



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Licenciatura em Matemática

Equações de Diferenças: Discretização de Modelos Contínuos e Algumas Aplicações

Gustavo Quirino Machado

Uberlândia-MG

2022

Gustavo Quirino Machado

Equações de Diferenças: Discretização de Modelos Contínuos e Algumas Aplicações

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. César Guilherme de Almeida

Uberlândia-MG

2022



**Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática**

Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Uberlândia, _____ de _____ de 20_____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. César Guilherme de Almeida

Prof. Dr. Ariosvaldo Marques Jatobá

Prof. Dr. Rodolfo Collegari

**Uberlândia-MG
2022**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Faculdade de Matemática

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG,
CEP 38400-902

Telefone: +55 (34) 3239-4158/4156/4126 - www.famat.ufu.br - famat@ufu.br



ATA DE DEFESA - GRADUAÇÃO

Curso de Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Trabalho de Conclusão de Curso 2 (GMA031)				
Data:	06/01/2022	Hora de início:	15h00min	Hora de encerramento:	16h20min
Matrícula do Discente:	11711MAT021				
Nome do Discente:	Gustavo Quirino Machado				
Título do Trabalho:	Equações de Diferenças: Discretização de Modelos Contínuos e Algumas Aplicações				
A carga horária curricular foi cumprida integralmente?	(x) Sim () Não				

Em função da pandemia mundial e da DECISÃO DO COMITÊ DE MONITORAMENTO À COVID-19/UFU, DE 16 DE MARÇO DE 2020 a respeito da suspensão de aulas e atividades acadêmicas da UFU a partir de 18 de março de 2020, a defesa de Trabalho de Conclusão de Curso ocorreu virtualmente através da plataforma Microsoft Teams, presente no Office 365 Educacional e disponibilizado de forma gratuita pela Microsoft para toda comunidade da UFU.

Reuniu-se virtualmente, a Banca Examinadora assim composta pelos Professores: Prof. Dr. Rodolfo Collegari - FAMAT/UFU, Prof. Dr. Ariosvaldo Marques Jatobá - FAMAT/UFU e Prof. Dr. César Guilherme de Almeida - FAMAT/UFU, orientador(a) do(a) candidato(a).

Iniciando os trabalhos, o(a) presidente da mesa, Prof. Dr. César Guilherme de Almeida, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato(a), agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra, para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e

resposta foram conforme as normas do curso.

A seguir o(a) senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

(X) Aprovado(a) Nota [95] (Somente números inteiros)

OU

() Aprovado(a) sem nota.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Cesar Guilherme de Almeida, Professor(a) do Magistério Superior**, em 06/01/2022, às 16:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ariosvaldo Marques Jatoba, Professor(a) do Magistério Superior**, em 06/01/2022, às 17:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodolfo Collegari, Professor(a) do Magistério Superior**, em 06/01/2022, às 19:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://www.sei.ufu.br/sei/controlador externo.php?acao=documento conferir&id orgao acesso externo=0>, informando o código verificador **3287057** e o código CRC **67E047D1**.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a DEUS pelo dom da vida!

Quero agradecer em segundo plano às pessoas mais importantes da minha vida, minha esposa Thalia, meus irmãos Murilo e Maria Luiza, minha avó Helena, meu Pai Sirone e, claro, minha eterna Mãe Claudia, que hoje já não está mais aqui. Tudo o que estou conquistando devo a você Mãe, obrigado por tudo. Agradeço também ao restante da família e aos amigos.

Agradeço as minhas professoras e aos meus professores, em especial ao meu orientador César, que aceitou o desafio de desenvolver um trabalho às pressas, ajudando-me muito, foi um excelente orientador!

Agradeço aos professores Santos Alberto e Antonio Carlos pois eles acreditaram em mim, quando eu já não acreditava que conseguiria terminar o curso.

Agradeço também ao professor Fábio Bertoloto, pois além de ser um grande ser humano, sempre motivou os alunos e as alunas. Será um prazer trabalhar com você no mestrado.

Queria agradecer também à Universidade Federal de Uberlândia por todo o auxílio prestado durante esses anos de curso.

Porfim, agradeço a todos os docentes e a todas as docentes que me deram aula. Tive a grande sorte de conhecer excelentes docentes na minha graduação.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar a teoria de equações de diferenças, juntamente com algumas aplicações. O desenvolvimento baseia-se em discretizar modelos matemáticos contínuos transformando-os em modelos discretos, isto é, transformar equações diferenciais ordinárias em equações de diferenças, podendo assim realizar as aplicações devidas para cada modelo apresentado.

Palavras-chave: Equação de Diferenças; Modelo Discreto; Equação Diferencial Ordinária; Aplicações.

ABSTRACT

This work aims to present the theory of difference equations, along with some applications. The development is based on discretize continuous mathematical models transforming them into discrete models, that is, transforming ordinary differential equations into difference equations, thus being able to carry out the applications required for each model presented.

Keywords:Equation of Differences; Discrete Model; Ordinary Differential Equation; Applications.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	I
1 Introdução	1
2 Equações de Diferenças	3
2.1 Equação de Diferenças Linear de Ordem 1	3
2.1.1 Equação homogênea	3
2.1.2 Equação não homogênea	4
2.2 Equação de Diferenças Linear de Ordem 2	6
2.2.1 Caso de raízes reais distintas	8
2.2.2 Caso de raízes reais duplas	8
2.2.3 Caso de raízes complexas	9
2.3 Equação de Diferenças Não Linear	11
3 Discretização de Equações Diferenciais ordinárias	13
3.1 Modelo Discreto Linear de Ordem 1 (Modelo de Malthus)	13
3.1.1 Aplicação	14
3.2 Modelo Discreto Linear de Ordem 2	14
3.2.1 Aplicação 1	16
3.2.2 Aplicação 2	17
3.3 Equação Diferencial Ordinária Não Linear	18
4 Conclusões	21
Referências Bibliográficas	23

LISTA DE FIGURAS

3.1 Sistema massa-mola	15
----------------------------------	----

1. INTRODUÇÃO

Algumas partes do texto que apresentaremos a seguir e na Seção 2.1 foram retiradas do material didático do professor Pedro Konzen [7]. Para obter mais informações sobre equações de diferenças recomendamos o livro de Saber Elaydi, “An Introduction to Difference Equations” [5].

Equações de diferenças são aquelas que podem ser escritas na seguinte forma

$$f(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \dots, y_n; n) = 0, \quad (1.1)$$

onde $n, k \in \mathbb{N}; y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto y(n)$, é uma função discreta (incógnita).

A equação de diferenças (Eq. 1.1) é dita ser de **ordem** k (ou de k -ésima ordem). Tal equação é **linear** quando f é função linear nas variáveis dependentes $y_{n+k}, y_{n+k-1}, \dots, y_n$; noutro caso é dito **não linear**.

