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0050 & 0.0050 & 0 & -0.0092 & -0.0092 & -0.0092 \\ -0.4617 & 0.4617 & -0.0847 & -0.0949 & 0.0949 & 0 \\ -0.1401 & -0.1401 & 0.2272 & 0.0309 & 0.0309 & -0.0623 \\ 14.0559 & -14.0559 & -13.2908 & 0.0036 & -0.0036 & 0.0623 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Analisando as matrizes A e B obtidas, começa-se por observar os autovalores da matriz A , os quais constituem os polos do sistema e descreverão se o sistema é estável ou não. Através do comando ‘`eig(A)`’ no Matlab[®] são obtidos os autovalores do sistema:

$$\lambda_{Hover} = \begin{bmatrix} -0.9440 \\ -0.6482 \\ -0.4498 \\ -0.3340 \\ -0.2314 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

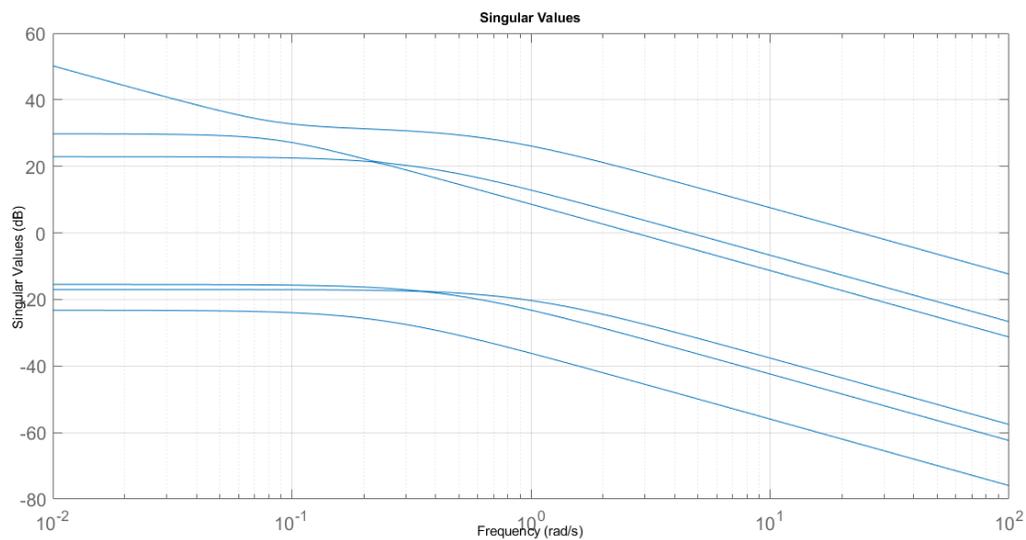
Observa-se na equação (5.12) que, para esta condição de voo, os autovalores apontam a polos no semi-plano negativo, com exceção de um. Portanto existe um estado que é marginalmente estável. Isto quer dizer que este estado não se alterará naturalmente, porém, se for perturbado, ele não será capaz de voltar para sua condição inicial, tornando-o instável. Os demais autovalores demonstram que o resto de estados são estáveis.

Por outro lado, sabendo que existe a possibilidade de instabilidade, é necessário compreender se o sistema será capaz de estabilizar e exercer controle sobre sua dinâmica, através das variáveis de entrada apresentadas na equação (5.3). Para isto, inicialmente, é usada a linha de comando ‘`Ctr_rank = rank(ctrb(A,B))`’, para encontrar o “posto” da matriz de controlabilidade, dado que se a matriz de controlabilidade der um posto igual ao número de estados, então o sistema será controlável. Neste caso, o posto da matriz de controlabilidade deu como resultado 6, igual de fato ao número de estados. Isto quer dizer que até este ponto, o sistema na condição de linearização *hover* se mostra instável, porém, controlável.

Para entender o grau de controle sobre a aeronave, foi realizado no Matlab[®] uma análise através do *singular value decomposition* – SVD da matriz de controlabilidade. Dando como resultados a matriz de valores singulares apresentada na equação (5.13) e a Figura 5.3 mostrando a variação dos valores singulares em função da frequência.

$$S_{C_{Hover}} = \begin{bmatrix} 31.1129 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.9161 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.9997 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1672 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4015 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0164 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Figure 5.3 – Valores singulares do modo *hover* em função da frequência.



Fonte: Autoria própria.

Observa-se na equação (5.13), através dos seis valores singulares, que todos os estados mostram ser razoavelmente controláveis, com exceção do último valor singular. Este último valor singular mostra que existe um estado que requer de um grande valor ou esforço na entrada do sistema para ser controlado. A Figura 5.3 corrobora a existência e prevalência deste valor singular tão pequeno ao longo da frequência. Adicionalmente, devido ao autovalor com valor zero na equação (5.12), isto é, um polo na origem, a curva do máximo valor singular na Figura 5.3 apresenta um ganho tendendo ao infinito em baixas frequências. Ou seja, a existência de um integrador.

Por fim, dividindo o máximo valor singular pelo mínimo valor singular da equação (5.13) é encontrado o número condicional, cujo objetivo é medir quanto afeta ou altera uma entrada à

saída de um sistema. A equação (5.14) mostra o condicional encontrado para a controlabilidade do sistema.

$$\gamma c_{Hover} = 1.8946 * 10^3 \quad (5.14)$$

Isto quer dizer que o sistema é bastante sensível frente a ação das entradas em modo *hover* e se torna necessário avaliar a simulação da dinâmica para compreender de fato se o sistema é possível de ser controlado para seguir uma referência.

Foi calculada também a matriz de ganho estático, apresentada na equação (5.15). Nela é possível observar o termo ‘Inf’, correspondente ao polo na origem. O método *Relative Gain Array* – RGA foi usado para gerar a equação (5.16), a partir da matriz de ganho estático.

$$\bar{G}_{Hover} = \begin{bmatrix} -9.7085 & -9.7088 & 0.0106 & 0.0013 & 0.0013 & -0.0030 \\ 0 & 0 & \text{Inf} & 0 & 0 & 0 \\ -0.0104 & -0.0104 & -0.0004 & -0.0398 & -0.0398 & -0.0396 \\ -0.4078 & 0.3643 & -0.1786 & -0.0992 & 0.1009 & -0.0017 \\ -1.7744 & -1.7878 & 0.5148 & 0.0714 & 0.0680 & -0.1401 \\ 22.0706 & -21.6367 & -20.5947 & 0.0292 & -0.0296 & 0.0298 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Analisando as equações (5.15) e (5.16), entendendo que fisicamente apenas a inclinação do rotor-coaxial traseiro ϕ_{E3} afeta ou influi diretamente sobre a velocidade lateral V da aeronave, entende-se que o termo ‘Inf’ refere-se ao acoplamento (V, ϕ_{E3}) . Por outro lado, olhando para a equação (5.16) os ângulos de inclinação dos rotores dianteiros afetam quase em igual medida à velocidade horizontal U e à velocidade de guinada R . As velocidades de rotação dos rotores-coaxiais dianteiros afetam à velocidade vertical W , à velocidade de rolagem P e à velocidade de arfagem Q . Por fim, a velocidade de rotação do rotor-coaxial traseiro afeta à velocidade vertical W e à velocidade de arfagem Q .

$$RGA_{Hover} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.5028 & 0.5009 & 0 & -0.0005 & -0.0005 & -0.0026 \\ 0 & 0 & \text{NaN} & 0 & 0 & 0 \\ -6.0374*10^{-5} & 5.7447*10^{-5} & 0 & 0.3349 & 0.3334 & 0.3315 \\ -0.0027 & -0.0024 & 0 & 0.4942 & 0.5108 & 0.0001 \\ -0.0076 & 0.0038 & 0 & 0.1739 & 0.1589 & 0.6709 \\ 0.5075 & 0.4976 & 0 & -0.0025 & -0.0026 & 3.6988*10^{-15} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\begin{matrix} \phi_{E1} & \phi_{E2} & \phi_{E3} & \Omega_{huR1} & \Omega_{huR2} & \Omega_{huR3} \end{matrix}$$

Adicionalmente, para dar maior confiabilidade aos resultados obtidos até este momento, foi encontrado o “posto” da matriz de observabilidade através do comando ‘Obs_rank = rank (obsv (A, C))’. Lembrando que a matriz C foi considerada uma matriz identidade 6x6, assumindo um sistema com seus estados totalmente observáveis. O resultado apontou novamente um posto de 6, corroborando a consideração de observabilidade dos estados.

Para avaliar o grau de observabilidade do sistema, foi aplicado novamente o método SVD para a matriz de observabilidade, apresentada na equação (5.17). Observa-se nesta equação que os valores singulares foram todos próximos entre eles.

A equação (5.18) mostra o número condicional da matriz de observabilidade. Deste resultado pode-se corroborar que o sistema possui um bom grau de observabilidade.

$$S_{O_{Hover}} = \begin{bmatrix} 2.2482 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3184 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1217 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0583 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0268 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$\gamma_{O_{Hover}} = 2.2482 \quad (5.18)$$

5.2.2 Linearização em condição de voo reto-nivelado (cruzeiro)

Com um procedimento análogo ao exposto para modo de voo pairado, é realizada a linearização da planta no modo de voo reto nivelado ou cruzeiro. Para esta condição de voo é considerada uma condição de velocidade horizontal (para frente) de $U = 20 \text{ m/s}$, enquanto os demais estados possuem valores nulos. Por ser considerada uma condição de equilíbrio, mesmo havendo velocidade para frente, a aeronave não deverá apresentar componentes de aceleração. Isto quer dizer que, horizontalmente, a aeronave deverá igualar as forças de arrasto aerodinâmico da fuselagem e das asas, com a força de tração dos rotores-coaxiais frontais-laterais. Por outro lado, verticalmente, a soma das forças de tração dos três rotores-coaxiais e das forças de sustentação das asas, deverão igualar à força peso. Adicionalmente, os momentos em torno aos três eixos de rotação da aeronave $[X, Y, Z]_B$ deverão ser nulos para evitar acelerações angulares. A equação (5.20) resume as condições necessárias para atingir o equilíbrio nesta condição de voo.

$$\begin{aligned} \sum F_B = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \left(\sum F_{BX} = 0 \rightarrow F_{T_{R1BX}} + F_{T_{R2BX}} = F_{A_{W1BX}} + F_{A_{W2BX}} + F_{D_{F_{BX}}} \right) \\ 0 \\ \left(\sum F_{BZ} = 0 \rightarrow F_{T_{R1BZ}} + F_{T_{R2BZ}} + F_{T_{R3BZ}} + F_{A_{W1BZ}} + F_{A_{W2BZ}} = F_{G_B} \right) \end{bmatrix} \\ \sum M_B = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \left(\sum M_{BX} = 0 \rightarrow M_{T_{R1BX}} + M_{T_{R2BX}} + M_{A_{W1BX}} + M_{A_{W2BX}} = M_{T_{R3BZ}} \right) \\ \left(\sum M_{BY} = 0 \rightarrow M_{T_{R1BY}} + M_{A_{W1BY}} = M_{T_{R2BY}} + M_{A_{W2BY}} \right) \\ \left(\sum M_{BZ} = 0 \rightarrow M_{T_{R1BZ}} - M_{A_{W1BZ}} = M_{T_{R2BZ}} - M_{A_{W2BZ}} \right) \\ \sum M_{Q_B} = \sum M_{G_B} = 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Portanto, o desafio para esta condição de voo reto-nivelado é encontrar os valores dos ângulos de inclinação ϕ_{Ei} e das velocidades de rotação das hélices superiores Ω_{huRi} e inferiores Ω_{hlRi} que permitam satisfazer as condições de equilíbrio expostas na equação (5.19). A Tabela 5.3 apresenta as condições iniciais das variáveis de estado e das variáveis de entrada, incluindo as velocidades de rotação das hélices inferiores, para alcançar a condição de equilíbrio em voo cruzeiro. Vale ressaltar que os valores encontrados para esta condição de equilíbrio foram obtidos através de tentativa e erro, já que para cada condição de velocidade da aeronave, haverá uma determinada combinação de ângulos de inclinação nos rotores-coaxiais.

Tabela 5.3 – Valores das variáveis de estado e de entrada para a condição de equilíbrio em voo cruzeiro

Descrição da Variável	Unidade	Valor
Velocidade horizontal (U)	$\frac{m}{s}$	20
Velocidade lateral (V)	$\frac{m}{s}$	0
Velocidade vertical (W)	$\frac{m}{s}$	0
Velocidade de rolagem (P)	$\frac{rad}{s}$	0
Velocidade arfagem (Q)	$\frac{rad}{s}$	0
Velocidade de guinada (R)	$\frac{rad}{s}$	0
Ângulo de inclinação do rotor direito (ϕ_{E1})	°	6,725
Ângulo de inclinação do rotor esquerdo (ϕ_{E2})	°	6,725
Ângulo de inclinação do rotor traseiro (ϕ_{E3})	°	-90
Velocidade de rotação da hélice superior do rotor-coaxial direito (Ω_{huR1})	$\frac{rad}{s}$	793,9796
Velocidade de rotação da hélice inferior do rotor-coaxial direito (Ω_{hIR1})	$\frac{rad}{s}$	808,7662
Velocidade de rotação da hélice superior do rotor-coaxial esquerdo (Ω_{huR2})	$\frac{rad}{s}$	793,9796
Velocidade de rotação da hélice inferior do rotor-coaxial esquerdo (Ω_{hIR2})	$\frac{rad}{s}$	808,7662
Velocidade de rotação da hélice superior do rotor-coaxial traseiro (Ω_{huR3})	$\frac{rad}{s}$	723,1296

Tabela 5.3 – Valores das variáveis de estado e de entrada para a condição de equilíbrio em voo cruzeiro

(continuação)

Velocidade de rotação da hélice inferior do rotor-coaxial traseiro (Ω_{hr3})	$\frac{rad}{s}$	771,3811
---	-----------------	----------

Fonte: Autoria própria

Através dos valores apresentados na Tabela 5.3, observa-se que para esta condição de voo para frente e em equilíbrio, o ângulo de inclinação das asas e de seus respectivos rotores-coaxiais é muito menor, quando comparado com o ângulo de inclinação para a condição de voo *hover*. Isto faz sentido devido ao fato de que a aeronave deve apontar seus rotores frontais para frente e assim conseguir propulsão que a faça atingir a velocidade de $U = 20 \frac{m}{s}$ (para frente). Adicionalmente observa-se que a velocidade de rotação das hélices dos rotores frontais é superior à velocidade de rotação das hélices do rotor-coaxial traseiro. Isto se deve ao fato de que, com os rotores-coaxiais dianteiros inclinados quase horizontalmente, a força de tração destes rotores contribui praticamente apenas para o movimento no eixo longitudinal X_B , e a velocidade gerada graças a esta propulsão, contribui para gerar força de sustentação nas asas. A força de sustentação das asas, junto com a força de tração do rotor-coaxial traseiro se igualam à força peso. Por outro lado, o momento aerodinâmico causado pela força de sustentação das asas, mais a pequena contribuição do momento causado pela força de tração dos rotores-coaxiais frontais; deve se igualar ao torque causado pela força de tração do rotor-coaxial traseiro para evitar momentos em torno do eixo lateral Y_B . Por fim, observa-se que as velocidades de rotação das hélices do rotor-coaxial direito são equivalentes, respectivamente, às velocidades de rotação das hélices do rotor-coaxial esquerdo. Desta forma, na condição de equilíbrio, os momentos de tração causados por estes dois rotores-coaxiais, se eliminam mutuamente. Evitando torque em torno do eixo vertical da aeronave Z_B . Da mesma forma, os momentos aerodinâmicos causados pela força de sustentação das asas, se eliminam mutuamente, evitando torque em torno do eixo longitudinal da aeronave X_B . A Tabela 5.4 apresenta as componentes de força e momento totais da aeronave para esta condição de equilíbrio.

Tabela 5.4 – Componentes de força e momento totais para voo cruzeiro

Descrição da Componente	Unidade	Valor
Força total frontal (F_{BX})	N	$9.9 * 10^{-7}$
Força total lateral (F_{BY})	N	$9.2 * 10^{-16}$
Força total vertical (F_{BZ})	N	$-3.8 * 10^{-8}$
Momento total de rolagem (M_{BX})	Nm	0
Momento total de arfagem (M_{BY})	Nm	$-1 * 10^{-4}$
Momento total de guinada (M_{BZ})	Nm	$-3 * 10^{-4}$

Fonte: Autoria própria

Portanto, da tabela anterior é possível corroborar a condição de equilíbrio em que a aeronave se encontra para o voo reto-nivelado.

Aplicando então a equação (5.7) para linearizar o modelo na condição de voo cruzeiro, com as condições iniciais descritas pela Tabela 5.3, as matrizes A e B para este modo de voo são obtidas:

$$A_{Cruzeiro} = \begin{bmatrix} -0.6506 & 0 & 0.0892 & 0 & -0.0278 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ -0.5270 & 0 & -1.5352 & 0 & 20.4018 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0014 & -3.2856 & 0.0124 & -0.3257 \\ 1.9107 & 0 & 4.9119 & -0.0079 & -1.9758 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1322 & -0.1571 & -0.0757 & -1.3416 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$B_{Cruzeiro} = \begin{bmatrix} -2.2993 & -2.2993 & 0 & 0.0082 & 0.0082 & 0 \\ 0 & 0 & 3.4136 & 0 & 0 & 0 \\ -14.8633 & -14.8633 & 0 & -0.0014 & -0.0014 & -0.0094 \\ -91.6982 & 91.6982 & -0.0750 & -0.0386 & 0.0386 & 0 \\ 55.3126 & 55.3126 & 0.2397 & 0.0051 & 0.0051 & -0.0637 \\ 4.9311 & -4.9311 & -13.9487 & -0.0335 & 0.0335 & 0.0031 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Vale a pena comparar as matrizes A e B para ambos os modos de voo, *hover* e cruzeiro. Observa-se que as matrizes mudam bastante, justamente porque a dinâmica do veículo é muito diferente entre estas duas condições de voo. Observa-se também que para a matriz B , em ambas

condições de voo, a contribuição da inclinação dos rotores-coaxiais (as três primeiras colunas da matriz B) para os estados do sistema é muito maior do que a contribuição da velocidade de rotação das hélices (superiores) dos rotores-coaxiais (as três últimas colunas da matriz B). Portanto, isto demonstra que a vetorização de forças de tração, em conjunto com a inclinação das asas, tem um efeito bastante relevante na dinâmica do sistema.

Analisando as matrizes A e B obtidas, observa-se os autovalores da matriz A , os quais constituem os polos do sistema e descreverão se o sistema é estável ou não. Os autovalores do sistema obtidos para esta condição são:

$$\lambda_{Cruzeiro} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.2717 \\ -11.7480 \\ -0.6853 \\ -1.3156 \\ -3.3116 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Observa-se que os autovalores do sistema mudaram completamente com relação a aqueles obtidos no modo de voo pairado. Neste caso, agora não somente existe um autovalor em zero, indicando um estado “neutralmente estável”, como também existe um autovalor positivo; indicando um polo no semi-plano direito. Conseqüentemente, existe um estado naturalmente instável no sistema para a condição de voo em modo reto-nivelado. Portanto, assim como foi feito para o modo *hover*, é necessário entender se a aeronave pode ser controlada e levada para a estabilidade, através das variáveis de entrada apresentadas na equação (5.3).

Usando novamente linha de comando ‘`Ctr_rank = rank(ctrb(A,B))`’, constata-se que o posto da matriz de controlabilidade dá como resultado o valor de 6. Mostrando que para esta condição de voo é possível controlar a aeronave. Porém, para entender o grau de controlabilidade, é aplicado novamente o método SVD para encontrar os valores singulares neste modo de voo. A equação (5.23) mostra a matriz de valores singulares. A Figura 5.4 mostra a variação dos valores singulares em função da frequência.

$$S_{C_{Cruzeiro}} = \begin{bmatrix} 24.713378*10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 439.907*10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 58.464*10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.382*10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19.3988 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.2283 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

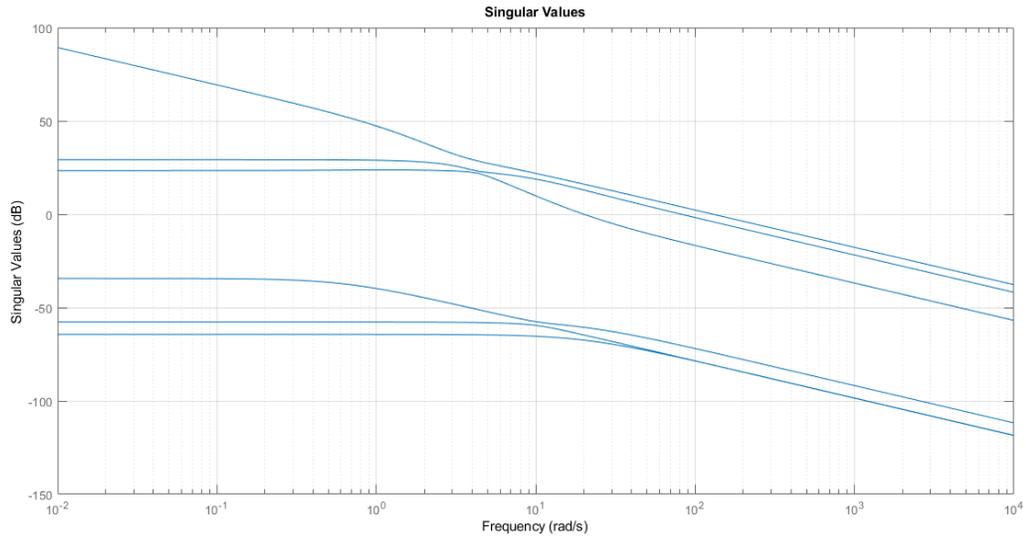
Da Figura 5.3 e da equação (5.23) observa-se a grande variação entre os valores singulares máximo e mínimo para este modo de voo. A equação (5.24) mostra o número condicional para o voo cruzeiro. Portanto, para esta condição de voo observa-se o mal condicionamento que a aeronave possui. Mostrando que uma pequena variação nos sinais de entrada pode causar grandes variações nas saídas do sistema, tornando o sistema bastante sensível a mudanças nas variáveis de entrada.

$$\gamma_{C_{Cruzeiro}} = 3.9676 * 10^6 \quad (5.24)$$

Se torna necessário avaliar a simulação da dinâmica para compreender de fato se o sistema é possível de ser controlado para seguir referências de posição e velocidade.

Foi calculada também a matriz de ganho estático para modo cruzeiro, apresentada na equação (5.25). Nela é possível observar o termo ‘Inf’, correspondente ao polo na origem. O método *Relative Gain Array* – RGA foi usado para gerar a equação (5.26), a partir da matriz de ganho estático.

Figura 5.4 – Valores singulares do modo cruzeiro em função da frequência.



Fonte: Autoria própria

$$\bar{G}_{Cruzeiro} = \begin{bmatrix} -4.8282 & -4.8161 & -0.0061 & 0.0118 & 0.0118 & 0.0017 \\ 8.6703 \cdot 10^{16} & -8.0718 \cdot 10^{16} & \text{Inf} & -3.0395 \cdot 10^{14} & 3.0248 \cdot 10^{14} & 3.8873 \cdot 10^{13} \\ -9.4727 & -9.3826 & -0.0462 & -0.0056 & -0.0056 & 0.0128 \\ -28.7042 & 28.5077 & 1.0191 & -0.0094 & 0.0093 & -8.4729 \cdot 10^{-5} \\ -0.1090 & -0.1019 & -0.0036 & -5.2942 \cdot 10^{-5} & -5.0614 \cdot 10^{-5} & 0.0014 \\ 7.9763 & -6.0834 & -10.5116 & -0.0233 & 0.0244 & 0.0009 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$RGA_{Cruzeiro} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.1000 & 0.0998 & 0 & 0.4001 & 0.4008 & -0.0010 \\ 0 & 0 & \text{NaN} & 0 & 0 & 0 \\ 0.4394 & 0.4528 & 0 & 0.1187 & 0.0931 & -0.1041 \\ 0.4568 & 0.4550 & 0 & 0.0442 & 0.0438 & 6.7843 \cdot 10^{-6} \\ -0.0462 & -0.0459 & 0 & -0.0082 & -0.0046 & 1.1051 \\ 0.0499 & 0.0381 & 0 & 0.4451 & 0.4668 & 4.8572 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$\begin{matrix} \phi_{E1} & \phi_{E2} & \phi_{E3} & \Omega_{huR1} & \Omega_{huR2} & \Omega_{huR3} \end{matrix}$$

Observa-se através da equação (5.26) que para esta condição de voo, os ângulos de inclinação dos rotores dianteiros influem principalmente na velocidade vertical W e na velocidade de rolagem P , além de influir levemente sobre a velocidade horizontal U . O ângulo de inclinação

do rotor traseiro novamente sugere um acoplamento com a velocidade lateral V . A velocidade de rotação das hélices dos rotores-coaxiais dianteiros influem principalmente sobre a velocidade horizontal U e sobre a velocidade de guinada R , além de influir levemente sobre a velocidade vertical W . Por fim, a velocidade de rotação das hélices do rotor-coaxial traseiro influi principalmente sobre a velocidade de arfagem Q e levemente sobre a velocidade vertical W .

Para avaliar a observabilidade, através do comando 'Obs_rank = rank (obsv (A, C)) ', corrobora-se que o sistema seja observável (dando como resultado posto igual a 6). Porém, novamente é avaliado o grau de observabilidade através do método SVD para esta matriz. A equação (5.27) mostra a matriz de valores singulares para a matriz de observabilidade de modo cruzeiro e a equação (5.28) o número condicional correspondente. Dos resultados obtidos, entende-se que a observação dos estados para esta condição de voo será bastante sensível e que talvez seja necessário usar um observador ou estimador de estados (como, por exemplo, um filtro de Kalman).

$$S_{O_{Cruzeiro}} = \begin{bmatrix} 308.086*10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30.914*10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 469.0050 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 81.8942 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.9877 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$\gamma_{O_{Cruzeiro}} = 308.086*10^3 \quad (5.28)$$

5.3 CONTROLE LQRI DE VELOCIDADE RELATIVA AO CORPO DA AERONAVE

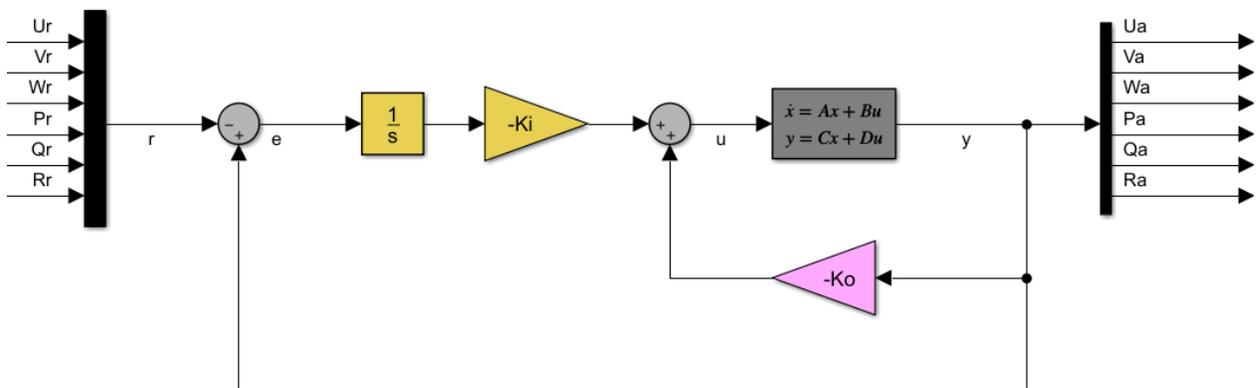
Como estratégia de controle para a dinâmica da aeronave, foi projetado um controlador do tipo regulador linear quadrático integrador (LQRI). Esse deve controlar ao mesmo tempo, as velocidades (lineares e angulares) relativas ao sistema fixo ao centro de gravidade da aeronave,

i.e., ao sistema B . Desta forma busca-se criar um controlador através da estratégia LQR capaz de levar os estados descritos na equação (5.3) até uma determinada referência, contando com o vetor de entradas u , também visto na equação (5.3), para a formulação de espaço de estados do modelo linear.

De acordo com Yechout et al. (2003, p. 433, cap. 9), os controladores de velocidade em projetos de aeronaves geralmente representam o laço interno de uma malha de controle fechada em cascata. Sua função é geralmente a de garantir estabilidade à aeronave e auxiliar ao piloto (caso exista) a controlar a aeronave. O laço externo do sistema em malha fechada geralmente está relacionado com o controle de posição e atitude do veículo no espaço e trabalha em conjunto com o controlador de velocidade. Na seção seguinte será tratado o controlador de posição e atitude para este projeto.

Tomando como referência a Figura 2.7, o diagrama de blocos de um controlador LQRI aplicado ao controle de velocidades lineares e angulares do drone terá o formato apresentado na Figura 5.5. O subscrito “r” refere-se às referências e o subscrito “a” refere-se ao estado atual.

Figura 5.5 – Diagrama de blocos LQRI para o controle de velocidades lineares e angulares da aeronave relativas ao sistema fixo ao corpo B



Fonte: Autoria própria

Da Figura 5.4 é necessário ressaltar que existirão matrizes de ganho “Ki” e “Ko” distintas para cada modo de voo (*hover* e *cruzeiro*), já que estas matrizes dependem das matrizes A e B , respectivas para cada modo de voo.

Portanto, os vetores de referência “r”, de saída “y” e erro “e” serão como apresentados na equação (5.29):

$$r(t) = \begin{bmatrix} Ur(t) \\ Vr(t) \\ Wr(t) \\ Pr(t) \\ Qr(t) \\ Rr(t) \end{bmatrix}, y(t) = \begin{bmatrix} Ua(t) \\ Va(t) \\ Wa(t) \\ Pa(t) \\ Qa(t) \\ Ra(t) \end{bmatrix}, e = [y(t) - r(t)] = \begin{bmatrix} Ua(t) - Ur(t) \\ Va(t) - Vr(t) \\ Wa(t) - Wr(t) \\ Pa(t) - Pr(t) \\ Qa(t) - Qr(t) \\ Ra(t) - Rr(t) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

O vetor de entradas “u” à planta linear do sistema, para este projeto será:

$$u_{6 \times 1}(t) = -Ko_{6 \times 6} x_{6 \times 1}(t) - Ki_{6 \times 6} \int e_{6 \times 1}(t) dt$$

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \\ u_6(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} ko_{11} & \dots & & & & \\ \vdots & & & & & \\ ko_{61} & \dots & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t) \\ Vr(t) \\ \\ \\ \\ R(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int (Ua(t) - Ur(t)) dt \\ \int (Va(t) - Vr(t)) dt \\ \int (Wa(t) - Wr(t)) dt \\ \int (Pa(t) - Pr(t)) dt \\ \int (Qa(t) - Qr(t)) dt \\ \int (Ra(t) - Rr(t)) dt \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

A integração de estados gera um vetor de estados aumentados para o controle de velocidade da aeronave. Este terá o seguinte formato:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (Ua(t)-Ur(t)) \\ (Va(t)-Vr(t)) \\ (Wa(t)-Wr(t)) \\ (Pa(t)-Pr(t)) \\ (Qa(t)-Qr(t)) \\ (Ra(t)-Rr(t)) \\ \dot{U}(t) \\ \dot{V}(t) \\ \dot{W}(t) \\ \dot{P}(t) \\ \dot{Q}(t) \\ \vdots \end{bmatrix}}_{A_{12 \times 1}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & C_{6 \times 6} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\sim Nova_{12 \times 12}} \underbrace{\begin{bmatrix} \int (Ua(t)-Ur(t)) dt \\ \int (Va(t)-Vr(t)) dt \\ \int (Wa(t)-Wr(t)) dt \\ \int (Pa(t)-Pr(t)) dt \\ \int (Qa(t)-Qr(t)) dt \\ \int (Ra(t)-Rr(t)) dt \\ U(t) \\ V(t) \\ W(t) \\ P(t) \\ Q(t) \\ r(t) \end{bmatrix}}_{\sim A_{12 \times 1}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_{6 \times 6} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\sim Nova_{12 \times 6}} \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{E1}(t) \\ \phi_{E2}(t) \\ \phi_{E3}(t) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\sim u(t)} - \underbrace{\begin{bmatrix} I_{6 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\sim u(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} Ur(t) \\ Vr(t) \\ Wr(t) \\ Pr(t) \\ Qr(t) \\ r(t) \end{bmatrix}}_{\sim u(t)} \quad (5.31)$$

Definindo as matrizes Q e R da função de custo do erro quadrático na equação (5.32), onde os pesos ou coeficientes q_i e ρ_i foram encontrados através de tentativa e erro, observando a resposta do sistema em regime transiente e permanente; buscando uma resposta à entrada degrau com pouco máximo sobressinal (*overshoot*) e com erro em regime permanente inferior a 5%.

$$J_{custo} = \min_{u(t)} \int_0^{\infty} \left(Xe(t)^T Q_{12 \times 12} Xe(t) + u(t)^T R_{6 \times 6} u(t) \right) dt \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}
 Q_{12 \times 12} &= \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_{12} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \rho_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_6 \end{bmatrix} \\
 \rightarrow Q_{12 \times 12} &\geq 0 \\
 \rightarrow R_{6 \times 6} &> 0
 \end{aligned} \quad (5.33)$$

É possível então, aplicar a equação algébrica de Ricatti:

$$A_{Nova}^T P + P A_{Nova} - P B_{Nova} R_{6 \times 6}^{-1} B_{Nova}^T P + Q_{12 \times 12} = 0 \quad (5.34)$$

E as matrizes de ganho do controlador LQRI para controle da velocidade relativa ao corpo da aeronave são obtidas em (5.35).

$$K_{6 \times 12} = R_{6 \times 6}^{-1} B_{Nova} P$$

$$K_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & & & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{61} & \cdots & & & \cdots & & \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Por fim, com a malha fechada do sistema, é possível obter a seguinte equação:

$$\dot{x}(t) = A_{Nova} x(t) - B_{Nova} K_{6 \times 12} x(t) = (A_{Nova} - B_{Nova} K_{6 \times 12}) x(t) \quad (5.36)$$

5.4 CONTROLE PID DE POSIÇÃO E ATITUDE NO ESPAÇO

O controle proporcional integrador derivativo (PID) é usado para controlar a posição e atitude do VANT no espaço (em relação ao sistema inercial I). Este controlador age no laço externo de controle do sistema e sua entrada corresponde à diferença entre referências e valores atuais de posição e atitude. Ao mesmo tempo, a saída deste controlador PID servirá de entrada para o controlador LQRI de velocidade relativa ao sistema fixo ao corpo B (correspondente ao laço interno).

A Figura 5.6 mostra o diagrama de blocos generalizado para o laço externo do controlador. Duas observações devem ser feitas neste ponto. A primeira é ressaltar que se assume que todos os estados são observáveis, dispensando o uso (por enquanto), de observadores ou estimadores de estado. Na prática, um filtro de Kalman será indispensável para o controle da aeronave na realidade. A segunda observação é que para o controlador PID se comunicar com o laço interno são necessários dois blocos que servem como “pontes”. O primeiro, após a saída do controlador PID, deriva o resultado do controlador, obtendo velocidades em relação ao sistema inercial I e o transforma do sistema inercial para o sistema fixo ao corpo B . Isso é obtido através da inversão das equações cinemáticas para velocidades lineares e angulares (3.101) e (3.102) apresentadas no

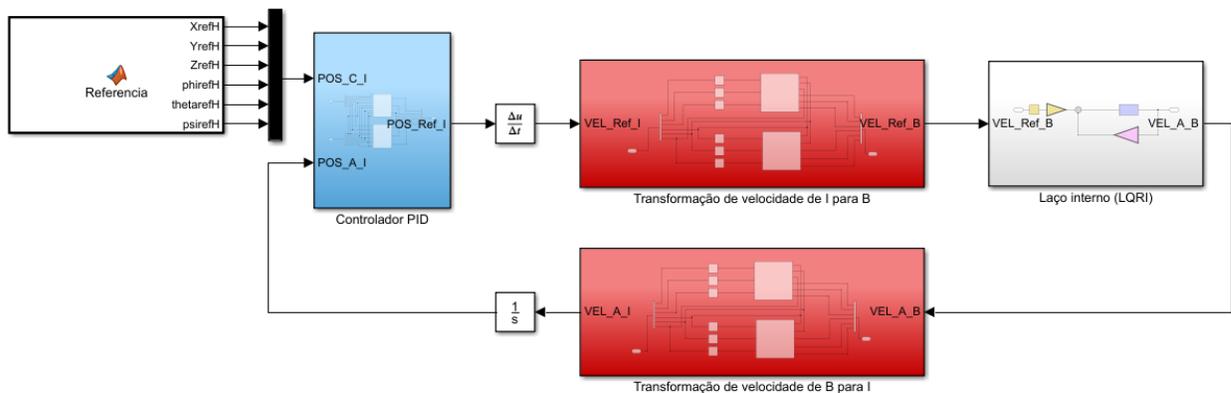
capítulo 3. A relação inversa destas equações é mostrada na equação (5.37). Desta forma surgem as velocidades de referência para o laço interno do controlador.

$$\begin{aligned} [U \quad V \quad W]^T &= (R_{XYZ}|_I^B) \begin{bmatrix} \dot{X}_I & \dot{Y}_I & \dot{Z}_I \end{bmatrix} \\ [P \quad Q \quad R]^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Uma vez que a malha interna gera a saída das velocidades atuais (instantâneas) da aeronave, relativas ao sistema B , estas passam por uma transformação inversa às expostas na equação (5.37) (observadas na equação (5.38)), para depois serem integradas. Desta forma é gerada a posição e atitude relativas da aeronave atuais/instantâneas em relação ao sistema inercial I e que serão comparadas com a posição e atitude de referência.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{X}_I & \dot{Y}_I & \dot{Z}_I \end{bmatrix} &= (R_{XYZ}|_I^B)^{-1} [U \quad V \quad W]^T \\ \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}^{-1} [P \quad Q \quad R]^T \end{aligned} \quad (5.38)$$

Figura 5.6 – Diagrama de blocos generalizado da malha de controle do sistema

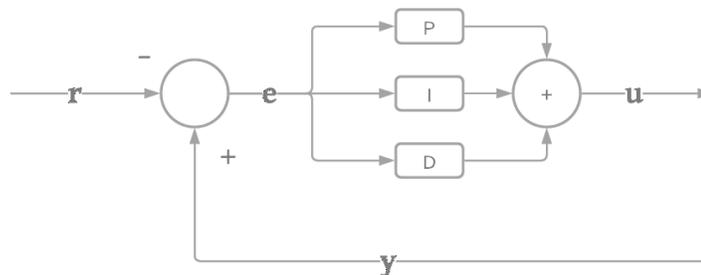


Fonte: Autoria própria

Para o controlador PID é usado o bloco nativo correspondente do Simulink, cuja estrutura padrão refere-se a um sistema de componentes proporcional, integrador e derivativo em paralelo, como é apresentado na Figura 5.7. Nesta figura, as referências “r” correspondem (individualmente) à posição e atitude demandadas da aeronave, o vetor de saída “y”, que vem da realimentação, corresponde (individualmente) à posição e atitude atuais da aeronave. O vetor de erros “e”, que serve de entrada para o controlador PID, é considerado desde já como a diferença entre a saída “y” e a referência “r”, já que este padrão é mantido até entrar no laço interno do controlador LQRI. O vetor saída do controlador PID “u” será derivado no tempo e entrará no bloco de transformação de velocidade de I para B .

Um controlador PID é usado para cada uma das componentes de posição $[X, Y, Z]_I$ e para cada uma das componentes de atitude $[\phi, \theta, \psi]_I$, relativas ao sistema inercial I . Portanto, para cada uma destas seis variáveis é necessário sintonizar os ganhos K_p , K_i e K_d . A sintonização é feita através de tentativa e erro observando a resposta do sistema em regime transiente e permanente; buscando uma resposta à entrada degrau com pouco *overshoot* e com erro em regime permanente inferior a 5%.

Figura 5.7 – Diagrama de blocos do controlador PID utilizado



Fonte: Autoria própria

Portanto, para o controlador PID na Figura 5.6:

$$r(t) = \begin{bmatrix} Xr(t) \\ Yr(t) \\ Zr(t) \\ \phi r(t) \\ \theta r(t) \\ \psi r(t) \end{bmatrix}_I, y(t) = \begin{bmatrix} Xa(t) \\ Ya(t) \\ Za(t) \\ \phi a(t) \\ \theta a(t) \\ \psi a(t) \end{bmatrix}_I, e = [y(t) - r(t)] = \begin{bmatrix} Xa(t) - Xr(t) \\ Ya(t) - Yr(t) \\ Za(t) - Zr(t) \\ \phi a(t) - \phi r(t) \\ \theta a(t) - \theta r(t) \\ \psi a(t) - \psi r(t) \end{bmatrix}_I \quad (5.39)$$

5.5 CONCLUSÕES

Neste capítulo foi apresentada a abordagem usada para simplificar e tratar a sobre atuação do VANT, forçando a hélice inferior de um determinado rotor-coaxial a manter uma velocidade que anulasse o torque induzido pela hélice superior. Adicionalmente foram apresentadas as abordagens para linearizar o modelo não-linear da aeronave em duas condições de voo distintas: *hover* e *cruzeiro*; mostrando que em ambas as condições o sistema é instável, porém, controlável e sendo necessário simular a dinâmica controlada do sistema nestas condições para validar se mesmo com números condicionais elevados, o sistema pode ser controlado com objetivo de estabilizá-lo e comandá-lo. Por fim, foram apresentadas as arquiteturas dos controladores LQRI para o controle de velocidade relativa ao sistema fixo ao C.G. da aeronave *B* (no laço interno) e o controlador PID para o controle da posição e atitude relativa ao sistema inercial *I* (no laço externo).

