



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



**JACKELINE SANTOS DE OLIVEIRA**

**ANÁLISE NUMÉRICA DOS PARÂMETROS QUE EXERCEM  
INFLUÊNCIA SOBRE RESISTÊNCIA À FORÇA CORTANTE  
EM LAJES MACIÇAS DE CONCRETO ARMADAS EM DUAS  
DIREÇÕES**

Uberlândia, 2021

**JACKELINE SANTOS DE OLIVEIRA**

**ANÁLISE NUMÉRICA DOS PARÂMETROS QUE EXERCEM  
INFLUÊNCIA SOBRE RESISTÊNCIA À FORÇA CORTANTE  
EM LAJES MACIÇAS DE CONCRETO ARMADAS EM DUAS  
DIREÇÕES**

Qualificação apresentada à Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas e Construção Civil

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Gustavo Delalibera

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

O48a  
2021

Oliveira, Jackeline Santos de, 1994-

Análise numérica dos parâmetros que exercem influência sobre resistência à força cortante em lajes maciças de concreto armadas em duas direções [recurso eletrônico] / Jackeline Santos de Oliveira. - 2021.

Orientador: Rodrigo Gustavo Delalibera.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia.

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.5001>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Engenharia Civil. I. Delalibera, Rodrigo Gustavo, 1976-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

---

CDU: 624

André Carlos Francisco  
Bibliotecário - CRB-6/3408



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

## ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Civil				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 266, PPGEC				
Data:	26 de agosto de 2021	Hora de início:	13 h e 30 min	Hora de encerramento:	16 h e 30 min
Matrícula do Discente:	11912ECV010				
Nome do Discente:	Jackeline Santos de Oliveira				
Título do Trabalho:	Análise numérica dos parâmetros que exercem influência sobre resistência à força cortante em lajes maciças de concreto armadas em duas direções				
Área de concentração:	Estruturas e Construção civil				
Linha de pesquisa:	Estruturas				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Estacas metálicas: Análise da ligação das estacas com o bloco				

Reuniu-se, em sessão pública pela plataforma Conferência Web (MConf) provida pela Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, assim composta pelos Professores Doutores: Maria Cristina Vidigal de Lima – FECIV/UFU, José Neres da Silva Filho – CT/UFRN e Rodrigo Gustavo Delalibera – FECIV/UFU orientador da candidata.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Rodrigo Gustavo Delalibera, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(as) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

### Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Gustavo Delalibera, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/08/2021, às 16:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maria Cristina Vidigal de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/08/2021, às 16:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

Documento assinado eletronicamente por **José Neres da Silva Filho, Usuário Externo**, em



26/08/2021, às 18:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.](#)



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

[https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?  
acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0)

, informando o código verificador **2956704** e  
o código CRC **B42C6C1B**.

---

Referência: Processo nº 23117.051951/2021-78

SEI nº 2956704

*Dedico este trabalho a meus pais, Damiana e João Batista.*

*Minha irmã, Jacyara.*

*Meu namorado, Gustavo.*

*Ao meu coelho, Bilú.*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por estar sempre me abençoando e guiando meus passos ao longo dessa jornada. E por me proteger durante as viagens exaustivas até a universidade.

À minha mãe, Damiana, pelo apoio e incentivo que me possibilitaram adquirir conquistas que antes eram apenas sonhos. Ao meu pai, João Batista, que de onde estiver sei que estava me consolando e me dando força para superar essa caminhada árdua e desafiadora. À minha irmã, Jacyara, pelo companheirismo e amizade durante todos esses anos. Ao meu namorado, Gustavo, pela compreensão, companheirismo e apoio durante a elaboração deste trabalho. Sem vocês nada disso seria possível.

Ao meu orientador, Rodrigo Gustavo Delalibera, pela orientação e pelo conhecimento a mim transmitidos.

À todas as amizades que fiz durante esses dois anos, pessoas com quem convivi e aprendi muito, além de tornar os dias mais divertidos.

A todos os meus professores da Universidade Federal de Uberlândia que se dispuseram a compartilhar seus conhecimentos, de forma a contribuir para a minha formação tanto como aluna, quanto como engenheira e futura docente.

À plataforma *ResearchGate* e aos pesquisadores que se dispuseram a compartilhar seu conhecimento e suas experiências sobre análise numérica e a utilização do *software ANSYS*, contribuindo para a realização deste trabalho.

## RESUMO

As lajes podem ser submetidas a força cortante o que ocasiona tensão de cisalhamento no elemento estrutural, como ocorrido no sistema estrutural em que se têm lajes apoiadas diretamente sobre pilares, sem a utilização de vigas para intermediar a transmissão de esforços entre esses dois elementos. Nesse contexto, existem fatores que contribuem para o aumento da resistência à força cortante em estruturas de concreto sem armadura para força cortante, tais como a altura da seção transversal, a taxa de armadura longitudinal, o tamanho das fissuras e a resistência à compressão do concreto. Alguns trabalhos buscaram analisar a influência desses fatores sobre o ganho de resistência à força cortante em lajes armadas em duas direções. Diante disso, o presente trabalho visou, por meio da análise numérica, compreender a influência de três principais parâmetros como a espessura da laje, a resistência à compressão do concreto e a taxa de armadura longitudinal sobre a resistência à força cortante em lajes armadas em duas direções sem armadura transversal, além da definição do parâmetro que possui maior contribuição. Para isso, foram elaborados dois modelos numéricos: o primeiro modelo numérico não apresentou resultados representativos dos modelos experimentais, além de não trazer uma boa reprodução do comportamento das lajes; já com o Modelo II foi possível chegar a resultados próximos aos dos modelos experimentais. Dessa forma, foi empregado o Modelo II para a realização das simulações com a variação dos parâmetros em estudo. Com os resultados foi empregada a análise de variância para a determinação do fator de maior relevância sobre o aumento da resistência à força cortante. Por fim, foi verificado que para as lajes esbeltas os fatores considerados na pesquisa não apresentam grande significância sobre a resistência ao cisalhamento, sendo necessária a definição de novas variáveis para a definição do fator de maior relevância. Já para o grupo de lajes espessas foi determinado como fator relevante a taxa de armadura longitudinal, sendo o parâmetro que exerce maior influência sobre o ganho de resistência à força cortante.

**Palavras-chave:** Resistência - Concreto Armado - Armadura - Cisalhamento - Lajes Lisas

## ABSTRACT

The slabs can be subjected to shear force, which causes shear stress in the structural element, as occurred in the structural system in which slabs are supported directly on columns, without the use of beams to mediate the transmission of forces between these two elements. In this context, there are factors that contribute to the increase in shear strength in concrete structures without shear reinforcement, such as cross-sectional height, longitudinal reinforcement ratio, crack size and concrete compressive strength. Some studies sought to analyze the influence of these factors on the shear strength gain in slabs reinforced in two directions. Therefore, the present work aimed, through numerical analysis, to understand the influence of three main parameters such as slab thickness, concrete compressive strength and longitudinal reinforcement ratio on shear strength in the reinforced concrete two-way slabs without shear reinforcement, in addition to defining the parameter that has the greatest contribution. For that, two numerical models were elaborated: the first numerical model did not present representative results of the experimental models, besides not bringing a good reproduction of the behavior of the slabs; with Model II it was possible to reach results close to those of the experimental models. Thus, Model II was used to carry out the simulations with the variation of the parameters under study. With the results, analysis of variance was used to determine the most relevant factor on the increase in shear strength. Finally, it was verified that for slender slabs the factors considered in the research do not present great significance on the shear strength, being necessary the definition of new variables to define the most relevant factor. For the group of thick slabs, the longitudinal reinforcement ratio was determined as a relevant factor, being the parameter that exerts the greatest influence on the gain in shear strength.

**Keywords:** Strength - Reinforced Concrete - Reinforcement - Shear - Flat Slabs

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Superfície de ruptura por punção em lajes lisas .....	19
Figura 2 – Elementos de superfície .....	23
Figura 3 – Comportamento de laje armada em duas direções, simplesmente apoiada, sob ação de carregamento e efeito de empenamento dos cantos.....	25
Figura 4 – Modos de ruptura de vigas profundas .....	26
Figura 5 – Ação de arco em vigas .....	26
Figura 6 – Fissuração na face tracionada da laje no momento da ruptura.....	27
Figura 7 – Extensão da fissura circumferencial.....	28
Figura 8 – Ruptura por punção em lajes armadas em duas direções .....	29
Figura 9 – Estágios da curva Força x Deslocamento e modos de ruptura.....	29
Figura 10 – Fissura comum em lajes de concreto armado em ensaios de punção .....	30
Figura 11 – Mecanismo de transferência de cisalhamento em vigas esbeltas.....	31
Figura 12 – Falha de cisalhamento de vigas esbeltas .....	32
Figura 13 – Mecanismo de efeito de pino ao longo de elemento de concreto armado .....	33
Figura 14 – Detalhes da distribuição da armadura na amostra S1, todas as dimensões em mm .....	35
Figura 15 – Montagem do teste e aplicação da carga.....	36
Figura 16 – Força x Deslocamento das amostras do Grupo 1 .....	37
Figura 17 – Detalhamento da armadura da amostra do Grupo 1 .....	38
Figura 18 – Montagem de ensaio realizado com todas as unidades em mm.....	38
Figura 19 – Comparação das lajes dos Grupos 1 e 2.....	39
Figura 20 – Comparação das lajes dos Grupos 1, 3 e 4.....	40
Figura 21 – Layout das amostras elaboradas com todas as unidades em mm.....	41
Figura 22 – Distribuição da armadura para as taxas de armadura de (a) 1,8% e (b) 0,6% .....	42
Figura 23 – Montagem do ensaio realizado por ZOHREVAND et al. (2015).....	43
Figura 24 – Força x Deslocamento para as taxas de armadura 1,8% .....	43
Figura 25 – Força x Deslocamento para as taxas de armadura 0,6% .....	44
Figura 26 – Disposição das armaduras nos modelos experimentais com taxa de armadura de (a) 0,38% e (b) 1,00% .....	45
Figura 27 – Montagem do ensaio realizado por TORABIAN et al. (2019) .....	46
Figura 28 – Força x Rotação das amostras ensaiadas.....	46

Figura 29 – Seções transversais analisadas e suas respetivas armaduras .....	48
Figura 30 – Tensão residual de tração do concreto .....	49
Figura 31 – Resistência à força cortante em função da resistência à compressão do concreto segundo a CEB-FIP Model Code (2010).....	54
Figura 32 – Elemento finito LINK180 .....	58
Figura 33 – Elemento finito SOLID65 .....	59
Figura 34 – Elemento finito SOLID185 .....	59
Figura 35 – Curva tensão-deformação do concreto: (a) curva real do concreto sob compressão e (b) modelo de Hognestad modificado.....	60
Figura 36 – Estágio da curva tensão-deformação de estruturas de concreto armado.....	62
Figura 37 – Comportamento do aço sob carga de compressão e de tração .....	63
Figura 38 – Redução gradual da resistência à tração do concreto devido ao <i>tension stiffening</i> e atuação da constante TC na obtenção da curva .....	64
Figura 39 – Modelo físico considerado na simulação numérica .....	66
Figura 40 – Elementos finitos definidos para cada material no Modelo I.....	66
Figura 41 – Zonas de consideração e desconsideração do esmagamento do concreto.....	67
Figura 42 – Simetria empregada nas chapas de aço das lajes com altura superior a 100 mm ..	68
Figura 43 – Simetria empregada nas chapas de aço das lajes com altura igual ou inferior a 100 mm .....	68
Figura 44 – Definição do comprimento dos apoios em $\frac{1}{4}$ da laje para o Modelo I.....	69
Figura 45 – Elementos finitos definidos para cada material no Modelo II .....	71
Figura 46 – Localização dos apoios elásticos.....	72
Figura 47 – Variação do E do apoio elástico usado no Modelo II para lajes com taxa de armadura longitudinal superior a 0,75% .....	73
Figura 48 – Definição dos apoios no Modelo II para lajes com altura maior que 100 mm ....	74
Figura 49 – Comparativo da restrição dos apoios em metade da largura da chapa de aço e em duas unidades de malha .....	75
Figura 50 – Comparativo das curvas Força x Deslocamento com e sem a consideração da existência de chapa de aço na modelagem .....	76
Figura 51 – Região de desconsideração do esmagamento do concreto para situações onde tem-se aplicação da carga por coluna de concreto ou aço .....	77
Figura 52 – Curvas Força x Deslocamento dos modelos experimentais estudados do grupo de lajes espessas ( $h > 100$ mm) e taxa de armadura entre parênteses .....	80

Figura 53 – Curvas Força x Deslocamento dos modelos experimentais estudados do grupo de lajes esbeltas ( $h \leq 100$ mm) e taxa de armadura entre parênteses .....	80
Figura 54 – Curva Força x Deslocamento do Modelo G-1 .....	82
Figura 55 – Curva Força x Deslocamento do Modelo G-2 .....	82
Figura 56 – Curva Força x Deslocamento do Modelo G-3 .....	83
Figura 57 – Curva Força x Deslocamento do Modelo G-4 .....	83
Figura 58 – Curva Força x Deslocamento do Modelo F-1 .....	84
Figura 59 – Curva Força x Deslocamento do Modelo F-2 .....	84
Figura 60 – Curva Força x Deslocamento do Modelo F-3 .....	85
Figura 61 – Curva Força x Deslocamento do Modelo F-4 .....	85
Figura 62 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo G-1 em $N/mm^2$ .....	87
Figura 63 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo G-2 em $N/mm^2$ .....	88
Figura 64 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo G-3 em $N/mm^2$ .....	88
Figura 65 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo G-4 em $N/mm^2$ .....	89
Figura 66 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo F-1 em $N/mm^2$ .....	89
Figura 67 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo F-2 em $N/mm^2$ .....	90
Figura 68 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo F-3 em $N/mm^2$ .....	90
Figura 69 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo F-4 em $N/mm^2$ .....	91
Figura 70 – Curva Força x Deslocamento do modelo G-1 aplicando o Modelo II .....	92
Figura 71 – Curva Força x Deslocamento do modelo G-2 aplicando o Modelo II .....	92
Figura 72 – Curva Força x Deslocamento do modelo G-3 aplicando o Modelo II .....	93
Figura 73 – Curva Força x Deslocamento do modelo G-4 aplicando o Modelo II .....	93
Figura 74 – Curva Força x Deslocamento do modelo F-1 aplicando o Modelo II .....	94
Figura 75 – Curva Força x Deslocamento do modelo F-2 aplicando o Modelo II .....	94
Figura 76 – Curva Força x Deslocamento do modelo F-3 aplicando o Modelo II .....	95
Figura 77 – Curva Força x Deslocamento do modelo F-4 aplicando o Modelo II .....	95
Figura 78 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo G-1 em $N/mm^2$ .....	97
Figura 79 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo G-2 em $N/mm^2$ .....	98
Figura 80 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo G-3 em $N/mm^2$ .....	98

Figura 81 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo G-4 em N/mm <sup>2</sup> .....	99
Figura 82 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo F-1 em N/mm <sup>2</sup> .....	99
Figura 83 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo F-2 em N/mm <sup>2</sup> .....	100
Figura 84 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo F-3 em N/mm <sup>2</sup> .....	100
Figura 85 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo F-4 em N/mm <sup>2</sup> .....	101
Figura 86 – Primeira abertura da fissura no modelo G-1 .....	101
Figura 87 – Primeira abertura da fissura no modelo G-2 .....	101
Figura 88 – Primeira abertura da fissura no modelo G-3 .....	102
Figura 89 – Primeira abertura da fissura no modelo G-4 .....	102
Figura 90 – Primeira abertura da fissura no modelo F-1 .....	102
Figura 91 – Primeira abertura da fissura no modelo F-2.....	102
Figura 92 – Primeira abertura da fissura no modelo F-3 .....	102
Figura 93 – Primeira abertura da fissura no modelo F-4.....	103
Figura 94 – Dimensões consideradas no modelo numérico, em cm. .....	103
Figura 95 – Legenda considerada na nomenclatura dos modelos numéricos.....	104
Figura 96 – Curva Força x Deslocamento para fck de 25 MPa, altura de 8 cm e variação da taxa de armadura .....	104
Figura 97 – Curva Força x Deslocamento para fck de 25 MPa, altura de 9 cm e variação da taxa de armadura .....	105
Figura 98 – Curva Força x Deslocamento para fck de 25 MPa, altura de 10 cm e variação da taxa de armadura.....	105
Figura 99 – Curva Força x Deslocamento para fck de 35 MPa, altura de 8 cm e variação da taxa de armadura .....	106
Figura 100 – Curva Força x Deslocamento para fck de 35 MPa, altura de 9 cm e variação da taxa de armadura.....	106
Figura 101 – Curva Força x Deslocamento para fck de 35 MPa, altura de 10 cm e variação da taxa de armadura.....	107

Figura 102 – Curva Força x Deslocamento para fck de 45 MPa, altura de 8 cm e variação da taxa de armadura.....	107
Figura 103 – Curva Força x Deslocamento para fck de 45 MPa, altura de 9 cm e variação da taxa de armadura.....	108
Figura 104 – Curva Força x Deslocamento para fck de 45 MPa, altura de 10 cm e variação da taxa de armadura.....	108
Figura 105 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A8-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	109
Figura 106 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A8-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	110
Figura 107 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A8-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	110
Figura 108 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A9-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	111
Figura 109 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A9-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	111
Figura 110 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A9-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	112
Figura 111 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A10-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	112
Figura 112 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A10-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	113
Figura 113 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A10-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	113
Figura 114 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B8-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	114
Figura 115 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B8-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	114
Figura 116 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B8-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	115
Figura 117 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B9-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	115
Figura 118 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B9-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	116
Figura 119 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B9-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	116
Figura 120 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B10-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	117
Figura 121 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B10-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	117
Figura 122 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B10-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	118
Figura 123 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C8-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	118
Figura 124 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C8-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	119
Figura 125 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C8-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	119
Figura 126 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C9-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	120
Figura 127 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C9-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	120
Figura 128 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C9-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	121
Figura 129 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C10-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	121
Figura 130 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C10-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	122
Figura 131 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C10-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	122

Figura 132 – Primeira fissura aberta no modelo A8-25 .....	123
Figura 133 – Primeira fissura aberta no modelo A8-50 .....	123
Figura 134 – Primeira fissura aberta no modelo A8-75 .....	123
Figura 135 – Primeira fissura aberta no modelo A9-25 .....	123
Figura 136 – Primeira fissura aberta no modelo A9-50 .....	124
Figura 137 – Primeira fissura aberta no modelo A9-75 .....	124
Figura 138 – Primeira fissura aberta no modelo A10-25 .....	124
Figura 139 – Primeira fissura aberta no modelo A10-50 .....	124
Figura 140 – Primeira fissura aberta no modelo A10-75 .....	125
Figura 141 – Primeira fissura aberta no modelo B8-25.....	125
Figura 142 – Primeira fissura aberta no modelo B8-50.....	125
Figura 143 – Primeira fissura aberta no modelo B8-75.....	125
Figura 144 – Primeira fissura aberta no modelo B9-25.....	126
Figura 145 – Primeira fissura aberta no modelo B9-50.....	126
Figura 146 – Primeira fissura aberta no modelo B9-75.....	126
Figura 147 – Primeira fissura aberta no modelo B10-25.....	126
Figura 148 – Primeira fissura aberta no modelo B10-50.....	127
Figura 149 – Primeira fissura aberta no modelo B10-75.....	127
Figura 150 – Primeira fissura aberta no modelo C8-25.....	127
Figura 151 – Primeira fissura aberta no modelo C8-50.....	127
Figura 152 – Primeira fissura aberta no modelo C8-75.....	128
Figura 153 – Primeira fissura aberta no modelo C9-25.....	128
Figura 154 – Primeira fissura aberta no modelo C9-50.....	128
Figura 155 – Primeira fissura aberta no modelo C9-75.....	128
Figura 156 – Primeira fissura aberta no modelo C10-25.....	129
Figura 157 – Primeira fissura aberta no modelo C10-50.....	129
Figura 158 – Primeira fissura aberta no modelo C10-75.....	129
Figura 159 – Curva Força x Deslocamento para fck de 25 MPa, altura de 12 cm e variação da taxa de armadura.....	130
Figura 160 – Curva Força x Deslocamento para fck de 25 MPa, altura de 13 cm e variação da taxa de armadura.....	130
Figura 161 – Curva Força x Deslocamento para fck de 25 MPa, altura de 14 cm e variação da taxa de armadura.....	131

Figura 162 – Curva Força x Deslocamento para fck de 35 MPa, altura de 12 cm e variação da taxa de armadura.....	131
Figura 163 – Curva Força x Deslocamento para fck de 35 MPa, altura de 13 cm e variação da taxa de armadura.....	132
Figura 164 – Curva Força x Deslocamento para fck de 35 MPa, altura de 14 cm e variação da taxa de armadura.....	132
Figura 165 – Curva Força x Deslocamento para fck de 45 MPa, altura de 12 cm e variação da taxa de armadura.....	133
Figura 166 – Curva Força x Deslocamento para fck de 45 MPa, altura de 13 cm e variação da taxa de armadura.....	133
Figura 167 – Curva Força x Deslocamento para fck de 45 MPa, altura de 14 cm e variação da taxa de armadura.....	134
Figura 168 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A12-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	135
Figura 169 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A12-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	135
Figura 170 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A12-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	136
Figura 171 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A13-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	136
Figura 172 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A13-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	137
Figura 173 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A13-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	137
Figura 174 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A14-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	138
Figura 175 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A14-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	138
Figura 176 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A14-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	139
Figura 177 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B12-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	139
Figura 178 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B12-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	140
Figura 179 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B12-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	140
Figura 180 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B13-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	141
Figura 181 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B13-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	141
Figura 182 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B13-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	142
Figura 183 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B14-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	142
Figura 184 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B14-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	143
Figura 185 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B14-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	143
Figura 186 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C12-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	144
Figura 187 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C12-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	144
Figura 188 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C12-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	145

Figura 189 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C13-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	145
Figura 190 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C13-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	146
Figura 191 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C13-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	146
Figura 192 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C14-25 em N/mm <sup>2</sup> .....	147
Figura 193 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C14-50 em N/mm <sup>2</sup> .....	147
Figura 194 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C14-75 em N/mm <sup>2</sup> .....	148
Figura 195 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A12-25 .....	148
Figura 196 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A12-50 .....	149
Figura 197 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A12-75 .....	149
Figura 198 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A13-25 .....	149
Figura 199 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A13-50 .....	149
Figura 200 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A13-75 .....	150
Figura 201 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A14-25 .....	150
Figura 202 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A14-50 .....	150
Figura 203 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A14-75 .....	150
Figura 204 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B12-25 .....	151
Figura 205 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B12-50 .....	151
Figura 206 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B12-75 .....	151
Figura 207 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B13-25 .....	151
Figura 208 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B13-50 .....	152
Figura 209 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B913-75 .....	152
Figura 210 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B14-25 .....	152
Figura 211 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B14-50 .....	152
Figura 212 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B14-75 .....	153
Figura 213 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C12-25 .....	153
Figura 214 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C12-50 .....	153
Figura 215 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C12-75 .....	153
Figura 216 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C13-25 .....	154
Figura 217 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C13-50 .....	154
Figura 218 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C13-75 .....	154
Figura 219 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C14-25 .....	154
Figura 220 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C14-50 .....	155
Figura 221 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C14-75 .....	155

