

IGOR MATHEUS MOREIRA DA SILVA SOUSA

**Estudo fluidodinâmico em regime laminar de escoamentos
em uma região anular cilíndrica com movimento angular**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2021

IGOR MATHEUS MOREIRA DA SILVA SOUSA

**Estudo fluidodinâmico em regime laminar de escoamentos
em uma região anular cilíndrica com movimento angular**

Projeto de pesquisa apresentado para disciplina
de Projeto de Conclusão de Curso submetido à
Faculdade de Engenharia Mecânica – FEMEC-
UFU para obter o título de BACHAREL em
Engenharia Aeronáutica.

Orientadora: Prof. Dra. Yanne Novais Kyriakidis

Uberlândia, 4 de Novembro de 2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado força e discernimento para encarar essa aventura que é a vida. Também agradeço a minha família, especialmente à minha mãe Aline Graciele e à minha falecida avó Maria Neusa por terem acreditado na importância dos meus estudos.

Não obstante, eu desejo agradecer imensamente a Professora Dra. Yanne Novais Kyriakids, pelo trabalho e apoio profissional dado nestes últimos meses.

Desejo também agradecer a Universidade Federal de Uberlândia e a Faculdade de Engenharia Mecânica, pela oportunidade de realizar o sonho da minha vida. Ademais, ao LTAD-UFU que me fez vivenciar o dia a dia em um ambiente de trabalho, à UFU Racing Formula Team por ter me dado os primeiros ensinamentos sobre o andamento de projetos e a necessidade de se trabalhar em equipe dentro da engenharia.

Em específico, gostaria de agradecer aos meus amigos: Mateus Cruz, Fábio Machado, Gabriel Mazutti, Henrique Vilaça e Matheus Pfeifer por sempre me proporcionarem suporte e momentos divertidos ao longo dessa incrível jornada acadêmica.

Finalmente, gostaria de agradecer à Banca Examinadora, pelo tempo de trabalho dedicado.

RESUMO

Dentro do cenário de expansão tecnológica, com as novas possibilidades de tratativas geradas com os avanços computacionais, o estudo de casos particulares de fenômenos físicos se fez cada vez mais viável. A área de Mecânica dos Fluidos é uma das que mais necessita de estudos para entendimentos destes fenômenos pela necessidade de, didaticamente, analisar e prever consequências e causas de comportamentos físicos entre fluido e estrutura. Dessa forma, o presente trabalho apresentou uma análise de Fluidodinâmica Computacional (CFD) de um caso particular de escoamento laminar, sendo este confinado, com movimento angular, preenchido com um fluido isotérmico e incompressível em uma região anular cilíndrica. Foram feitos quatro estudos de casos com a variação das velocidades angulares aplicadas às paredes dos cilindros. O primeiro caso tratou da parede externa rotacionando e a interna estacionária, o segundo da parede externa estacionária e a interna rotacionando, o terceiro das paredes rotacionando em mesmo sentido e o quarto das paredes rotacionando em sentidos opostos. Para a análise do caso, foi feita uma comparação da solução analítica, encontrada pelas equações de conservação de quantidade de movimento, com a solução numérica, obtida utilizando de um *software* Fluent. A solução analítica aplicou as condições de contorno impostas às paredes, sendo possível então encontrar as soluções que representassem o perfil de velocidade dentro da região anular e comparar com as soluções numéricas. Nesse sentido, o estudo principal deste trabalho foi voltado para o desenvolvimento do método utilizado para representar o escoamento dentro da região anular cilíndrica, sendo constituído por etapas de construção de geometria, preenchimento de malha, inserção das condições de contorno e a simulação propriamente dita. O trabalho apresentou satisfatórios resultados encontrados pela simulação dos casos quando comparados a solução analítica. Nesse sentido, a utilização de uma malha que gerasse pouco esforço computacional fez com que o perfil de velocidade fosse muito semelhante ao perfil analítico, com desvios médios menores que 2%. Dessa maneira, o principal ganho obtido com este trabalho se dá pelo aproveitamento das ferramentas gráficas do Fluent para ajudar a representar soluções de um ponto didático dos que são utilizados na graduação.

Palavras-chave: Computacional Dinâmica dos Fluidos, Mecânica dos Fluidos, Escoamento Laminar, Escoamento Anular, Fenômenos de Transporte.

ABSTRACT

Within the scenario of technological expansion, new possibilities for dealings generated with computational advances, the study of particular cases of physical phenomena has become increasingly viable. The Fluid Mechanics area is one of the areas that most needs studies to understand these phenomena, due to the need to didactically analyze and predict the consequences and causes of physical behavior between fluid and structures. Thus, the present work presented a Computational Fluid Dynamics (CFD) analysis of a particular case of laminar flow, which is confined, with angular movement, filled with an isothermal and incompressible fluid in an annular cylindrical region. Four case studies were carried out with the variation of angular velocities applied to the cylinder walls. The first case dealt with the external wall rotating and the internal stationary, the second with the external wall stationary and the internal rotating, the third of the walls rotating in the same direction and the fourth of the walls rotating in opposite directions. For the analysis of the case, a comparison of the analytical solution, found by the mass and momentum conservation equations, with the numerical solution, obtained using a Fluent software, was made. The analytical solution applied the boundary conditions imposed on the walls, and it was then possible to find the solutions that represented the velocity profile within the annular region and compare with the numerical solutions. In this sense, the main study of this work was focused on the development of the method used to represent the flow within the annular cylindrical region, consisting of steps of geometry construction, mesh filling, insertion of boundary conditions and the simulation itself. The work presented satisfactory results found by simulating the cases. In this sense, the use of a mesh that generated little computational effort made the velocity profile very similar to the analytical profile, with deviations of less than two percent. Thus, the main gain obtained with this work is due to the use of Fluent's graphic tools to help represent solutions from a didactic point of those used in graduation.

Keywords: Computational Fluid Dynamics, Fluid Mechanics, Laminar Flow, Annular Flow, Transport Phenomena.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Daniel Bernoulli	12
Figura 2. Exemplo de uma região cilíndrica anular e escoamento laminar tangencial de um fluido incompressível.....	13
Figura 3. Cluster Sequoia IBM	20
Figura 4. Linhas de velocidade no contorno de uma aeronave militar	21
Figura 5. Gradiente de pressão existente nas asas de uma aeronave comercial	21
Figura 6. Contornos de tensão hidrostática em uma região de fratura de um componente de riser de petróleo.....	21
Figura 7. Contornos de pressão que influenciam um tubo de riser.....	22
Figura 8. Linhas de velocidade (a) e contornos de pressão (b) ao redor de um automóvel....	22
Figura 9. Principais elementos na modelagem de um problema em CFD.....	23
Figura 10. Exemplo de malha 2D estruturada	24
Figura 11. Exemplo de malha não estruturada	24
Figura 12. Exemplo de malha híbrida.....	25
Figura 13. Método de volumes finitos aplicado a uma malha estruturada	26
Figura 14. Vista frontal do espaço anular	29
Figura 15. Perspectiva isométrica da região anular	29
Figura 16. Método de Edge Sizing para divisão dos elementos nas paredes.....	30
Figura 17. Setup inicial da malha	30
Figura 18. Vista frontal da disposição dos elementos da malha com método de divisões	31
Figura 19. Perspectiva isométrica do setup de malha estipulado	31
Figura 20. Exemplo de critério de parada para as simulações.....	34
Figura 21. Localização da seção transversal utilizada para análise dos dados	35
Figura 22. Desvios médios dos resultados para as malhas de 111 mil elementos dos casos..	38
Figura 23. Gradiente de pressão total relativa (a) numa seção transversal, (b) numa seção longitudinal, encontrado para os casos	40
Figura 24. Caso 1: vetores para velocidade na seção transversal	41
Figura 25. Caso 1: Corte do perfil de velocidade na seção transversal	43
Figura 26. Caso 2: vetores de velocidade na seção transversal	43
Figura 27. Caso 2: Corte do perfil de velocidade na seção transversal	45
Figura 28. Caso 3: vetores de velocidade na seção transversal	45
Figura 29. Caso 3: Corte do perfil de velocidade na seção transversal	46
Figura 30. Caso 4: vetores de velocidade na seção transversal	47
Figura 31. Caso 4: Corte do perfil de velocidade na seção transversal	49
Figura 32. Escoamento de um fluido em um volume de controle	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Condições de contorno CC1 e CC2 impostas para os casos	18
Tabela 2. Constantes C1 e C2 encontradas para os casos	19
Tabela 3. Equações da velocidade encontradas para os casos.	19
Tabela 4. Condições nas paredes para cada caso	33
Tabela 5. Malhas utilizadas para testes de independência	35
Tabela 6. Desvios médios entre as velocidades simuladas e as velocidades analíticas para as malhas do caso 1	36
Tabela 7. Desvios médios entre as velocidades simuladas e as velocidades analíticas para as malhas do caso 2	36
Tabela 8. Desvios médios entre as velocidades simuladas e as velocidades analíticas para as malhas do caso 3	37
Tabela 9. Desvios médios entre as velocidades simuladas e as velocidades analíticas para as malhas do caso 4	38
Tabela 10. Caso 1: dados do perfil de velocidade calculados	42
Tabela 11. Caso 2: dados do perfil de velocidade encontrados	44
Tabela 12. Caso 3: dados do perfil de velocidade encontrados	46
Tabela 13. Caso 4: dados do perfil de velocidade encontrados	48

LISTA DE SÍMBOLOS

a - aceleração

C_1 – constante de integração 1

C_2 – constante de integração 2

F_i – forças inerciais

F_c – forças de campo

F_s – forças de superfície

g – aceleração da gravidade

g_x – aceleração da gravidade em x

g_y – aceleração da gravidade em y

g_z – aceleração da gravidade em z

I – tensor unitário

K – constante gravitacional

m – massa

\dot{M} *acúmulo* – quantidade de massa que acumula

\dot{M} *entradas* – quantidade de massa que entra

\dot{M} *Saídas* – quantidade de massa que sai

\dot{M} *Geração* – quantidade de massa gerada

\dot{M} *Consumo* – quantidade de massa consumida

n – vetor normal

P – pressão

r – distância radial

R – raio total

R_I – raio interno

R_2 – raio externo

S – área de superfície

T – tensor de superfície

t – tempo

v_y – velocidade em y

v_x – velocidade em x

v_z – velocidade em z

v_r – velocidade radial

v_θ – velocidade angular

v_φ – velocidade cilíndrica

v_c – volume de controle

Δx – distância em x

Δy – distância em y

Δz – distância em z

∇ - operador nabla

θ – direção circunferencial em coordenadas cilíndricas/polar em coordenadas esféricas

κ – constante de representação do raio

μ – viscosidade dinâmica

ρ – pressão

τ – tensão dinâmica

φ – direção azimutal em coordenadas esféricas

Ω – velocidade angular

ω – velocidade angular

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	12
1. INTRODUÇÃO	12
CAPÍTULO 2	15
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1. escoamento de fluido confinado em espaço anular com velocidade angular	15
2.2. Fluidodinâmica computacional (CFD)	19
2.3. Passos para a análise de CFD	22
2.3.1. <i>Pré-processamento</i>	23
2.3.2. <i>Processamento</i>	25
2.3.3. <i>Pós-processamento</i>	27
CAPÍTULO 3	28
3. METODOLOGIA	28
3.1. Geometria	28
3.2. Malha	29
3.3. Setup de simulação, condições de contorno e métodos de solução	31
3.4. Teste de independência de malha	34
CAPÍTULO 4	39
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	39
4.1. Caso 1: perfil de velocidade para a parede externa rotacionando	40
4.2. Caso 2: perfil de velocidade para parede interna rotacionando	43
4.3. Caso 3: perfil de velocidade para as paredes externa e interna rotacionando com velocidades angulares idênticas em módulo e mesmo sentido	45
4.4. Caso 4: perfil de velocidade para as paredes externa e interna rotacionando com velocidades angulares idênticas em módulo e sentidos opostos	47
CAPÍTULO 5	50
5. CONCLUSÃO	50
5.1. Sugestões para trabalhos futuros	50
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	51
APÊNDICE A – Equação do Movimento	53
APÊNDICE B – Equação da Continuidade	55

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

Na história da civilização, sempre houve uma busca incessante pelo entendimento dos fenômenos físicos naturais. Cultivando-se, assim, um anseio pelo homem de evoluir, de buscar por ferramentas e recursos que expliquem o mundo à sua volta através da ciência. Um grande exemplo de cientista foi Daniel Bernoulli, visto como na Fig. 1, matemático e físico suíço do século 18, que promoveu incontáveis avanços para a humanidade e, em especial, para a ciência dos fluidos. Ele foi responsável pelo desenvolvimento de uma das equações mais importantes da física, a equação da continuidade que pode explicar a relação entre velocidade e pressão de um fluido. Com seus estudos, hoje é possível entender melhor mecânicas que permeiam os fluidos, o que dá base para desenvolvimento de tecnologias de alto nível - como a asa de um avião ou um *riser* de petróleo.



Figura 1. Daniel Bernoulli. Fonte: Brasil Escola, 2016.

A tecnologia atual, com computadores avançados, proporciona cada vez mais um ambiente para que os estudos de mecânica dos fluidos sejam tratados de forma mais rápida, eficiente, exata e precisa. Os atuais *softwares* são capazes de simular condições fidedignas de eventos reais, coletando dados importantes para analisar previamente a natureza de um fenômeno físico, de maneira a evitar que acidentes catastróficos possam ocorrer no andamento de um projeto de engenharia. Uma das tecnologias utilizadas para análise se chama *Computational Fluid Dynamics* (CFD), que se trata de um artifício computacional capaz de desenvolver simulações de condições fluidodinâmicas.

Mesmo com grandes facilidades e evoluções em CFD, os estudos de fenômenos físicos ficam cada vez mais específicos, o que faz alguns problemas de difícil resolução necessitarem de muita abstração para serem entendidos. O histórico de resolução de problemas de fluidodinâmica se torna importante, o que traz embasamento para avanço de novos estudos. É com fundamentações de cientistas antigos como Bernoulli e projetos modernos de vários outros cientistas da área de mecânica dos fluidos, que a solução de diversos problemas reais se torna possível.

Dentro da engenharia, existem diferentes tipos de casos que podem ser tratados através de CFD, como os que focam em estudos térmicos, interação fluido-estrutura, escoamentos confinados etc. Nesse sentido, diferentes áreas precisam de estudos singulares, de tratamento, condições de contorno, ferramentas de simulações e teorias para análises diferentes entre si.

Os trabalhos que envolvem escoamentos confinados são amplamente utilizados para explicar e controlar diversas situações. Com essa perspectiva, a constante evolução das pesquisas dentro da área de Mecânica dos Fluidos e Fenômenos de Transporte contribui para que haja avanço em vários sistemas mecânicos, por exemplo, o escoamento de fluido existente dentro de um motor a pistão, o escoamento de ar-condicionado dentro de uma cabine de avião, o escoamento de petróleo dentro de um *riser*, entre outros. São estudos que necessitam de condições de contorno cada vez mais apuradas, para que valores como velocidade, pressão, tensão sejam apurados com precisão e exatidão.

No meio de diversos estudos de caso dos escoamentos confinados, existe um em particular que foca no conhecimento de como um fluido se comporta dentro de uma região anular cilíndrica. Nesse sentido, um grande exemplo prático que envolve um escoamento do tipo anular cilíndrico é o viscosímetro rotacional, um dispositivo utilizado para medir a viscosidade de fluidos, através da aplicação de um torque conhecido nas paredes do cilindro.

Um dos mais conhecidos viscosímetros rotacionais é o de *Couette-Hatschek*, por ser um dispositivo preciso e de fácil utilização. Este viscosímetro se trata de um exemplo de caso bastante específico: o de um escoamento existente dentro de uma região anular, a qual está submetida também a uma velocidade angular em sua parede externa, como mostra a Fig. 2.

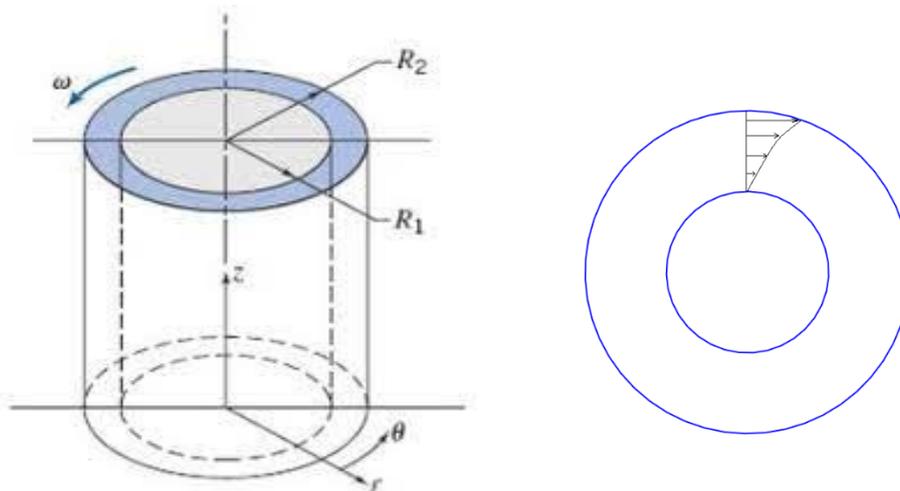


Figura 2. Exemplo de uma região cilíndrica anular e escoamento laminar tangencial de um fluido incompressível. Fonte: Bird, 2004.

Assim como o viscosímetro de *Couette-Hatschek*, outros viscosímetros rotacionais utilizam o movimento angular de uma das paredes para determinar as propriedades reológicas do fluido.

Dito isso, o presente trabalho tem como objetivo comparar os resultados, de perfil de velocidade, do método numérico com os resultados da solução analítica de um fluido newtoniano e incompressível em regime laminar, permanente e isotérmico frente quatro configurações distintas das paredes do espaço anular:

1. Parede externa rotacionando;
2. Parede interna rotacionando;

3. Paredes externa e interna rotacionando com velocidades angulares idênticas em módulo e mesmo sentido;
4. Paredes externa e interna rotacionando com velocidades angulares idênticas em módulo e sentidos opostos.