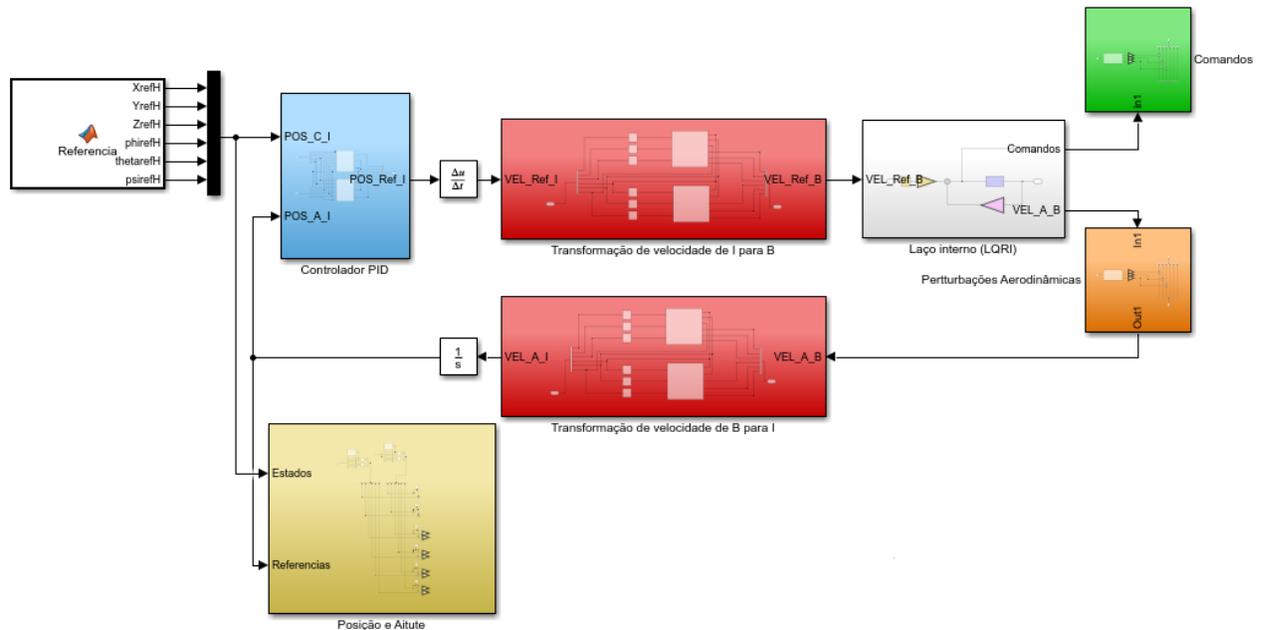
6 SIMULAÇÃO E RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos para o controle da aeronave VANT VTOL proposta para o seguimento de referências, com a implementação da estratégia de controle descrita no capítulo anterior. Inicialmente é testada uma condição de controle apenas de velocidades relativas ao corpo da aeronave (com o laço interno LQRI). Depois são testados quatro tipos de trajetória diferentes (considerando posição e atitude relativas ao sistema inercial I), duas para a condição de voo em modo pairado no ar (*hover*) e duas para modo de voo cruzeiro. Adicionalmente, para avaliação do sistema frente a perturbações atmosféricas como rajadas de vento, na última trajetória de cada modo de voo testado, é repetida a simulação acrescentando a perturbação de vento.

6.1 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Para a simulação da dinâmica da aeronave é usado o software Matlab R2108b, dentro do ambiente Simulink, com o uso do *solver* “ode15s”. O esquemático apresentado na Figura 5.4 mostra o diagrama de blocos generalizado para a simulação, porém, a este diagrama foram acrescentados os blocos “Comandos”, “Perturbações atmosféricas” e “Posição e Atitude”. O diagrama de blocos final é apresentado na Figura 6.1.

Figure 6.1 – Diagrama de blocos final do sistema VTOL



Fonte: Autoria própria

O bloco “Comandos” é usado para extrair os dados dos comandos usados para controlar a aeronave, sendo estes os ângulos de inclinação dos três rotores-coaxiais ϕ_{Ei} e as velocidades de rotação das hélices superiores dos três rotores-coaxiais Ω_{huRi} .

Da mesma forma, o bloco “Posição e Atitude” é usado para extrair os dados de posição e atitude atuais e de referência, com relação ao sistema inercial I .

Já o bloco “Perturbações atmosféricas”, é usado à frente da saída do laço interno de controle (LQRI) que produz como resultado as velocidades da aeronave atuais em relação ao sistema fixo ao corpo B . A partir deste ponto, o bloco “Perturbações atmosféricas” adiciona às velocidades atuais da aeronave valores de velocidade produzidos pela ação do vento sobre o veículo e o resultado deste bloco entra para o bloco de transformação das velocidades do referencial fixo ao corpo B para o referencial inercial I .

O bloco de “Referência” gera as trajetórias desejadas através dos valores comandados para posição e atitude da aeronave no espaço tridimensional \mathfrak{R}^3 (referencial I), em função do tempo.

6.2 PARÂMETROS DOS CONTROLADORES

Para definir os parâmetros dos controladores foi necessário classificá-los de acordo com a condição de voo sobre a qual o modelo foi linearizado e, ainda, de acordo com o tipo de trajetória, já que foi observado que para uma determinada trajetória de referência ser alcançada com sucesso, era necessário sintonizar os ganhos dos controladores de forma independente.

O processo de sintonia dos ganhos dos controladores PID e LQRI foi realizado através de testes computacionais até que resultados adequados para o seguimento das referências de posição e atitude fossem alcançados. Contudo, para a matriz de ponderação de entradas R do controlador LQRI, observou-se que os pesos requeriam valores bastante baixos para alcançar um controle adequado da aeronave.

É necessário ressaltar que não foram consideradas restrições para as entradas de controle (ângulos de inclinação ϕ_{Ei} e velocidade de rotação das hélices superiores Ω_{huRi}), já que buscou-se avaliar os limites necessários para os comandos. Contudo, esperava-se que os limites para os ângulos de inclinação e velocidade de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais não ultrapassassem os seguintes limites (tomando como referência a Figura 3.3 para os ângulos de inclinação):

$$\begin{aligned} -45^\circ &\leq \phi_{E1} = \phi_{E2} \leq 180^\circ \\ -45^\circ &\leq \phi_{E3} \leq 225^\circ \\ 0 &\leq \Omega_{huRi} \leq 2.094,4 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] (20.000[\text{rpm}]) \end{aligned} \quad (6.1)$$

6.2.1 Parâmetros do Controlador LQRI para Controle de Velocidades Relativas ao Corpo

Para testar o controle da aeronave, inicialmente foi realizado o teste de controle de velocidades lineares e angulares, relativas ao sistema fixo ao corpo B , partindo da condição linearizada de voo cruzeiro, com velocidade horizontal $U = 20\text{m/s}$. Para isto foi necessário definir as matrizes ponderação Q e R da função de custo do controlador LQR. É necessário ressaltar que a matriz Q terá dimensões 12×12 devido à integração de estados, enquanto que a matriz R terá

dimensões 6x6, de acordo com as variáveis de controle da aeronave (ângulos de inclinação ϕ_{Ei} e velocidade de rotação das hélices superiores Ω_{huRi}). A equação (6.2) mostra os valores escolhidos para as matrizes Q e R. A matriz I na equação (6.2) representa uma matriz identidade.

$$LQRI \begin{cases} Q = 15[I]_{12 \times 12} \\ R = 0.0001[I]_{6 \times 6} \end{cases} \quad (6.2)$$

Observa-se que o coeficiente multiplicando a matriz identidade para a matriz de ponderação de entradas de controle R precisou ser bastante reduzido. Isto sugere que a inclinação dos rotores, principalmente os frontais-laterais (junto com as asas), tem um efeito bastante relevante sobre a dinâmica do sistema.

6.2.2 Parâmetros dos Controladores PID e LQRI para Controle de Trajetória Circular-Diagonal em Modo *Hover*

Para a primeira trajetória escolhida, é demandado ao drone seguir a trajetória de um círculo “inclinado” no ar, partindo de modo de voo pairado no ar. Para esta condição de voo, a equação (6.3) apresenta os valores encontrados para as matrizes de Q e R do controlador LQRI, enquanto que a Tabela 6.1 mostra os valores para os ganhos Kp , Ki e Kd para cada uma das coordenadas lineares e angulares.

$$LQRI \begin{cases} Q = 15[I]_{12 \times 12} \\ R = 0.001[I]_{6 \times 6} \end{cases} \quad (6.3)$$

Tabela 6.1 – Ganhos dos controladores PID para cada uma das variáveis de posição e atitude para a trajetória circular-diagonal em modo *hover*

Variável	K_p	K_i	K_d
X_I	4.15	0.05	0.01
Y_I	4.15	0.05	0.01
Z_I	4.15	0.05	0.01
ϕ	4.15	0.15	0.01
θ	4.15	0.15	0.01
ψ	4.15	0.05	0.01

Fonte: Autoria própria

6.2.3 Parâmetros dos Controladores PID e LQRI para Controle de Trajetória Helicoidal em Modo *Hover*

Para esta trajetória é demandado ao drone seguir uma trajetória de helicóide no ar, i.e., subindo enquanto realiza circunferências no ar, partindo de modo de voo *hover*. Para esta condição de voo, os valores encontrados para as matrizes de Q e R do controlador LQRI foram mantidos iguais aos da equação anterior (6.3), enquanto que a Tabela 6.2 mostra os valores para os ganhos K_p , K_i e K_d para cada uma das coordenadas lineares e angulares.

Tabela 6.2 – Ganhos dos controladores PID para cada uma das variáveis de posição e atitude para a trajetória helicoidal em modo *hover*

Variável	K_p	K_i	K_d
X_I	15.15	5	0.01
Y_I	15.15	5	0.01
Z_I	4.15	0.05	0.01
ϕ	25	17	0.01
θ	25	20	0.01
ψ	25.15	5	0.01

Fonte: Autoria própria

Observa-se na Tabela 6.2 que os ganhos Kp e Ki dos controladores PID mudaram significativamente quando comparados com os mesmos ganhos apresentados na Tabela 6.1. Isto se deve a que foi necessário elevar os ganhos para alcançar o seguimento adequado da trajetória helicoidal, comparada à trajetória circular-diagonal.

6.2.4 Parâmetros dos Controladores PID e LQRI para Controle de Trajetória Helicoidal em Modo *Hover* com Rajadas de Vento

Neste caso a missão de voo corresponde à mesma trajetória anterior, porém, em cinco momentos diferentes do voo, são simuladas rajadas tridimensionais de vento sobre a aeronave, alterando a velocidade dela no ar, enquanto tenta seguir a trajetória demandada. Para esta condição de voo, a matriz de ponderação de entradas de controle R precisou de uma mudança em seus pesos/coeficientes, de forma que houvesse uma menor resposta por parte da inclinação dos rotores, forçando o sistema a usar mais a rotação das hélices. Isto se deve ao fato de que foi observado que os ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais aproximavam-se dos limites especificados dentro da equação (6.1). A equação (6.4) mostra as matrizes Q e R do controlador LQRI para esta condição de voo, enquanto que a Tabela 6.3 apresenta os ganhos dos controladores PID.

$$LQRI \left\{ \begin{array}{l} Q = 15[I]_{12 \times 12} \\ R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Tabela 6.3 – Ganhos dos controladores PID para cada uma das variáveis de posição e atitude para a trajetória helicoidal em modo *hover*, com rajadas de vento

Variável	Kp	Ki	Kd
X_I	15.15	12.5	0.01
Y_I	15.15	12.5	0.01
Z_I	15.15	5	0.01
ϕ	25	17	0.01
θ	25	20	0.01
ψ	25.15	5	0.01

Fonte: Autoria própria

Observa-se que novamente foi necessário aumentar os ganhos proporcional Kp e integrativo Ki dos controladores correspondentes às coordenadas lineares, para tentar compensar a alteração de trajetória causada pelas rajadas de vento.

6.2.5 Parâmetros dos Controladores PID e LQRI para Controle de Trajetória Helicoidal em Modo Cruzeiro

Para a primeira trajetória em modo de voo reto nivelado ou cruzeiro, foi escalada a trajetória helicoidal em modo *hover*, com um raio de giro maior e uma demanda de altitude também maior. A equação (6.5) mostra as matrizes Q e R do controlador LQRI para esta condição de voo, enquanto que a Tabela 6.4 apresenta os ganhos dos controladores PID.

$$LQRI \begin{cases} Q = 15[I]_{12 \times 12} \\ R = 0.0005[I]_{6 \times 6} \end{cases} \quad (6.5)$$

Tabela 6.4 – Ganhos dos controladores PID para cada uma das variáveis de posição e atitude para a trajetória helicoidal em modo cruzeiro

Variável	Kp	Ki	Kd
X_I	35.15	5	0.01
Y_I	15.15	5	0.01
Z_I	4.15	0.05	0.01
ϕ	25	17	0.01
θ	35	25	0.01
ψ	55.15	15	0.01

Fonte: Autoria própria

Ressaltam-se para esta condição o aumento necessário para os ganhos dos controladores PID para a coordenada linear X_I e para as coordenadas angulares de arfagem θ e guinada ψ , com o objetivo de seguir adequadamente a trajetória comandada à aeronave.

6.2.6 Parâmetros dos Controladores PID e LQRI para Controle de Trajetória Personalizada em Modo Cruzeiro

Esta trajetória é uma extensão da trajetória anterior, começando com o mesmo helicóide anteriormente exigido, para depois realizar um “quadrilátero” no ar e terminar descendo até o ponto de partida. Para esta condição de voo, os controladores PID não precisaram de mudanças em relação aos apresentados na Tabela 6.4, porém foi necessário alterar as matrizes de ponderação Q e R do controlador LQRI. A equação 6.6 apresenta as matrizes Q e R para esta missão de voo.

$$LQRI \begin{cases} Q = 35[I]_{12 \times 12} \\ R = 0.00025[I]_{6 \times 6} \end{cases} \quad (6.6)$$

Destaca-se o aumento do coeficiente que multiplica a matriz identidade da matriz de ponderação de estados Q e a diminuição do coeficiente que multiplica a matriz identidade da matriz de ponderação de entradas de controle R.

6.2.7 Parâmetros dos Controladores PID e LQRI para Controle de Trajetória Personalizada em Modo Cruzeiro, com Rajadas de Vento

Finalmente, para a última simulação de voo, foi repetida a missão de voo anterior; contudo, desta vez foram acrescentados cinco pontos de rajadas de vento tridimensionais espalhadas ao longo da trajetória. Analogamente ao que foi feito para a missão helicoidal em modo *hover* com rajadas de vento, o vento alterará a velocidade da aeronave.

Para esta condição de voo foram usadas as mesmas matrizes de ganho Q e R para o controlador LQRI da condição anterior. No entanto, os ganhos dos controladores PID para as coordenadas lineares e angulares precisaram ser ajustados. A Tabela 6.5 mostra os ganhos para os controladores PID para esta condição de voo.

Tabela 6.5 – Ganhos dos controladores PID para cada uma das variáveis de posição e atitude para a trajetória personalizada em modo cruzeiro, com rajadas de vento

Variável	K_p	K_i	K_d
X_l	35.15	5	0.01
Y_l	15.15	5	0.01
Z_l	15.15	5	0.01
ϕ	25	17	0.01
θ	45	35	0.01
ψ	25.15	5	0.01

Fonte: Autoria própria

Observa-se, portanto, que dependendo da condição e da missão de voo, tanto os ganhos do controlador LQRI para as velocidades relativas ao corpo da aeronave, quanto dos controladores PID para a posição e atitude da aeronave em relação ao sistema inercial, precisaram ser alterados para a aeronave controlar e tentar seguir as trajetórias demandadas. Isto sugere o uso de metodologias de ajuste de ganhos (*gain scheduling*) para controlar a aeronave em diversas condições de voo.

6.3 RESULTADOS

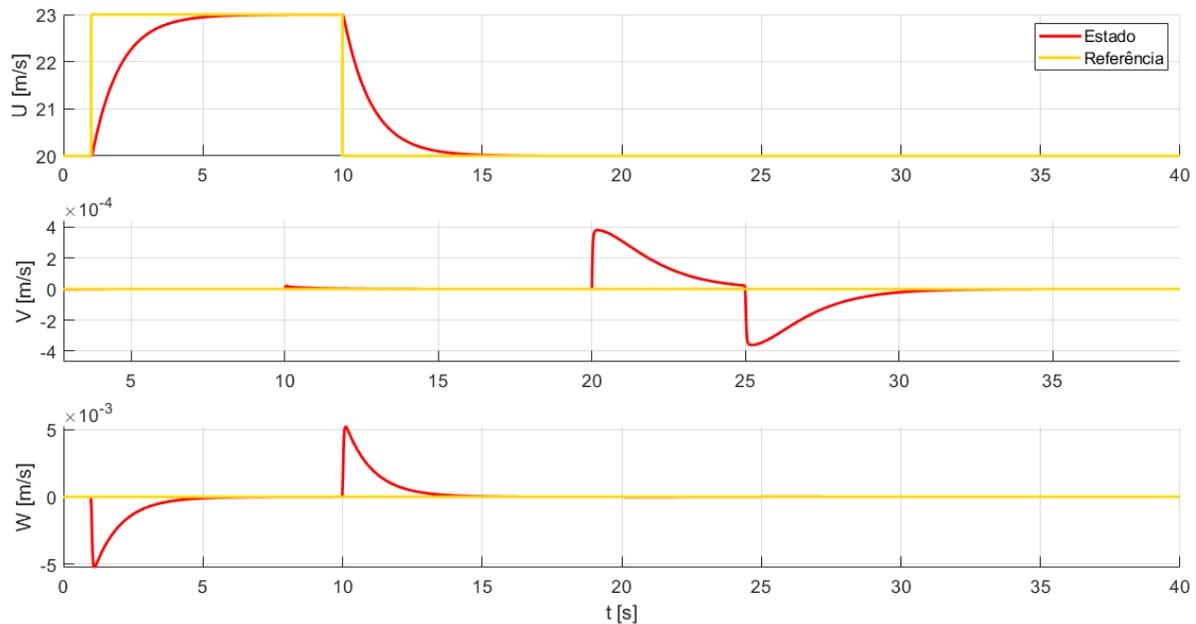
6.3.1 Resposta ao Degrau de Velocidade em Modo Cruzeiro

Para começar a analisar o comportamento do veículo, foi realizada uma simulação de controle das velocidades lineares e angulares da aeronave, relativas ao sistema fixo ao corpo B . Para esta simulação o modelo linearizado do VANT começaria em modo cruzeiro, com uma velocidade horizontal (para frente) de $U = 20\text{m/s}$ e, em determinados momentos da simulação, uma entrada degrau na velocidade longitudinal U seria comandada, seguida de um degrau de velocidade de rotação de guinada R . Para este teste, apenas o controlador do laço interno LQRI seria necessário para controlar e estabilizar simultaneamente as três componente de velocidade linear $[U, V, W]_B$ e as três componentes de velocidade angular $[P, Q, R]_B$. A equação (6.7) apresenta os degraus de velocidade comandados e os tempos nos quais estes foram demandados.

$$\text{Degrau} \begin{cases} \Delta U = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow (1\text{s} \leq t \leq 10\text{s}) \\ \Delta R = -5 \frac{\text{o}}{\text{s}} \rightarrow (20\text{s} \leq t \leq 25\text{s}) \end{cases} \quad (6.7)$$

A Figura 6.2 apresenta a resposta das velocidades lineares da aeronave, em relação ao sistema fixo ao corpo para os degraus de velocidade. Observa-se nesta figura que a aeronave atingiu o degrau de velocidade longitudinal U exigido, com um tempo de subida de 2.33 segundos e um tempo de acomodação de 5.5 segundos, sem *overshoot*.

Figura 6.2 – Resposta das velocidades lineares aos degraus de velocidade em voo cruzeiro

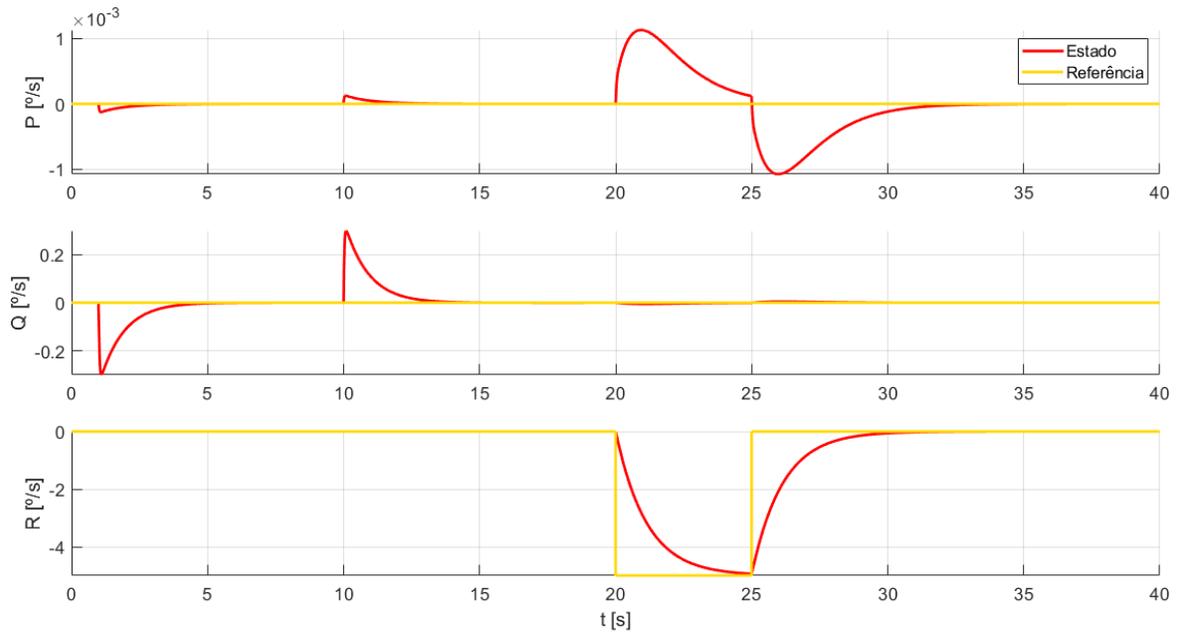


Fonte: Autoria própria

A Figura 6.3 apresenta a resposta das velocidades angulares da aeronave, em relação ao sistema fixo ao corpo para os degraus de velocidade. Através desta figura é possível observar que a aeronave atingiu satisfatoriamente o degrau de rotação de guinada negativa R . Para isto, o sistema apresentou um tempo de subida de 2,6 segundos e um tempo de acomodação de 5 segundos. Novamente, não houve presença de *overshoot*.

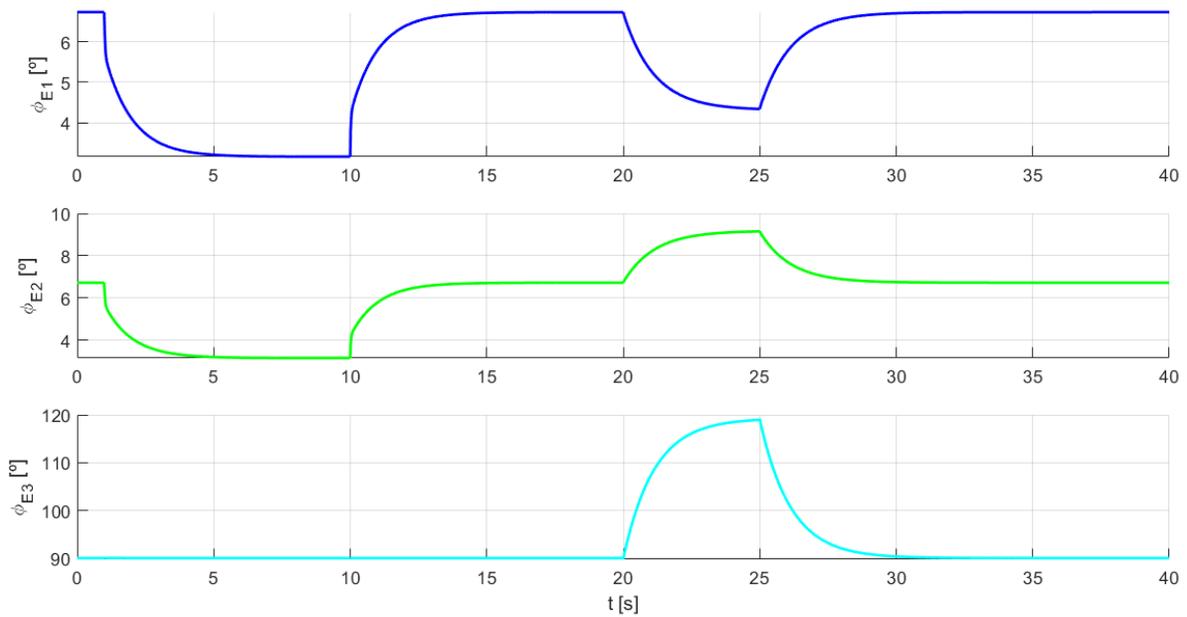
As Figuras 6.4 e 6.5 mostram a variação dos ângulos de inclinação ϕ_{Ei} e das velocidades de rotação das hélices superiores Ω_{huRi} , respectivamente.

Figura 6.3 – Resposta das velocidades angulares aos degraus de velocidade em voo cruzeiro



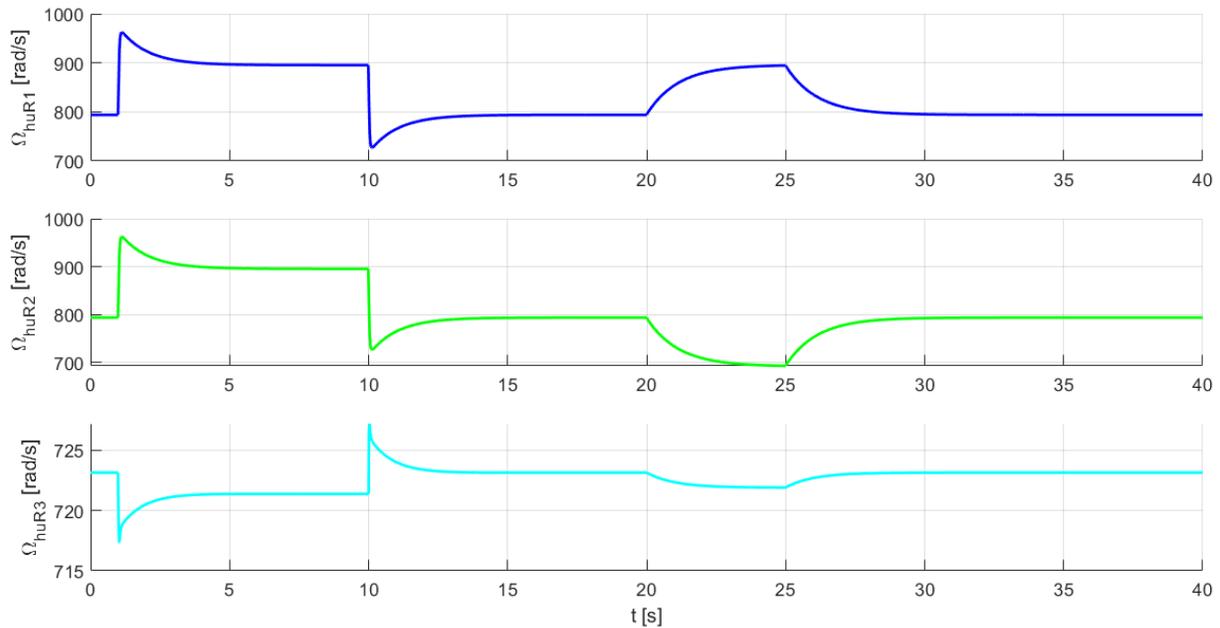
Fonte: Autoria própria

Figura 6.4 – Variação dos ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais para, os degraus de velocidade em voo cruzeiro



Fonte: Autoria própria

Figura 6.5 – Variação das velocidades de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais, para os degraus de velocidade em voo cruzeiro



Fonte: Autoria própria

Analisando as Figuras 6.4 e 6.5 é possível entender como o sistema está se comportando para atender às demandas de velocidade exigidas através dos degraus.

Inicialmente, durante o degrau de velocidade longitudinal $\Delta U = 3\text{ m/s}$, ambos os ângulos de inclinação dos rotores frontais-laterais se inclinam desde seu valor inicial de $6,7^\circ$, até se aproximarem praticamente de 0° . Com isto, o efeito imediato é que a velocidade de arfagem Q se torne negativa (inclinando o nariz da aeronave para baixo). Para compensar este efeito de arfagem negativa, o rotor-coaxial traseiro (inclinado verticalmente para cima de 90°) desacelera a rotação das suas hélices, mas isto causa uma leve “queda” da aeronave, gerando velocidade vertical negativa W . Portanto, o sistema obriga os rotores-coaxiais frontais-laterais a acelerarem a rotação das suas respectivas hélices para aumentar a força de sustentação das asas. Com isto, o rotor-coaxial traseiro acelera suas hélices também para contribuir na sustentação e atuar contra o momento de arfagem causado pelas asas. Esta condição estável se mantém por aproximadamente 5 segundos desde $t = 5$ s até $t = 10$ s, momento no qual cessa o degrau de velocidade longitudinal. A partir deste ponto, as inclinações dos rotores-coaxiais frontais-laterais e as velocidades de rotação das

hélices de todos os três rotores-coaxiais se ajustam para retornar à condição de equilíbrio inicial até o momento do início do segundo degrau comandado sobre o veículo.

Para o segundo degrau de velocidade (em $t = 20s$), o sistema começa diminuindo a inclinação do rotor-coaxial direito para perto de 0° , enquanto o rotor-coaxial esquerdo aumenta sua inclinação para perto de 9° . Isso acontece ao mesmo tempo que o rotor-coaxial direito acelera a rotação das suas hélices, enquanto o rotor-coaxial esquerdo diminui a rotação das suas respectivas hélices. Com isto, o efeito imediato é um momento de rotação negativa em torno do eixo Z_B da aeronave, buscando gerar o comando negativo de rotação de guinada R ; porém, o efeito aparenta ser tão relevante, que exige um “freio” aerodinâmico através da inclinação do rotor-coaxial traseiro, gerando um momento de guinada em oposição ao causado pelos rotores-coaxiais frontais-laterais. Novamente, em $t = 25s$, momento no qual cessa o degrau de guinada negativa, os ângulos de inclinação e as velocidades de rotação das hélices se ajustam para voltar à condição inicial de operação.

Esta simulação inicial mostra que a aeronave se comporta fisicamente de forma correta, controlando a dinâmica do veículo através dos comandos de controle (ângulos de inclinação ϕ_{Ei} e velocidade de rotação das hélices superiores Ω_{huRi}) e estabilizando ela no ar ao longo de toda a operação. Portanto, é possível afirmar através desta simulação que a aeronave aparenta ser controlável e estável graças aos comandos/variáveis de entrada.

6.3.2 Rastreamento de Trajetória Circular-Diagonal em Modo *Hover*

Uma vez percebido o comportamento correto dos comandos de controle da aeronave, como foi observado na simulação da resposta aos degraus de velocidade, houve segurança para continuar com os testes de simulação através do seguimento de trajetórias no espaço, através do uso do controlador PID em conjunto com o controlador LQRI. Começando com o modelo linearizado em voo pairado/*hover*, é exigido à aeronave seguir uma trajetória circular “inclinada” no ar.

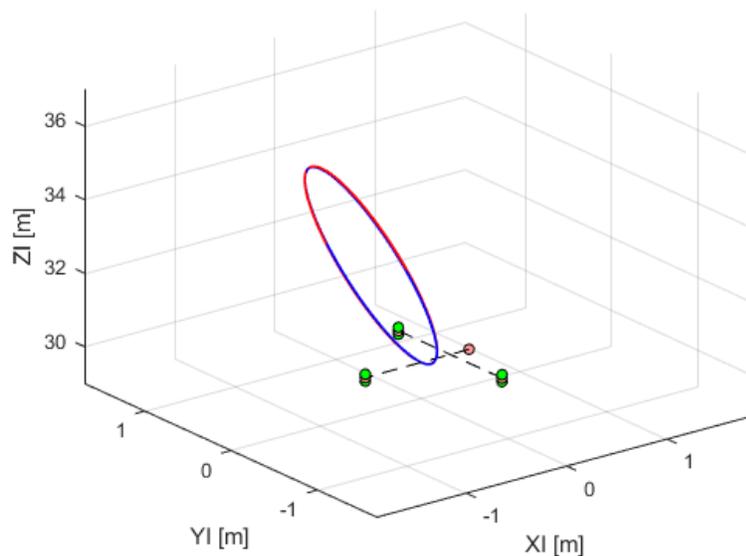
Inicialmente, a aeronave teria que ajustar seu ângulo de guinada ψ até apontar no rumo correto e então começar com a trajetória, mantendo o mesmo ângulo de guinada constante. Uma vez terminada a trajetória, o ângulo ψ deveria retornar ao valor inicial com o qual começou a

simulação. A equação (6.8) apresenta as condições iniciais e as referências de posição e atitude, ao longo do tempo, demandas à aeronave para esta missão de voo.

$$\begin{aligned}
 &\text{Condições Iniciais} \begin{cases} X_I = 0\text{m} & Y_I = 0\text{m} & Z_I = 30\text{m} \\ \phi = 0^\circ & \theta = 0^\circ & \psi = 0^\circ \end{cases} \\
 &(0s \leq t \leq 5s) \rightarrow [\psi = (-18t)^\circ] \\
 &(5s < t \leq 45s) \rightarrow \begin{bmatrix} X_I = \left(0.5 \cos\left(\frac{\pi(t-5)}{20}\right) - 0.5\right)\text{m} \\ Y_I = 0.5 \sin\left(\frac{\pi(t-5)}{20}\right)\text{m} \\ Z_I = \left(3 \cos\left(\frac{\pi(t-5)}{20}\right) + 27\right)\text{m} \end{bmatrix} \\
 &(45s < t \leq 50s) \rightarrow [\psi = (-90 + 18(t-45))^\circ]
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

A Figura 6.6 mostra a trajetória circular-diagonal executada pelo drone. Nesta Figura, a linha azul representa a trajetória de referência, enquanto a curva vermelha mostra a trajetória realizada pela aeronave. Adicionalmente, um “modelo gráfico” de referência da aeronave, na mesma escala da trajetória, é apresentado.

Figura 6.6 – Trajetória circular-diagonal em modo *hover*



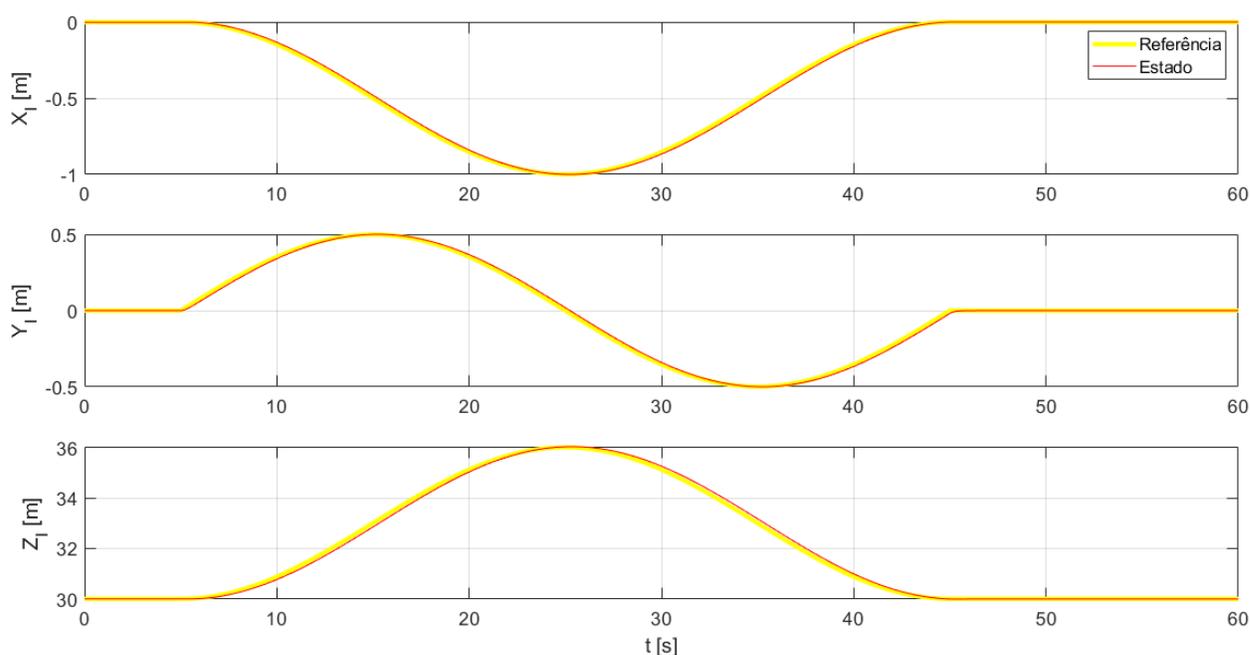
Fonte: Autoria própria

A Figura 6.7 mostra os resultados obtidos para as coordenadas de posição em relação ao sistema inercial I . Desta figura observa-se que o drone segue satisfatoriamente as coordenadas de posição e apresenta erro nulo em regime permanente.

A Figura 6.8 mostra os resultados obtidos para as coordenadas de atitude em relação ao sistema inercial I . Observa-se nesta figura que os ângulos de rolagem ϕ e arfagem θ apresentam uma oscilação de valor reduzido em torno da referência e que o ângulo de rolagem apresenta um pequeno erro em regime permanente. Já o ângulo de guinada ψ um pouco atrasado da referência, mas consegue acompanhá-la adequadamente e apresenta erro nulo em regime permanente.

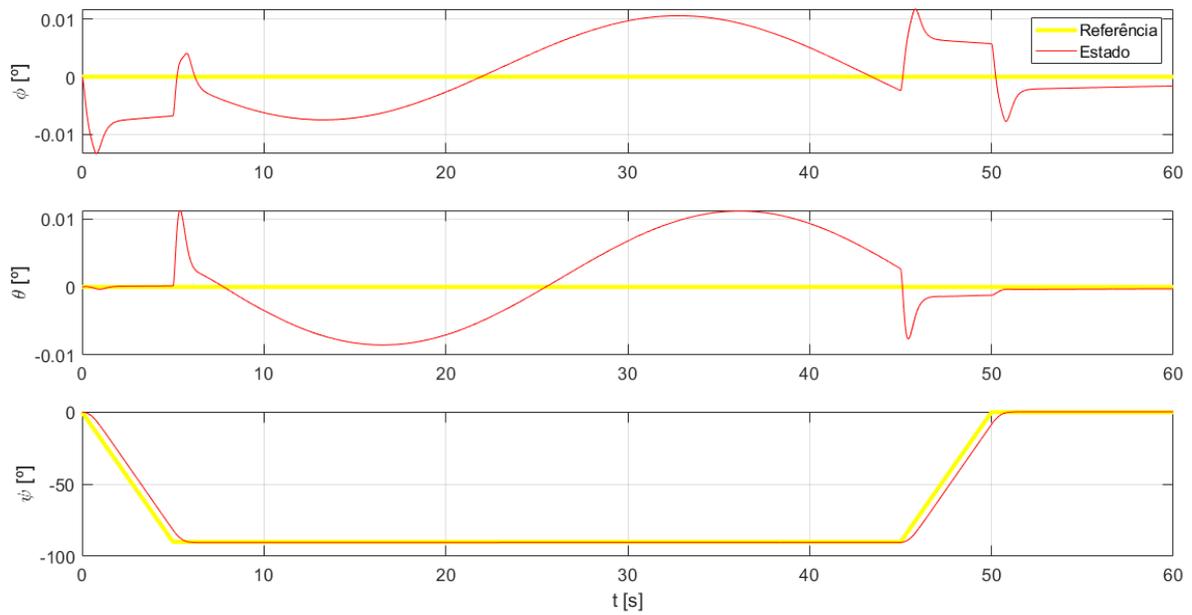
As Figuras 6.9 e 6.10 apresentam, respectivamente, os ângulos de inclinação e as velocidades de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais.

Figura 6.7 – Coordenadas de posição para a trajetória circular-diagonal em modo *hover*



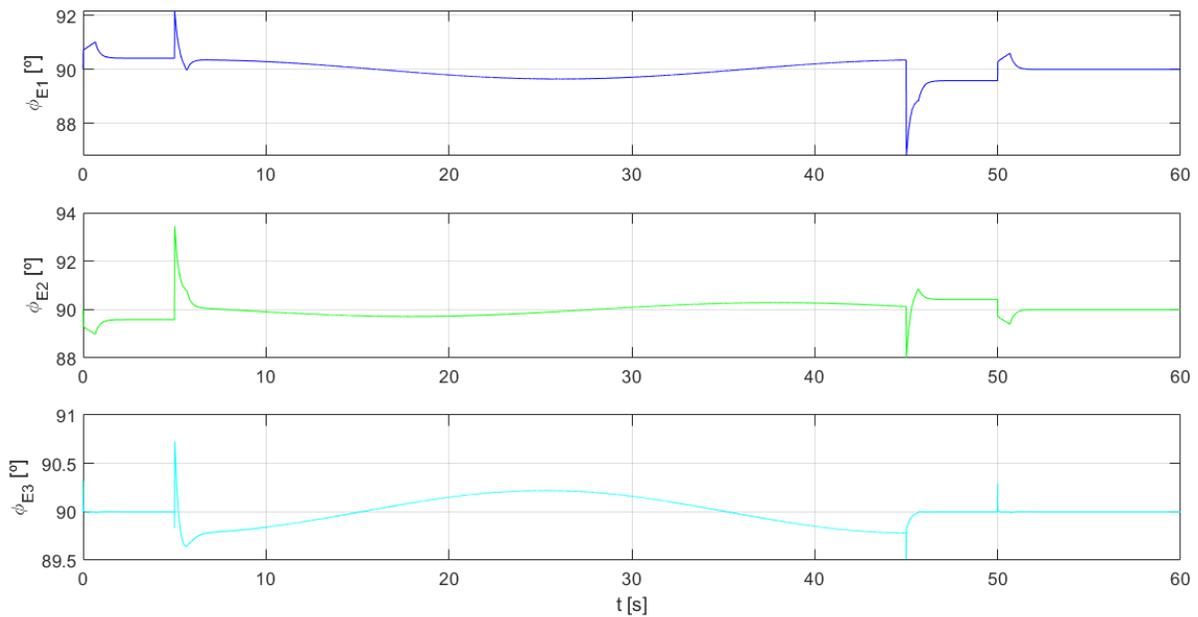
Fonte: Autoria própria

Figura 6.8 – Coordenadas de atitude para a trajetória circular-diagonal em modo *hover*



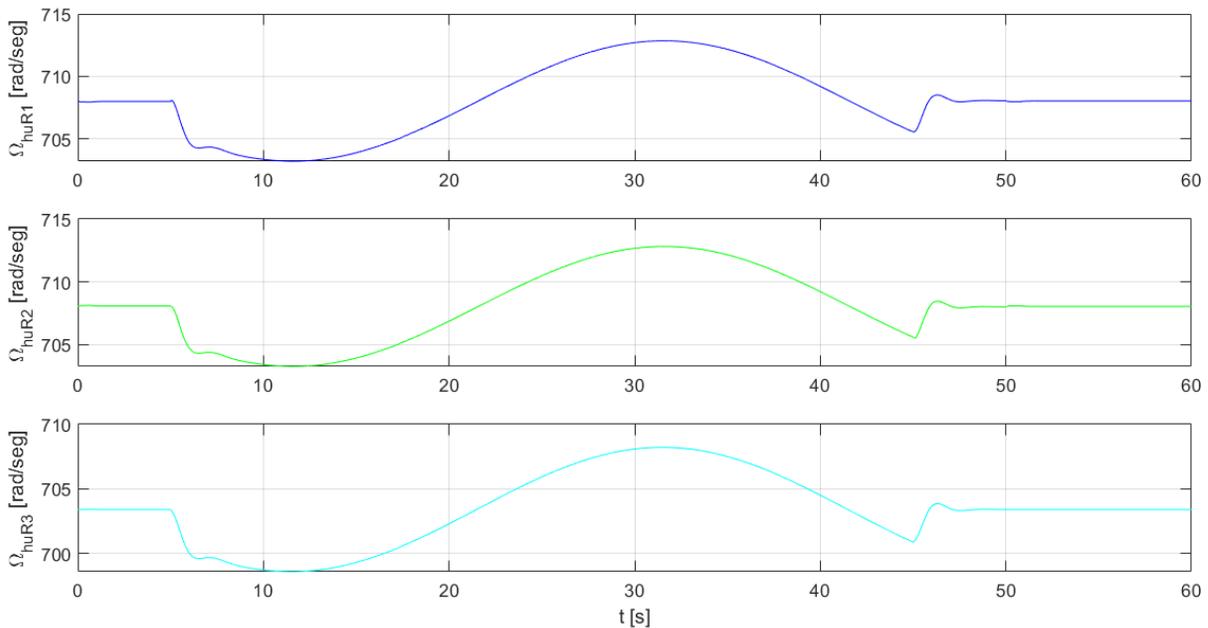
Fonte: Autoria própria

Figura 6.9 – Ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais para a trajetória circular-diagonal em modo *hover*



Fonte: Autoria própria

Figura 6.10 – Velocidades de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais, para a trajetória circular-diagonal em modo *hover*



Fonte: Autoria própria

Das Figuras 6.9 e 6.10 observa-se como o modelo dinâmico é, aparentemente, sensível a leves mudanças na inclinação dos rotores-coaxiais, enquanto há variação da rotação das hélices. Isto pode apoiar o resultado obtido no capítulo 5 para o número condicional que mede a sensibilidade nos estados do sistema, frente a variações nas variáveis de comando/entrada.