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Grupo das amostras testadas .....	35
Tabela 2 – Resultados experimentais obtidos no estudo de Hassan <i>et al.</i> (2018) .....	36
Tabela 3 – Resultados experimentais obtidos no estudo de Afefy e El-Tony (2019) .....	39
Tabela 4 – Propriedades das amostras analisadas .....	42
Tabela 5 – Propriedades e características das amostras .....	45
Tabela 6 – Valores de tolerância e passos de carga adotados no Modelo II .....	77
Tabela 7 – Classes do concreto de acordo com a norma Eurocode 2 (2004) .....	78
Tabela 8 – Dados dos modelos experimentais.....	79
Tabela 9 – Propriedades dos aços utilizados nos ensaios experimentais .....	79
Tabela 10 – Dados de entrada do modelo <i>Concrete</i> para os respectivos modelos experimentais simulados utilizados no Modelo I.....	81
Tabela 11 – Força e deslocamento máximos experimental e numérico do grupo de lajes espessas .....	86
Tabela 12 – Força e deslocamento máximos experimental e numérico do grupo de lajes esbeltas .....	86
Tabela 13 – Dados de entrada do modelo <i>Concrete</i> para os respectivos modelos experimentais simulados utilizados no Modelo II .....	91
Tabela 14 – Força e deslocamento máximos experimental e numérico do grupo de lajes espessas .....	96
Tabela 15 – Força e deslocamento máximos experimental e numérico do grupo de lajes esbeltas .....	96
Tabela 16 – Equações aplicadas na análise de variância.....	156
Tabela 17 – Tensões de cisalhamento máximas e mínimas dos modelos do grupo de lajes esbeltas .....	158
Tabela 18 – Tensões de cisalhamento máximas e mínimas dos modelos do grupo de lajes espessas.....	159
Tabela 19 – Resultado da análise de variância das tensões de cisalhamento mínimas do grupo de lajes esbeltas .....	160
Tabela 20 – Resultado da análise de variância das tensões de cisalhamento máximas do grupo de lajes esbeltas .....	160

Tabela 21 – Resultado da análise de variância das tensões de cisalhamento mínimas do grupo de lajes espessas .....	161
Tabela 22 – Resultado da análise de variância das tensões de cisalhamento máximas do grupo de lajes espessas .....	161

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Tamanho do vão de cisalhamento
$A_c$	Área da seção transversal de concreto
$A_{chapa}$	Área da face superior da chapa de aço
$A_s$	Área da armadura longitudinal
$A_{s1}$	Área da armadura de tração
$b$	Largura da viga
$b_o$	Perímetro crítico
$b_w$	Menor largura da seção ao longo da altura útil
$d$	Altura útil da peça
$d_g$	Diâmetro máximo do agregado
$d_v$	Altura efetiva considerando apoios inseridos na laje
$E_c$	Módulo de elasticidade do concreto no estágio linear na curva tensão-deformação
$E_{chapa}$	Módulo de elasticidade da chapa de aço
$E_s$	Módulo de elasticidade do aço
$f$	Tensão de compressão do concreto para a respectiva deformação
$f_{ck}$	Resistência característica à compressão do concreto
$f_{ct,inf}$	Resistência à tração inferior do concreto
$f_{ct,m}$	Resistência à tração média do concreto
$f_{ct,sp}$	Resistência à tração indireta do concreto
$f_{ct,sup}$	Resistência à tração superior do concreto
$f_{ct}$	Resistência à tração do concreto
$f_{ctk,inf}$	Resistência à tração inferior do concreto
$f_{cu}$	Resistência cúbica do concreto
$f_y$	Resistência ao escoamento do aço
$h$	Altura da laje ou da viga
$k$	Coeficiente que depende da taxa de armadura longitudinal
$k_p$	Constante relacionada ao efeito de pino
$k_{dg}$	Parâmetro relacionado ao tamanho do agregado
$k_\psi$	Parâmetro que depende da rotação da laje na região próxima ao suporte

$L$	Comprimento da laje
$M_d$	Momento fletor causado pelo efeito de pino
$M_{Rd}$	Momento fletor médio resistente
$M_{Sd}$	Momento fletor médio solicitante
$M_d$	Momento fletor causado pelo efeito de pino
$N_{Ed}$	Força longitudinal nas faixas da laje quando se tem pilares internos ou forças longitudinais na seção crítica de controle para pilares de borda
$N_{Sd}$	Força longitudinal na seção em decorrência da protensão da armadura ou devido ao carregamento
$r_s$	Distância entre o eixo do pilar e a linha de momentos nulos
TC	Fator de fissura por tração – <i>Tension stiffening</i>
$v_{mín}$	Valor mínimo da tensão de cisalhamento
$V$	Força cortante total
$V_{Rd1}$	Esforço resistente de cálculo
$V_{sd}$	Esforço solicitante de cálculo
$V_{Bd,c}$	Resistência ao cisalhamento bidirecional de cálculo
$V_E$	Valor da força aplicada
$V_{Rd,c}$	Resistência ao cisalhamento em lajes maciças sem armadura transversal
$V_c$	Força cortante na zona de compressão
$V_{cr}$	Força cortante responsável pelo aparecimento das fissuras diagonais na peça
$V_d$	Força de pino
$V_n$	Resistência ao cisalhamento bidirecional
$V_o$	Força cortante devido ao engrenamento dos agregados
$\beta$	Razão entre a maior e a menor dimensão do pilar
$\gamma_c$	Coeficiente de minoração de resistência do concreto
$\Delta$	Deslocamento de pino
$\varepsilon_c$	Deformação do concreto
$\varepsilon_{c0}$	Deformação máxima do concreto na compressão
$\varepsilon_{ult}$	Deformação máxima admitida para o aço
$\varepsilon_y$	Deformação do aço
$\theta$	Ângulo de orientação da barra em relação ao eixo x
$\theta_c$	Ângulo de inclinação da fissura na zona comprimida

$\lambda_2$	Fator modificador usado para que refletir as propriedades mecânicas reduzidas do concreto leve em relação ao concreto normal de mesma resistência à compressão
$\lambda_s$	Fator responsável relacionado ao efeito de escala
$\rho_1$	Taxa geométrica de armadura longitudinal de tração
$\sigma_h^a$	Resistência no estado de tensão hidrostática
$\sigma_{chapa}$	Pressão aplicada sobre a chapa de aço
$\sigma_{cp}$	Tensão normal do concreto devido à força longitudinal na seção ou a protensão
$\sigma_{máx}$	Máxima tensão de cisalhamento de projeto
$\tau_{Rd}$	Tensão de cisalhamento resistente de cálculo
$\phi$	Ângulo de orientação da barra em relação ao plano xy
$\psi$	Rotação da laje

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	American Concrete Institute
BS	British Standard
CAD	Concreto de alto desempenho
CN	Concreto normal
EUROCODE 2	Norma europeia
CEB-FIP	Comité Euro-Internacional du Béton – International Federation for Prestressing
LVDT	<i>Linear Variable Differential Transformer</i>
TFCC	Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>18</b>
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	18
1.2	OBJETIVOS .....	20
1.2.1	<i>Objetivo Geral .....</i>	20
1.2.2	<i>Objetivos específicos .....</i>	20
1.3	JUSTIFICATIVA .....	20
1.4	METODOLOGIA.....	21
1.4.1	<i>Etapas da pesquisa .....</i>	21
1.5	ESTRUTURA DO TRABALHO .....	22
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>23</b>
2.2	ELEMENTOS ESTRUTURAIS DE SUPERFÍCIE.....	23
2.2.1	<i>Lajes.....</i>	24
2.3	COMPORTAMENTO DE ELEMENTOS CONCRETO ARMADO SEM ARMADURA TRANSVERSAL SUBMETIDOS A RUPTURA POR CISALHAMENTO.....	25
2.4	MECANISMOS DE TRANSFERÊNCIA DE CISALHAMENTO EM PEÇAS SEM ARMADURA DE CISALHAMENTO .....	31
2.4.1	<i>Zona de compressão do concreto .....</i>	32
2.4.2	<i>Engrenamento dos agregados (Aggregate interlock).....</i>	33
2.4.3	<i>Efeito de pino (Dowel action).....</i>	33
2.4.4	<i>Ação de arqueamento (Arch action).....</i>	34
2.5	RESISTÊNCIA À FORÇA CORTANTE .....	34
2.5.1	<i>Estudos realizados.....</i>	34
2.5.2	<i>Fatores que influenciam a resistência ao esforço cortante em peças sem armadura de cisalhamento .....</i>	47
2.4	RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS .....	49
2.4.1	<i>Norma brasileira – ABNT NBR 6118 (2014) .....</i>	49
2.4.2	<i>Norma norte-americana – ACI 318-19 (2019).....</i>	51
2.4.3	<i>Norma inglesa – BS 8110 (1997).....</i>	52
2.4.4	<i>Norma internacional – CEB-FIP Model Code (2010) .....</i>	53
2.4.5	<i>Norma europeia – EUROCODE 2 (2004).....</i>	56
<b>3</b>	<b>SIMULAÇÃO NUMÉRICA .....</b>	<b>58</b>

3.1	ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS .....	58
3.1.1	<i>Link180</i> .....	58
3.1.2	<i>Solid65</i> .....	58
3.1.3	<i>Solid185</i> .....	59
3.2	PROPRIEDADES DOS MATERIAIS .....	60
3.2.1	<i>Material - Concreto</i> .....	60
3.2.2	<i>Material - Aço</i> .....	62
3.3	MODELOS NUMÉRICOS UTILIZADOS .....	63
3.3.1	<i>Concreto</i> .....	63
3.3.2	<i>Armadura</i> .....	65
3.4	MODELAGEM .....	65
3.4.1	<i>Configuração dos ensaios experimentais reproduzidos numericamente</i> .....	65
3.4.2	<i>Configurações definidas na simulação</i> .....	66
3.4.3	<i>Dados dos modelos experimentais</i> .....	78
3.5	VALIDAÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS .....	81
3.5.1	<i>Modelo I – Simetria nos nós das barras</i> .....	81
3.5.2	<i>Modelo II – Apoio elástico</i> .....	91
3.6	VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS COM A APLICAÇÃO DO MODELO II .....	103
3.6.1	<i>Dados considerados na simulação numérica</i> .....	103
3.6.2	<i>Resultados das simulações</i> .....	104
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DE VARIÂNCIA .....</b>	<b>156</b>
4.1	APLICAÇÃO DA ANÁLISE DE VARIÂNCIA .....	158
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>162</b>
<b>6</b>	<b>SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>163</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>164</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Lajes são definidas como elementos planos horizontais que contêm duas dimensões de tamanho maior que a terceira dimensão, esta última é definida como a espessura ou altura. Esse elemento estrutural tem como principal função a transmissão dos carregamentos oriundos das cargas permanentes e acidentais perpendiculares ao seu plano médio para as vigas, e essas, por sua vez, transmitem os esforços para os pilares, e esses para as fundações. Dentre os vários esforços ao qual a laje é submetida tem-se a força cortante que ocasiona tensão de cisalhamento no elemento estrutural.

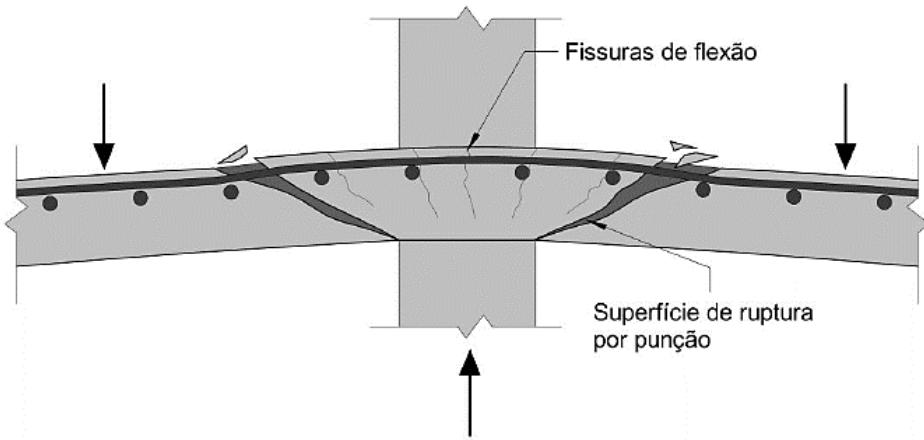
Além disso, possuem um papel importante por resistir as ações horizontais, além de se comportar como um diafragma rígido ou chapa, de forma a contribuir para a compatibilização dos deslocamentos dos pilares em cada piso, o que é chamado de contraventamento.

As lajes podem ser armadas em uma ou duas direções, onde para lajes armadas em uma direção são calculadas considerando-as como vigas de largura unitária. Já para lajes armadas em duas direções é empregado o modelo elástico-linear, com elementos de placa, onde os esforços de flexão e as flechas são determinadas aplicando-se a Teoria das Placas, segundo a Teoria da Elasticidade, além do método plástico denominado de Método das Charneiras Plásticas ou Método da Ruptura (PRAVIA, 2001).

O sistema estrutural de lajes sem vigas, onde as lajes se apoiam diretamente sobre os pilares, vem crescendo a sua utilização devido, principalmente, as suas vantagens, tais como a redução do pé-direito, consequentemente, a redução da altura da edificação, além de proporcionar uma melhor ventilação, contribuir para a economia das fôrmas, materiais, mão de obra, reduzindo o tempo do processo construtivo e proporcionando um alívio nas fundações por se tratar de edificações mais leves (PALHARES, 2018).

No entanto, segundo Palhares (2018), esse tipo de sistema estrutural apresenta certas desvantagens devido à não existência de vigas compondo o corpo estrutural da edificação. Primeiro, quando consideradas as forças horizontais, como vento, a ausência de vigas contribui para a redução da rigidez global da edificação prejudicando a estabilidade da estrutura. Além disso, a estrutura se torna mais flexível o que pode proporcionar maiores flechas e tem-se ainda o risco da ocorrência de ruptura por punção, sendo um modo de ruptura frágil por força cortante, como ilustra a Figura 1.

Figura 1 – Superfície de ruptura por punção em lajes lisas



Fonte: PALHARES (2018).

Existem fatores que contribuem para o aumento da resistência à força cortante em estruturas de concreto sem armadura transversal, tais como a altura da seção transversal, a taxa de armadura longitudinal, o tamanho das fissuras e a resistência à compressão do concreto. Nesse contexto, alguns trabalhos como o de Hassan *et al.* (2018), Afefy e El-Tony (2019), Zohrevand et al. (2015) e Torabian et al. (2019) buscaram estudar e compreender a influência desses fatores sobre o ganho de resistência ao cisalhamento em lajes armadas em duas direções.

Diante disso, o presente trabalho teve como objetivo, por meio das simulações numéricas, compreender o comportamento de lajes de concreto armadas em duas direções sem armadura transversal submetidas a carga vertical centrada e a influência de parâmetros como a altura da laje, a resistência à compressão do concreto e a taxa de armadura de flexão sobre o ganho de resistência de cisalhamento por meio de uma análise numérica. E, com isso, a definição do fator que possui maior contribuição com a aplicação da análise estatística.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 *Objetivo Geral*

O presente estudo teve como objetivo principal, por meio da análise numérica, compreender a influência de três principais parâmetros como a espessura da laje, a resistência à compressão do concreto e a taxa de armadura longitudinal, esses fatores favorecem o aumento da resistência à força cortante em lajes de concreto armadas em duas direções. Além da definição do fator que possuiu maior contribuição por meio da análise estatística.

### 1.2.2 *Objetivos específicos*

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- i. Desenvolver um modelo numérico representativo através da simulação numérica de ensaios experimentais já existentes;
- ii. Variar os parâmetros estudos que exercem influência sobre o ganho de resistência à força cortante;
- iii. Obter, por meio de uma análise estatística, qual parâmetro possui maior interferência no ganho de resistência à força cortante.

## 1.3 JUSTIFICATIVA

O aumento da resistência ao cisalhamento de peças de concreto armado vem sendo objeto de estudo de vários trabalhos que buscaram avaliar o comportamento de elementos estruturais com diferentes tipos de concretos, taxas de armadura, alturas, entre outras propriedades. No entanto, é observado que nesses estudos não há definição de qual desses parâmetros exerce maior influência sobre o ganho de resistência ao cisalhamento de lajes de concreto armado.

Nesse contexto, o presente trabalho se justifica pela necessidade de se aprimorar o conhecimento sobre o comportamento mecânico de elementos estruturais em concreto armado por meio de simulações numéricas, mais especificamente sobre o comportamento mecânico de lajes lisas armadas em duas direções quando submetidas a força cortante, além da determinação do parâmetro responsável pela maior parcela de contribuição do aumento da respectiva resistência.

## 1.4 METODOLOGIA

### 1.4.1 *Etapas da pesquisa*

A primeira etapa está relacionada à pesquisa de estudos e ensaios experimentais já existentes para a elaboração da revisão bibliográfica e tem como objetivo o desenvolvimento de uma base teórica sólida para o início da elaboração da simulação numérica.

A segunda etapa envolveu o desenvolvimento das simulações numéricas das lajes lisas com armadura em duas direções de ensaio experimentais já realizados, com a utilização do software *ANSYS Mechanical APDL®*, onde foram analisados os dados e foi definido um modelo numérico representativo.

Na terceira etapa, foi iniciada a simulação numérica de 54 lajes quadradas de concreto armadas em duas direções através do software *ANSYS Mechanical APDL®*, divididas em dois grupos: de lajes esbeltas, com  $h \leq 10$  cm; e de lajes espessas, com  $h > 10$  cm. Todas possuem comprimento de 1,00 m e cobrimento de 2 cm, sendo este valor definido com base no ensaio experimental que será realizado futuramente após a conclusão deste trabalho. Com isso, foram variados os parâmetros de estudo (altura, resistência à compressão do concreto, e taxa de armadura de flexão) e, assim, obtidos os valores de tensão cisalhante atuantes nas respectivas lajes.

Na quarta etapa foi feita a análise estatística através da análise de variância, também chamada de Anova, onde com os dados obtidos nas simulações numéricas foi possível avaliar qual dos parâmetros apresentou maior influência sobre o aumento de resistência à força cortante em lajes lisas e a elaboração dos resultados e discussões.

Para a quinta etapa foi elaborada a conclusão e as considerações finais após a avaliação final dos resultados obtidos.

Por fim, tem-se a sexta etapa em que será a feita a defesa do presente trabalho.

## 1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho é constituído por quatro capítulos, organizados da seguinte forma:

- Capítulo 1 – Introdução: é feita a apresentação do tema, assim como a justificativa, os objetivos e a metodologia empregada na pesquisa.
- Capítulo 2 – Revisão bibliográfica: apresenta uma abordagem sobre os estudos realizados a respeito do assunto, além das recomendações normativas.
- Capítulo 3 – Simulação computacional: apresenta toda a descrição da elaboração da modelagem realizada utilizando o método dos elementos finitos, por meio do programa *ANSYS Mechanical APDL*, assim como as análises feitas a partir dos dados obtidos na simulação.
- Capítulo 4 – Análise de variância: apresenta toda a descrição sobre a análise estatística realizada e os resultados e conclusões obtidas na análise.
- Capítulo 5 – Conclusão e Considerações finais: apresenta as conclusões obtidas no estudo realizado e as possíveis linhas que o estudo pode seguir.

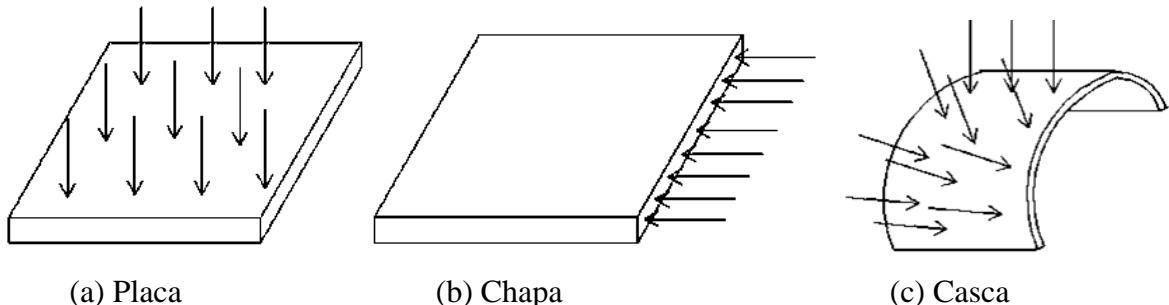
## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo traz a revisão bibliográfica em que são abordados assuntos como: conceitos e definições sobre lajes e de como ocorrem a transferência de cisalhamento nesse elemento estrutural. Além das recomendações normativas nacionais e internacionais e metodologias de cálculo, entre outros assuntos necessários para a compreensão da pesquisa realizada.

### 2.2 ELEMENTOS ESTRUTURAIS DE SUPERFÍCIE

Os elementos estruturais de superfície, também chamados de laminares, são elementos em que as dimensões da largura e do comprimento são muito maiores quando comparadas a sua espessura. As superfícies podem ser classificadas como placas, chapas ou cascas, como ilustradas na Figura 2.

Figura 2 – Elementos de superfície



Fonte: Adaptado de SILVA (2018).

As placas possuem espessura muito inferior as outras dimensões, sendo menor que um décimo do tamanho do seu menor lado. Com isso, é possível fazer uma simplificação utilizando hipóteses que empregam a relação entre as suas maiores dimensões, de forma a reduzir os problemas de três dimensões para duas dimensões.

Além disso, nas placas o carregamento é aplicado perpendicularmente ao seu plano, onde os esforços de flexão são predominantes. Esse elemento estrutural é muito empregado em estruturas na engenharia, como em lajes, pontes, passarelas, etc. No entanto, as soluções analíticas para placas se apresentam limitadas a geometria, as condições de contorno e aos carregamentos. Dessa forma, o emprego de métodos numéricos na resolução de placas se torna importante.

Ota (2016) menciona que as principais teorias relacionadas as placas são a Teoria de Kirchhoff para placas finas, a Teoria de Reissner-Mindlin para placas espessas e as teorias geometricamente exatas para placas em problemas não lineares. A Teoria de Kirchhoff para placas finas se limita a situações onde se tem pequenos deslocamentos e deformações ou onde as deformações por esforço cortante possam ser desconsideradas. Já a Teoria de Reissner-Mindlin considera a distorção por força cortante. Além disso, as hipóteses de linearidade física e geométrica são mantidas.

### 2.2.1 *Lajes*

As lajes são elementos estruturais planos, horizontais na maioria dos casos, que têm como função principal a transmissão dos carregamentos oriundos das cargas permanentes e acidentais. Geralmente, as cargas as quais são submetidas são normais ao plano da laje e podem ser distribuídas linearmente ou ser concentradas sobre sua área.

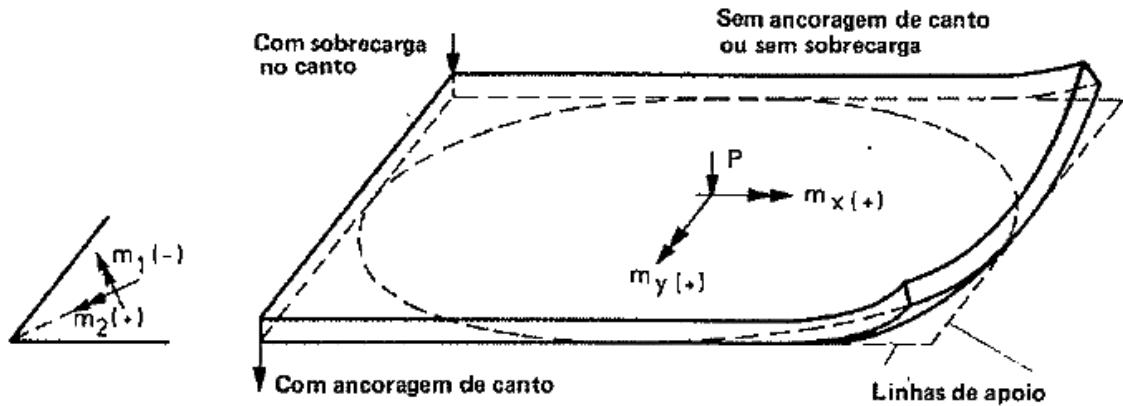
Dentre os vários tipos de laje tem-se as lajes maciças, alveolares e nervuradas. A ABNT (2014) especifica na NBR 6118 que lajes maciças possuem limites mínimos de espessura. Sendo elas:

- a) 7 cm para laje de cobertura sem em balanço;
- b) 8 cm para lajes de piso sem em balanço;
- c) 10 cm para lajes em balanço e para lajes que suportem veículos de peso total menor ou igual a 30 kN;
- d) 12 cm para lajes que suportem veículos de peso total maior que 30 kN;
- e) 16 cm para lajes lisas.