Exemplo 1. Observe abaixo algumas equações de diferenças.

a) **Modelo de juros compostos**

$$y_{n+1} = (1+r)y_n. \quad (1.2)$$

Esta equação de diferenças modela uma aplicação corrigida a juros compostos com taxa r por período de tempo n (dia, mês, ano, etc). Mais especificamente, se y_0 é o valor da aplicação inicial, então $y_1 = (1+r)y_0, y_2 = (1+r)y_1 = (1+r)^2 y_0$, e assim por diante. Por indução finita, podemos mostrar que $y_n = (1+r)^n y_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) **Equação logística**

$$y_{n+1} = r y_n \left(1 - \frac{y_n}{K}\right), \quad (1.3)$$

onde y_n representa o tamanho da população no período n ; r é a taxa de crescimento e K um limiar de saturação.

c) **Sequência de Fibonacci**

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \quad (1.4)$$

onde $y_0 = 0, y_1 = 1$.

Observação: No Exemplo anterior,

a) o modelo de juros compostos é dado por uma equação de diferenças de primeira ordem linear;

b) a equação logística é uma equação de diferenças de primeira ordem não linear;

c) a equação de Fibonacci é descrita por uma equação de diferenças de segunda ordem linear.

Observação: Em alguns casos, é possível escrever a **solução** de uma equação de diferenças por meio de uma **forma fechada**:

$$y_n = y(n), \quad (1.5)$$

de modo que a expressão da **função discreta** y , com domínio no conjunto dos números naturais, é conhecida.

2. EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Neste capítulo, serão apresentadas definições, soluções e alguns aspectos de Equações de Diferenças não lineares e lineares de ordens 1 e 2.

2.1 EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS LINEAR DE ORDEM 1

Nesta seção, discutiremos sobre equações de diferenças que são lineares e possuem ordem 1. Tais equações podem ser escritas na seguinte forma

$$y_{n+1} = a(n)y_n + g(n), \quad (2.1)$$

onde $n \in \{n_0, n_0 + 1, \dots\}$; n_0 é um número inteiro não negativo; $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é o termo fonte. A equação é **homogênea** quando $g(n) = 0$; se $g(n) \neq 0$, então a equação é **não homogênea**.

2.1.1 EQUAÇÃO HOMOGÊNEA

A solução de uma equação de diferenças de ordem 1, linear e homogênea

$$y_{n+1} = a(n)y_n, \quad n \geq n_0, \quad (2.2)$$

pode ser obtida por iterações diretas. Para isso, considerando $n \geq n_0$, observe que $y_{n+1} = a(n)y_n = a(n)a(n-1)y_{n-1} = a(n)a(n-1)a(n-2)y_{n-2}$. Continuando com esse processo, obtemos $y_{n+1} = a(n)a(n-1) \cdots a(n_0)y_{n_0}$. Ou seja, dado o valor inicial y_{n_0} , temos a seguinte solução:

$$y(n) = a(n_0)a(n_0 + 1) \cdots a(n-1)y_{n_0}. \quad (2.3)$$

Afim de termos uma notação mais prática, vamos usar a notação de produto

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) = a(n_0)a(n_0 + 1) \cdots a(n-1). \quad (2.4)$$

Com esta notação, a solução da equação de diferenças (Eq. 2.2) pode ser escrita como segue

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_{n_0}, \quad n > n_0. \quad (2.5)$$

Exemplo 1. Vamos calcular a solução de

$$y_{n+1} = 2y_n, \quad n \geq 0. \quad (2.6)$$

a) Por iterações diretas.

Comparando com a Eq. 2.2, temos que $a(n) = 2$, para todo n . Calculando a solução por iterações diretas, obtemos, por exemplo, $y_3 = 2y_2 = 2 \times 2y_1 = 2^2 y_1 = 2^2 \times 2y_0 = 2^3 y_0$. Continuando com esse processo e utilizando indução finita, podemos mostrar que a solução dessa equação de diferenças é dada por

$$y(n) = 2^n y_0. \quad (2.7)$$

b) Usando a Eq. 2.5.

$$y(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} 2 \right] y_0. \quad (2.8)$$

Assim, $y(n) = \underbrace{(2 \times 2 \times \dots \times 2)}_n = 2^n y_0$. A solução vale para qualquer valor inicial y_0 .

2.1.2 EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA

O processo mais adequado para demonstrar uma fórmula fechada para a equação de diferença não homogênea é por meio de indução finita. A solução de uma equação de diferenças de ordem 1, linear e não homogênea

$$y_{n+1} = a(n)y_n + g(n), \quad n \geq n_0, \quad (2.9)$$

pode ser obtida por iterações diretas, e depois demonstrada por indução.

Por exemplo, para $n = n_0 + 3$,

$$y_{n_0+3} = a(n_0 + 2)y_{n_0+2} + g(n_0 + 2) = a(n_0 + 2)[a(n_0 + 1)y_{n_0+1} + g(n_0 + 1)] + g(n_0 + 2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} y_{n_0+3} &= a(n_0 + 2)a(n_0 + 1)y_{n_0+1} + a(n_0 + 2)g(n_0 + 1) + g(n_0 + 2) = \\ &= a(n_0 + 2)a(n_0 + 1)[a(n_0)y_{n_0} + g(n_0)] + a(n_0 + 2)g(n_0 + 1) + g(n_0 + 2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$y_{n_0+3} = a(n_0 + 2)a(n_0 + 1)a(n_0)y_{n_0} + a(n_0 + 2)a(n_0 + 1)g(n_0) + a(n_0 + 2)g(n_0 + 1) + g(n_0 + 2).$$

Para maior praticidade, vamos empregar a seguinte notação de somatório:

$$\sum_{i=n_0}^n a(i) = a(n_0) + a(n_0 + 1) + \dots + a(n), \quad (2.10)$$

onde $n > n_0$.

Considerando $n = n_0 + k, k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, a solução da equação de diferenças (Eq. 2.9) pode

ser escrita como segue:

$$y(n) = y(n_0 + k) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} a(n_0 + i) \right] y_{n_0} + \sum_{i=0}^{k-2} \left[\prod_{j=i+1}^{k-1} a(n_0 + j) \right] g(n_0 + i) + g(n_0 + k - 1). \quad (2.11)$$

Observação: Se $k=1$, então $y(n_0 + 1) = a(n_0)y_{n_0} + g(n_0)$.

Exemplo 2. Vamos calcular a solução de

$$y_{n+1} = 2y_n - 1, \quad n \geq 0. \quad (2.12)$$

Consultando a Eq. 2.9, $a(n) = 2$ e $g(n) = -1$ para todo n .

1. Cálculos por iterações diretas.

Observe que $y_{n+1} = 2y_n - 1$, assim $y_1 = 2y_0 - 1$, $y_2 = 2y_1 - 1 = 2(2y_0 - 1) - 1 = 2^2y_0 - 2 - 1$, $y_3 = 2y_2 - 1 = 2(2^2y_0 - 2 - 1) - 1 = 2^3y_0 - 2^2 - 2 - 1$. Lembrando que $2^0 = 1$, podemos usar indução finita para mostrar que a solução da equação de diferenças é dada por:

$$y(n) = 2^n y_0 - \sum_{i=0}^{n-1} 2^i, \quad n \geq 1. \quad (2.13)$$

Note que o último termo da equação anterior é a soma dos termos da **progressão geométrica** de razão $q=2$ e termo inicial 1. Assim,

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = \frac{1-2^n}{1-2}. \quad (2.14)$$

Portanto, a solução da equação de diferenças (Eq. 2.9) é dada por:

$$y(n) = 2^n y_0 - \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n y_0 - 2^{n-1} + 1. \quad (2.15)$$

2. Cálculo pela Eq. 2.11.

Note que

$$y(n) = y(n_0 + k) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} a(n_0 + i) \right] y_{n_0} + \sum_{i=0}^{k-2} \left[\prod_{j=i+1}^{k-1} a(n_0 + j) \right] g(n_0 + i) + g(n_0 + k - 1),$$

onde $k \geq 2$.