CAPÍTULO 2

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No que compete à Mecânica dos Fluidos, as Equações de Transporte caracterizam-se por equações complexas que são capazes de descrever comportamentos de transporte de quantidade de movimento, calor e massa de fenômenos físicos recorrentes. De acordo com Fox e McDonald (2001), a maioria dos escoamentos possuem solução para equações, porém são complexas por apresentar derivadas parciais em relação ao tempo e ao espaço.

Entretanto, em situações específicas, as Equações de Transporte podem ter sua complexidade diminuída, sendo tratadas de forma mais simplificada até se encontrar uma solução analítica plausível para a representação do problema físico. Nesse sentido, fica possível a obtenção de perfis de interesse apenas com artifícios analíticos, sem a necessidade de métodos numéricos computacionais (VIANNA, 2001).

Para o trabalho em questão, serão tratados quatro casos de escoamento confinado, sendo que a variação é o tipo de movimento aplicado às paredes do cilindro. Suas soluções analíticas partem da Equação do Movimento e os casos específicos são tratados conforme as condições singulares pertinentes.

O desenvolvimento de estudos tanto analíticos quanto numéricos, dentro da mecânica dos fluidos, exige alto grau de conhecimento das principais teorias existentes, capazes de embasar, validar e justificar trabalhos atuais. Dentre as principais teorias, as que caracterizam os fenômenos de transporte de quantidade de movimento são as mais importantes para este trabalho. O desenvolvimento da Equação do Movimento e da Equação da Continuidade estão contidas nos apêndices A e B, respectivamente.

2.1. Escoamento de fluido confinado em espaço anular com velocidade angular

De maneira geral, o problema será tratado partindo-se da Equação da Quantidade de Movimento, em termos de coordenadas cilíndricas na componente angular, com a Eq. (1) a seguir:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right] = \\ = - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] + \rho g \end{aligned} \quad (1)$$

Para o estudo do escoamento em regime laminar, permanente e isotérmico de um fluido incompressível confinado em espaço anular somente com velocidade angular, pode-se fazer algumas simplificações.

Desconsideração da influência da gravidade:

$$g = 0;$$

Derivada parcial da velocidade angular em relação ao tempo é nula:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = 0;$$

Velocidade radial nula (tubos maciços):

$$v_r = 0;$$

Derivada parcial da velocidade angular em relação à posição angular é nula por causa da simetria:

$$\frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} = 0;$$

Velocidade axial nula porque as tampas do cilindro estão vedadas:

$$V_z = 0;$$

Derivada parcial da velocidade angular em relação à longitude é nula por estar sendo analisada longe das extremidades do cilindro):

$$\frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} = 0;$$

Derivada parcial da pressão em relação ao ângulo é nula:

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0;$$

Velocidade angular só varia com o raio, portanto os tensores angulares são nulos:

$$\tau_{\theta\theta} = 0$$

$$\tau_{z\theta} = 0$$

$$\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta} = 0$$

Posição radial é expressa em termos de uma porcentagem do raio externo R:

$$r = \kappa R;$$

Utilizando a Equação da Continuidade em Coordenadas Cilíndricas tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r \cdot 0) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot 0) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\rho}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (5)$$

Assim, fica perceptível que a velocidade angular não varia em relação a posição angular, dependendo apenas da posição radial.

Agora, para o problema em questão, pode-se fazer simplificações pertinentes quanto às derivadas, velocidades e tensores que são nulos. Assim sendo, o desenvolvimento da Eq. (1) resulta na Eq. (6):

$$\begin{aligned} \rho \left[0 + 0 \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} 0 + 0 \cdot 0 + \frac{0 v_{\theta}}{r} \right] = \\ = -\frac{1}{r} 0 - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial 0}{\partial \theta} + \frac{\partial 0}{\partial z} + \frac{0}{r} \right] + \rho 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tau_{r\theta}}{\partial r} = 0 \quad (7)$$

$$-\frac{1}{r^2} \frac{dr^2 \tau_{r\theta}}{dr} = 0 \quad (8)$$

$$\int dr^2 \tau_{r\theta} = \int 0 dr \quad (9)$$

$$r^2 \tau_{r\theta} = C_1 \quad (10)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{C_1}{r^2} \quad (11)$$

Agora, por definição o tensor é dado pela Eq. (12):

$$\tau_{r\theta} = -\mu \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (12)$$

Igualando as duas equações e como $v_r = 0$ pois o valor da velocidade radial é nula, tem-se o seguinte desenvolvimento:

$$-\mu \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \cdot 0 \right] = \frac{C_1}{r^2} \quad (13)$$

$$-\mu \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right] = \frac{C_1}{r^2} \quad (14)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) = -\frac{C_1}{\mu r^3} \quad (15)$$

$$\int d \left(\frac{v_\theta}{r} \right) = -\int \frac{C_1}{\mu r^3} dr \quad (16)$$

$$\frac{v_\theta}{r} = -\frac{C_1}{(-2)\mu r^2} + C_2 \quad (17)$$

Dessa maneira a Eq. (18), já integrada e simplificada para o tratamento do problema, será fundamental no estudo dos quatro casos percorridos neste trabalho.

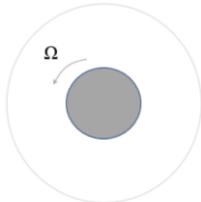
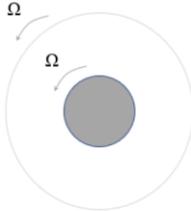
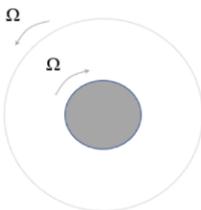
$$v_\theta = \frac{C_1}{2\mu r} + C_2 r \quad (18)$$

Para questões de conveniência matemática, o R_I (raio interno) representa uma porcentagem κ de R_2 . Nesse sentido, o raio externo, ao invés de ser denominado R_2 , será igual a R e R_I será escrito como κR .

Assim, o domínio para a variável r será $\kappa R \leq r \leq R$ (em que $0 \leq \kappa \leq 1$). Para os quatro casos, as diferenças das soluções analíticas se devem apenas às condições de contorno da Eq. (18). Dito isso, as constantes C_1 e C_2 para cada caso são obtidas conforme equacionamento a seguir.

Para cada caso há as condições de contorno (CC) de velocidade escalar, relativa as paredes do cilindro. Na tab. 1 tem-se todos os casos representados, bem como as CC's impostas.

Tabela 1. Condições de contorno CC1 e CC2 impostas para os casos. Fonte: o autor.

	CC1	CC2
 Caso 1	0	ΩR
 Caso 2	$\Omega \kappa R$	0
 Caso 3	$\Omega \kappa R$	ΩR
 Caso 4	$-\Omega \kappa R$	ΩR

Ao aplicar as condições de contorno na Eq. (18) fica possível desenvolver os valores das constantes C_1 e C_2 , necessárias para representar a equação que norteia o perfil de velocidade dos casos, contidos na tab. 2.

Tabela 2. Constantes C1 e C2 encontradas para os casos. Fonte: o autor.

	C1	C2
Caso 1	$-2\mu\Omega R^2 \frac{\kappa^2}{(1-\kappa^2)}$	$\frac{\Omega}{(1-\kappa^2)}$
Caso 2	$\frac{\Omega\kappa R}{\left[\frac{1}{2\mu\kappa R} - \frac{\kappa R}{2\mu R^2}\right]}$	$-\frac{1}{2\mu R^2} \frac{\Omega\kappa R}{\left[\frac{1}{2\mu\kappa R} - \frac{\kappa R}{2\mu R^2}\right]}$
Caso 3	0	Ω
Caso 4	$\frac{-2\Omega\kappa R}{\left(\frac{1}{2\mu\kappa R} - \frac{\kappa}{2\mu R}\right)}$	$\Omega + \frac{1}{2\mu R^2} \frac{2\Omega\kappa R}{\left(\frac{1}{2\mu\kappa R} - \frac{\kappa}{2\mu R}\right)}$

Com as constantes C1 e C2 obtidas, o desenvolvimento das equações que representam os casos é efetuado e são visualizadas na tab. 3. Com as equações a análise dos valores encontrados para a velocidade em relação a posição radial pode ser feito.

Tabela 3. Equações da velocidade encontradas para os casos. Fonte: o autor.

	v_θ
Caso 1	$\Omega R \left[\frac{1}{(1-\kappa^2)} \frac{r}{R} - \frac{\kappa^2}{(1-\kappa^2)} \frac{R}{r} \right]$
Caso 2	$\Omega R \frac{\kappa^2}{1-\kappa^2} \left[\frac{R}{r} - \frac{r}{R} \right]$
Caso 3	Ωr
Caso 4	$2\Omega R \frac{\kappa^2}{1-\kappa^2} \left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right) + \Omega r$

2.2. Fluidodinâmica computacional (CFD)

Com o avanço da tecnologia, algoritmos de computadores são comumente utilizados para desenvolver soluções de sistemas algébricos de maneira mais rápida e eficiente. Assim sendo, os estudos dentro da fluidodinâmica tornam possível representar diversos modelos teóricos através de simulações computacionais. Dessa forma, dentro de um universo de alternativas, a Fluidodinâmica Computacional (CFD) se sobressai no quesito de resultados precisos dentro de um tempo menor de projeto, por utilizar soluções de equações discretas, em vez de soluções contínuas de equações diferenciais. (SILVA, 2012)

Os métodos de simulação utilizando CFD mostram um grande progresso para os estudos por conseguir expressar graficamente problemas abstratos. Dentro dessa perspectiva, é evidente que os diversos *softwares* foram capazes de se tornarem ferramentas tão valiosas ao ponto de serem utilizadas com a mesma frequência que os métodos tradicionais analíticos ou experimentais. A principal vantagem ao se utilizar o método CFD para análise de um fenômeno

físico se dá pelo baixo custo e tempo envolvido no processo em comparação com custos de construção e manutenção de bancadas experimentais, produzindo resultados factíveis e precisos. (NORTON; SUN, 2006)

Nesse sentido, o uso de técnicas de Fluidodinâmica Computacional se estabeleceu como uma ferramenta dentro dos equações de transporte que visa resolver as Equações de Transporte, sendo utilizada para uma diversidade de problemas, que muitas vezes possuem características complexas, como geometrias difíceis de serem representadas ou sistemas potencialmente perigosos. A união de diversos métodos numéricos, modelos de turbulência e outros conceitos fenomenológicos foram capazes de propiciar ao CFD a capacidade de visualizar e assim entender fenômenos físicos em vários ramos de estudos. Assim, a engenharia detém uma poderosa ferramenta para solução de problemas reais, evitando possíveis acidentes de projetos com interação fluido-estrutura que poderiam acontecer sem o pré-estudo CFD. (VIEIRA, 2007)

Técnicas de análise em fluidodinâmica computacional foram mais desenvolvidas pós década de 90, com o avanço da capacidade de processamento dos microcomputadores, requisito base para que a resolução dos problemas enfrentados em Mecânica dos Fluidos seja efetuada de maneira rápida e eficiente. Atualmente os avanços são tantos que existem computadores, chamados *Cluster* (Fig. 3), com até milhares de processadores, tornando-os ferramentas capazes de trabalhar com eficácia em problemas industriais e acadêmicos anteriormente vistos como impossíveis de se resolver. (VERSTEEG; MALALASEKERA, 1996).



Figura 3. Cluster Sequoia IBM. Fonte: Canaltech, 2021.

A grande vantagem dos estudos em CFD se dá pela capacidade de estudar com detalhes um fenômeno físico antes de se investir tempo e dinheiro em protótipos ou produtos que são influenciados por parâmetros fluidodinâmicos.

Para exemplificação de aplicações em que o CFD se faz presente tem-se as figuras a seguir: estudos de casos nas indústrias aeronáutica (Fig. 4 e 5), petroquímica (Fig. 6 e 7) e automobilística (Fig 8.).

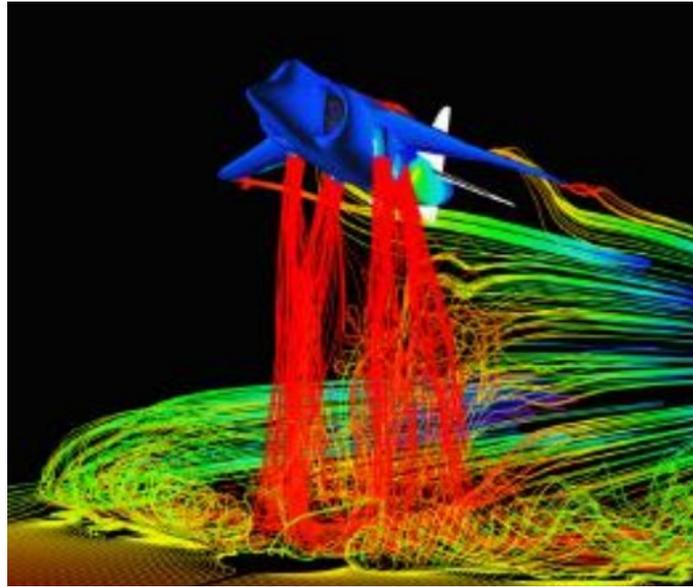


Figura 4. Linhas de velocidade no contorno de uma aeronave militar. Fonte: Duarte, 2006.

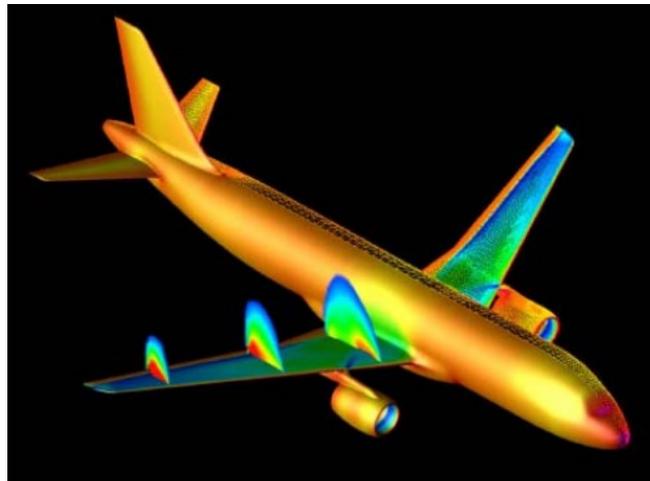


Figura 5. Gradiente de pressão existente nas asas de uma aeronave comercial. Fonte: Duarte, 2006.

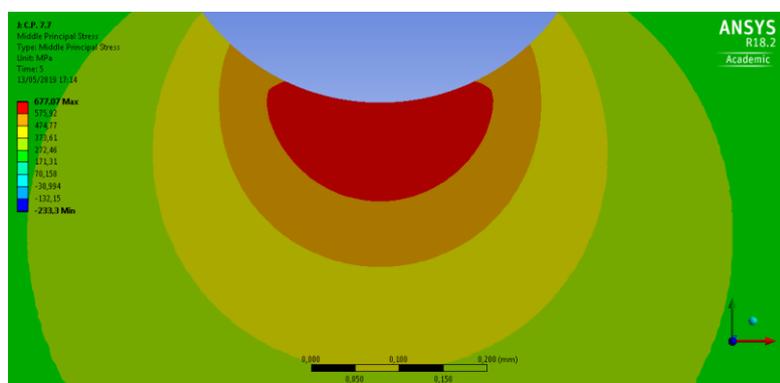


Figura 6. Contornos de tensão hidrostática em uma região de fratura de um componente de riser de petróleo. Fonte: o autor, 2019.

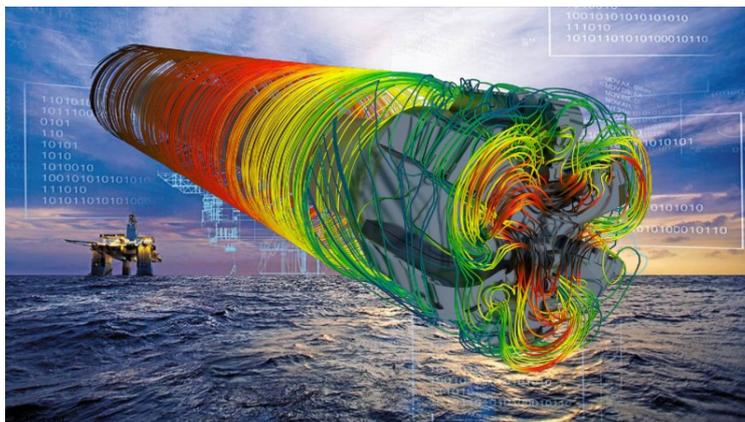


Figura 7. Contornos de pressão que influenciam um tubo de riser. Fonte: Siemens PLM, 2021.

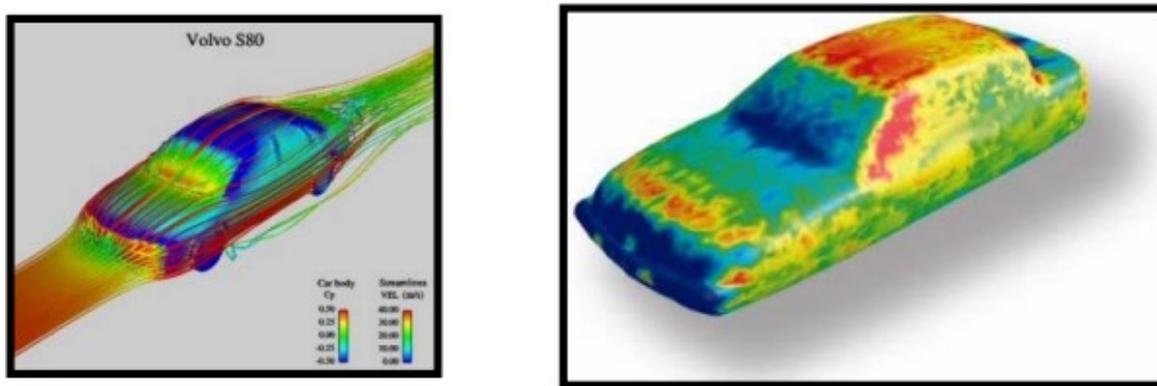


Figura 8. Linhas de velocidade (a) e contornos de pressão (b) ao redor de um automóvel. Fonte: Duarte, 2006.