Portanto, através da simulação para a trajetória circular-diagonal, partindo do modo de voo pairado no ar, conclui-se que a aeronave foi capaz de realizá-la com sucesso.

6.3.3 Rastreamento de Trajetória Helicoidal em Modo *Hover*

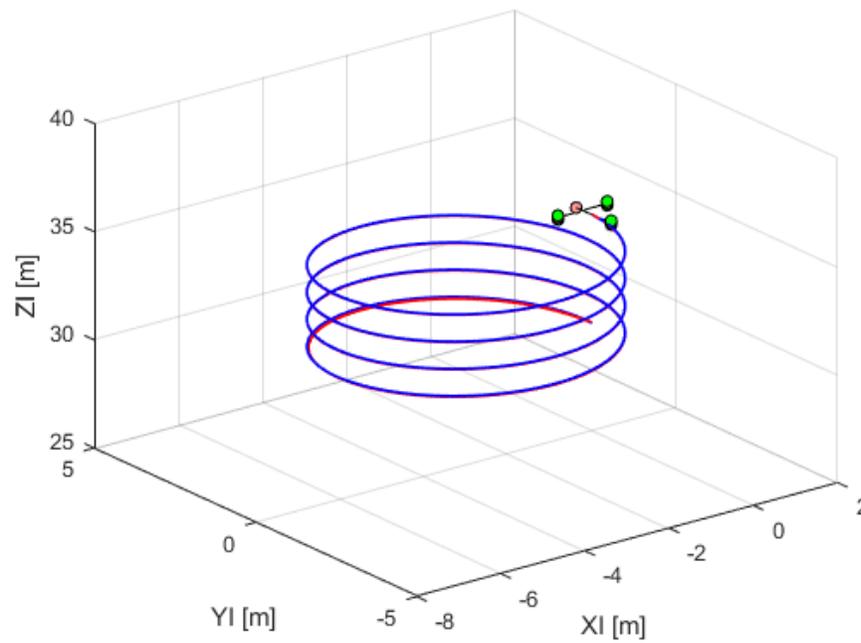
A segunda simulação partindo do modo *hover* é através do seguimento de uma trajetória helicoidal, na qual o VANT deveria realizar circunferências horizontais no ar (com um raio de 3 metros), enquanto aumentava gradativamente sua altitude. Para isto, analogamente a como foi feito na simulação anterior, o drone deveria ajustar inicialmente seu ângulo de guinada ψ , esperar 5 segundos e então começar o percurso da trajetória. Ao longo da trajetória o ângulo de guinada deverá ir mudando, seguindo a trajetória com o nariz da aeronave. A equação (6.9) mostra as

condições iniciais e as variações exigidas para as referências de posição e atitude ao longo do tempo.

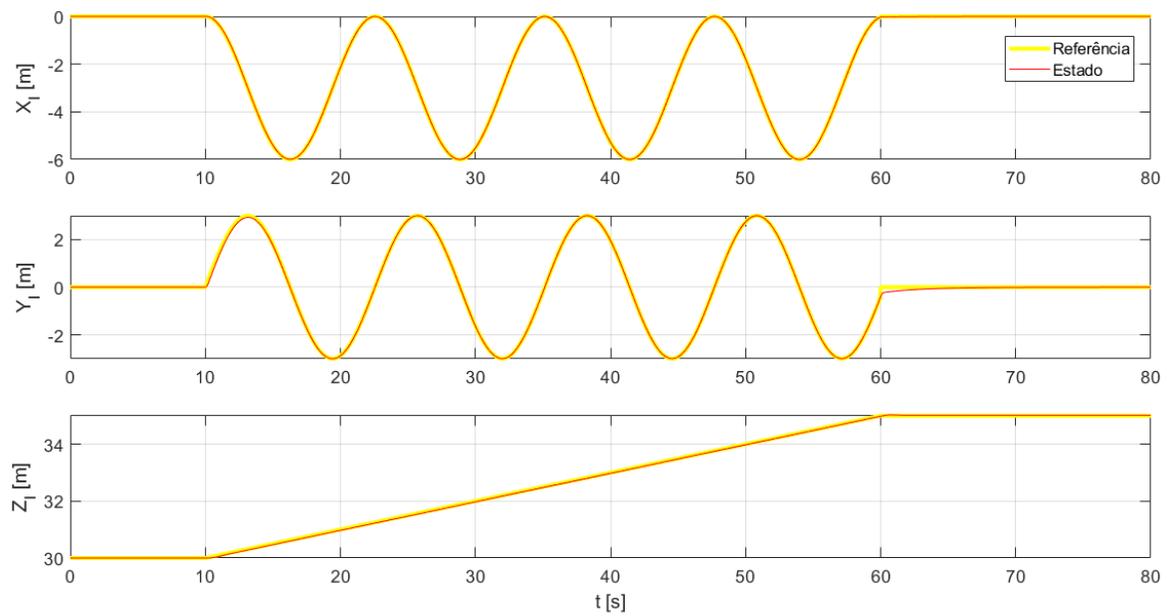
$$\begin{aligned}
 &\text{Condições Iniciais} \begin{cases} X_I = 0\text{m} & Y_I = 0\text{m} & Z_I = 30\text{m} \\ \phi = 0^\circ & \theta = 0^\circ & \psi = 0^\circ \end{cases} \\
 &(0s \leq t \leq 5s) \rightarrow [\psi = (18t)^\circ] \\
 &(10s < t \leq 60s) \rightarrow \begin{bmatrix} r = 3\text{m} \\ X_I = \left(r \cos\left(\frac{t-10}{2}\right) - r \right) \text{m} \\ Y_I = r \left(\frac{t-10}{2}\right) \text{m} \\ Z_I = \left(\frac{t-10}{10} + 30\right) \text{m} \\ \psi = \left(90 + 180\left(\frac{t-10}{2\pi}\right)\right)^\circ \end{bmatrix} \\
 &(60s < t) \rightarrow \begin{bmatrix} Z_I = 35\text{m} \\ \psi = 1530^\circ \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

A Figura 6.11 mostra a trajetória helicoidal, partindo de modo *hover*, executada pelo drone. Nesta Figura, a linha azul representa a trajetória de referência, enquanto a curva vermelha mostra a trajetória realizada pela aeronave. Adicionalmente, o “modelo gráfico” de referência da aeronave, na mesma escala da trajetória, é também apresentado.

A Figura 6.12 mostra os resultados obtidos para as coordenadas de posição em relação ao sistema inercial I , para esta trajetória. Desta figura observa-se que o drone segue satisfatoriamente as coordenadas de posição e apresenta erro nulo em regime permanente.

Figura 6.11 – Trajetória helicoidal em modo *hover*

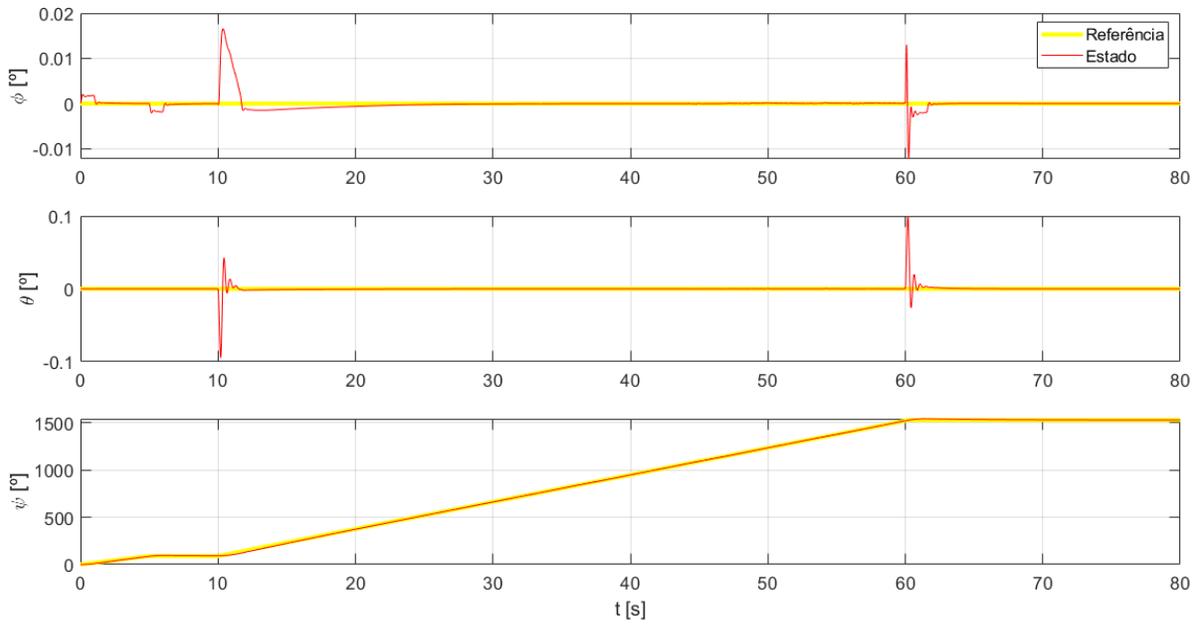
Fonte: Autoria própria

Figura 6.12 – Coordenadas de posição para a trajetória helicoidal em modo *hover*

Fonte: Autoria própria

A Figura 6.13 mostra os resultados obtidos para as coordenadas de atitude em relação ao sistema inercial I . Mesmo com oscilações reduzidas nos ângulos de rolagem e arfagem, todos os ângulos de atitude apresentaram bom desempenho, com erro nulo em regime permanente.

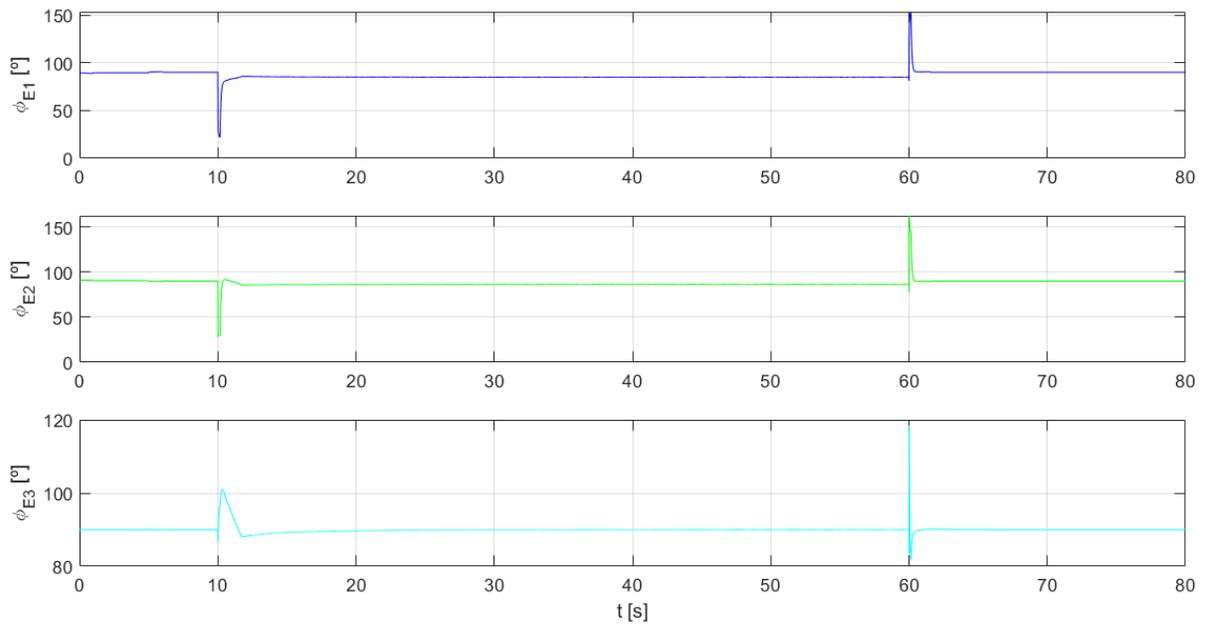
Figura 6.13 – Coordenadas de atitude para a trajetória helicoidal em modo *hover*



Fonte: Autoria própria

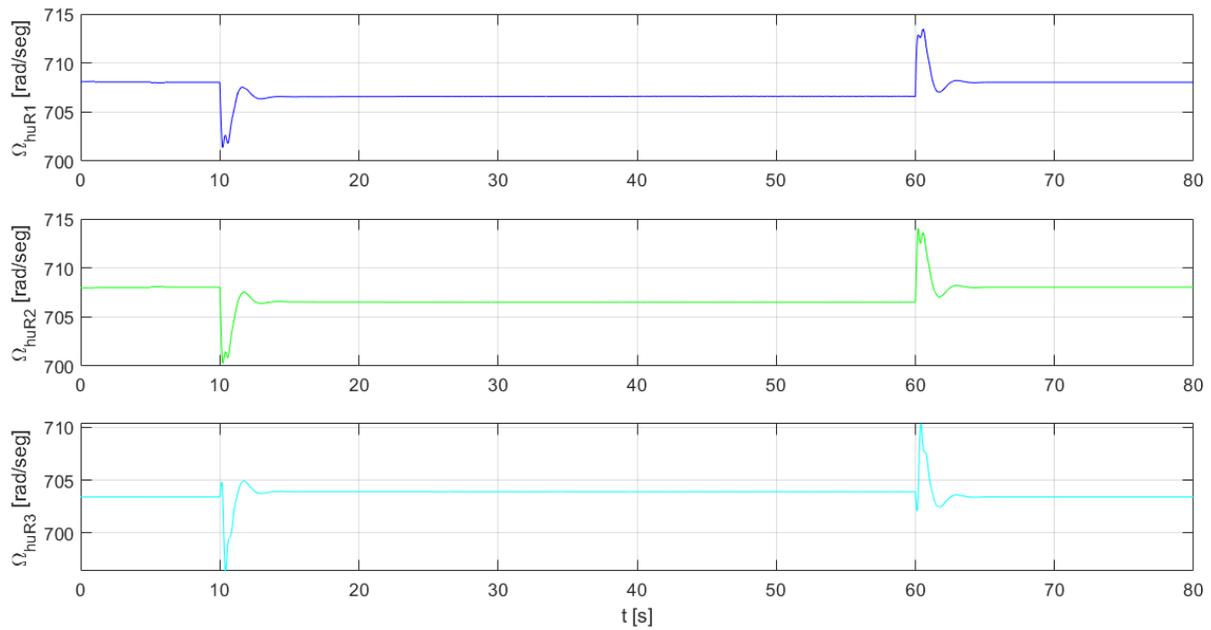
As Figuras 6.14 e 6.15 apresentam, respectivamente, os ângulos de inclinação e as velocidades de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais para esta trajetória helicoidal.

Figura 6.14 – Ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais, para a trajetória helicoidal em modo *hover*



Fonte: Autoria própria

Figura 6.15 – Velocidade de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais, para a trajetória helicoidal em modo *hover*



Fonte: Autoria própria

Observa-se desta simulação que o VANT seguiu de forma satisfatória a trajetória proposta para esta missão de voo. Apenas é necessário ressaltar os elevados ângulos de inclinação observados para o seguimento da trajetória helicoidal, partindo do modo de voo pairado no ar.

6.3.4 Rastreamento de Trajetória Helicoidal em Modo *Hover*, com Rajadas de Vento

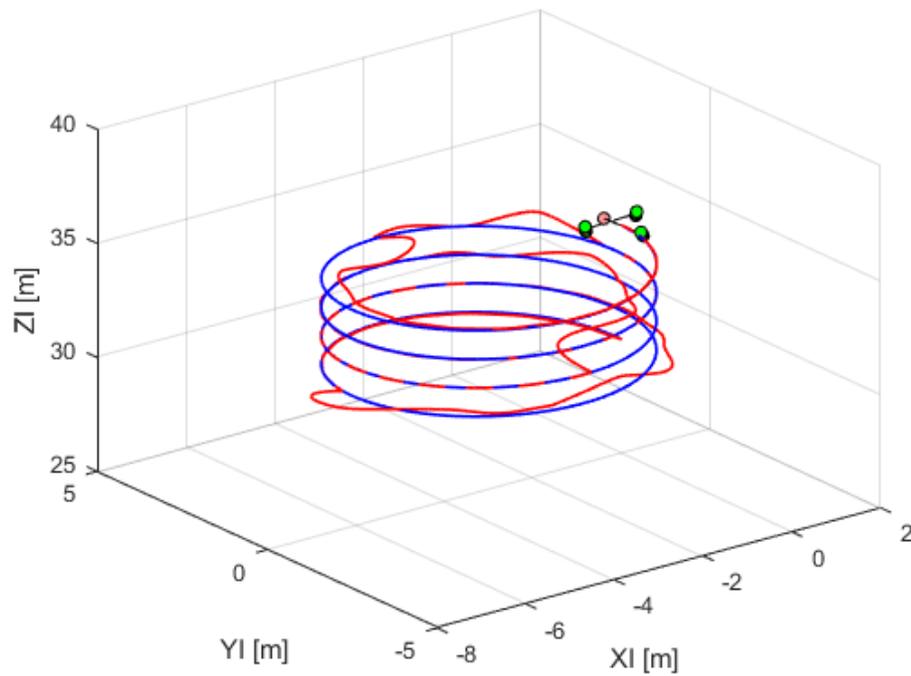
De forma a validar a capacidade da aeronave a contornar os efeitos aerodinâmicos como rajadas de vento, que possam estar presentes em uma missão de voo em condições reais; foi simulada novamente a trajetória anterior com diversos pontos ou momentos da trajetória, nos quais a velocidade da aeronave é afetada por rajadas de vento que alteram o valor da saída da planta do laço interno de controle, correspondente às componentes de velocidade da aeronave em relação ao sistema fixo ao corpo B . A equação (6.10) mostra os momentos nos quais acontecem as rajadas de vento e sua duração no tempo.

A Figura 6.16 mostra a trajetória helicoidal com a curva azul como referência e a curva vermelha como a trajetória realizada pela aeronave. Nesta figura observam-se as alterações significativas na trajetória causadas pelas rajadas de vento. Porém, é possível observar também que a aeronave conseguiu se ajustar para retomar o rumo correto.

O módulo do vetor de rajada de vento é considerado com um valor máximo de 14 m/s, com uma duração de 3 segundos.

$$\begin{aligned}
 (16s \leq t \leq 19s) &\rightarrow \begin{bmatrix} \Delta U = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \Delta V = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{bmatrix} \\
 (32s \leq t \leq 35s) &\rightarrow \begin{bmatrix} \Delta U = -2.19 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \Delta V = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \Delta W = -1.25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{bmatrix} \\
 (48s \leq t \leq 51s) &\rightarrow \begin{bmatrix} \Delta U = 2.19 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \Delta V = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \Delta W = 1.25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

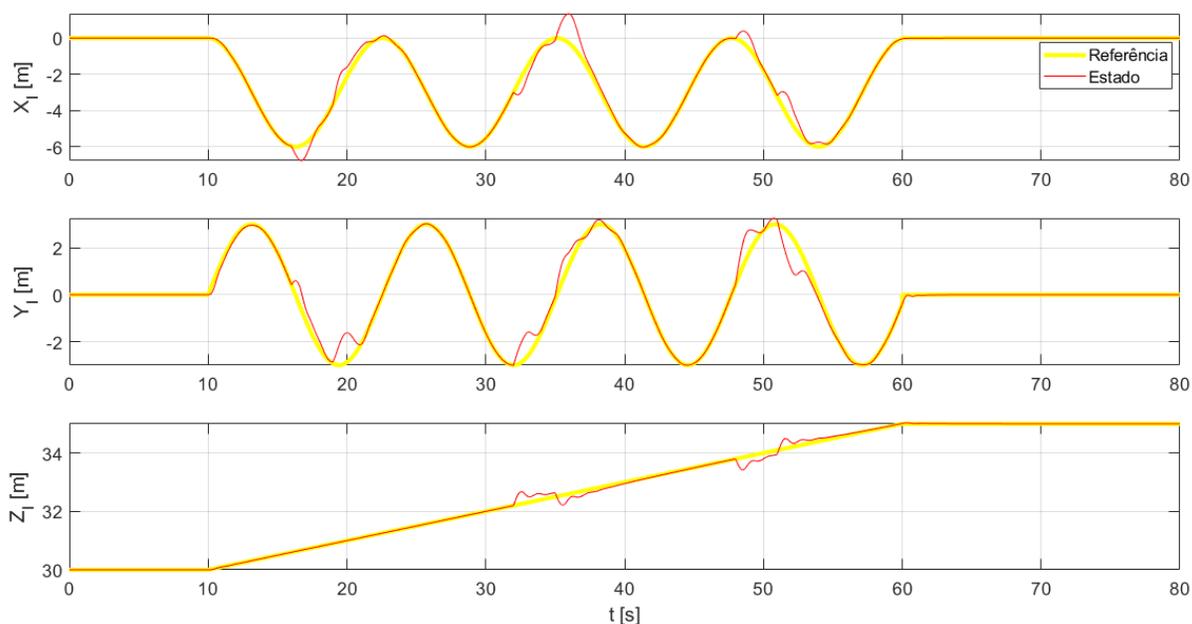
Figura 6.16 – Trajetória helicoidal em modo *hover*, com rajadas de vento



Fonte: A autoria própria

A Figura 6.17 apresenta os resultados das coordenadas de posição para esta missão de voo. Observa-se como em regime transiente a aeronave reage para tentar seguir as coordenadas de posição comandadas, a pesar das alterações causadas pelas rajadas de vento.

Figura 6.17 – Coordenadas de posição para a trajetória helicoidal em modo *hover*, com rajadas de vento

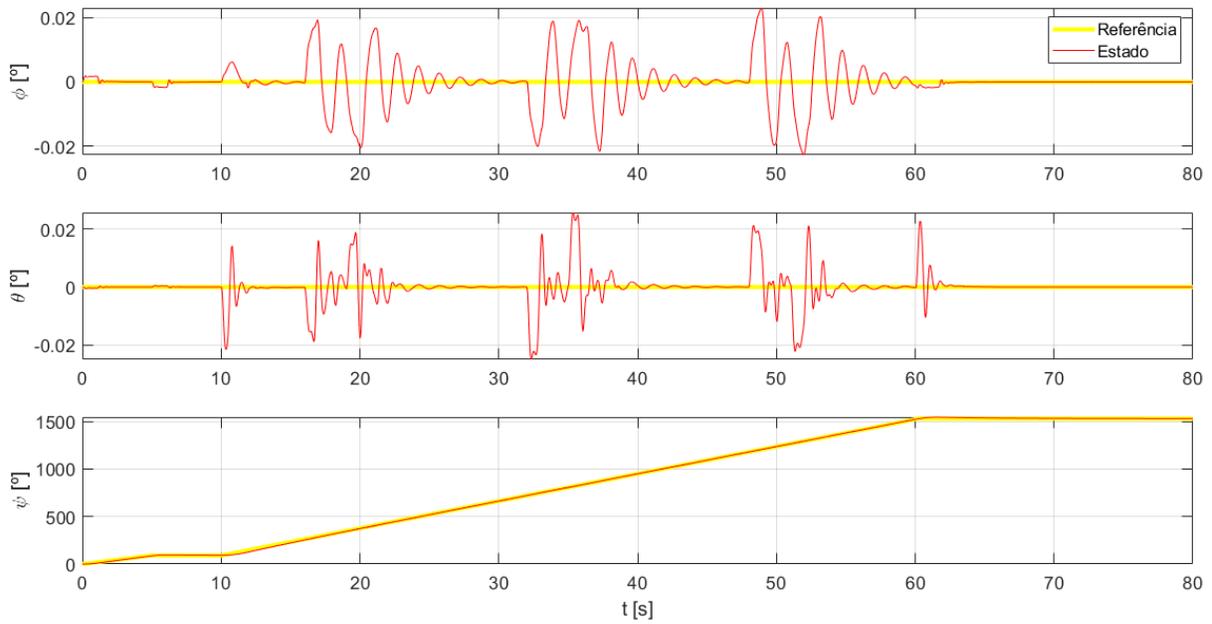


Fonte: Autoria própria

A Figura 6.18 mostra os resultados para as coordenadas de atitude da aeronave para a trajetória helicoidal, partindo do voo pairado, com as rajadas de vento. Observa-se que mesmo com maiores oscilações nos ângulos de rolagem e arfagem, o sistema não apresentou maiores alterações quanto à atitude da aeronave. Isto se deve ao fato de que a simulação do vento é considerada aplicada sobre o centro de gravidade da aeronave.

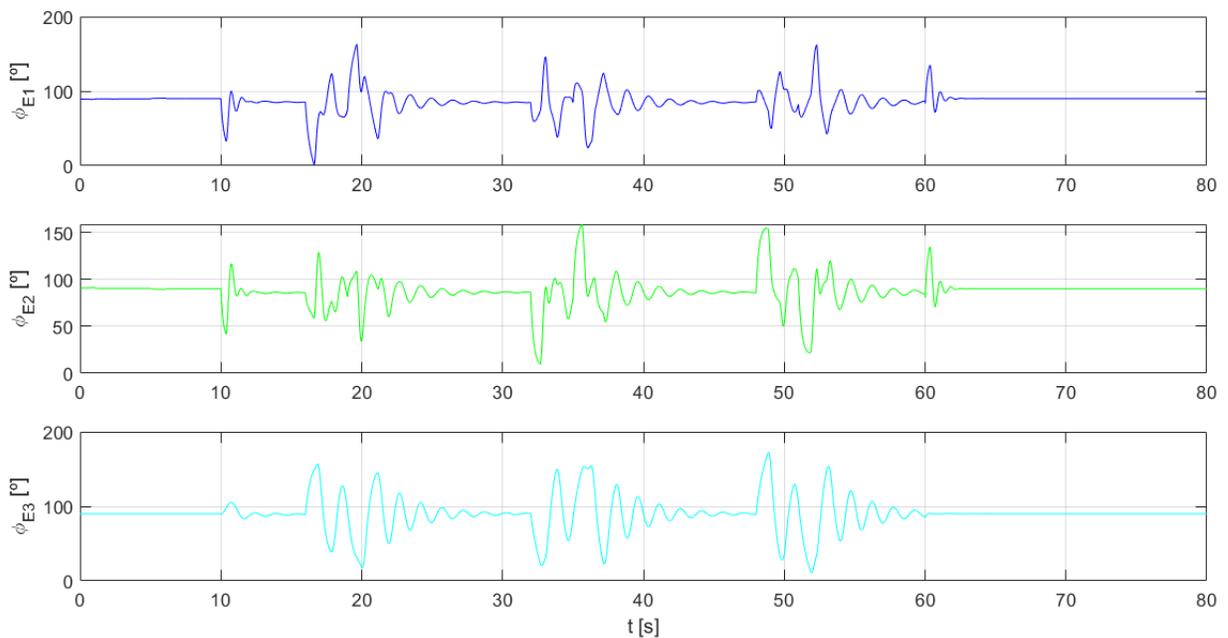
As Figuras 6.19 e 6.20 apresentam, respectivamente, os ângulos de inclinação e as velocidades de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais para esta trajetória helicoidal. Ressalta-se que para esta missão de voo, os ganhos da matriz de custo R do controlador LQRI, tiveram que ser ajustados de forma evitar que os ângulos de inclinação chegassem perto dos limites operacionais considerados na equação (6.1).

Figura 6.18 – Coordenadas de atitude para a trajetória helicoidal em modo *hover*, com rajadas de vento



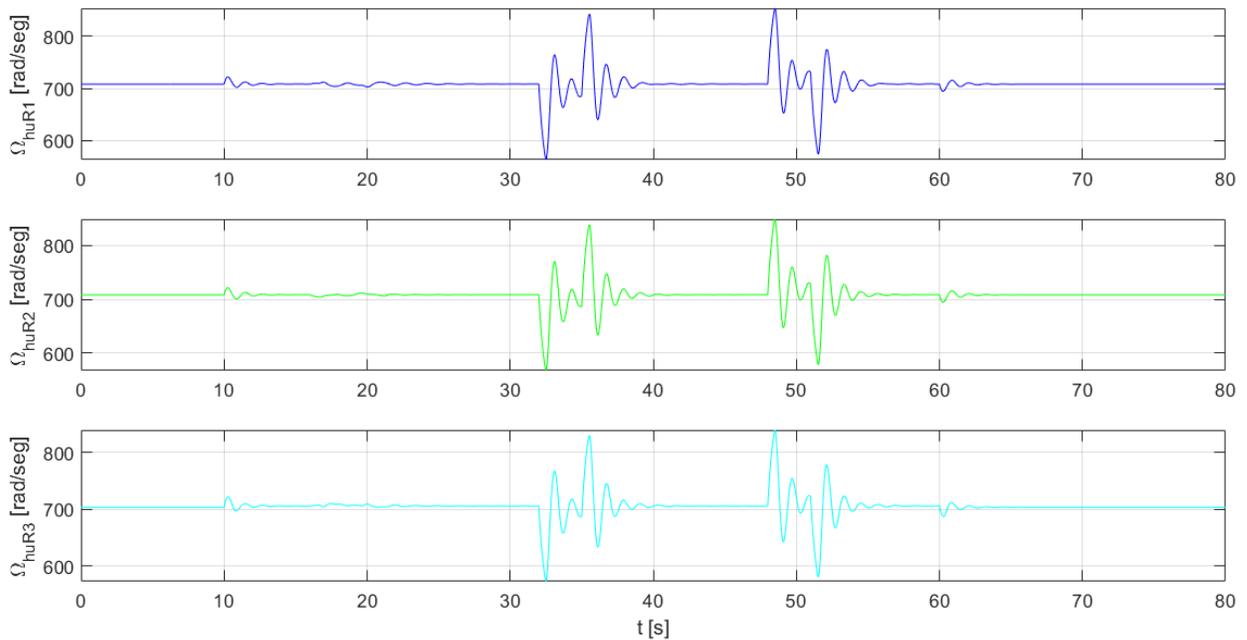
Fonte: Autoria própria

Figura 6.19 – Ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais, para a trajetória helicoidal em modo *hover*, com rajadas de vento



Fonte: Autoria própria

Figure 6.20 – Velocidade de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais, para a trajetória helicoidal em modo *hover*, com rajadas de vento



Fonte: Autoria própria

Portanto, para esta missão de voo, com rajadas de vento agindo vetorialmente sobre as três componentes de velocidade da aeronave e alterando a posição da mesma no espaço, considera-se que a aeronave conseguiu contornar os efeitos da aerodinâmica adversa ao longo da trajetória, sem desestabilizar e conseguindo retomar o rumo imposto pelas referências de posição e atitude no espaço.

6.3.5 Rastreamento de Trajetória Helicoidal em Modo Cruzeiro

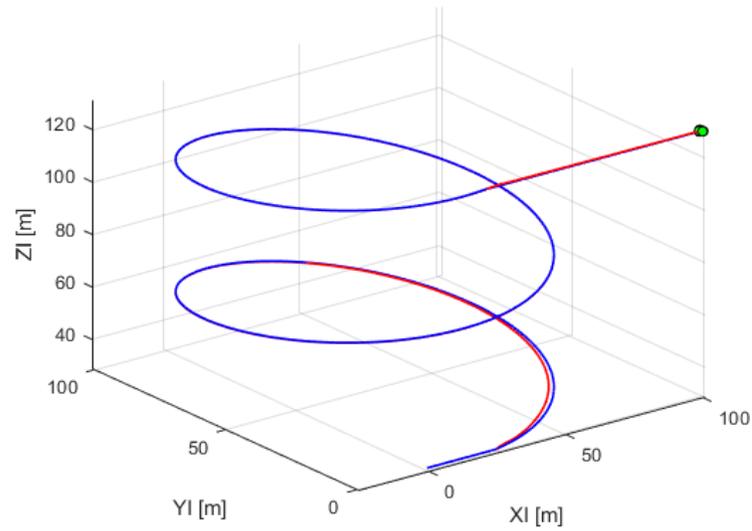
Dando continuidade com os testes em simulação, foi testada novamente uma trajetória helicoidal (sem vento), partindo do modo de voo cruzeiro. A trajetória é semelhante à apresentada para o modo *hover*, com a diferença de que neste caso encontra-se em uma escala superior, considerando um raio de giro adequado para a velocidade de voo na qual a aeronave se encontra inicialmente ($U = 20\text{m/s}$). A equação (6.11) apresenta as condições iniciais e coordenadas ao longo do tempo de posição e atitude.

A Figura 6.21 mostra a trajetória helicoidal para este modo de voo. Inicialmente a aeronave percorre uma linha reta até que, em determinado momento, começa o percurso curvo da trajetória helicoidal, enquanto ganha altitude. No fim do helicoides, o VANT sai da curva seguindo um trajeto paralelo ao trajeto reto inicial.

$$\begin{aligned}
 &\text{Condições Iniciais} \begin{cases} X_I = 0\text{m} & Y_I = 0\text{m} & Z_I = 30\text{m} \\ \phi = 0^\circ & \theta = 0^\circ & \psi = 0^\circ \end{cases} \\
 &(0s \leq t \leq 25s) \rightarrow [X_I = (t)m] \\
 &(25s < t \leq 125s) \rightarrow \left[\begin{array}{l} r = 50\text{m} \\ X_I = \left(r \sin\left(\frac{t-25}{8}\right) + 25 \right) \text{m} \\ Y_I = \left(-r \cos\left(\frac{t-25}{8}\right) + r \right) \text{m} \\ Z_I = (t+5)\text{m} \\ \psi = \left(180\left(\frac{t-25}{8\pi}\right) \right)^\circ \end{array} \right] \\
 &(125s < t) \rightarrow \left[\begin{array}{l} X_I = (t-100)\text{m} \\ Z_I = 130\text{m} \\ \psi = 720^\circ \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

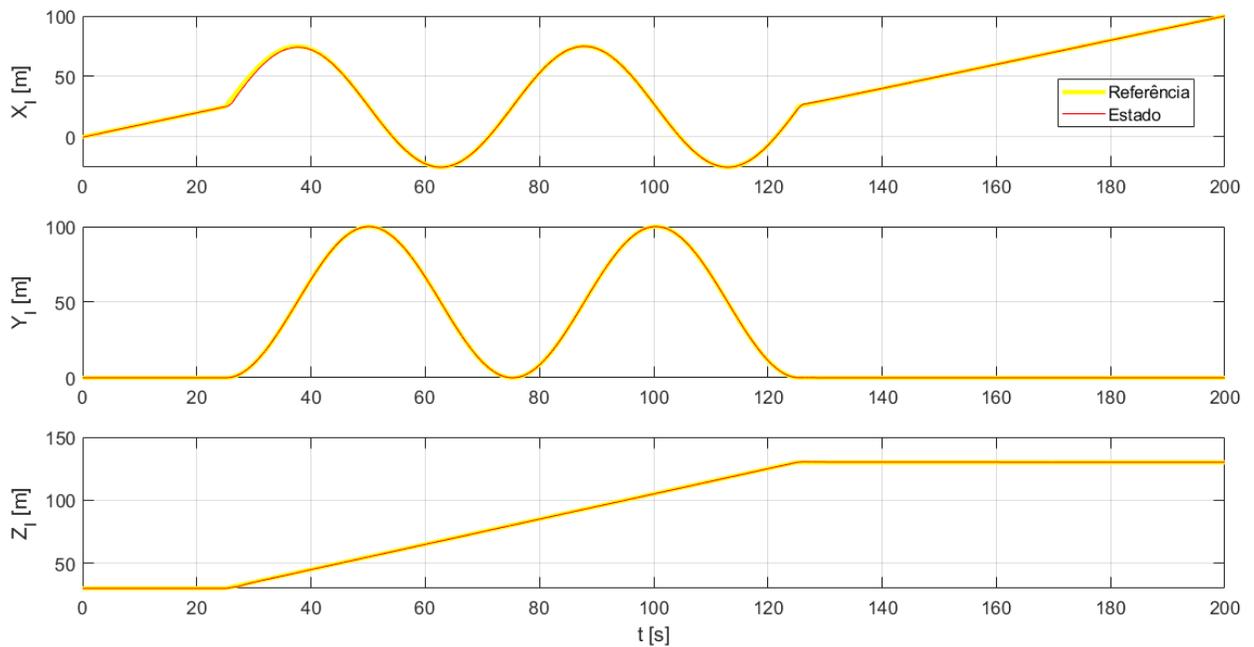
A Figura 6.22 mostra os resultados obtidos para as coordenadas de posição em relação ao sistema inercial I , para esta trajetória. Desta figura observa-se que o drone segue satisfatoriamente as coordenadas de posição e apresenta erro nulo em regime permanente.

Figura 6.21 – Trajetória helicoidal em modo cruzeiro



Fonte: Autoria própria

Figura 6.22 – Coordenadas de posição para a trajetória helicoidal em modo cruzeiro



Fonte: Autoria própria

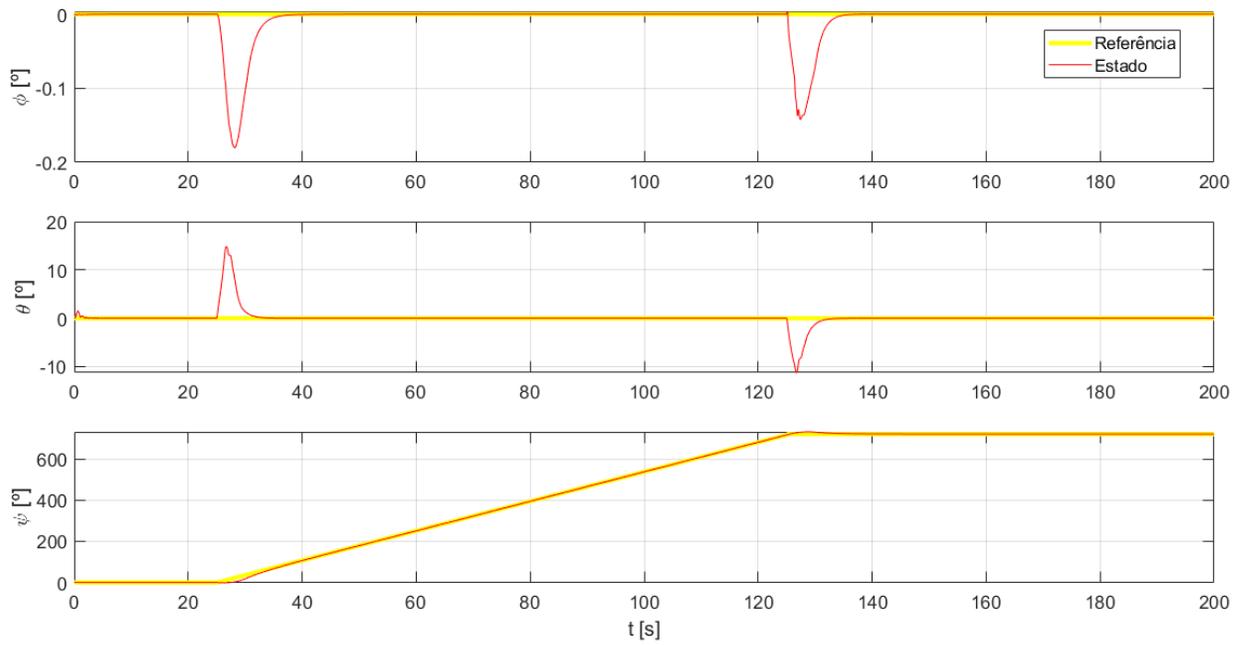
A Figura 6.23 mostra os resultados obtidos para as coordenadas de atitude em relação ao sistema inercial I . Para esta trajetória é interessante observar que em $t = 25s$, momento no qual a

aeronave entra no helicóide, o ângulo de arfagem θ tem uma súbita alteração positiva, chegando a $+15^\circ$, para depois decair novamente até sua referência. Isto pode ser analisado com o auxílio das Figuras 6.24 e 6.25 que apresentam, respectivamente, as deflexões dos ângulos de inclinação e as velocidades de rotação das hélices superiores para esta missão de voo. Observa-se que para girar para a esquerda, subitamente, o rotor-coaxial direito inclina para baixo e acelera a rotação das suas hélices, enquanto o rotor-coaxial esquerdo inclina para cima e também acelera (em menor medida) suas hélices, gerando um torque que precisa ser “amortecido” pelo rotor-coaxial traseiro. Este resultado é semelhante ao observado na simulação da resposta ao degrau de velocidade de rotação de guinada R . Porém, desta vez, a aeronave não só precisa girar, como também ganhar altitude e é esta condição em particular, de mudança repentina, que aparenta afetar o ângulo de arfagem da aeronave, até ser ajustado novamente pelo controlador, enquanto escala ao longo da trajetória. É interessante observar também o ângulo negativo (próximo de -2°) que a inclinação do rotor-coaxial direito assume. Isto sugere que mesmo com um ângulo de inclinação negativo, a força de sustentação sobre a asa pode ser ainda positiva, com um ângulo de ataque positivo o suficiente.

Em $t = 125\text{s}$, ao sair do helicóide, o sistema se ajusta de forma a voltar à condição inicial de voo, causando o procedimento inverso ao observado na entrada ao percurso helicoidal.