Lembre-se de que $a(n) = 2$ e $g(n) = -1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $n = n_0 + k$, ou seja, $k = n - n_0$. Assim,

$$y(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-n_0-1} 2 \right] y_{n_0} + \sum_{i=0}^{n-n_0-2} \left[\prod_{j=i+1}^{n-n_0-1} 2 \right] (-1) + (-1).$$

Dessa forma,

$$y(n) = 2^{(n-n_0)} y_{n_0} + \sum_{i=0}^{n-n_0-2} [2^{(n-n_0-1-i)}] (-1) + (-1),$$

ou seja,

$$y(n) = 2^{(n-n_0)}y_{n_0} - (2^{(n-n_0-1)}) \sum_{i=0}^{n-n_0-2} 2^{(-i)} - 1.$$

Assim,

$$y(n) = 2^{(n-n_0)}y_{n_0} - (2^{(n-n_0)}2^{-1}) \sum_{i=0}^{n-n_0-2} (1/2)^i - 1.$$

Observe que a soma dos termos da progressão geométrica de razão $q=1/2$ e termo inicial 1 é dado por

$$\sum_{i=0}^{N-1} (1/2)^i = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N}{1 - \frac{1}{2}}. \quad (2.16)$$

Assim,

$$y(n) = 2^{(n-n_0)}y_{n_0} - (2^{(n-n_0)}2^{-1})[2(1 - (1/2)^{(n-n_0-1)})] - 1.$$

Portanto,

$$y(n) = 2^{(n-n_0)}y_{n_0} - 2^{(n-n_0)} + 2 - 1.$$

Se $n_0 = 0$, então a solução é dada por

$$y(n) = 2^n y_0 - 2^n + 1. \quad (2.17)$$

A solução vale para qualquer valor inicial y_0 .

2.2 EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS LINEAR DE ORDEM 2

Aqui, vamos considerar equações de diferenças lineares de ordem 2 com coeficientes constantes e homogêneas (EDLH de segunda ordem), isto é, equações da forma:

$$ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0, \quad (2.18)$$

com $a \neq 0$. Consideramos a existência de uma solução do tipo $y(n) = A\lambda^n$, onde A é uma constante não nula e λ é um número real ou complexo. Para isso ser verdade, devemos ter:

$$a(A\lambda^{n+2}) + b(A\lambda^{n+1}) + c(A\lambda^n) = 0 \Leftrightarrow \lambda^n (a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0. \quad (2.19)$$

Dessa forma, ou $\lambda = 0$ ou λ é raiz do polinômio característico $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Observação: Se $\lambda = 0$, então $y_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa alternativa é viável se as condições iniciais forem nulas ($y_0 = y_1 = 0$).

Vejamos algumas propriedades importantes associadas às soluções de uma EDLH de segunda ordem.

P1) Sejam $g(n)$ e $h(n)$ duas soluções quaisquer de uma EDLH de segunda ordem. Então, a combinação linear dessas soluções também será uma solução.

Demonstração. Seja $y(n) = Ag(n) + Bh(n)$, então

$$\begin{aligned} ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n &= a(Ag_{n+2} + Bh_{n+2}) + b(Ag_{n+1} + Bh_{n+1}) + c(Ag_n + Bh_n) = \\ &= A(ag_{n+2} + bg_{n+1} + cg_n) + B(ah_{n+2} + bh_{n+1} + ch_n) = 0. \square \end{aligned}$$

P2) Se uma EDLH de segunda ordem $ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0$ possuir condições iniciais nulas, $y_0 = y_1 = 0$, então a solução é nula; isto é, $y(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Como $a \neq 0$, então

$$y_{n+2} = - \left(\frac{1}{a} \right) [by_{n+1} + cy_n]. \text{ Assim,}$$

$$y_2 = - \left(\frac{1}{a} \right) [by_1 + cy_0] = 0, \text{ pois } y_0 = y_1 = 0.$$

Note que a conclusão é a mesma para y_3 e y_4 . Usando o princípio de indução finita, provamos que $y_n = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. \square

Agora vamos mostrar que a solução geral de uma EDLH de segunda ordem, $ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0$, com condições iniciais y_0 e y_1 , tem a seguinte forma:

$$y(n) = Ag(n) + Bh(n), \quad (2.20)$$

onde $ag_{n+2} + bg_{n+1} + cg_n = 0$ e $ah_{n+2} + bh_{n+1} + ch_n = 0$.

Pela propriedade (P1) anterior, sabemos que $y(n)$ é uma solução da EDLH de segunda ordem. Precisamos garantir que as condições iniciais sejam satisfeitas; isto é, $y(0) = y_0$ e $y(1) = y_1$. Logo, para que as condições iniciais sejam obtidas de maneira única, precisamos garantir que o seguinte sistema linear tenha solução única:

$$\begin{cases} Ag_0 + Bh_0 = y_0, \\ Ag_1 + Bh_1 = y_1. \end{cases} \quad (2.21)$$

Para isso ocorrer sempre, basta que $g(n)$ e $h(n)$ sejam linearmente independentes (ou seja, $Ag_n + Bh_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, implica que $A=B=0$). Assim $y(n) = Ag(n) + Bh(n)$ é uma solução da EDLH de segunda ordem, $ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0$, com condições iniciais y_0 e y_1 .

Agora, suponha que $\tilde{y}(n)$ seja uma solução qualquer da EDLH de segunda ordem, $ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0$, com condições iniciais y_0 e y_1 . Assim, de acordo com a propriedade (P1) anterior, $Y(n) = \tilde{y}(n) - y(n)$ é uma solução da EDLH de segunda ordem, $aY_{n+2} + bY_{n+1} + cY_n = 0$, com condições iniciais $Y_0 = 0$ e $Y_1 = 0$. Dessa forma, pela propriedade P2, $Y(n) = 0$, para todo número natural n . Portanto, $\tilde{y}(n) = y(n) = Ag(n) + Bh(n)$, ou seja, a solução geral da EDLH de segunda ordem com condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y(1) = y_1$ será aquela dada na Eq. 2.20.

Observação: Encontraremos a solução geral de uma EDLH de ordem 2 em três casos diferentes, de acordo com a natureza da raiz do polinômio característico. Para os três casos abaixo iremos considerar o polinômio característico $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$.