2.3. Passos para a análise de CFD

Para uma análise em CFD necessita-se de códigos com algoritmos numéricos que consigam solucionar problemas de escoamento de fluidos. Em uma análise de CFD, em geral passa-se por três etapas que utilizam *softwares* distintos no projeto, mostrados na Fig. 9 e descritos a seguir (NORTON; SUN, 2007; VERSTEEG; MALALASEKERA, 1996):

- 1) Etapa de pré-processamento: consiste nos métodos utilizados para construir a geometria, ou *Computer-aided Design* (CAD) que representa o volume de controle estudado, bem como a geração de uma malha computacional que discretiza o domínio (SolidWorks, AutoCad, Gambit, Meshing, etc);
- 2) Etapa de processamento ou *solver*: constitui-se no emprego de *softwares* capazes de tratar a malha gerada no pré-processamento com as configurações que melhor descrevem o problema físico, processando então as diversas equações necessárias para se resolver o problema de forma numérica (Fluent, StarCCM, CFX, etc);
- 3) Etapa de pós-processamento: esta é a última etapa, que trata os resultados obtidos na etapa de processamento, gerando gráficos, contornos, vetores, linhas de escoamento e relatórios que possibilitam a análise do escoamento (Fluent, CFX, CFDPost, TecPlot, etc).

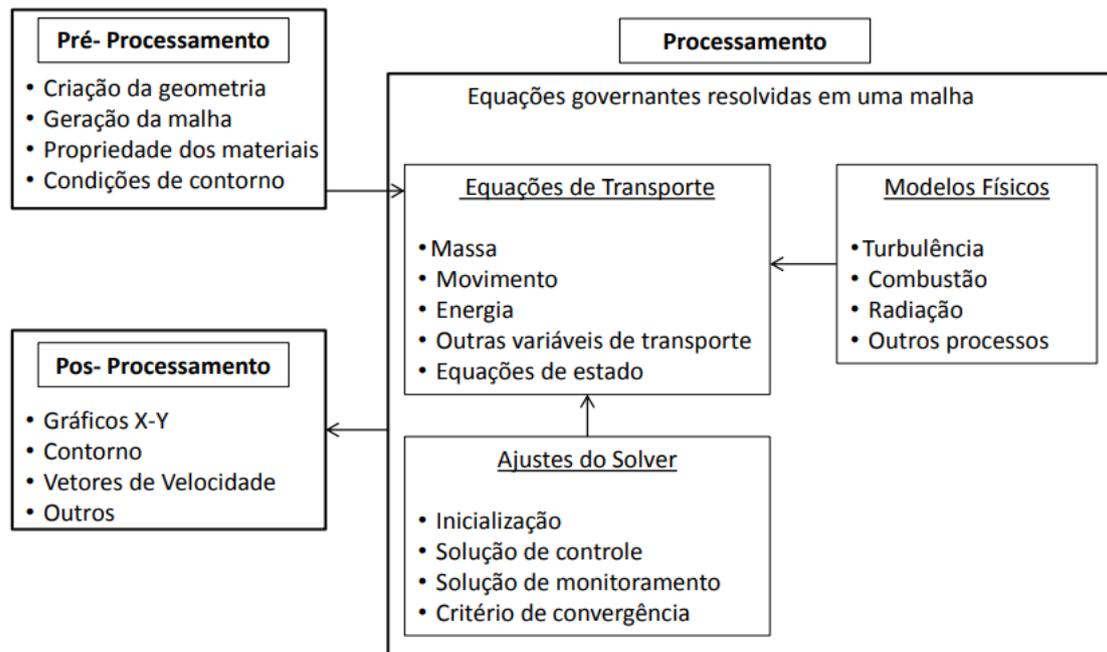


Figura 9. Principais elementos na modelagem de um problema em CFD. Fonte: Adaptado de: Tu, Yeoh e Liu, 2008.

2.4.1. Pré-processamento

Como a primeira parte da etapa de pré-processamento, tem-se a criação da geometria. Deve-se confeccionar um modelo geométrico o mais próximo possível do que se espera do domínio do fenômeno físico estudado. A escolha do melhor domínio depende em suma dos detalhes que podem influenciar nos parâmetros a serem analisados. Dessa forma, os *softwares* de *Computer-aided Design* (CAD) responsáveis por construírem as geometrias com base nos parâmetros estabelecidos ao estudo são utilizados (SEBASTIANI, 2021).

Para um projeto que utiliza ferramentas de CFD para sua solução, é necessário que haja a subdivisão do domínio em um número maior de subdomínios que, não se sobrepondo, são capazes de representar o macro problema físico. Nesse sentido, a subdivisão dos domínios gera o que se chama de malha (*mesh*), uma composição de elementos (volumes de controle) que representam o volume total da geometria. Nessa perspectiva, os valores discretos de propriedades de fluxo, como perfil de pressão, perfil de velocidade, temperatura, etc são descritos em cada uma dessas células através de soluções numéricas (TU; YEOH e LIU, 2008).

Sendo assim, a criação da malha geralmente é uma etapa demorada dentro da modelagem em CFD, pois requer em seu escopo minuciosas análises, para que não haja pontos de inflexão e descontinuidade no tratamento do domínio. Dessa forma, o tipo de malha confeccionado para o problema pode determinar se a solução computacional é qualificada para representar o problema físico.

As malhas computacionais existentes na atualidade podem ser classificadas em três tipos (TU; YEOH e LIU, 2008):

Malhas estruturadas: são compostas por elementos hexaédricos em três dimensões (3D) e quadriláteros em duas dimensões (2D), como mostra a Fig. 10, o que transforma a abordagem da malha mais simples de ser efetuada. Sua desvantagem está ligada no fator de complexidade da geometria analisada, para pontos de extrema inflexão a malha pode apresentar aumento elevado da não-ortogonalidade, tornando-se assimétrica.

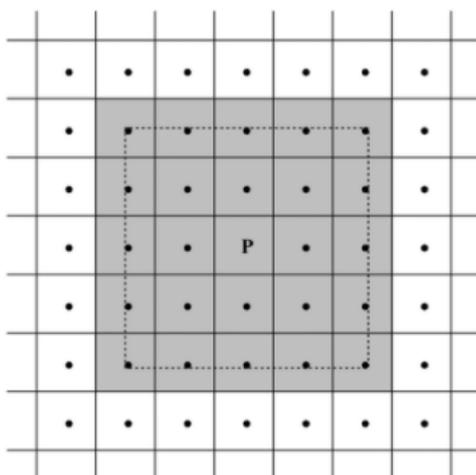


Figura 10. Exemplo de malha 2D estruturada. Fonte: Cerqueira, 2016.

Malhas não estruturadas: são compostas principalmente por elementos tetraédricos em três dimensões (3D) e triangulares em duas dimensões (2D), adequando-se em especial para casos em que a geometria do domínio contém altos graus de inflexão (curvatura), como exemplifica a Fig. 11. Sua principal desvantagem está na falta de controle do tamanho das células pelo usuário.

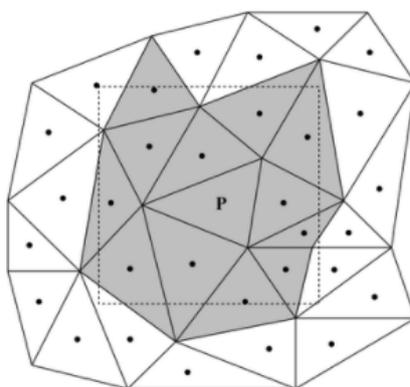


Figura 11. Exemplo de malha não estruturada. Fonte: Cerqueira, 2016.

Malhas híbridas: são compostas por diferentes tipos de elementos, tanto triangulares e quadrangulares em 2D (Fig. 12) ou hexaédricos, tetraédricos, pirâmides em 3D. Sua característica se dá pela possibilidade de adaptar e flexibilizar os tipos de elementos para as diferentes regiões do domínio estudado, garantindo melhor eficácia na geração da malha.

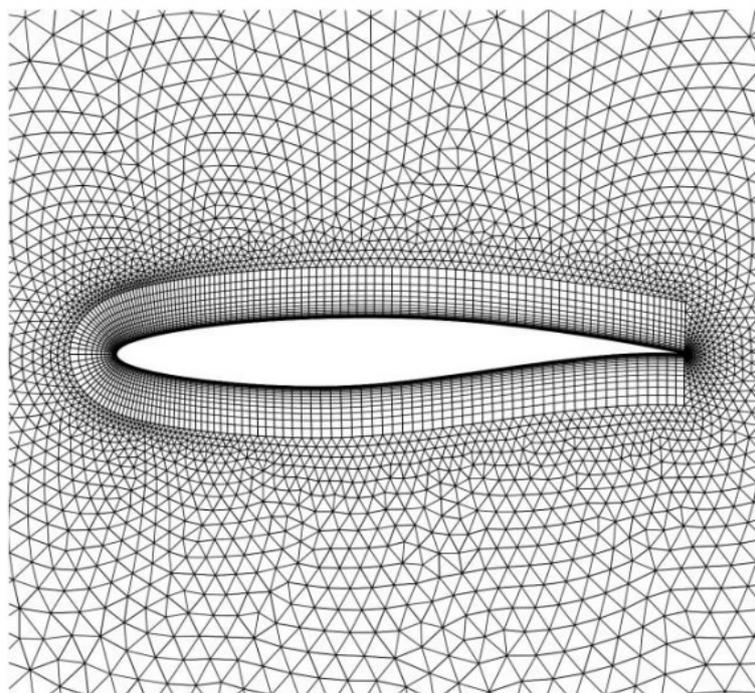


Figura 12. Exemplo de malha híbrida. Fonte: Stanford University, 2012.

As condições de contorno e materiais utilizados para o problema são de grande importância para que o estudo do pré-processamento seja concluído. Dito isso, para a determinação das fronteiras deve-se analisar minuciosamente as condições que o problema físico expressa, tais como o tipo de fluido e materiais, bem como suas propriedades termofísicas, o que possibilitará as próximas etapas do estudo.

2.4.2. Processamento

No geral, as expressões governantes dos problemas de engenharia encontrados são equações diferenciais parciais, não lineares e acopladas. Dessa maneira, para processar o forte acoplamento existente, bem como as não linearidades encontradas nos problemas, faz-se necessário a utilização de métodos numéricos para solução dos casos (FACURI, 2014).

Para a fase de processamento, o *software* de CFD, reúne e organiza os dados inseridos na fase de pré-processamento em matrizes numéricas, resolvendo-as através de métodos iterativos (NORTON; SUN, 2007). Existem três tipos principais de técnicas para solucionar problemas numéricos atualmente, são eles: método das diferenças finitas, dos elementos finitos e dos volumes finitos (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

O *software* ao qual este trabalho fará uso, o *Fluent*, utiliza o método de volumes finitos para o cálculo da solução numérica das equações parciais. O método de volumes finitos é o que melhor representa os fenômenos físicos, contudo vale a ressalva de que os resultados computacionais necessitam de validação (PEREIRA, 2006).

Os algoritmos responsáveis pelo processamento dos dados passam pelas etapas de integração das equações governantes do escoamento sobre todos os volumes que, em conjunto, formam o domínio do problema; etapas de discretização, capazes de transformar equações integrais em sistemas de equações algébricas e, por fim, a etapa final é a solução das equações algébricas encontradas, utilizando-se métodos iterativos (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007; ZHAO et al., 2016).

No espaço físico, as formas integrais das equações de conservação são discretizadas através do método de volumes finitos. Neste método, para simular um volume de controle, se

faz a divisão deste em subdomínios finitos, que juntos conseguem representar o volume total através da conservação das propriedades e condições de contorno relevantes para cada volume menor. Nessa perspectiva, em cada volume de controle discretizado há um centroide, onde usualmente são calculados os valores das propriedades de transporte, como mostra a Fig. 13, porém existe a possibilidade de fazer o cálculo nos vértices e pontos médios (TU; YEOH e LIU, 2008).

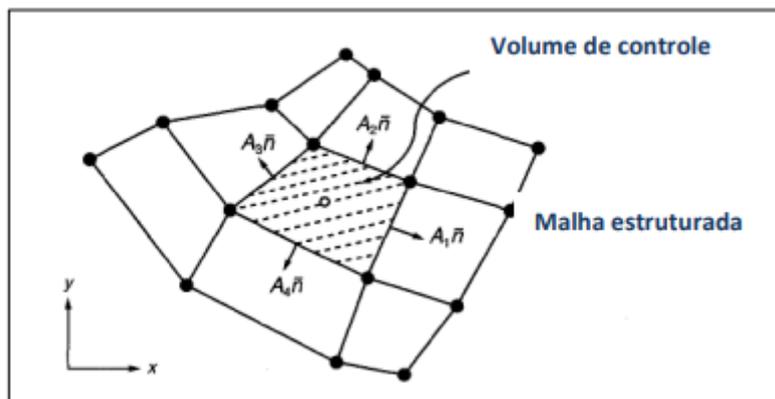


Figura 13. Método de volumes finitos aplicado a uma malha estruturada. Fonte: Tu, Yeoh e Liu, 2008.

Não obstante, para expressar as variáveis nas superfícies do volume de controle em relação aos valores de centro são feitas interpolações e, para isso, existem alguns métodos já disponíveis em cada pacote computacional comercial. (TU; YEOH e LIU, 2008)

Dentre os principais métodos de interpolação utilizados, destacam-se:

Upwind de primeira-ordem: assume que o valor no centro da célula representa um valor médio de toda a célula e que as quantidades na face são iguais à quantidade no centroide da célula (FRANCO, 1996).

Upwind de segunda-ordem: utiliza de uma reconstrução linear multidimensional aproximada para melhorar a precisão do cálculo das quantidades nas células (FLUENT, 2011).

QUICK (Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics): um método mais indicado para malhas hexaédricas (em 3D) e quadráticas (em 2D) quando se tem uma única face a jusante e a montante do escoamento, com malhas estruturadas e alinhadas com o fluxo (FLUENT, 2011).

PRESTO! (PREssure STaggering Option): esquema utilizado para discretizar o balanço da continuidade para um volume de controle de forma “escalonada”, em vez de calcular a pressão no centroide da malha, o esquema PRESTO! calcula a pressão na face (FLUENT, 2011).

Na solução de equações da conservação da quantidade de movimento e massa, em escoamentos incompressíveis, para introduzir a pressão é de fundamental importância utilizar de métodos para acoplamento pressão-velocidade. Nesse sentido, para solução dos problemas de acoplamento são utilizados procedimentos iterativos e sequenciados, os quais são responsáveis por melhorar a estimativa do campo de pressão. Por conseguinte, os métodos iterativos também fazem com que os resultados de velocidade sejam gradativamente melhores para atender à equação da continuidade discretizada (PEREIRA, 2006).

Nos acoplamentos de pressão com velocidade, três algoritmos são mais utilizados:

SIMPLE: o algoritmo SIMPLE usa uma relação entre as correções de velocidade e pressão para impor a conservação de massa e obter o campo de pressão. (FLUENT, 2011)

SIMPLEC: tem procedimento semelhante ao SIMPLE, a diferença está na tratativa da correção do fluxo na face do volume de controle. (FLUENT, 2011)

PISO: é um esquema de acoplamento baseado no grau mais alto da relação aproximada entre as correções para pressão e velocidade, este procedimento realiza duas correções adicionais: correção do volume de controle vizinho e correção de assimetria. (FLUENT, 2011)

2.4.3. Pós-processamento

Depois que o processamento se finaliza, a simulação gera resultados de acordo com o domínio e as condições de contorno estabelecidas. Nos *softwares* atuais, é possível a criação de diferentes visualizações didáticas sobre os resultados obtidos, dentre elas tem-se: gráfico de vetores, gráfico de contornos, disposição da malha, gráficos em duas e três dimensões, animações de movimento de partículas e escoamento entre outras funções. Para o tratamento e a compreensão dos resultados, o pós-processamento se faz essencial (ZHAO et al., NORTON; SUN, 2007; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

É importante atentar-se que, assim como qualquer estudo investigativo, o resultado da solução do problema em CFD possui desvios. O usuário deve atentar-se em interpretar os resultados obtidos através da etapa de pós-processamento, com um olhar físico, do que se espera de comportamento do sistema, valendo-se também de métodos estatísticos e abordagens teóricas. Essa análise tem o intuito de corrigir fatores importantes que diminuirão o desvio do resultado esperado, observando a influência dos termos e condições de contorno na solução final.

O CFD se mostra como uma poderosa ferramenta utilizada para ser comparada com trabalhos experimentais e explicar fenômenos físicos. Estudos em CFD podem ser validados com ensaios experimentais, podem ainda ser comparados a outros resultados numéricos já existentes ou, também, comparados a soluções analíticas derivadas de simplificações das Equações de Transporte, que é o caso do presente trabalho (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007; NORTON; SUN, 2007).

CAPÍTULO 3

3. METODOLOGIA

Os métodos utilizados para tratar o caso numericamente estarão explicitados neste capítulo que segue. Foi de suma importância encontrar uma ferramenta capaz de apoiar os estudos, sendo assim foi utilizado de um *software* bastante usado para simulações de engenharia, o *Fluent* da ANSYS na versão acadêmica gratuita. O *Fluent* trata de um instrumento capaz de fazer simulações de Fluidodinâmica Computacional (CFD) e permitir também um pós-processamento dos resultados. Dessa forma, será possível desenvolver as etapas da metodologia utilizada para resolver os casos de escoamento laminar em região anular cilíndrica.

3.1. Geometria

Como no tubo de *Couette-Hatscheck*, o caso a ser estudado neste trabalho se trata de uma região cilíndrica anular, representada em 3D, capaz de confinar um fluido dentro e expressar seu comportamento de escoamento frente a perturbações.

Para a confecção da geometria foi necessário a criação de uma região cilíndrica anular. Dentre os valores a serem estabelecidos existem o comprimento do cilindro (L), o raio interno do cilindro (R_1) e raio externo (R_2). Inicialmente uma geometria com pequeno comprimento foi feita (6 cm), porém, para efeitos acomodação e eliminação de perturbações do escoamento aumentou-se para 25 cm.