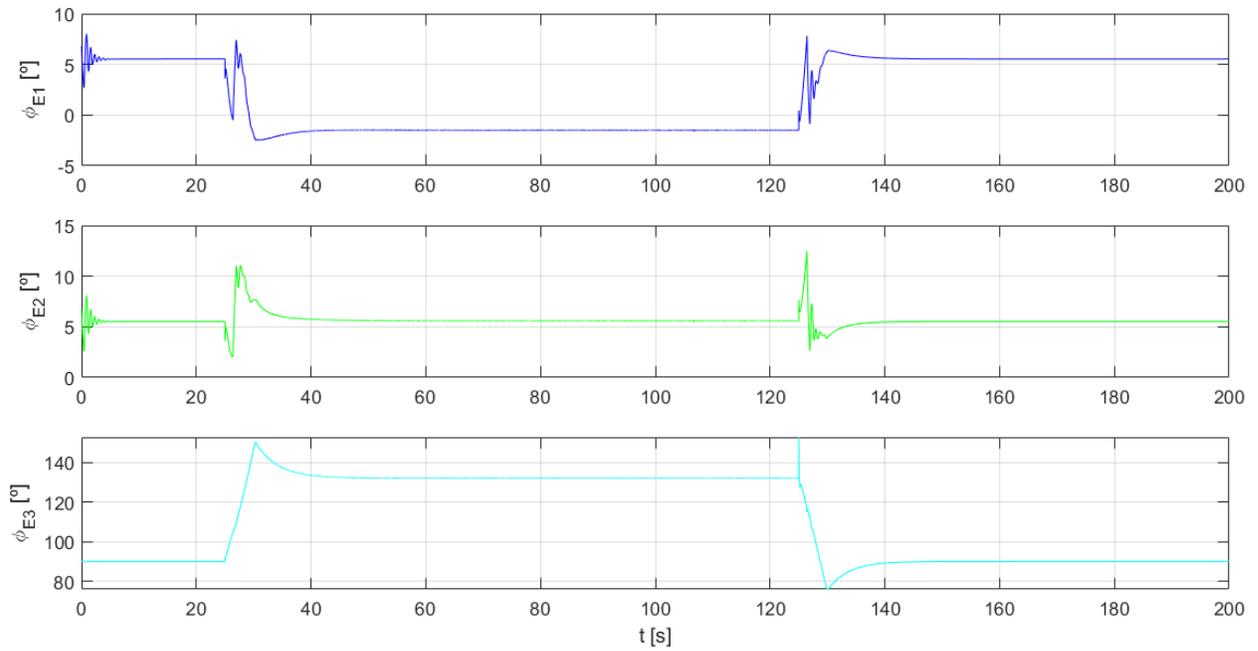
Novamente, para esta missão de voo, considera-se que o sistema respondeu corretamente ao rastreamento da trajetória indicada, mantendo a aeronave estável e ajustando suas variáveis de controle para alcançar as referências em posição e atitude no espaço.

Figura 6.23 – Coordenadas de atitude para a trajetória helicoidal em modo cruzeiro



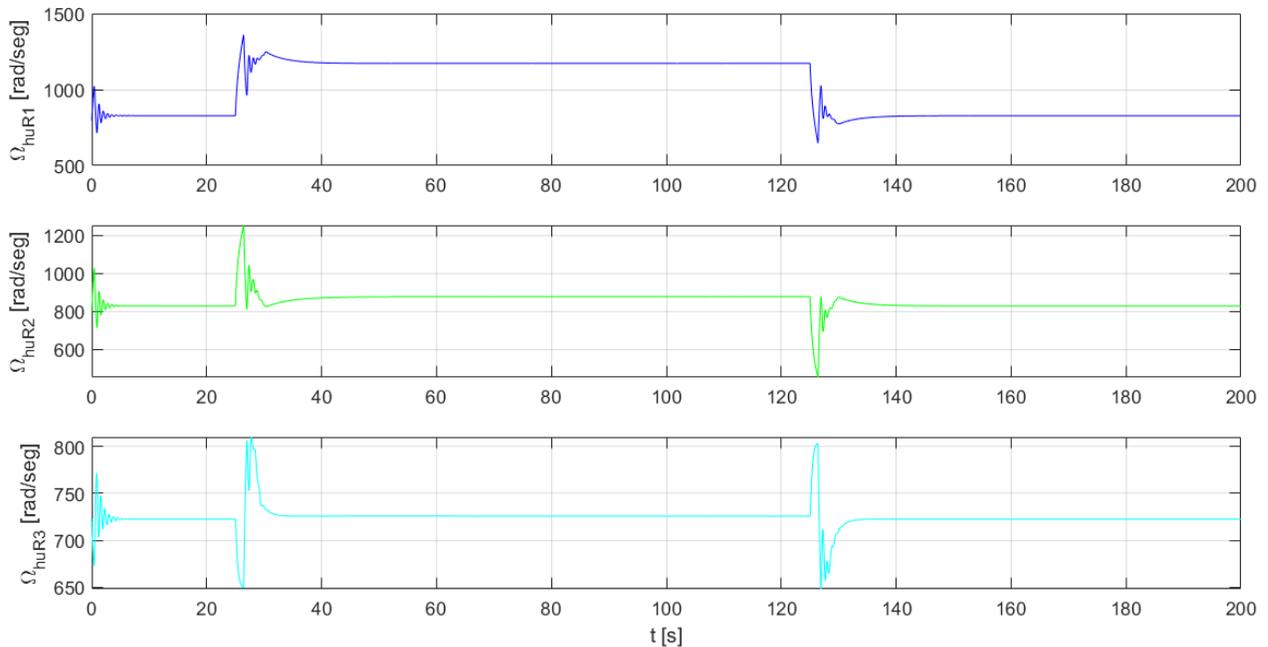
Fonte: Autoria própria

Figure 6.24 – Ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais, para a trajetória helicoidal em modo cruzeiro



Fonte: Autoria própria

Figure 6.25 – Velocidade de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais, para a trajetória helicoidal em modo cruzeiro



Fonte: Autoria própria

6.3.6 Rastreamento de Trajetória Personalizada em Modo Cruzeiro

Na penúltima simulação de voo, partindo do voo em modo cruzeiro, adiciona-se uma extensão à missão de voo helicoidal. De forma que uma vez que a aeronave sai do helicoide e encontra-se a uma altura maior que a do começo, esta começa a percorrer um percurso quadrado com quinas arredondadas. Em um determinado momento do percurso quadrado, a aeronave entrará novamente dentro de um helicoide, só que desta vez ela deverá realizar circunferências no plano YZ , enquanto continua para frente no eixo X . Finalmente, terminado o percurso quadrado, a aeronave deverá descer, novamente em uma trajetória helicoidal, até o ponto onde começou a trajetória helicoidal inicial (e através da qual ganhou altitude). A partir deste ponto ela é comandada a percorrer uma linha reta. As equações de (6.12) até (6.15) mostram as condições iniciais e as variações nas referências das coordenadas de posição e atitude para realizar esta trajetória customizada. As Figura 6.26 e 6.27 apresentam a trajetória em questão.

$$\text{Condições Iniciais} \begin{cases} X_I = 0\text{m} & Y_I = 0\text{m} & Z_I = 30\text{m} \\ \phi = 0^\circ & \theta = 0^\circ & \psi = 0^\circ \end{cases}$$

$$(0s \leq t \leq 5s) \rightarrow [X_I = (5t)m]$$

$$(5s < t \leq 105s) \rightarrow \begin{cases} r = 50\text{m} \\ X_I = \left(r \sin\left(\frac{t-5}{8}\right) + 25 \right) \text{m} \\ Y_I = \left(-r \cos\left(\frac{t-5}{8}\right) + r \right) \text{m} \\ Z_I = (t+25)\text{m} \\ \psi = \left(180\left(\frac{t-5}{8\pi}\right) \right)^\circ \end{cases} \quad (6.12)$$

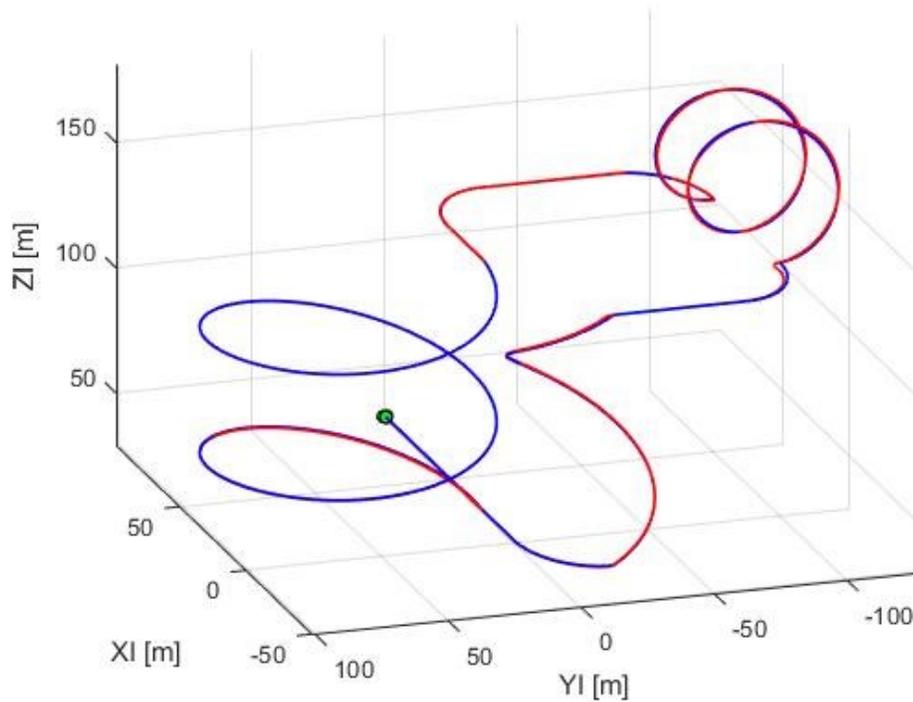
$$(105s < t \leq 110s) \rightarrow \begin{cases} X_I = (5(t-105) + 25)\text{m} \\ Z_I = 130\text{m} \\ \psi = 720^\circ \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(110s < t \leq 4\pi + 110s) &\rightarrow \left[\begin{array}{l} r = 25\text{m} \\ X_I = \left(r \sin\left(\frac{t-110}{8}\right) + 50 \right) \text{m} \\ Y_I = \left(r \cos\left(\frac{t-110}{8}\right) - r \right) \text{m} \\ \psi = \left(-180\left(\frac{t-110}{8\pi}\right) + 720 \right)^\circ \end{array} \right] \\
(4\pi + 110s < t \leq 4\pi + 120s) &\rightarrow \left[\begin{array}{l} X_I = 75\text{m} \\ Y_I = (-5(t - 4\pi - 110) - 25) \text{m} \\ \psi = 630^\circ \end{array} \right] \\
(4\pi + 120s < t \leq 8\pi + 120s) &\rightarrow \left[\begin{array}{l} r = 25\text{m} \\ X_I = \left(r \cos\left(\frac{t-4\pi-120}{8}\right) - r + 75 \right) \text{m} \\ Y_I = \left(-r \sin\left(\frac{t-4\pi-120}{8}\right) - 75 \right) \text{m} \\ \psi = \left(-180\left(\frac{t-4\pi-120}{8\pi}\right) + 630 \right)^\circ \end{array} \right] \\
(8\pi + 120s < t \leq 8\pi + 170s) &\rightarrow \left[\begin{array}{l} r = 25\text{m} \\ X_I = -(t - 8\pi - 120) + 50 \text{m} \\ Y_I = \left(r \sin\left(\frac{(t-8\pi-120)\pi}{12.5}\right) - 100 \right) \text{m} \\ Z_I = \left(-r \cos\left(\frac{(t-8\pi-120)\pi}{12.5}\right) + r + 130 \right) \text{m} \\ \psi = 540^\circ \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
(8\pi + 170s < t \leq 12\pi + 170s) &\rightarrow \left[\begin{array}{l} r = 25\text{m} \\ X_I = \left(-r \sin \left(\frac{(t - 8\pi - 170)}{8} \right) \right) \text{m} \\ Y_I = \left(-r \cos \left(\frac{(t - 8\pi - 120)}{8} \right) + r - 100 \right) \text{m} \\ Z_I = 130\text{m} \\ \psi = \left(-\frac{180(t - 8\pi - 170)}{8\pi} + 540 \right)^\circ \end{array} \right] \\
(12\pi + 170s < t \leq 12\pi + 180s) &\rightarrow \left[\begin{array}{l} r = 25\text{m} \\ X_I = -25\text{m} \\ Y_I = (5(t - 12\pi - 170) - 75) \text{m} \\ \psi = 450^\circ \end{array} \right] \\
(12\pi + 180s < t \leq 28\pi + 180s) &\rightarrow \left[\begin{array}{l} r = 25\text{m} \\ X_I = \left(-r \cos \left(\frac{(t - 12\pi - 180)}{8} \right) + r - 25 \right) \text{m} \\ Y_I = \left(r \sin \left(\frac{(t - 12\pi - 180)}{8} \right) - 25 \right) \text{m} \\ Z_I = \left(-\frac{25(t - 12\pi - 180)}{4} + 130 \right) \text{m} \\ \psi = \left(-\frac{180(t - 12\pi - 180)}{8\pi} + 450 \right)^\circ \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{6.14}$$

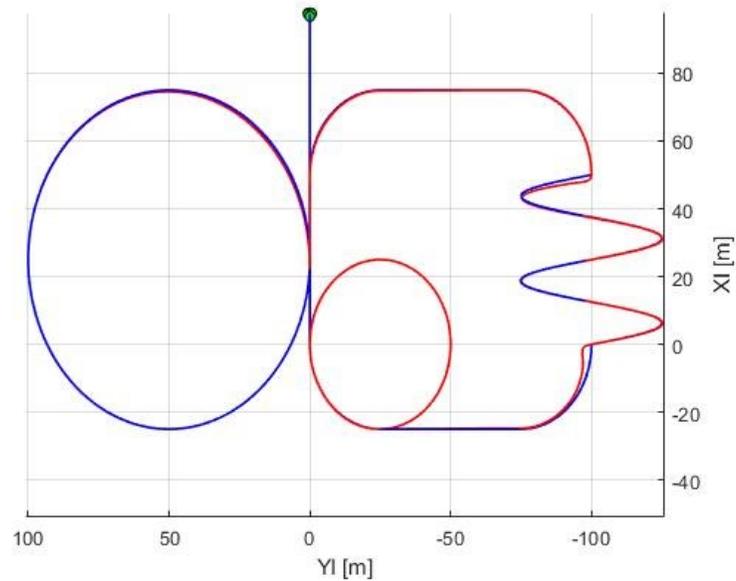
$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & r = 25\text{m} \\
 & X_I = \left(-r \cos\left(\frac{(t-12\pi-180)}{8}\right) + r - 25 \right) \text{m} \\
 & Y_I = \left(r \sin\left(\frac{(t-12\pi-180)}{8}\right) - 25 \right) \text{m} \\
 & Z_I = 30\text{m} \\
 & \psi = \left(-\frac{180(t-28\pi-180)}{8\pi} + 90 \right)^\circ
 \end{aligned} \right\} (28\pi + 180s < t \leq 32\pi + 180s) \rightarrow \quad (6.15) \\
 & \left. \begin{aligned}
 & X_I = (5(t-32\pi-180))\text{m} \\
 & Y_I = 0\text{m} \\
 & Z_I = 30\text{m} \\
 & \psi = 0^\circ
 \end{aligned} \right\} (32\pi + 180s < t) \rightarrow
 \end{aligned}$$

Figura 6.26 – Perspectiva da trajetória personalizada em modo cruzeiro



Fonte: Autoria própria

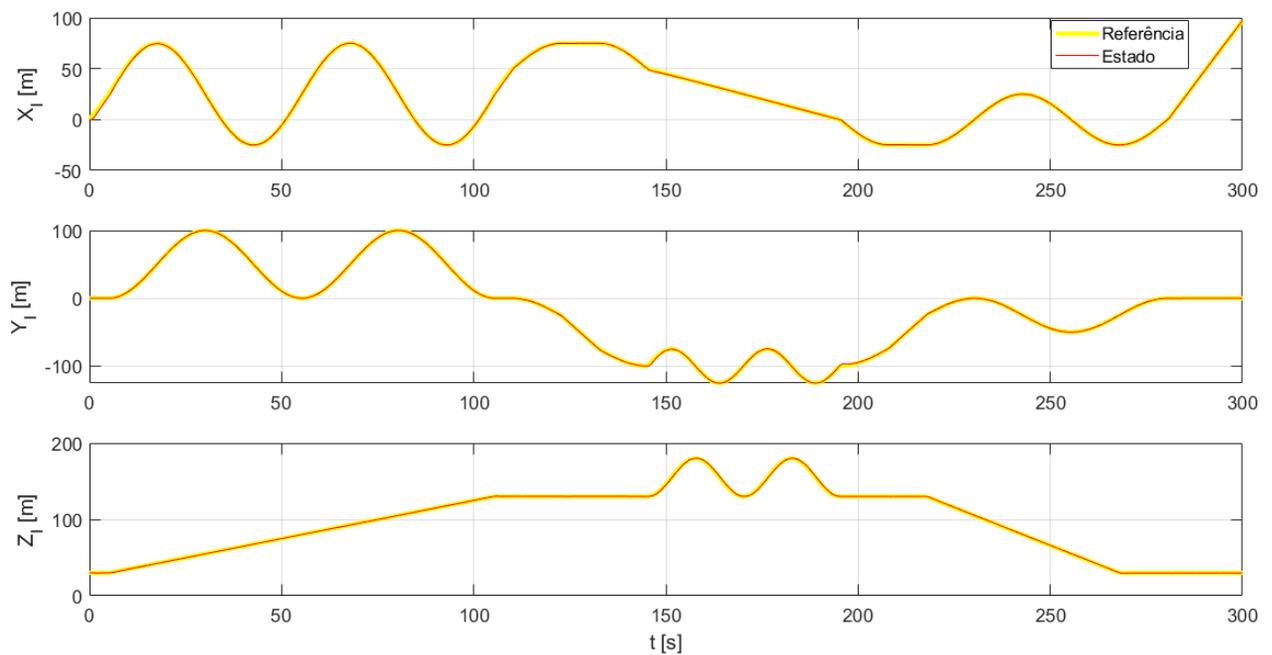
Figura 6.27 – Vista superior da trajetória personalizada em modo cruzeiro



Fonte: Autoria própria

A Figura 6.28 apresenta a resposta das coordenadas de posição para a trajetória customizada.

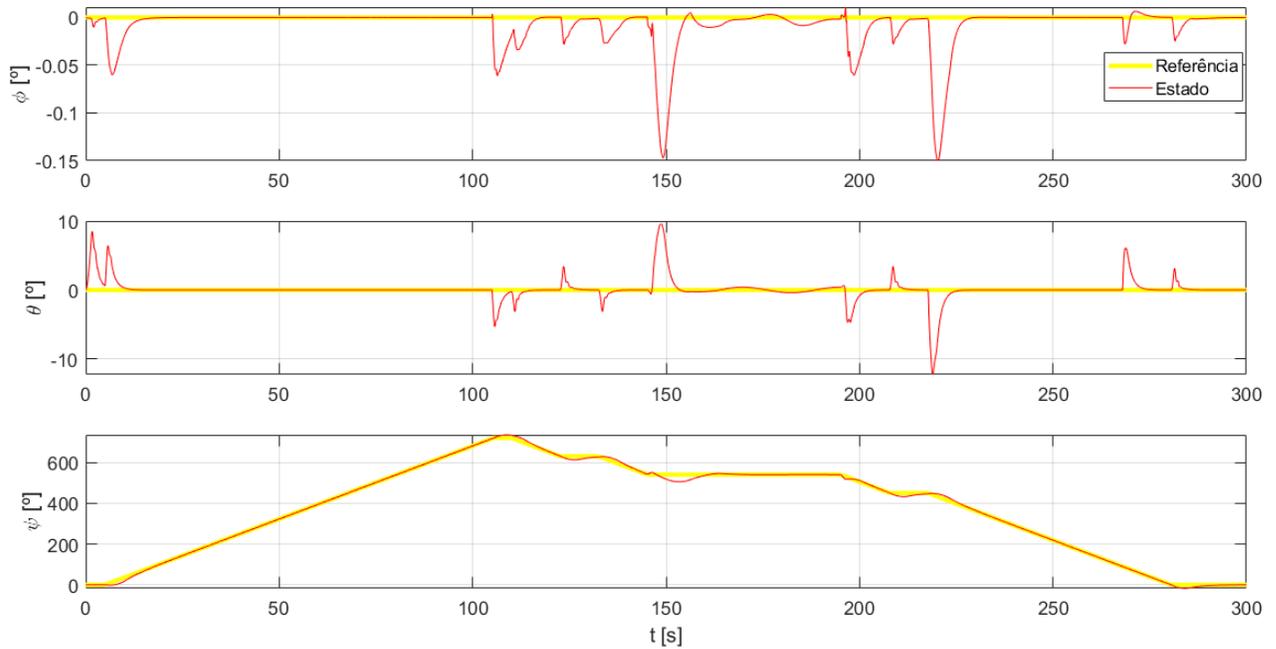
Figura 6.28 – Coordenadas de posição para a trajetória personalizada em modo cruzeiro



Fonte: Autoria própria

A Figura 6.29 apresenta a resposta das coordenadas de atitude para a trajetória personalizada.

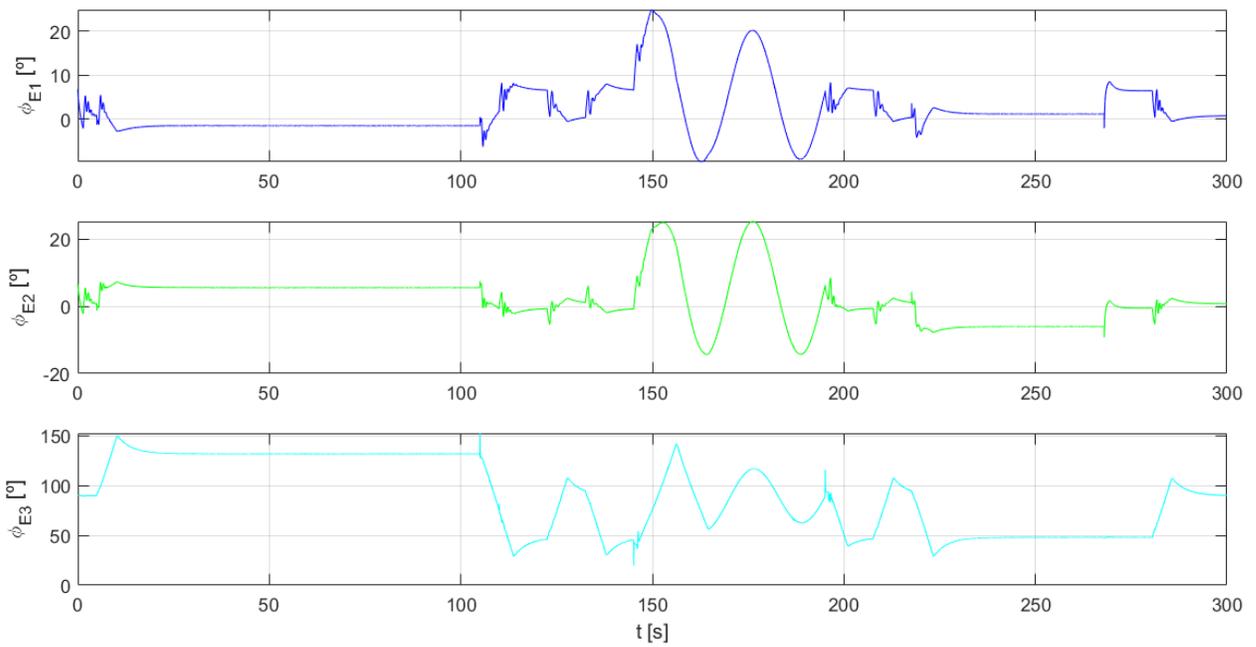
Figura 6.29 – Coordenadas de atitude para a trajetória personalizada em modo cruzeiro



Fonte: Autoria própria

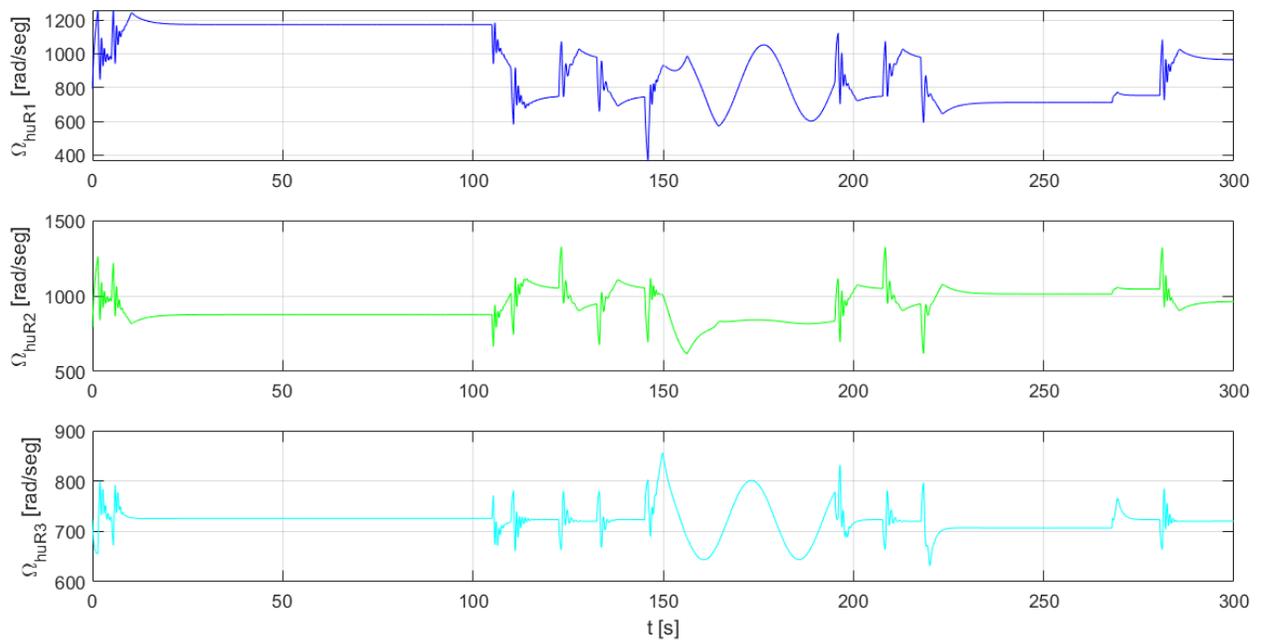
Finalmente, as Figuras 6.30 e 6.31 mostram, respectivamente, a variação dos ângulos de inclinação e das velocidades de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais para esta missão de voo. Novamente, foi possível observar que a aeronave gerou a trajetória desejada com sucesso, valendo-se dos ângulos de inclinação e da velocidade de rotação das hélices dos rotores-coaxiais para navegar pelo ar.

Figura 6.30 – Ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais, para a trajetória customizada em modo cruzeiro



Fonte: Autoria própria

Figura 6.31 – Velocidade de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais, para a trajetória personalizada em modo cruzeiro



Fonte: Autoria própria

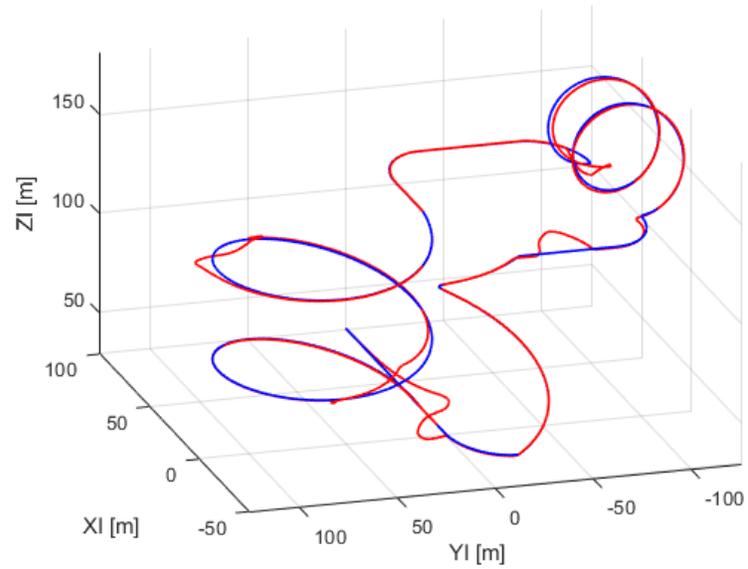
6.3.7 Rastreamento de Trajetória Personalizada em Modo Cruzeiro, com Rajadas de Vento

Por fim, a última simulação de voo trata-se da simulação personalizada vista na seção anterior, mas desta vez com a ação de rajadas de vento nas três componentes de velocidade da aeronave, relativas ao sistema fixo ao corpo B . A equação (6.16) mostra a variação de velocidade das rajadas de vento e sua duração no tempo.

$$\begin{aligned}
 (40s \leq t \leq 43s) &\rightarrow \begin{bmatrix} \Delta U = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \Delta V = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{bmatrix} \\
 (70s \leq t \leq 73s) &\rightarrow \begin{bmatrix} \Delta U = -8.76 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \Delta V = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \Delta W = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{bmatrix} \\
 (140s \leq t \leq 143s) &\rightarrow \begin{bmatrix} \Delta U = 8.76 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \Delta V = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \Delta W = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{bmatrix} \\
 (210s \leq t \leq 213s) &\rightarrow \begin{bmatrix} \Delta V = 14.14 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{bmatrix} \\
 (280s \leq t \leq 283s) &\rightarrow \begin{bmatrix} \Delta U = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \Delta V = -13.23 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

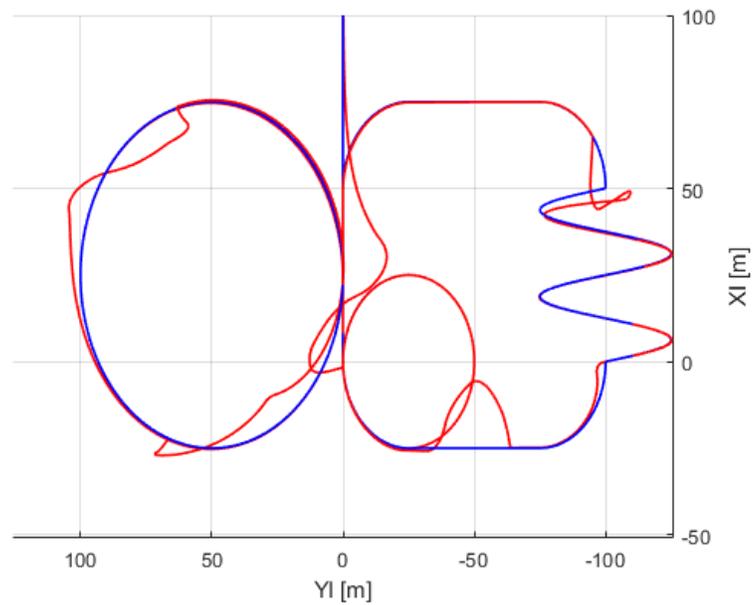
Com a aplicação das perturbações atmosféricas na velocidade da aeronave em diversos momentos da trajetória, nas Figuras 6.32 e 6.33 pode-se observar a variação nas coordenadas de posição causadas pelas rajadas de vento. Porém, da mesma forma que aconteceu com a simulação com vento no modo *hover*, observa-se que o veículo tenta corrigir a alteração do trajeto devido à ação do vento, conseguindo retomar o rumo uma vez acionados os comandos de controle.

Figura 6.32 – Perspectiva da trajetória personalizada em modo cruzeiro, com rajadas de vento



Fonte: Autoria própria

Figura 6.33 – Vista superior da trajetória personalizada em modo cruzeiro, com rajadas de vento

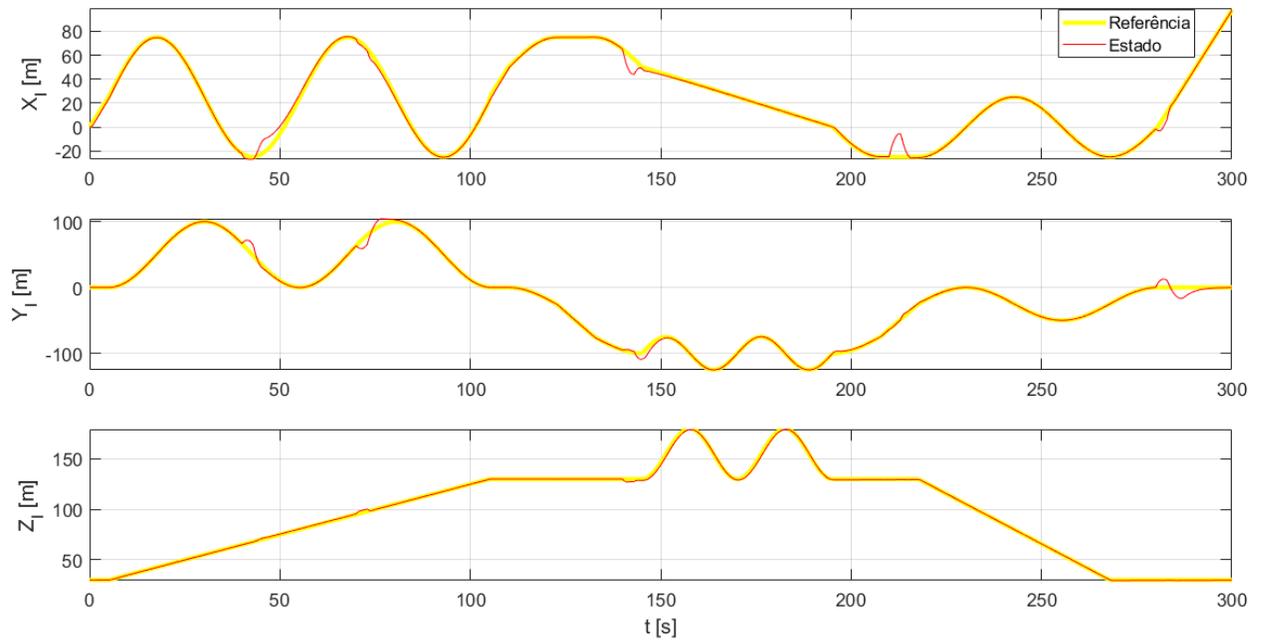


Fonte: Autoria própria

A Figura 6.34 mostra os resultados das coordenadas de posição para esta condição de voo.
 A Figura 6.35 mostra os resultados das coordenadas de atitude para esta condição de voo.

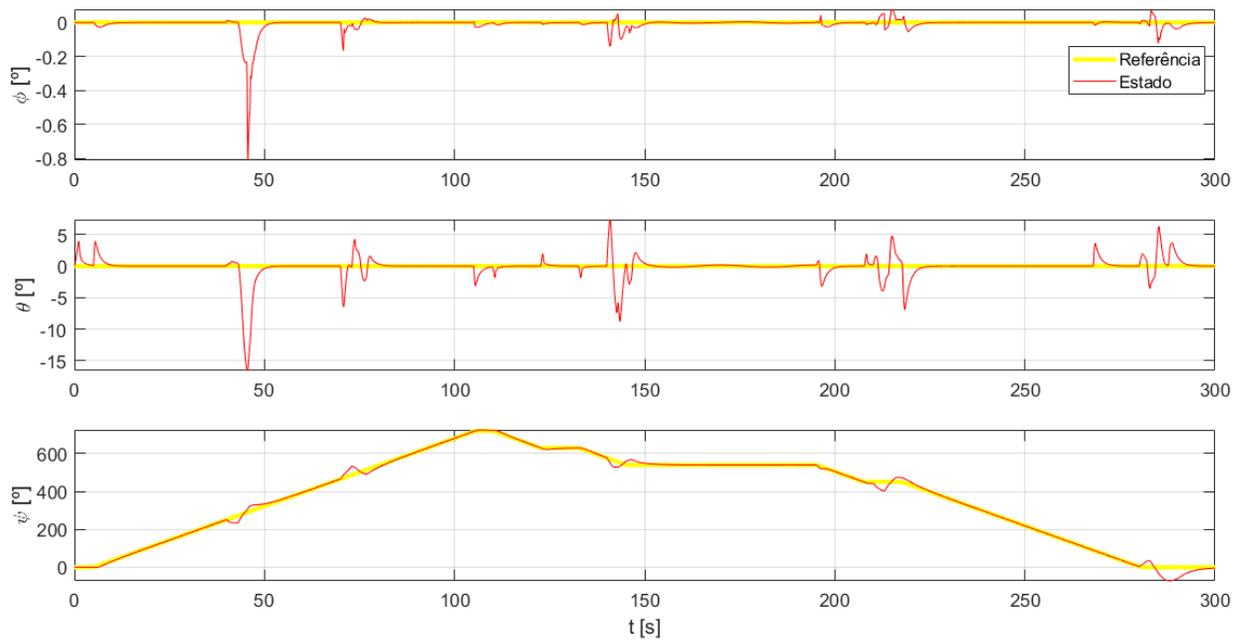
Finalmente, as Figuras 6.36 e 6.37 mostram, respectivamente, a variação dos ângulos de inclinação e das velocidades de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais para esta missão de voo com rajadas de vento.

Figura 6.34 – Coordenadas de posição para a trajetória personalizada em modo cruzeiro, com rajadas de vento



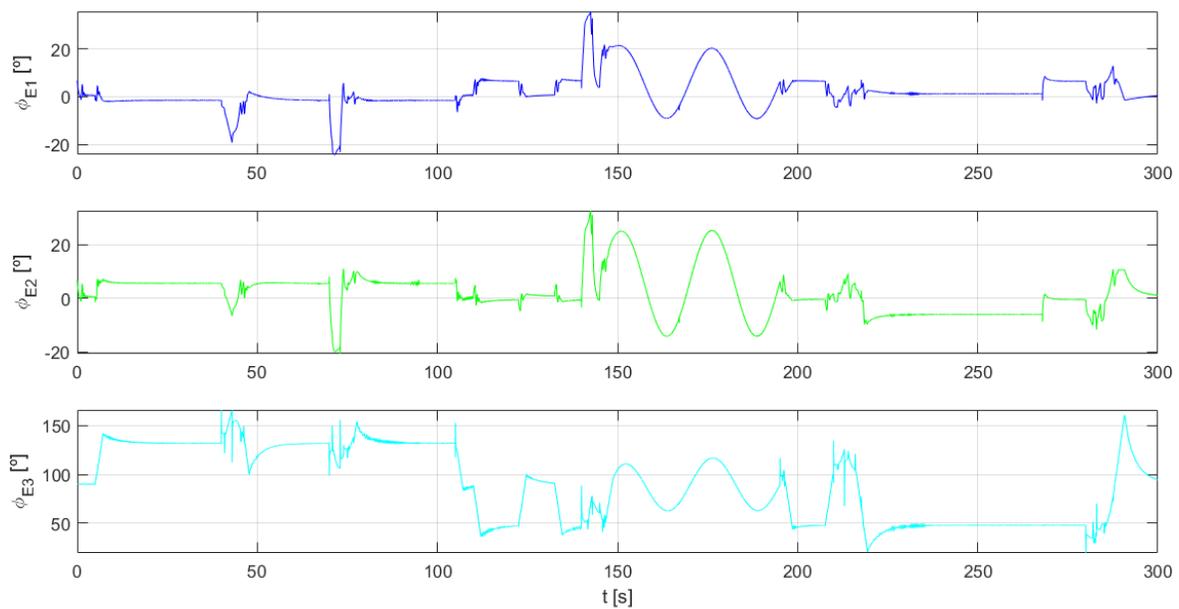
Fonte: Autoria própria

Figura 6.35 – Coordenadas de atitude para a trajetória personalizada em modo cruzeiro, com rajadas de vento



Fonte: Autoria própria

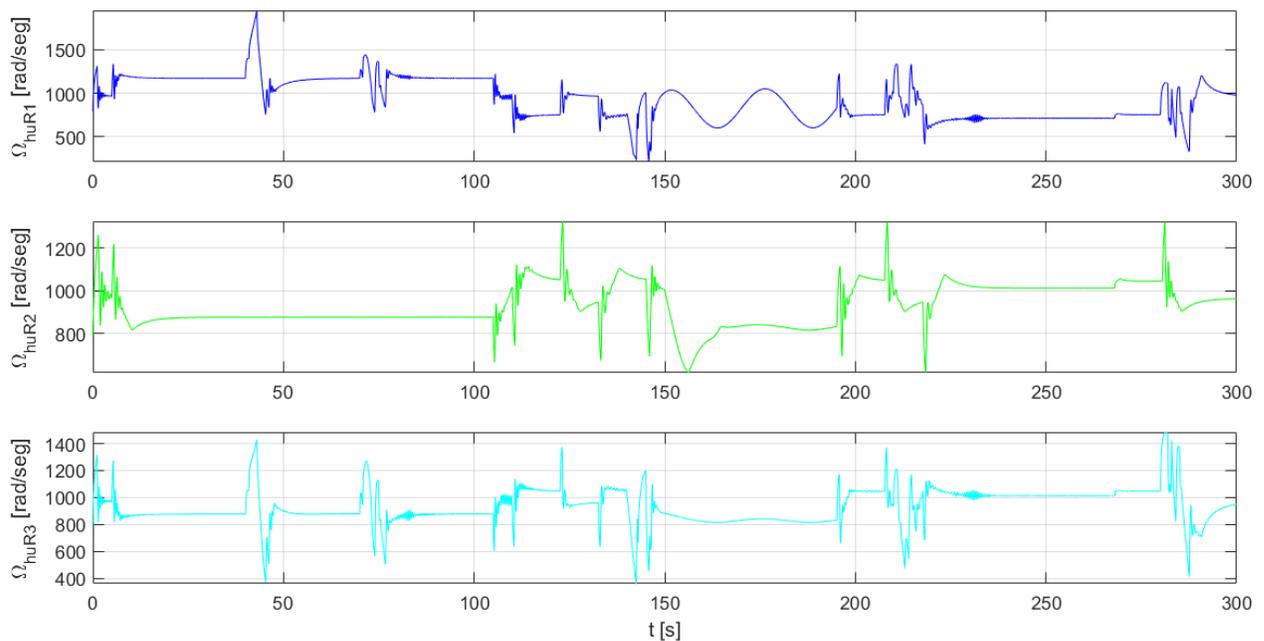
Figura 6.36 – Ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais, para a trajetória customizada em modo cruzeiro, com rajadas de vento



Fonte: Autoria própria

Das Figuras 6.32 a 6.37 compreende-se que as rajadas de vento simuladas tiveram um grande impacto sobre a dinâmica do veículo e prejudicaram em parte o seguimento da trajetória em determinados trechos. Contudo, a estratégia de controle implementada para avaliar a viabilidade deste projeto de aeronave sugere que a aeronave seria capaz de enfrentar o vento em condições de operação reais.