Os esforços solicitantes e as deformações sofridas pelas lajes podem ser determinados aplicando-se diferentes teorias e métodos, entre eles: a Teoria das Placas, baseada na Teoria da Elasticidade; os processos aproximados; o Método das Charnelhas Plásticas; e o Método dos Elementos Finitos.

Segundo Leonhardt e Mönnig (2008), lajes armadas em uma ou duas direções possuem comportamentos diferentes quando submetidas a carregamento. Lajes armadas em uma direção, simplesmente apoiadas, quando sob carga centrada têm seu comportamento semelhante ao de uma viga biapoiada. Já as lajes armadas em duas direções submetidas a mesma configuração de ensaio apoiam-se sobre o trecho central do suporte, enquanto que seus cantos sofrem deslocamentos ascendentes, chamado de empenamento, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Comportamento de laje armada em duas direções, simplesmente apoiada, sob ação de carregamento e efeito de empenamento dos cantos



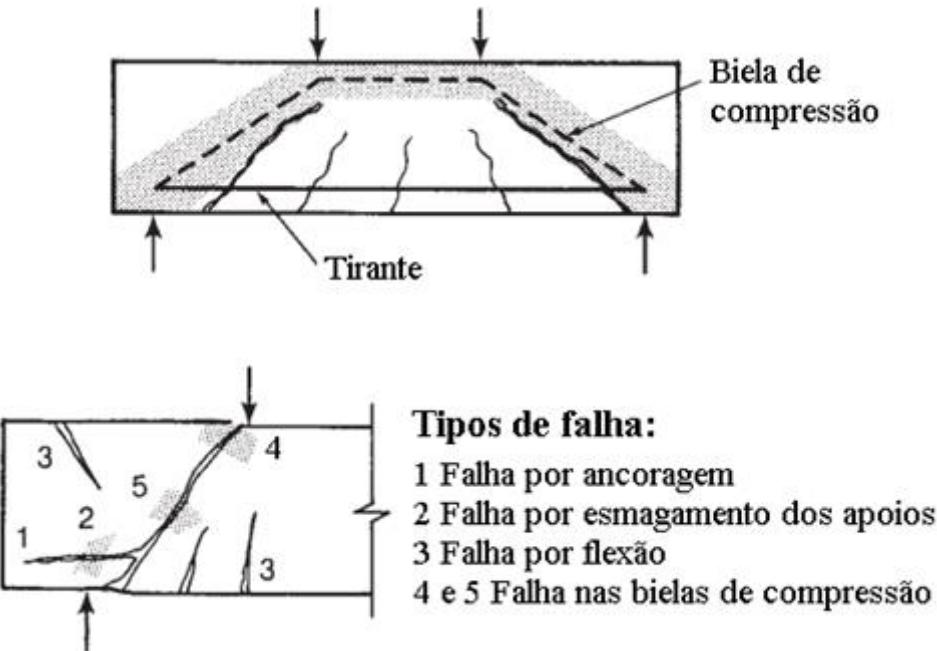
Fonte: LEONHARDT; MÖNNIG (2008).

### 2.3 COMPORTAMENTO DE ELEMENTOS CONCRETO ARMADO SEM ARMADURA TRANSVERSAL SUBMETIDOS A RUPTURA POR CISALHAMENTO

A ruptura por cisalhamento em estruturas de concreto armado ocorre de forma abrupta e inesperada, ao contrário do que ocorre na ruptura por flexão, o que dificulta a previsão devido à complexidade dos mecanismos que envolvem esse tipo de ruptura. Além disso, vigas submetidas a ruptura por cisalhamento têm seu comportamento ligado a quantidade de armadura transversal.

Segundo Wight e MacGregor (2009), vigas sem armadura transversal podem ser classificadas em três tipos de vãos de cisalhamento, sendo eles: curtos, delgados e muito estreitos. Além disso, vigas de vão de cisalhamento curto também são denominadas como vigas profundas. Em vigas muito curtas, onde a razão entre o comprimento do vão ( $a$ ) e a altura útil da viga ( $d$ ) esteja entre 0 e 1, são desenvolvidas fissuras inclinadas desde a área de aplicação de carga até a localização dos apoios, como mostra a Figura 4.

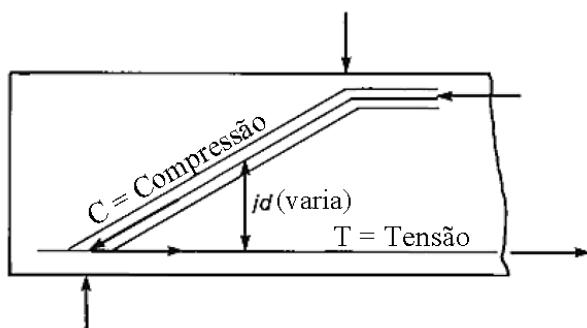
Figura 4 – Modos de ruptura de vigas profundas



Fonte: WIGHT; MACGREGOR (2009).

Com isso, ocorre o interrompimento do fluxo de cisalhamento horizontal da armadura longitudinal para a zona de compressão da viga, o que faz com que haja a mudança de comportamento de viga para arco, como ilustra a Figura 5 (WIGHT; MACGREGOR, 2009).

Figura 5 – Ação de arco em vigas



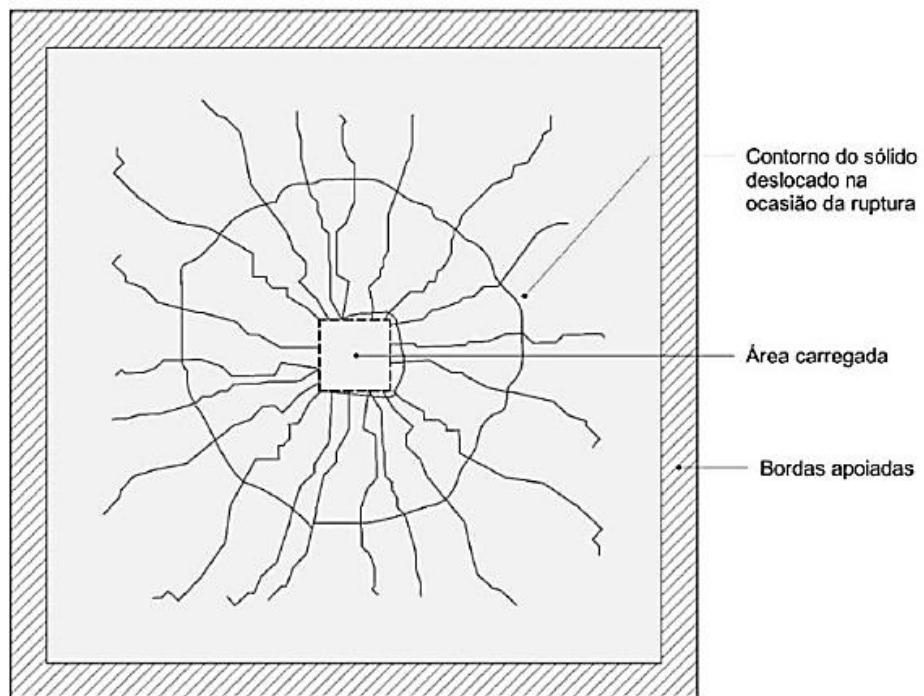
Fonte: WIGHT; MACGREGOR (2009).

Para os casos onde se têm vãos de cisalhamento curtos, com  $a/d$  entre 1 e 1,25, há a ocorrência de fissuras inclinadas que tende a se expandir com a aplicação de carga e suportam carregamentos adicionais devido ao seu comportamento de arco, o que faz com que ocorra a ruptura por cisalhamento antes que a resistência ao momento fletor seja atingida. Já para as

vigas esbeltas, dadas por  $a/d$  entre 2,5 e 6,5, tem-se uma grande influência da formação de fissuras sobre o equilíbrio estrutural da viga, onde a ruptura acontece já na carga em que há a formação de fissuração inclinada. Em relação as vigas muito esbeltas, a ruptura se dá antes mesmo da formação das fissuras inclinadas (WIGHT; MACGREGOR, 2009).

Em relação ao comportamento de lajes lisas de concreto armado sem a colocação de estribos submetidas a punção, verificou-se nos ensaios experimentais realizados por Cordovil (1997 apud PALHARES, 2018) uma tendência a formação, em sua maioria, de fissuras radiais na face tracionada no período que antecessa o ponto de ruptura. Além disso, constatou-se também que somente após a completa ruptura da laje, com a perda de todas as resistências, há a formação do cone de punção formado com a fissura circumferencial, como ilustrado na Figura 6.

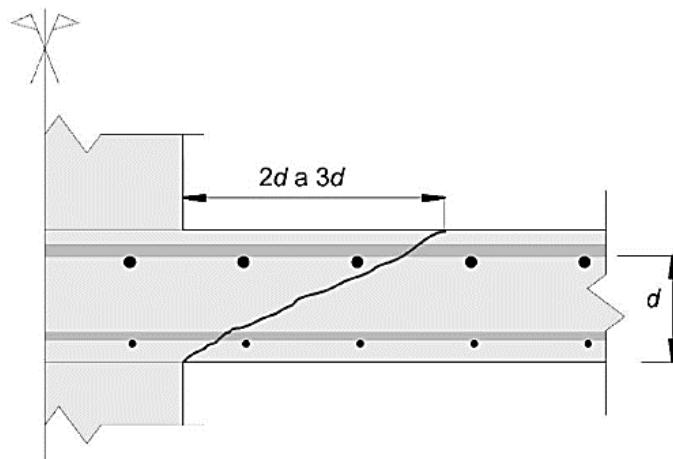
Figura 6 – Fissuração na face tracionada da laje no momento da ruptura



Fonte: CORDOVIL (1997) adaptado por PALHARES (2018).

Tal fissura, presente na face tracionada de lajes de concreto armado sem armadura de cisalhamento, pode chegar a uma distância da face do pilar que varia entre duas e três vezes a altura útil ( $d$ ) da laje, como mostra a Figura 7.

Figura 7 – Extensão da fissura circunferencial

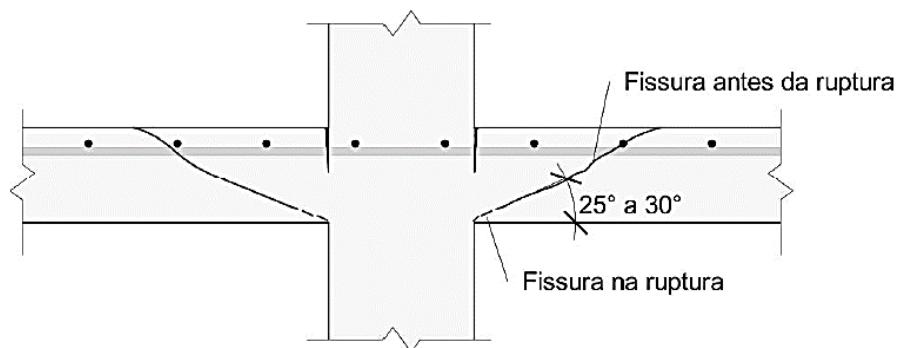


Fonte: CORDOVIL (1997) adaptado por PALHARES (2018).

No estudo realizado por Hegger *et al.* (2017), onde 39 modelos experimentais foram submetidos a punção, verificou-se que as fissuras radiais se originam do centro da laje e se propagam até as bordas. A formação da fissura circular, que delimita o contorno do cone de punção, ocorre apenas nos estágios elevados de carga. Além disso, quando a fissura inclinada, que inicia na face tracionada da laje e se estende em direção à base do pilar, atinge a face comprimida da laje no perímetro do pilar tem-se a ocorrência da ruptura da laje por cisalhamento.

De acordo com Regan (1985 apud PALHARES, 2018), a inclinação da fissura da superfície de ruptura, que se origina a partir da face tracionada, está a um ângulo de aproximadamente  $25^\circ$  em relação ao plano da laje. O mesmo foi assegurado pela CEB-FIP Model Code (1993), no item 6.4.2.5, em que determinava um ângulo entre  $25^\circ$  e  $30^\circ$  que em relação ao plano da laje, como mostra a Figura 8. Além disso, a norma dizia ainda que a formação de fissuras tangenciais ocorria entorno de  $1/2$  a  $2/3$  da carga de ruptura. No entanto, a atual versão da norma, CEB-FIP Model Code 2010, não traz informações a respeito dessa inclinação ou sobre o ponto de carga relacionado a formação das fissuras tangenciais.

Figura 8 – Ruptura por punção em lajes armadas em duas direções

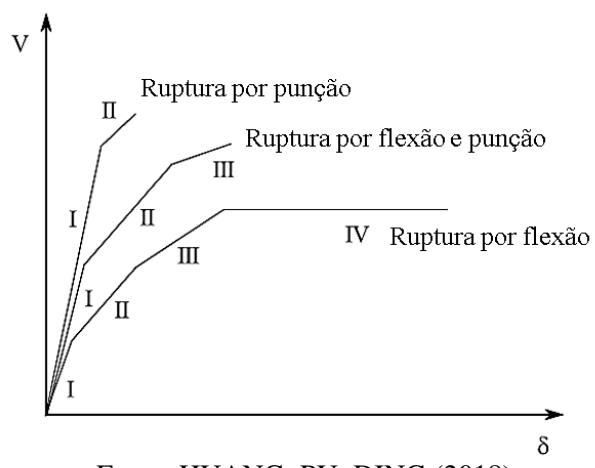


Fonte: CEB-FIP MODEL CODE (1993) adaptador por PALHARES (2018).

Em relação ao estudo de Ospina, Birkle e Widianto (2012), onde foram reunidos mais de 500 resultados de ensaios experimentais de lajes de concreto armado sem reforço de cisalhamento, constatou-se que esse tipo de laje segue um padrão de comportamento nas curvas de Força x Deslocamento e no desenvolvimento das fissuras, apesar da diferença em relação as propriedades do concreto utilizado, da taxa de armadura longitudinal e dos parâmetros geométricos do elemento estrutural empregado nos ensaios.

Diante disso, Huang, Pu e Ding (2018) subdividiram a curva Força x Deslocamento em quatro estágios, como mostra a Figura 9. O estágio I tem seu no início na aplicação de carga e fim com a formação de primeira fissura. O estágio II inicia desde a formação da primeira fissura e tem seu fim no início do escoamento do aço da borda do pilar. Já no estágio III, com início no escoamento do aço da borda do pilar, é finalizado quando é atingido o limite de escoamento de grande parte da armadura longitudinal.

Figura 9 – Estágios da curva Força x Deslocamento e modos de ruptura

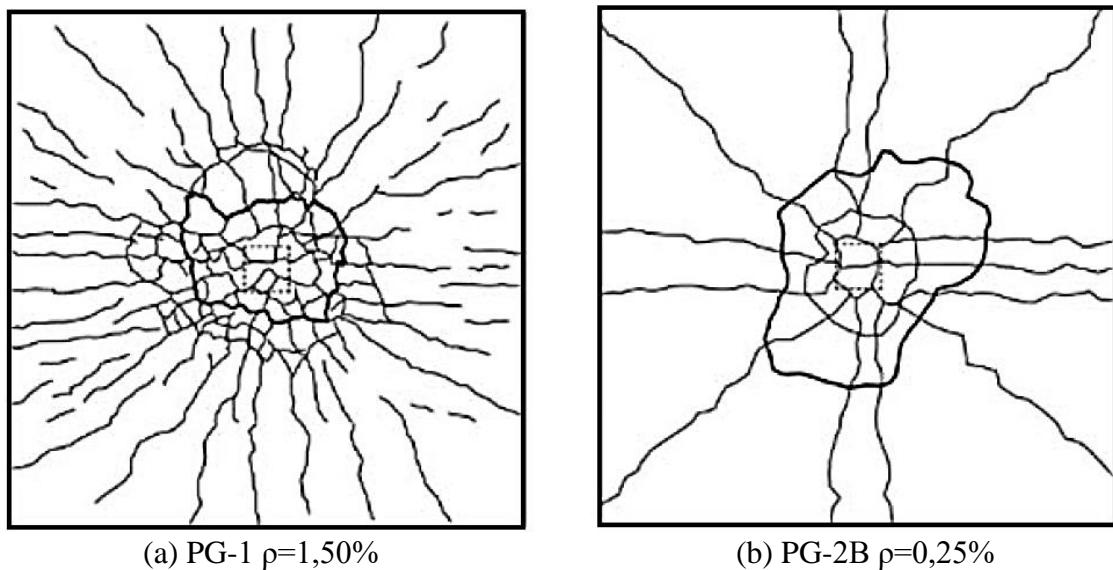


Fonte: HUANG; PU; DING (2018).

Por fim, no estágio IV, iniciado quando o limite de escoamento da armadura longitudinal é alcançado, finaliza com a ruptura da laje causada pela deformação excessiva ou quando a largura da fissura excede o valor permitido. Além disso, os autores classificam três tipos de modo de ruptura observados nos ensaios realizados em lajes de concreto armado sem armadura transversal, sendo eles: ruptura por punção; ruptura por flexão e punção; e ruptura por flexão. Ambos os modos de rupturas estão ilustrados na Figura 9 (HUANG; PU; DING, 2018).

Lajes que apresentam ruptura por punção têm sua resistência ao cisalhamento determinada a partir da resistência ao cisalhamento da zona de compressão, nessa situação a falha ocorre antes que o limite de escoamento da armadura longitudinal seja atingido, além de permanecer com fissuras superficiais generalizadas de pequena largura, como ilustra a Figura 10a (HUANG; PU; DING, 2018).

Figura 10 – Fissura comum em lajes de concreto armado em ensaios de punção



Fonte: GUANDALINI (2005) apud PALHARES (2018).

Já a ruptura por flexão ocorre devido à formação de um mecanismo de limite de elasticidade. Para esse modo de ruptura ocorre o escoamento de toda a armadura de flexão o que faz com que a laje sofra grandes deformações, caracterizando o longo platô na curva Força x Deslocamento, como mostra a Figura 9. Já as fissuras superficiais têm grandes aberturas e se concentram nas linhas de escoamento da laje, descritas na Figura 10b (HUANG; PU; DING, 2018).

Para uma taxa de armadura intermediária aos dois modos de ruptura dá-se a ocorrência da falha por flexão e punção que acontece anterior ao escoamento de toda a armadura da laje e

a resistência ao cisalhamento é determinada pelo conjunto da resistência ao esforço cortante da zona de compressão e a resistência à compressão do concreto na borda do pilar (HUANG; PU; DING, 2018).

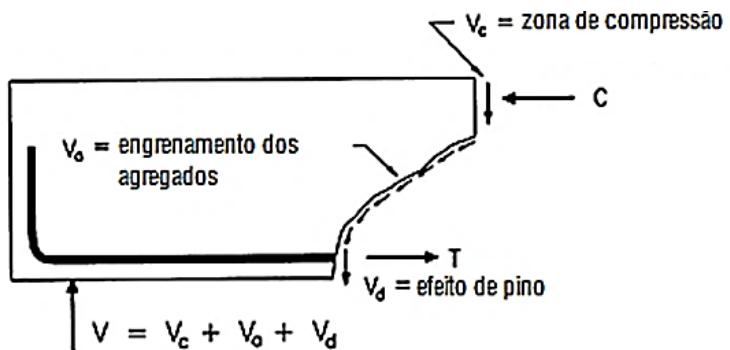
## 2.4 MECANISMOS DE TRANSFERÊNCIA DE CISALHAMENTO EM PEÇAS SEM ARMADURA DE CISALHAMENTO

Conforme Furlan Júnior (1995), os primeiros estudos relacionados a esse assunto são datados no início do século XX, com os primeiros trabalhos de Mörsch em 1908. Durante esta época era considerado que o aparecimento de fissuras de cisalhamento era originado quando as tensões de cisalhamento presentes na peça se apresentavam superiores a resistência à tração do concreto. Entretanto, constatou-se que na verdade parte da força transversal seria resistida pela inclinação da tensão principal de compressão na zona de compressão do concreto e pelo concreto fissurado devido à flexão, podendo surgir forças de pino na armadura, colaborando para a resistência à força cortante.

Se tratando de cisalhamento, os estudos relacionados a esse tema estão voltados, basicamente, para a determinação da força cortante responsável pelo aparecimento das fissuras diagonais na peça ( $V_{cr}$ ) e da força cortante última ( $V_u$ ). Tem-se que o início do surgimento de fissuras inclinadas pode estar relacionado com a resistência de vigas sem estribos, onde  $V_{cr}$  é associada à ruptura da peça (FURLAN JÚNIOR, 1995).

A transferência de forças de cisalhamento em estruturas de concreto, sem armadura transversal, pode ocorrer de várias formas. Em vigas esbeltas, por exemplo, as principais formas de transferência da força cortante são por meio da zona de compressão do concreto, na ação de bloqueio dos agregados ao longo da superfície do concreto áspero e através do efeito de pino da armadura longitudinal, como mostra a Figura 11 (SAMORA, 2015).

Figura 11 – Mecanismo de transferência de cisalhamento em vigas esbeltas



Fonte: Adaptado de CHOI *et al.* (2016).

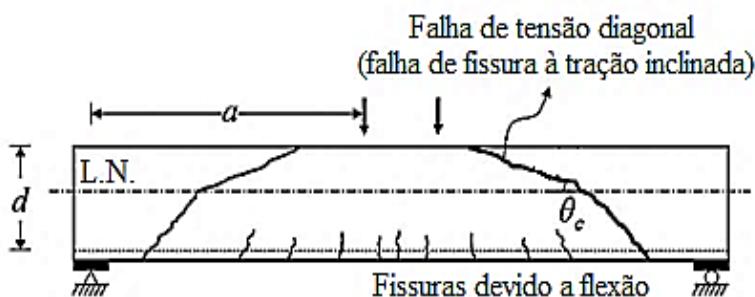
Onde:  $V_c$  é a força cortante na zona de compressão;  $V_o$  é a força cortante devido ao engrenamento dos agregados;  $V_d$  é a força de pino; e  $V$  é a força cortante total.

No entanto, em vigas curtas a força de cisalhamento é resistida pelo efeito de arco (SAMORA, 2015). Além disso, segundo Choi *et al.* (2016), em vigas retangulares, com fissuras inclinadas, a força cortante transmitida pela zona de compressão do concreto não-fissurado é proporcional de 20% a 40%, já pelo engrenamento dos agregados é de 33% a 50%, e pelo efeito de pino é de 15% a 25%.

#### 2.4.1 Zona de compressão do concreto

Segundo Choi *et al.* (2016), em vigas esbeltas de seção transversal retangular, onde a relação entre o tamanho do vão de cisalhamento ( $a$ ) e a altura útil da viga ( $d$ ) é maior que 2,5, como mostra a Figura 12, as fissuras originadas devido à flexão ocorrem na zona tracionada. Quando submetidas a carga adicional as fissuras de flexão se propagam ao longo de toda a seção transversal da viga gerando uma macrofissura inclinada de tração no concreto da zona de compressão, caracterizando o efeito de fendilhamento.

Figura 12 – Falha de cisalhamento de vigas esbeltas



Fonte: Adaptado de CHOI *et al.* (2016).