Um ponto importante que foi considerado na escolha dos diâmetros dos tubos foi a limitação de células computacionais imposta pelo *software* que seria utilizado para as simulações. Para enquadrar na escala oferecida pela versão gratuita do *software*, foi feita uma análise das aplicações existentes hoje em dia e se seriam factíveis de serem representadas por uma simulação em dimensões limitantes. Dessa maneira, foram escolhidos os diâmetros de 1,27 cm ($\frac{1}{2}$ in) para o cilindro interno e 2,54 cm (1 in) para o externo justamente por atender uma grande variedade de aplicações que utilizam regiões anulares em tubos - como em viscosímetros utilizados comercialmente hoje em dia.

Para construir a geometria, foi utilizado o *DesignModeler* do *Fluent* e nele se fez possível inserir os valores estabelecidos para os dutos e assim construir o volume de controle no *Meshing*, também do *Fluent*, de maneira eficaz e simples e assim exportando-a para o *software* resolvidor. A Fig. 14 mostra a vista frontal do sistema e na Fig. 15 é representada a perspectiva isométrica da mesma tubulação.

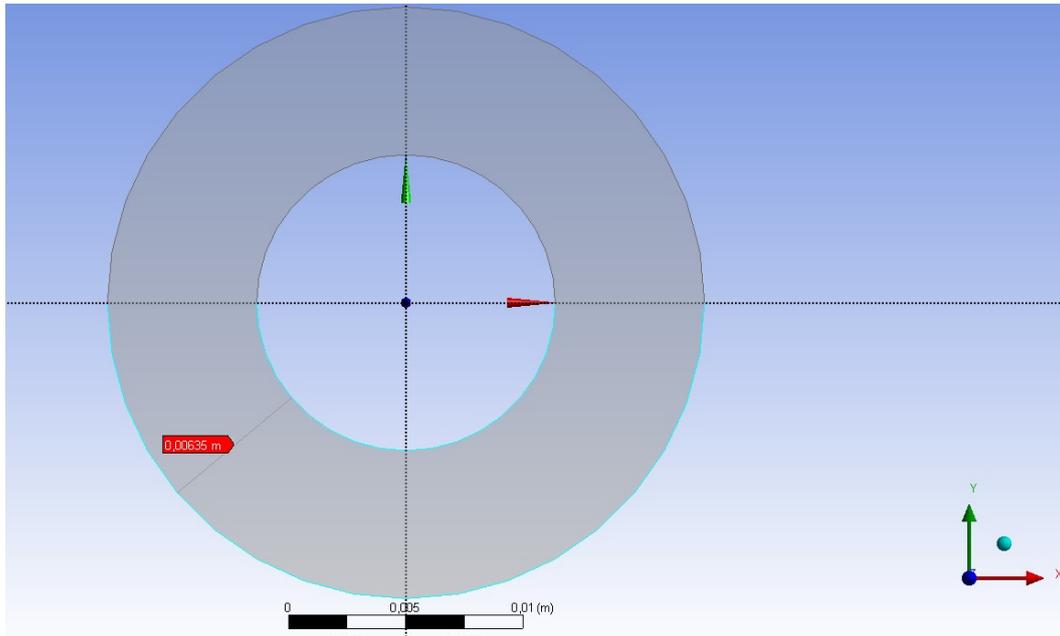


Figura 14. Vista frontal do espaço anular. Fonte: o autor.

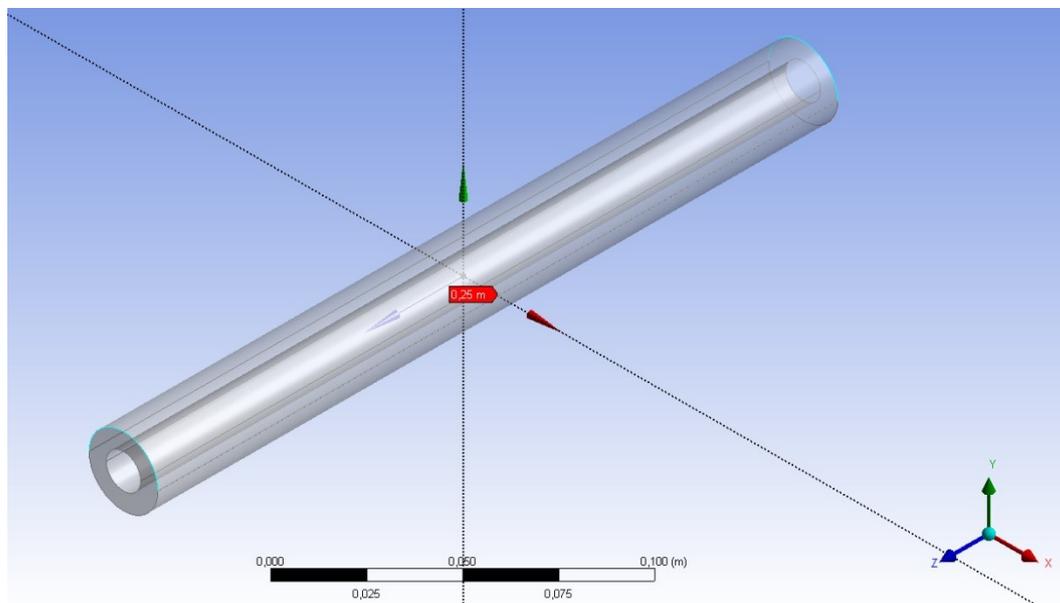


Figura 15. Perspectiva isométrica da região anular. Fonte: o autor.

3.2. Malha

Para desenvolver a malha utilizou-se a versão *Student* do *Meshing* do pacote *Ansys 2020 R1*. Assim, o primeiro desafio foi encontrar a configuração geométrica ideal da malha para o caso de uma região anular cilíndrica, dentro dos estudos de malhas estruturadas ou não estruturadas. Para isso ser possível utilizou-se da configuração que levaria a malha a utilizar pouco esforço computacional, a fim de que se enquadre no requisito de elementos máximos da versão do *software Student*. Sendo assim, optou-se por utilizar malhas hexaédricas, devido a seu custo-benefício e capacidade de contemplar as soluções necessárias para a parede do

volume de controle, pois embora tenha-se uma curvatura existente na geometria a malha hexaédrica ainda consegue segmentar o domínio de forma eficiente (FLUENT, 2011).

Com o formato de elemento definido, o próximo passo é uma malha eficiente e capaz de percorrer toda a peça de trabalho de forma igual, que resulte sempre em elementos hexaédricos. Sendo assim, foi utilizado o *Edge Sizing* do *Meshing* (Fig. 16), capaz de dividir as arestas do cilíndrico formado pelas paredes das tubulações em elementos de tamanhos iguais, gerando uma linha que liga um ponto da circunferência ao outro, o que definiu elementos hexaédricos nas faces e dentro de todo o espaço anular. Outro recurso também utilizado no processo foi o *Face Meshing*, que foi o responsável por copiar o *setup* da malha da face frontal do cilindro e replicar para a parte interior do mesmo. Para o controle das divisões no eixo Z, dividiu-se uma linha longitudinal da peça, empregando também a ferramenta *Edge Sizing*. O resultado foi a malha exemplificada pela Fig. 17.

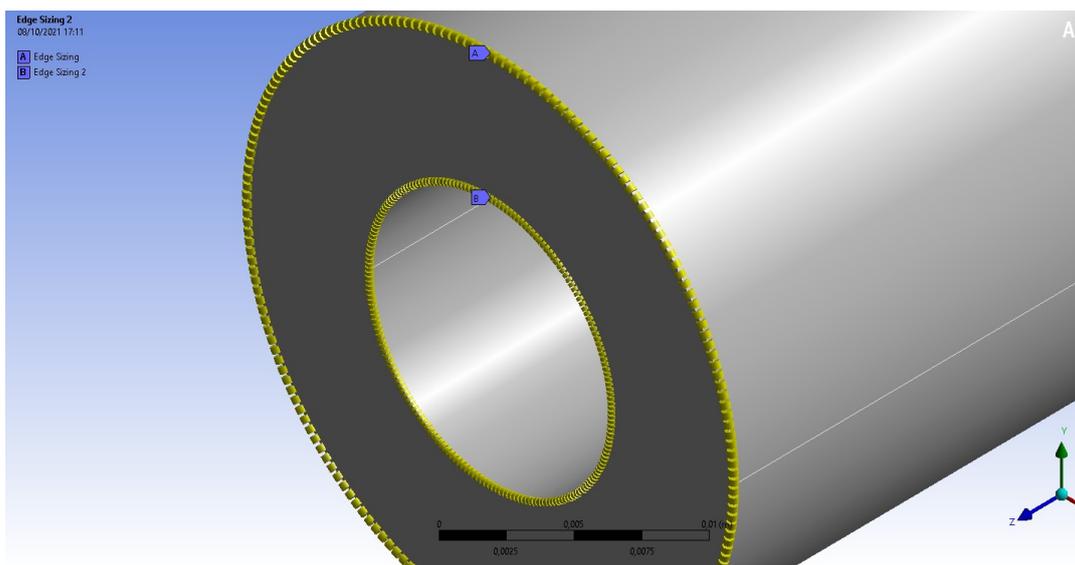


Figura 16. Método de Edge Sizing para divisão dos elementos nas paredes. Fonte: o autor.

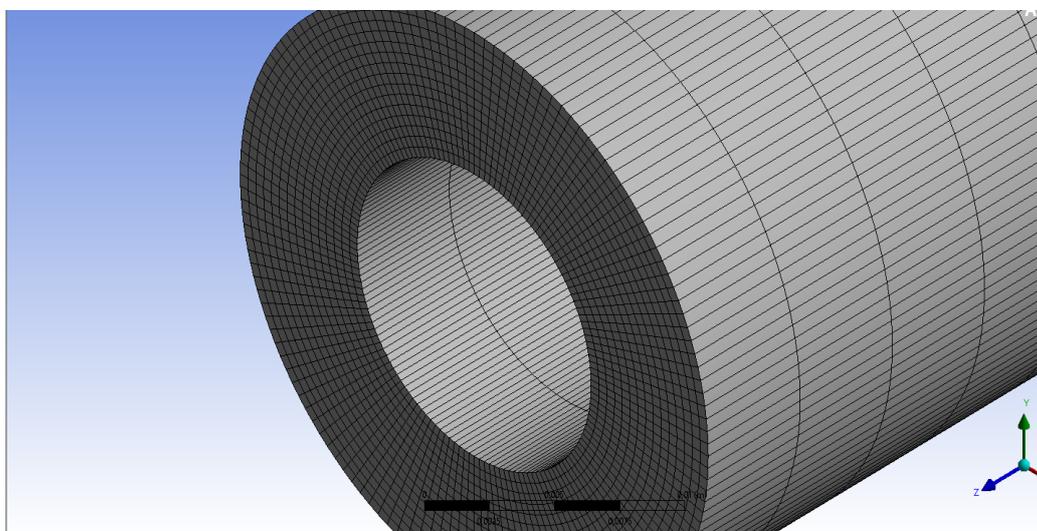


Figura 17. Setup inicial da malha. Fonte: o autor.

O principal ganho da ferramenta de divisão de linhas (*Edge Sizing*) se dá pela facilidade de controle dos valores a serem adotados, sendo possível variar o número de elementos da malha da peça de maneira rápida e eficiente. Como pode ser visto na Fig. 18, a utilização de

um número igual de divisões no perímetro de ambas circunferências resultou em elementos hexaédricos por toda a superfície.

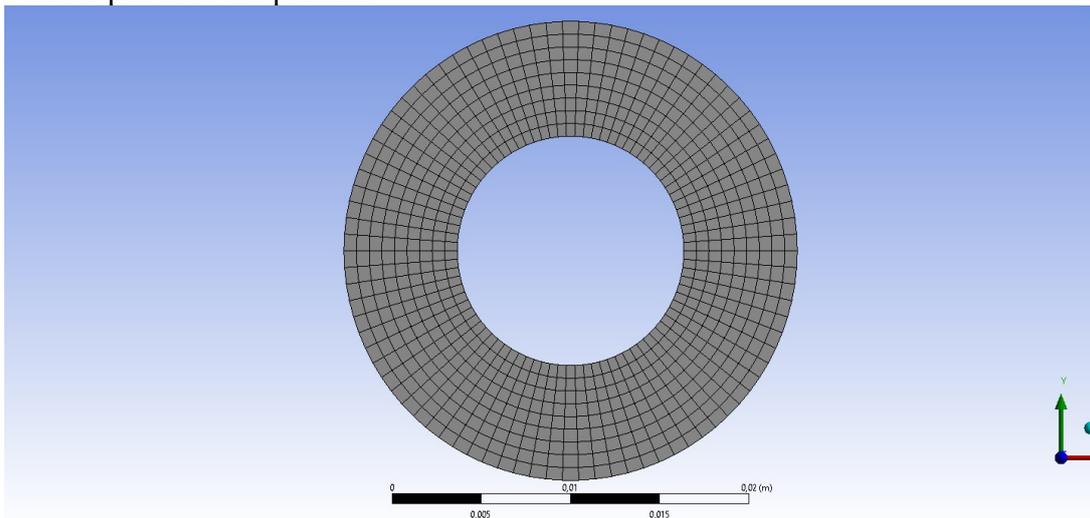


Figura 18. Vista frontal da disposição dos elementos da malha com método de divisões.
Fonte: o autor.

De uma maneira geral, tendo em vista os testes de independência de malha (Seção 3.4), a malha se mostrou bastante adaptável, como observa-se na perspectiva isométrica da Fig. 19. Sendo assim, os métodos de divisões empregados puderam garantir o controle do crescimento ou decréscimo do número de elementos, tornando possível que as etapas posteriores pudessem ser melhor executadas.

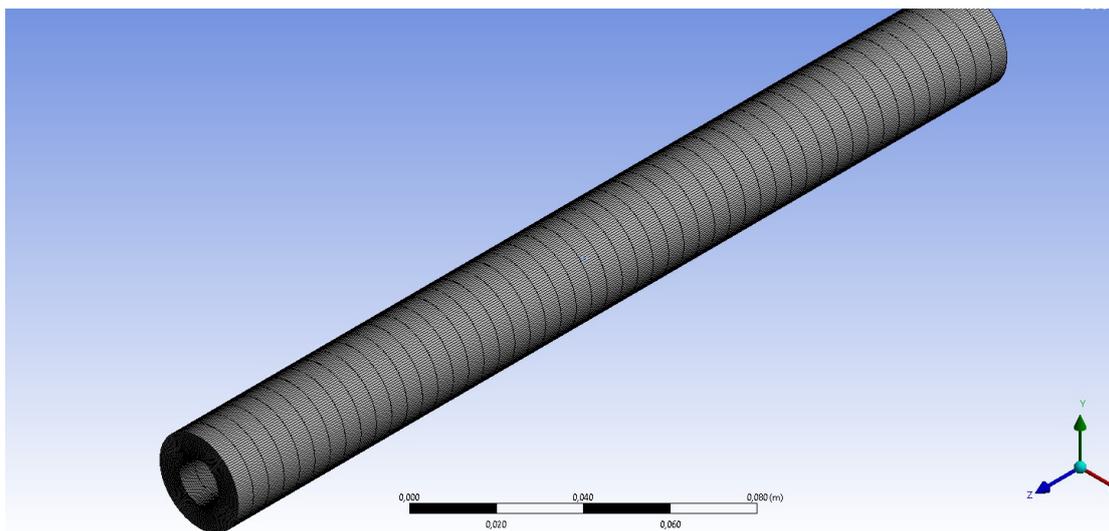


Figura 19. Perspectiva isométrica do setup de malha estipulado. Fonte: o autor.

3.3. Setup de simulação, condições de contorno e métodos de solução

Uma das etapas mais importante de todo o estudo realizado é de fato a inserção das condições de contorno do problema. Para definir o *setup* de simulação foi necessário cumprir as etapas descritas abaixo.

A princípio, a primeira entrada que o *Fluent* necessita é das condições estabelecidas em seu *launcher*: a dimensão do problema, escolhida como 3D por se tratar de uma geometria em três dimensões. A opção de precisão dupla (*double precision*) não foi utilizada para que não se

utilize esforço computacional acima do necessário, por se tratar de um caso simples de escoamento bem estabelecido. Não obstante, também deve ser feita a escolha mais adequada para o tipo de processamento a depender do *hardware* a ser utilizado. Como foi empregado um computador pessoal para as simulações, a opção em série foi escolhida.

Dentro da aba de configurações do *Fluent*, tem-se uma primeira interface que é a parte geral das condições impostas na simulação. O tipo de simulação será baseado na pressão, com a velocidade sendo formulada por meio do seu valor absoluto em cada uma das células computacionais, em regime estacionário de escoamento e desprezando os efeitos da gravidade.

Para o controle da viscosidade do problema, como já discutido, o trabalho lidará com um **regime laminar**, com baixas magnitudes em velocidade e escoamentos fora do regime turbulento. Sendo assim, pela escolha da magnitude baixa na velocidade angular empregada nas paredes o regime de escoamento apresentou baixas oscilações estabelecendo-se como laminar, gerando apenas pequenos desvios entre as velocidades analíticas e numéricas, que serão discutidas nos tópicos seguintes.

Quanto aos materiais inseridos no sistema, tem-se a água para o fluido e para a parede o material padrão de análise do *Fluent*, que por modelo considera a parede lisa (rugosidade zero). Para a água a 20°C tem-se os seguintes valores de densidade e viscosidade dinâmica:

- Densidade = 998,2 kg/m³
- Viscosidade dinâmica= 0,001003 kg/ms

No que diz respeito às condições de contorno das paredes, tem-se: parede externa (inserida como *wall*); parede interna (inserida como *wall*); face de entrada (inserida como *velocity inlet*); face de saída (inserida como *pressure outlet*) e o interior. Para melhor tratativa, as condições de contorno serão mostradas individualmente, como segue:

Parede Externa: caracterizada como *wall*, foi tratada de duas maneiras: como estacionária (caso 2) e rotacionando no sentido horário (casos 1, 3 e 4).