Figura 6.37 – Velocidade de rotação das hélices superiores dos rotores-coaxiais, para a trajetória personalizada em modo cruzeiro, com rajadas de vento



Fonte: Autoria própria

6.4 CONCLUSÕES

Neste capítulo foram apresentados os parâmetros dos controladores utilizados para controle de velocidade relativa ao sistema fixo ao corpo (LQRI), e de posição e atitude relativas ao sistema inercial (PID). Através das simulações foi possível comprovar que para uma determinada condição de voo ou determinada missão, era necessária a sintonização dos ganhos dos controladores com o objetivo de obter resultados satisfatórios no seguimento das trajetórias propostas.

Um total de sete simulações foram apresentadas, considerando apenas degraus de velocidade, considerando trajetórias em modos de voo pairado e cruzeiro sem perturbações atmosféricas e, finalmente, duas simulações com rajadas de vento. Em todas estas simulações foi possível constatar o correto desempenho das variáveis de controle (ângulos de inclinação e velocidade de rotação de hélices superiores dos rotores-coaxiais) para seguir a trajetória comandada e enfrentar as alterações causadas pela ação do vento.

Em todas as simulações foi possível constatar um erro em regime permanente nulo para coordenadas de posição e atitude, com exceção da trajetória helicoidal, partindo do modo *hover*. Nesta trajetória em particular os ângulos de rolagem e arfagem mantiveram um erro em regime permanente constante, porém, seu efeito é bastante reduzido em torno da referência.

Em relação a alteração na trajetória causada pela ação do vento, talvez melhores sintonizações de ganho dos controladores PID e LQRI possam ser alcançadas para melhorar ainda mais a reposta obtida. Acrescentando ao algoritmo de controle as restrições paramétricas dos limites possíveis de alcançar para a inclinação dos rotores e a velocidade máxima de giro das hélices.

Finalmente, consideram-se bem-sucedidos os testes computacionais referentes ao rastreamento de trajetórias com esta arquitetura de aeronave.

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foram apresentadas diversas pesquisas relacionadas a VANTs, mais especificamente dentro da classificação dos VTOLs com inclinação de rotores (TRUAV) e com inclinação de asas (TWUAV). Foram apresentados também diversos modelos de VTOLs que compõem uma parte do estado da arte desta classe de veículos, em operação ou em desenvolvimento, na indústria ao redor do mundo. Por fim, foi feita uma revisão sobre o potencial e as características dos rotores-coaxiais para o controle de aeronaves multirrotor.

Portanto, tomando como base as diversas pesquisas aqui apresentadas e os diversos modelos existentes, foi proposto o desenvolvimento de uma nova arquitetura de VTOL TWUAV que misturasse a inclinação independente de três rotores-coaxiais (dois à frente e nas laterais da fuselagem da aeronave e um terceiro rotor-coaxial na parte de trás), de tal forma que cada um dos rotores frontais-laterais girassem junto com uma respectiva asa que auxiliaria na sustentação e controle da aeronave quando ela passasse a operar em modo avião.

Através do desenvolvimento matemático das equações que descrevem a dinâmica do veículo, considerando forças e momentos relacionados aos princípios aerodinâmicos, propulsivos e inerciais; foi formulado o modelo não linear da aeronave.

O *design* da aeronave, considerando componentes reais eletrônicos e mecânicos, foi realizado com o uso do software CAD SolidWorks e através deste foi possível comparar e validar o tensor de inércia que é gerado pelas equações do modelo matemático da aeronave, em função dos ângulos inclinação dos três rotores-coaxiais.

O modelo não linear do drone foi linearizado em duas condições de voo, sendo estas: voo *hover* e voo cruzeiro para avaliar a estabilidade e controlabilidade natural do sistema. Foi comprovado que o sistema é naturalmente instável, porém, controlável; com o condicional de que suas entradas de controle (ângulos de inclinação dos rotores-coaxiais e velocidades de rotação das hélices) poderiam alterar ou afetar significativamente os estados do sistema, i.e., sua dinâmica.

Um algoritmo de controle na forma de diagrama de blocos foi implementado através do software Matlab-Simulink, considerando uma estratégia de controle em cascata. De tal forma que um controlador PID (para cada um dos estados de posição e atitude da aeronave em relação ao

sistema inercial) gera as entradas de referência para um controlador LQRI que controla as velocidades lineares e angulares da aeronave (em relação ao sistema fixo ao centro de gravidade do veículo).

Com a implementação do controlador em cascata PID e LQRI foi possível simular o comportamento da aeronave em um total de sete testes computacionais. O primeiro teste buscou avaliar o comportamento, estabilidade e controle exclusivamente das velocidades lineares e angulares da aeronave frente a entradas do tipo degrau e, graças a isto, foi constatado que o sistema respondia de forma fisicamente correta através da variação dos ângulos de inclinação e aceleração das hélices dos três rotores coaxiais.

Os seguintes seis testes computacionais corresponderiam a avaliar a capacidade da aeronave de acompanhar trajetórias no ar (nos modos *hover* e *cruzeiro*), através de referências de posição e atitude como entradas ao sistema. Adicionalmente, foi testada a capacidade da aeronave contornar o efeito aerodinâmico de rajadas de vento enquanto realizava os percursos em duas das seis trajetórias exigidas. Observando, então, que em condições sem vento, o VANT conseguiu acompanhar corretamente todas as trajetórias impostas e, nas duas trajetórias com simulação de rajadas de vento, o drone mostrou uma certa dificuldade. Contudo, em ambas ocasiões, o drone foi capaz de contornar as alterações de trajetória provocadas pela ação do vento e retornar ao rumo correto para continuar com o percurso.

Avaliando todo o processo realizado para a concepção deste projeto, considera-se que o objetivo principal do trabalho, de propor e validar computacionalmente um novo modelo de aeronave VTOL TWUAV, foi alcançado com sucesso.

Considera-se necessário acrescentar, futuramente, ao modelo dinâmico as características eletromecânicas dos servo-motores e dos motores *brushless* (e dos respectivos controladores de velocidade ESCs) já que estes determinarão os limites de posição e velocidade para os ângulos de inclinação e velocidades de rotação das hélices dos três rotores-coaxiais.

Análises mais robustas sobre os efeitos aerodinâmicos nas asas, hélices e fuselagem permitirão aprimorar as características aerodinâmicas do modelo. Estas análises poderão ser realizadas com o auxílio de softwares CFD.

Um aprimoramento nos controladores PID e LQRI pode gerar melhores desempenhos na rejeição de perturbações atmosféricas. Porém, como foi observado, uma estratégia de ajuste ganhos pode ser a melhor alternativa já que para cada missão de voo e cada condição de voo; os ganhos dos controladores precisaram ser mudados para obter os resultados adequados no seguimento às trajetórias.

Como trabalho futuro pretende-se implementar uma estratégia de controle baseada em controle adaptativo ou através de redes neurais artificiais (RNA) já que estas estratégias representam as abordagens mais modernas utilizadas para o controle de aeronaves do tipo VTOL, e mostram ter um bom desempenho em todos os modos de voo (*hover*, transição e avião).

Outro objetivo para o futuro será tentar estimar o consumo de energia desta aeronave para a execução de trajetórias no ar.

Finalmente, propõe-se para o futuro a construção de um protótipo da aeronave descrita neste projeto. Acredita-se que o trabalho aqui apresentado representa o primeiro passo para alcançar este objetivo, já que demonstra uma viabilidade teórica e traz confiança para investir economicamente na sua construção.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALEXIS, K.; HUERZELER, C.; SIEGWART, R. Hybrid modeling and control of a coaxial unmanned rotorcraft interacting with its environment through contact. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION (ICRA). Karlsruhe, Germany. 2013. <https://doi.org/10.1109/ICRA.2013.6631354>
- ALLENSPACH, M. et al. Design and optimal control of a tiltrotor micro aerial vehicle for efficient omnidirectional flight. In: The International Journal of Robotics Research. v. 39. n. 10-11. 2020. <https://doi.org/10.1177/0278364920943654>
- ARROYO A. H. D. **Modelagem e Simulação de uma Aeronave Multi-Rotor não Convencional**. 2018. Monografia de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecatrônica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.
- ASTROM, K. J.; MURRAY, R. M. **Feedback Systems – An Introduction for Scientists and Engineers**. Princeton University Press, 2nd ed. 2020.
- AUTENRIEB, J; SHIN, H.S.; BACIC, M. Development of a Neural Network-based Adaptive Nonlinear Dynamic, Inversion Controller for a Tilt-wing VTOL Aircraft. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON RESEARCH, EDUCATION AND DEVELOPMENT ON UNMANNED AERIAL SYSTEMS. **Anais**. Cranfield, United Kingdom. 2019. <https://doi.org/10.1109/REDUAS47371.2019.8999700>
- BAUTISTA, A. J.; OSORIO, A.; LOZANO, R. Modeling and Analysis of a Tricopter/Flying-Wing Convertible UAV with Tilt-Rotors. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF UNMANNED AIRCRAFT SYSTEMS (ICUAS). **Anais**. Miami, Florida, USA. 2017. <https://doi.org/10.1109/ICUAS.2017.7991502>
- BENNET, S. History of Automatic Control to 1960: An Overview. In: INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL WORLD CONGRESS (IFAC). 13. **Proceedings**. San Francisco, USA. 1996.
- CASTILLO, P.; LOZANO, R.; DZUL, A. E. **Modelling and Control of Mini-Flying Machines**. London, United Kingdom: Springer, 2005.

- DESBOROUGH, L.; MILLER, R. Increasing customer value of industrial control performance monitoring—Honeywell’s experience. In: International Conference on Chemical Process Control, 6. v. 98. 2002.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Modern Control Systems**. Hoboken, New Jersey, USA: Prentice Hall, 12th ed. 2010.
- FROUDE, W. On the elementary relation between pitch, slip, and propulsive efficiency. 1920.
- GUDMUNDSSON, S. **General Aviation Aircraft Design: Applied Methods and Procedures**. Oxford. United Kingdom: Elsevier. 2014.
- GUNDLACH, J. **Designing Unmanned Aircraft Systems: A Comprehensive Approach**. Reston, Virginia, USA: AIAA, 2012. <https://doi.org/10.2514/4.868443>
- HIBBELER, R. C. **Dinâmica: Mecânica para Engenharia**. Pearson University Press, 12th ed. 2010
- KYUNG-JAE, N.; JOOSANG, J.; DONSOO, H. Tri-Copter UAV With Individually Tilted Main Wings for Flight Maneuvers. In: IEEE Access. v. 8. p. 46753-46772. 2020. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2978578>
- LEISHMAN, J. G. **Principles of Helicopter Aerodynamics**. Cambridge University Press, 2nd ed. 2006, ISBN: 978-0-521-85860-1.
- MAQSOOD, A.; GO, T. H. Optimization of hover-to-cruise transition maneuver using variable-incidence wing. In: Journal of Aircraft. v. 47. n. 3. 2010. <https://doi.org/10.2514/1.44453>
- McCRINK, M. H.; GREGORY, J. W. Blade Element Momentum Modeling of Low-Re Small UAS Electric Propulsion Systems. In: AIAA APPLIED AERODYNAMICS CONFERENCE, 33. **Anais**. Dalla, Texas, USA. 2015. <https://doi.org/10.2514/6.2015-3296>
- MIKAMI, T.; UCHIYAMA, K.; Design of flight control system for quad tilt-wing UAV. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF UNMANNED AIRCRAFT SYSTEMS (ICUAS). **Anais**. Denver, Colorado, USA. 2015. <https://doi.org/10.1109/ICUAS.2015.7152364>
- MURAOKA, K. et al. Transition flight of quad tilt wing VTOL UAV. In: INTERNATIONAL COUNCIL OF THE AERONAUTICAL SCIENCES (ICAS), 28. **Proceedings**. Brisbane, Australia. 2012. <https://doi.org/10.2514/6.2009-1834>

- ONEN, A.S. et al. Modeling and controller design of a VTOL UAV. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF UNMANNED AIRCRAFT SYSTEMS (ICUAS). Denver, Colorado, United States. 2015. <https://doi.org/10.1109/ICUAS.2015.7152307>
- ONER K. T. et al. Dynamic model and control of a new quadrotor unmanned aerial vehicle with tilt-wing mechanism. In: World Academy of Science, Engineering and Technology. v. 45. p, 58-63. 2008. doi.org/10.5281/zenodo.1074431
- SEOKKWAN, Y.; CHAN, W. M.; PULLIAM, T. H. Computations of Torque-Balanced Coaxial Rotor Flows. In: AIAA SCHITECH FORUM, 55. **Anais**. Grapevine, Texas, USA. 2017. <https://doi.org/10.2514/6.2017-0052>
- SEONGHUN, Y.; SEUNGKEUN, K.; JINYOUNG, S.; Neural Network Controller Design for a Single Tilt-Wing UAV. In: ASIA-PACIFIC INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON AEROSPACE TECHNOLOGY (APISAT). **Anais**. Shanghai, China, 2014. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/273135321_Neural_Network_Controller_Design_for_a_Single_Tilt-wing_UAV.
- TAN, J.; SUN, Y. Unsteady loads for coaxial rotors in forward flight computed using a vortex particle method. In: The Aeronautical Journal. v. 122. p. 693-714. 2018. <https://doi.org/10.1017/aer.2018.8>
- THEYS, B. et al. Influence of propeller configuration on propulsion system efficiency of multi-rotor Unmanned Aerial Vehicles. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON UNMANNED AIRCRAFT SYSTEMS (ICUAS). **Anais**. Arlington, Virginia, USA. p. 195-201. 2016. <https://doi.org/10.1109/ICUAS.2016.7502520>
- VAN KUIK, G. A. M. **The Actuator Disc Concept**. In: Stoevesandt B.; Schepers G.; Fuglsang P.; Yuping S. (eds) Handbook of Wind Energy Aerodynamics. Springer. 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-05455-7_2-1
- XINHUA, W.; LILONG, C.; Mathematical modeling and control of a tilt-rotor aircraft. In: Aerospace Science and Technology. v. 47. p. 473-492. 2015. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2015.10.012>
- YECHOUT, T. R. et al. **Introduction to Aircraft Flight Mechanics**. Reston, Virginia, USA. 2003.

ZHONG, L. et al. Control techniques of tilt rotor unmanned aerial vehicle systems: A review. In: Chinese Journal of Aeronautics. v. 28. 2016. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2016.11.001>

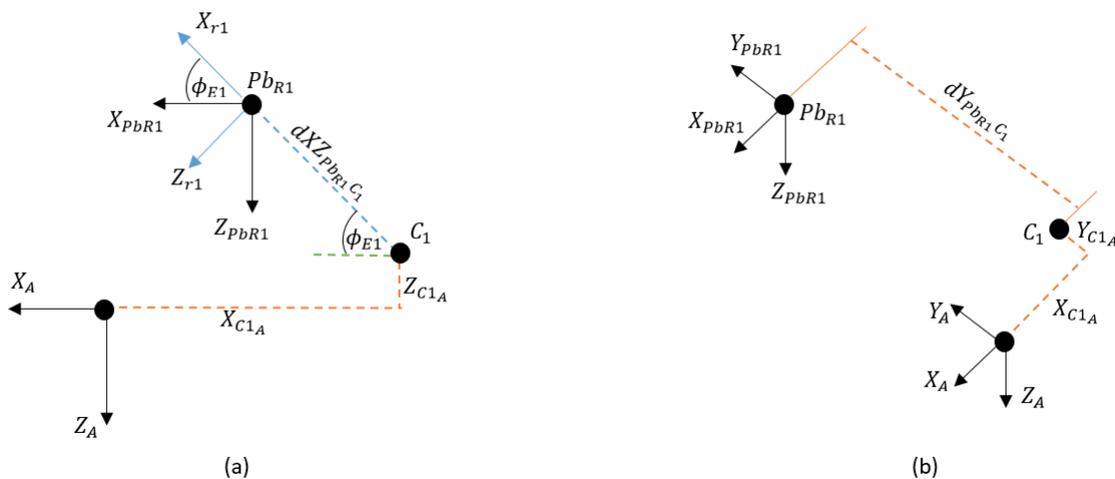
APÊNDICE A1

i. Posição Relativa dos Componentes da Aeronave em Relação ao Sistema Fixo ao Nariz da Aeronave A

▪ Posição Relativa do Rotor-Coaxial Direito R_1

Para um componente, como um rotor-coaxial ou como uma asa, que gira em função de um ângulo de inclinação ϕ_{E1} . O primeiro passo para entender suas coordenadas relativas ao sistema A é localizar as coordenadas do ponto de origem da junta de giro. Já que este ponto é fixo em relação ao sistema A . Para isto, a Figura A1.1 apresenta a localização da junta de giro C_1 do rotor-coaxial direito R_1 e adicionalmente apresenta a localização do sistema Pb_{R1} em relação à junta de giro. Na Figura A1.1, a expressão $dXZ_{Pb_{R1}C_1}$ representa o raio de giro (constante) no plano $X_A Z_A$ entre o sistema Pb_{R1} e a junta C_1 . Por outro lado, a expressão $dY_{Pb_{R1}C_1}$ representa a distância em Y_A entre o sistema Pb_{R1} e a junta C_1 . Observa-se também que a base $(X_{C1A} \ Y_{C1A} \ Z_{C1A})$ representa as coordenadas (constantes) da junta C_1 relativas ao sistema fixo ao nariz A .

Figura A1.1 – Relação entre os sistemas A , Pb e a junta de giro C_1 do rotor-coaxial direito R_1 . (a) Vista lateral, (b) Vista superior.



Fonte: Autoria própria

Portanto, a partir da Figura A1.1, as coordenadas do sistema Pb do rotor-coaxial direito em relação ao sistema A , são dadas pela equação (A1.1), onde o parâmetro $Rot_Y(\phi_{E1})$ representa uma matriz de rotação em torno de Y em função do ângulo de inclinação ϕ_{E1} .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_{PbR1_A} \\ Y_{PbR1_A} \\ Z_{PbR1_A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{C1_A} \\ Y_{C1_A} \\ Z_{C1_A} \end{bmatrix} + Rot_Y(\phi_{E1}) \begin{bmatrix} dXZ_{PbR1C1} \\ dY_{PbR1C1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_{PbR1_A} \\ Y_{PbR1_A} \\ Z_{PbR1_A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{C1_A} + (dXZ_{PbR1C1})\cos(\phi_{E1}) \\ Y_{C1_A} + dY_{PbR1C1} \\ Z_{C1_A} - (dXZ_{PbR1C1})\sin(\phi_{E1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A1.1)$$

▪ **Posição Relativa do Rotor-Coaxial Esquerdo R_2**

Analogamente ao procedimento realizado para determinar a localização do sistema Pb do rotor-coaxial direito R_1 , a localização do sistema Pb do rotor-coaxial esquerdo R_2 é dada pela equação (A1.2).

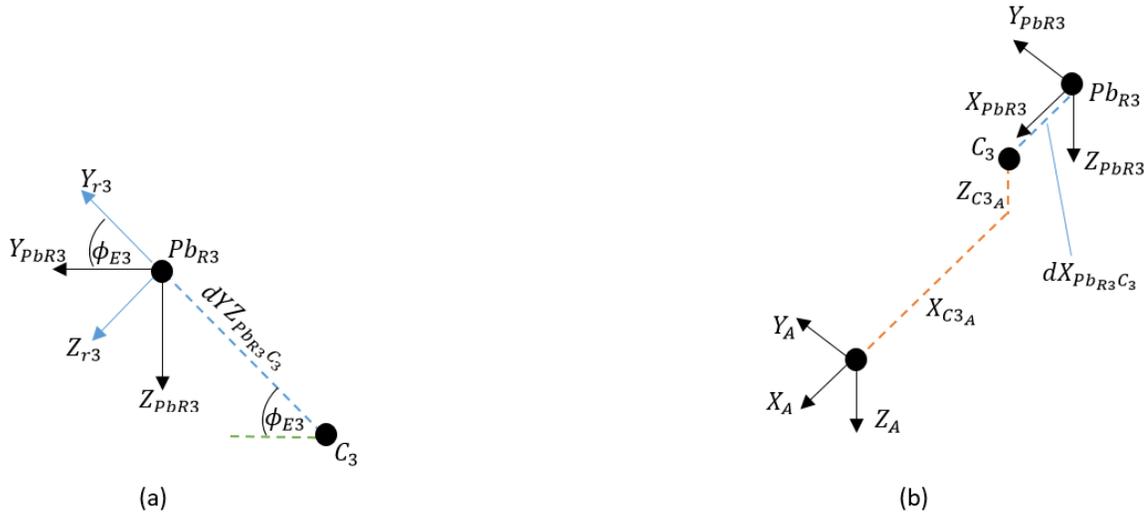
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_{PbR2_A} \\ Y_{PbR2_A} \\ Z_{PbR2_A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{C2_A} \\ Y_{C2_A} \\ Z_{C2_A} \end{bmatrix} + Rot_Y(\phi_{E2}) \begin{bmatrix} dXZ_{PbR2C2} \\ dY_{PbR2C2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_{PbR2_A} \\ Y_{PbR2_A} \\ Z_{PbR2_A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{C2_A} + (dXZ_{PbR2C2})\cos(\phi_{E2}) \\ Y_{C2_A} + dY_{PbR2C2} \\ Z_{C2_A} - (dXZ_{PbR2C2})\sin(\phi_{E2}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A1.2)$$

▪ **Posição Relativa do Rotor-Coaxial Traseiro R_3**

Para o rotor-coaxial traseiro o procedimento é semelhante. Porém é necessário entender visualmente como se encontra o sistema Pb do rotor traseiro R_3 em relação ao sistema A , já que este difere dos sistemas Pb dos outros dois rotores. A Figura A1.2 mostra a localização da junta de giro C_3 do rotor-coaxial traseiro R_3 e adicionalmente apresenta a localização do sistema Pb_{R3} em relação à junta de giro. Na Figura A1.2, a expressão dYZ_{PbR3C3} representa o raio de giro (constante) no plano $Y_A Z_A$ entre o sistema Pb_{R3} e a junta C_3 . Por outro lado, a expressão dX_{PbR3C3} representa a

distância em X_A entre o sistema Pb_{R_3} e a junta C_3 . Observa-se também que a base $(X_{C_{3A}} \ Y_{C_{3A}} = 0 \ Z_{C_{3A}})$ representam as coordenadas (constantes) da junta C_3 relativas ao sistema fixo ao nariz A . É necessário ressaltar que a junta de giro traseira é considerada alinhada ao eixo X_A no plano $X_A Y_A$, portanto a distância $Y_{C_{3A}}$ é igual a zero.

Figura A1.2 – Relação entre os sistemas A , Pb e a junta de giro C_3 do rotor-coaxial traseiro R_3 . (a) Vista frontal; (b) Vista superior.



Fonte: Autoria própria

A partir da Figura A1.2, as coordenadas do sistema Pb do rotor-coaxial traseiro em relação ao sistema A , são dadas pela equação (A1.3). O parâmetro $Rot_X(\phi_{E3})$ representa uma matriz de rotação em torno de X_A em função do ângulo de inclinação ϕ_{E3} . É necessário ressaltar que pela regra da mão direita, o giro apresentado na Figura A1.2 (a) é considerado um ângulo negativo.

$$\begin{bmatrix} X_{PbR_{3A}} \\ Y_{PbR_{3A}} \\ Z_{PbR_{3A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{C_{3A}} \\ Y_{C_{3A}} \\ Z_{C_{3A}} \end{bmatrix} + Rot_X(\phi_{E3}) \begin{bmatrix} dX_{PbR_3C_3} \\ dYZ_{PbR_3C_3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A1.3)$$

$$\begin{bmatrix} X_{PbR_{3A}} \\ Y_{PbR_{3A}} \\ Z_{PbR_{3A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{C_{3A}} + dX_{PbR_3C_3} \\ Y_{C_{3A}} + (dYZ_{PbR_3C_3}) \cos(\phi_{E3}) \\ Z_{C_{3A}} + (dYZ_{PbR_3C_3}) \sin(\phi_{E3}) \end{bmatrix}$$

- **Posição Relativa da Asa direita W_1**

Seguindo um processo análogo ao do rotor-coaxial direito R_1 , a equação (A1.4) mostra a posição relativa da a asa direita em relação ao sistema fixo ao nariz A :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_{PbW1A} \\ Y_{PbW1A} \\ Z_{PbW1A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{C1A} \\ Y_{C1A} \\ Z_{C1A} \end{bmatrix} + Rot_Y(\phi_{E1}) \begin{bmatrix} dXZ_{PbW1C1} \\ dY_{PbW1C1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_{PbW1A} \\ Y_{PbW1A} \\ Z_{PbW1A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{C1A} + (dXZ_{PbW1C1})\cos(\phi_{E1}) \\ Y_{C1A} + dY_{PbW1C1} \\ Z_{C1A} - (dXZ_{PbW1C1})\sin(\phi_{E1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A1.4)$$

- **Posição Relativa da Asa esquerda W_2**

Seguindo um processo análogo ao do rotor-coaxial esquerdo R_2 , a equação (A1.5) mostra a posição relativa para a asa esquerda em relação ao sistema fixo ao nariz A :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_{PbW2A} \\ Y_{PbW2A} \\ Z_{PbW2A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{C2A} \\ Y_{C2A} \\ Z_{C2A} \end{bmatrix} + Rot_Y(\phi_{E2}) \begin{bmatrix} dXZ_{PbW2C2} \\ dY_{PbW2C2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_{PbW2A} \\ Y_{PbW2A} \\ Z_{PbW2A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{C2A} + (dXZ_{PbW2C2})\cos(\phi_{E2}) \\ Y_{C2A} + dY_{PbW2C2} \\ Z_{C2A} - (dXZ_{PbW2C2})\sin(\phi_{E2}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A1.5)$$

ii. Tensores de Inércia dos Componentes da Aeronave em Relação ao Sistema Fixo ao Corpo da Aeronave B

- **Tensor de Inércia do Rotor-Coaxial Direito R_1**

Através da Figura 3.6 (a) é possível observar que as coordenadas de um ponto de massa dm definido no sistema fixo ao rotor-coaxial direito r_1 , podem ser transferidas para o sistema paralelo

ao corpo e fixo ao C.G. do rotor-coaxial direito Pb_{R1} , através de uma matriz de rotação $Rot_Y(\phi_{E1})$, como visto na equação (A1.6).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_{r1PbR1} \\ Y_{r1PbR1} \\ Z_{r1PbR1} \end{bmatrix} &= Rot_Y(\phi_{E1}) \begin{bmatrix} X_{r1} \\ Y_{r1} \\ Z_{r1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_{r1PbR1} \\ Y_{r1PbR1} \\ Z_{r1PbR1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{r1} \cos(\phi_{E1}) + Z_{r1} \sin(\phi_{E1}) \\ Y_{r1} \\ -X_{r1} \sin(\phi_{E1}) + Z_{r1} \cos(\phi_{E1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A1.6)$$

Agora, sabendo que o tensor de inércia do rotor-coaxial direito definido no seu sistema Pb é dado pela equação (A1.7):

$$\begin{aligned} J_{R1PbR1} &= \\ &\begin{bmatrix} \int (Y_{r1PbR1}^2 + Z_{r1PbR1}^2) dm & -\int (X_{r1PbR1} Y_{r1PbR1}) dm & -\int (X_{r1PbR1} Z_{r1PbR1}) dm \\ -\int (Y_{r1PbR1} X_{r1PbR1}) dm & \int (X_{r1PbR1}^2 + Z_{r1PbR1}^2) dm & -\int (Y_{r1PbR1} Z_{r1PbR1}) dm \\ -\int (Z_{r1PbR1} X_{r1PbR1}) dm & -\int (Z_{r1PbR1} Y_{r1PbR1}) dm & \int (X_{r1PbR1}^2 + Y_{r1PbR1}^2) dm \end{bmatrix} \\ &= \\ &\begin{bmatrix} I_{XX_{R1PbR1}} & -I_{XY_{R1PbR1}} & -I_{XZ_{R1PbR1}} \\ -I_{YX_{R1PbR1}} & I_{YY_{R1PbR1}} & -I_{YZ_{R1PbR1}} \\ -I_{ZX_{R1PbR1}} & -I_{ZY_{R1PbR1}} & I_{ZZ_{R1PbR1}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A1.7)$$

Basta substituir os valores de $(X_{r1PbR1} \ Y_{r1PbR1} \ Z_{r1PbR1})$ em (A1.6) dentro de cada um dos produtos e momentos de inércia da equação (A1.7). A equação (A1.8) mostra a substituição para achar o momento de inércia em torno do eixo X_{PbR1} . A cor vermelha serve para indicar a mudança de um determinado polinômio. A cor azul serve para indicar polinômios acrescentados ao longo do equacionamento.

$$\begin{aligned}
\therefore I_{XX_{R_1 PbR_1}} &= \int (Y_{r_1 PbR_1}^2 + Z_{r_1 PbR_1}^2) dm \\
&= \int [Y_{r_1}^2 + (-X_{r_1} \sin(\phi_{E1}) + Z_{r_1} \cos(\phi_{E1}))^2] dm \\
&= \int [Y_{r_1}^2 + X_{r_1}^2 \sin^2(\phi_{E1}) - 2X_{r_1}Z_{r_1} \sin(\phi_{E1}) \cos(\phi_{E1}) + Z_{r_1}^2 \cos^2(\phi_{E1})] dm \\
&= \int \left[Y_{r_1}^2 + X_{r_1}^2 \sin^2(\phi_{E1}) + Y_{r_1}^2 \sin^2(\phi_{E1}) - Y_{r_1}^2 \sin^2(\phi_{E1}) - X_{r_1}Z_{r_1} \sin(2\phi_{E1}) \right. \\
&\quad \left. + Z_{r_1}^2 \cos^2(\phi_{E1}) + Y_{r_1}^2 \cos^2(\phi_{E1}) - Y_{r_1}^2 \cos^2(\phi_{E1}) \right] dm \\
&= \left\{ \int (X_{r_1}^2 \sin^2(\phi_{E1}) + Y_{r_1}^2 \sin^2(\phi_{E1})) dm + \int (Z_{r_1}^2 \cos^2(\phi_{E1}) + Y_{r_1}^2 \cos^2(\phi_{E1})) dm \right. \\
&\quad \left. + \int [Y_{r_1}^2 - Y_{r_1}^2 \sin^2(\phi_{E1}) - Y_{r_1}^2 \cos^2(\phi_{E1})] dm - \int (X_{r_1}Z_{r_1} \sin(2\phi_{E1})) dm \right\} \quad (A1.8) \\
&= \left\{ \begin{aligned} &I_{ZZ_{R_1 r_1}} \sin^2(\phi_{E1}) + I_{XX_{R_1 r_1}} \cos^2(\phi_{E1}) + \int Y_{r_1}^2 \left[1 - \underbrace{\sin^2(\phi_{E1}) + \cos^2(\phi_{E1})}_{1} \right] dm \\ &- I_{XZ_{R_1 r_1}} \sin(2\phi_{E1}) \end{aligned} \right\} \\
I_{XX_{R_1 PbR_1}} &= I_{ZZ_{R_1 r_1}} \sin^2(\phi_{E1}) + I_{XX_{R_1 r_1}} \cos^2(\phi_{E1}) - I_{XZ_{R_1 r_1}} \sin(2\phi_{E1})
\end{aligned}$$

Desta forma, na equação (A1.8) os termos $I_{ZZ_{R_1 r_1}}$, $I_{XX_{R_1 r_1}}$, $I_{XZ_{R_1 r_1}}$ referem-se, respectivamente, aos momentos e ao produto de inércia do rotor-coaxial R_1 em torno dos eixos X e Z do sistema r_1 . O interessante nesta abordagem é que estes momentos e produto de inércia podem ser calculados diretamente sobre a peça desenhada, por exemplo, usando o software CAD Solidworks e seguindo uma orientação de eixos de acordo com a base r_1 .

Continuando, o restante dos momentos e produtos de inércia do rotor R_1 em relação ao respectivo sistema Pb são apresentados nas equações (A1.9) até (A1.16).

$$\begin{aligned}
\therefore I_{XY_{R_1 PbR_1}} &= \int (X_{r_1 PbR_1} Y_{r_1 PbR_1}) dm \\
&= \int (X_{r_1} \cos(\phi_{E1}) + Z_{r_1} \sin(\phi_{E1}))(Y_{r_1}) dm \\
&= \int X_{r_1} Y_{r_1} \cos(\phi_{E1}) dm + \int Y_{r_1} Z_{r_1} \sin(\phi_{E1}) dm \\
I_{XY_{R_1 PbR_1}} &= I_{XY_{R_1 r_1}} \cos(\phi_{E1}) + I_{YZ_{R_1 r_1}} \sin(\phi_{E1}) \quad (A1.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{XZ_{R1PbR1}} &= \int (X_{r1PbR1} Z_{r1PbR1}) dm \\
&= \int [(X_{r1} \cos(\phi_{E1}) + Z_{r1} \sin(\phi_{E1}))(-X_{r1} \sin(\phi_{E1}) + Z_{r1} \cos(\phi_{E1}))] dm \\
&= \int \left[-X_{r1}^2 \sin(\phi_{E1}) \cos(\phi_{E1}) + X_{r1} Z_{r1} \cos^2(\phi_{E1}) - X_{r1} Z_{r1} \sin^2(\phi_{E1}) \right. \\
&\quad \left. + Z_{r1}^2 \sin(\phi_{E1}) \cos(\phi_{E1}) \right] dm \\
&= \int \left[-X_{r1}^2 \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} + X_{r1} Z_{r1} (\cos^2(\phi_{E1}) - \sin^2(\phi_{E1})) + Z_{r1}^2 \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} \right] dm \\
&= \int \left[-X_{r1}^2 \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} + X_{r1} Z_{r1} (\cos(2\phi_{E1}) - 1) + Z_{r1}^2 \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} \right] dm \tag{A1.10} \\
&= \int \left[-X_{r1}^2 \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} - Y_{r1}^2 \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} + X_{r1} Z_{r1} (\cos(2\phi_{E1}) - 1) \right. \\
&\quad \left. + Z_{r1}^2 \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} + Y_{r1}^2 \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} \right] dm \\
&= -\int (X_{r1}^2 + Y_{r1}^2) dm \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} + \int (X_{r1} Z_{r1}) dm (\cos(2\phi_{E1}) - 1) + \int (Y_{r1}^2 + Z_{r1}^2) dm \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} \\
I_{XZ_{R1PbR1}} &= (I_{XX_{R1r1}} - I_{ZZ_{R1r1}}) \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} + I_{XZ_{R1r1}} (\cos(2\phi_{E1}) - 1)
\end{aligned}$$

$$\therefore I_{YX_{R1PbR1}} = I_{XY_{R1PbR1}} = I_{XY_{R1r1}} \cos(\phi_{E1}) + I_{YZ_{R1r1}} \sin(\phi_{E1}) \tag{A1.11}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{YY_{R1PbR1}} &= \int (X_{r1PbR1}^2 + Z_{r1PbR1}^2) dm \\
&= \int [(X_{r1} \cos(\phi_{E1}) + Z_{r1} \sin(\phi_{E1}))^2 + (-X_{r1} \sin(\phi_{E1}) + Z_{r1} \cos(\phi_{E1}))^2] dm \\
&= \int \left[X_{r1}^2 \cos^2(\phi_{E1}) + 2X_{r1} Z_{r1} \sin(\phi_{E1}) \cos(\phi_{E1}) + Z_{r1}^2 \sin^2(\phi_{E1}) \right. \\
&\quad \left. + X_{r1}^2 \sin^2(\phi_{E1}) - 2X_{r1} Z_{r1} \sin(\phi_{E1}) \cos(\phi_{E1}) + Z_{r1}^2 \cos^2(\phi_{E1}) \right] dm \tag{A1.12} \\
&= \int [X_{r1}^2 (\sin^2(\phi_{E1}) + \cos^2(\phi_{E1})) + Z_{r1}^2 (\sin^2(\phi_{E1}) + \cos^2(\phi_{E1}))] dm \\
&= \int (X_{r1}^2 + Z_{r1}^2) dm \\
I_{YY_{R1PbR1}} &= I_{YY_{R1r1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{YZ_{R_1 P b R_1}} &= \int (Y_{r_1 P b R_1} Z_{r_1 P b R_1}) dm \\
&= \int (Y_{r_1}) (-X_{r_1} \sin(\phi_{E1}) + Z_{r_1} \cos(\phi_{E1})) dm \\
&= -\int X_{r_1} Y_{r_1} \sin(\phi_{E1}) dm + \int Y_{r_1} Z_{r_1} \cos(\phi_{E1}) dm \\
I_{YZ_{R_1 P b R_1}} &= I_{YZ_{R_1 r_1}} \cos(\phi_{E1}) - I_{XY_{R_1 r_1}} \sin(\phi_{E1})
\end{aligned} \tag{A1.13}$$

$$\therefore I_{ZX_{R_1 P b R_1}} = I_{XZ_{R_1 P b R_1}} = \left(I_{XX_{R_1 r_1}} - I_{ZZ_{R_1 r_1}} \right) \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} + I_{XZ_{R_1 r_1}} (\cos(2\phi_{E1}) - 1) \tag{A1.14}$$

$$\therefore I_{ZY_{R_1 P b R_1}} = I_{YZ_{R_1 P b R_1}} = I_{YZ_{R_1 r_1}} \cos(\phi_{E1}) - I_{XY_{R_1 r_1}} \sin(\phi_{E1}) \tag{A1.15}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{ZZ_{R_1 P b R_1}} &= \int (X_{r_1 P b R_1}^2 + Y_{r_1 P b R_1}^2) dm \\
&= \int \left[(X_{r_1} \cos(\phi_{E1}) + Z_{r_1} \sin(\phi_{E1}))^2 + Y_{r_1}^2 \right] dm \\
&= \int \left[X_{r_1}^2 \cos^2(\phi_{E1}) + 2X_{r_1} Z_{r_1} \sin(\phi_{E1}) \cos(\phi_{E1}) + Z_{r_1}^2 \sin^2(\phi_{E1}) + Y_{r_1}^2 \right] dm \\
&= \int \left[X_{r_1}^2 \cos^2(\phi_{E1}) + Y_{r_1}^2 \cos^2(\phi_{E1}) + Y_{r_1}^2 \sin^2(\phi_{E1}) + Z_{r_1}^2 \sin^2(\phi_{E1}) \right. \\
&\quad \left. + Y_{r_1}^2 - Y_{r_1}^2 \cos^2(\phi_{E1}) - Y_{r_1}^2 \sin^2(\phi_{E1}) + X_{r_1} Z_{r_1} \sin(2\phi_{E1}) \right] dm \\
&= \left\{ \begin{aligned} &\int (X_{r_1}^2 + Y_{r_1}^2) dm \cos^2(\phi_{E1}) + \int (Y_{r_1}^2 + Z_{r_1}^2) dm \sin^2(\phi_{E1}) \\ &+ \int Y_{r_1}^2 \left[1 - \underbrace{\cos^2(\phi_{E1}) - \sin^2(\phi_{E1})}_{\cos(2\phi_{E1})} \right] dm + \int (X_{r_1} Z_{r_1}) dm \sin(2\phi_{E1}) \end{aligned} \right\} \\
I_{ZZ_{R_1 P b R_1}} &= I_{XX_{R_1 r_1}} \sin^2(\phi_{E1}) + I_{ZZ_{R_1 r_1}} \cos^2(\phi_{E1}) + I_{XZ_{R_1 r_1}} \sin(2\phi_{E1})
\end{aligned} \tag{A1.16}$$

De forma resumida, os produtos e momentos de inércia de R_1 no seu respectivo sistema Pb , são apresentados na equação (A1.17).

$$\begin{aligned}
I_{XX_{R1PbR1}} &= I_{ZZ_{R1r1}} \sin^2(\phi_{E1}) + I_{XX_{R1r1}} \cos^2(\phi_{E1}) - I_{XZ_{R1r1}} \sin(2\phi_{E1}) \\
I_{XY_{R1PbR1}} &= I_{XY_{R1r1}} \cos(\phi_{E1}) + I_{YZ_{R1r1}} \sin(\phi_{E1}) \\
I_{XZ_{R1PbR1}} &= \left(I_{XX_{R1r1}} - I_{ZZ_{R1r1}} \right) \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} + I_{XZ_{R1r1}} (\cos(2\phi_{E1}) - 1) \\
I_{YX_{R1PbR1}} &= I_{XY_{R1PbR1}} \\
I_{YY_{R1PbR1}} &= I_{YY_{R1r1}} \\
I_{YZ_{R1PbR1}} &= I_{YZ_{R1r1}} \cos(\phi_{E1}) - I_{XY_{R1r1}} \sin(\phi_{E1}) \\
I_{ZX_{R1PbR1}} &= I_{XZ_{R1PbR1}} \\
I_{ZY_{R1PbR1}} &= I_{YZ_{R1PbR1}} \\
I_{ZZ_{R1PbR1}} &= I_{XX_{R1r1}} \sin^2(\phi_{E1}) + I_{ZZ_{R1r1}} \cos^2(\phi_{E1}) + I_{XZ_{R1r1}} \sin(2\phi_{E1})
\end{aligned} \tag{A1.17}$$

Devido ao paralelismo existente entre os sistemas fixo ao rotor-coaxial direito Pb_{R1} e o sistema fixo ao corpo B , as coordenadas de um ponto de massa dm definido no sistema fixo ao rotor-coaxial direito r_1 , podem ser observadas no sistema B , através da equação (A1.18).