Em que:  $a$  é o tamanho do vão de cisalhamento;  $d$  é a altura útil da viga; e  $\theta_c$  é o ângulo de inclinação da fissura na zona comprimida.

Dessa forma, a zona de compressão passa a não ser contínua e não oferece mais resistência à força de compressão devido ao momento fletor. Com isso, não há o equilíbrio de forças na seção transversal, o que ocasiona a falha por cisalhamento em maneira frágil (CHOI *et al.*, 2016).

Sendo assim, tem-se que em vigas de concreto fissuradas, devido à flexão, a resistência ao cisalhamento do concreto não é assegurada pela zona tracionada da viga com fissuras de flexão, mas sim pela zona de compressão do concreto não-fissurado (CHOI *et al.*, 2016).

#### 2.4.2 Engrenamento dos agregados (Aggregate interlock)

A interação mecânica das partículas dos agregados é responsável pelo desenvolvimento das forças de cisalhamento nas interfaces rugosas que constituem o conjunto, a esse processo dá-se o nome de engrenamento dos agregados, ou *aggregate interlock* (AURE; IOANNIDES, 2014).

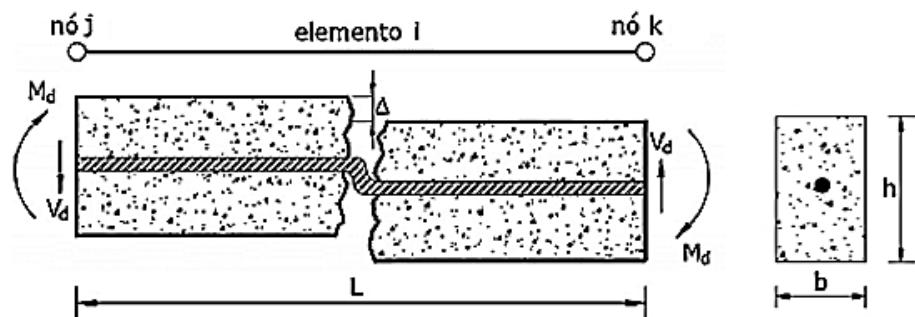
Segundo Kim e Park (1996), grande parte da força cortante total na viga sem armadura transversal é suportada através das fissuras por engrenamento dos agregados. Esse processo é influenciado, principalmente, pela largura da fissura e pela resistência do concreto.

Dessa forma, tem-se que a largura da fissura de flexão é aproximadamente proporcional à tensão na armadura longitudinal, onde a largura da fissura na falha torna-se menor à medida que a relação de aço longitudinal é aumentada. Além disso, a força de engrenamento dos agregados se torna maior quando se tem um concreto com maior resistência (KIM; PARK, 1996).

#### 2.4.3 Efeito de pino (Dowel action)

A capacidade das barras longitudinais de transferirem esforços perpendiculares ao seu eixo é definido como efeito de pino, ou também *dowel action*. O efeito de pino pode ser explicado ao se levar em consideração as tensões em uma barra longitudinal, carregada por uma força perpendicular, e as consequências de uma fissura de tração, como mostra a Figura 13 (WALRAVEN, 1980).

Figura 13 – Mecanismo de efeito de pino ao longo de elemento de concreto armado



Fonte: Adaptado de LIBERATI *et al.* (2014).

Em que:  $\Delta$  é o deslocamento de pino; e  $M_d$  é o momento fletor causado pelo efeito de pino.

Segundo Kim e Park (1996), quando ocorre o deslocamento por cisalhamento ao longo das fissuras uma certa quantidade de força de cisalhamento é transferida por meio do efeito de

pino para as barras longitudinais, como visto na Figura 11. Embora o efeito de pino seja influenciado pelo número e disposição das barras longitudinais, pela largura das fissuras de flexão e pela quantidade de cobertura de concreto, os principais fatores que influenciam esse efeito são a rigidez à flexão das barras longitudinais e a resistência à compressão do concreto.

Além disso, Xia *et al.* (2015) afirmam que o efeito de pino não atua sobre a resistência ao cisalhamento quando a peça apresenta armadura de cisalhamento. Sendo assim, esse fenômeno tem sua atuação considerada quando há a ocorrência de falha por flexão. Além disso, em equações de projetos de vigas de concreto armado a contribuição do efeito de pino é desconsiderada pois os estribos utilizados geralmente oferecem significativa resistência ao cisalhamento.

#### 2.4.4 Ação de arqueamento (Arch action)

Em vigas relativamente curtas as cargas aplicadas são transferidas diretamente para os apoios por meio da ação de arqueamento. Os dois principais fatores que influenciam essa ação são a relação vão-altura do arco análogo e a resistência do suporte de compressão. Esse último fator está relacionado à resistência à compressão do concreto e à área da barra de aço (KIM; PARK, 1996).

### 2.5 RESISTÊNCIA À FORÇA CORTANTE

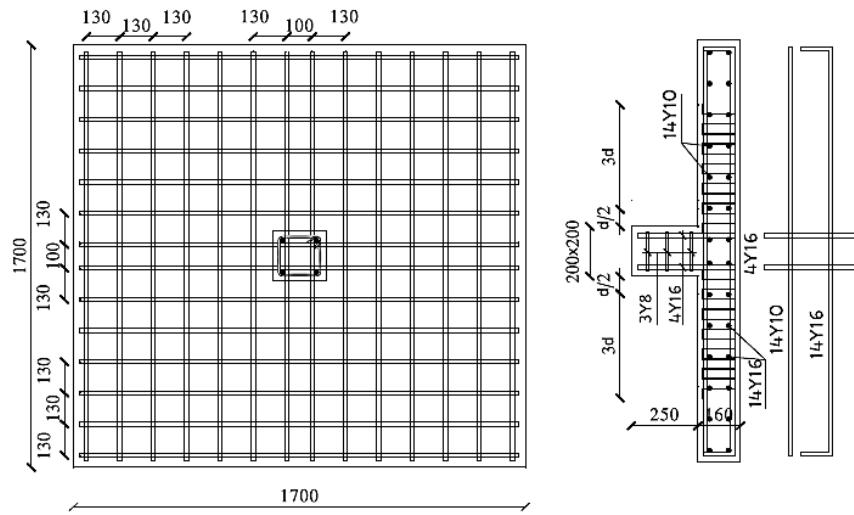
#### 2.5.1 Estudos realizados

##### 2.5.1.1 Hassan *et al.* (2018)

Em um estudo realizado por Hassan *et al.* (2018) teve como objetivo analisar as propriedades que interferem diretamente no aumento da resistência ao cisalhamento para se evitar a ocorrência da chamada de falha por cisalhamento em lajes lisas de concreto armadas em duas direções. Para isso, foram considerados os seguintes parâmetros: o aumento da espessura da laje; o aumento da espessura do pilar; e, por fim, o uso de reforço de cisalhamento.

O programa experimental foi composto por sete amostras de lajes quadradas com colunas internas, todas testadas sob cargas gravitacionais. As lajes quadradas possuíam comprimento de 1700 mm, com espessura de 160 mm e taxa de armadura longitudinal de aproximadamente 1,2%. Na Figura 14 é possível observar a distribuição da armadura adotada no modelo experimental seguido na pesquisa.

Figura 14 – Detalhes da distribuição da armadura na amostra S1, todas as dimensões em mm



Fonte: Adaptado de HASSAN *et al.* (2018).

No estudo foi considerada a laje S1 como a amostra de controle, sem a colocação de armadura de cisalhamento. As amostras foram divididas em 5 grupos, como descrito na Tabela 1. Em todas as amostras foi utilizado um concreto com resistência cúbica ( $f_{cu}$ ) de 36 MPa.

Tabela 1 – Grupo das amostras testadas

Grupo	Fator investigado	Amostras consideradas		
		Controle	Variável 1	Variável 2
1	Efeito do uso de estribos	S1	S2	S3
2	Efeito da inclinação dos estribos	S1	S3	S5
3	Efeito do aumento da quantidade de estribos	S1	S3	S7
4	Efeito da distribuição radial dos estribos	S1	S4	-
5	Efeito da distribuição em caixa dos estribos	S1	S5	-

Fonte: Adaptado de HASSAN *et al.* (2018).

Os testes foram realizados no laboratório de concreto armado da Faculdade de Engenharia, El-Mataria, Universidade Helwan. A base utilizada para apoiar as amostras foi composta por uma estrutura de aço muito rígida com seções I horizontais e verticais. Para a aplicação da carga vertical utilizou-se um macaco hidráulico com capacidade máxima de 1000 kN posicionado no centro da laje, como ilustrado na Figura 15.

Figura 15 – Montagem do teste e aplicação da carga



Fonte: Adaptado de HASSAN *et al.* (2018).

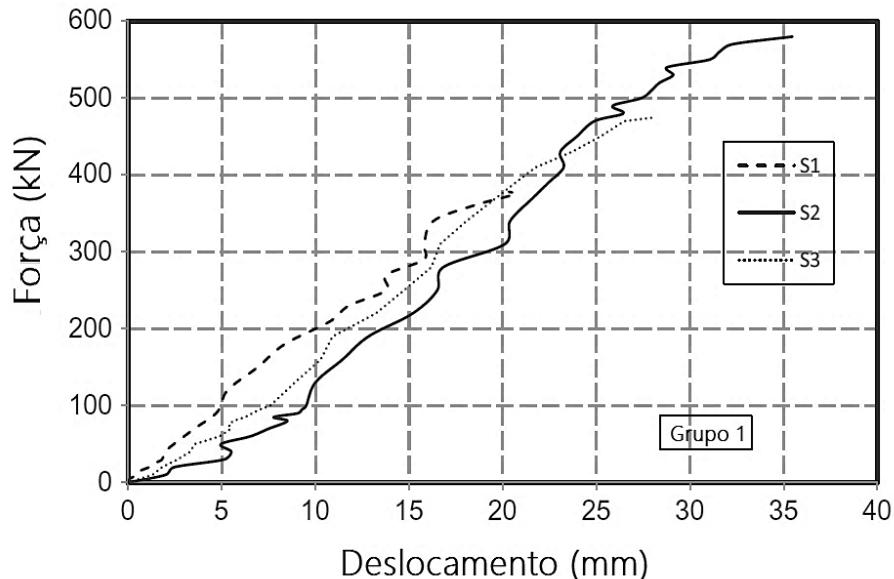
Após a realização dos testes foram obtidos os resultados de força e deslocamento das amostras, como disposto na Tabela 2. Além disso, na Figura 16 é possível observar o comportamento do Grupo 1, composto pelas amostras S1, S2 e S3.

Tabela 2 – Resultados experimentais obtidos no estudo de Hassan *et al.* (2018)

Amostra	Estágio de fissuração		Estágio de falha	
	$P_{cr}$ (kN)	$\Delta_{cr}$ (mm)	$P_f$ (kN)	$\Delta_f$ (mm)
S1	92	4,76	378	20,33
S2	95	7,77	585	35,50
S3	80	4,68	475	28,15
S4	80	4,13	436	24,40
S5	90	6,11	440	25,24
S6	130	5,00	505	24,96
S7	75	4,02	500	29,29

Fonte: Adaptado de HASSAN *et al.* (2018)

Figura 16 – Força x Deslocamento das amostras do Grupo 1



Fonte: Adaptado de HASSAN *et al.* (2018).

Ao analisar a Figura 16 Hassan *et al.* (2018) concluiu que para a laje sem armadura de cisalhamento, S1, a falha ocorreu de forma abrupta e quebradiça. Já as amostras contendo estribos, S2 e S3, apresentaram falha comum ocorrida em falhas por cisalhamento após atingida a carga máxima de flexão, tendo um comportamento menos frágil fora da zona de cisalhamento.

### 2.5.1.2 Afefy e El-Tony (2019)

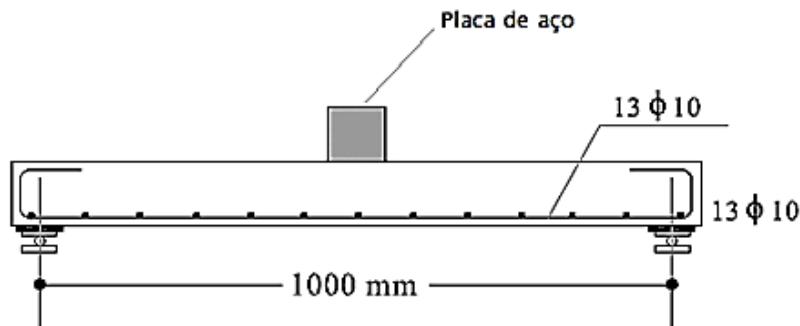
Afefy e El-Tony (2019) apresentaram um estudo onde foram analisadas diferentes técnicas de reforço considerando o cisalhamento em lajes lisas de concreto armadas em duas direções. Para isso, foi considerado o efeito combinado de estribos internos de uma perna, da armadura de pele e do uso de folhas de polímero reforçado com fibra de vidro com ligação externa.

Foram moldadas nove lajes quadradas, todas com comprimento de 1100 mm, espessura de 120 mm e taxa de armadura de flexão de 0,94%, sendo empregado concreto de resistência cúbica ( $f_{cu}$ ) de 30 MPa em todas as amostras.

As amostras foram divididas em quatro grupos, sendo eles: Grupo 1, sem armadura de cisalhamento, composto apenas pela amostra SI-1; Grupo 2 composto pelas amostras SII-1 e SII-2 com uso de estribos internos de uma perna; e outros dois grupos aplicando-se diferentes técnicas de reforço.

A distribuição de armadura adotada nas lajes do Grupo 1 é ilustrada na Figura 17.

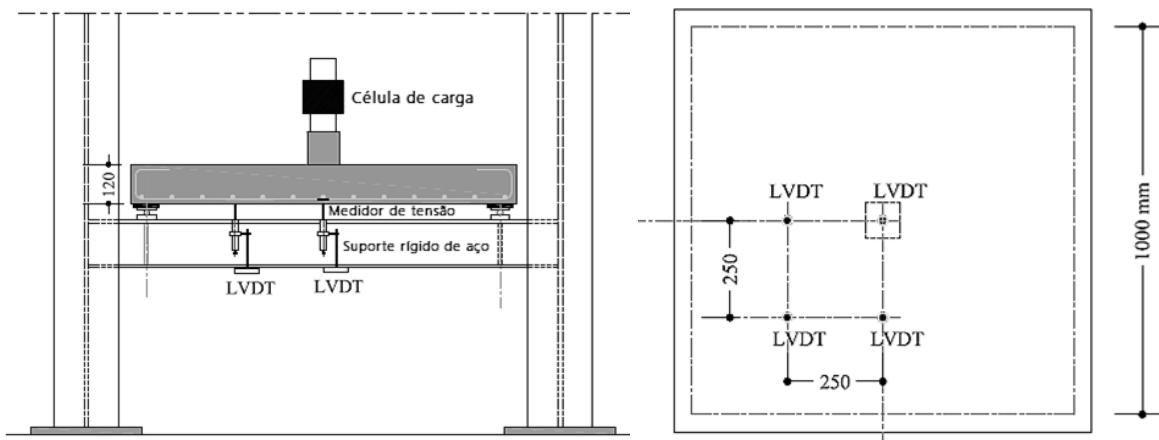
Figura 17 – Detalhamento da armadura da amostra do Grupo 1



Fonte: Adaptado de AFEFY; EL-TONY (2019).

Toda a montagem do teste foi realizada no laboratório de concreto armado da Universidade de Alexandria. No ensaio foram considerados apoios simples para as lajes, permitindo a rotação dos cantos, sendo submetidas a aplicação de carga central sobre uma placa de aço quadrada com 150 mm de comprimento, como mostra a Figura 17. Além disso, foram utilizados quatro transdutores de medição de deslocamento vertical de 100 mm, chamados de LVDT's, abreviação para *Linear Variable Differential Transformer*, para acompanhar o deslocamento vertical nos pontos descritos na Figura 18.

Figura 18 – Montagem de ensaio realizado com todas as unidades em mm



Fonte: Adaptado de AFEFY; EL-TONY (2019).

Segundo o estudo de Afety e El-Tony (2019), em todos os ensaios as lajes apresentaram falhas causadas por esforço de cisalhamento, como já era previsto no estudo. As resistências à compressão média de cada laje no dia do ensaio, as respectivas cargas aplicadas no momento

da ocorrência da primeira fissura, a carga máxima aplicada até a ruptura, além dos máximos deslocamentos verticais obtidos no ponto central da laje são apresentados na Tabela 3.

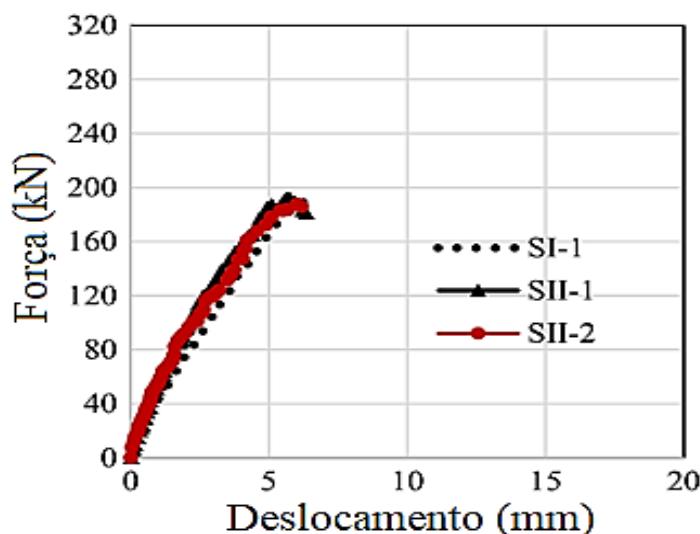
Tabela 3 – Resultados experimentais obtidos no estudo de Afefy e El-Tony (2019)

Grupo	Laje	$f_{cu}$ (MPa)	Carga aplicada		$\Delta f$ (mm)
			$P_{cr}$ (kN)	$P_f$ (kN)	
1	SI-1	29,2	57,9	190,2	6,80
2	SII-1	30,1	55,4	192,2	6,55
	SII-2	30,1	55,2	187,8	6,20
3	SIII-1	31,3	64,1	272,7	14,90
	SIII-2	31,3	69,2	321,7	18,30
	SIII-3	31,3	61,4	254,9	11,80
	SIII-4	31,3	66,7	317,2	17,70
4	SIV-1	32,7	93,3	255,5	7,30
	SIV-2	32,7	95,0	264,5	8,10

Fonte: Adaptado de AFEFY; EL-TONY (2019).

A Figura 19 mostra o comportamento das lajes do Grupo 1 e 2. No estudo observou-se que o uso de estribos internos de uma perna, dispostos de forma ortogonal ou inclinada, não apresentaram contribuição significativa na deflexão no centro da laje.

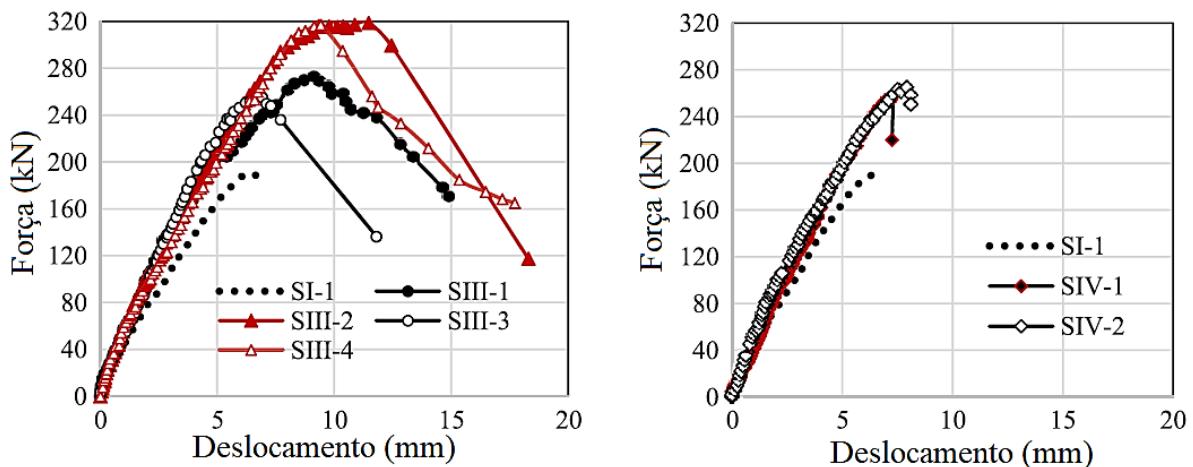
Figura 19 – Comparaçao das lajes dos Grupos 1 e 2



Fonte: Adaptado de AFEFY; EL-TONY (2019).

Outro ponto observado foi a formação de diferentes patamares de escoamento após a aplicação de cargas maiores que a carga onde ocorre o escoamento do aço, como mostra a Figura 20.

Figura 20 – Comparaçāo das lajes dos Grupos 1, 3 e 4



Fonte: Adaptado de AFEFY; EL-TONY (2019).

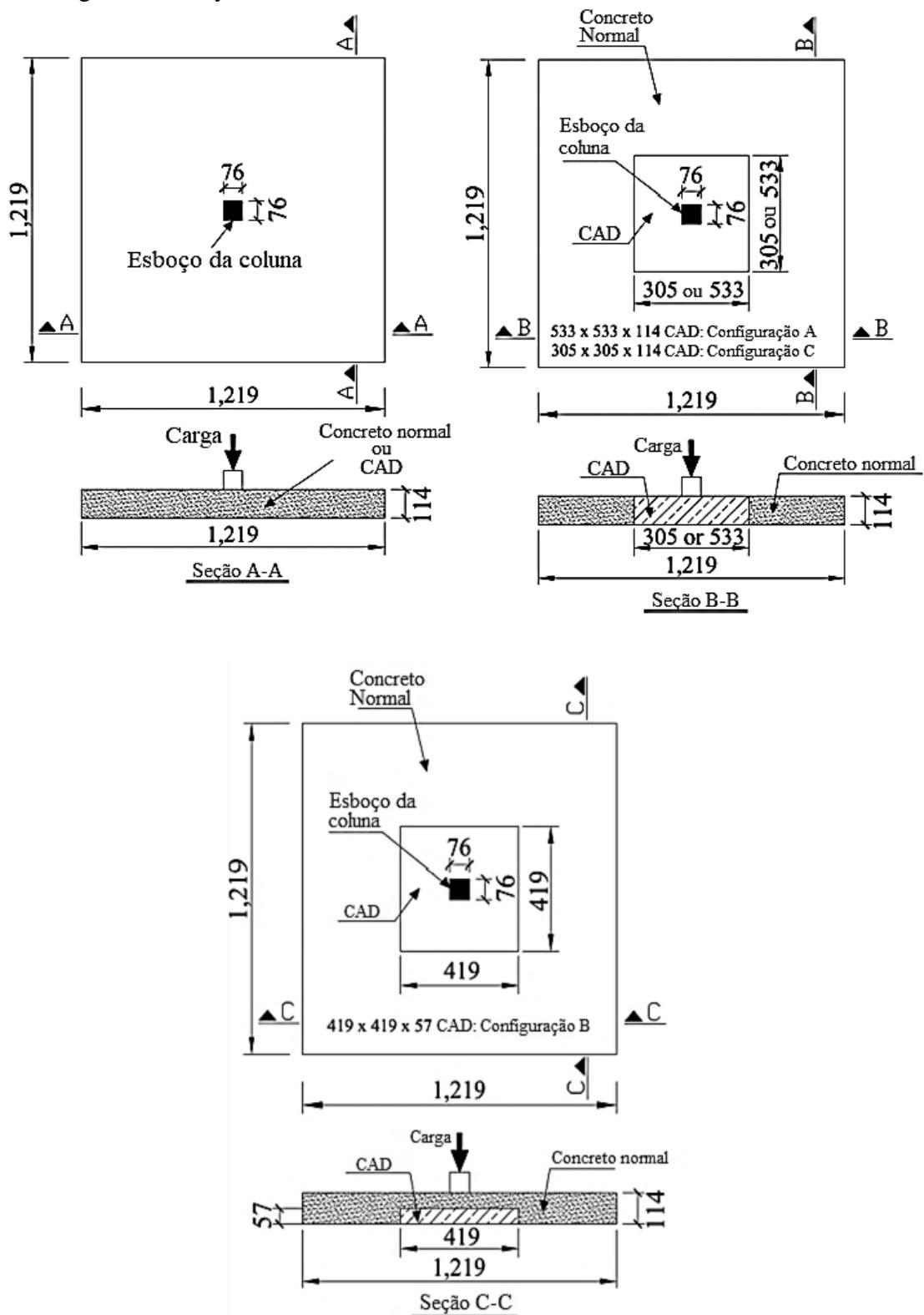
Verificou-se também que para um mesmo nível de carga o deslocamento vertical central em lajes com armadura de cisalhamento é menor quando comparado com a laje sem reforço, também ilustrado na Figura 20.