Para os estudos com velocidade angular na parede, foi utilizado a opção de *moving wall* e *rotational* como condição de contorno no *Fluent*, a magnitude de rotação foi de 0,5 rad/s, para interpretação dos resultados dentro do regime laminar. A fim de caracterizar o movimento horário da parede, no *setup* do *Fluent* foi imposto que o vetor de direção unitário seria preenchido como “- 1” na direção Z, provocando a rotação desejada para o caso.

Já para o estudo onde a parede está estacionária, as opções de *stationary wall* e *no slip* foram selecionadas a fim de cumprir com o caso desejado.

Vale ressaltar que na dedução analítica, o sentido de rotação utilizado para os casos que usam do movimento da parede externa é anti-horário, ou seja, o contrário do sentido adotado para o tratamento dos casos numericamente. Portanto, no capítulo de resultados, foi adotada a velocidade angular negativa para os cálculos analíticos.

Parede interna: também caracterizada como *wall*, foi tratada de três formas: como estacionária, rotacionando no sentido horário e rotacionando no sentido anti-horário. Sendo que se utilizou uma velocidade angular de módulo igual a 0,5 rad/s quando aplicado movimento rotacional, a fim de se manter a condição de regime laminar;

Nos casos em que havia velocidade angular, novamente foi necessário selecionar a opção *moving wall* na aba *wall motion*, dentro das condições de contorno da parede, o que habilitou a opção de tratar a parede com movimento. Por fim, selecionou-se a opção *rotational* para expressar o tipo de movimento desejado, inserindo-se posteriormente em volta de que eixo ia ocorrer a rotação, bem como a intensidade da mesma.

Para que o sentido de rotação seja horário em torno do eixo Z, é necessário preencher no campo *rotation-axis direction* um vetor “- 1” (caso 2 e 3), já para o sentido anti-horário preenche-se o campo com o vetor “+ 1” em Z (caso 4).

Para o caso da parede interna estacionária (caso 1), o que muda, é que na aba *wall motion*, a opção *stationary wall* é a que deve ser marcada, a fim de se garantir que não há movimento da parede durante a simulação do caso. Já o campo *shear condition* foi sempre preenchido com a opção *no slip* para que não haja deslizamento do fluido próximo à parede, o que poderia provocar perturbação não desejada no escoamento anular.

Entrada: caracterizada como região de *velocity inlet*, porém com módulo igual a zero, para provocar a região de confinamento;

Tal artifício garantiu com que o fluido dentro da região anular cilíndrica não fosse influenciado pela velocidade de escoamento no sentido longitudinal (axial).

Não obstante, como nos quatro casos não há velocidade de entrada, pode-se dizer que não há componente axial de velocidade, nem escoamento na direção radial - pois os tubos não são porosos. Sendo assim, a única componente da velocidade de real interesse é a tangencial, cujo valor para o sólido das paredes pode ser obtida pela Eq. (19).

$$V = \omega r \quad (19)$$

em que:

V : Velocidade Tangencial

ω : Velocidade Angular

r : posição radial

Saída: caracterizada como região de *pressure outlet*, porém configurada como uma abertura para a pressão atmosférica, provocando uma região de confinamento.

Interior: caracterizado como a região *interior*, é a região anular de interesse, entre as duas paredes do cilindro.

Um resumo das condições para cada caso é apresentado na Tab. 4 que segue:

Tabela 4. Condições nas paredes para cada caso. Fonte: o autor.

Caso	Parede interna	Parede Externa
1	Estacionária	Movimento horário
2	Movimento horário	Estacionária
3	Movimento horário	Movimento horário
4	Movimento horário	Movimento anti-horário

Para a parte de *solution methods* da configuração do *Fluent*, foram selecionadas as seguintes opções de esquema de acoplamento pressão-velocidade e discretizações:

Acoplamento Pressão-Velocidade:

- Esquema: SIMPLE

Discretizações:

- Gradiente: *Least Squares Cell Based*
- Pressão: PRESTO!

- Momento: QUICK

Sendo que cada método de solução foi selecionado para atender os casos de estudo com maior nível de precisão possível. (FLUENT, 2011)

No monitoramento feito da convergência da simulação, o requisito seguido foi de usar um valor muito baixo de resíduo (10^{-6}), para garantir que a simulação chegasse na condição em que os resultados tivessem erros insignificantes.

Foram feitas alterações nos fatores de relaxamento, nos métodos de solução e mesmo assim o resíduo não diminuiu ao ponto de alcançar convergência. Tendo isso em vista, foi observada a estabilidade dos resíduos, levando em conta seus menores valores obtidos, assim como mostrado no exemplo da Fig. 20.

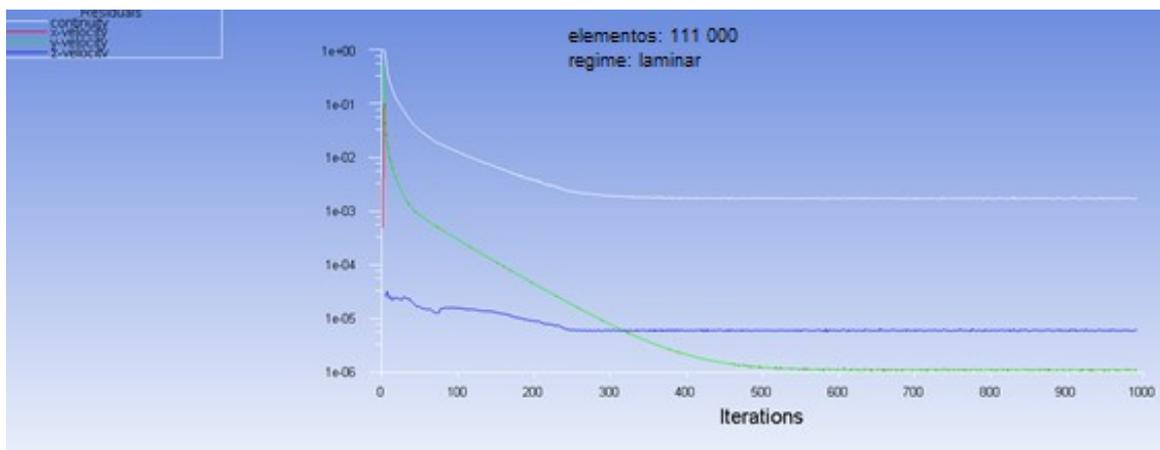


Figura 20. Exemplo de critério de parada para as simulações. Fonte: o autor.

3.4. Teste de independência de malha

O estudo de independência de malha tem como objetivo analisar a influência da malha nos resultados encontrados. Nessa etapa, os diferentes tipos de malha foram caracterizadas quanto à tendência do resultado do perfil de velocidade, comparando com seu valor obtido através da equação analítica na mesma posição radial. Dessa maneira, foi possível entender a correlação existente entre a velocidade simulada e a quantidade de elementos utilizada na simulação.

A análise foi feita para 4 casos de estudo, sendo eles: cilindro externo rotacionando, cilindro interno rotacionando, os dois cilindros rotacionando em mesmo sentido e os dois cilindros rotacionando em sentidos diferentes.

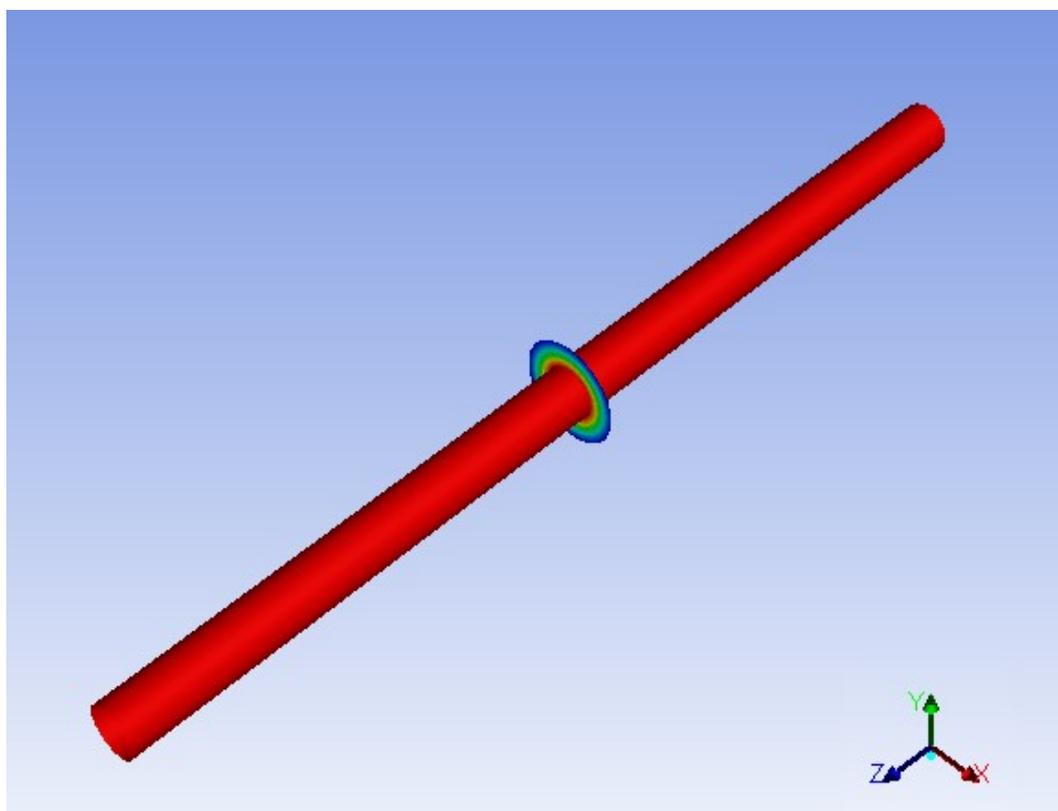
Tendo em vista que a quantidade de células existentes para interpretar o domínio como um todo pôde influenciar no custo de processamento e na precisão dos resultados numéricos obtidos, num estudo computacional é imprescindível testar diferentes configurações de malha. Dessa forma, para cada caso, foram simulados de 4 a 5 tipos de malhas hexaédricas, que são categorizados na Tab. 5.

Tabela 5. Malhas utilizadas para testes de independência. Fonte: o autor.

	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
Quantidade de Elementos	111 mil	72 mil	39 mil	12 mil	1 mil
Divisões Circunferência	100	75	50	25	25
Divisões Longitude	50	50	50	50	5

Com isso, foi possível testar diversas configurações de malha para cada caso. No entanto, vale ressaltar que, no caso da malha 5 em comparação com a malha 4, efetuou-se apenas uma mudança no número de divisões na longitude do cilindro, uma vez que buscava-se uma malha de número reduzido de células e que ainda houvesse pontos de discretização suficientes para uma análise de perfil de velocidade na direção radial.

Não obstante, os dados utilizados para as análises das malhas foram retirados de uma linha localizada na seção transversal (plano XY) na metade do comprimento do cilindro. Dessa forma, foi possível estudar os perfis de velocidade em condição de escoamento plenamente estabelecido, o que fez com que os dados coletados fossem factíveis ao problema, como será discutido na seção 4. A região transversal analisada é mostrada na Fig. 21.

**Figura 21.** Localização da seção transversal utilizada para análise dos dados. Fonte: o autor.

Para o caso da parede externa rotacionando, construiu-se as 5 malhas explicitadas na tabela 3. A variação existente entre elas se dá pela quantidade de elementos, pelo número de divisões no método geração de malha da circunferência e também das divisões na longitude.

Dessa forma, foi possível comparar a influência dessas variações no resultado do perfil de velocidade, sendo que a velocidade angular utilizada para a parede externa foi de 0,50 rad/s no sentido horário (condição de contorno definida na seção 3.3).

Na malha 1, de aproximadamente 111 mil elementos, foram obtidos 15 pontos numa linha entre a parede interna e a externa, que puderam expressar seus respectivos valores de velocidade encontrados. Assim, com os resultados da velocidade calculada analiticamente para esses mesmos pontos, foi possível estabelecer o desvio de cada um deles. Dessa maneira, para uma análise geral da independência de malha, obteve-se o desvio médio dos dados, que foi de 0,081 %, para a malha 1. A mesma pesquisa foi feita para as outras malhas, sendo seus dados de desvio médio contidos na Tab. 6.

Tabela 6. Desvios médios entre as velocidades simuladas e as velocidades analíticas para as malhas do caso 1. Fonte: o autor.

Malha	Elementos	Número de Pontos	Desvio Médio
1	111 mil	15	0,081 %
2	72 mil	12	0,128 %
3	39 mil	9	0,211 %
4	12 mil	5	0,555 %
5	1 mil	5	0,539 %

Para o caso da parede interna rotacionando, se construiu as 5 malhas explicitadas pela Tab. 5. Assim como no caso 1, a variação existente entre as malhas se dá pela quantidade de elementos, pelo número de divisões no método de malhamento da circunferência e também das divisões na longitude. Dessa forma, foi possível comparar a influência dessas variações no resultado do perfil de velocidade, sendo que a velocidade angular utilizada para a parede interna foi de 0,50 rad/s no sentido horário (condição de contorno definida na seção 3.3).

Para a malha 1, de aproximadamente 111 mil elementos, foram obtidos 15 pontos numa linha entre a parede interna e a externa, que puderam expressar a magnitude de velocidade. Assim, com os resultados calculados analiticamente para esses mesmos pontos da simulação numérica, foi possível estabelecer o desvio de velocidade em cada ponto. Dessa maneira, para uma análise geral de independência de malha, calculou-se o desvio médio entre as velocidades (numérica e analítica) obtido em todos os pontos, que foi de 0,187 %, para o caso da malha 1. A mesma análise foi feita para as outras configurações de malha, sendo suas informações mostradas na Tab. 7.

Tabela 7. Desvios médios entre as velocidades simuladas e as velocidades analíticas para as malhas do caso 2. Fonte: o autor.

Malha	Elementos	Número de Pontos	Desvio Médio
1	111 mil	15	0,187 %
2	72 mil	12	0,310 %
3	39 mil	9	0,550 %
4	12 mil	5	1,670 %
5	1 mil	5	1,670 %

Analisando os resultados de velocidade da malha 4, com a malha 5 para o caso, a diferença no desvio médio é de 0,00059%; sendo então uma mudança pouco significativa. Como só existe movimento angular do fluido dentro do cilindro, apenas uma linha na direção radial foi criada para verificar o perfil de velocidade, e as diferenças de velocidades nas linhas

do eixo Z foram desprezadas. Desse modo, fica claro que a maior parte da influência da qualidade da malha neste caso também está ligada ao número de divisões imprimido à circunferência.

Para o caso 3 das paredes rotacionando no mesmo sentido, se construiu as 5 malhas explicitadas pela Tab. 5, assim como nos casos supracitados. A variação existente entre as malhas se dá pela quantidade de elementos, pelo número de divisões no método fabricação da malha na circunferência e também das divisões na longitude. Dessa forma, foi possível comparar a influência dessas variações no resultado do perfil de velocidade, sendo que a velocidade angular utilizada para as paredes externa e interna foi de 0,50 rad/s, ambas no sentido horário (condição de contorno definida na seção 3.3).

Para a malha 1, de aproximadamente 111 mil elementos, foram obtidos 15 pontos numa linha entre a parede interna e a externa, que puderam expressar seus respectivos valores de velocidade simulados. Assim, com os resultados da velocidade calculada analiticamente nessas mesmas posições, foi possível estabelecer o desvio de velocidade em cada ponto. Dessa maneira, para uma análise geral de independência de malha, se calculou o desvio médio em todos os pontos, que foi de 0,054% para a malha 1. A Tab. 8 traz as informações para as outras malhas.

Tabela 8. Desvios médios entre as velocidades simuladas e as velocidades analíticas para as malhas do caso 3. Fonte: o autor.

Malha	Elementos	Número de Pontos	Desvio Médio
1	111 mil	15	0,054 %
2	72 mil	12	0,083 %
3	39 mil	9	0,152 %
4	12 mil	5	0,446 %
5	1 mil	5	0,454 %

Para a análise do caso 4, onde a parede externa rotaciona no sentido horário e a parede interna rotaciona no sentido anti-horário, ambas a 0,50 rad/s (condição de contorno definida na seção 3.3), empregou-se 5 malhas, com as configurações da Tab. 5 Porém, para este caso, a solução numérica apresentou um dado fora da curva de desvio dos outros dados. Esse tipo de comportamento é descrito na literatura da estatística descritiva como *outlier*, ou simplesmente dado discrepante (REIS, 2002). Para fins didáticos, seu valor não será considerado no cálculo dos desvios deste capítulo e este resultado será discutido na seção 4.4.

Isto posto, para a malha 1, de aproximadamente 111 mil elementos, foram obtidos 15 pontos numa linha entre a parede interna e a externa para cálculo das velocidades. Assim, com os resultados analíticos calculados nessas mesmas posições, foi possível estabelecer valores de desvio. Dessa maneira, para uma análise geral das malhas, calculou-se o desvio médio obtido em todos os pontos, que foi de 0,223% para a malha 1. Procedimento similar foi feito para as outras malhas e os desvios médios alcançados encontram-se na Tab. 9.

Tabela 9. Desvios médios entre as velocidades simuladas e as velocidades analíticas para as malhas do caso 4. Fonte: o autor.

Malha	Elementos	Número de Pontos	Desvio Médio
1	111 mil	14	0,223 %
2	72 mil	11	0,323 %
3	39 mil	8	0,542 %
4	12 mil	4	0,969 %
5	1 mil	4	0,942 %

A representação gráfica pode ser vista pela Fig. 22, que une o gráfico de todos os casos estudados.