2.2.1 CASO DE RAÍZES REAIS DISTINTAS

Nesse caso, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Assim, $\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Suponha que $g(n) = (\lambda_1)^n$ e $h(n) = (\lambda_2)^n$, então $g(n)$ e $h(n)$ são duas soluções linearmente independentes. De fato, se $Ag(n) + Bh(n) = A(\lambda_1)^n + B(\lambda_2)^n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então, para $n = 0$, $A + B = 0$, ou seja, $A = -B$. Para $n = 1$, $-B(\lambda_1) + B(\lambda_2) = 0 \Rightarrow B(\lambda_2 - \lambda_1) = 0 \Rightarrow B = 0$, pois $(\lambda_2 - \lambda_1)$ é diferente de 0. Portanto, $A = B = 0$. Logo a solução geral neste caso é dada por:

$$y(n) = A(\lambda_1)^n + B(\lambda_2)^n, \quad (2.22)$$

e as constantes A e B são determinadas de modo único por meio da solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A + B = y_0, \\ A(\lambda_1) + B(\lambda_2) = y_1, \end{cases} \quad (2.23)$$

onde $A = \frac{y_1 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$ e $B = y_0 - \left(\frac{y_1 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)$. Logo, a solução geral é dada por:

$$y(n) = \frac{y_1 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1)^n + y_0 - \left(\frac{y_1 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) (\lambda_2)^n. \quad (2.24)$$

Exemplo 3. Vamos resolver a equação $y_{n+2} - 4y_n = 0$, com $y_0 = 0$ e $y_1 = -2$.

Note que $a = 1, b = 0, c = -4, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$. Utilizando a Eq. 2.24, obtemos a seguinte solução: $y(n) = -\frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}(-2)^n$.

2.2.2 CASO DE RAÍZES REAIS DUPLAS

Nesse caso, temos $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. E assim $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-b}{2a}$. Suponha que $\frac{-b}{2a} \neq 0$, senão teríamos $c = 0$ e assim a equação não se trataria de uma EDLH de ordem 2. A partir da solução que já conhecemos $g(n) = \lambda^n$, vamos obter uma nova solução e verificar que as duas são linearmente independentes.

Utilizando a técnica conhecida como variação do parâmetro, tentaremos uma solução do tipo $h(n) = K(n)\lambda^n$, onde K deixa de ser uma constante e passa a ser uma função de n . A função mais simples que podemos considerar é $K(n) = n$. Dessa forma, vamos supor que $h(n) = n\lambda^n$ e provaremos que $h(n)$ é solução da EDLH de ordem 2. Note que

$$\begin{aligned} a \cdot (n+2)\lambda^{n+2} + b \cdot (n+1)\lambda^{n+1} + c \cdot n\lambda^n &= n(a\lambda^{n+2} + b\lambda^{n+1} + c\lambda^n) + 2a\lambda^{n+2} + b\lambda^{n+1} = \\ &= n \cdot 0 + \lambda^{n+1}(2a\lambda + b) = \lambda^{n+1}\left(2a\left(\frac{-b}{2a}\right) + b\right) = \lambda^{n+1}(-b + b) = 0. \end{aligned}$$

Portanto $h(n)$ é solução.

Agora, mostraremos que $g(n)$ e $h(n)$ são linearmente independentes. Se

$$Ag(n) + Bh(n) = A(\lambda^n) + B(n\lambda^n) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

então, para $n = 0$, tem-se que $A = 0$; para $n = 1$, tem-se que $A(\lambda) + B(1 \cdot \lambda) = 0$. Como $A = 0$, então $B\lambda = 0$; logo $B = 0$, pois $\lambda \neq 0$. Portanto, $A = B = 0$. Logo a solução geral neste caso

é dada por:

$$y(n) = A(\lambda)^n + B(n\lambda)^n = \lambda^n(A + nB), (2.25)$$

e as constantes A e B são determinadas de modo único por meio da solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A = y_0, \\ (A+B)\lambda = y_1, \end{cases} (2.26)$$

onde $A = y_0$ e $B = \frac{y_1 - \lambda y_0}{\lambda}$. Logo a solução geral é dada por:

$$y(n) = \lambda^{n-1} [\lambda y_0(1-n) + n y_1]. (2.27)$$

Exemplo 4. Vamos resolver a equação $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 4y_n = 0$, com $y_0 = 0$ e $y_1 = -2$.

Note que $a = 1, b = 4, c = 4$, e $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Utilizando a Eq. 2.27, obtemos a seguinte solução: $y(n) = n(-2)^n$.

2.2.3 CASO DE RAÍZES COMPLEXAS

Nesse caso, temos $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Como $\Delta < 0$, então $(ac) > 0$. Assim as raízes são $\lambda_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ e $\lambda_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Observação 1: Se $z = x + iy$, então $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Assim, $|\lambda| = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{c/a}$.

Lembre-se de que a forma trigonométrica de um número complexo z é dada por:

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)), (2.28)$$

onde $\cos(\theta) = \frac{x}{|z|}$ e $\text{sen}(\theta) = \frac{y}{|z|}$. Assim, se $w = x - iy$, então $|w| = |z|$ e $w = x + i(-y) = |z|(\cos(\Phi) + i\text{sen}(\Phi))$, onde $\cos(\Phi) = \frac{x}{|z|}$ e $\text{sen}(\Phi) = \frac{-y}{|z|}$. Portanto, $\cos(\Phi) = \cos(\theta)$ e $\text{sen}(\Phi) = -\text{sen}(\theta)$. Logo, $w = x + i(-y) = |z|(\cos(\theta) - i\text{sen}(\theta))$.

Observação 2: Pela fórmula de De Moivre, tem-se que $z^n = |z|^n [\cos(n\cdot\theta) + i\text{sen}(n\cdot\theta)]$ e $w^n = |w|^n [\cos(n\cdot\theta) - i\text{sen}(n\cdot\theta)]$.

A partir das soluções complexas

$$g(n) = (\lambda_1)^n = |\lambda|^n [\cos(n\cdot\theta) + i\text{sen}(n\cdot\theta)], (2.29)$$

$$h(n) = (\lambda_2)^n = |\lambda|^n [\cos(n\cdot\theta) - i\text{sen}(n\cdot\theta)], (2.30)$$

iremos encontrar duas soluções reais, linearmente independentes, da Equação de Diferenças Linear Homogênea (EDLH) de segunda ordem. Primeiramente, observe que $seg(n)$ e $h(n)$ são soluções da EDLH, então: $s(n) = g(n) - h(n)$ e $c(n) = g(n) + h(n)$ também são soluções. Com efeito,

$$s(n) = \lambda_1^n - \lambda_2^n = |\lambda|^n [\cos(n\cdot\theta) + i\text{sen}(n\cdot\theta)] - |\lambda|^n [\cos(n\cdot\theta) - i\text{sen}(n\cdot\theta)] =$$

$$= 2i|\lambda|^n \operatorname{sen}(n\cdot\theta);$$

$$\begin{aligned} c(n) &= \lambda_1^n + \lambda_2^n = |\lambda|^n [\cos(n\cdot\theta) + i\operatorname{sen}(n\cdot\theta)] + |\lambda|^n [\cos(n\cdot\theta) - i\operatorname{sen}(n\cdot\theta)] = \\ &= 2|\lambda|^n \cos(n\cdot\theta). \end{aligned}$$

Agora observe que $as_{n+2} + bs_{n+1} + cs_n = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2ia|\lambda|^{n+2} \operatorname{sen}((n+2)\theta) + 2ib|\lambda|^{n+1} \operatorname{sen}((n+1)\theta) + 2ic|\lambda|^n \operatorname{sen}(n\theta) &= 0 \\ \Rightarrow 2i \cdot [a|\lambda|^{n+2} \operatorname{sen}((n+2)\theta) + b|\lambda|^{n+1} \operatorname{sen}((n+1)\theta) + c|\lambda|^n \operatorname{sen}(n\theta)] &= 0 \\ \Rightarrow a|\lambda|^{n+2} \operatorname{sen}((n+2)\theta) + b|\lambda|^{n+1} \operatorname{sen}((n+1)\theta) + c|\lambda|^n \operatorname{sen}(n\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Isso significa que $|\lambda|^n \operatorname{sen}(n\cdot\theta)$ é uma solução real da EDLH de ordem 2. De forma análoga tem-se que $|\lambda|^n \cos(n\cdot\theta)$ também é uma solução real.