#### 2.5.1.3 Zohrevand *et al.* (2015)

Zohrevand *et al.* (2015) realizaram uma pesquisa em que foi empregado o uso de concreto de alto desempenho (CAD) na confecção de lajes lisas de concreto armado, onde o CAD foi utilizado apenas dentro da área crítica de punção e para as demais partes da laje foi aplicado o concreto normal (CN).

Nesse estudo foram elaboradas dez amostras, onde foram variados os seguintes parāmetros: a taxa de armadura de aço; a área de punção contendo CAD; e a profundidade de CAD aplicado na área de punção, como mostra a Figura 21.

Figura 21 – Layout das amostras elaboradas com todas as unidades em mm



Fonte: Adaptado de ZOHREVAND *et al.* (2015).

A Tabela 4 mostra as propriedades de cada laje, como a resistência característica à compressão e as respectivas profundidades e as dimensões das áreas de punção preenchidas com CAD.

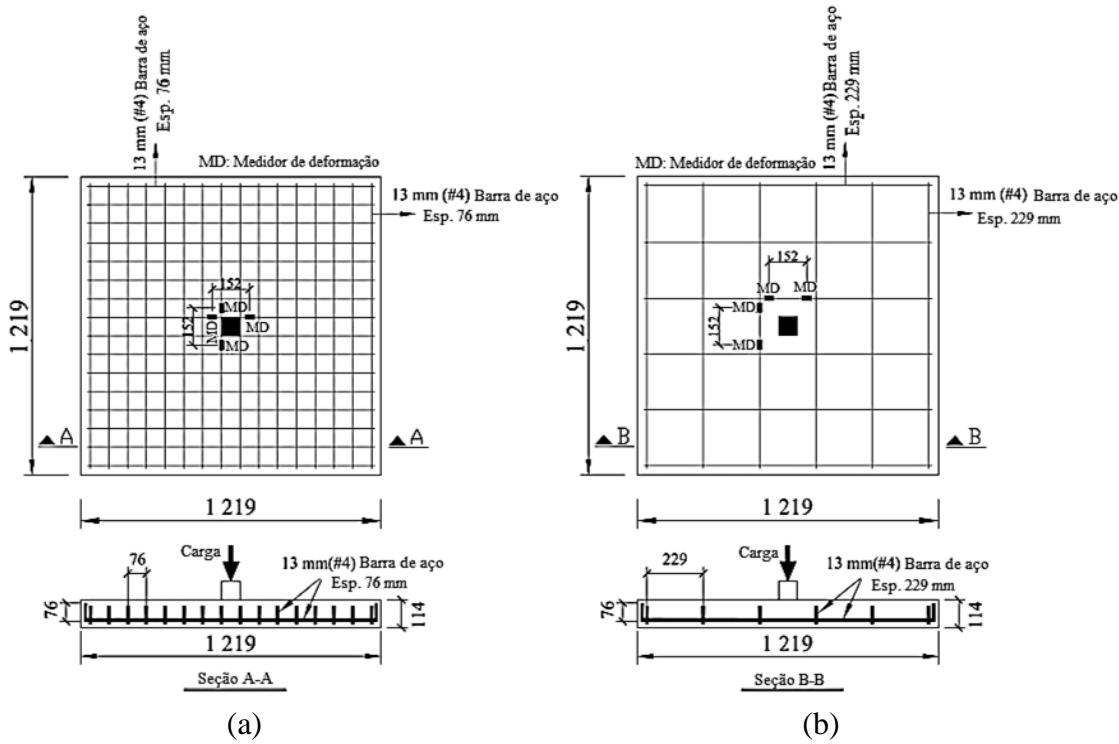
Tabela 4 – Propriedades das amostras analisadas

Nome da amostra	Material	Taxa de armadura (%)	Dimensões da laje (mm)		Dimensões do CAD (mm)		Resistência característica à compressão (MPa)				
			L	h	L	h	CN	CAD			
C-1.8	CN	1,8	1 219	114	-	-	45	-			
U-1.8	CAD				1 219	114	-	128,6			
CU-A-F-1.8	CN/CAD				533	114	45	150,3			
CU-B-H-1.8					419	57	45	139,7			
CU-C-F-1.8					305	114	45	147,4			
C-0.6	CN	0,6	1 219	114	-	-	45	-			
U-0.6	CAD				1 219	114	-	136,8			
CU-A-F-0.6	CN/CAD				533	114	45	151,4			
CU-B-H-0.6					419	57	45	139,7			
CU-C-F-0.6					305	114	45	139,7			

Fonte: Adaptado de ZOHREVAND *et al.* (2015).

A distribuição da armadura adotada para as duas configurações de taxa de armadura de 0,6% e 1,8% e os respectivos espaçamentos de 229 mm e 76 mm são ilustrados na Figura 22.

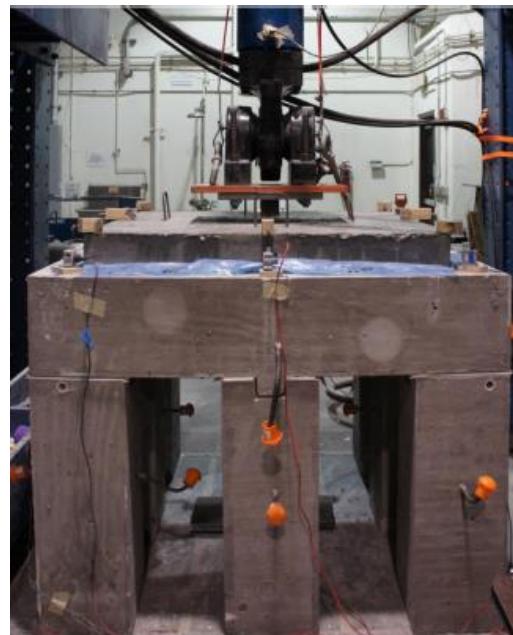
Figura 22 – Distribuição da armadura para as taxas de armadura de (a) 1,8% e (b) 0,6%



Fonte: Adaptado de ZOHREVAND *et al.* (2015).

Todas as amostras foram submetidas a uma carga vertical concêntrica para ser analisado o efeito do uso de CAD no aumento da resistência à punção em lajes lisas de concreto armado, onde foi utilizado macaco hidráulico com capacidade de 1045 kN para a aplicação da carga sobre a placa de aço de 76 × 76 mm, ilustrados na Figura 23.

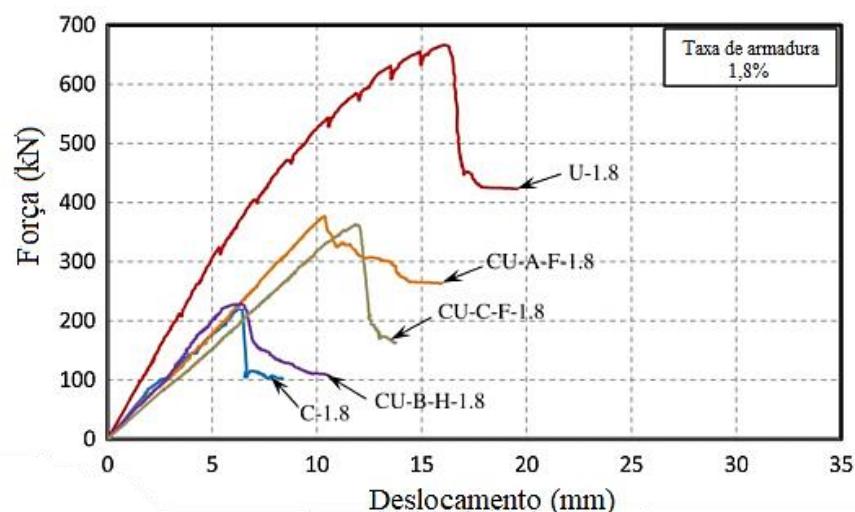
Figura 23 – Montagem do ensaio realizado por ZOHREVAND et al. (2015)



Fonte: ZOHREVAND *et al.* (2015).

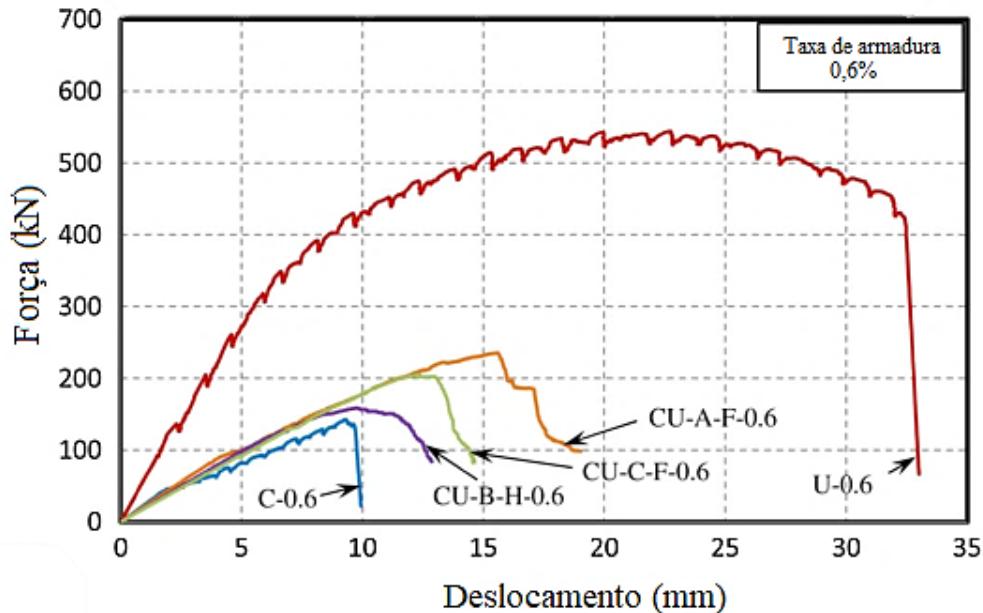
Após a realização dos testes foram obtidos os dados descritos nas Figuras 24 e 25 de acordo com a taxa de armadura de 1,8% e 0,6%, respectivamente.

Figura 24 – Força x Deslocamento para as taxas de armadura 1,8%



Fonte: Adaptado de ZOHREVAND *et al.* (2015).

Figura 25 – Força x Deslocamento para as taxas de armadura 0,6%



Fonte: Adaptado de ZOHREVAND *et al.* (2015).

Os resultados dos testes indicaram que a utilização de CAD em uma profundidade igual a altura da laje e localizado em uma área delimitada por uma distância desde a face do pilar igual à espessura da laje obteve um ganho de resistência ao cisalhamento de 70%, o que não foi percebido na aplicação em meia profundidade de CAD (ZOHREVAND *et al.*, 2015).

Já para as lajes sem armadura de cisalhamento e com diferentes taxas de armadura (0,6% e 1,8%) foi observado que houve um aumento na capacidade de resistência ao cisalhamento com o aumento da taxa de armadura. Além disso, observou-se que após a formação da primeira fissura, nas amostras com taxa de armadura menor, a rigidez se mostra muito menor quando comparada com as amostras com taxa de armadura longitudinal maior.

#### 2.5.1.4 Torabian *et al.* (2019)

Torabian *et al.* (2019) investigaram o comportamento de lajes lisas de concreto armado submetidas a cargas verticais centradas, além do estudo da aplicação da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (TFCC) em lajes. No programa experimental foram elaboradas quatro lajes quadradas de 1850 mm de comprimento e 100 mm de altura, simplesmente apoiadas, adotando as respectivas taxas de armadura longitudinal de 0,38% e 1,00%, com ou sem a presença de armadura de cisalhamento, como descrito na Tabela 5.

Tabela 5 – Propriedades e características das amostras

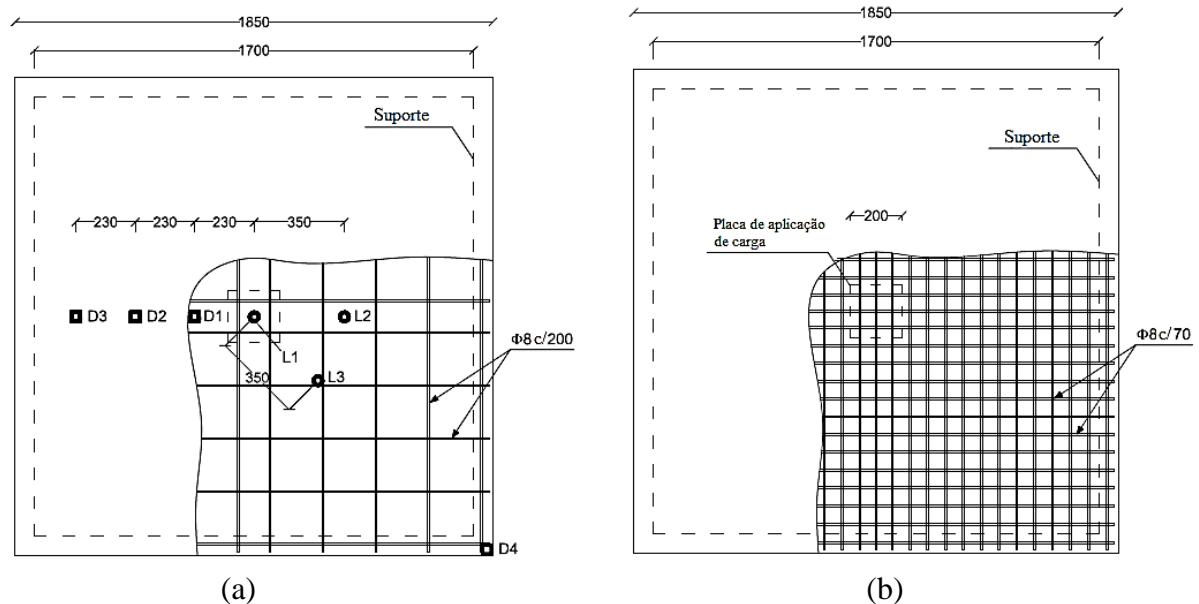
Amostra	$f_{ck}$ (MPa)	Taxa de armadura de flexão (%)	Armadura de cisalhamento	Carga de falha (kN)	Rotação última (rad)
US-0.38	43,0	0,38	Não reforçado	101,6	0,075
US-0.38-stud	41,7	0,38	Reforçado	117,1	> 0,189
US-1.00	41,9	1,00	Não reforçado	186,3	0,035
US-1.00-stud	42,2	1,00	Reforçado	224,0	0,100

Fonte: Adaptado de TORABIAN *et al.* (2019).

Os testes foram realizados no laboratório estrutural da Universidade de Tecnologia Isfahan. Em todos os ensaios foi aplicada uma carga vertical no centro das lajes, sobre uma placa de aço de dimensões 200 x 200 mm, sendo o valor da carga aplicada definido através de uma célula de carga externa. A distribuição da armadura adotada nos modelos experimentais é descrita na Figura 26, assim como a montagem do ensaio realizado na pesquisa, descrita na Figura 27.

Figura 26 – Disposição das armaduras nos modelos experimentais com taxa de armadura de

(a) 0,38% e (b) 1,00%



Fonte: Adaptado de TORABIAN *et al.* (2019).

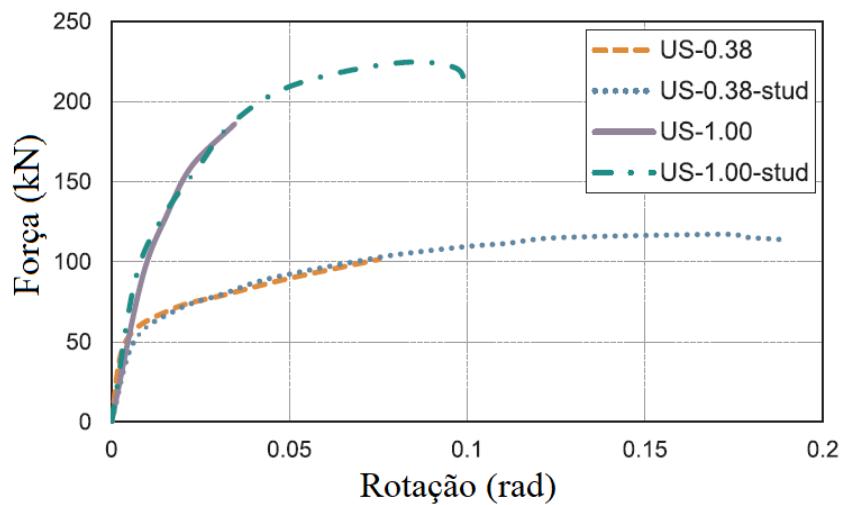
Figura 27 – Montagem do ensaio realizado por TORABIAN et al. (2019)



Fonte: TORABIAN *et al.* (2019).

Com os resultados do estudo observou-se que o uso de armadura de cisalhamento contribuiu para o aumento da capacidade de carga da laje, além do aumento da rotação final da mesma, o que pode ser notado na Figura 28, em que as amostras contendo estribos apresentaram comportamento semelhante às amostras sem reforço até um certo nível de carga.

Figura 28 – Força x Rotação das amostras ensaiadas



Fonte: Adaptado de TORABIAN *et al.* (2019).

Além disso, os resultados do estudo mostraram que após a primeira fissura as amostras têm seu comportamento afetado pela taxa de armadura de flexão. Assim como no estudo de

ZOHREVAND *et al.* (2015), citado anteriormente, em que a formação da primeira fissura ocorre a redução mais significativa da rigidez das lajes com menor taxa de armadura, ao contrário do que ocorreu nas amostras com maior taxa de armadura.

Por fim, foi observado que a introdução de estribos nas amostras contribui para que as lajes tenham um comportamento mais dúctil, fato que não tem relação com quantidade de armadura longitudinal.

#### *2.5.2 Fatores que influenciam a resistência ao esforço cortante em peças sem armadura de cisalhamento*

A resistência à força cortante em estruturas de concreto sem armadura de cisalhamento pode ser influenciada por alguns fatores, dentre eles: a altura da seção transversal; a taxa de armadura longitudinal; as fissuras; a resistência do concreto; e a espessura do elemento estrutural. Sendo assim, esses fatores interferem diretamente na resistência interna à força cortante.

Segundo Furlan Jr (1995), a altura da seção transversal do elemento estrutural influencia diretamente a abertura de fissuras, além de exercer uma influência sobre a ação do efeito de pino e também sobre o atrito entre as fissuras. Ademais, tem-se que o controle de fissuras realizado pelas barras longitudinais em vigas de altura superior a 60 cm não se mostra tão eficiente.

Esse acontecimento pode estar relacionado ao efeito de engrenamento dos agregados, que se manifesta mais expressivamente em peças delgadas, mas contanto que o diâmetro dos agregados não seja muito pequeno para que haja a atuação do efeito de escala entre a largura da peça e o diâmetro dos agregados (FURLAN JR, 1995).

Além disso, Zarrimpour e Chao (2017) analisaram doze vigas de concreto armado e observaram que ao se variar altura de 305 a 1220 mm o efeito de pino em vigas contribui com cerca de 10% a 30% para o cisalhamento final à medida que a altura da viga aumenta.

Sacramento *et al.* (2012) afirmam que a taxa de armadura de flexão tracionada influencia na resistência à punção, principalmente nos casos de lajes sem armadura de cisalhamento, em que se tem o aumento da zona comprimida do concreto com a redução da fissuração.

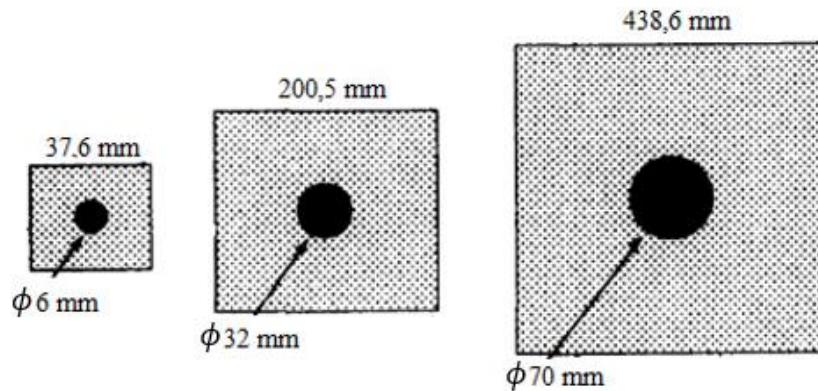
Conforme Fusco (1984 apud FURLAN JR, 1995), a rigidez da zona tracionada é determinada pela taxa de armadura longitudinal e exerce grande influência sobre o aparecimento de fissuras de cisalhamento e o prolongamento dessas fissuras até a zona comprimida. Além disso, interfere na atuação do efeito de pino e na ação do arqueamento dos

esforços internos. Segundo ensaios realizados por Fusco (1984), para taxas acima de 2% não há alteração da resistência ao cisalhamento.

Além disso, em um estudo realizado por Kani (1966 apud SOUZA, 2014) onde foram analisadas 133 vigas de concreto sem armadura transversal, verificou-se que a taxa de armadura longitudinal exerce uma influência significativa sobre a resistência ao cisalhamento. Pois o aumento da taxa de armadura longitudinal resulta no aumento da altura da zona comprimida e na redução da largura das fissuras, o que, consequentemente, resulta na elevação da resistência ao cisalhamento. A consideração da taxa de armadura longitudinal nas fórmulas de cálculo da resistência ao cisalhamento já vem sendo empregada em alguns códigos normativos.

Em uma análise feita por Maekawa e Qureshi (1997) buscou-se observar o mecanismo de transferência de esforços através das interfaces do concreto armado, do engrenamento dos agregados e do efeito de pino, utilizando uma modelagem da transferência de tensões de cisalhamento. Para isso, foram ensaiados concretos armados com resistências de 40 e 400 MPa, variando o diâmetro da armadura longitudinal, de forma que a área de aço fosse equivalente a 2% da área total da seção transversal (MAEKAWA; QURESHI, 1997). As seções analisadas são apresentadas na Figura 29.

Figura 29 – Seções transversais analisadas e suas respetivas armaduras



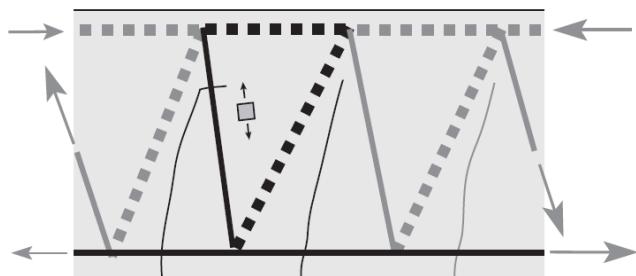
Fonte: Adaptado de MAEKAWA; QURESHI (1997).