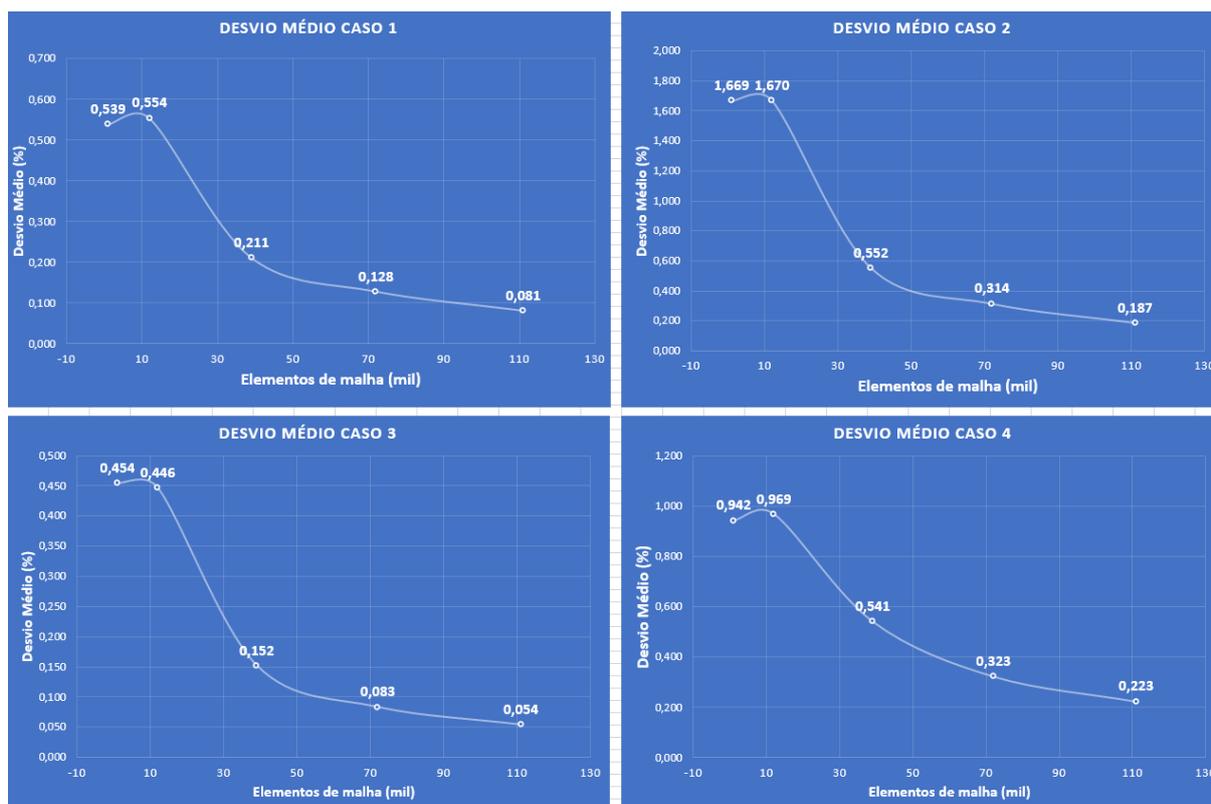


Figura 22. Desvios médios dos resultados para as malhas de 111 mil elementos dos casos.

Fonte: o autor.

Na análise da malha 4, onde apenas há redução do número de divisões na longitude, comparada com a malha 5, percebe-se que a mudança na diferença dos desvios médios é insignificante, da ordem de 0,01 %. Sendo assim, deduz-se, que a maior parte da influência da qualidade da malha está ligada ao número de divisões imposto à circunferência.

Não obstante, olhando pela perspectiva da necessidade de uma maior quantidade de dados coletados para análise, a escolha da malha 1 é a mais indicada. Portanto, a malha escolhida é a de 111 mil elementos.

CAPÍTULO 4

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

No que concerne a parte do trabalho responsável por discorrer e investigar os resultados obtidos através da presente pesquisa, falar-se-á dos quatro casos de interesse supracitados: o primeiro no qual somente a parede externa rotaciona, o segundo em que somente a parede interna rotaciona, o terceiro no qual ambas paredes rotacionam com mesma intensidade e em mesmo sentido e, por fim, o quarto caso em que ambas paredes estão rotacionando com mesma intensidade, mas em sentidos opostos.

Para cada caso estudado, foram feitas análises sobre a proximidade dos resultados obtidos pelas simulações com os obtidos pela solução analítica do problema. Por conseguinte, o foco do trabalho é verificar se a simulação dos casos representa de forma fiel o fenômeno físico, por meio da quantificação do desvio obtido dos perfis de velocidade. Dessa forma, será possível validar o método numérico estudado e a partir daí ter confiança nas análises de pós processamento do *software*.

A primeira discussão sobre os resultados obtidos é sobre a pressão total relativa encontrada para o problema, mostrada na Fig. 23. Nessa perspectiva, utilizando uma escala entre $[-1,+1]$ Pa, fica perceptível que a diferença de pressão calculada para o problema numa mesma seção transversal e também numa seção longitudinal pode ser considerada nula. Tal resultado está de acordo com a solução analítica, já que não há escoamento nas direções radial e axial.

Dessa maneira, os resultados e a discussão se voltarão apenas para as análises dos perfis de velocidade tangencial encontrados para os casos, pois é a única componente existente da velocidade nos escoamentos estudados nessa monografia.

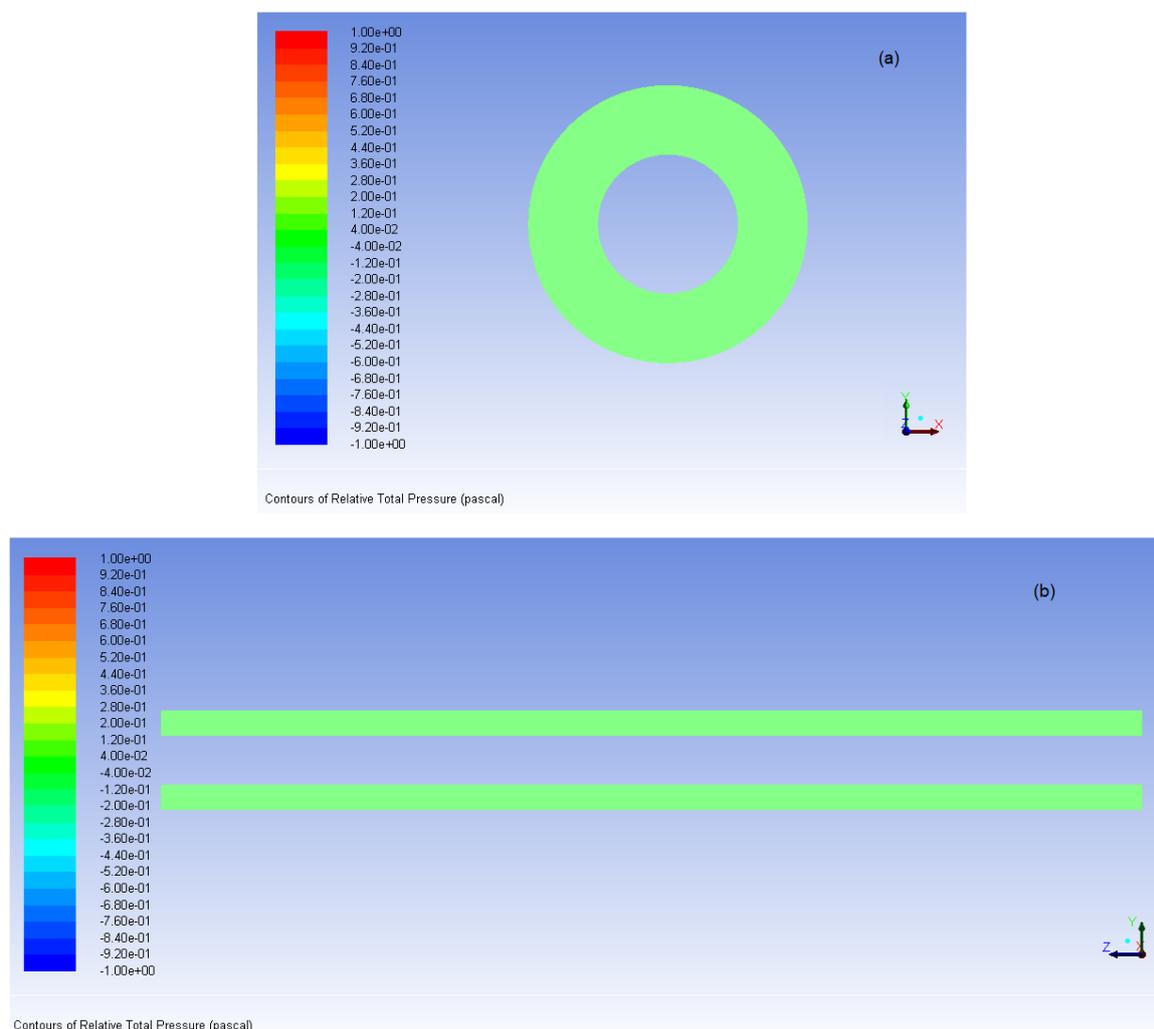


Figura 23. Gradiente de pressão total relativa (a) numa seção transversal, (b) numa seção longitudinal, encontrado para os casos. Fonte: o autor.

4.1. Caso 1: Perfil de velocidade para parede externa rotacionando

Como forma de validar as condições de contorno impostas na parte de pré-processamento do caso 1, foi utilizada a ferramenta de gráficos de vetores do *Fluent* para analisar o sentido da velocidade tangencial do caso. Nessa perspectiva, ficou evidente que quanto ao sentido de rotação, a simulação conseguiu representar bem o fenômeno físico, já que na Fig. 24 se visualiza que o escoamento como um todo tem sentido horário, como imposto nas condições de contorno para a rotação da parede externa.

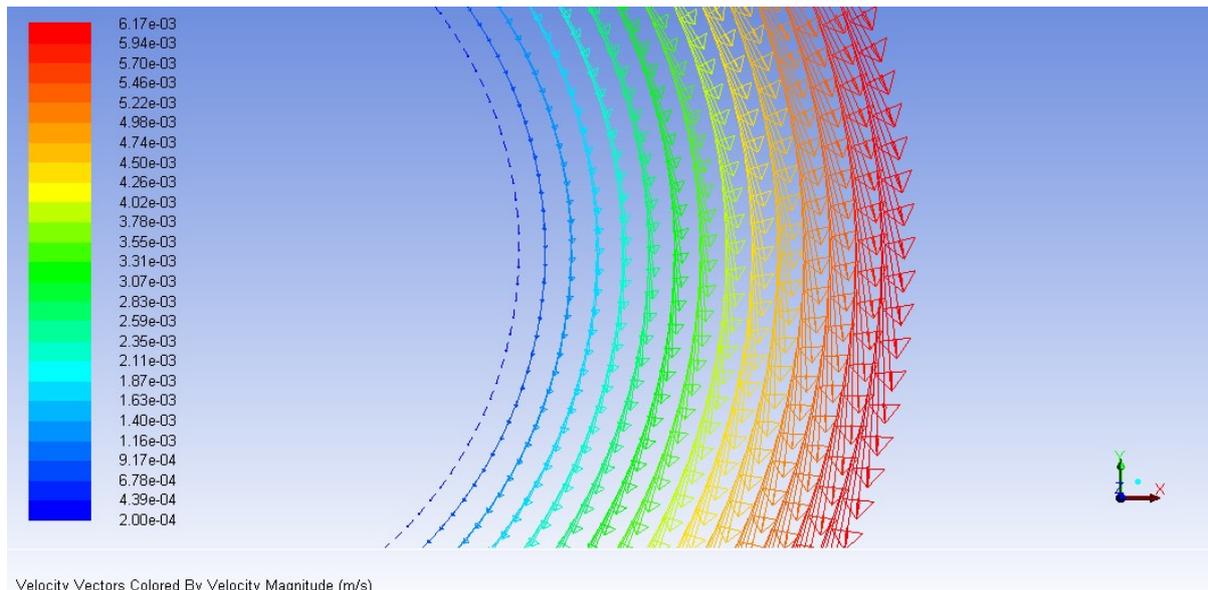


Figura 24. Caso 1: vetores para velocidade na seção transversal. Fonte: o autor.

Para a simulação do caso da parede externa rotacionando com velocidade angular de 0,50 rad/s, encontrou-se um perfil de velocidade simulada bastante próximo do perfil esperado pela solução analítica. Com a configuração de malha escolhida para analisar o caso, foi possível evidenciar 15 pontos dispostos na direção radial do cilindro, contidos na Tab. 10.

Os dados contidos na tabela foram exportados através da ferramenta *XY Plot* do pós-processamento do *Fluent*. A fim de garantir que o escoamento resultante estaria já desenvolvido, criou-se uma linha transversal (plano XY) na região mediana do cilindro, assim foi possível coletar os dados da magnitude da velocidade pela posição radial da seção transversal.

Tabela 10. Caso 1: dados do perfil de velocidade calculados. Fonte: o autor.

Posição x [m]	Velocidade Analítica [m/s]	Velocidade Simulada [m/s]	Desvio [%]
Malha 111k (50 div long/100 div circ)			
0,0127000	0,0063500	0,0063486	0,0225197
0,0118533	0,0056343	0,0056325	0,0331269
0,0114300	0,0052681	0,0052665	0,0307157
0,0110067	0,0048955	0,0048942	0,0273660
0,0105833	0,0045155	0,0045146	0,0211566
0,0101600	0,0041275	0,0041269	0,0157480
0,0097367	0,0037302	0,0037300	0,0079006
0,0093133	0,0033225	0,0033226	0,0029496
0,0088900	0,0029029	0,0029034	0,0173228
0,0084667	0,0024694	0,0024704	0,0377446
0,0080433	0,0020201	0,0020215	0,0696321
0,0076200	0,0015522	0,0015541	0,1235505
0,0071967	0,0010625	0,0010650	0,2317568
0,0067733	0,0005468	0,0005500	0,5761909
0,0063500	0,0000000	0,0000000	-
DESvio MÉDIO [%]		0,0811787	

Não obstante, por apresentar uma média de desvio de 0,081%, obtido pela média aritmética dos dados de desvio, nota-se que os valores simulados se mostraram muito próximos da equação analítica. O resultado satisfatório dos dados numéricos foi obtido, em suma, pela qualidade da configuração de pré-processamento. A estruturação da malha e todas as outras etapas fizeram com que os resultados simulados fossem pertinentes para o caso.

É importante lembrar que para os pontos onde o módulo da velocidade é menor (pontos próximos da parede interna), o desvio aumenta.

O pós-processamento do *Fluent*, com gráficos de contorno e *XY plots*, foi de suma importância para a análise dos resultados. Nesse sentido, através de ferramentas para visualização de contornos de velocidade e plotagens foi possível analisar melhor as características do caso de escoamento da parede externa rotacionando. Para representar os contornos de velocidade na seção transversal do cilindro.

Pela Fig. 25, é possível ver através de um corte como o perfil de velocidade se comporta neste caso, de acordo com as variações da posição radial na região anular cilíndrica.

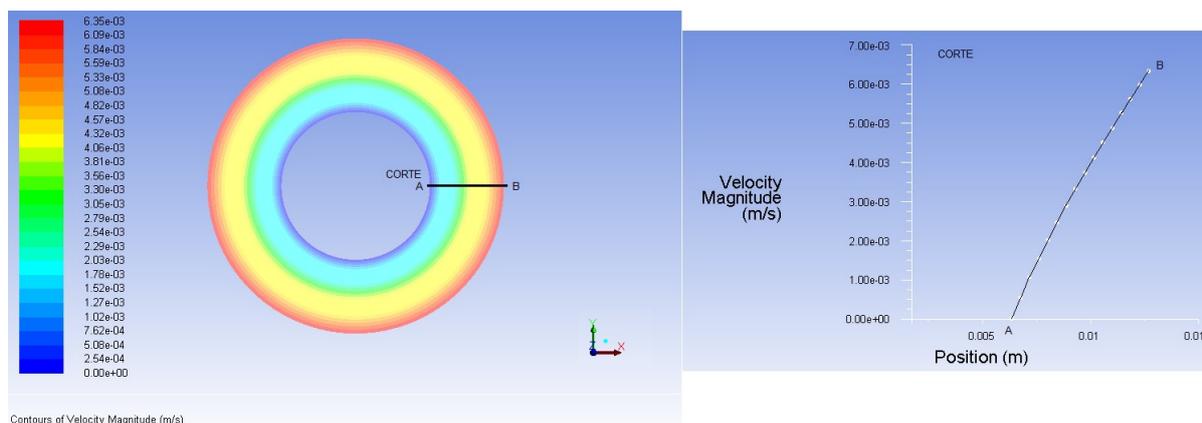


Figura 25. Caso 1: Corte do perfil de velocidade na seção transversal. Fonte: o autor.

4.2. Caso 2: Perfil de velocidade parede interna rotacionando

Através das respostas da simulação numérica para o caso 2, foi possível analisar o sentido de rotação empregada ao fluido pela parede interna do espaço anular. Nesse contexto, a Fig. 26 mostra de forma bastante prática o sentido dos vetores de velocidade tangencial encontrados, denotando a satisfatória proximidade com as condições de contorno usufruídos, nas quais a velocidade angular da parede interna tem sentido horário. Não obstante, foi possível observar também que como a parede externa está estacionária a maior magnitude da velocidade tangencial se encontra na parede interna, como ilustra o tamanho das setas que representam os vetores de velocidade feitos pela ferramenta de gráficos de vetores do *software*.

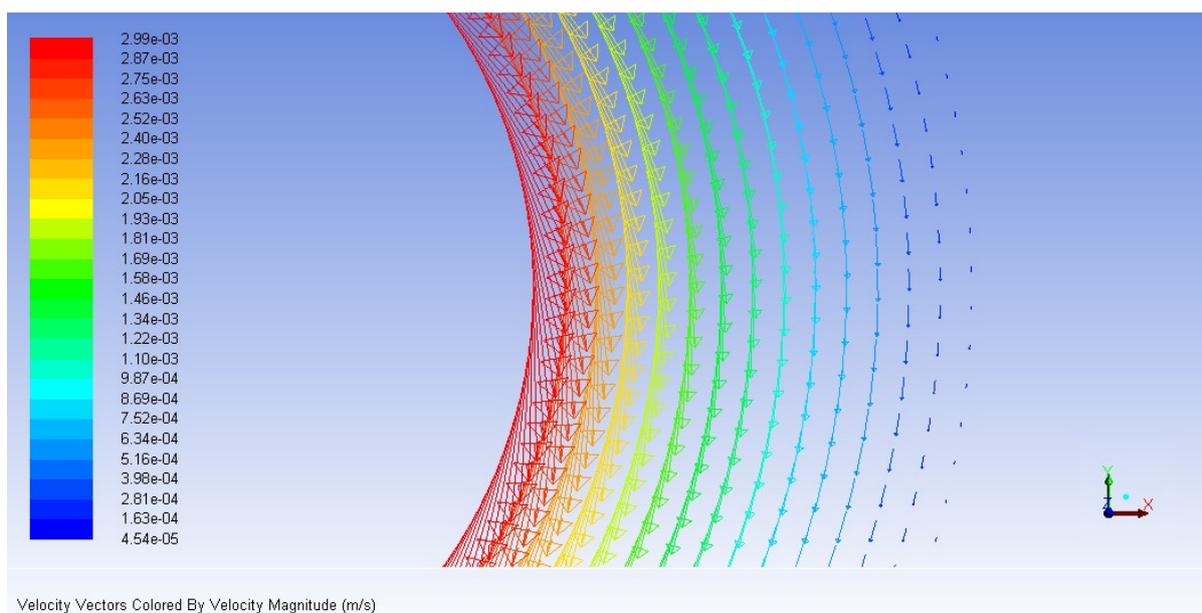


Figura 26. Caso 2: vetores de velocidade na seção transversal. Fonte: o autor.