Agora vamos mostrar que $|\lambda|^n \operatorname{sen}(n\cdot\theta)$ e $|\lambda|^n \cos(n\cdot\theta)$ são linearmente independentes. De fato, se $A|\lambda|^n \operatorname{sen}(n\cdot\theta) + B|\lambda|^n \cos(n\cdot\theta) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então, considerando $n = 0$ e $n = 1$, $B = 0$ e $A|\lambda| \operatorname{sen}(\theta) = 0$. Logo $A = 0$, porque $|\lambda| \operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \neq 0$. Neste caso, a solução geral é dada por:

$$y(n) = A|\lambda|^n \operatorname{sen}(n\theta) + B|\lambda|^n \cos(n\theta). \quad (2.31)$$

E as constantes A e B são determinadas de modo único por meio do sistema:

$$\begin{cases} B = y_0, \\ A|\lambda| \operatorname{sen}(\theta) + B|\lambda| \cos(\theta) = y_1, \end{cases} \quad (2.32)$$

onde $A = \frac{y_1 - (y_0 \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \cos(\theta))}{\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \operatorname{sen}(\theta)}$ e $B = y_0$.

Utilizando o fato de que $\cos(\theta) = \frac{x}{|\lambda|}$ e $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{y}{|\lambda|}$, onde $x = \frac{-b}{2a}$, $y = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ e $|\lambda| = \sqrt{c/a}$,

$$\cos(\theta) = \left(\frac{-b}{2a}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\right) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\theta) = \left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\right).$$

Dessa forma, substituindo $\cos(\theta)$ e $\operatorname{sen}(\theta)$ em A temos:

$$A = \frac{2ay_1 + by_0}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

Logo a solução geral é dada por:

$$y(n) = \frac{2ay_1 + by_0}{\sqrt{4ac-b^2}} \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}\right)^n \operatorname{sen}(n\theta) + y_0 \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}\right)^n \cos(n\theta). \quad (2.33)$$

Exemplo 5. Vamos resolver a equação $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0$, com condições iniciais $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$. Note que $a = 1, b = -2, c = 2, \lambda_1 = 1 + i$ e $\lambda_2 = 1 - i$. Utilizando a Eq. 2.33, obtemos a solução $y(n) = (\sqrt{2})^n \operatorname{sen}(n\cdot\theta)$. Além disso, considerando-se $\lambda = 1 + i$, observe que $\cos(\theta) = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ e $\operatorname{sen}(\theta) = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$. Portanto, o ângulo θ pertence ao primeiro quadrante, pois seno e cosseno são positivos. Nesse caso, $\theta = \arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$, pois $\operatorname{sen}(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Assim a solução final é dada por: $y(n) = (\sqrt{2})^n \operatorname{sen}(n\frac{\pi}{4})$.

2.3 EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS NÃO LINEAR

Nesta seção, vamos abordar alguns conceitos fundamentais para a análise de equações de primeira ordem e não lineares, i.e. equações da forma

$$f(y_{n+1}, y_n; n) = 0, \quad n \geq n_0 > 0, \quad (2.34)$$

onde f é uma função não linear nas incógnitas y_{n+1} e y_n .

A variedade de formas que uma equação de diferenças não linear pode ter é enorme e não existem formas fechadas para a solução da grande maioria delas.

Exemplo 6. A equação logística não linear de primeira ordem, $y_{n+1} = r y_n \left(1 - \frac{y_n}{K}\right)$, apresentada no Capítulo 1, não tem uma forma fechada.

Exemplo 7. A equação de diferenças não linear dada por $y_{n+1} = y_n^2$, $n \geq 0$, com condição inicial $y_0 \in \mathbb{R}$, tem solução geral dada por $y(n) = y_0^{(2^n)}$. Com efeito, note que $y_1 = y_0^2$, $y_2 = y_1^2 = (y_0^2)^2 = y_0^4$. Supondo que $y_n = y_0^{(2^n)}$, para todo número natural $n, 1 \leq n < m$, então $y_m = y_{m-1}^2 = (y_0^{2^{m-1}})^2 = y_0^{(2 \cdot 2^{m-1})} = y_0^{(2^m)}$. Portanto, por indução finita, $y(n) = y_0^{(2^n)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 8. A equação de Beverton-Holt [4], dada por

$$x_{n+1} = \frac{K x_n}{x_n + (K - x_n) r^{-1}}, \quad n \geq 0, \quad (2.35)$$

onde K e r são constantes positivas, possui uma forma fechada. Primeiramente, note que

$x_1 = \frac{K x_0}{x_0 + (K - x_0) r^{-1}}$. Dessa forma, $x_2 = \frac{K x_1}{x_1 + (K - x_1) r^{-1}}$, ou seja,

$$x_2 = \left(\frac{K^2 x_0}{x_0 + (K - x_0) r^{-1}} \right) \left(\frac{x_0 + (K - x_0) r^{-1}}{K(x_0 + (K - x_0) r^{-2})} \right) = \frac{K x_0}{x_0 + (K - x_0) r^{-2}}.$$

Usando indução finita, fica fácil mostrar que a equação de Beverton-Holt tem solução dada por

$$x(n) = \frac{K x_0}{x_0 + (K - x_0) r^{-n}}, \quad n \geq 0. \quad (2.36)$$

3. DISCRETIZAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

O objetivo desse capítulo é discretizar modelos matemáticos contínuos, transformando equações diferenciais ordinárias em equações de diferenças para aplicá-las em diversas áreas. Não iremos nos preocupar com a dedução dos modelos utilizados aqui, mas, sim, com as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) que os descrevem.

3.1 MODELO DISCRETO LINEAR DE ORDEM 1 (MODELO DE MALTHUS)

O modelo de Malthus (veja a referência [3]) é um dos modelos mais conhecidos para modelar crescimento populacional. Esse modelo pressupõe que a taxa de crescimento de uma população em um determinado instante é proporcional à população total naquele instante. Além disso, o crescimento da população está sujeito às taxas de natalidade e mortalidade, sendo descrito matematicamente por:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t), \quad (3.1)$$

onde $x(t)$ representa a população e r a taxa de crescimento ou declínio, $r > 0$ ou $r < 0$, respectivamente.