Nesse estudo concluiu-se que o aumento do diâmetro da armadura reduz a tensão axial média na barra, fato que foi verificado tanto na análise numérica realizada, quanto no ensaio experimental. Além disso, verificou-se que o aumento significativo da taxa de armadura contribui também para a resistência ao cisalhamento através da ação de engrenamento dos agregados e do efeito de pino (MAEKAWA; QURESHI, 1997).

Segundo Tapajós (2017), em vigas de concreto sem armadura transversal a garantia da atuação do efeito pino e do engrenamento dos agregados ocorre, principalmente, quando a largura das fissuras é limitada. Dessa forma, o aumento da largura da fissura faz com que a atuação dos mecanismos de transferência de cisalhamento não ocorra de forma efetiva, comprometendo a resistência ao cisalhamento da viga, levando a estrutura a ruptura brusca.

Além disso, conforme Hilleborg (1983 apud TAPAJÓS, 2017), a possibilidade de transferência de esforços através das fissuras ocorre devido ao comportamento *softening* que o concreto exibe em razão da tensão residual de tração do concreto, como mostra a Figura 30. No entanto, Hordijk (1992) afirma que a atuação desse mecanismo se restringe a fissuras com larguras de até 0,2 mm.

Figura 30 – Tensão residual de tração do concreto



Fonte: CAVAGNIS (2015).

Outro fator que interfere diretamente no processo de transferência de esforços de cisalhamento provocado pelo efeito de pino é a resistência à compressão do concreto. Além disso, tem-se que a espessura do cobrimento do elemento estrutural não exerce muita influência sobre a resistência final, porém contribui para a rigidez inicial e também na transição entre o comportamento linear inicial e o comportamento plástico final. Dessa forma, o aumento da espessura do cobrimento contribui para uma maior eficácia da atuação do efeito de pino para cargas de utilização (CAVAGNIS, 2015).

## 2.4 RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS

#### 2.4.1 Norma brasileira – ABNT NBR 6118 (2014)

A NBR 6118 (ABNT, 2014) preconiza no item 19.4 o cálculo da força cortante resistente ( $V_{Rd1}$ ) de lajes e elementos lineares com largura da seção ( $b_w$ ) maior ou igual a altura útil ( $d$ ), além da verificação da necessidade de armadura transversal. Nesse item é feita a distinção entre lajes sem e com armadura transversal para a força cortante.

Para lajes sem armadura de cisalhamento, conforme item 19.4.1, a armadura transversal em lajes maciças ou nervuradas não é necessária quando a força cortante de cálculo ( $V_{Sd}$ ), aplicada a uma distância equivalente a altura útil da peça ( $d$ ), for inferior a força cortante resistente de cálculo ( $V_{Rd1}$ ), conforme a Equação 1.

$$V_{Sd} \leq V_{Rd1} \quad (1)$$

Sendo a força cortante resistente ( $V_{Rd1}$ ) dada pela Equação 2.

$$V_{Rd1} = [\tau_{Rd} \cdot k \cdot (1,2 + 40 \cdot \rho_1) + 0,15 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d \quad (2)$$

Onde:

$$k = \begin{cases} |1|, \text{ desconsiderando o efeito de pino} \\ |1,6 - d|, \text{ considerando o efeito de pino, não sendo inferior a } |1|, \text{ com } d \text{ em m} \end{cases}$$

Sendo:

$$\tau_{Rd} = 0,15 \cdot f_{ctd} \quad (3)$$

$$f_{ctd} = f_{ct,inf} / \gamma_c, \text{ onde } f_{ct,inf} \text{ é dada pela Equação 30}; \quad (4)$$

$$\rho_1 = \frac{A_{s1}}{b_w \cdot d} \leq |0,02|; \quad (5)$$

$$\sigma_{cp} = N_{Sd} / A_c; \quad (6)$$

Na qual:  $V_{Rd1}$  é a força cortante resistente de cálculo;  $\tau_{Rd}$  é a tensão de cisalhamento resistente de cálculo;  $f_{ctk,inf}$  é o valor mínimo de resistência à tração direta, definida na Equação 30;  $\gamma_c$  é o coeficiente de minoração de resistência do concreto;  $\rho_1$  é a taxa geométrica de armadura longitudinal de tração;  $A_{s1}$  é a área da armadura de tração;  $b_w$  é a menor largura da seção ao longo da altura útil  $d$ ;  $\sigma_{cp}$  é a tensão normal do concreto devido à força longitudinal na seção ou a protensão;  $N_{Sd}$  é a força longitudinal na seção em decorrência da protensão da armadura ou devido ao carregamento;  $A_c$  é a área da seção transversal de concreto;  $k$  é um coeficiente que depende da taxa de armadura longitudinal que chega aos apoios e está relacionado ao efeito de pino.

Ao dimensionar lajes submetidas à punção a NBR 6118 (ABNT, 2014) recomenda a utilização de um modelo de cálculo onde é feita a verificação do cisalhamento em três superfícies críticas pré-estabelecidas. Na primeira superfície crítica, chamada de contorno C, é

verificada a tensão de compressão diagonal do concreto, por meio da tensão de cisalhamento. Já na segunda superfície crítica, chamada de contorno C', localizada a  $2d$  do pilar ou carga normal aplicada, é feita a verificação da tensão resistente à punção, considerando a presença de armadura transversal. Por fim, na terceira superfície crítica, chamada de contorno C'', é verificada a tensão resistente à punção sem a presença de armadura transversal, esta deve ser empregada apenas se houver a necessidade da colocação de armadura transversal.

Observa-se que na formulação sugerida pela norma brasileira não há a consideração do efeito do engrenamento dos agregados. Com isso, conforme Sousa e Debs (2019), é considerado que o aumento da resistência do concreto resulta no crescimento contínuo da resistência ao cisalhamento, fato que não ocorre em concretos com resistência superior a 65 MPa. Além disso, Sousa e Debs (2019) ainda afirmam que o modelo da norma brasileira considera uma taxa de crescimento maior quando comparada as outras normas.

Outro ponto analisado na NBR 6118 (ABNT 2014) seria a consideração do ganho de resistência à força cortante devido ao aumento da taxa de armadura longitudinal, levando em conta o aumento da resistência originado do efeito de pino.

#### 2.4.2 Norma norte-americana – ACI 318-19 (2019)

A publicação da ACI 318-19 (2019) define diferentes conjuntos de equações para o cálculo da resistência ao cisalhamento. Para elementos estruturais armados em duas direções e sem armadura transversal a norma define que a força de cisalhamento bidirecional ( $V_n$ ) deve ser igual a força de cisalhamento bidirecional de cálculo ( $V_{Bd,c}$ ), como exposto na Equação 7.

$$V_n = V_{Bd,c} \quad (7)$$

A força de cisalhamento bidirecional de cálculo ( $V_{Bd,c}$ ) pode ser calculada empregando-se a Equação 8, levando em consideração o efeito de escala, também chamado de *size effect*.

$$V_{Bd,c} \leq \begin{cases} 0,33 \cdot \lambda_s \cdot \lambda_2 \cdot \sqrt{f_{ck}} \\ 0,17 \cdot \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \cdot \lambda_s \cdot \lambda_2 \cdot \sqrt{f_{ck}} \\ 0,083 \cdot \left(2 + \frac{\alpha_s \cdot d}{b_o}\right) \cdot \lambda_2 \cdot \sqrt{f_{ck}} \end{cases} \quad (8)$$

Onde:  $V_{Bd,c}$  é a força de cisalhamento bidirecional de cálculo;  $\lambda_s$  é o fator responsável por modificar a resistência ao cisalhamento considerando o efeito de escala;  $\lambda_2$  é o fator

modificador usado para refletir as propriedades mecânicas reduzidas do concreto leve em relação ao concreto normal de mesma resistência à compressão, podendo variar entre 0,75 e 1,0, sendo igual a 1,0 para concretos normais;  $\beta$  é a razão entre a maior e a menor dimensão do pilar;  $\alpha_s$  é uma constante com valor igual a 40 para pilares internos, 30 para pilares na borda de sapatas e 20 para pilares no canto na laje;  $b_o$  é o perímetro crítico da seção, localizado a  $d/2$  da periferia da área carregada, segundo a ACI 318-19 (2019).

Em relação à norma norte-americana, assim como a norma brasileira NBR 6118 (ABNT, 2014), não é considerado o efeito do engrenamento dos agregados. No entanto, o efeito de escala é considerado no cálculo da resistência ao cisalhamento, ao contrário do que ocorria em sua versão anterior onde a resistência era superestimada em lajes com elevadas espessuras. Além disso, a ACI 318-19 (2019), de forma conservadora, não considera o ganho de resistência devido ao efeito de pino.

#### 2.4.3 Norma inglesa – BS 8110 (1997)

Conforme a norma BS 8110 (1997), as falhas provocadas pela punção podem ocorrer em faces inclinadas de cones ou pirâmides, de acordo com a forma das áreas submetidas ao carregamento. No entanto, para efeitos de simplificação, a norma inglesa opta por considerar perímetros retangulares de falha.

Para determinar a máxima tensão de cisalhamento de projeto ( $\sigma_{máx}$ ) pode-se aplicar a relação definida na Equação 9, com seu valor não superior a  $0,8\sqrt{f_{ck}}$  ou  $5 \text{ N/mm}^2$ .

$$\sigma_{máx} = \frac{V_E}{\mu_o \cdot d} \quad (9)$$

Na qual:  $\sigma_{máx}$  é a máxima tensão de cisalhamento de projeto;  $V_E$  é o valor da força aplicada;  $\mu_o$  é o perímetro da área carregada; e  $d$  é a altura útil.

Além disso, a BS 8110 (1997) determina que a força de cisalhamento em lajes maciças sem armadura transversal ( $V_{Rd,c}$ ) pode ser calculada empregando-se a Equação 10, para um  $f_{ck}$  entre 25 e  $40 \text{ N/mm}^2$ .

$$V_{Rd,c} = 0,22 \cdot \left(100 \cdot \frac{A_s}{b_w \cdot d}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{400}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot f_{ck}^{\frac{1}{3}} \quad (10)$$

Onde:  $V_{Rd,c}$  é a força de cisalhamento em lajes maciças sem armadura transversal;  $A_s$  é a área da armadura longitudinal;  $b_w$  é a menor largura da seção ao longo da altura útil  $d$ ;  $f_{ck}$  é a resistência à compressão característica do concreto; e  $d$  é a altura útil.

Observando a formulação sugerida pela norma inglesa para determinar a resistência à força cortante em lajes sem armadura transversal verifica-se que a norma considera o aumento da resistência decorrente do aumento da taxa de armadura longitudinal, além do ganho devido ao aumento da resistência do concreto. No entanto, para concretos de alta resistência, superior a 65 MPa, a perda de resistência ocasionada pela redução do engrenamento dos agregados não é levada em conta.

#### 2.4.4 Norma internacional – CEB-FIP Model Code (2010)

A norma CEB-FIP Model Code (2010) define que a força de cisalhamento em lajes sem armadura transversal ( $V_{Rd,c}$ ) é determinada através da Equação 11, em que a rotação da laje é considerada no cálculo.

$$V_{Rd,c} = k_\psi \cdot \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} \cdot b_0 \cdot d_v \quad (11)$$

Em que:  $V_{Rd,c}$  é a força de cisalhamento em lajes sem armadura transversal, em MPa;  $k_\psi$  é o parâmetro que depende da rotação da laje na região próxima ao suporte, definido na Equação 12;  $b_0$  é o perímetro crítico medido a partir de  $0,5d$  da face do pilar ou da área submetida ao carregamento, conforme recomendado pela norma em questão;  $d_v$  é a altura efetiva considerando apoios inseridos, no entanto, para o caso de apoios não inseridos na laje seu valor é igual a altura útil  $d$ .

$$k_\psi = \frac{1}{1,5 + 0,6 \cdot \psi \cdot d \cdot k_{dg}} \leq 0,6 \quad (12)$$

Onde:  $\psi$  é o parâmetro relacionado à rotação da laje;  $k_{dg}$  é o parâmetro relacionado ao tamanho do agregado, definido aplicando-se a Equação 13;  $d_g$  é o diâmetro do agregado usado no concreto da laje.

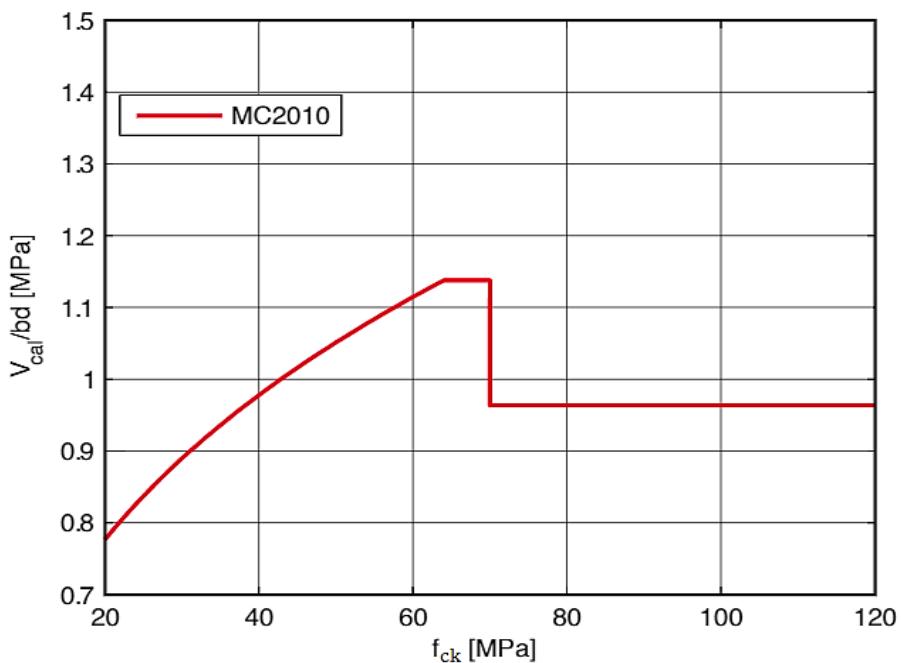
$$k_{dg} = \frac{48}{16 + d_g} \geq 1,15 \quad (13)$$

Caso o diâmetro do agregado ( $d_g$ ) seja maior ou igual a 16 mm, o valor de  $k_{dg}$  pode ser assumido como sendo igual a 1,0.

Segundo Sousa e Debs (2019), em concretos de alta resistência que possuam agregados leves a propagação das fissuras se dá, principalmente, através das partículas dos agregados, isso faz com que as superfícies fissuradas apresentem menor rugosidade. Esse efeito de fratura dos agregados é considerado no parâmetro  $k_{dg}$  do referido código, presente na formulação do parâmetro  $k_\psi$ . Para considerar esse efeito em concretos com resistência superior a 70 MPa o diâmetro do agregado ( $d_g$ ) deve ser igualado a zero.

Em um estudo realizado por Yang *et al.* (2016) chama-se atenção para a existência de uma descontinuidade na fórmula utilizada pela CEB-FIP Model Code (2010) quando é relacionada a resistência à compressão do concreto e a resistência ao cisalhamento, mostrado na Figura 31, em que ao atingir a resistência do concreto de 70 MPa ocorre uma diminuição abrupta da resistência à força cortante, em torno de 40%.

Figura 31 – Resistência à força cortante em função da resistência à compressão do concreto segundo a CEB-FIP Model Code (2010)



Fonte: Adaptado de YANG *et al.* (2016).

De acordo com a CEB-FIP Model Code (2010), a rotação da laje ( $\psi$ ) pode ser calculada em diferentes níveis de aproximação, dependendo da precisão necessária. Para estruturas novas é recomendado o nível I de aproximação. Para estruturas novas e já existentes é recomendado

o uso do nível II. Para casos mais complexos, onde a estrutura fuja do convencional é recomendado o uso do nível III de aproximação. Já o nível IV de aproximação é indicado nos casos em que se deseja obter a rotação da laje através de análises não-lineares.

Em lajes projetadas através de análises elásticas sem considerar redistribuições significativas das forças pode-se empregar o nível I para estimar a rotação da laje ( $\psi$ ), sendo calculada aplicando-se a Equação 14.

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_y}{E_s} \quad (14)$$

Em que:  $r_s$  é a distância entre o eixo do pilar e a linha de momentos nulos, com seu valor próximo de  $0,22L_x$  ou  $0,22L_y$ , em lajes onde a relação entre os vãos ( $L_x/L_y$ ) fica limitada em 0,5 e 2,0;  $f_y$  é a resistência ao escoamento da armadura de flexão;  $E_s$  é o módulo de elasticidade do aço da armadura longitudinal.

Quando a redistribuição de momentos é considerada no projeto, a estimativa da rotação da laje ( $\psi$ ) é feita utilizando o nível II de aproximação, definida aplicando-se a Equação 15.

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_y}{E_s} \cdot \left( \frac{M_{Sd}}{M_{Rd}} \right)^{1,5} \quad (15)$$

Onde:  $M_{Sd}$  é momento fletor médio solicitante;  $M_{Rd}$  é o momento fletor médio resistente.

A CEB-FIP *Model Code* (2010) estabelece o valor do momento fletor médio solicitante ( $M_{Sd}$ ) de acordo com a localização do pilar na edificação. Para isso, são consideradas três localizações: pilar interno, pilar de borda; e pilar de canto. Assim, seu valor pode ser calculado conforme as seguintes expressões:

- Para pilares internos:  $M_{Sd} = V_E/8$ ;
- Para pilares de borda:
  - $M_{Sd} = V_E/4$ , quando os cálculos são feitos considerando  $M_{Rd}$  devido à armadura superior paralela à borda;
  - $M_{Sd} = V_E/8$ , quando os cálculos são feitos considerando  $M_{Rd}$  obtido a partir da menor quantidade de armadura superior e inferior perpendicular à aresta;
- Para pilares de canto:  $M_{Sd} = V_E/2$ , considerando  $M_{Rd}$  calculado a partir da menor quantidade de armadura superior e inferior em cada direção.

O momento fletor médio resistente ( $M_{Rd}$ ) pode ser calculado aplicando-se os conceitos da Teoria das Linhas de Ruptura, conforme disposto na Equação 16.

$$M_{Rd} = \rho \cdot d^2 \cdot f_y \cdot \left( 1 - \frac{\rho \cdot f_y}{2 \cdot f_{ck}} \right) \quad (16)$$

O Nível III de aproximação pode ser aplicado em lajes onde a relação  $L_x/L_y$  não está no intervalo entre 0,5 e 2,0. Nesse caso, para se calcular a rotação da laje ( $\psi$ ) pode-se empregar a Equação 14, substituindo o coeficiente 1,5 por 1,2, com os valores de  $r_s$  e  $M_{Sd}$  calculados utilizando o modelo elástico-linear. Já para o nível IV de aproximação, o valor da rotação da laje ( $\psi$ ) pode ser obtido através de uma análise não-linear.

#### 2.4.5 Norma europeia – EUROCODE 2 (2004)

A resistência ao cisalhamento em lajes de concreto armado sem armadura transversal é determinada levando-se em consideração o efeito da taxa de armadura e o *size effect*, chamado também de efeito de escala. Essa resistência pode ser calculada empregando-se a Equação 17.

$$V_{Rd,c} = C_{Rd,c} \cdot k_p \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}} + k_1 \cdot \sigma_{cp} \geq (v_{min} + k_1 \cdot \sigma_{cp}) \quad (17)$$

Sendo:

$$C_{Rd,c} = 0,18/\gamma_c; \quad (18)$$

$$k_p = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2, \text{ com } d \text{ em mm}; \quad (19)$$

$$\rho_1 = \sqrt{\rho_{ly} + \rho_{lz}} \leq 0,02; \quad (20)$$

$$\rho_{ly} = \frac{A_{sl,y}}{b_w \cdot d}; \quad (21)$$

$$\rho_{lz} = \frac{A_{sl,z}}{b_w \cdot d}; \quad (22)$$

$$k_1 = 0,1; \quad (23)$$

$$v_{min} = 0,035 \cdot k^{3/2} \cdot \sqrt{f_{ck}}, \text{ com } f_{ck} \text{ em MPa.} \quad (24)$$

Onde:  $k_p$  é a constante relacionada ao efeito de pino;  $\rho_{ly}$  e  $\rho_{lz}$  referem-se às taxas geométricas de armadura longitudinal de tração, nas direções y e z, seus valores devem ser calculados considerando a largura da laje  $b_w$  igual a largura do pilar acrescido de  $3d$  para cada lado;  $A_{sl,y}$

e  $A_{sl,z}$  são as áreas da armadura de tração nas respectivas direções y e z;  $k_1$  é um coeficiente com valor recomendado pela norma;  $v_{mín}$  é o valor mínimo da tensão de cisalhamento.

Da Equação 17 tem-se que a tensão normal do concreto devido à força longitudinal ( $\sigma_{cp}$ ) pode ser determinada aplicando-se a Equação 25.

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{cy} + \sigma_{cz}}{2} \text{ (MPa)} \quad (25)$$

Sendo  $\sigma_{cy} = N_{Ed,y}/A_{cy}$  e  $\sigma_{cz} = N_{Ed,z}/A_{cz}$ .

Em que:  $\sigma_{cy}$  e  $\sigma_{cz}$  são tensões normais do concreto devido à força longitudinal na seção ou a protensão na direção y e z, respectivamente;  $N_{Ed,y}$  e  $N_{Ed,z}$  são forças longitudinais nas faixas da laje quando se tem pilares internos ou forças longitudinais na seção crítica de controle para pilares de borda, devido à protensão;  $A_{cy}$  e  $A_{cz}$  são as áreas da seção transversal de concreto nas respectivas direções y e z.

Ao analisar a formulação da Eurocode 2 (2004) para determinar a resistência ao cisalhamento em lajes sem armadura transversal verifica-se que, assim como nas normas NBR 6118 (ABNT, 2014) e a ACI 318-14 (2019), não é considerado o efeito do engrenamento dos agregados, dessa forma, a resistência à força cortante permanece crescente com o aumento da resistência do concreto, o que não ocorre em concretos de alta resistência. Além disso, Sousa e Debs (2019) afirmam que a Eurocode 2 (2004) passa a considerar o efeito de escala no cálculo da resistência ao cisalhamento em elementos com espessuras superiores a 20 cm. Já em relação ao efeito de pino, tem-se que a taxa de armadura longitudinal é considerada nos cálculos da norma, assim, o aumento da resistência devido ao efeito de pino é levado em conta ao se determinar a resistência à força cortante do elemento.

### 3 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

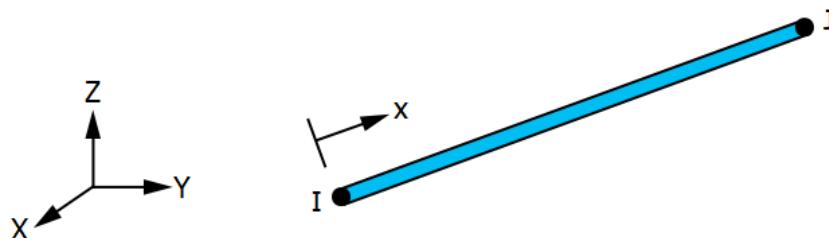
#### 3.1 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS

##### 3.1.1 *Link180*

O elemento LINK180, ilustrado na Figura 32, é um elemento 3D longitudinal utilizado, geralmente, para modelar treliças, tirantes, molas, entre outros elementos. Esse elemento finito é capaz de suportar esforços de compressão e tração uniaxial e possui dois nós com três graus de liberdade – translação nodal em x, y e z (ANSYS, 2020).

Além disso, a elasticidade, plasticidade de endurecimento isotrópico, plasticidade de endurecimento cinemático, plasticidade anisotrópica de Hill, plasticidade de endurecimento não-linear de Chaboche e fluência também são suportados pelo elemento.