Para a simulação do caso da parede interna rotacionando com velocidade angular de 0,50 rad/s, também foi encontrado um perfil de velocidade simulada bastante próximo do perfil estimado pela solução analítica. Com a configuração de malha escolhida para analisar o caso, foi possível evidenciar 15 pontos dispostos na direção radial do cilindro, contidos na Tab. 11.

Tabela 11. Caso 2: dados do perfil de velocidade encontrados. Fonte: o autor.

Posição x [m]	Velocidade Analítica [m/s]	Velocidade Simulada [m/s]	Desvio [%]
Malha 111k (50 div long/100 div circ)			
0,0127000	0,0000000	0,0000000	-
0,0118533	0,0002923	0,0002915	0,2839548
0,0114300	0,0004468	0,0004458	0,2338854
0,0110067	0,0006078	0,0006065	0,2168476
0,0105833	0,0007761	0,0007744	0,2158227
0,0101600	0,0009525	0,0009505	0,2112336
0,0097367	0,0011381	0,0011357	0,2082418
0,0093133	0,0013341	0,0013314	0,2031332
0,0088900	0,0015421	0,0015390	0,2023215
0,0084667	0,0017639	0,0017603	0,2057940
0,0080433	0,0020016	0,0019974	0,2083333
0,0076200	0,0022578	0,0022531	0,2081672
0,0071967	0,0025358	0,0025306	0,2070353
0,0067733	0,0028389	0,0028338	0,1803515
0,0063500	0,0031750	0,0031743	0,0226772
DESVIO MÉDIO [%]		0,1871866	

Nessa perspectiva, como analisado na Tab. 11, os valores simulados para o caso da parede interna rotacionando se mostraram muito próximos dos obtidos pela equação desenvolvida analiticamente, assim como no caso da parede externa rotacionando. O baixo desvio dos dados se deve, principalmente, ao satisfatório resultado obtido pela configuração de malha utilizada. Os métodos utilizados para construir e estruturar a malha fizeram com que os resultados simulados fossem pertinentes para o caso. Além disso, vale ressaltar que toda a parte de pré-processamento foi muito importante para alcançar esses resultados, tanto a construção da malha quanto a etapa de escolha de métodos de solução e condições de contorno etc.

Observa-se também que para os pontos próximos da parede externa, onde a magnitude da velocidade é menor, o desvio aumenta. Esse efeito se deve à finita capacidade que a malha tem de solucionar os fenômenos da camada limite.

No sentido de melhorar a didática da tratativa dos resultados, o pós-processamento do *Fluent* se faz bastante necessário. Sendo assim, através de ferramentas para visualização de contornos de velocidade e plotagens foi possível analisar melhor as características do caso de escoamento da parede interna rotacionando.

Na Fig. 27 tem-se um corte que representa o perfil de velocidade do caso, onde há maior velocidade na parede interna, diminuindo-se no sentido da parede externa.

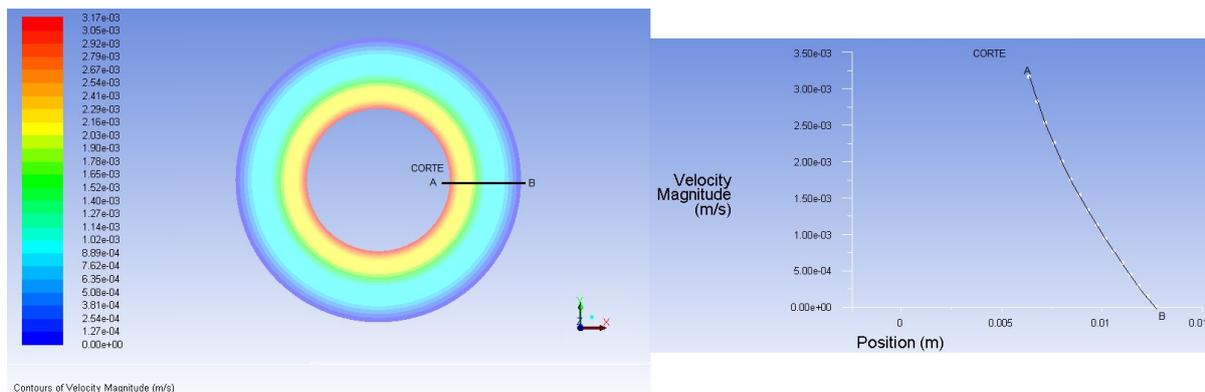


Figura 27. Caso 2: Corte do perfil de velocidade na seção transversal. Fonte: o autor.

4.3. Caso 3: Perfil de velocidade para as paredes rotacionando com velocidades angulares idênticas em módulo e mesmo sentido

A fim de se analisar os resultados obtidos para o caso 3, uma das primeiras considerações é sobre o sentido do escoamento obtido pela simulação do *Fluent*. Logo, pela Fig. 28 ficou didaticamente perceptível que o sentido do escoamento cumpriu com os *inputs* dados na parte de pré-processamento: rotação horária para ambas as paredes. Não obstante, vê-se também pela escala que os vetores com maior magnitude estão localizados na parede externa, uma vez que quanto maior a distância do centro da circunferência, para uma mesma velocidade angular, maior a magnitude da velocidade escalar.

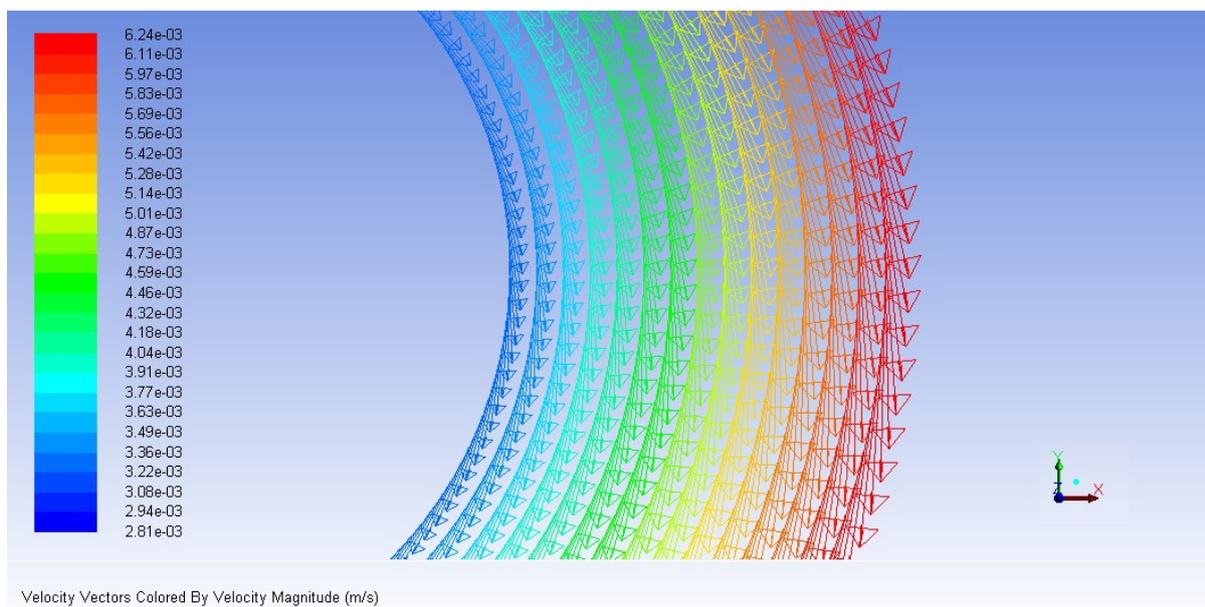


Figura 28. Caso 3: vetores de velocidade na seção transversal. Fonte: o autor.

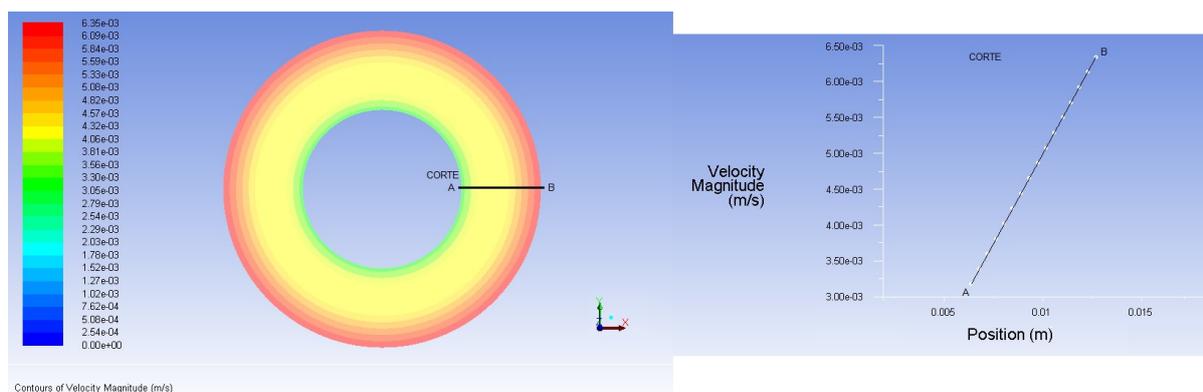
Agora para o caso de ambas as paredes rotacionando, com velocidades angulares idênticas em módulo ($0,50 \text{ rad/s}$) e mesmo sentido, também foi simulado um perfil de velocidade próximo do calculado pela solução analítica, como nos casos 1 e 2. Com a configuração de malha 1, utilizada para analisar o caso, evidenciou-se 15 pontos dispostos na direção radial do cilindro coletados na região mediana da tubulação, cujos valores de velocidade estão contidos na Tab. 12.

Tabela 12. Caso 3: dados do perfil de velocidade encontrados. Fonte: o autor.

Posição x [m]	Velocidade Analítica [m/s]	Velocidade Simulada [m/s]	Desvio [%]
Malha 111k (50 div long/100 div circ)			
0,0127000	0,0063500	0,0063486	0,0225197
0,0118533	0,0059266	0,0059240	0,0445449
0,0114300	0,0057150	0,0057123	0,0472441
0,0110067	0,0055030	0,0055006	0,0428857
0,0105833	0,0052916	0,0052890	0,0495124
0,0101600	0,0050800	0,0050773	0,0529528
0,0097367	0,0048683	0,0048656	0,0546392
0,0093133	0,0046566	0,0046540	0,0564790
0,0088900	0,0044450	0,0044423	0,0609674
0,0084667	0,0042330	0,0042306	0,0564611
0,0080433	0,0040220	0,0040189	0,0765788
0,0076200	0,0038100	0,0038072	0,0729659
0,0071967	0,0035980	0,0035955	0,0694830
0,0067733	0,0033866	0,0033838	0,0838599
0,0063500	0,0031750	0,0031743	0,0226772
DESvio MÉDIO [%]		0,0542514	

Nessa perspectiva, como apresentado na Tab. 12, os valores simulados para o caso de ambas as paredes rotacionando no mesmo sentido se mostraram muito próximos dos obtidos pela equação desenvolvida analiticamente, assim como nos casos anteriores. Além disso, vale ressaltar que toda a parte de pré-processamento foi muito importante para alcançar esses resultados, tanto a construção da malha quanto a etapa de escolha de métodos de solução e condições de contorno etc.

Ao utilizar de um corte pode-se expressar, pela Fig. 29, como o perfil de velocidade é desenvolvido neste caso. Fica evidente para o caso que a magnitude da velocidade cresce no sentido da parede interna para a externa, ou seja, variando proporcionalmente com o raio da circunferência.

**Figura 29.** Caso 3: Corte do perfil de velocidade na seção transversal. Fonte: o autor.

4.4. Caso 4: Perfil de velocidade para as paredes rotacionando com velocidades angulares idênticas em módulo e sentidos opostos

A primeira análise a se fazer sobre o perfil de velocidade é sobre o sentido do movimento angular do perfil transversal. Pela Fig. 30, pôde-se analisar que a simulação representou de forma fiel as condições impostas nos contornos na parte de pré-processamento, nas quais existe o movimento horário da parede externa e o anti-horário para a parede interna. Não obstante, um fato interessante a se notar é a mudança do sentido do escoamento, existente na região entre as duas paredes, exibida pelo gráfico de vetores de velocidade do *Fluent*.

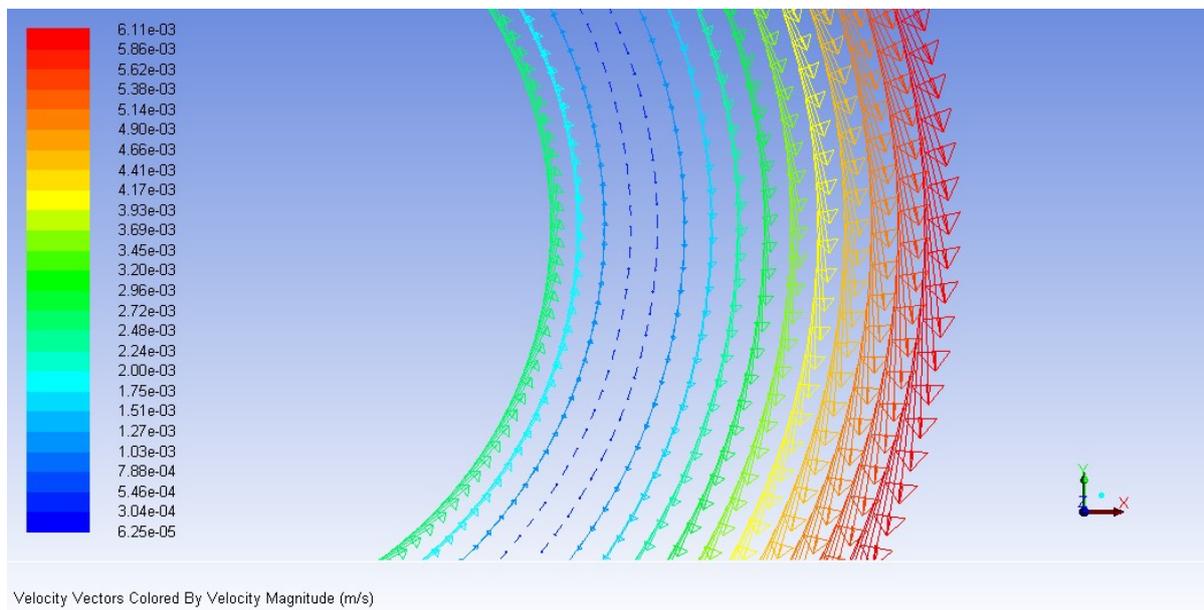


Figura 30. Caso 4: vetores de velocidade na seção transversal. Fonte: o autor.

Analisando o caso em que a parede externa rotaciona no sentido horário com 0,50 rad/s e a interna no sentido anti-horário com 0,50 rad/s, percebe-se a presença de um *outlier*, destacado em amarelo na Tab. 13. Sendo assim, utilizando uma análise de estatística descritiva o *outlier* será desconsiderado, por ser um valor muito discrepante dos outros encontrados. O valor discrepante pode representar erros no processamento dos dados ou no processo de coleta dos mesmos e, para o caso, devem ser excluídos da análise do banco de dados (REIS, 2002).

Tabela 13. Caso 4: dados do perfil de velocidade encontrados. Fonte: o autor, 2021.

Posição x [m]	Velocidade Analítica [m/s]	Velocidade Simulada [m/s]	Desvio [%]
Malha 111k (50 div long/100 div circ)			
0,0127000	0,0063500	0,0063486	0,0225197
0,0118533	0,0053420	0,0053410	0,0190940
0,0114300	0,0048210	0,0048208	0,0045634
0,0110067	0,0042880	0,0042877	0,0069963
0,0105833	0,0037390	0,0037402	0,0312918
0,0101600	0,0031750	0,0031764	0,0440945
0,0097367	0,0025920	0,0025943	0,0875772
0,0093133	0,0019880	0,0019913	0,1644869
0,0088900	0,0013610	0,0013644	0,2505511
0,0084667	0,0007055	0,0007101	0,6555634
0,0080433	0,0000185	0,0003502	1792,9675676
0,0076200	0,0007055	0,0006990	0,9201984
0,0071967	0,0014730	0,0014656	0,4996606
0,0067733	0,0022930	0,0022839	0,3986044
0,0063500	0,0031750	0,0031743	0,0226772
DESVIO MÉDIO [%]		0,2234199	

Nesse sentido, o comportamento do *outlier* mostrou que o *software* ou os esquemas de discretização das equações do processamento não puderam representar bem a região de mudança de sentido da velocidade. Dessa forma, pode-se inferir que o comportamento do perfil, resultante da configuração de movimento das paredes, induziu um comportamento físico de difícil aproximação numérica situado no ponto onde ocorre a inversão do sentido do escoamento da velocidade.

Nessa perspectiva, para a análise da Tab. 13, foi desconsiderado o valor do *outlier*. Dessa forma, sem o *outlier*, a configuração da malha 1 apresentou 14 pontos, e percebe-se que o perfil de velocidade simulado apresentou boa coerência com o resultado obtido pela equação analítica. Assim como nos outros casos, os resultados numéricos para o estudo das duas paredes rotacionando em sentidos opostos se mostraram próximos dos obtidos pela equação analítica, exceto para o ponto próximo ao *outlier*.