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} X_{r1B} \\ Y_{r1B} \\ Z_{r1B} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{r1PbR1} \\ Y_{r1PbR1} \\ Z_{r1PbR1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{PbR1B} \\ Y_{PbR1B} \\ Z_{PbR1B} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} X_{r1B} \\ Y_{r1B} \\ Z_{r1B} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{r1PbR1} \\ Y_{r1PbR1} \\ Z_{r1PbR1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{PbR1A} \\ Y_{PbR1A} \\ Z_{PbR1A} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{B_A} \\ Y_{B_A} \\ Z_{B_A} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A1.18}$$

Portanto, o tensor de inércia do rotor-coaxial direito R_1 , observado desde o referencial fixo ao corpo B , será dado pela equação (A1.19):

$$\begin{aligned}
J_{R_1 B} &= \\
&\begin{bmatrix} \int (Y_{r_1 B}^2 + Z_{r_1 B}^2) dm & -\int (X_{r_1 B} Y_{r_1 B}) dm & -\int (X_{r_1 B} Z_{r_1 B}) dm \\ -\int (Y_{r_1 B} X_{r_1 B}) dm & \int (X_{r_1 B}^2 + Z_{r_1 B}^2) dm & -\int (Y_{r_1 B} Z_{r_1 B}) dm \\ -\int (Z_{r_1 B} X_{r_1 B}) dm & -\int (Z_{r_1 B} Y_{r_1 B}) dm & \int (X_{r_1 B}^2 + Y_{r_1 B}^2) dm \end{bmatrix} \\
&= \\
&\begin{bmatrix} I_{XX_{R_1 B}} & -I_{XY_{R_1 B}} & -I_{XZ_{R_1 B}} \\ -I_{YX_{R_1 B}} & I_{YY_{R_1 B}} & -I_{YZ_{R_1 B}} \\ -I_{ZX_{R_1 B}} & -I_{ZY_{R_1 B}} & I_{ZZ_{R_1 B}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A1.19}$$

Substituindo $(X_{r_1 B} \ Y_{r_1 B} \ Z_{r_1 B})$ de (A1.18) em cada um dos momentos e produtos de inércia na equação (A1.19), são obtidos os momentos e produtos de inércia do rotor-coaxial direito R_1 , observados desde o Sistema fixo ao corpo B . Na equação (A1.20) tem-se o momento de inércia do rotor R_1 , em torno do eixo X_B .

$$\begin{aligned}
\therefore I_{XX_{R_1 B}} &= \int (Y_{r_1 B}^2 + Z_{r_1 B}^2) dm \\
&= \int \left[(Y_{r_1 P_{bR_1}} + Y_{P_{bR_1} B})^2 + (Z_{r_1 P_{bR_1}} + Z_{P_{bR_1} B})^2 \right] dm \\
&= \int \left[Y_{r_1 P_{bR_1}}^2 + 2Y_{r_1 P_{bR_1}} Y_{P_{bR_1} B} + Y_{P_{bR_1} B}^2 + Z_{r_1 P_{bR_1}}^2 + 2Z_{r_1 P_{bR_1}} Z_{P_{bR_1} B} + Z_{P_{bR_1} B}^2 \right] dm \\
&= \left\{ \underbrace{\int (Y_{r_1 P_{bR_1}}^2 + Z_{r_1 P_{bR_1}}^2) dm}_{I_{XX_{R_1 P_{bR_1}}}} + \underbrace{2Y_{P_{bR_1} B} \int Y_{r_1 P_{bR_1}} dm}_{m_{R_1} Y_{P_{bR_1} B}} + \underbrace{2Z_{P_{bR_1} B} \int Z_{r_1 P_{bR_1}} dm}_{m_{R_1} Z_{P_{bR_1} B}} + \int (Y_{P_{bR_1} B}^2 + Z_{P_{bR_1} B}^2) dm \right\} \\
I_{XX_{R_1 B}} &= I_{XX_{R_1 P_{bR_1}}} + m_{R_1} (Y_{P_{bR_1} B}^2 + Z_{P_{bR_1} B}^2)
\end{aligned} \tag{A1.20}$$

Portanto, da equação (A1.20) observa-se que o momento de inércia do rotor-coaxial direito R_1 , em torno do eixo X_B , nada mais é do que o momento de inércia em torno do eixo $X_{P_{bR_1}}$ ($I_{XX_{R_1 P_{bR_1}}}$), mais a massa total do rotor-coaxial; vezes a distância ao quadrado em Y_B e em Z_B . Ou seja, é a aplicação do teorema de Huygens-Steiner, ou teorema dos eixos paralelos (entre as bases paralelas B e P_{bR_1}).

Analogamente, para o restante de momentos e produtos de inércia, as equações (A1.21) até (A1.28) mostram os restantes momentos e produtos de inércia do rotor R_1 , em relação ao sistema fixo ao corpo B .

$$\begin{aligned}
\therefore I_{XY_{R_1B}} &= \int (X_{r1_B} Y_{r1_B}) dm \\
&= \int \left[(X_{r1_{PbR1}} + X_{PbR1_B}) (Y_{r1_{PbR1}} + Y_{PbR1_B}) \right] dm \\
&= \int \left[X_{r1_{PbR1}} Y_{r1_{PbR1}} + X_{PbR1_B} Y_{r1_{PbR1}} + Y_{PbR1_B} X_{r1_{PbR1}} + X_{PbR1_B} Y_{PbR1_B} \right] dm \\
&= \left\{ \underbrace{\int (X_{r1_{PbR1}} Y_{r1_{PbR1}}) dm}_{I_{XY_{R1PbR1}}} + \underbrace{\int (X_{PbR1_B} Y_{r1_{PbR1}}) dm}_{\underbrace{\quad}_{\quad}} + \underbrace{\int (Y_{PbR1_B} X_{r1_{PbR1}}) dm}_{\underbrace{\quad}_{\quad}} + \underbrace{\int (X_{PbR1_B} Y_{PbR1_B}) dm}_{\underbrace{\quad}_{\quad}} \right\} \\
I_{XY_{R1B}} &= I_{XY_{R1PbR1}} + m_{R1} X_{PbR1_B} Y_{PbR1_B}
\end{aligned} \tag{A1.21}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{XZ_{R1B}} &= \int (X_{r1_B} Z_{r1_B}) dm \\
&= \int \left[(X_{r1_{PbR1}} + X_{PbR1_B}) (Z_{r1_{PbR1}} + Z_{PbR1_B}) \right] dm \\
&= \int \left[X_{r1_{PbR1}} Z_{r1_{PbR1}} + X_{PbR1_B} Z_{r1_{PbR1}} + Z_{PbR1_B} X_{r1_{PbR1}} + X_{PbR1_B} Z_{PbR1_B} \right] dm \\
&= \left\{ \underbrace{\int (X_{r1_{PbR1}} Z_{r1_{PbR1}}) dm}_{I_{XZ_{R1PbR1}}} + \underbrace{\int (X_{PbR1_B} Z_{r1_{PbR1}}) dm}_{\underbrace{\quad}_{\quad}} + \underbrace{\int (Z_{PbR1_B} X_{r1_{PbR1}}) dm}_{\underbrace{\quad}_{\quad}} + \underbrace{\int (X_{PbR1_B} Z_{PbR1_B}) dm}_{\underbrace{\quad}_{\quad}} \right\} \\
I_{XZ_{R1B}} &= I_{XZ_{R1PbR1}} + m_{R1} X_{PbR1_B} Z_{PbR1_B}
\end{aligned} \tag{A1.22}$$

$$\therefore I_{YX_{R1B}} = I_{XY_{R1B}} = I_{XY_{R1PbR1}} + m_{R1} X_{PbR1_B} Y_{PbR1_B} \tag{A1.23}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{YY_{R1B}} &= \int (X_{r1B}^2 + Z_{r1B}^2) dm \\
&= \int \left[(X_{r1PbR1} + X_{PbR1B})^2 + (Z_{r1PbR1} + Z_{PbR1B})^2 \right] dm \\
&= \int \left[X_{r1PbR1}^2 + 2X_{r1PbR1} X_{PbR1B} + X_{PbR1B}^2 + Z_{r1PbR1}^2 + 2Z_{r1PbR1} Z_{PbR1B} + Z_{PbR1B}^2 \right] dm \\
&= \left\{ \underbrace{\int (X_{r1PbR1}^2 + X_{PbR1B}^2 + Z_{r1PbR1}^2 + Z_{PbR1B}^2) dm}_{I_{YY_{R1PbR1}}} + \underbrace{2X_{PbR1B} \int (Z_{r1PbR1} + Z_{PbR1B}) dm}_{m_{R1}} \right\} \\
&\quad + \underbrace{2Z_{PbR1B} \int X_{r1PbR1} dm}_{m_{R1}} \\
I_{YY_{R1B}} &= I_{YY_{R1PbR1}} + m_{R1} (X_{PbR1B}^2 + Z_{PbR1B}^2)
\end{aligned} \tag{A1.24}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{YZ_{R1B}} &= \int (Y_{r1B} Z_{r1B}) dm \\
&= \int \left[(Y_{r1PbR1} + Y_{PbR1B}) (Z_{r1PbR1} + Z_{PbR1B}) \right] dm \\
&= \int \left[Y_{r1PbR1} Z_{r1PbR1} + Y_{PbR1B} Z_{r1PbR1} + Z_{PbR1B} Y_{r1PbR1} + Y_{PbR1B} Z_{PbR1B} \right] dm \\
&= \left\{ \underbrace{\int (Y_{r1PbR1} Z_{r1PbR1} + Y_{PbR1B} Z_{r1PbR1} + Z_{PbR1B} Y_{r1PbR1}) dm}_{I_{YZ_{R1PbR1}}} + \underbrace{Y_{PbR1B} \int Z_{PbR1B} dm}_{m_{R1}} \right\} \\
I_{YZ_{R1B}} &= I_{YZ_{R1PbR1}} + m_{R1} Y_{PbR1B} Z_{PbR1B}
\end{aligned} \tag{A1.25}$$

$$\therefore I_{ZX_{R1B}} = I_{XZ_{R1B}} = I_{XZ_{R1PbR1}} + m_{R1} X_{PbR1B} Z_{PbR1B} \tag{A1.26}$$

$$\therefore I_{ZY_{R1B}} = I_{YZ_{R1B}} = I_{YZ_{R1PbR1}} + m_{R1} Y_{PbR1B} Z_{PbR1B} \tag{A1.27}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{ZZ_{R_1B}} &= \int (X_{r_1B}^2 + Y_{r_1B}^2) dm \\
&= \int \left[(X_{r_1PbR_1} + X_{PbR_1B})^2 + (Y_{r_1PbR_1} + Y_{PbR_1B})^2 \right] dm \\
&= \int \left[X_{r_1PbR_1}^2 + 2X_{r_1PbR_1} X_{PbR_1B} + X_{PbR_1B}^2 + Y_{r_1PbR_1}^2 + 2Y_{r_1PbR_1} Y_{PbR_1B} + Y_{PbR_1B}^2 \right] dm \\
&= \left\{ \underbrace{\int (X_{r_1PbR_1}^2 + Y_{r_1PbR_1}^2) dm}_{I_{ZZ_{R_1PbR_1}}} + \underbrace{2X_{PbR_1B} \int (X_{r_1PbR_1} + Y_{r_1PbR_1}) dm}_{m_{R_1} \underbrace{\int (X_{r_1PbR_1} + Y_{r_1PbR_1}) dm}_{\bar{v}}} + 2Y_{PbR_1B} \underbrace{\int (X_{r_1PbR_1} + Y_{r_1PbR_1}) dm}_{\bar{v}} \right\} \\
I_{ZZ_{R_1B}} &= I_{ZZ_{R_1PbR_1}} + m_{R_1} (X_{PbR_1B}^2 + Y_{PbR_1B}^2)
\end{aligned} \tag{A1.28}$$

Juntando as equações (A1.20) até (A1.28), substituindo em (A1.19), podemos exemplificar o tensor de inércia do rotor-coaxial direito R_1 no sistema B como:

$$\begin{aligned}
J_{R_1B} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc} I_{XX_{R_1PbR_1}} & I_{XY_{R_1PbR_1}} & I_{XZ_{R_1PbR_1}} \\ I_{YX_{R_1PbR_1}} & I_{YY_{R_1PbR_1}} & I_{YZ_{R_1PbR_1}} \\ I_{ZX_{R_1PbR_1}} & I_{ZY_{R_1PbR_1}} & I_{ZZ_{R_1PbR_1}} \end{array} \right] \\ \\ \\ \end{bmatrix} \\
&+ m_{R_1} \left[\begin{array}{ccc} (Y_{PbR_1B}^2 + Z_{PbR_1B}^2) & (X_{PbR_1B} Y_{PbR_1B}) & (X_{PbR_1B} Z_{PbR_1B}) \\ (Y_{PbR_1B} X_{PbR_1B}) & (X_{PbR_1B}^2 + Z_{PbR_1B}^2) & (Y_{PbR_1B} Z_{PbR_1B}) \\ (Z_{PbR_1B} X_{PbR_1B}) & (Z_{PbR_1B} Y_{PbR_1B}) & (X_{PbR_1B}^2 + Y_{PbR_1B}^2) \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{A1.29}$$

Na equação (A1.29) o símbolo \odot representa uma multiplicação matricial elemento-a-elemento.

Se for aplicado a mesma formulação matemática descrita nas equações (A1.18) até (A1.29), para cada um dos rotores-coaxiais, para cada uma das asas e para a fuselagem, observaremos que todos os componentes compartilharão uma equação análoga à equação (A1.29). Portanto, de forma geral, a equação (A1.30) descreverá o tensor de inércia de qualquer componente da aeronave observado desde o sistema fixo ao corpo B . Com $i = (R_1, R_2, R_3, W_1, W_2, F)$.

$$\begin{aligned}
J_{i_B} = & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \odot \left[\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} I_{XX_{iPbi}} & I_{XY_{iPbi}} & I_{XZ_{iPbi}} \\ I_{ZY_{iPbi}} & I_{YY_{iPbi}} & I_{YZ_{iPbi}} \\ I_{ZX_{iPbi}} & I_{ZY_{iPbi}} & I_{ZZ_{iPbi}} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} (Y_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2) & (X_{Pbi_B} Y_{Pbi_B}) & (X_{Pbi_B} Z_{Pbi_B}) \\ (Y_{Pbi_B} X_{Pbi_B}) & (X_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2) & (Y_{Pbi_B} Z_{Pbi_B}) \\ (Z_{Pbi_B} X_{Pbi_B}) & (Z_{Pbi_B} Y_{Pbi_B}) & (X_{Pbi_B}^2 + Y_{Pbi_B}^2) \end{array} \right] \end{array} \right] \\
& + m_i \left[\begin{array}{ccc} (Y_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2) & (X_{Pbi_B} Y_{Pbi_B}) & (X_{Pbi_B} Z_{Pbi_B}) \\ (Y_{Pbi_B} X_{Pbi_B}) & (X_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2) & (Y_{Pbi_B} Z_{Pbi_B}) \\ (Z_{Pbi_B} X_{Pbi_B}) & (Z_{Pbi_B} Y_{Pbi_B}) & (X_{Pbi_B}^2 + Y_{Pbi_B}^2) \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{A1.30}$$

▪ **Tensor de Inércia do Rotor-Coaxial Esquerdo R_2**

Analogamente ao rotor-coaxial R_1 , a equação (A1.31) mostra os momentos e produtos de inércia em relação ao sistema paralelo ao corpo do rotor-coaxial esquerdo Pb_{R2} :

$$\begin{aligned}
I_{XX_{R2PbR2}} &= I_{ZZ_{R2r2}} \sin^2(\phi_{E2}) + I_{XX_{R2r2}} \cos^2(\phi_{E2}) - I_{XZ_{R2r2}} \sin(2\phi_{E2}) \\
I_{XY_{R2PbR2}} &= I_{XY_{R2r2}} \cos(\phi_{E2}) + I_{YZ_{R2r2}} \sin(\phi_{E2}) \\
I_{XZ_{R2PbR2}} &= \left(I_{XX_{R2r2}} - I_{ZZ_{R2r2}} \right) \frac{\sin(2\phi_{E2})}{2} + I_{XZ_{R2r2}} (\cos(2\phi_{E2}) - 1) \\
I_{YX_{R2PbR2}} &= I_{XY_{R2PbR2}} \\
I_{YY_{R2PbR2}} &= I_{YY_{R2r2}} \\
I_{YZ_{R2PbR2}} &= I_{YZ_{R2r2}} \cos(\phi_{E2}) - I_{XY_{R2r2}} \sin(\phi_{E2}) \\
I_{ZX_{R2PbR2}} &= I_{XZ_{R2PbR2}} \\
I_{ZY_{R2PbR2}} &= I_{YZ_{R2PbR2}} \\
I_{ZZ_{R2PbR2}} &= I_{XX_{R2r2}} \sin^2(\phi_{E2}) + I_{ZZ_{R2r2}} \cos^2(\phi_{E2}) + I_{XZ_{R2r2}} \sin(2\phi_{E2})
\end{aligned} \tag{A1.31}$$

Consequentemente, a equação (A1.32) mostra o tensor de inércia observado desde o sistema fixo ao corpo B :

$$\begin{aligned}
J_{R2_B} = & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc} I_{XX_{R2PbR2}} & I_{XY_{R2PbR2}} & I_{XZ_{R2PbR2}} \\ I_{YX_{R2PbR2}} & I_{YY_{R2PbR2}} & I_{YZ_{R2PbR2}} \\ I_{ZX_{R2PbR2}} & I_{ZY_{R2PbR2}} & I_{ZZ_{R2PbR2}} \end{array} \right] \\ r_2 \end{bmatrix} \\
+ m_{R2} & \left[\begin{array}{ccc} (Y_{PbR2_B}^2 + Z_{PbR2_B}^2) & (X_{PbR2_B} Y_{PbR2_B}) & (X_{PbR2_B} Z_{PbR2_B}) \\ (Y_{PbR2_B} X_{PbR2_B}) & (X_{PbR2_B}^2 + Z_{PbR2_B}^2) & (Y_{PbR2_B} Z_{PbR2_B}) \\ (Z_{PbR2_B} X_{PbR2_B}) & (Z_{PbR2_B} Y_{PbR2_B}) & (X_{PbR2_B}^2 + Y_{PbR2_B}^2) \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{A1.32}$$

▪ **Tensor de Inércia do Rotor-Coaxial Traseiro R_3**

Para o rotor-coaxial traseiro, o procedimento é análogo ao adotado para os dois rotores laterais, com a diferença de que o eixo de rotação de R_3 é o eixo X_B como observado na equação (A1.3) da posição relativa do rotor traseiro. Portanto, através da Figura 3.6 (c), é possível observar que as coordenadas de um ponto de massa dm definido no sistema fixo ao rotor-coaxial traseiro r_3 , podem ser transferidas para o sistema paralelo ao corpo e fixo ao C.G. do rotor-coaxial traseiro Pb_{R3} , através de uma matriz de rotação $Rot_X(\phi_{E3})$ (com o ângulo ϕ_{E3} negativo). Esta relação é observada na equação (A1.33).

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} X_{r3_{PbR3}} \\ Y_{r3_{PbR3}} \\ Z_{r3_{PbR3}} \end{bmatrix} &= Rot_X(\phi_{E3}) \begin{bmatrix} X_{r3} \\ Y_{r3} \\ Z_{r3} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} X_{r3_{PbR3}} \\ Y_{r3_{PbR3}} \\ Z_{r3_{PbR3}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{r3} \\ Y_{r3} \cos(\phi_{E3}) - Z_{r3} \sin(\phi_{E3}) \\ Y_{r3} \sin(\phi_{E3}) + Z_{r3} \cos(\phi_{E3}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A1.33}$$

Agora, sabendo que o tensor de inércia do rotor-coaxial traseiro definido no seu sistema Pb é dado pela equação (A1.34):

$$\begin{aligned}
J_{R^3_{PbR^3}} &= \\
&\left[\begin{array}{ccc}
\int (Y_{r^3_{PbR^3}}^2 + Z_{r^3_{PbR^3}}^2) dm & -\int (X_{r^3_{PbR^3}} Y_{r^3_{PbR^3}}) dm & -\int (X_{r^3_{PbR^3}} Z_{r^3_{PbR^3}}) dm \\
-\int (Y_{r^3_{PbR^3}} X_{r^3_{PbR^3}}) dm & \int (X_{r^3_{PbR^3}}^2 + Z_{r^3_{PbR^3}}^2) dm & -\int (Y_{r^3_{PbR^3}} Z_{r^3_{PbR^3}}) dm \\
-\int (Z_{r^3_{PbR^3}} X_{r^3_{PbR^3}}) dm & -\int (Z_{r^3_{PbR^3}} Y_{r^3_{PbR^3}}) dm & \int (X_{r^3_{PbR^3}}^2 + Y_{r^3_{PbR^3}}^2) dm
\end{array} \right] \\
&= \\
&\left[\begin{array}{ccc}
I_{XX_{R^3_{PbR^3}}} & -I_{XY_{R^3_{PbR^3}}} & -I_{XZ_{R^3_{PbR^3}}} \\
-I_{YX_{R^3_{PbR^3}}} & I_{YY_{R^3_{PbR^3}}} & -I_{YZ_{R^3_{PbR^3}}} \\
-I_{ZX_{R^3_{PbR^3}}} & -I_{ZY_{R^3_{PbR^3}}} & I_{ZZ_{R^3_{PbR^3}}}
\end{array} \right]
\end{aligned} \tag{A1.34}$$

Basta substituir os valores de $(X_{r^3_{PbR^3}} \ Y_{r^3_{PbR^3}} \ Z_{r^3_{PbR^3}})$ em (A1.33) dentro de cada um dos produtos e momentos de inércia da equação (A1.34). As equações (A1.35) até (A1.43) mostram os restantes momentos e produtos de inércia do rotor-coaxial traseiro R_3 em relação ao sistema paralelo ao corpo Pb_{R_3} .

$$\begin{aligned}
\therefore I_{XX_{R^3_{PbR^3}}} &= \int (Y_{r^3_{PbR^3}}^2 + Z_{r^3_{PbR^3}}^2) dm \\
&= \int \left[(Y_{r^3} \cos(\phi_{E3}) - Z_{r^3} \sin(\phi_{E3}))^2 + (Y_{r^3} \sin(\phi_{E3}) + Z_{r^3} \cos(\phi_{E3}))^2 \right] dm \\
&= \int \left[Y_{r^3}^2 \cos^2(\phi_{E3}) - 2Y_{r^3}Z_{r^3} \sin(\phi_{E3}) \cos(\phi_{E3}) + Z_{r^3}^2 \sin^2(\phi_{E3}) \right. \\
&\quad \left. + Y_{r^3}^2 \sin^2(\phi_{E3}) + 2Y_{r^3}Z_{r^3} \sin(\phi_{E3}) \cos(\phi_{E3}) + Z_{r^3}^2 \cos^2(\phi_{E3}) \right] dm \\
&= \int \left[Y_{r^3}^2 (\sin^2(\phi_{E3}) + \cos^2(\phi_{E3})) + Z_{r^3}^2 (\sin^2(\phi_{E3}) + \cos^2(\phi_{E3})) \right] dm \\
&= \int (Y_{r^3}^2 + Z_{r^3}^2) dm \\
I_{XX_{R^3_{PbR^3}}} &= I_{XX_{R^3_{r^3}}}
\end{aligned} \tag{A1.35}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{XY_{R^3_{PbR^3}}} &= \int (X_{r^3_{PbR^3}} Y_{r^3_{PbR^3}}) dm \\
&= \int [(X_{r^3})(Y_{r^3} \cos(\phi_{E3}) - Z_{r^3} \sin(\phi_{E3}))] dm \\
&= \int [X_{r^3} Y_{r^3} \cos(\phi_{E3})] dm - \int [X_{r^3} Z_{r^3} \sin(\phi_{E3})] dm \\
I_{XY_{R^3_{PbR^3}}} &= I_{XY_{R^3_{r^3}}} \cos(\phi_{E3}) - I_{XZ_{R^3_{r^3}}} \sin(\phi_{E3})
\end{aligned} \tag{A1.36}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{XZ_{R^3PbR^3}} &= \int (X_{r^3_{PbR^3}} Z_{r^3_{PbR^3}}) dm \\
&= \int [(X_{r^3})(Y_{r^3} \sin(\phi_{E3}) + Z_{r^3} \cos(\phi_{E3}))] dm \\
&= \int [X_{r^3} Y_{r^3} \sin(\phi_{E3})] dm + \int [X_{r^3} Z_{r^3} \cos(\phi_{E3})] dm \\
I_{XZ_{R^3PbR^3}} &= I_{XY_{R^3r^3}} \sin(\phi_{E3}) + I_{XZ_{R^3r^3}} \cos(\phi_{E3})
\end{aligned} \tag{A1.37}$$

$$\therefore I_{YX_{R^3PbR^3}} = I_{XY_{R^3PbR^3}} = I_{XY_{R^3r^3}} \cos(\phi_{E3}) - I_{XZ_{R^3r^3}} \sin(\phi_{E3}) \tag{A1.38}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{YY_{R^3PbR^3}} &= \int (X_{r^3_{PbR^3}}^2 + Z_{r^3_{PbR^3}}^2) dm \\
&= \int [X_{r^3}^2 + (Y_{r^3} \sin(\phi_{E3}) + Z_{r^3} \cos(\phi_{E3}))^2] dm \\
&= \int [X_{r^3}^2 + Y_{r^3}^2 \sin^2(\phi_{E1}) + 2Y_{r^3} Z_{r^3} \sin(\phi_{E1}) \cos(\phi_{E1}) + Z_{r^3}^2 \cos^2(\phi_{E3})] dm \\
&= \int \left[\begin{array}{l} X_{r^3}^2 - X_{r^3}^2 \sin^2(\phi_{E1}) + X_{r^3}^2 \sin^2(\phi_{E1}) + Y_{r^3}^2 \sin^2(\phi_{E1}) \\ + 2Y_{r^3} Z_{r^3} \sin(\phi_{E1}) \cos(\phi_{E1}) \\ - X_{r^3}^2 \cos^2(\phi_{E3}) + X_{r^3}^2 \cos^2(\phi_{E3}) + Z_{r^3}^2 \cos^2(\phi_{E3}) \end{array} \right] dm \\
&= \int \left[\begin{array}{l} X_{r^3}^2 - X_{r^3}^2 \sin^2(\phi_{E1}) + X_{r^3}^2 \sin^2(\phi_{E1}) + Y_{r^3}^2 \sin^2(\phi_{E1}) \\ + 2Y_{r^3} Z_{r^3} \sin(\phi_{E1}) \cos(\phi_{E1}) \\ - X_{r^3}^2 \cos^2(\phi_{E3}) + X_{r^3}^2 \cos^2(\phi_{E3}) + Z_{r^3}^2 \cos^2(\phi_{E3}) \end{array} \right] dm \\
&= \left\{ \int \left[X_{r^3}^2 (\underbrace{1 - \sin^2(\phi_{E1}) + \cos^2(\phi_{E1})}_{1}) \right] dm + \int [X_{r^3}^2 + Y_{r^3}^2] dm \sin^2(\phi_{E3}) \right. \\
&\quad \left. + \int [X_{r^3}^2 + Z_{r^3}^2] dm \cos^2(\phi_{E3}) + \int Y_{r^3} Z_{r^3} dm \sin(2\phi_{E1}) \right\} \\
I_{YY_{R^3PbR^3}} &= I_{YY_{R^3r^3}} \cos^2(\phi_{E3}) + I_{ZZ_{R^3r^3}} \sin^2(\phi_{E3}) + I_{YZ_{R^3r^3}} \sin(2\phi_{E3})
\end{aligned} \tag{A1.39}$$

$$\begin{aligned}
& \therefore I_{YZ_{R^3PbR^3}} = \int (Y_{r^3} Z_{r^3 PbR^3}) dm \\
& = \int (Y_{r^3} \cos(\phi_{E3}) - Z_{r^3} \sin(\phi_{E3})) (Y_{r^3} \sin(\phi_{E3}) + Z_{r^3} \cos(\phi_{E3})) dm \\
& = \int \left[\begin{array}{l} Y_{r^3}^2 \sin(\phi_{E3}) \cos(\phi_{E3}) + Y_{r^3} Z_{r^3} \cos^2(\phi_{E3}) - Y_{r^3} Z_{r^3} \sin^2(\phi_{E3}) \\ -Z_{r^3}^2 \sin(\phi_{E3}) \cos(\phi_{E3}) \end{array} \right] dm \\
& = \int \left[\begin{array}{l} Y_{r^3}^2 \frac{\sin(2\phi_{E3})}{2} + X_{r^3}^2 \frac{\sin(2\phi_{E3})}{2} + Y_{r^3} Z_{r^3} [\cos^2(\phi_{E3}) - \sin^2(\phi_{E3})] \\ -Z_{r^3}^2 \frac{\sin(2\phi_{E3})}{2} - X_{r^3}^2 \frac{\sin(2\phi_{E3})}{2} \end{array} \right] dm \tag{A1.40} \\
& = \int (X_{r^3}^2 + Y_{r^3}^2) dm \frac{\sin(2\phi_{E3})}{2} - \int (X_{r^3}^2 + Z_{r^3}^2) dm \frac{\sin(2\phi_{E3})}{2} + \int (Y_{r^3} Z_{r^3}) dm [\cos(2\phi_{E3}) - 1] \\
& I_{YZ_{R^3PbR^3}} = \left(I_{ZZ_{R^3PbR^3}} - I_{YY_{R^3PbR^3}} \right) \frac{\sin(2\phi_{E3})}{2} + I_{YZ_{R^3PbR^3}} [\cos(2\phi_{E3}) - 1]
\end{aligned}$$

$$\therefore I_{ZX_{R^3PbR^3}} = I_{XZ_{R^3PbR^3}} = I_{XY_{R^3r^3}} \sin(\phi_{E3}) + I_{XZ_{R^3r^3}} \cos(\phi_{E3}) \tag{A1.41}$$

$$\begin{aligned}
& \therefore I_{ZY_{R^3PbR^3}} = I_{YZ_{R^3PbR^3}} \\
& I_{ZY_{R^3PbR^3}} = \left(I_{ZZ_{R^3PbR^3}} - I_{YY_{R^3PbR^3}} \right) \frac{\sin(2\phi_{E3})}{2} + I_{YZ_{R^3PbR^3}} [\cos(2\phi_{E3}) - 1] \tag{A1.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \therefore I_{ZZ_{R_3 PbR_3}} = \int (X_{r_3 PbR_3}^2 + Y_{r_3 PbR_3}^2) dm \\
& = \int [X_{r_3}^2 + (Y_{r_3} \cos(\phi_{E3}) - Z_{r_3} \sin(\phi_{E3}))^2] dm \\
& = \int [X_{r_3}^2 + Y_{r_3}^2 \cos^2(\phi_{E3}) - 2Y_{r_3}Z_{r_3} \sin(\phi_{E1}) \cos(\phi_{E1}) + Z_{r_3}^2 \sin^2(\phi_{E3})] dm \\
& = \int \left[\begin{array}{l} X_{r_3}^2 - X_{r_3}^2 \cos^2(\phi_{E3}) + X_{r_3}^2 \cos^2(\phi_{E3}) + Y_{r_3}^2 \cos^2(\phi_{E3}) \\ - X_{r_3}^2 \sin^2(\phi_{E3}) + X_{r_3}^2 \sin^2(\phi_{E3}) + Z_{r_3}^2 \sin^2(\phi_{E1}) \\ - Y_{r_3}Z_{r_3} \sin(2\phi_{E3}) \end{array} \right] dm \\
& = \left\{ \begin{array}{l} \int (X_{r_3}^2 + Y_{r_3}^2) dm \cos^2(\phi_{E3}) + \int (X_{r_3}^2 + Z_{r_3}^2) dm \sin^2(\phi_{E3}) \\ + \int X_{r_3}^2 \left[1 - \underbrace{\cos^2(\phi_{E3}) - \sin^2(\phi_{E3})}_{\sin^2(\phi_{E3})} \right] dm + \int (Y_{r_3}Z_{r_3}) dm \sin(2\phi_{E3}) \end{array} \right\} \\
& I_{ZZ_{R_3 PbR_3}} = I_{YY_{R_3 r_3}} \sin^2(\phi_{E3}) + I_{ZZ_{R_3 r_3}} \cos^2(\phi_{E3}) - I_{YZ_{R_3 r_3}} \sin(2\phi_{E3})
\end{aligned} \tag{A1.43}$$

De forma resumida, a equação (A1.44) mostra os momentos e produtos de inércia do rotor-coaxial traseiro R_3 , em relação ao seu respectivo sistema paralelo ao corpo Pb :

$$\begin{aligned}
I_{XX_{R_3 PbR_3}} &= I_{XX_{R_3 r_3}} \\
I_{XY_{R_3 PbR_3}} &= I_{XY_{R_3 r_3}} \cos(\phi_{E3}) - I_{XZ_{R_3 r_3}} \sin(\phi_{E3}) \\
I_{XZ_{R_3 PbR_3}} &= I_{XY_{R_3 r_3}} \sin(\phi_{E3}) + I_{XZ_{R_3 r_3}} \cos(\phi_{E3}) \\
I_{YX_{R_3 PbR_3}} &= I_{XY_{R_3 PbR_3}} \\
I_{YY_{R_3 PbR_3}} &= I_{YY_{R_3 r_3}} \cos^2(\phi_{E3}) + I_{ZZ_{R_3 r_3}} \sin^2(\phi_{E3}) + I_{YZ_{R_3 r_3}} \sin(2\phi_{E3}) \\
I_{YZ_{R_3 PbR_3}} &= \left(I_{ZZ_{R_3 PbR_3}} - I_{YY_{R_3 PbR_3}} \right) \frac{\sin(2\phi_{E3})}{2} + I_{YZ_{R_3 PbR_3}} [\cos(2\phi_{E3}) - 1] \\
I_{ZX_{R_3 PbR_3}} &= I_{XZ_{R_3 PbR_3}} \\
I_{ZY_{R_3 PbR_3}} &= I_{YZ_{R_3 PbR_3}} \\
I_{ZZ_{R_3 PbR_3}} &= I_{YY_{R_3 r_3}} \sin^2(\phi_{E3}) + I_{ZZ_{R_3 r_3}} \cos^2(\phi_{E3}) - I_{YZ_{R_3 r_3}} \sin(2\phi_{E3})
\end{aligned} \tag{A1.44}$$

Agora, analogamente a como foi feito para o rotor-coaxial direito R_1 , pode-se encontrar a expressão do tensor de inércia do rotor-coaxial traseiro R_3 em relação ao sistema fixo ao corpo B , de acordo com a equação (A1.30), apresentada na equação (A1.45).

$$\begin{aligned}
J_{R3_B} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc} I_{XX_{R3_{PbR3}}} & I_{XY_{R3_{PbR3}}} & I_{XZ_{R3_{PbR3}}} \\ & I_{YY_{R3_{PbR3}}} & I_{YZ_{R3_{PbR3}}} \\ & & I_{ZZ_{R3_{PbR3}}} \end{array} \right] \\ & \quad \quad \quad r_{R3} \\ & \quad \quad \quad \left[\begin{array}{ccc} I_{ZX_{R3_{PbR3}}} & I_{ZY_{R3_{PbR3}}} & I_{ZZ_{R3_{PbR3}}} \end{array} \right] \end{bmatrix} \\
&+ m_{R3} \left\{ \begin{array}{ccc} \left(Y_{PbR3_B}^2 + Z_{PbR3_B}^2 \right) & \left(X_{PbR3_B} Y_{PbR3_B} \right) & \left(X_{PbR3_B} Z_{PbR3_B} \right) \\ \left(Y_{PbR3_B} X_{PbR3_B} \right) & \left(X_{PbR3_B}^2 + Z_{PbR3_B}^2 \right) & \left(Y_{PbR3_B} Z_{PbR3_B} \right) \\ \left(Z_{PbR3_B} X_{PbR3_B} \right) & \left(Z_{PbR3_B} Y_{PbR3_B} \right) & \left(X_{PbR3_B}^2 + Y_{PbR3_B}^2 \right) \end{array} \right\} \quad (A1.45)
\end{aligned}$$

▪ **Tensor de Inércia da Asa Direita W_1**

Analogamente ao rotor-coaxial R_1 , a equação (A1.46) mostra os momentos e produtos de inércia em relação ao sistema paralelo ao corpo da asa direita Pb_{W1} :

$$\begin{aligned}
I_{XX_{W1_{PbW1}}} &= I_{ZZ_{W1_{w1}}} \sin^2(\phi_{E1}) + I_{XX_{W1_{w1}}} \cos^2(\phi_{E1}) - I_{XZ_{W1_{w1}}} \sin(2\phi_{E1}) \\
I_{XY_{W1_{PbW1}}} &= I_{XY_{W1_{w1}}} \cos(\phi_{E1}) + I_{YZ_{W1_{w1}}} \sin(\phi_{E1}) \\
I_{XZ_{W1_{PbW1}}} &= \left(I_{XX_{W1_{w1}}} - I_{ZZ_{W1_{w1}}} \right) \frac{\sin(2\phi_{E1})}{2} + I_{XZ_{W1_{w1}}} (\cos(2\phi_{E1}) - 1) \\
I_{YX_{W1_{PbW1}}} &= I_{XY_{W1_{PbW1}}} \\
I_{YY_{W1_{PbW1}}} &= I_{YY_{W1_{w1}}} \\
I_{YZ_{W1_{PbW1}}} &= I_{YZ_{W1_{w1}}} \cos(\phi_{E1}) - I_{XY_{W1_{w1}}} \sin(\phi_{E1}) \\
I_{ZX_{W1_{PbW1}}} &= I_{XZ_{W1_{PbW1}}} \\
I_{ZY_{W1_{PbW1}}} &= I_{YZ_{W1_{PbW1}}} \\
I_{ZZ_{W1_{PbW1}}} &= I_{XX_{W1_{w1}}} \sin^2(\phi_{E1}) + I_{ZZ_{W1_{w1}}} \cos^2(\phi_{E1}) + I_{XZ_{W1_{w1}}} \sin(2\phi_{E1})
\end{aligned} \quad (A1.46)$$

Consequentemente, a equação (A1.47) mostra o tensor de inércia da asa direita, observado desde o sistema fixo ao corpo B :

$$\begin{aligned}
J_{W1_B} = & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} I_{XX_{W1_{PbW1}}} & I_{XY_{W1_{PbW1}}} & I_{XZ_{W1_{PbW1}}} \\ & I_{YY_{W1_{PbW1}}} & I_{YZ_{W1_{PbW1}}} \\ I_{ZX_{W1_{PbW1}}} & I_{ZY_{W1_{PbW1}}} & I_{ZZ_{W1_{PbW1}}} \end{bmatrix} \\
+ m_{W1} & \left[\begin{array}{ccc} (Y_{PbW1_B}^2 + Z_{PbW1_B}^2) & (X_{PbW1_B} Y_{PbW1_B}) & (X_{PbW1_B} Z_{PbW1_B}) \\ (Y_{PbW1_B} X_{PbW1_B}) & (X_{PbW1_B}^2 + Z_{PbW1_B}^2) & (Y_{PbW1_B} Z_{PbW1_B}) \\ (Z_{PbW1_B} X_{PbW1_B}) & (Z_{PbW1_B} Y_{PbW1_B}) & (X_{PbW1_B}^2 + Y_{PbW1_B}^2) \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{A1.47}$$

▪ **Tensor de Inércia da Asa Esquerda W_2**

Analogamente ao rotor-coaxial R_1 , a equação (A1.48) mostra os momentos e produtos de inércia em relação ao sistema paralelo ao corpo da asa esquerda Pb_{W2} :

$$\begin{aligned}
I_{XX_{W2_{PbW2}}} &= I_{ZZ_{W2_{w2}}} \sin^2(\phi_{E2}) + I_{XX_{W2_{w2}}} \cos^2(\phi_{E2}) - I_{XZ_{W2_{w2}}} \sin(2\phi_{E2}) \\
I_{XY_{W2_{PbW2}}} &= I_{XY_{W2_{w2}}} \cos(\phi_{E2}) + I_{YZ_{W2_{w2}}} \sin(\phi_{E2}) \\
I_{XZ_{W2_{PbW2}}} &= \left(I_{XX_{W2_{w2}}} - I_{ZZ_{W2_{w2}}} \right) \frac{\sin(2\phi_{E2})}{2} + I_{XZ_{W2_{w2}}} (\cos(2\phi_{E2}) - 1) \\
I_{YX_{W2_{PbW2}}} &= I_{XY_{W2_{PbW2}}} \\
I_{YY_{W2_{PbW2}}} &= I_{YY_{W2_{w2}}} \\
I_{YZ_{W2_{PbW2}}} &= I_{YZ_{W2_{w2}}} \cos(\phi_{E2}) - I_{XY_{W2_{w2}}} \sin(\phi_{E2}) \\
I_{ZX_{W2_{PbW2}}} &= I_{XZ_{W2_{PbW2}}} \\
I_{ZY_{W2_{PbW2}}} &= I_{YZ_{W2_{PbW2}}} \\
I_{ZZ_{W2_{PbW2}}} &= I_{XX_{W2_{w2}}} \sin^2(\phi_{E2}) + I_{ZZ_{W2_{w2}}} \cos^2(\phi_{E2}) + I_{XZ_{W2_{w2}}} \sin(2\phi_{E2})
\end{aligned} \tag{A1.48}$$

Consequentemente, a equação (A1.49) mostra o tensor de inércia da asa esquerda, observado desde o sistema fixo ao corpo B :

$$\begin{aligned}
J_{W2_B} = & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc} I_{XX_{W2_{PbW2}}} & I_{XY_{W2_{PbW2}}} & I_{XZ_{W2_{PbW2}}} \\ & I_{YY_{W2_{PbW2}}} & I_{YZ_{W2_{PbW2}}} \\ & & I_{ZZ_{W2_{PbW2}}} \end{array} \right] \\ & \left[\begin{array}{ccc} I_{ZX_{W2_{PbW2}}} & I_{ZY_{W2_{PbW2}}} & I_{ZZ_{W2_{PbW2}}} \end{array} \right] \end{bmatrix} \\
+ m_{W2} & \left. \begin{bmatrix} \left(Y_{PbW2_B}^2 + Z_{PbW2_B}^2 \right) & \left(X_{PbW2_B} Y_{PbW2_B} \right) & \left(X_{PbW2_B} Z_{PbW2_B} \right) \\ \left(Y_{PbW2_B} X_{PbW2_B} \right) & \left(X_{PbW2_B}^2 + Z_{PbW2_B}^2 \right) & \left(Y_{PbW2_B} Z_{PbW2_B} \right) \\ \left(Z_{PbW2_B} X_{PbW2_B} \right) & \left(Z_{PbW2_B} Y_{PbW2_B} \right) & \left(X_{PbW2_B}^2 + Y_{PbW2_B}^2 \right) \end{bmatrix} \right\} \quad (A1.49)
\end{aligned}$$

▪ **Tensor de Inércia da Fuselagem F**

Para a fuselagem o processo é mais direto já que por ser um componente/peça fixo e considerado rígido, seu tensor de inércia em relação ao sistema Pb_F é obtido diretamente da peça que o conforma, possível de ser obtido através do software CAD Solidworks. Portanto a equação (A1.50) mostra o tensor de inércia da fuselagem em relação ao sistema fixo ao corpo B :

$$\begin{aligned}
J_{F_B} = & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc} I_{XX_{FpbF}} & I_{XY_{FpbF}} & I_{XZ_{FpbF}} \\ & I_{YY_{FpbF}} & I_{YZ_{FpbF}} \\ & & I_{ZZ_{FpbF}} \end{array} \right] \\ & \left[\begin{array}{ccc} I_{ZX_{FpbF}} & I_{ZY_{FpbF}} & I_{ZZ_{FpbF}} \end{array} \right] \end{bmatrix} \\
+ m_F & \left. \begin{bmatrix} \left(Y_{PbF_B}^2 + Z_{PbF_B}^2 \right) & \left(X_{PbF_B} Y_{PbF_B} \right) & \left(X_{PbF_B} Z_{PbF_B} \right) \\ \left(Y_{PbF_B} X_{PbF_B} \right) & \left(X_{PbF_B}^2 + Z_{PbF_B}^2 \right) & \left(Y_{PbF_B} Z_{PbF_B} \right) \\ \left(Z_{PbF_B} X_{PbF_B} \right) & \left(Z_{PbF_B} Y_{PbW2_B} \right) & \left(X_{PbF_B}^2 + Y_{PbF_B}^2 \right) \end{bmatrix} \right\} \quad (A1.50)
\end{aligned}$$

Portanto, o tensor de inércia total da aeronave será dado pela soma de cada um dos tensores de inércia dos componentes (asas, rotores e fuselagem) observados desde o sistema fixo ao corpo B .

$$J_T = J_{R1_B} + J_{R2_B} + J_{R3_B} + J_{W1_B} + J_{W2_B} + J_{F_B} \quad (A1.51)$$

iii. Derivadas dos Tensores de Inércia dos Componentes da Aeronave em Relação ao Sistema Fixo ao Corpo da Aeronave B

Por causa da semelhança nas equações de momentos e produtos de inércia das asas W_1, W_2 e dos rotores-coaxiais laterais R_1, R_2 , o procedimento para encontrar as expressões das derivadas dos momentos e produtos de inércia destes componentes será o mesmo. Para o rotor traseiro R_3 e para a fuselagem F , o procedimento será um pouco diferente.