Figura 32 – Elemento finito LINK180

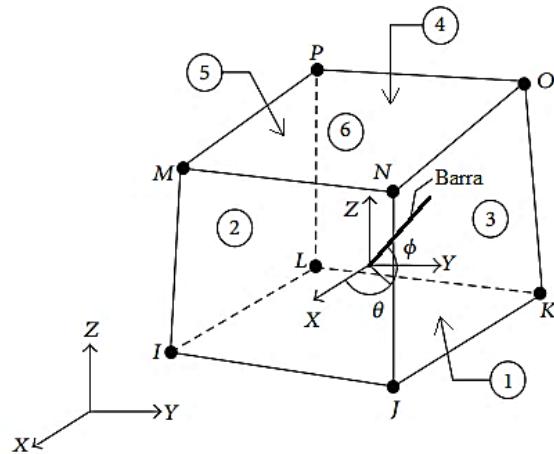


Fonte: ANSYS (2020).

##### 3.1.2 *Solid65*

O elemento SOLID65, como mostra a Figura 33, é um elemento finito com oito nós e três graus de liberdade em cada nó – translação nodal em x, y e z. Esse elemento pode ser utilizado para simular o comportamento do concreto como a fissuração por tração ou o esmagamento do concreto por compressão. Esse elemento também permite a inserção de armaduras, onde é possível considerar a não linearidade dos materiais (ANSYS, 2020).

Figura 33 – Elemento finito SOLID65



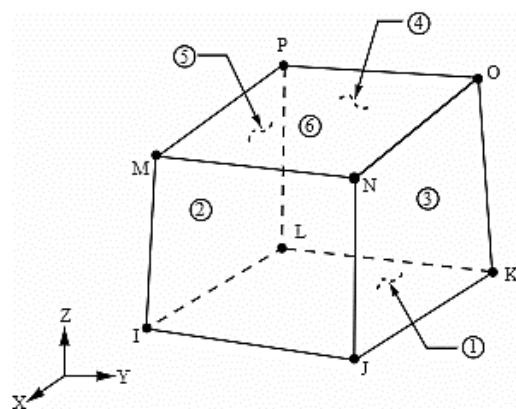
Fonte: Adaptado de ANSYS (2020).

Em que:  $\theta$  é o ângulo de orientação da barra em relação ao eixo x; e  $\phi$  é o ângulo de orientação da barra em relação ao plano xy.

### 3.1.3 Solid185

Utilizado para a modelagem de estruturas sólidas em 3 dimensões, o elemento SOLID185 possui oito nós com três graus de liberdade em cada nó – translação nodal nas direções x, y e z, como ilustrado na Figura 34. Além disso, este elemento é capaz de simular a plasticidade, hiperelasticidade, rigidez ao esforço, fluência, grandes deflexões e grandes deformações (ANSYS, 2020).

Figura 34 – Elemento finito SOLID185



Fonte: ANSYS (2020).

### 3.2 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

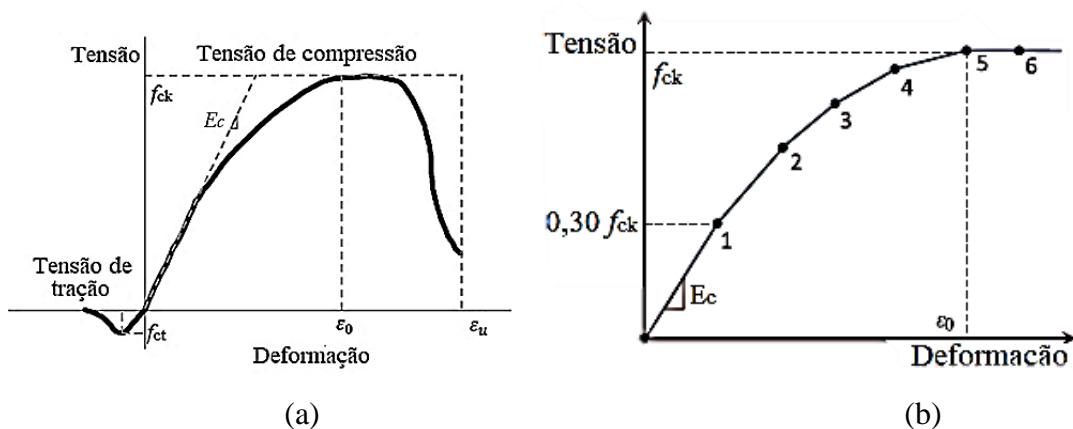
#### 3.2.1 Material - Concreto

O concreto é um material heterogêneo composto, basicamente, por agregados finos e grossos. Além disso, tem como característica principal a não-linearidade na relação tensão-deformação, como ilustra a Figura 35a. Esse comportamento estaria ligado a formação e ao crescimento gradual das microfissuras, quando submetido à carga.

Essas microfissuras podem ser classificadas como fissuras de ligação ou fissuras de argamassa. A formação da fissura de ligação ocorre na interface entre a argamassa e o agregado grosso. Já a fissura de argamassa ocorre em altos níveis de carga e é localizada na argamassa entre os pedaços de agregado (BASAPPA, 2013).

Basappa (2013) afirma ainda que para um concreto submetido à compressão existem vários modelos matemáticos que se aproximam do seu comportamento não-linear. Dentre eles, tem-se o modelo de Hognestad modificado, como mostra a Figura 35b, sendo um modelo matemático bastante empregado na aproximação do comportamento de tensão-deformação do concreto.

Figura 35 – Curva tensão-deformação do concreto: (a) curva real do concreto sob compressão e (b) modelo de Hognestad modificado



Fonte: Adaptado de BASAPPA (2013).

Em que:  $f_{ck}$  é a resistência à compressão característica do concreto;  $f_{ct}$  é a resistência à tração do concreto;  $E_c$  é o módulo de elasticidade do concreto no estágio linear na curva tensão-deformação.

A NBR 6118 (ABNT, 2014) sugere a utilização da Equação 26 para o cálculo da curva de tensão-deformação do concreto submetido à compressão.

$$f = f_{ck} \cdot \left( 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \right) \quad (26)$$

Onde:  $f$  é a tensão de compressão do concreto para a respectiva deformação  $\varepsilon_c$ ;  $\varepsilon_{c0}$  é a deformação máxima do concreto na compressão, sendo 2% para concretos de até 50 MPa. Para concreto com maior resistência deve-se empregar a Equação 27.

$$\varepsilon_{c0} = 2\% + 0,085\% \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad (27)$$

Para a parcela da curva correspondente a resistência à tração do concreto ( $f_{ct}$ ), descrita na Figura 35a, pode-se estimá-la utilizando a resistência à tração média do concreto ( $f_{ct,m}$ ), descrita nas Equações 28 e 29, de acordo com a classe do concreto, conforme recomendado pela NBR 6118 (ABNT, 2014). Esta é empregada nos casos onde não foram realizados ensaios experimentais para definir a resistência à tração indireta ( $f_{ct,sp}$ ) e a resistência à tração na flexão ( $f_{ct,f}$ ).

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (\text{concretos de classes até C50}) \quad (28)$$

$$f_{ct,m} = 2,12 \cdot \ln(1 + 0,11 \cdot f_{ck}) \quad (\text{concretos de classe C55 até C90}) \quad (29)$$

Sendo a resistência à tração inferior ( $f_{ct,inf}$ ) e superior ( $f_{ct,sup}$ ) do concreto definidas nas Equações 30 e 31, respectivamente.

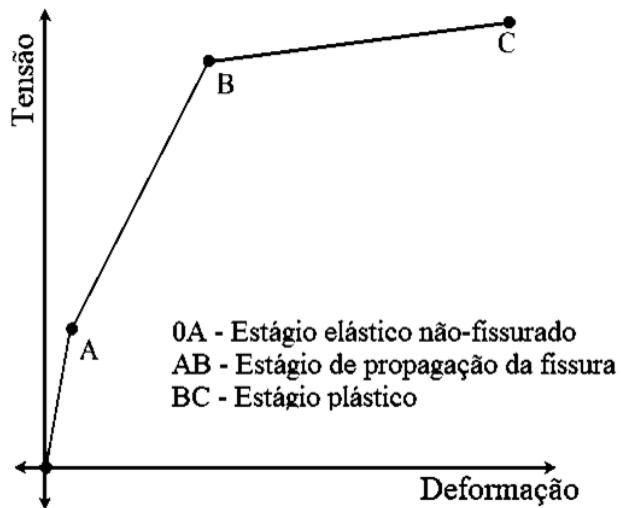
$$f_{ct,inf} = 0,7 \cdot f_{ct,m} \quad (30)$$

$$f_{ct,sup} = 1,3 \cdot f_{ct,m} \quad (31)$$

Em que:  $f_{ct,m}$  é a resistência à tração média do concreto, dada em MPa;  $f_{ct,inf}$  é a resistência à tração inferior do concreto, em MPa;  $f_{ct,sup}$  é a resistência à tração superior do concreto, em MPa.

Em estruturas de concreto armado, compostas basicamente por concreto e aço, é observado na curva de tensão-deformação, descrita na Figura 36, um comportamento dividido em três estágios: estágio elástico não-fissurado; estágio de propagação de fissuras; e, por fim, o estágio plástico.

Figura 36 – Estágio da curva tensão-deformação de estruturas de concreto armado



Fonte: Adaptado de BASAPPA (2013).

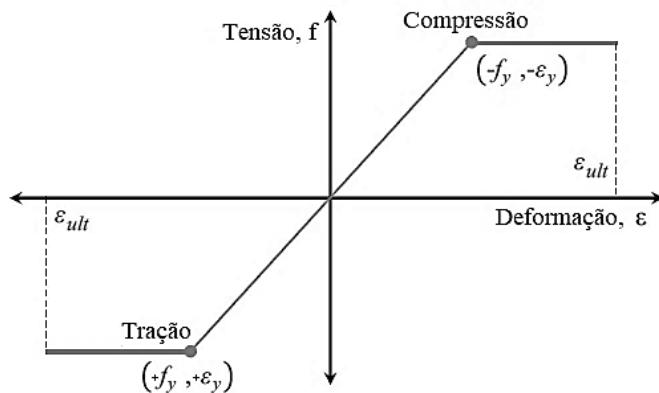
No estágio elástico não-fissurado tem-se a ocorrência de deformações muito pequenas localizadas na parte inferior da estrutura. Com o avanço da aplicação do nível de carga, após atingida a resistência à tração do concreto, há o crescimento das fissuras já existentes e o surgimento de fissuras primárias, denominado estágio de propagação da fissura.

No início do estágio plástico há a presença de um maior número de fissuras na estrutura, contribuindo para a diminuição da rigidez do elemento estrutural. Esse efeito é ampliado com o aumento da carga aplicada. Dessa forma, a inclinação da curva tensão-deformação também diminui, como mostrado na Figura 36.

### 3.2.2 Material - Aço

A armadura de aço, quando submetida a carga de tensão monotônica, possui comportamento, inicialmente, elástico-linear seguido de um patamar de escoamento, a ocorrência do endurecimento por tensão e, por fim, a queda de tensão até a ruptura. Sendo observado o mesmo comportamento sob carga de compressão e de tração. Para representar seu comportamento é adotado, geralmente, o modelo elástico perfeitamente plástico, como mostra a Figura 37.

Figura 37 – Comportamento do aço sob carga de compressão e de tração



Fonte: Adaptado de BASAPPA (2013).

Em que:  $f_y$  é a resistência ao escoamento do aço;  $\epsilon_y$  é a deformação do aço; e  $\epsilon_{ult}$  é a deformação máxima admitida para o aço, sendo adotada 10% para tensão de tração e 3,5% para tensão de compressão, respeitando a deformação máxima do concreto sob carga de compressão recomendada pela NBR 6118 (ABNT 2014).

### 3.3 MODELOS NUMÉRICOS UTILIZADOS

#### 3.3.1 *Concreto*

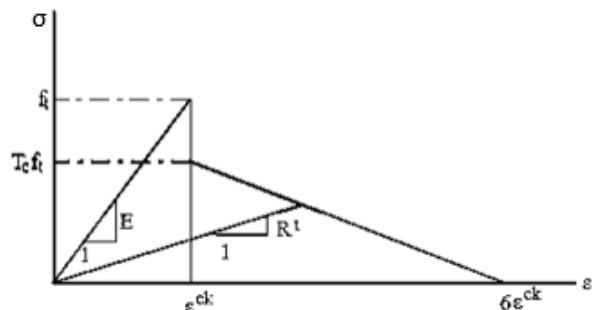
Na modelagem foi empregado o modelo de plasticidade *Concrete*, existente no programa ANSYS baseado no modelo de Willam e Warnke (1975 apud Ansys, 2020), para representar o comportamento do concreto. Para isso, algumas constantes são necessárias para a aplicação do modelo, descritas no Quadro 1. Os coeficientes  $\beta_1$  e  $\beta_2$  podem variar de 0 a 1, sendo mais usual adotar o valor de 0,3 e 1,0, respectivamente. Para  $\beta_1$  tem-se que quanto menor seu valor, maiores são os deslocamentos da peça e menor é a carga máxima obtida, assim como o contrário é observado para valores maiores, próximos a 1,0.

Quadro 1 – Constantes do modelo *Concrete*

Nº	Const.	Descrição	Valor
1	$\beta_1$	Coeficiente de transferência de cisalhamento na fissura aberta	0,3 (adotado inicialmente)
2	$\beta_2$	Coeficiente de transferência de cisalhamento na fissura fechada	1,0 (adotado inicialmente)
3	$f_t$	Resistência à tração do concreto	Equações 28 e 29
4	$f_c$	Resistência à compressão axial do concreto	$f_{ck}$
5	$f_{cb}$	Resistência à compressão biaxial do concreto	$1,2 \cdot f_{ck}$
6	$\sigma_h^a$	Resistência no estado de tensão hidrostática	$\sqrt{3} \cdot f_{ck}$
7	$f_1$	Resistência à compressão para o estado de compressão biaxial sobreposta ao estado de tensão hidrostática	$1,45 \cdot f_{ck}$
8	$f_2$	Resistência à compressão para o estado de compressão uniaxial sobreposta ao estado de tensão hidrostática	$1,725 \cdot f_{ck}$
9	TC	Fator de fissura por tração – <i>Tension stiffening</i>	0,6 ( <i>default</i> )

Fonte: Autora (2021).

Para a resistência à tração do concreto definiu-se no programa a consideração do efeito *tension stiffening*, ou seja, a ocorrência da diminuição gradual da resistência à tração do concreto após atingido seu valor máximo. Essa consideração pode ser ativada nas configurações do elemento utilizado para modelar o concreto, onde, ao considerar o *tension stiffening*, deve ser definido o valor da constante TC, ilustrada na Figura 38.

Figura 38 – Redução gradual da resistência à tração do concreto devido ao *tension stiffening* e atuação da constante TC na obtenção da curva

Fonte: ANSYS (2020).

### 3.3.2 Armadura

Para representar o comportamento das armaduras longitudinais foi adotado o modelo elastoplástico perfeito, como ilustra a Figura 37, sendo utilizado o modelo *Bilinear Isotropic Hardening* de von Mises na simulação numérica, com suas constantes descritas no Quadro 2. Já para os casos em que seja necessário inserir a curva tensão-deformação do aço deve-se utilizar o modelo *Multilinear Isotropic Hardening* de von Mises, onde a tensão última do aço é levada em consideração.

Quadro 2 – Dados do modelo Bilinear Isotropic Hardening de von Mises

Nº	CONSTANTE	DESCRIÇÃO
1	$f_y$	Tensão de escoamento do aço
2	$E_t$	Módulo de elasticidade tangente do aço

Fonte: Autora (2021).

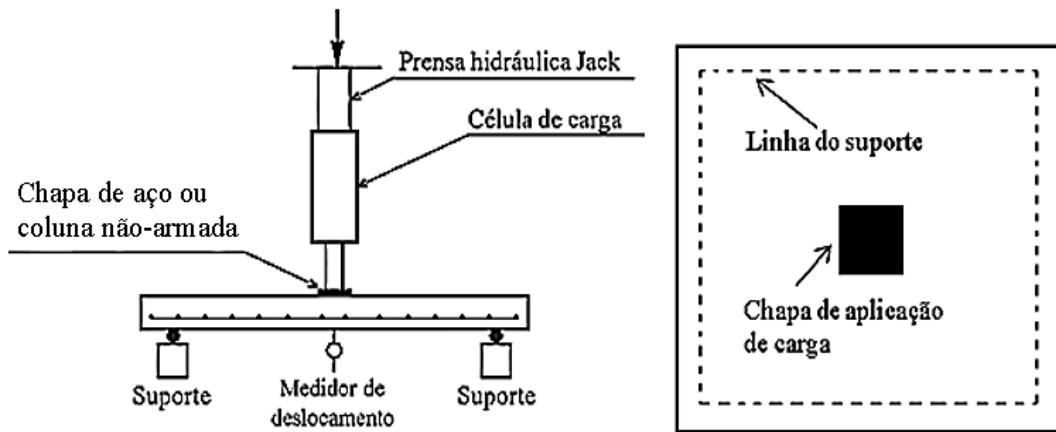
## 3.4 MODELAGEM

### 3.4.1 Configuração dos ensaios experimentais reproduzidos numericamente

Para a realização da modelagem dos ensaios experimentais já existentes foi adotada uma configuração única de montagem do ensaio experimental considerando a forma de aplicação da carga sobre a laje e a disposição dos apoios.

Sendo assim, foram reproduzidos os ensaios experimentais que apresentaram a configuração de montagem do ensaio semelhante ao ilustrado na Figura 39, onde a aplicação de carga foi realizada através da placa de aço ou coluna de concreto não-armada ou de aço, contendo apenas a armadura longitudinal nas duas direções da laje. Além disso, foram considerados apenas os ensaios em que as lajes estavam simplesmente apoiadas, sem qualquer restrição na interface entre a laje e o suporte.

Figura 39 – Modelo físico considerado na simulação numérica



Fonte: Autora (2021).

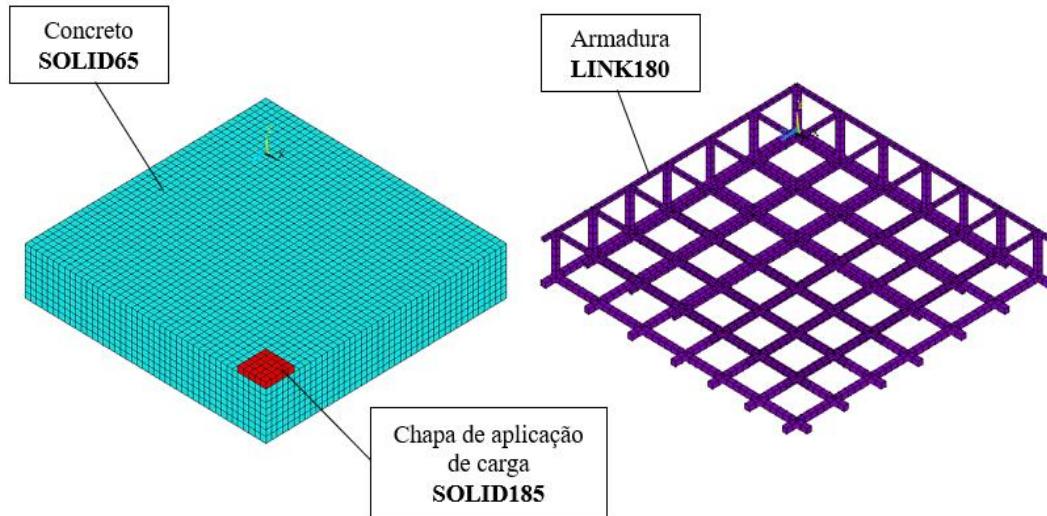
### 3.4.2 Configurações definidas na simulação

Esta seção descreve os modelos numéricos elaborados para a realização das simulações a fim de se obter um modelo numérico representativo dos ensaios experimentais estudados.

#### 3.4.2.1 Modelo I – Simetria nos nós das barras

Para a realização da modelagem numérica foram empregados os elementos finitos descritos na Figura 40, conforme o material utilizado no ensaio experimental.

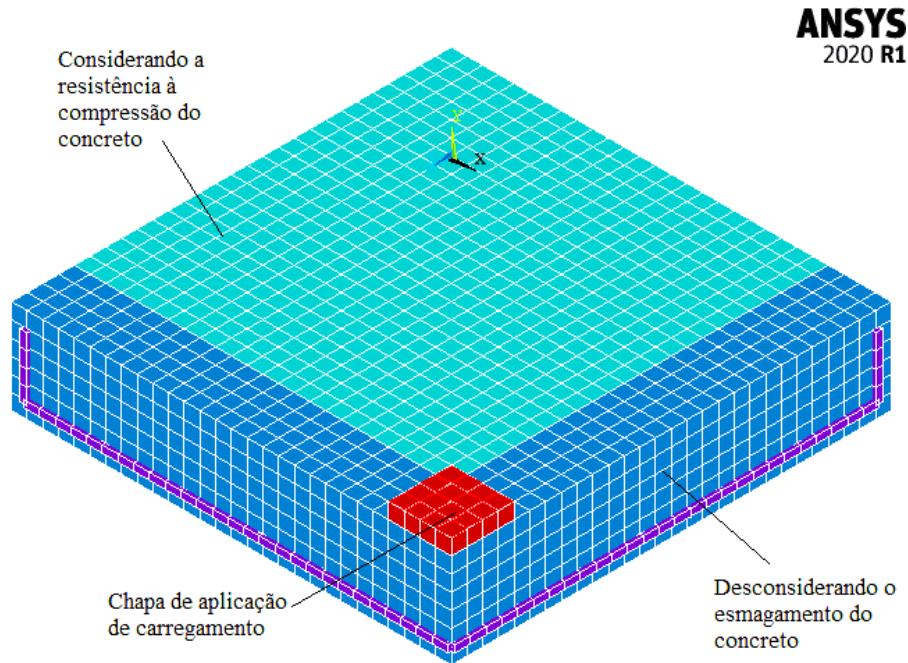
Figura 40 – Elementos finitos definidos para cada material no Modelo I



Fonte: Autora (2021).

No presente método a simetria foi aplicada apenas nos nós das barras que possuem continuidade e na chapa de aço. Já nas áreas próximas a chapa de aplicação de carga foi desconsiderado o esmagamento do concreto, como mostra a Figura 41.

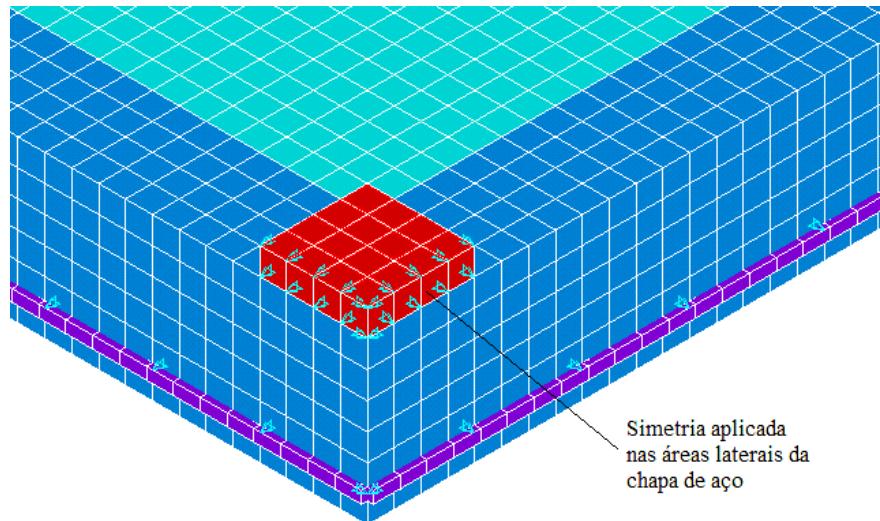
Figura 41 – Zonas de consideração e desconsideração do esmagamento do concreto



Fonte: Autora (2021).