Pela Fig. 31 há um corte que denota o perfil de velocidade do caso, no qual pode-se perceber que a região com maior intensidade, em módulo é a da parede externa e a menor é uma região entre as paredes, onde ocorre a inversão do sentido do escoamento, crescendo sua magnitude novamente em direção a parede interna. Pela Tab. 13, nota-se que essa região não corresponde exatamente ao raio médio entre os cilindros, e sim a um raio menor, caracterizando uma região mais próxima da parede interna do que a externa. Tal observação é compreensível, uma vez que a velocidade da parede interna é menor do que a da externa, devido ao raio da sua circunferência. Portanto, uma maior parcela do fluido é influenciada pelo movimento rotacional do cilindro externo. Vale a pena lembrar que, para fins de análise estatística o dado discrepante não está contido na Fig. 31.

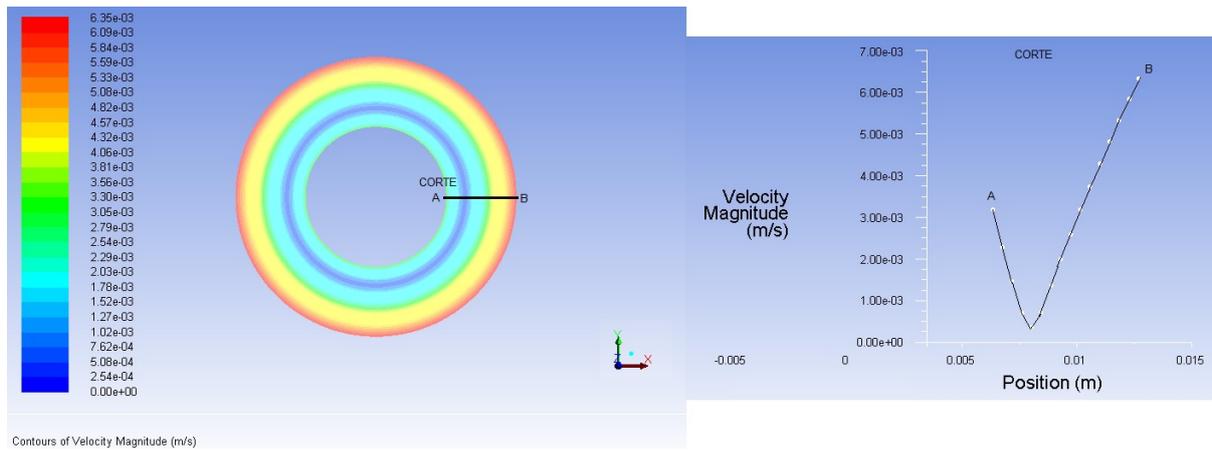


Figura 31. Caso 4: Corte do perfil de velocidade na seção transversal. Fonte: o autor.

CAPÍTULO 5

5. CONCLUSÃO

Após a tratativa numérica dada ao problema, bem como sua comparação com os resultados obtidos pela equação analítica, foi possível perceber que os resultados de velocidade tangencial encontrados para os casos foram coerentes.

Com exceção do dado *outlier* do caso 4, foi possível trabalhar com um baixo índice de desvio no perfil de velocidade tangencial, ao se comparar a solução numérica com a analítica:

- Caso 1: desvio médio = 0,0812 %
- Caso 2: desvio médio = 0,1871 %
- Caso 3: desvio médio = 0,0543 %
- Caso 4: desvio médio = 0,2234 %

Sendo assim, foi possível concluir que a malha representou satisfatoriamente o caso, por ter sido construída com base nas necessidades previstas pelo caso. A escolha de malha hexaédrica fez com que o custo computacional da simulação fosse pequeno e mesmo assim garantisse resultados com desvios baixos.

Outro ponto importante a ser concluído foi o da ausência de variação de pressão para o caso. Ao se observar o domínio de $[-1 \ 1]$ Pascal, percebeu-se que não houve variação significativa do gradiente de pressão dos casos.

Para os casos 1, 2 e 4, obteve-se perfis de velocidade não lineares, ocasionados pela diferença de velocidade imposta para as paredes. Já para o caso 3, foi possível perceber a linearidade, justamente por ter utilizado de uma mesma velocidade angular para as duas paredes do cilindro.

Não obstante, foi deduzido pelo caso 4 que as hipóteses assumidas no trabalho (geometria, malha e setup) apresentaram capacidade limitada para representar com fidelidade os pontos próximos onde ocorre inversão de sentido, como no caso 4.

5.1. Sugestões para trabalhos futuros

Com os resultados e discussões feitas neste trabalho, foi possível estipular futuros trabalhos que podem ser feitos dentro do tema aqui proposto.

- Construção de uma malha computacional mais refinada na região que apresentou o *outlier* para uma nova simulação do caso 4;
- Desenvolvimento do estudo de escoamento em região anular cilíndrica para cilindros rotacionando no mesmo sentido e velocidades diferentes;
- Desenvolvimento do estudo de escoamento em região anular cilíndrica para cilindros rotacionando em sentidos diferentes e velocidades diferentes;
- Utilização de fluidos não-newtonianos, tendo em vista a aplicação prática de viscosímetros rotacionais;
- Inserção de um perfil aerodinâmico dentro da região anular para estudo do comportamento do escoamento em níveis de coeficiente de sustentação e arrasto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BIRD, R. B, STEWART, W.E., LIGHTFOOT, E.N., Fenômenos de Transporte, LTC, 2004.
- BENNET, C.O., MYERS, J.E., Fenômenos de Transporte – Quantidade de Movimento, Calor e Massa, 1978.
- BRASIL ESCOLA. Daniel Bernoulli. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/biografia/daniel-bernoulli.htm>>. Acesso em: 11 out. 2021.
- CANALTECH. Por dentro do IBM Sequoia. Disponível em <<https://canaltech.com.br/hardware/Por-dentro-do-IBM-Sequoia-16-quatrilhoes-de-calculos-por-segundo/>> Acesso em: 11 out. 2021
- CERQUEIRA, R. F. L. métodos de Captura da interface em escoamentos multifásicos. Monografia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016.
- DUARTE, C. R. Estudo experimental e de simulação da fluidodinâmica e revestimento de partículas em leito de jorro. 2006. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química. Faculdade de Engenharia Química, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Minas Gerais, 2006.
- FACURI, R. M. Estudo do Escoamento Laminar Sólido-Líquido em Anular Excêntrico Empregando a Técnica de Dinâmica de Fluidos Computacional. 2014. Universidade Federal do Espírito Santo, 2014.
- FLUENT User's Guide, Fluent Inc., USA, 2011
- FOX, R.W.; Mc DONALD, A.T., Introdução a Mecânica dos Fluidos. 5ª ed. Rio de Janeiro, LTC, 504p., 2001.
- FRANCO, A. B. Modelação computacional e experimental de escoamentos provocados por roturas de barragens. 1996. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Instituto Superior Técnico, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, 1996.
- LIVI, C.P, Fundamentos de Fenômenos de Transporte, LTC, 2004.
- MUNSON, B.R.; YOUNG, D.F.; OKIISHI, T.H. Fundamentos da Mecânica dos Fluidos. V.1 e V.2 Trad. Por Euryale de Jesus Zerbini. São Paulo, Edgard Blucher, 1997.
- NORTON, T.; SUN, D.-W. An Overview of CFD Applications in the Food Industry. In: SUN, D.-W. (Ed.). Computational Fluid Dynamics in Food Processing. [s.l.] Taylor & Francis Group, LLC, 2007.
- PEREIRA, F. A. R. Escoamento laminar de líquidos não-newtonianos em seções anulares: estudos de CFD e abordagem experimental. 2006. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-

Graduação em Engenharia Química. Faculdade de Engenharia Química, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Minas Gerais, 2006.

REIS, E.A., REIS I.A. Análise Descritiva de Dados. Relatório Técnico do Departamento de Estatística da UFMG (2002).

SEBASTIANI, T. M. Application of Computational Fluid Dynamics (CFD) in Refrigerating Chambers: Review and Perspectives. 2021. Universidade Federal de Uberlândia, 2021.

SIEMENS. Simulação e Teste para Petróleo. Disponível em <<https://www.plm.automation.siemens.com/global/pt/industries/energy-utilities/energy-equipment-manufacturing/simulation-test-oil-gas.html>>. Acesso em: 11 out. 2021

SILVA, D. O. Otimização da Separação Sólido-Líquido em Hidrociclones Mediante Modificações Geométricas. 2012. Universidade Federal de Uberlândia, 2012.

SISSON, L.E., PITTS, D.R., Fenômenos de Transporte, Guanabara Dois, 1979.

STANFORD UNIVERSITY. Disponível em <<http://adl.stanford.edu/docs/display/SUSQUARED/Tutorial+6+-+Turbulent+RAE+2822>>. Acesso em: 11 out. 2021.

TU, J., YEOH, G. H., LIU, C. Computational Fluid Dynamics: A Practical Approach. 1. ed. Burlington: Elsevier, 2008. <https://doi.org/10.1016/B978-075068563-4.50003-3>

VERSTEEG, H. K., MALALASEKERA, W. An introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method. 1. ed. Nova Jersey: Prentice Hall, 1996.

VIEIRA, A. S. Um Panorama sobre Roll Waves em Escoamentos Laminares e Turbulentos com Superfície Livre. 2007, 112 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ciências Térmicas, Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2007.

VIEIRA, L. G. M. Fenômenos de Transporte. Curso de graduação em Engenharia Química. Notas de aula. Faculdade de Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia, 2009.

VIANNA, M.R. Mecânica dos Fluidos para Engenheiros. 4ª.ed. Belo Horizonte, Imprimatur, 582p., 2001

ZHAO, Y.; ZHANG, X.; XU, X. Application and research progress of cold storage technology in cold chain transportation and distribution. Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, 2020. <https://doi.org/10.1007/s10973-019-08400-8>

APENDICE A – Equação da Continuidade

Através de um balanço de massa num volume de controle para um fluido (Fig. 32), a Equação da Continuidade pode ser deduzida, tendo em vista que o fluido precisa ser puro e isotérmico.

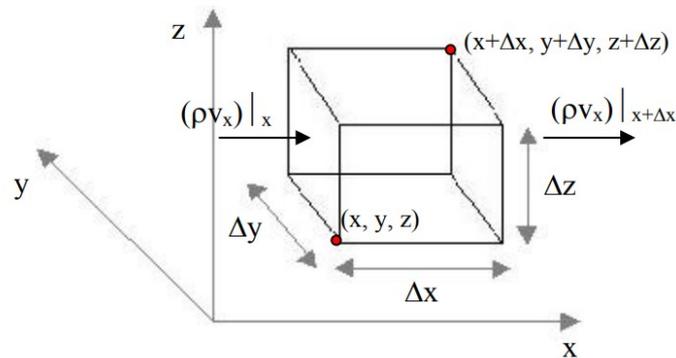


Figura 32. Escoamento de um fluido em um volume de controle. Fonte: Vieira, 2009.

Com o volume de controle (VC) definido, a Equação da Continuidade é definida pelo acúmulo de massa gerado pela velocidade com que a matéria entra ou sai do VC, de acordo com o quanto da massa no VC é consumida ou gerada. Como mostra a Eq. (20).

$$\dot{M}acúmulo = \dot{M}entradas - \dot{M}Saídas + \dot{M}Geração - \dot{M}Consumo \quad (20)$$

Sendo que o acúmulo pode ser definido da seguinte forma, Eq. (21):

$$\dot{M}acúmulo = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (21)$$

Para obter a diferença entre a massa que entra e sai do sistema é necessário se fazer um balanço de matéria, para cada face do VC da Fig. 32, conforme Eq. (22) seguinte.

$$\begin{aligned} \dot{M}Entrada - \dot{M}Saída = \\ = \Delta y \Delta z [(\rho v_x)_x - (\rho v_x)_{x+\Delta x}] + \Delta x \Delta z [(\rho v_y)_y \\ - (\rho v_y)_{y+\Delta y}] + \Delta x \Delta y [(\rho v_z)_z - (\rho v_z)_{z+\Delta z}] \end{aligned} \quad (22)$$

Outro ponto importante é que, como no caso não há reações nucleares ou químicas no processo, as taxas de consumo e geração são nulas, como mostra a Eq. (23).

$$\dot{M}geração = \dot{M}consumo = 0 \quad (23)$$

Agora, com as considerações feitas e dividindo a Eq. (22) por $\Delta x \Delta y \Delta z$ e aplicando o limite tendendo a zero para Δx , Δy , Δz se obtém a Equação da Continuidade, conforme Eq. (24)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z\right) \quad (24)$$

Vale ressaltar também que, para a solução de alguns sistemas mais complexos, faz-se necessário a tratativa da Equação da Continuidade em sistemas de coordenadas cilíndricas (r,θ,z) , como mostra a Eq. (25), ou esféricas (r,θ,φ) , Eq. (26), ao invés da comumente utilizada em coordenadas cartesianas (x,y,z) .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho v_\varphi) = 0 \quad (26)$$

APENDICE B – Equação do Movimento

A fim de se definir a Equação do Movimento, faz-se necessário o entendimento de alguns conceitos de Forças Inerciais (F_i), Forças de Campo (F_c) e de Superfície (F_s), conforme Eq. (27).

$$F_i = F_c + F_s \quad (27)$$

Sendo que:

$$F_i = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \quad (28)$$

E, ao considerar a massa do corpo como constante, tem-se:

$$F_i = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma \quad (29)$$

Tendo em vista o uso do Volume de Controle explicitado na Fig. 32 e a ótica dos Fenômenos de Transporte, pode-se escrever a equação anterior como:

$$F_i = \iiint_{v_c} \rho a dv_c \quad (30)$$

A Força de Campo pode ser escrita como:

$$F_c = \iiint_{v_c} \rho K dv_c \quad (31)$$

Em que K é o vetor do campo, podendo ser gravitacional, magnético, elétrico etc.

Também, a Força de Superfície pode ser escrita como:

$$F_s = \iint_S T ndS \quad (32)$$

Dessa maneira:

$$\iiint_{v_c} \rho a dv_c = \iiint_{v_c} \rho K dv_c - \iint_S T ndS \quad (33)$$

Sendo que, o tensor T se estabelece como:

$$T = PI + \tau \quad (34)$$

Na Eq. (34), “I” é um tensor unitário, sendo que a parcela “PI” se estabelece como uma Tensão Estática ou Normal por conta da pressão do fluido. Já a parcela “τ” é devida ao movimento do fluido, se existente, e é denominada de Tensão Dinâmica ou Viscosa.

$$T = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \tau_{11} + P & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} + P & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} + P \end{pmatrix}$$

Dessa maneira, o balanço de forças da Eq. (35) é escrito como:

$$\iiint_{v_c} \rho a dv_c = \iiint_{v_c} \rho K dv_c - \iint_S \tau n dS - \iint_S P I n dS \quad (35)$$

Sendo que, utilizando o Teorema de Gauss, pode-se reescrever as duas últimas integrais de superfície como uma integral de volume, como:

$$\iiint_{v_c} \rho a dv_c = \iiint_{v_c} \rho K dv_c - \iiint_{v_c} \nabla \tau dv_c - \iiint_{v_c} \nabla P I dv_c \quad (36)$$

Assim:

$$\iiint_{v_c} (\rho a - \rho K + \nabla \tau + \nabla P I) = 0 \quad (37)$$

E assim, analisando a integral, percebe-se que o resultado dela só será nulo se o todo o integrando for nulo, dessa maneira:

$$(\rho a - \rho K + \nabla \tau + \nabla P I) = 0 \quad (38)$$

$$\rho a = -\nabla P I - \nabla \tau + \rho K \quad (39)$$

Em que:

ρa : forças inerciais por unidade de volume;

$\nabla \cdot (P I)$: forças de pressão por unidade de volume;

$\nabla \cdot (\tau)$ forças viscosas por unidade de volume;

ρK : forças de campo por unidade de volume;

Na tratativa de Fenômenos de Transporte, pode-se utilizar do ponto de vista lagrangeano para representar a aceleração do sistema, assim, explicitando a aceleração na forma de Derivada Substantiva tem-se a Eq. (39).

$$a = \frac{Dv}{Dt} \quad (40)$$

Sendo que:

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\nabla v \quad (41)$$

Dessa maneira, ao substituir Eq. (40) da aceleração em termos de derivada substantiva na Equação (38), tem-se:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla \cdot P I - \nabla \cdot \tau + \rho g \quad (42)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla P - \nabla \cdot \tau + \rho g \quad (43)$$

Em que a Eq. (43) representa a Equação do Movimento e, para questões de didática, pode ser expandida em coordenadas cartesianas individuais como:

Componente em x:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] = \\ = -\frac{\partial P}{\partial x} - \left[\frac{\partial(\tau_{xx})}{\partial x_x} + \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial x_y} + \frac{\partial(\tau_{zx})}{\partial x_z} \right] + \rho g_x \end{aligned} \quad (44)$$

Componente em y:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_y}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \right] = \\ = -\frac{\partial P}{\partial y} - \left[\frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial x_x} + \frac{\partial(\tau_{yy})}{\partial x_y} + \frac{\partial(\tau_{zy})}{\partial x_z} \right] + \rho g_y \end{aligned} \quad (45)$$

Componente em z:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] = \\ = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left[\frac{\partial(\tau_{xz})}{\partial x_x} + \frac{\partial(\tau_{yz})}{\partial x_y} + \frac{\partial(\tau_{zz})}{\partial x_z} \right] + \rho g_z \end{aligned} \quad (46)$$

Um ponto importante a se observar é que quando se estuda superfícies complexas, com contornos complexos, trabalhar com a Equação do Movimento em coordenadas cartesianas é matematicamente trabalhoso. Sendo assim, a Equação do Movimento pode ser escrita em coordenadas cilíndricas conforme:

Componente em r :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \end{aligned} \quad (47)$$

Componente em θ :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \end{aligned} \quad (48)$$

Componente em z :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \end{aligned} \quad (49)$$