Para obter a solução da EDO (Eq. 3.1), vamos utilizar o método de separação de variáveis e depois integrar a equação. Dessa forma, $\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \iff \frac{dx(t)}{dt} \frac{1}{x(t)} = r$. Assim,

$$\int \frac{1}{x(t)} \frac{dx(t)}{dt} dt = \int r dt \iff \ln(|x(t)|) = rt + C.$$

Considerando $x(t) > 0$, obtemos $x(t) = e^{rt} \cdot e^C = \mathcal{K} e^{rt}$, onde \mathcal{K} é uma constante positiva. Considerando a condição inicial $x(0) = x_0 > 0$, obtemos a seguinte solução:

$$x(t) = x_0 e^{rt}. \quad (3.2)$$

Para obtermos uma equação de diferenças, através do modelo de Malthus, usaremos Δx e Δt para indicar a variação do valor de x e t , visto que a equação discreta obtida a partir das

variações de x é equivalente ao modelo contínuo de Malthus. Desse modo,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \approx rx(t), \quad (3.3)$$

ou seja, $x(t+\Delta t) = x(t) + rx(t)\Delta t$. Tomando $\Delta t = 1$, $\alpha = 1 + r$ na expressão anterior, obtemos a relação de recursão que descreve o modelo de Malthus discreto:

$$x_{t+1} = \alpha x_t. \quad (3.4)$$

A Eq. 3.4 é uma equação de diferenças linear homogênea de ordem 1 e a sua solução é dada pela Eq. 2.5, que foi apresentada no Capítulo 2. Como estamos considerando $t > 0$, obtemos a seguinte solução para a equação discreta de Malthus:

$$x(t) = \alpha^t x_0. \quad (3.5)$$

3.1.1 APLICAÇÃO

A seguir apresentamos uma aplicação envolvendo a equação de diferenças (Eq. 3.4) obtida através do modelo de Malthus.

Um banco corrige a dívida do cartão de crédito de seus clientes com a taxa de 15% ao mês. Um cliente não pagou a fatura de um dado mês, em 2018, no valor de R\$500,00. Porém, esse cliente resolveu pagar o valor devido após exatamente três anos do início da dívida. Considerando-se a taxa do banco, e sem considerar possíveis negociações entre o cliente e o banco, qual o valor que o cliente terá que pagar para acabar com a dívida?

Para resolver o problema anterior, note que a fórmula de juros compostos é equivalente à Eq. 3.5, considerando-se $\alpha = (1 + r)$, onde $r = 15\%$ é a taxa de juros do banco, $x(t)$ é o valor da dívida no mês t , $x_0 = 500$. Assim, $x(t) = (1 + r)^t x_0$.

Como a dívida foi paga depois de 3 anos (ou seja, 36 meses), devemos calcular o valor de $x(36)$. Dessa forma $x(36) = (1 + 0,15)^{36} \cdot 500 \approx 76576$. Ou seja, uma dívida que não era muito alta (quinhentos reais) tornou-se exorbitante, simplesmente pelo fato de ser corrigida a juros composto, no valor de R\$76.576,00 (setenta e seis mil quinhentos e setenta e seis reais), depois de três anos. Esse exemplo mostra o poder do juros composto.

3.2 MODELO DISCRETO LINEAR DE ORDEM 2

Inicialmente, vamos apresentar o sistema massa-mola simples [6], que é constituído por um corpo de massa m acoplado a uma mola com fator restaurador κ (constante de deformação), enquanto a outra extremidade está ligada a um ponto fixo conforme mostrado na Figura (3.1). Se tal sistema encontra-se em equilíbrio, a posição da massa é denotada por $(x = 0)$ e, toda vez que a massa é deslocada em relação a esse ponto, surge uma força restauradora $F = -\kappa x$, que tenta trazê-la de volta à situação inicial. As posições $-X_M$ e X_M representam, respectivamente,

a mola comprimida e a mola estendida. Quando o bloco de massa m é deslocado em relação à posição inicial e solto em seguida, o sistema passa a oscilar em torno da posição de equilíbrio.

A segunda lei de Newton pode ser usada para analisar esse sistema:

$$F=ma=-\kappa x \iff m \frac{dx^2}{dt^2} = -\kappa x \iff \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{-\kappa}{m} x. \quad (3.6)$$

Na equação anterior (Eq. 3.6), suponha que $\alpha = \frac{-\kappa}{m} > 0$. Dessa forma, obtemos a seguinte solução

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{\alpha}t} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha}t}. \quad (3.7)$$

Se $\alpha = \frac{-\kappa}{m} < 0$, então a solução da Eq. 3.6 é dada por

$$x(t) = c_1 \cos(\sqrt{-\alpha}t) + c_2 \sin(\sqrt{-\alpha}t). \quad (3.8)$$

Para discretizar a equação diferencial que modela o sistema massa-mola simples, usaremos o desenvolvimento de Taylor. Vamos supor que a função $x(t)$ tem derivadas até a ordem 4.

Assim,

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t x'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} x''(t) + \frac{(\Delta t)^3}{3!} x'''(t) + E_1, \quad (3.9)$$

$$x(t-\Delta t) = x(t) - \Delta t x'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} x''(t) - \frac{(\Delta t)^3}{3!} x'''(t) + E_2, \quad (3.10)$$

onde $E_1 = C_1(\Delta t)^4$ e $E_2 = C_2(\Delta t)^4$, C_1 e C_2 são constantes. Dessa forma, somando $x(t+\Delta t)$ e $x(t-\Delta t)$, obtemos a seguinte aproximação de ordem 2:

$$x''(t) \approx \frac{x(t-\Delta t) - 2x(t) + x(t+\Delta t)}{(\Delta t)^2}. \quad (3.11)$$

Portanto, a forma discretizada da Eq. 3.6 é dada por

$$X_{t-1} - 2X_t + X_{t+1} = \alpha(\Delta t)^2 X_t, \quad (3.12)$$

onde $X_{t-1} \approx x(t-\Delta t)$, $X_t \approx x(t)$ e $X_{t+1} \approx x(t+\Delta t)$. Assim, chegamos a seguinte equação de

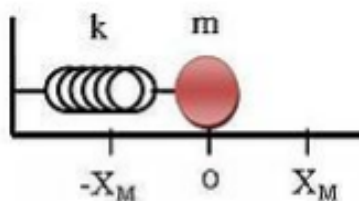


Figura 3.1: Sistema massa-mola

diferenças linear homogênea de ordem 2 obtida por meio do sistema massa-mola:

$$X_{t-1} - [2 + \alpha(\Delta t)^2]X_t + X_{t+1} = 0. \quad (3.13)$$

Agora vamos utilizar a aproximação para a derivada segunda de uma função, dada pela Eq. 3.11, para obter a forma discreta da equação de Poisson unidimensional (veja, por exemplo, a referência [3]):

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (3.14)$$

com condições de contorno dadas por $u(a) = u_0$ e $u(b) = u_N$, onde u_0 e u_N são valores conhecidos, $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$ e f é uma função dada.

Primeiramente, vamos considerar $N+1$ pontos igualmente espaçados no intervalo $[a, b]$, $x_i = x_0 + ih$, $0 \leq i \leq N$, onde $h = \frac{b-a}{N}$, $x_0 = a$ e $x_N = b$. Agora, usando a notação: $u_{i-1} \approx u(x_0 + (i-1)h)$, $u_i \approx u(x_0 + ih)$ e $u_{i+1} \approx u(x_0 + (i+1)h)$, obtemos a seguinte aproximação para a equação de Poisson, em um ponto $x = x_i$,

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) \iff -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (3.15)$$

Levando em consideração as condições de contorno u_0 e u_N , o sistema de equações lineares contendo $N-1$ incógnitas, u_1, u_2, \dots, u_{N-1} , pode ser resolvido pelo Método de Jacobi (veja [1]), que tem matriz de iteração tridiagonal, C , de ordem $n = N-1$. Tal matriz tem elementos nulos na diagonal principal ($c_{ii} = 0$), elementos iguais a $\frac{1}{2}$ tanto na diagonal inferior quanto na diagonal superior, ou seja, ($c_{i,i-1} = \frac{1}{2} = c_{i,i+1}$) e elementos iguais a zero nas demais posições. Na Subseção 3.2.2, mostraremos que todos os autovalores da matriz de iteração C têm módulo menor do que 1. Portanto, o Método de Jacobi será convergente.