▪ Derivada dos Momentos e Produtos de Inércia das Asas e dos Rotores-coaxiais Laterais: W_1, W_2, R_1, R_2 , em relação aos sistemas paralelos ao corpo Pb

As equações (A1.52) até (A1.60) mostram as derivadas dos momentos e produtos de inércia das asas W_1, W_2 ou dos rotores-coaxiais laterais R_1, R_2 , em relação ao respectivo sistema paralelo ao corpo $Pb_{(W_i/R_i)}$.

$$\begin{aligned}
 \therefore I_{XX_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} &= I_{ZZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \sin^2(\phi_{Ei}) + I_{XX_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \cos^2(\phi_{Ei}) - I_{XZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \sin(2\phi_{Ei}) \\
 \dot{I}_{XX_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} &= \left[\begin{array}{l} 2I_{ZZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \sin(\phi_{Ei}) \cos(\phi_{Ei}) \dot{\phi}_{Ei} - 2I_{XX_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \sin(\phi_{Ei}) \cos(\phi_{Ei}) \dot{\phi}_{Ei} \\ -2I_{XZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \cos(2\phi_{Ei}) \dot{\phi}_{Ei} \end{array} \right] \\
 &= \dot{\phi}_{Ei} \left[\left(I_{ZZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} - I_{XX_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \right) 2 \sin(\phi_{Ei}) \cos(\phi_{Ei}) - 2I_{XZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \cos(2\phi_{Ei}) \right] \\
 \dot{I}_{XX_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} &= \dot{\phi}_{Ei} \left[\left(I_{ZZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} - I_{XX_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \right) \sin(2\phi_{Ei}) - 2I_{XZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \cos(2\phi_{Ei}) \right]
 \end{aligned} \tag{A1.52}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore I_{XY_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} &= I_{XY_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \cos(\phi_{Ei}) + I_{YZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \sin(\phi_{Ei}) \\
 \dot{I}_{XY_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} &= -I_{XY_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \sin(\phi_{Ei}) \dot{\phi}_{Ei} + I_{YZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \cos(\phi_{Ei}) \dot{\phi}_{Ei} \\
 \dot{I}_{XY_{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)}} &= \dot{\phi}_{Ei} \left[I_{YZ_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \cos(\phi_{Ei}) - I_{XY_{(W_i/R_i)(w_i/r_i)}} \sin(\phi_{Ei}) \right]
 \end{aligned} \tag{A1.53}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{XZ}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \left(I_{XX}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} - I_{ZZ}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \right) \frac{\sin(2\phi_{Ei})}{2} + I_{XZ}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} (\cos(2\phi_{Ei}) - 1) \\
\dot{I}_{XZ}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \left(I_{XX}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} - I_{ZZ}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \right) \cos(2\phi_{Ei}) \dot{\phi}_{Ei} - 2I_{XZ}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(2\phi_{Ei}) \dot{\phi}_{Ei} \\
\dot{I}_{XZ}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \dot{\phi}_{Ei} \left[\left(I_{XX}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} - I_{ZZ}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \right) \cos(2\phi_{Ei}) - 2I_{XZ}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(2\phi_{Ei}) \right]
\end{aligned} \tag{A1.54}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \dot{I}_{YX}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \dot{I}_{XY}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} \\
\dot{I}_{YX}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \dot{\phi}_{Ei} \left[I_{YZ}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \cos(\phi_{Ei}) - I_{XY}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(\phi_{Ei}) \right]
\end{aligned} \tag{A1.55}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \dot{I}_{YY}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= I_{YY}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \\
\dot{I}_{YY}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= 0
\end{aligned} \tag{A1.56}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{YZ}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= I_{YZ}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \cos(\phi_{Ei}) - I_{XY}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(\phi_{Ei}) \\
\dot{I}_{YZ}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= -I_{YZ}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(\phi_{Ei}) \dot{\phi}_{Ei} - I_{XY}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \cos(\phi_{Ei}) \dot{\phi}_{Ei} \\
\dot{I}_{YZ}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= -\dot{\phi}_{Ei} \left[I_{XY}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \cos(\phi_{Ei}) + I_{YZ}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(\phi_{Ei}) \right]
\end{aligned} \tag{A1.57}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \dot{I}_{ZX}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \dot{I}_{XZ}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} \\
\dot{I}_{ZX}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \dot{\phi}_{Ei} \left[\left(I_{XX}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} - I_{ZZ}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \right) \cos(2\phi_{Ei}) - 2I_{XZ}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(2\phi_{Ei}) \right]
\end{aligned} \tag{A1.58}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \dot{I}_{ZY}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \dot{I}_{YZ}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} \\
\dot{I}_{ZY}^{(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= -\dot{\phi}_{Ei} \left[I_{XY}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \cos(\phi_{Ei}) + I_{YZ}^{(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(\phi_{Ei}) \right]
\end{aligned} \tag{A1.59}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{ZZ(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= I_{XX(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin^2(\phi_{Ei}) + I_{ZZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \cos^2(\phi_{Ei}) + I_{XZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(2\phi_{Ei}) \\
\dot{I}_{ZZ(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \left[\begin{aligned} &2I_{XX(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(\phi_{Ei}) \cos(\phi_{Ei}) \dot{\phi}_{Ei} - 2I_{ZZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(\phi_{Ei}) \cos(\phi_{Ei}) \dot{\phi}_{Ei} \\ &+ 2I_{XZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \cos(2\phi_{Ei}) \dot{\phi}_{Ei} \end{aligned} \right] \\
&= \dot{\phi}_{Ei} \left[I_{XX(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(2\phi_{Ei}) - I_{ZZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(2\phi_{Ei}) + 2I_{XZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \cos(2\phi_{Ei}) \dot{\phi}_{Ei} \right] \\
\dot{I}_{ZZ(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \dot{\phi}_{Ei} \left[\left(I_{XX(W_i/R_i)(w_i/r_i)} - I_{ZZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \right) \sin(2\phi_{Ei}) + 2I_{XZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \cos(2\phi_{Ei}) \right]
\end{aligned} \tag{A1.60}$$

Resumidamente, para asas e rotores-coaxiais laterais, a equação (A1.61) apresenta os momentos e produtos de inércia das asas W_1, W_2 ou dos rotores-coaxiais laterais R_1, R_2 , em relação ao respectivo sistema paralelo ao corpo Pb :

$$\begin{aligned}
\dot{I}_{XX(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \dot{\phi}_{Ei} \left[\left(I_{ZZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} - I_{XX(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \right) \sin(2\phi_{Ei}) - 2I_{XZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \cos(2\phi_{Ei}) \right] \\
\dot{I}_{XY(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \dot{\phi}_{Ei} \left[I_{YZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \cos(\phi_{Ei}) - I_{XY(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(\phi_{Ei}) \right] \\
\dot{I}_{XZ(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \dot{\phi}_{Ei} \left[\left(I_{XX(W_i/R_i)(w_i/r_i)} - I_{ZZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \right) \cos(2\phi_{Ei}) - 2I_{XZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(2\phi_{Ei}) \right] \\
\dot{I}_{YX(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \dot{I}_{XY(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} \\
\dot{I}_{YY(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= 0 \\
\dot{I}_{YZ(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= -\dot{\phi}_{Ei} \left[I_{XY(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \cos(\phi_{Ei}) + I_{YZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \sin(\phi_{Ei}) \right] \\
\dot{I}_{ZX(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \dot{I}_{XZ(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} \\
\dot{I}_{ZY(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \dot{I}_{YZ(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} \\
\dot{I}_{ZZ(W_i/R_i)Pb(W_i/R_i)} &= \dot{\phi}_{Ei} \left[\left(I_{XX(W_i/R_i)(w_i/r_i)} - I_{ZZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \right) \sin(2\phi_{Ei}) + 2I_{XZ(W_i/R_i)(w_i/r_i)} \cos(2\phi_{Ei}) \right]
\end{aligned} \tag{A1.61}$$

Portanto, da equação (A1.61), observa-se que a derivada dos momentos e produtos de inércia de um determinado rotor-coaxial R_i ou asa W_i , em relação ao respectivo sistema paralelo ao corpo Pb , se torna uma função do respectivo ângulo de inclinação ϕ_{Ei} e da derivada desse ângulo de inclinação $\dot{\phi}_{Ei}$.

- **Derivada dos Momentos e Produtos de Inércia do Rotor-coaxial Traseiro: R_3 , em relação ao sistema paralelos ao corpo Pb_{R_3}**

As equações (A1.62) até (A1.70) mostram as derivadas dos momentos e produtos de inércia do rotor-coaxial traseiro R_3 , em relação ao sistema paralelo ao corpo Pb_{R_3} .

$$\begin{aligned} \therefore I_{XX_{R_3 Pb_{R_3}}} &= I_{XX_{R_3 r_3}} \\ \dot{I}_{XX_{R_3 Pb_{R_3}}} &= 0 \end{aligned} \quad (A1.62)$$

$$\begin{aligned} \therefore I_{XY_{R_3 Pb_{R_3}}} &= I_{XY_{R_3 r_3}} \cos(\phi_{E3}) - I_{XZ_{R_3 r_3}} \sin(\phi_{E3}) \\ \dot{I}_{XY_{R_3 Pb_{R_3}}} &= -I_{XY_{R_3 r_3}} \sin(\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} - I_{XZ_{R_3 r_3}} \cos(\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} \\ \dot{I}_{XY_{R_3 Pb_{R_3}}} &= -\dot{\phi}_{E3} \left[I_{XY_{R_3 r_3}} \sin(\phi_{E3}) + I_{XZ_{R_3 r_3}} \cos(\phi_{E3}) \right] \end{aligned} \quad (A1.63)$$

$$\begin{aligned} \therefore I_{XZ_{R_3 Pb_{R_3}}} &= I_{XY_{R_3 r_3}} \sin(\phi_{E3}) + I_{XZ_{R_3 r_3}} \cos(\phi_{E3}) \\ \dot{I}_{XZ_{R_3 Pb_{R_3}}} &= I_{XY_{R_3 r_3}} \cos(\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} - I_{XZ_{R_3 r_3}} \sin(\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} \\ \dot{I}_{XZ_{R_3 Pb_{R_3}}} &= \dot{\phi}_{E3} \left[I_{XY_{R_3 r_3}} \cos(\phi_{E3}) - I_{XZ_{R_3 r_3}} \sin(\phi_{E3}) \right] \end{aligned} \quad (A1.64)$$

$$\begin{aligned} \therefore I_{YX_{R_3 Pb_{R_3}}} &= I_{XY_{R_3 Pb_{R_3}}} \\ \dot{I}_{YX_{R_3 Pb_{R_3}}} &= -\dot{\phi}_{E3} \left[I_{XY_{R_3 r_3}} \sin(\phi_{E3}) + I_{XZ_{R_3 r_3}} \cos(\phi_{E3}) \right] \end{aligned} \quad (A1.65)$$

$$\begin{aligned} \therefore I_{YY_{R_3 Pb_{R_3}}} &= I_{YY_{R_3 r_3}} \cos^2(\phi_{E3}) + I_{ZZ_{R_3 r_3}} \sin^2(\phi_{E3}) + I_{YZ_{R_3 r_3}} \sin(2\phi_{E3}) \\ \dot{I}_{YY_{R_3 Pb_{R_3}}} &= \left[-2I_{YY_{R_3 r_3}} \sin(\phi_{E3}) \cos(\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} + 2I_{ZZ_{R_3 r_3}} \sin(\phi_{E3}) \cos(\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} \right. \\ &\quad \left. + 2I_{YZ_{R_3 r_3}} \cos(2\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} \right] \\ \dot{I}_{YY_{R_3 Pb_{R_3}}} &= \dot{\phi}_{E3} \left[(I_{ZZ_{R_3 r_3}} - I_{YY_{R_3 r_3}}) \sin(2\phi_{E3}) + 2I_{YZ_{R_3 r_3}} \cos(2\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} \right] \end{aligned} \quad (A1.66)$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{YZ_{R^3PbR^3}} &= \left(I_{ZZ_{R^3r^3}} - I_{YY_{R^3r^3}} \right) \frac{\sin(2\phi_{E3})}{2} + I_{YZ_{R^3r^3}} \left[\cos(2\phi_{E3}) - 1 \right] \\
\dot{I}_{YZ_{R^3PbR^3}} &= \left(I_{ZZ_{R^3r^3}} - I_{YY_{R^3r^3}} \right) \cos(2\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} - 2I_{YZ_{R^3r^3}} \sin(2\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} \\
\dot{I}_{YZ_{R^3PbR^3}} &= \dot{\phi}_{E3} \left[\left(I_{ZZ_{R^3r^3}} - I_{YY_{R^3r^3}} \right) \cos(2\phi_{E3}) - 2I_{YZ_{R^3r^3}} \sin(2\phi_{E3}) \right]
\end{aligned} \tag{A1.67}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \dot{I}_{ZX_{R^3PbR^3}} &= \dot{I}_{XZ_{R^3PbR^3}} \\
\dot{I}_{ZX_{R^3PbR^3}} &= \dot{\phi}_{E3} \left[I_{XY_{R^3r^3}} \cos(\phi_{E3}) - I_{XZ_{R^3r^3}} \sin(\phi_{E3}) \right]
\end{aligned} \tag{A1.68}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \dot{I}_{ZY_{R^3PbR^3}} &= \dot{I}_{YZ_{R^3PbR^3}} \\
\dot{I}_{ZY_{R^3PbR^3}} &= \dot{\phi}_{E3} \left[\left(I_{ZZ_{R^3r^3}} - I_{YY_{R^3r^3}} \right) \cos(2\phi_{E3}) - 2I_{YZ_{R^3r^3}} \sin(2\phi_{E3}) \right]
\end{aligned} \tag{A1.69}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I_{ZZ_{R^3PbR^3}} &= I_{XX_{R^3r^3}} \sin^2(\phi_{E3}) + I_{ZZ_{R^3r^3}} \cos^2(\phi_{E3}) - I_{YZ_{R^3r^3}} \sin(2\phi_{E3}) \\
\dot{I}_{ZZ_{R^3PbR^3}} &= \left[\begin{aligned} &2I_{XX_{R^3r^3}} \sin(\phi_{E3}) \cos(\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} - 2I_{ZZ_{R^3r^3}} \sin(\phi_{E3}) \cos(\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} \\ &- 2I_{YZ_{R^3r^3}} \cos(2\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} \end{aligned} \right] \\
&= \dot{\phi}_{E3} \left[I_{XX_{R^3r^3}} \sin(2\phi_{E3}) - I_{ZZ_{R^3r^3}} \sin(2\phi_{E3}) - 2I_{YZ_{R^3r^3}} \cos(2\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} \right] \\
\dot{I}_{ZZ_{R^3PbR^3}} &= \dot{\phi}_{E3} \left[\left(I_{XX_{R^3r^3}} - I_{ZZ_{R^3r^3}} \right) \sin(2\phi_{E3}) - 2I_{YZ_{R^3r^3}} \cos(2\phi_{E3}) \right]
\end{aligned} \tag{A1.70}$$

Resumidamente, para o rotor-coaxial traseiro, a equação (A1.71) mostra os momentos e produtos de inércia em relação ao sistema paralelo ao corpo Pb_{R^3} :

$$\begin{aligned}
\dot{I}_{XX_{R3PbR3}} &= 0 \\
\dot{I}_{XY_{R3PbR3}} &= -\dot{\phi}_{E3} \left[I_{XY_{R3r3}} \sin(\phi_{E3}) + I_{XZ_{R3r3}} \cos(\phi_{E3}) \right] \\
\dot{I}_{XZ_{R3PbR3}} &= \dot{\phi}_{E3} \left[I_{XY_{R3r3}} \cos(\phi_{E3}) - I_{XZ_{R3r3}} \sin(\phi_{E3}) \right] \\
\dot{I}_{YX_{R3PbR3}} &= \dot{I}_{XY_{R3PbR3}} \\
\dot{I}_{YY_{R3PbR3}} &= \dot{\phi}_{E3} \left[(I_{ZZ_{R3r3}} - I_{YY_{R3r3}}) \sin(2\phi_{E3}) + 2I_{YZ_{R3r3}} \cos(2\phi_{E3}) \dot{\phi}_{E3} \right] \\
\dot{I}_{YZ_{R3PbR3}} &= \dot{\phi}_{E3} \left[(I_{ZZ_{R3r3}} - I_{YY_{R3r3}}) \cos(2\phi_{E3}) - 2I_{YZ_{R3r3}} \sin(2\phi_{E3}) \right] \\
\dot{I}_{ZX_{R3PbR3}} &= \dot{I}_{XZ_{R3PbR3}} \\
\dot{I}_{ZY_{R3PbR3}} &= \dot{I}_{YZ_{R3PbR3}} \\
\dot{I}_{ZZ_{R3PbR3}} &= \dot{\phi}_{E3} \left[(I_{XX_{R3r3}} - I_{ZZ_{R3r3}}) \sin(2\phi_{E3}) - 2I_{YZ_{R3r3}} \cos(2\phi_{E3}) \right]
\end{aligned} \tag{A1.71}$$

Portanto, da equação (A1.71), observa-se que a derivada dos momentos e produtos de inércia do rotor-coaxial R_3 , em relação ao respectivo sistema paralelo ao corpo Pb , se torna uma função do ângulo de inclinação ϕ_{E3} e da derivada desse ângulo de inclinação $\dot{\phi}_{E3}$.

- **Derivada dos Momentos e Produtos de Inércia da Fuselagem: F**

Como comentado anteriormente, já que a fuselagem não muda de formato e é considerada rígida, seus produtos e momentos de inércia em relação ao seu sistema Pb_F são constantes. Portanto, suas derivadas são nulas na equação (3.86):

$$\dot{I}_{XX_F} = \dot{I}_{XY_F} = \dot{I}_{XZ_F} = \dot{I}_{YX_F} = \dot{I}_{YY_F} = \dot{I}_{YZ_F} = \dot{I}_{ZX_F} = \dot{I}_{ZY_F} = \dot{I}_{ZZ_F} = 0 \tag{A1.72}$$

- **Derivada dos Termos da Matriz de Distâncias Quadráticas:**

É necessário encontrar a derivada de cada um dos termos dentro da matriz de distâncias quadráticas que multiplica a massa do componente, apresentadas na equação (A1.73).

$$m_i \begin{bmatrix} d(Y_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2)/dt & d(X_{Pbi_B} Y_{Pbi_B})/dt & d(X_{Pbi_B} Z_{Pbi_B})/dt \\ d(Y_{Pbi_B} X_{Pbi_B})/dt & d(X_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2)/dt & d(Y_{Pbi_B} Z_{Pbi_B})/dt \\ d(Z_{Pbi_B} X_{Pbi_B})/dt & d(Z_{Pbi_B} Y_{Pbi_B})/dt & d(X_{Pbi_B}^2 + Y_{Pbi_B}^2)/dt \end{bmatrix} \quad (A1.73)$$

Portanto, as equações (A1.74) até (A1.82) mostram as derivadas de cada um dos termos da matriz de distâncias na equação (A1.73).

$$\therefore d(Y_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2)/dt = \frac{d(Y_{Pbi_B}^2)}{dt} + \frac{d(Z_{Pbi_B}^2)}{dt} \quad (A1.74)$$

$$d(Y_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2)/dt = 2Y_{Pbi_B} \dot{Y}_{Pbi_B} + 2Z_{Pbi_B} \dot{Z}_{Pbi_B}$$

$$\therefore d(X_{Pbi_B} Y_{Pbi_B})/dt = \dot{X}_{Pbi_B} Y_{Pbi_B} + X_{Pbi_B} \dot{Y}_{Pbi_B} \quad (A1.75)$$

$$\therefore d(X_{Pbi_B} Z_{Pbi_B})/dt = \dot{X}_{Pbi_B} Z_{Pbi_B} + X_{Pbi_B} \dot{Z}_{Pbi_B} \quad (A1.76)$$

$$\therefore d(Y_{Pbi_B} X_{Pbi_B})/dt = d(X_{Pbi_B} Y_{Pbi_B})/dt \quad (A1.77)$$

$$\therefore d(X_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2)/dt = \frac{d(X_{Pbi_B}^2)}{dt} + \frac{d(Z_{Pbi_B}^2)}{dt} \quad (A1.78)$$

$$d(X_{Pbi_B}^2 + Z_{Pbi_B}^2)/dt = 2X_{Pbi_B} \dot{X}_{Pbi_B} + 2Z_{Pbi_B} \dot{Z}_{Pbi_B}$$

$$\therefore d(Y_{Pbi_B} Z_{Pbi_B})/dt = \dot{Y}_{Pbi_B} Z_{Pbi_B} + Y_{Pbi_B} \dot{Z}_{Pbi_B} \quad (A1.79)$$

$$\therefore d(Z_{Pbi_B} X_{Pbi_B})/dt = d(X_{Pbi_B} Z_{Pbi_B})/dt \quad (A1.80)$$

$$\therefore d(Z_{Pbi_B} Y_{Pbi_B})/dt = d(Y_{Pbi_B} Z_{Pbi_B})/dt \quad (A1.81)$$

$$\therefore d(X_{Pbi_B}^2 + Y_{Pbi_B}^2)/dt = \frac{d(X_{Pbi_B}^2)}{dt} + \frac{d(Y_{Pbi_B}^2)}{dt} \quad (A1.82)$$

$$d(X_{Pbi_B}^2 + Y_{Pbi_B}^2)/dt = 2X_{Pbi_B} \dot{X}_{Pbi_B} + 2Y_{Pbi_B} \dot{Y}_{Pbi_B}$$

Conseqüentemente, das equações (A1.74) até (A1.82), observa-se que a derivada de cada um dos termos dentro da matriz de distâncias quadráticas é função das coordenadas $(X_{Pbi_B}, Y_{Pbi_B}, Z_{Pbi_B})$ de um determinado componente, e de suas derivadas $(\dot{X}_{Pbi_B}, \dot{Y}_{Pbi_B}, \dot{Z}_{Pbi_B})$. Logo, da equação (3.16) tem-se a equação (A1.83).

$$\begin{bmatrix} X_{Pbi_B} \\ Y_{Pbi_B} \\ Z_{Pbi_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{Pbi_A} \\ Y_{Pbi_A} \\ Z_{Pbi_A} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{B_A} \\ Y_{B_A} \\ Z_{B_A} \end{bmatrix} \quad (A1.83)$$

Derivando, obtém-se a equação (A1.84):

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{Pbi_B} \\ \dot{Y}_{Pbi_B} \\ \dot{Z}_{Pbi_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X}_{Pbi_A} \\ \dot{Y}_{Pbi_A} \\ \dot{Z}_{Pbi_A} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{X}_{B_A} \\ \dot{Y}_{B_A} \\ \dot{Z}_{B_A} \end{bmatrix} \quad (A1.84)$$

Deste modo, se torna necessário encontrar as expressões para as derivadas $(\dot{X}_{Pbi_A}, \dot{Y}_{Pbi_A}, \dot{Z}_{Pbi_A})$ de um determinado componente e das derivadas $(\dot{X}_{B_A}, \dot{Y}_{B_A}, \dot{Z}_{B_A})$ do sistema fixo ao C.G. da aeronave B . Portanto, da equação (3.15):

$$\begin{bmatrix} X_{B_A} & Y_{B_A} & Z_{B_A} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{m_T} \begin{bmatrix} X_{PbR1_A} & X_{PbR2_A} & X_{PbR3_A} & X_{PbW1_A} & X_{PbW2_A} & X_{PbF_A} \\ Y_{PbR1_A} & Y_{PbR2_A} & Y_{PbR3_A} & Y_{PbW1_A} & Y_{PbW2_A} & Y_{PbF_A} \\ Z_{PbR1_A} & Z_{PbR2_A} & Z_{PbR3_A} & Z_{PbW1_A} & Z_{PbW2_A} & Z_{PbF_A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{R_1} \\ m_{R_2} \\ m_{R_3} \\ m_{W_1} \\ m_{W_2} \\ m_F \end{bmatrix} \quad (\text{A1.85})$$

Derivando a equação anterior, tem-se a equação (A1.86):

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{B_A} & \dot{Y}_{B_A} & \dot{Z}_{B_A} \end{bmatrix} = \frac{1}{m_T} \begin{bmatrix} \dot{X}_{PbR1_A} & \dot{X}_{PbR2_A} & \dot{X}_{PbR3_A} & \dot{X}_{PbW1_A} & \dot{X}_{PbW2_A} & \dot{X}_{PbF_A} \\ \dot{Y}_{PbR1_A} & \dot{Y}_{PbR2_A} & \dot{Y}_{PbR3_A} & \dot{Y}_{PbW1_A} & \dot{Y}_{PbW2_A} & \dot{Y}_{PbF_A} \\ \dot{Z}_{PbR1_A} & \dot{Z}_{PbR2_A} & \dot{Z}_{PbR3_A} & \dot{Z}_{PbW1_A} & \dot{Z}_{PbW2_A} & \dot{Z}_{PbF_A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{R_1} \\ m_{R_2} \\ m_{R_3} \\ m_{W_1} \\ m_{W_2} \\ m_F \end{bmatrix} \quad (\text{A1.86})$$

Novamente, se faz necessário determinar a expressão das derivadas $\left(\dot{X}_{Pbi_A}, \dot{Y}_{Pbi_A}, \dot{Z}_{Pbi_A} \right)$ para cada componente. Portanto, da equação (A1.1) para o rotor-coaxial direito R_1 , derivando, obtém-se a equação (A1.87):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} X_{PbR1_A} \\ Y_{PbR1_A} \\ Z_{PbR1_A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{C1_A} + (dXZ_{Pb_{R1}C_1}) \cos(\phi_{E1}) \\ Y_{C1_A} + dY_{Pb_{R1}C_1} \\ Z_{C1_A} - (dXZ_{Pb_{R1}C_1}) \sin(\phi_{E1}) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \dot{X}_{PbR1_A} \\ \dot{Y}_{PbR1_A} \\ \dot{Z}_{PbR1_A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(dXZ_{Pb_{R1}C_1}) \sin(\phi_{E1}) \dot{\phi}_{E1} \\ 0 \\ -(dXZ_{Pb_{R1}C_1}) \cos(\phi_{E1}) \dot{\phi}_{E1} \end{bmatrix} \\
\therefore \begin{bmatrix} \dot{X}_{PbR1_B} \\ \dot{Y}_{PbR1_B} \\ \dot{Z}_{PbR1_B} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(dXZ_{Pb_{R1}C_1}) \sin(\phi_{E1}) \dot{\phi}_{E1} \\ 0 \\ -(dXZ_{Pb_{R1}C_1}) \cos(\phi_{E1}) \dot{\phi}_{E1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{X}_{B_A} \\ \dot{Y}_{B_A} \\ \dot{Z}_{B_A} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A1.87}$$

Da equação (A1.2) para o rotor-coaxial esquerdo R_2 , derivando, obtém-se a equação (A1.88):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} X_{PbR2_A} \\ Y_{PbR2_A} \\ Z_{PbR2_A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{C2_A} + (dXZ_{Pb_{R2}C_2}) \cos(\phi_{E2}) \\ Y_{C2_A} + dY_{Pb_{R2}C_2} \\ Z_{C2_A} - (dXZ_{Pb_{R2}C_2}) \sin(\phi_{E2}) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \dot{X}_{PbR2_A} \\ \dot{Y}_{PbR2_A} \\ \dot{Z}_{PbR2_A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(dXZ_{Pb_{R2}C_2}) \sin(\phi_{E2}) \dot{\phi}_{E2} \\ 0 \\ -(dXZ_{Pb_{R2}C_2}) \cos(\phi_{E2}) \dot{\phi}_{E2} \end{bmatrix} \\
\therefore \begin{bmatrix} \dot{X}_{PbR2_B} \\ \dot{Y}_{PbR2_B} \\ \dot{Z}_{PbR2_B} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(dXZ_{Pb_{R2}C_2}) \sin(\phi_{E2}) \dot{\phi}_{E2} \\ 0 \\ -(dXZ_{Pb_{R2}C_2}) \cos(\phi_{E2}) \dot{\phi}_{E2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{X}_{B_A} \\ \dot{Y}_{B_A} \\ \dot{Z}_{B_A} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A1.88}$$

Da equação (A1.3) para o rotor-coaxial traseiro R_3 , derivando, obtém-se a equação (A1.89):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} X_{PbR3_A} \\ Y_{PbR3_A} \\ Z_{PbR3_A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{C3_A} + dX_{PbR3_C3} \\ Y_{C3_A} + (dYZ_{PbR3_C3})\cos(\phi_{E3}) \\ Z_{C3_A} + (dYZ_{PbR3_C3})\sin(\phi_{E3}) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \dot{X}_{PbR3_A} \\ \dot{Y}_{PbR3_A} \\ \dot{Z}_{PbR3_A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -(dYZ_{PbR3_C3})\sin(\phi_{E3})\dot{\phi}_{E3} \\ (dYZ_{PbR3_C3})\cos(\phi_{E3})\dot{\phi}_{E3} \end{bmatrix} \\
\therefore \begin{bmatrix} \dot{X}_{PbR3_B} \\ \dot{Y}_{PbR3_B} \\ \dot{Z}_{PbR3_B} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -(dYZ_{PbR3_C3})\sin(\phi_{E3})\dot{\phi}_{E3} \\ (dYZ_{PbR3_C3})\cos(\phi_{E3})\dot{\phi}_{E3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_{B_A} \\ \dot{Y}_{B_A} \\ \dot{Z}_{B_A} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A1.89}$$

Da equação (A1.4) para a asa direita W_1 , derivando, obtém-se a equação (A1.90):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} X_{PbW1_A} \\ Y_{PbW1_A} \\ Z_{PbW1_A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{C1_A} + (dXZ_{PbW1_C1})\cos(\phi_{E1}) \\ Y_{C1_A} + dY_{PbW1_C1} \\ Z_{C1_A} - (dXZ_{PbW1_C1})\sin(\phi_{E1}) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \dot{X}_{PbW1_A} \\ \dot{Y}_{PbW1_A} \\ \dot{Z}_{PbW1_A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(dXZ_{PbW1_C1})\sin(\phi_{E1})\dot{\phi}_{E1} \\ 0 \\ -(dXZ_{PbW1_C1})\cos(\phi_{E1})\dot{\phi}_{E1} \end{bmatrix} \\
\therefore \begin{bmatrix} \dot{X}_{PbW1_B} \\ \dot{Y}_{PbW1_B} \\ \dot{Z}_{PbW1_B} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(dXZ_{PbW1_C1})\sin(\phi_{E1})\dot{\phi}_{E1} \\ 0 \\ -(dXZ_{PbW1_C1})\cos(\phi_{E1})\dot{\phi}_{E1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_{B_A} \\ \dot{Y}_{B_A} \\ \dot{Z}_{B_A} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A1.90}$$

Da equação (A1.5) para a asa esquerda W_2 , derivando, obtém-se a equação (A1.91):

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} X_{PbW2_A} \\ Y_{PbW2_A} \\ Z_{PbW2_A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_{C2_A} + (dXZ_{PbW2C2})\cos(\phi_{E2}) \\ Y_{C2_A} + dY_{PbW2C2} \\ Z_{C2_A} - (dXZ_{PbW2C2})\sin(\phi_{E2}) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \dot{X}_{PbW2_A} \\ \dot{Y}_{PbW2_A} \\ \dot{Z}_{PbW2_A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(dXZ_{PbW2C2})\sin(\phi_{E2})\dot{\phi}_{E2} \\ 0 \\ -(dXZ_{PbW2C2})\cos(\phi_{E2})\dot{\phi}_{E2} \end{bmatrix} \\
 \therefore \begin{bmatrix} \dot{X}_{PbW2_B} \\ \dot{Y}_{PbW2_B} \\ \dot{Z}_{PbW2_B} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(dXZ_{PbW2C2})\sin(\phi_{E2})\dot{\phi}_{E2} \\ 0 \\ -(dXZ_{PbW2C2})\cos(\phi_{E2})\dot{\phi}_{E2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{X}_{B_A} \\ \dot{Y}_{B_A} \\ \dot{Z}_{B_A} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A1.91}$$

Finalmente, as derivadas das coordenadas $\left(\dot{X}_{PbF_A}, \dot{Y}_{PbF_A}, \dot{Z}_{PbF_A}\right)$ da fuselagem são nulas já que as coordenadas $\left(X_{PbF_A}, Y_{PbF_A}, Z_{PbF_A}\right)$ são constantes em relação ao sistema fixo ao nariz A . Portanto, da equação (A1.84), só para a fuselagem, obtém-se a equação (A1.92).

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{PbF_B} \\ \dot{Y}_{PbF_B} \\ \dot{Z}_{PbF_B} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dot{X}_{B_A} \\ \dot{Y}_{B_A} \\ \dot{Z}_{B_A} \end{bmatrix} \tag{A1.92}$$

iv. Velocidade Incidente Sobre Rotores-Coaxiais e Asas da Aeronave

- **Velocidade Incidente Sobre o Rotor-Coaxial Direito R_1**

A velocidade do vento relativo observada desde o sistema Pb_{R1} é mostrada na equação (A1.93):

$$V_{\infty R1} = [Rot_Y(\phi_{E1})]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{PbR1_B} \\ Y_{PbR1_B} \\ Z_{PbR1_B} \end{bmatrix} \right\} \quad (A1.93)$$

Observa-se que a inversa da matriz de rotação $Rot_Y(\phi_{E1})$, que é função do ângulo de inclinação do rotor-coaxial direito, é usada para transferir os componentes de velocidade do C.G. do rotor-coaxial direito, definidos no sistema Pb_{R1} , para o sistema r_1 , veja a Figura 3.6. Vale a pena ressaltar a importância da velocidade tangencial que o rotor-coaxial direito “enxerga” devido à rotação da aeronave através dos componentes de velocidade angular $[P \ Q \ R]^T$. Por causa disto, a velocidade angular da aeronave multiplica vetorialmente o braço de momento entre o C.G. da aeronave e o C.G. do rotor-coaxial direito, expresso pelas coordenadas $[X_{PbR1_B} \ Y_{PbR1_B} \ Z_{PbR1_B}]^T$.

Hélice superior: A velocidade do vento incidente sobre a hélice superior será dada pela equação (A1.94):

$$V_{incR1\in hu} = [Rot_Y(\phi_{E1})]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{PbR1_B} \\ Y_{PbR1_B} \\ Z_{PbR1_B} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{E1}(dX_{r1hu}) \end{bmatrix} \quad (A1.94)$$

Nesta última equação foi acrescentado o termo entre colchetes na componente Z $\dot{\phi}_{E1}(dX_{r1hu})$, onde dX_{r1hu} representa a distância entre o C.G. do rotor-coaxial direito e a hélice superior, observada desde o sistema r_1 . Este último termo representa a velocidade que a hélice superior “observará” devido ao giro do rotor-coaxial.

Através da equação (A1.94) entende-se que o rotor-coaxial R_1 está sujeito a vento relativo em três direções distintas. Porém, para o modelo aqui considerado (sem turbulências) e seguindo a teoria do *Disco Atuador*, apenas será considerado como “vento incidente” a componente de velocidade paralela ao eixo de rotação da hélice X_{r1} , como observado na Figura 3.7. As outras componentes em Y_{r1} e Z_{r1} são deixadas explícitas aqui para serem consideradas em trabalhos

futuros, quando o modelo aerodinâmico das hélices for aprimorado. Portanto, a equação (A1.95) gera-se da expansão da equação (A1.96):

$$\begin{aligned}
 V_{incR1 \in hu} &= \begin{bmatrix} Vx_{r1hu} \\ Vy_{r1hu} \\ Vz_{r1hu} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (U + QZ_{pbR1_B} - RY_{pbR1_B}) \cos(\phi_{E1}) - (W + PY_{pbR1_B} - QX_{pbR1_B}) \sin(\phi_{E1}) \\ V + RX_{pbR1_B} - PZ_{pbR1_B} \\ (U + QZ_{pbR1_B} - RY_{pbR1_B}) \sin(\phi_{E1}) + (W + PY_{pbR1_B} - QX_{pbR1_B}) \cos(\phi_{E1}) + \dot{\phi}_{E1} (dX_{r1hu}) \end{bmatrix} \quad (A1.96)
 \end{aligned}$$

A equação (A1.97) mostra apenas a componente paralela ao eixo de rotação X_{r1} , considerada para o modelo:

$$\begin{aligned}
 V_{incR1 \in hu} &= Vx_{r1hu} \\
 &= (U + QZ_{pbR1_B} - RY_{pbR1_B}) \cos(\phi_{E1}) - (W + PY_{pbR1_B} - QX_{pbR1_B}) \sin(\phi_{E1}) \quad (A1.97)
 \end{aligned}$$

Hélice Inferior: Para a hélice inferior do rotor-coaxial direito, o procedimento é análogo, porém, é acrescentado o termo da velocidade induzida pelo rotor superior, que age paralelo ao eixo de rotação da hélice X_{r1} , gerando a equação (A1.98):

$$V_{incR1 \in hl} = \left\{ \begin{array}{l} \left[Rot_Y(\phi_{E1}) \right]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{pbR1_B} \\ Y_{pbR1_B} \\ Z_{pbR1_B} \end{bmatrix} \right\} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{E1} (dX_{r1hl}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{ind \in hu} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (A1.98)$$

Expandindo a equação anterior, gera-se a equação (A1.99):

$$\begin{aligned}
V_{incR1 \in hl} &= \begin{bmatrix} Vx_{r1hl} \\ Vy_{r1hl} \\ Vz_{r1hl} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (U + QZ_{PbR1_B} - RY_{PbR1_B}) \cos(\phi_{E1}) - (W + PY_{PbR1_B} - QX_{PbR1_B}) \sin(\phi_{E1}) + V_{ind \in hu} \\ V + RX_{PbR1_B} - PZ_{PbR1_B} \\ (U + QZ_{PbR1_B} - RY_{PbR1_B}) \sin(\phi_{E1}) + (W + PY_{PbR1_B} - QX_{PbR1_B}) \cos(\phi_{E1}) + \dot{\phi}_{E1} (dX_{r1hu}) \end{bmatrix} \quad (A1.99)
\end{aligned}$$

E, novamente, considerando para o modelo apenas a componente paralela ao eixo de rotaç~ao X_{r1} , tem-se a equaç~ao (A1.100):

$$\begin{aligned}
V_{incR1 \in hl} &= Vx_{r1hl} \\
&= (U + QZ_{PbR1_B} - RY_{PbR1_B}) \cos(\phi_{E1}) - (W + PY_{PbR1_B} - QX_{PbR1_B}) \sin(\phi_{E1}) + V_{ind \in hu} \quad (A1.100)
\end{aligned}$$

▪ **Velocidade Incidente Sobre o Rotor-Coaxial Esquerdo R_2**

Analogamente ao rotor-coaxial direito, a velocidade do vento relativo observada desde o sistema Pb_{R2} é dada pela equaç~ao (A1.101):

$$V_{\infty R2} = [Rot_Y(\phi_{E2})]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{PbR2_B} \\ Y_{PbR2_B} \\ Z_{PbR2_B} \end{bmatrix} \right\} \quad (A1.102)$$

Hélice Superior: A velocidade do vento incidente sobre a hélice superior será dada pela equaç~ao (A1.103):

$$V_{incR2 \in hu} = [Rot_Y(\phi_{E2})]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{PbR2_B} \\ Y_{PbR2_B} \\ Z_{PbR2_B} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{E2} (dX_{r2hu}) \end{bmatrix} \quad (A1.103)$$

Expandindo a equaç~ao anterior, gera-se a equaç~ao (A1.104):

$$\begin{aligned}
V_{incR2\in hu} &= \begin{bmatrix} Vx_{r2hu} \\ Vy_{r2hu} \\ Vz_{r2hu} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (U + QZ_{PbR2_B} - RY_{PbR2_B}) \cos(\phi_{E2}) - (W + PY_{PbR2_B} - QX_{PbR2_B}) \sin(\phi_{E2}) \\ V + RX_{PbR2_B} - PZ_{PbR2_B} \\ (U + QZ_{PbR2_B} - RY_{PbR2_B}) \sin(\phi_{E2}) + (W + PY_{PbR2_B} - QX_{PbR2_B}) \cos(\phi_{E2}) + \dot{\phi}_{E2} (dX_{r2hu}) \end{bmatrix} \quad (A1.104)
\end{aligned}$$

Considerando para o modelo apenas a componente paralela ao eixo de rotação X_{r2} , obtém-se a equa o (A1.105):

$$\begin{aligned}
V_{incR2\in hu} &= Vx_{r2hu} \\
&= (U + QZ_{PbR2_B} - RY_{PbR2_B}) \cos(\phi_{E2}) - (W + PY_{PbR2_B} - QX_{PbR2_B}) \sin(\phi_{E2}) \quad (A1.105)
\end{aligned}$$

Hélice Inferior: A velocidade do vento incidente sobre a hélice inferior será dada pela equa o (A1.106):

$$V_{incR2\in hl} = \left\{ \begin{array}{l} \left[Rot_Y(\phi_{E2}) \right]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{PbR2_B} \\ Y_{PbR2_B} \\ Z_{PbR2_B} \end{bmatrix} \right\} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{E2} (dX_{r2hl}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{ind\in hu} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (A1.106)$$

Expandindo a equa o anterior, gera-se a equa o (A1.107):

$$\begin{aligned}
V_{incR2\in hl} &= \begin{bmatrix} Vx_{r2hl} \\ Vy_{r2hl} \\ Vz_{r2hl} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (U + QZ_{PbR2_B} - RY_{PbR2_B}) \cos(\phi_{E2}) - (W + PY_{PbR2_B} - QX_{PbR2_B}) \sin(\phi_{E2}) + V_{ind\in hu} \\ V + RX_{PbR2_B} - PZ_{PbR2_B} \\ (U + QZ_{PbR2_B} - RY_{PbR2_B}) \sin(\phi_{E2}) + (W + PY_{PbR2_B} - QX_{PbR2_B}) \cos(\phi_{E2}) + \dot{\phi}_{E2} (dX_{r2} hu) \end{bmatrix} \quad (A1.107)
\end{aligned}$$

E, novamente, considerando para o modelo apenas a componente paralela ao eixo de rotaç~ao X_{r2} , obt~em-se a equaç~ao (A1.108):

$$\begin{aligned}
V_{incR2\in hl} &= Vx_{r2hl} \\
V_{incR2\in hl} &= (U + QZ_{PbR2_B} - RY_{PbR2_B}) \cos(\phi_{E2}) - (W + PY_{PbR2_B} - QX_{PbR2_B}) \sin(\phi_{E2}) + V_{ind\in hu} \quad (A1.108)
\end{aligned}$$

▪ **Velocidade Incidente Sobre o Rotor-Coaxial Traseiro R_3**

A velocidade do vento relativo para o rotor-coaxial traseiro tem um procedimento an~alogo, com a diferen~a de que se deve considerar para ele uma matriz de rotaç~ao em torno do eixo X , ao inv~es do eixo Y como ~e feito para os rotores laterais. Com isto, ~e poss~ivel perceber atrav~es da Figura 3.6 que o eixo de giro das h~elices deste rotor ~e em torno do eixo Y_{r3} . A equaç~ao (A1.109) apresenta a velocidade relativa sobre o rotor-coaxial traseiro.

$$V_{\infty R3} = [Rot_X(\phi_{E3})]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{PbR3_B} \\ Y_{PbR3_B} \\ Z_{PbR3_B} \end{bmatrix} \right\} \quad (A1.109)$$

H~elice superior: A velocidade do vento incidente sobre a h~elice superior ser~a dada pela equaç~ao (A1.110):

$$V_{incR3\in hu} = [Rot_X(\phi_{E3})]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{PbR3_B} \\ Y_{PbR3_B} \\ Z_{PbR3_B} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{E3}(dY_{r3}hu) \end{bmatrix} \quad (A1.110)$$

Expandindo a equação anterior, gera-se a equação (A1,111):

$$V_{incR3\in hu} = \begin{bmatrix} Vx_{r3hu} \\ Vy_{r3hu} \\ Vz_{r3hu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U + QZ_{PbR3_B} - RY_{PbR3_B} \\ (V + RX_{PbR3_B} - PZ_{PbR3_B})\cos(\phi_{E3}) + (W + PY_{PbR3_B} - QX_{PbR3_B})\sin(\phi_{E3}) \\ -(V + RX_{PbR3_B} - PZ_{PbR3_B})\sin(\phi_{E3}) + (W + PY_{PbR3_B} - QX_{PbR3_B})\cos(\phi_{E3}) + \dot{\phi}_{E3}(dY_{r3}hu) \end{bmatrix} \quad (A1.111)$$

Considerando para o modelo apenas a componente paralela ao eixo de rotação Y_{r3} , obtém-se a equação (A1.112):

$$V_{incR3\in hu} = Vy_{r3hu} = (V + RX_{PbR3_B} - PZ_{PbR3_B})\cos(\phi_{E3}) + (W + PY_{PbR3_B} - QX_{PbR3_B})\sin(\phi_{E3}) \quad (A1.112)$$

Hélice Inferior: A velocidade do vento incidente sobre a hélice inferior será dada na equação (A1.113), acrescentando o termo de velocidade induzida pela hélice superior, paralelo ao eixo de rotação Y_{r3} .

$$V_{incR3\in hl} = \left\{ \begin{bmatrix} [Rot_X(\phi_{E3})]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{PbR3_B} \\ Y_{PbR3_B} \\ Z_{PbR3_B} \end{bmatrix} \right\} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{E3}(dY_{r3}hl) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ V_{ind\in hu} \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\} \quad (A1.113)$$

Expandindo a relação anterior, gera-se a equação (A1.114):

$$\begin{aligned}
V_{incR3\in hl} &= \begin{bmatrix} Vx_{r3hl} \\ Vy_{r3hl} \\ Vz_{r3hl} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} U + QZ_{PbR3_B} - RY_{PbR3_B} \\ (V + RX_{PbR3_B} - PZ_{PbR3_B})\cos(\phi_{E3}) + (W + PY_{PbR3_B} - QX_{PbR3_B})\sin(\phi_{E3}) + V_{ind\in hu} \\ -(V + RX_{PbR3_B} - PZ_{PbR3_B})\sin(\phi_{E3}) + (W + PY_{PbR3_B} - QX_{PbR3_B})\cos(\phi_{E3}) + \dot{\phi}_{E3} (dY_{r3}hl) \end{bmatrix} \quad (A1.114)
\end{aligned}$$

E, novamente, considerando para o modelo apenas a componente paralela ao eixo de rotação Y_{r3} , obtém-se a equa o (A1.115):

$$\begin{aligned}
V_{incR3\in hl} &= Vy_{r3hl} \\
&= (V + RX_{PbR3_B} - PZ_{PbR3_B})\cos(\phi_{E3}) + (W + PY_{PbR3_B} - QX_{PbR3_B})\sin(\phi_{E3}) + V_{ind\in hu} \quad (A1.115)
\end{aligned}$$

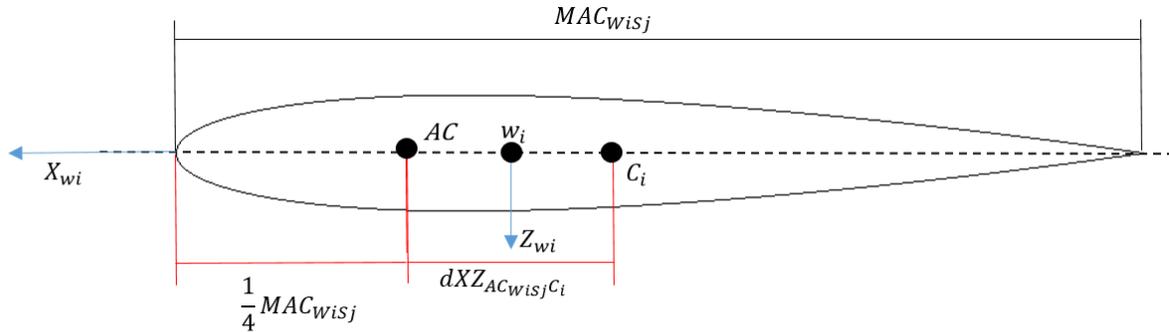
De forma resumida, então, para os três conjuntos de rotores-coaxiais, as expressões das velocidades incidentes sobre cada uma das suas hélices são apresentadas na equa o (A1.116):

$$\begin{aligned}
V_{incR1\in hu} &= (U + QZ_{PbR1_B} - RY_{PbR1_B})\cos(\phi_{E1}) - (W + PY_{PbR1_B} - QX_{PbR1_B})\sin(\phi_{E1}) \\
V_{incR1\in hl} &= (U + QZ_{PbR1_B} - RY_{PbR1_B})\cos(\phi_{E1}) - (W + PY_{PbR1_B} - QX_{PbR1_B})\sin(\phi_{E1}) + V_{ind\in hu} \\
V_{incR2\in hu} &= (U + QZ_{PbR2_B} - RY_{PbR2_B})\cos(\phi_{E2}) - (W + PY_{PbR2_B} - QX_{PbR2_B})\sin(\phi_{E2}) \\
V_{incR2\in hl} &= (U + QZ_{PbR2_B} - RY_{PbR2_B})\cos(\phi_{E2}) - (W + PY_{PbR2_B} - QX_{PbR2_B})\sin(\phi_{E2}) + V_{ind\in hu} \\
V_{incR3\in hu} &= (V + RX_{PbR3_B} - PZ_{PbR3_B})\cos(\phi_{E3}) + (W + PY_{PbR3_B} - QX_{PbR3_B})\sin(\phi_{E3}) \\
V_{incR3\in hl} &= (V + RX_{PbR3_B} - PZ_{PbR3_B})\cos(\phi_{E3}) + (W + PY_{PbR3_B} - QX_{PbR3_B})\sin(\phi_{E3}) + V_{ind\in hu} \quad (A1.116)
\end{aligned}$$

- **Velocidade Incidente Sobre as Asa Direita W_1 ou Esquerda W_2**

De forma semelhante a como foi feito para determinar o vetor velocidade relativa para as hélices dos rotores-coaxiais, a inversa da matriz de rota o $Rot_y(\phi_{Ei})$   usada para transferir os componentes de velocidade no sistema B , para o sistema fixo   asa w_i . A Figura A1.3 apresenta o perfil aerodinâmico 2D de uma determinada se o de asa. Nesta figura   possível observar a orienta o dos eixos X e Z do sistema w_i .

Figura A1.3 – Perfil aerodinâmico NACA0012. Apresentando a corda-média-aerodinâmica $MAC_{w_i s_j}$, o centro aerodinâmico do perfil AC, o sistema fixo à asa w_i (fixo ao C.G. da asa) e o centro de giro/junta C_i .



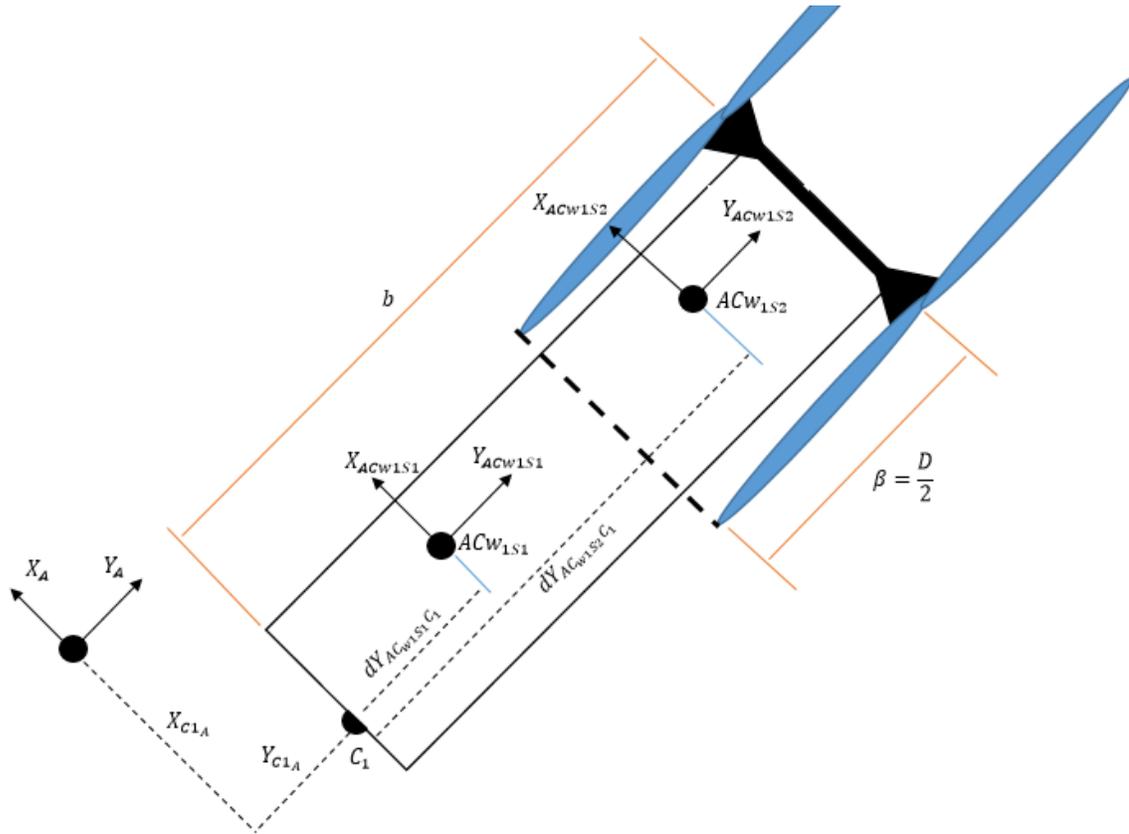
Fonte: Autoria Própria

Vale a pena ressaltar a velocidade tangencial que a seção da asa “enxerga” devido à rotação da aeronave através dos componentes de velocidade angular $[P \ Q \ R]^T$. Devido a isto, a velocidade angular da aeronave multiplica vetorialmente o braço de momento entre o C.G. da aeronave e o centro aerodinâmico da seção da asa, expresso pelas coordenadas $[X_{AC w_i s_j} \ Y_{AC w_i s_j} \ Z_{AC w_i s_j}]^T$. A Figura A1.4 apresenta a localização de cada um dos centros aerodinâmicos AC das seções da asa direita W_1 , com relação ao sistema fixo ao nariz da aeronave A. Assim como foi feito para os rotores-coaxiais, das Figuras A1.3 e A1.4, entende-se a distância $dXZ_{AC w_i s_j C_i}$ como o raio de giro (no plano XZ) do centro aerodinâmico AC em torno da junta C_i e $dY_{AC w_i s_j C_i}$ como a distância em Y entre o centro aerodinâmico da seção da asa e a junta C_i . A distância $dY_{AC w_i s_j C_i}$ para cada uma das seções é dada pela equação (A1.117), onde o termo b refere-se à envergadura da asa e β ao raio da hélice.

$$dY_{AC w_1 s_1 C_1} = \left(\frac{b - \beta}{2} \right) \quad (A1.117)$$

$$dY_{AC w_1 s_2 C_1} = (b - \beta) + \frac{\beta}{2}$$

Figura A1.4 – Localização dos centros aerodinâmicos das seções da asa direita W_1 no plano XY.



Fonte: Autoria Própria

Portanto, as coordenadas de uma determinada seção “j” de uma asa “i”, em relação ao sistema fixo ao nariz da aeronave A, pode ser considerada como apresentada na equação (A1.118):

$$\begin{bmatrix} X_{ACW1S1A} \\ Y_{ACW1S1A} \\ Z_{ACW1S1A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{C1A} \\ Y_{C1A} \\ Z_{C1A} \end{bmatrix} + Rot_Y(\phi_{Ei}) \begin{bmatrix} dXZ_{ACW1S1C1} \\ dY_{ACW1S1C1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A1.118)$$

Uma vez que se conhece a posição relativa do centro de gravidade da aeronave em relação ao sistema A através da equação (3.16), então as coordenadas do centro aerodinâmico AC de uma determinada seção de asa, em relação ao sistema fixo ao corpo B, serão dadas pela equação (A1.119):

$$\begin{bmatrix} X_{AC_{wiSjB}} \\ Y_{AC_{wiSjB}} \\ Z_{AC_{wiSjB}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{AC_{wiSjA}} \\ Y_{AC_{wiSjA}} \\ Z_{AC_{wiSjA}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{B_A} \\ Y_{B_A} \\ Z_{B_A} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.119})$$

Com as coordenadas $\begin{bmatrix} X_{AC_{wiSjB}} & Y_{AC_{wiSjB}} & Z_{AC_{wiSjB}} \end{bmatrix}^T$ conhecidas, é possível determinar a expressão do vento relativo sobre cada seção de uma asa. Portanto, de forma semelhante a como foi feito para os rotores-coaxiais, para a seção 1 de uma asa (seção próxima à fuselagem/raiz da asa e sem interferência do vento induzido pela hélice superior do rotor-coaxial), a velocidade do vento incidente sobre a seção “1” de uma asa “i” é dada pela equação (A1.120):

$$V_{inc_{wiS1}} = \left[Rot_y(\phi_{Ei}) \right]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{AC_{wiS1B}} \\ Y_{AC_{wiS1B}} \\ Z_{AC_{wiS1B}} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{Ei}(dXZ_{AC_{wiS1C_i}}) \end{bmatrix} \quad (\text{A1.120})$$

O termo entre $Z \dot{\phi}_{Ei}(dXZ_{AC_{wiS1C_i}})$, representa a velocidade que a seção “observará” devido ao giro do rotor-coaxial.

Expandindo a equação anterior, tem-se a equação (A1.121):

$$V_{inc_{wiS1}} = \begin{bmatrix} Vx_{wiS1} \\ Vy_{wiS1} \\ Vz_{wiS1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (U + QZ_{AC_{wiS1B}} - RY_{AC_{wiS1B}}) \cos(\phi_{Ei}) - (W + PY_{AC_{wiS1B}} - QX_{AC_{wiS1B}}) \sin(\phi_{Ei}) \\ V + RX_{AC_{wiS1B}} - PZ_{AC_{wiS1B}} \\ (U + QZ_{AC_{wiS1B}} - RY_{AC_{wiS1B}}) \sin(\phi_{Ei}) + (W + PY_{AC_{wiS1B}} - QX_{AC_{wiS1B}}) \cos(\phi_{Ei}) + \dot{\phi}_{Ei}(dXZ_{AC_{wiS1C_i}}) \end{bmatrix} \quad (\text{A1.121})$$

Como são necessárias apenas as componentes Vx_{wiS1} e Vz_{wiS1} para determinar o ângulo de ataque local da seção “1” de uma asa através da equação (3.67), então, da equação anterior é obtida a equação (A1.122), para as componentes horizontal e vertical do vento relativo sobre a seção “1”:

$$\begin{aligned}
Vx_{WiS1} &= (U + QZ_{AC_{WiS1B}} - RY_{AC_{WiS1B}}) \cos(\phi_{Ei}) - (W + PY_{AC_{WiS1B}} - QX_{AC_{WiS1B}}) \sin(\phi_{Ei}) \\
Vz_{WiS1} &= \\
& (U + QZ_{AC_{WiS1B}} - RY_{AC_{WiS1B}}) \sin(\phi_{Ei}) + (W + PY_{AC_{WiS1B}} - QX_{AC_{WiS1B}}) \cos(\phi_{Ei}) + \dot{\phi}_{Ei} (dXZ_{AC_{WiS1C_i}})
\end{aligned} \tag{A1.122}$$

Para a seção “2”, próxima do rotor-coaxial e sofrendo a interferência de vento induzido pela hélice superior, o procedimento é similar, com a exceção de que deve ser acrescentado o termo de vento induzido à componente Vx_{WiS2} . A expressão para o vento induzido foi encontrada na equação (3.50). Desta forma, o vento incidente sobre a seção 2 da “i-ésima” asa é dada pela equação (A1.123):

$$V_{incWiS2} = \left\{ \begin{aligned} & \left[Rot_Y(\phi_{Ei}) \right]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_{AC_{WiS2B}} \\ Y_{AC_{WiS2B}} \\ Z_{AC_{WiS2B}} \end{bmatrix} \right\} \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_{Ei} (dXZ_{AC_{WiS2C_i}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{ind \in hu} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \tag{A1.123}$$

Expandindo a equação anterior, obtém-se a equação (A1.124):

$$\begin{aligned}
V_{incWiS2} &= \begin{bmatrix} Vx_{WiS2} \\ Vy_{WiS2} \\ Vz_{WiS2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (U + QZ_{AC_{WiS2B}} - RY_{AC_{WiS2B}}) \cos(\phi_{Ei}) - (W + PY_{AC_{WiS2B}} - QX_{AC_{WiS2B}}) \sin(\phi_{Ei}) + V_{ind \in hu} \\ V + RX_{AC_{WiS2B}} - PZ_{AC_{WiS2B}} \\ (U + QZ_{AC_{WiS2B}} - RY_{AC_{WiS2B}}) \sin(\phi_{Ei}) + (W + PY_{AC_{WiS2B}} - QX_{AC_{WiS2B}}) \cos(\phi_{Ei}) + \dot{\phi}_{Ei} (dXZ_{AC_{WiS2C_i}}) \end{bmatrix} \tag{A1.124}
\end{aligned}$$

Como são necessárias apenas as componentes Vx_{WiS2} e Vz_{WiS2} para determinar o ângulo de ataque local da seção “2” de uma asa através da equação (3.67), então, da equação anterior é obtida a equação (A1.125):

$$\begin{aligned}
Vx_{WIS2} &= \left(U + QZ_{AC_{WIS2B}} - RY_{AC_{WIS2B}} \right) \cos(\phi_{Ei}) - \left(W + PY_{AC_{WIS2B}} - QX_{AC_{WIS2B}} \right) \sin(\phi_{Ei}) + V_{ind \in hu} \\
Vz_{WIS2} &= \left(U + QZ_{AC_{WIS2B}} - RY_{AC_{WIS2B}} \right) \sin(\phi_{Ei}) + \left(W + PY_{AC_{WIS2B}} - QX_{AC_{WIS2B}} \right) \cos(\phi_{Ei}) + \dot{\phi}_{Ei} (dXZ_{AC_{WIS2}C_i})
\end{aligned} \tag{A1.125}$$

v. Momento Giroscópico dos Rotores Coaxiais Sobre a Aeronave

▪ Momento Giroscópico do Rotor-Coaxial Direito R_1

O momento angular de uma determinada hélice girando em torno do seu eixo de rotação é definido como o produto da inércia da hélice e sua velocidade de rotação. Começando com o rotor-coaxial direito R_1 , considerando que este possui duas hélices iguais girando em sentidos contrários, em torno de um mesmo eixo de rotação, tem-se a equação (A1.126):

$$H_{R_1 X_{r1}} = H_{hu X_{r1}} + H_{hl X_{r1}} = [I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl})]_{X_{r1}} \tag{A1.126}$$

Transladando este momento angular ao sistema paralelo ao corpo Pb_{R1} através da matriz de rotação $Rot_Y(\phi_{E1})$, é obtida a equação (A1.127):

$$H_{R1 PbR1} = Rot_Y(\phi_{E1}) \begin{bmatrix} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E1}) \\ 0 \\ -I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E1}) \end{bmatrix} \tag{A1.127}$$

Portanto, com o momento angular definido no sistema Pb_{R1} , aplicando a relação apresentada na equação (3.1), o torque causado pelo momento angular sobre o sistema fixo ao corpo B , é igual à taxa temporal de mudança do vetor $\vec{H}_{R1 PbR1}$ observado no referencial de translação-rotação B , mais a parcela $\vec{w} \times \vec{H}_{R1 PbR1}$ que refere-se à mudança de $\vec{H}_{R1 PbR1}$ provocada pela rotação do sistema B . Gera-se, então, a equação (A1.128).

$$M_{GR1_B} = \dot{H}^{R1_B} = \left[\frac{d(H^{R1_{pbR1}})}{dt} \right]_B + \underbrace{\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}}_w \times \underbrace{\begin{bmatrix} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E1}) \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix}}_{{}^{**}R1_{pbR1}} \quad (A1.128)$$

A formulação dos termos à direita da equação (A1.128) é apresentada nas equações (A1.129) e (A1.130), respetivamente. A expressão final para o momento giroscópico do rotor-coaxial direito é apresentada na equação (A1.131).

$$\left[\frac{d(H^{R1_{pbR1}})}{dt} \right]_B = \begin{bmatrix} I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \cos(\phi_{E1}) - \dot{\phi}_{E1} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E1}) \\ 0 \\ -I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \sin(\phi_{E1}) - \dot{\phi}_{E1} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E1}) \end{bmatrix} \quad (A1.131)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}}_w \times \underbrace{\begin{bmatrix} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E1}) \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix}}_{{}^{**}R1_{pbR1}} = \begin{Bmatrix} -Q I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E1}) \\ [R \cos(\phi_{E1}) + P \sin(\phi_{E1})] I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \\ -Q I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E1}) \end{Bmatrix} \quad (A1.129)$$

$$M_{GR1_B} = \begin{bmatrix} I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \cos(\phi_{E1}) - \dot{\phi}_{E1} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E1}) \\ 0 \\ -I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \sin(\phi_{E1}) - \dot{\phi}_{E1} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E1}) \end{bmatrix} \quad (A1.130)$$

$$+ \begin{Bmatrix} -Q I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E1}) \\ [R \cos(\phi_{E1}) + P \sin(\phi_{E1})] I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \\ -Q I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E1}) \end{Bmatrix}$$

▪ **Momento Giroscópico do Rotor-Coaxial Esquerdo R_2**

Analogamente, para o rotor-coaxial esquerdo R_2 , a expressão final para o momento giroscópico do rotor-coaxial esquerdo é apresentada na equação (A1.131):

$$M_{GR2_B} = \begin{bmatrix} I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \cos(\phi_{E2}) - \dot{\phi}_{E2} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E2}) \\ 0 \\ -I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \sin(\phi_{E2}) - \dot{\phi}_{E2} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E2}) \end{bmatrix} \quad (A1.131)$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -Q I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E2}) \\ [R \cos(\phi_{E2}) + P \sin(\phi_{E2})] I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \\ -Q I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E2}) \end{array} \right\}$$

▪ **Momento Giroscópico do Rotor-Coaxial Traseiro R_3**

Com um procedimento análogo para o rotor-coaxial traseiro R_3 , o momento angular do rotor R_3 é dado pela equação (A1.132):

$$H_{R3_{Y_3}} = H_{hu_{Y_3}} + H_{hl_{Y_3}} = [I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl})]_{Y_3} \quad (A1.132)$$

Transladando este momento angular ao sistema paralelo ao corpo Pb_{R3} através da matriz de rotação $Rot_X(\phi_{E3})$, obtém-se a equação (A1.133). O momento giroscópico do rotor-coaxial traseiro em relação ao sistema fixo ao corpo B é mostrado na equação (A1.134) e resolução dos termos à direita desta última equação, são apresentados nas equações (A1.135) e (A1.136), respectivamente.

$$H_{R3_{PbR3}} = Rot_X(\phi_{E3}) \begin{bmatrix} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E3}) \\ I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E3}) \end{bmatrix} \quad (A1.133)$$

$$M_{GR3_B} = \dot{H}_{R3_B} = \left[\frac{d(H_{R3_{pbR3}})}{dt} \right]_B + \underbrace{\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}}_w \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E3}) \\ \dots \end{bmatrix}}_{{}^{**}R3_{pbR3}} \quad (A1.134)$$

$$\left[\frac{d(H_{R3_{pbR3}})}{dt} \right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \cos(\phi_{E3}) - \dot{\phi}_{E3} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E3}) \\ I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \sin(\phi_{E3}) + \dot{\phi}_{E3} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E3}) \end{bmatrix} \quad (A1.135)$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}}_w \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E3}) \\ \dots \end{bmatrix}}_{{}^{**}R3_{pbR3}} \\ &= \left\{ \begin{aligned} & [Q \sin(\phi_{E3}) - R \cos(\phi_{E3})] I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \\ & - P I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E3}) \\ & P I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E3}) \end{aligned} \right\} \quad (A1.136) \end{aligned}$$

A equação (A1.137) mostra a equação final para o momento giroscópico do rotor-coaxial traseiro em relação ao sistema fixo ao corpo B .

$$\begin{aligned} M_{GR3_B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \cos(\phi_{E3}) - \dot{\phi}_{E3} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E3}) \\ I_h \left(\dot{\Omega}_{hu} - \dot{\Omega}_{hl} \right) \sin(\phi_{E3}) + \dot{\phi}_{E3} I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E3}) \end{bmatrix} \\ &+ \left\{ \begin{aligned} & [Q \sin(\phi_{E3}) - R \cos(\phi_{E3})] I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \\ & - P I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \sin(\phi_{E3}) \\ & P I_h (\Omega_{hu} - \Omega_{hl}) \cos(\phi_{E3}) \end{aligned} \right\} \quad (A1.137) \end{aligned}$$

APÊNDICE B1

Parâmetros dos componentes do modelo

Tabela B1.1 – Parâmetros da fuselagem F

Descrição dos Parâmetros	Unidade	Valor
Massa da fuselagem (m_F)	kg	3,0860
Área frontal projetada da fuselagem (A_{FX})	m ²	0,0265
Área lateral projetada da fuselagem (A_{FY})	m ²	0,1245
Área superior projetada da fuselagem (A_{FZ})	m ²	0,1197
Coeficiente de arrasto da área frontal projetada da fuselagem (C_{DFX})	--	0,4300
Coeficiente de arrasto da área lateral projetada da fuselagem (C_{DFY})	--	0,4700
Coeficiente de arrasto da área superior projetada da fuselagem (C_{DFZ})	--	0,4700
Coordenada X do C.G da fuselagem em relação ao sistema fixo ao nariz A (X_{PbFA})	m	-0,5085
Coordenada Y do C.G da fuselagem em relação ao sistema fixo ao nariz A (Y_{PbFA})	m	0
Coordenada Z do C.G da fuselagem em relação ao sistema fixo ao nariz A (Z_{PbFA})	m	0,0072
Momento de inércia em torno do eixo X do sistema fixo ao C.G. da fuselagem e paralelo ao sistema B ($I_{XX_{FPBF}}$)	kgm ²	0,0063

Tabela B1.1 – Parâmetros da fuselagem F

(continuação)

Momento de inércia em torno do eixo Y do sistema fixo ao C.G. da fuselagem e paralelo ao sistema B ($I_{YY_{FpbF}}$)	kgm ²	0,1867
Momento de inércia em torno do eixo Z do sistema fixo ao C.G. da fuselagem e paralelo ao sistema B ($I_{ZZ_{FpbF}}$)	kgm ²	0,1859
Produto de inércia no plano XY do sistema fixo ao C.G. da fuselagem e paralelo ao sistema B ($I_{XY_{FpbF}} = I_{YX_{FpbF}}$)	kgm ²	$8,5 \cdot 10^{-6}$
Produto de inércia no plano XZ do sistema fixo ao C.G. da fuselagem e paralelo ao sistema B ($I_{XZ_{FpbF}} = I_{ZX_{FpbF}}$)	kgm ²	0,0023
Produto de inércia no plano YZ do sistema fixo ao C.G. da fuselagem e paralelo ao sistema B ($I_{YZ_{FpbF}} = I_{ZY_{FpbF}}$)	kgm ²	$-4,8 \cdot 10^{-6}$

Fonte: Autoria própria

Tabela B1.2 – Parâmetros do rotor-coaxial direito R_1

Descrição dos Parâmetros	Unidade	Valor
Massa do rotor-coaxial (m_{R1})	kg	0,2760
Raio de giro no plano XZ entre o sistema Pb_{R1} e a junta C_1 ($dXZ_{Pb_{R1}C_1}$)	m	0,0064
Distância relativa em Y entre o sistema Pb_{R1} e a junta C_1 ($dY_{Pb_{R1}C_1}$)	m	0,5181
Coordenada X da junta C_1 em relação ao sistema fixo ao nariz A (X_{C1_A})	m	-0,1898
Coordenada Y da junta C_1 em relação ao sistema fixo ao nariz A (Y_{C1_A})	m	0,0785
Coordenada Z da junta C_1 em relação ao sistema fixo ao nariz A (Z_{C1_A})	m	0,0120

Tabela B1.2 – Parâmetros do rotor-coaxial direito R_1

(continuação)

Distância relativa entre o C.G. do rotor-coaxial direito e a hélice superior, observada desde o sistema $r_1 (dX_{r_1} hu)$	m	0,0989
Distância relativa entre o C.G. do rotor-coaxial direito e a hélice inferior, observada desde o sistema $r_1 (dX_{r_1} hl)$	m	-0,0991
Momento de inércia em torno do eixo X do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial direito $r_1 (I_{XX_{R_1 r_1}})$	kgm ²	$1,81 \cdot 10^{-4}$
Momento de inércia em torno do eixo Y do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial direito $r_1 (I_{YY_{R_1 r_1}})$	kgm ²	0,0015
Momento de inércia em torno do eixo Z do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial direito $r_1 (I_{ZZ_{R_1 r_1}})$	kgm ²	0,0015
Produto de inércia no plano XY do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial direito $r_1 (I_{XY_{R_1 r_1}} = I_{YX_{R_1 r_1}})$	kgm ²	$-2,1 \cdot 10^{-7}$
Produto de inércia no plano XZ do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial direito $r_1 (I_{XZ_{R_1 r_1}} = I_{ZX_{R_1 r_1}})$	kgm ²	$-4,4 \cdot 10^{-9}$
Produto de inércia no plano YZ do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial direito $r_1 (I_{YZ_{R_1 r_1}} = I_{ZY_{R_1 r_1}})$	kgm ²	$-2,2 \cdot 10^{-9}$

Fonte: Autoria própria

(conclusão)

Tabela B1.3 – Parâmetros do rotor-coaxial esquerdo R_2

Descrição dos Parâmetros	Unidade	Valor
Massa do rotor-coaxial (m_{R_2})	kg	0,2760
Raio de giro no plano XZ entre o sistema Pb_{R_2} e a junta C_2 $(dXZ_{Pb_{R_2} C_2})$	m	0,0064
Distância relativa em Y entre o sistema Pb_{R_2} e a junta C_2 $(dY_{Pb_{R_2} C_2})$	m	-0,5181

Tabela B1.3 – Parâmetros do rotor-coaxial esquerdo R_2

(continuação)

Coordenada X da junta C_2 em relação ao sistema fixo ao nariz $A(X_{C_{2,A}})$	m	-0,1898
Coordenada Y da junta C_2 em relação ao sistema fixo ao nariz $A(Y_{C_{2,A}})$	m	-0,0785
Coordenada Z da junta C_2 em relação ao sistema fixo ao nariz $A(Z_{C_{2,A}})$	m	0,0120
Distância relativa entre o C.G. do rotor-coaxial esquerdo e a hélice superior, observada desde o sistema $r_2(dx_{r_2hu})$	m	0,0989
Distância relativa entre o C.G. do rotor-coaxial esquerdo e a hélice inferior, observada desde o sistema $r_2(dx_{r_2hl})$	m	-0,0991
Momento de inércia em torno do eixo X do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial esquerdo $r_2(I_{XX_{R_{2,r_2}}})$	kgm ²	$1,81 \cdot 10^{-4}$
Momento de inércia em torno do eixo Y do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial esquerdo $r_2(I_{YY_{R_{2,r_2}}})$	kgm ²	0,0015
Momento de inércia em torno do eixo Z do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial esquerdo $r_2(I_{ZZ_{R_{2,r_2}}})$	kgm ²	0,0015
Produto de inércia no plano XY do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial esquerdo $r_2(I_{XY_{R_{2,r_2}}} = I_{YX_{R_{2,r_2}}})$	kgm ²	$2,1 \cdot 10^{-7}$
Produto de inércia no plano XZ do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial esquerdo $r_2(I_{XZ_{R_{2,r_2}}} = I_{ZX_{R_{2,r_2}}})$	kgm ²	$4,4 \cdot 10^{-9}$
Produto de inércia no plano YZ do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial esquerdo $r_2(I_{YZ_{R_{2,r_2}}} = I_{ZY_{R_{2,r_2}}})$	kgm ²	$-2,2 \cdot 10^{-9}$

Fonte: Autoria própria

Tabela B1.4 – Parâmetros do rotor-coaxial traseiro R_3

Descrição dos Parâmetros	Unidade	Valor
Massa do rotor-coaxial (m_{R_3})	kg	0,3095
Raio de giro no plano YZ entre o sistema Pb_{R_3} e a junta C_3 $(dYZ_{Pb_{R_3}C_3})$	m	0
Distância relativa em X entre o sistema Pb_{R_3} e a junta C_3 $(dX_{Pb_{R_3}C_3})$	m	-0,0202
Coordenada X da junta C_3 em relação ao sistema fixo ao nariz $A(X_{C_3_A})$	m	-1,023
Coordenada Y da junta C_3 em relação ao sistema fixo ao nariz $A(Y_{C_3_A})$	m	0
Coordenada Z da junta C_3 em relação ao sistema fixo ao nariz $A(Z_{C_3_A})$	m	0,0120
Distância relativa entre o C.G. do rotor-coaxial traseiro e a hélice superior, observada desde o sistema r_3 (dY_{r_3hu})	m	0,0990
Distância relativa entre o C.G. do rotor-coaxial traseiro e a hélice inferior, observada desde o sistema r_3 (dY_{r_3hl})	m	-0,0990
Momento de inércia em torno do eixo X do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial traseiro r_3 ($I_{XX_{R_3r_3}}$)	kgm ²	0,0015
Momento de inércia em torno do eixo Y do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial traseiro r_3 ($I_{YY_{R_3r_3}}$)	kgm ²	0,0013
Momento de inércia em torno do eixo Z do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial traseiro r_3 ($I_{ZZ_{R_3r_3}}$)	kgm ²	$3,8 \cdot 10^{-4}$
Produto de inércia no plano XY do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial traseiro r_3 ($I_{XY_{R_3r_3}} = I_{YX_{R_3r_3}}$)	kgm ²	0

Tabela B1.4 – Parâmetros do rotor-coaxial traseiro R_3

(continuação)

Produto de inércia no plano XZ do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial traseiro r_3 ($I_{XZ_{R3r3}} = I_{ZX_{R3r3}}$)	kgm ²	$-8 \cdot 10^{-11}$
Produto de inércia no plano YZ do sistema fixo ao C.G. do rotor-coaxial traseiro r_3 ($I_{YZ_{R3r3}} = I_{ZY_{R3r3}}$)	kgm ²	$3 \cdot 10^{-11}$

Fonte: Autoria própria

Tabela B1.5 – Parâmetros da asa direita W_1

Descrição dos Parâmetros	Unidade	Valor
Massa da asa (m_{W1})	kg	0,1780
Envergadura da asa (b)	m	0,5000
Corda média aerodinâmica da asa (MAC_{W1})	m	0,1300
Raio de giro no plano XZ entre o sistema Pb_{W1} e a junta C_1 ($dXZ_{Pb_{W1}C_1}$)	m	$4,3 \cdot 10^{-4}$
Distância relativa em Y entre o sistema Pb_{W1} e a junta C_1 ($dY_{Pb_{W1}C_1}$)	m	0,2482
Raio de giro no plano XZ entre o centro aerodinâmico (AC) da seção 1 da asa direita e a junta C_1 ($dXZ_{AC_{W1S1}C_1}$)	m	0,0260
Distância relativa em Y entre o centro aerodinâmico (AC) da seção 1 da asa direita e a junta C_1 ($dY_{AC_{W1S1}C_1}$)	m	0,1865
Raio de giro no plano XZ entre o centro aerodinâmico (AC) da seção 2 da asa direita e a junta C_1 ($dXZ_{AC_{W1S2}C_1}$)	m	0,0260
Distância relativa em Y entre o centro aerodinâmico (AC) da seção 2 da asa direita e a junta C_1 ($dY_{AC_{W1S2}C_1}$)	m	0,4365

Tabela B1.5 – Parâmetros da asa direita W_1

(continuação)

Momento de inércia em torno do eixo X do sistema fixo ao C.G. da asa direita w_1 ($I_{XX_{w_1}}$)	kgm ²	0,0040
Momento de inércia em torno do eixo Y do sistema fixo ao C.G. da asa direita w_1 ($I_{YY_{w_1}}$)	kgm ²	$2,3 \cdot 10^{-4}$
Momento de inércia em torno do eixo Z do sistema fixo ao C.G. da asa direita w_1 ($I_{ZZ_{w_1}}$)	kgm ²	0,0042
Produto de inércia no plano XY do sistema fixo ao C.G. da asa direita w_1 ($I_{XY_{w_1}} = I_{YX_{w_1}}$)	kgm ²	$-2,2 \cdot 10^{-7}$
Produto de inércia no plano XZ do sistema fixo ao C.G. da asa direita w_1 ($I_{XZ_{w_1}} = I_{ZX_{w_1}}$)	kgm ²	$1,9 \cdot 10^{-9}$
Produto de inércia no plano YZ do sistema fixo ao C.G. da asa direita w_1 ($I_{YZ_{w_1}} = I_{ZY_{w_1}}$)	kgm ²	$-5,2 \cdot 10^{-8}$

Fonte: Autoria própria

Tabela B1.6 – Parâmetros da asa esquerda W_2

Descrição dos Parâmetros	Unidade	Valor
Massa da asa (m_{W_2})	kg	0,1780
Envergadura da asa (b)	m	0,5000
Corda média aerodinâmica da asa (MAC_{W_2})	m	0,1300
Raio de giro no plano XZ entre o sistema Pb_{W_2} e a junta C_2 ($d_{XZ_{Pb_{W_2}C_2}}$)	m	$4,3 \cdot 10^{-4}$
Distância relativa em Y entre o sistema Pb_{W_2} e a junta C_2 ($d_{Y_{Pb_{W_2}C_2}}$)	m	-0,2482

Tabela B1.6 – Parâmetros da asa esquerda W_2

(continuação)

Raio de giro no plano XZ entre o centro aerodinâmico (AC) da seção 1 da asa esquerda e a junta C_2 ($dXZ_{ACW_2S1C_2}$)	m	0,0260
Distância relativa em Y entre o centro aerodinâmico (AC) da seção 1 da asa esquerda e a junta C_2 ($dY_{ACW_2S1C_2}$)	m	-0,1865
Raio de giro no plano XZ entre o centro aerodinâmico (AC) da seção 2 da asa esquerda e a junta C_2 ($dXZ_{ACW_2S2C_2}$)	m	0,0260
Distância relativa em Y entre o centro aerodinâmico (AC) da seção 2 da asa esquerda e a junta C_2 ($dY_{ACW_2S2C_2}$)	m	-0,4365
Momento de inércia em torno do eixo X do sistema fixo ao C.G. da asa esquerda w_2 ($I_{XX_{W_2w_2}}$)	kgm ²	0,0040
Momento de inércia em torno do eixo Y do sistema fixo ao C.G. da asa esquerda w_2 ($I_{YY_{W_2w_2}}$)	kgm ²	$2,3 \cdot 10^{-4}$
Momento de inércia em torno do eixo Z do sistema fixo ao C.G. da asa esquerda w_2 ($I_{ZZ_{W_2w_2}}$)	kgm ²	0,0042
Produto de inércia no plano XY do sistema fixo ao C.G. da asa esquerda w_2 ($I_{XY_{W_2w_2}} = I_{YX_{W_2w_2}}$)	kgm ²	$2,2 \cdot 10^{-7}$
Produto de inércia no plano XZ do sistema fixo ao C.G. da asa esquerda w_2 ($I_{XZ_{W_2w_2}} = I_{ZX_{W_2w_2}}$)	kgm ²	$-1,9 \cdot 10^{-9}$
Produto de inércia no plano YZ do sistema fixo ao C.G. da asa esquerda w_2 ($I_{YZ_{W_2w_2}} = I_{ZY_{W_2w_2}}$)	kgm ²	$-5,2 \cdot 10^{-8}$

Fonte: Autoria própria

(conclusão)

Tabela B1.7 – Parâmetros adicionais do modelo da aeronave

Descrição dos Parâmetros	Unidade	Valor
Massa total da aeronave (m_T)	kg	4,3748
Aceleração da gravidade (g)	$\frac{m}{s^2}$	9,8100
Densidade do ar (ρ)	$\frac{kg}{m^3}$	1,1500
Diâmetro das hélices (D)	m	0,2540
Massa das hélices (m_h)	kg	0,0119

Fonte: Autoria própria