3.2.1 APLICAÇÃO 1

Na equação associada ao sistema massa-mola (Eq. 3.6), considere as seguintes condições iniciais $x(0) = x(t_0) = x(0) = 0$ e $x'(0) = 1$. Além disso, suponha que $\alpha = -0.25$. Dessa forma, a solução desse problema de valor inicial é dada por $x(t) = 2 \sin(\frac{t}{2})$.

Considere a equação de diferenças de ordem 2 (Eq. 3.13), com condições iniciais $X_0 = 0$ e $X_1 = \Delta t$. De acordo com as informações que estão na Subseção 2.2.3 da Seção 2.2 do Capítulo 2, obtemos a seguinte solução

$$X(n) = 8 \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{16 - (\Delta t)^2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{onde } \sin(\theta) = \frac{\Delta t \sqrt{16 - (\Delta t)^2}}{8}.$$

No problema de valor inicial (PVI) de segunda ordem, vamos supor que a variável real t pertença ao intervalo $I = [0, T]$. Considerando m pontos igualmente espaçados no intervalo I , $\Delta t = \frac{T}{m}$. Dessa forma, podemos aproximar a solução analítica do PVI, que é dada por $x(t) = 2 \sin(\frac{t}{2})$, utilizando a forma discreta $X(m) = 8 \frac{\sin(m\theta)}{\sqrt{16 - (\Delta t)^2}}$. Lembre-se de que $X(m) \approx x(t_0 + m\Delta t)$.

Como exemplo, seja $T = 2.5em = 1000$. Assim, $\Delta t = 0.0025ex(2.5) = 1.897969239$ será aproximado por $X_m = X(1000) = 1.8979696607$. Note que $|X_m - x(2.5)| \approx 0.42 \times 10^{-6}$.

3.2.2 APLICAÇÃO 2

Considere a matriz de iteração, C , associada ao Método de Jacobi aplicado ao sistema de equações lineares (Eq. 3.15) correspondente à discretização da equação de Poisson. Vimos que a matriz C é tridiagonal e $c_{ii} = 0, c_{i,i-1} = \frac{1}{2} = c_{i,i+1}$.

Vamos mostrar que todos os autovalores da matriz C têm módulo menor do que 1. Lembremos de que β é um autovalor de C se, e somente se, $p(\beta) = \det(C - \beta I) = 0$, onde I é a matriz identidade de ordem n e p é o polinômio característico da matriz C . Como a matriz C é simétrica e possui elementos que são números reais, então todos os seus autovalores são números reais. De fato, suponha que β seja um autovalor de C com autovetor não nulo $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$ (vetor coluna), que possui coordenadas pertencentes ao conjunto dos números complexos. Assim, $Cv = \beta v$. Considerando o conjugado complexo de cada coordenada do autovetor v , obtemos o vetor \bar{v} . Note que $\bar{v}^t v = |v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_n|^2 > 0$ e $\bar{v}^t Cv$ é um número complexo. Como C é simétrica, então $\bar{\beta} = \frac{\bar{v}^t Cv}{\bar{v}^t v} = \frac{v^t C^t \bar{v}}{v^t \bar{v}} = \frac{v^t C v}{v^t \bar{v}}$. Dessa forma, $\bar{\beta} = \beta$, pois $v^t C v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i C_{ij} \bar{v}_j$; logo $\bar{v}^t C v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{v}_i C_{ij} v_j = v^t C v$. Portanto, β é um número real.

Podemos obter uma fórmula de recorrência associada ao cálculo dos autovalores da matriz tridiagonal C de ordem $n, n \geq 2$. Para isso, usamos o desenvolvimento de Laplace, pela primeira linha, aplicado ao cálculo do determinante $D_n = \det(C - \beta I)$. Dessa forma, obtemos a fórmula de recorrência de segunda ordem dada por:

$$D_n + \beta D_{n-1} + 0,25 D_{n-2} = 0, \quad (3.16)$$

com condições iniciais $D_0 = 1, D_1 = -\beta$.

Observação: Supondo que $D_n = A \lambda^n$, onde $A \neq 0$, obtemos o polinômio característico de grau 2 associado à equação $D_n + \beta D_{n-1} + 0,25 D_{n-2} = 0$. As raízes desse polinômio são dadas por: $\lambda_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}}{2}$.

Suponha que $|\beta| > 1$. Dessa forma, λ_1 e λ_2 são raízes reais distintas. Portanto, de acordo com o que vimos na Seção 2.2 do Capítulo 2, a solução da equação de diferenças $D_n + \beta D_{n-1} + 0,25 D_{n-2} = 0$, com condições iniciais $D_0 = 1, D_1 = -\beta$, é dada por

$$D_n = A \left(\frac{\sqrt{\beta^2 - 1} - \beta}{2} \right)^n + B \left(\frac{-\sqrt{\beta^2 - 1} - \beta}{2} \right)^n, \quad (3.17)$$

onde $A = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right)$ e $B = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right)$.

Observação: Se $\beta > 1$, então $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} > 1$. Dessa forma, a solução da equação de diferenças de

ordem 2 pode ser reescrita como segue:

$$D_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (\sqrt{\beta^2 - 1})^n \left[\left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} + 1 \right)^{n+1} - \left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} - 1 \right)^{n+1} \right]. \quad (3.18)$$

Portanto, $D_n \neq 0$, se $\beta > 1$, porque $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} + 1 > \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} - 1 > 0$.

Observação: Se $\beta < -1$, então $1 + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} < 0$. Dessa forma, a solução da equação de diferenças de ordem 2 pode ser reescrita como segue:

$$D_n = \frac{1}{2^{n+1}} (\sqrt{\beta^2 - 1})^n \left[\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right)^{n+1} - \left(-1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right)^{n+1} \right]. \quad (3.19)$$

Portanto, $D_n > 0$, se $\beta < -1$, porque $1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} > -1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} > 0$.

Por outro lado, de acordo com o que vimos na Subseção 2.2.2, se $|\beta| = 1$, então as raízes λ_1 e λ_2 são iguais e, portanto, a solução da equação de diferenças $D_n + \alpha D_{n-1} + 0,25 D_{n-2} = 0$, com condições iniciais $D_0 = 1, D_1 = -\beta$, é dada por

$$D_n = \left(\frac{-\beta}{2} \right)^n + n \left(\frac{-\beta}{2} \right)^n = (n+1) \left(\frac{-\beta}{2} \right)^n. \quad (3.20)$$

Dessa forma, $D_n \neq 0$.

De acordo com as informações anteriores, o determinante D_n só vai dar zero se considerarmos $|\beta| < 1$. Assim, os valores absolutos dos autovalores da matriz C são menores do que 1, onde C é a matriz de iteração do Método de Jacobi aplicado ao sistema de equações lineares (Eq. 3.15) correspondente à discretização da equação de Poisson.

3.3 EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA NÃO LINEAR

O texto apresentado a seguir foi baseado no artigo de Assis et al. [2]. Vamos falar um pouco do Modelo de Verhulst (veja, por exemplo, [3]) e do modelo de Beverton-Holt [4].

O modelo de Verhulst foi proposto pelo sociólogo Pierre François Verhulst. Ao contrário do modelo de Malthus, esse modelo prevê limitações quanto ao crescimento de uma determinada população. À medida que o tempo cresce, a população tende a um valor limite, que está condicionado à abundância de recursos para manutenção e sobrevivência dessa população. Para deduzirmos o modelo de Verhulst, podemos, inicialmente, considerar uma taxa de variação da população semelhante a do modelo de Malthus e adicionar um termo de mortalidade. Esse termo representará um processo de saturação do meio, isto é, a possibilidade de escassez de recursos naturais, indicando que, à medida que a população aumenta, as dificuldades dos indivíduos da população para encontrar recursos para sobreviver também tendem a aumentar. Considerando

tais hipóteses biológicas, o modelo de Verhulst é dado pela equação

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(t) - \frac{\alpha x^2(t)}{K} = \alpha x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right), \quad (3.21)$$

onde o termo matemático $\frac{\alpha x^2(t)}{K}$ representa a mortalidade dos indivíduos da população devido à saturação do meio, $x(t)$ a população, α a taxa de crescimento populacional e K representa a capacidade de suporte ou nível de saturação, ou seja, trata-se do número máximo de indivíduos mantidos pelos recursos naturais disponíveis.

Observe que a Eq. 3.21 pode ser resolvida por separação de variáveis e observando que $\frac{K}{x(K-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{K-x}$. Supondo que $K > x$, obtemos a seguinte solução para o modelo contínuo de Verhulst:

$$x(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0) e^{-\alpha t}}, \quad (3.22)$$

onde x_0 é o tamanho da população no tempo $t_0 = 0$.

Através do modelo contínuo de Verhulst, chegaremos a uma equação de diferenças, que conhecemos como modelo de Beverton-Holt. A dinâmica do crescimento populacional no modelo de Beverton-Holt difere da dinâmica do modelo discreto de Verhulst pois, no modelo de Beverton-Holt a taxa de reprodução ocorre em tempo discreto e, no modelo discreto de Verhulst, a reprodução ocorre continuamente no tempo quando o crescimento depende da densidade, porém, com medições feitas em intervalos regulares Δt . Dessa forma, tomando a Eq. 3.22, podemos obter a equação de diferenças que mostra o tamanho da população em um dado tempo t , para o modelo contínuo de Verhulst. Assim, a partir de $x(t)$ e após um intervalo Δt , o tamanho da população é dado por:

$$x(t_0 + \Delta t) = \frac{K x(t_0)}{x(t_0) + [K - x(t_0)] e^{-\alpha \Delta t}}. \quad (3.23)$$

A partir da equação anterior (Eq. 3.23) e lembrando que $t_0 = 0$, obtemos a seguinte equação de diferenças:

$$x_{t+1} = \frac{K x_t}{x_t + [K - x_t] e^{-\alpha \Delta t}}, \quad (3.24)$$

em que $\alpha e^{-\alpha \Delta t}$ são constantes.

Considerando $e^{-\alpha \Delta t} = r^{-1}$, obtemos a Equação de Beverton-Holt (Eq. 2.35) dada na Seção 2.3 do Capítulo 2. De acordo com o que foi apresentado naquela seção, a solução da equação de diferenças do modelo de Beverton-Holt é dada por:

$$x(t) = \frac{K x_0}{x_0 + (K - x_0) r^{-t}}, \quad t \geq 0, t \in \mathbb{N}. \quad (3.25)$$

Observação: A equação de diferenças (Eq. 3.24), considerando $e^{-\alpha \Delta t} = r^{-1}$, também pode

ser escrita da seguinte forma: $x_{t+1} = \frac{r x_t}{1 + \frac{(r-1)x_t}{K}}$.

Aplicações dos modelos discretos de Malthus, de Verhulst e de Beverton-Holt podem ser

encontradas no trabalho de Assis et al. [2]. De acordo com os autores daquele trabalho, foram realizados ajustes de modelos discretos unidimensionais lineares e não lineares utilizando dados da dinâmica de contágio e mortalidade do coronavírus COVID-19 na Itália e no Brasil. Os modelos discretos foram ajustados por meio do método dos quadrados mínimos e calculando-se o coeficiente de determinação para avaliar a qualidade dos ajustes em cada um dos modelos.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo base a apresentação de um estudo introdutório sobre a teoria de equações de diferenças.

O segundo ponto especial deste trabalho foi o estudo relacionado à discretização de uma equação diferencial e sua conexão com as equações de diferenças. Percebemos que cada equação diferencial ordinária possui uma respectiva equação de diferenças. Isso foi mostrado a partir do terceiro capítulo desse trabalho, onde foram apresentados vários exemplos de aplicação em diferentes áreas, tais como: Biologia, Economia, Física e Matemática.

Toda a teoria que foi desenvolvida neste trabalho teve como base os livros, o artigo e as notas de aula que estão listados nas referências bibliográficas.

Um dos pontos desafiadores de escrever este trabalho está relacionado ao esforço que tivemos ao consultar diferentes referências bibliográficas para conseguir abordar todos os temas presentes na monografia. Porém, acreditamos que o esforço foi recompensador, porque acreditamos que esse trabalho pode ser o ponto inicial para quem quer ensinar ou aprender os conceitos básicos de equações de diferenças.

Obviamente não se cobriram todos os tópicos dessa teoria, os quais poderão ser estudados em um trabalho futuro.

Diante de tudo que foi mostrado e dos objetivos gerais propostos, acreditamos ter concluído com êxito este trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Almeida, C. G. de: *Cálculo Numérico*. Curso de Licenciatura em Matemática – PARFOR. CEaD, Universidade Federal de Uberlândia, 2015.
- [2] Assis, L. M. E., Mendonça, A. S. e Assis, R. A.: *Ajuste de curvas utilizando dados do coronavírus COVID-19 e sistemas dinâmicos discretos*. *Biomatemática*, (30):93–110, 2020. ISSN 1679-365X.
- [3] Bassanezi, R. C. e Jr., W. C. F.: *Equações Diferenciais com Aplicações*. Harbra Ltda., São Paulo, 1998.
- [4] Beverton, R. J. H. e Holt, S. J.: *On the dynamics of exploited fish populations*, vol. 19. Fishery Investigations, série II, 1ª ed., 1957.
- [5] Elaydi, S. N.: *An Introduction to Difference Equations*. Springer-Verlag, New York, 2ª ed., 1999.
- [6] Halliday, D., Resnick, R. e Krane, S. K.: *Fundamentos de Física*, vol. 2. LTC, Rio de Janeiro, 9ª ed., 2014.
- [7] Konzen, P. H. A.: *Equações a Diferenças*. Notas de aula, 2021.