Além disso, foram empregadas diferentes formas de aplicação de simetria na chapa, conforme a espessura da laje, onde para as lajes com espessura superior a 100 mm foi empregado o modelo de simetria ilustrado na Figura 42, em que foi necessária a redução do módulo de elasticidade da chapa de aço ( $E_{chapa}$ ) para 2000 MPa, para permitir maiores deformações, visto que os nós da laje que coincidiam com os nós da chapa apresentavam menor deformação devido ao alto valor do módulo de elasticidade da chapa, contribuindo para o aumento da rigidez da laje. Com a redução do  $E_{chapa}$  esse problema foi solucionado.

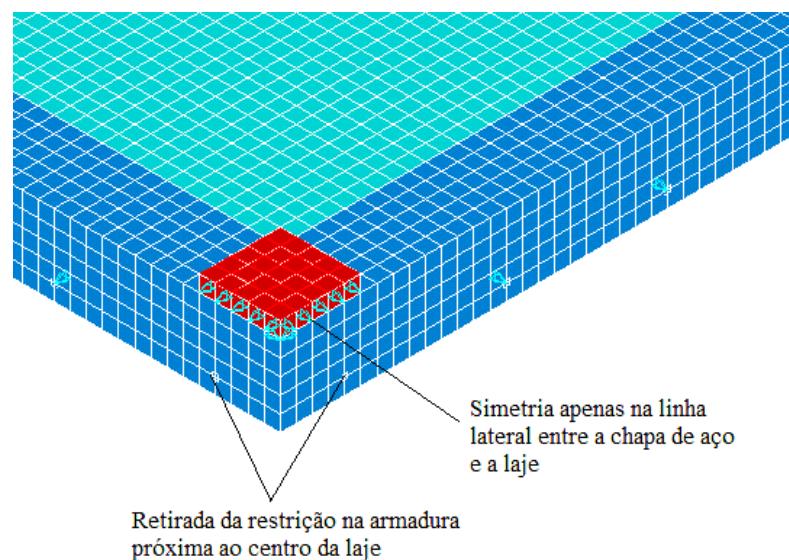
Figura 42 – Simetria empregada nas chapas de aço das lajes com altura superior a 100 mm



Fonte: Autora (2021).

Já para as lajes com espessura igual ou inferior a 100 mm foi aplicada a simetria apenas nas linhas laterais de encontro entre a chapa de aço e a laje, visto que a aplicação da simetria nas áreas laterais da chapa provocava o aumento da rigidez da laje, ocasionado valores de deslocamento menores que o experimental. No entanto, para esses modelos não foi necessária a redução do valor de  $E_{chapa}$ , sendo mantido o valor igual a 200 GPa. Para mais, tendo-se que tais lajes apresentam um grande deslocamento central foi necessária a retirada das restrições das armaduras imediatamente próximas ao meio da laje, como mostra a Figura 43.

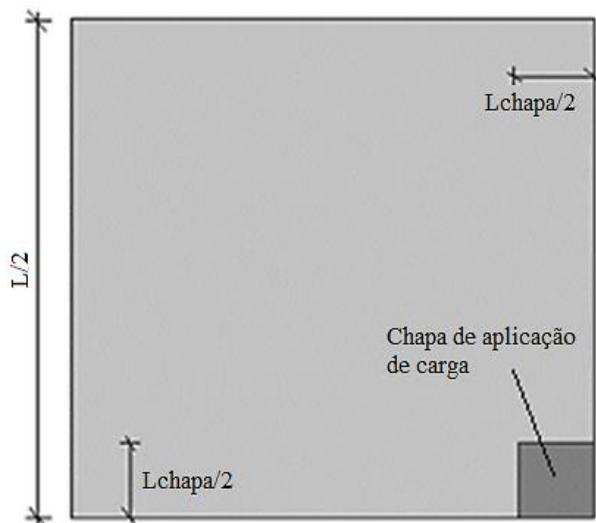
Figura 43 – Simetria empregada nas chapas de aço das lajes com altura igual ou inferior a 100 mm



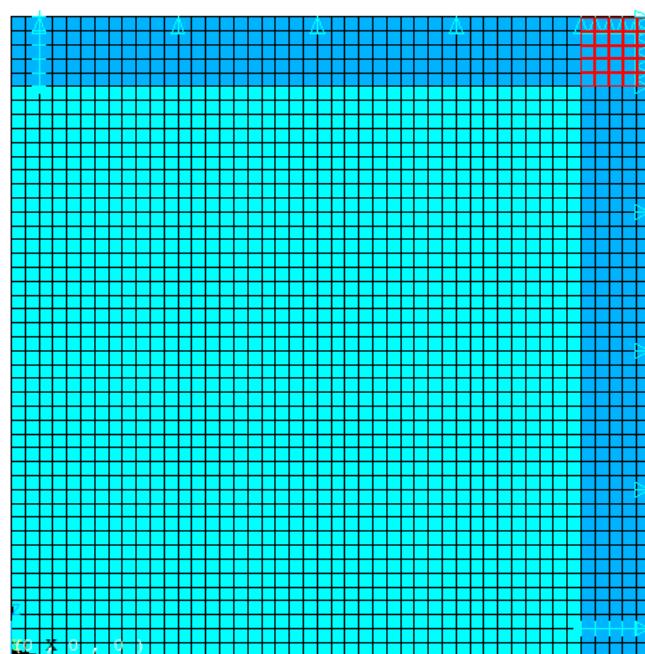
Fonte: Autora (2021).

Para a definição dos apoios, levando em conta o efeito de empenamento descrito por segundo Leonhardt e Mönnig (2008), no Modelo I foi restrito em y o trecho da laje correspondente a metade da largura da chapa de aplicação de carga, como descrito na Figura 44a. Além disso, foi considerado o apoio distante da borda na laje com valor igual a metade da largura do suporte utilizado no ensaio experimental, com seu valor aproximado de acordo com a malha adotada.

Figura 44 – Definição do comprimento dos apoios em  $\frac{1}{4}$  da laje para o Modelo I



a) Dimensão dos apoios



b) Vista inferior da laje - Localização dos apoios no modelo numérico

Fonte: Autora (2021).

Para garantir a convergência do modelo foi desconsiderada a falha por esmagamento do concreto nas regiões próximas a chapa de aplicação de carga, sendo definido na constante 4 do modelo *Concrete*, descrita no Quadro 3, o valor de -1, sem a inserção da curva de tensão-deformação, visto que é uma região onde há uma grande concentração de tensões.

Para mais, a tensão de escoamento da chapa de aço foi admitida como sendo igual a 5000 MPa para evitar que durante a simulação houvesse o escoamento da chapa de aplicação de carga. Além disso, a malha empregada nas simulações foi de 20 x 20 mm, com exceção para o modelo F-3 onde foi adotada uma malha de 10 x 10 mm devido à dimensão de sua altura ser considerada muito pequena. A tolerância adotada foi de 5% para convergência do deslocamento e o número máximo de iterações igual a 50 para todos os casos, estes sendo os mais adequados para garantir a convergência do modelo, onde valores muito pequenos dificultam a convergência do modelo, além da necessidade de um maior tempo de processamento.

A aplicação de força no modelo numérico foi realizada empregando-se pressão distribuída sobre a área da chapa de aço, descrita na Equação 32, sendo a força máxima definida pela carga máxima aplicada na amostra ensaiada, sendo utilizada a ferramenta de aplicação de pressão sobre área do *software*.

$$\sigma_{chapa} = \frac{P_f}{A_{chapa}} \quad (32)$$

Onde:  $\sigma_{chapa}$  é a pressão aplicada sobre a chapa de aço;  $P_f$  é a força máxima aplicada no ensaio experimental;  $A_{chapa}$  é a área da face superior da chapa de aço.

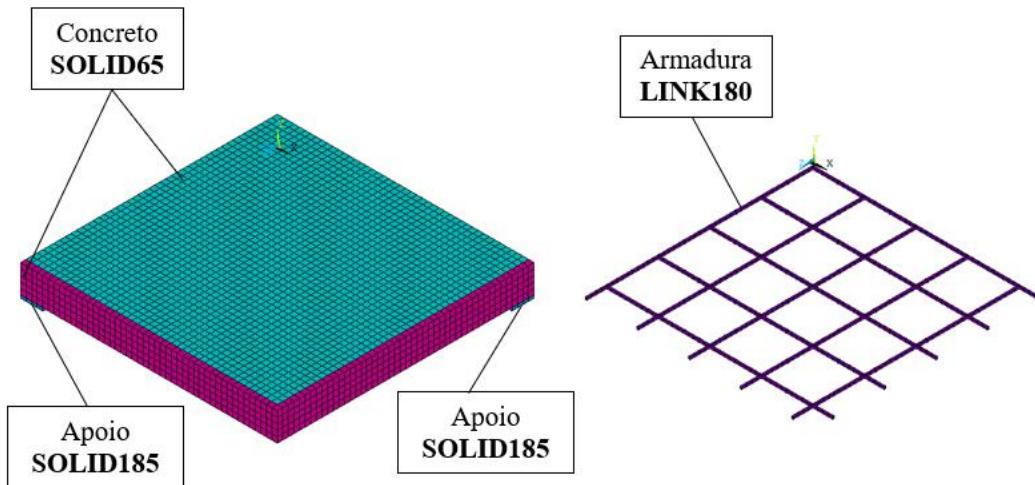
Os passos de carga empregados em todos os modelos foram de máximo de 4 kN e mínimo de 1 kN, onde foi observado que o passo de carga exerce uma pequena influência sobre os resultados e esses valores adotados de passo de carga proporcionaram resultados mais próximos ao experimental.

Em relação à armadura das lajes estudadas, para os ensaios em que foi informado apenas o limite de escoamento do aço foi empregado o modelo *Bilinear Isotropic Hardening* de von Mises, já para os modelos em que foi fornecida a curva do ensaio de tração do aço foi utilizado o modelo *Multilinear Isotropic Hardening* de von Mises para a inserção da curva.

### 3.4.2.2 Modelo II – Apoio elástico

Para a modelagem empregando o Modelo II foram utilizados os elementos finitos descritos na Figura 45.

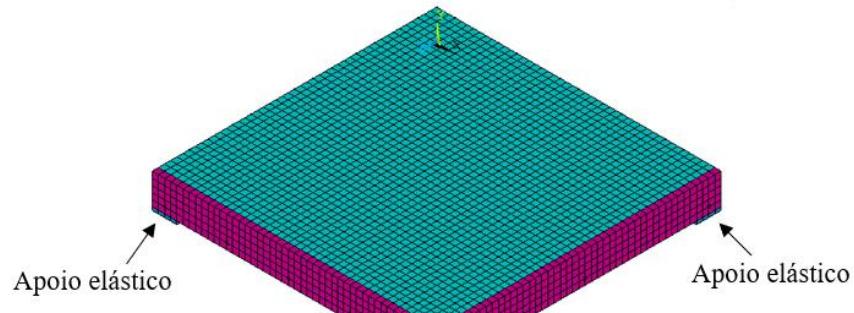
Figura 45 – Elementos finitos definidos para cada material no Modelo II



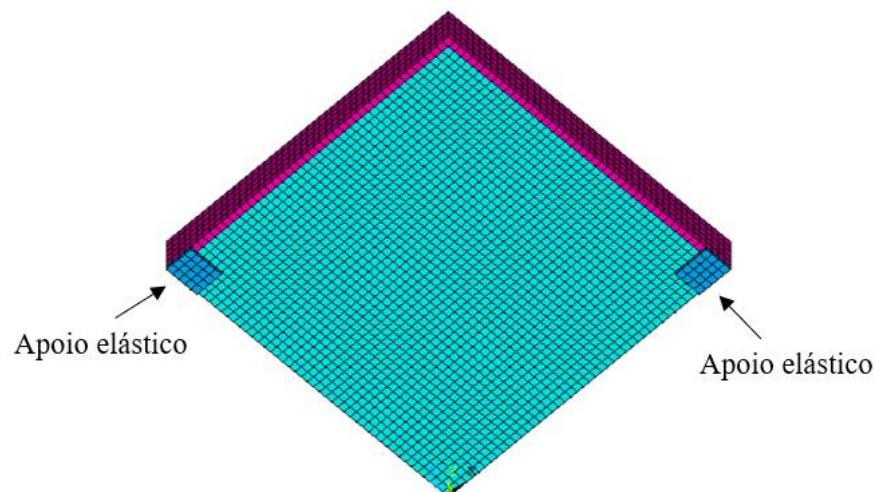
Fonte: Autora (2021).

Neste método tem-se a aplicação da simetria ao longo de todas as áreas da laje que possuem continuidade, como mostra a Figura 48, e os apoios foram considerados com largura igual a metade da chapa de aço e espessura de 10 mm, sendo definidos com material elástico para simular o contato entre a laje e o suporte, permitindo o deslizamento horizontal da laje sobre os apoios. Estes são ilustrados na Figura 46.

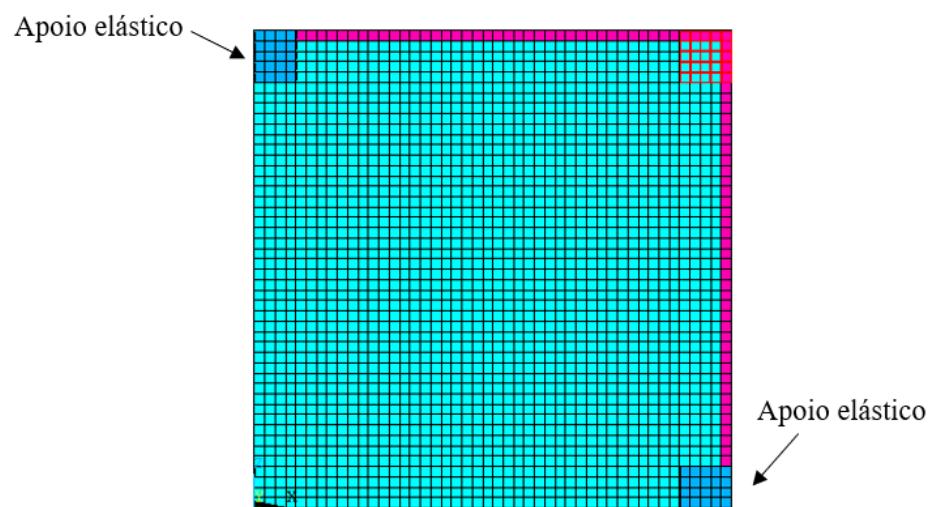
Figura 46 – Localização dos apoios elásticos



a) Vista isométrica da parte superior da laje



b) Vista isométrica da parte inferior da laje

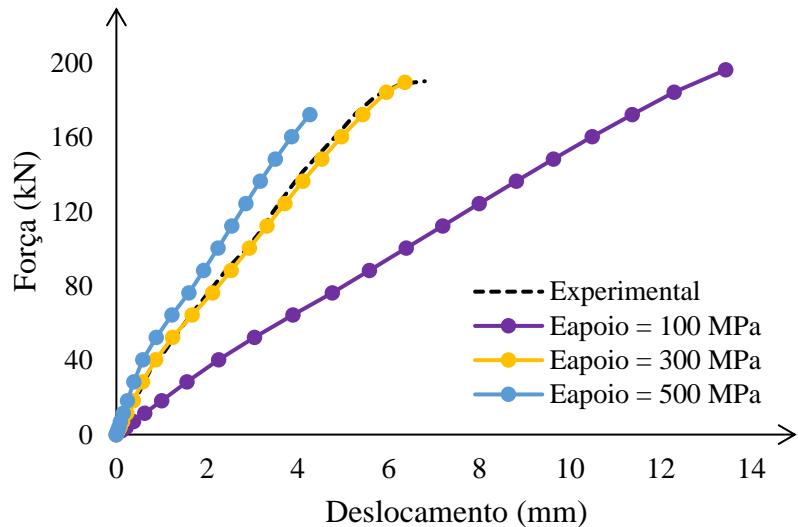


c) Vista inferior da laje e delimitação da área de aplicação de carga

Fonte: Autora (2021).

Foi observado que a variação do módulo de elasticidade (E) do apoio elástico exerce influência sobre a rigidez da laje, como observado na Figura 47. Diante disso, foram admitidos dois valores de módulo de elasticidade das bases elásticas, sendo 150 MPa para lajes com taxa de armadura longitudinal inferior a 0,75% e para lajes com taxa superior foi adotado o valor de 300 MPa.

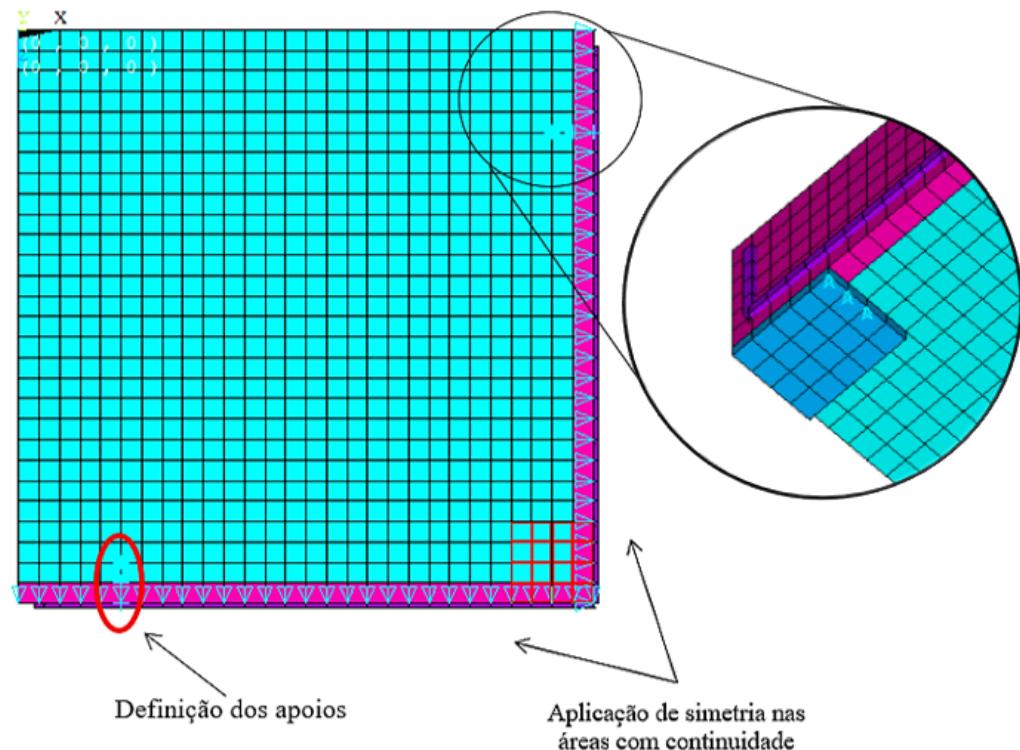
Figura 47 – Variação do E do apoio elástico usado no Modelo II para lajes com taxa de armadura longitudinal superior a 0,75%



Fonte: Autora (2021).

Ao considerar o efeito de empenamento da laje como no método anterior, foi restrito em y o trecho da laje correspondente a duas unidades de dimensão da malha para as lajes com altura superior a 100 mm, como descrito na Figura 48.

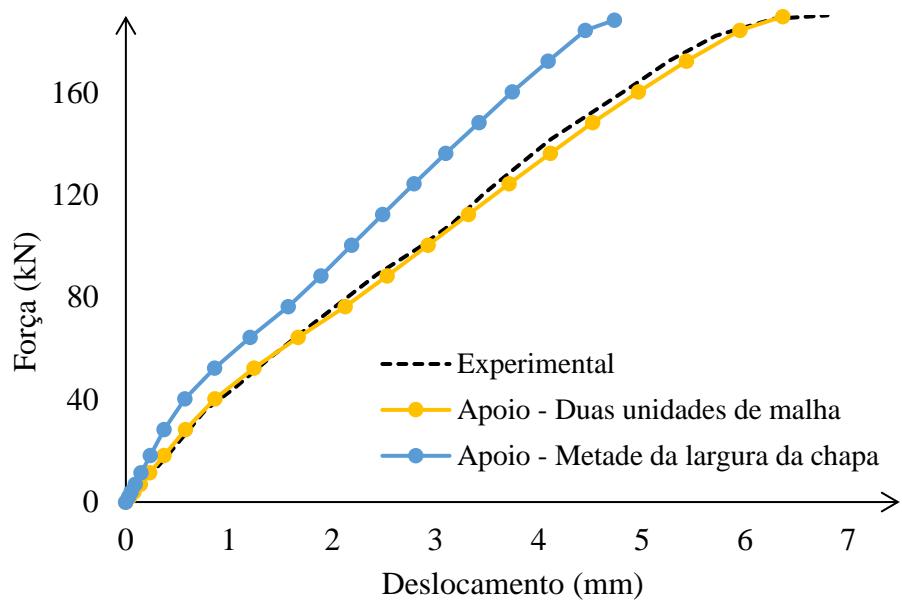
Figura 48 – Definição dos apoios no Modelo II para lajes com altura maior que 100 mm



Fonte: Autora (2021).

Essa consideração foi feita devido ao aumento da rigidez da laje que é gerado ao aplicar o apoio, como no método anterior, na metade da largura da chapa de aplicação, já ao aplicar o apoio apenas nas duas unidades de malha não há essa interferência na rigidez da laje, como ilustra a Figura 49.

Figura 49 – Comparativo da restrição dos apoios em metade da largura da chapa de aço e em duas unidades de malha

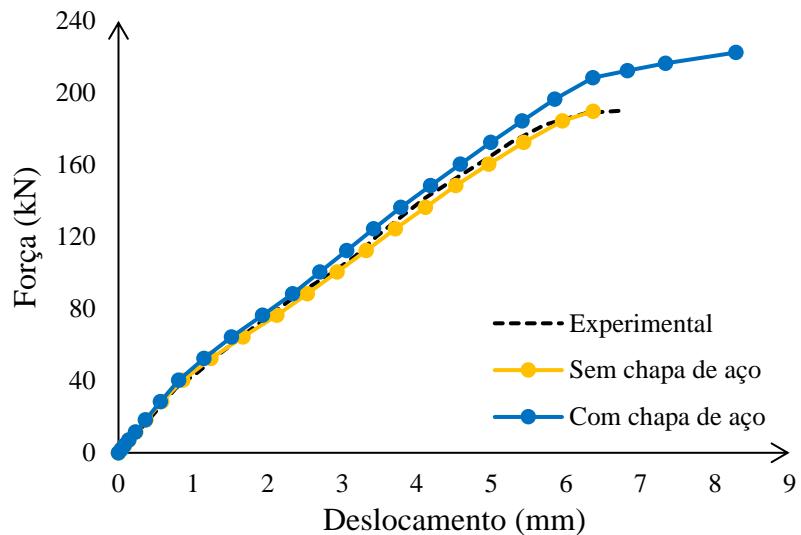


Fonte: Autora (2021).

Para as lajes com altura igual ou inferior a 100 mm o apoio foi definido como sendo igual a metade da largura da chapa de aplicação, assim como no método anterior. Em ambos os casos os apoios foram distanciados da borda da laje com valor igual a largura do perfil metálico utilizado como suporte ou igual a posição do apoio rotulado empregado no ensaio experimental, com seu valor aproximado de acordo com a malha adotada.

Além disso, neste método não foi considerada a chapa de aço na modelagem, visto que a rigidez da chapa exercia influência sobre a rigidez da laje, causando discrepância nos resultados, como ilustra a Figura 50.

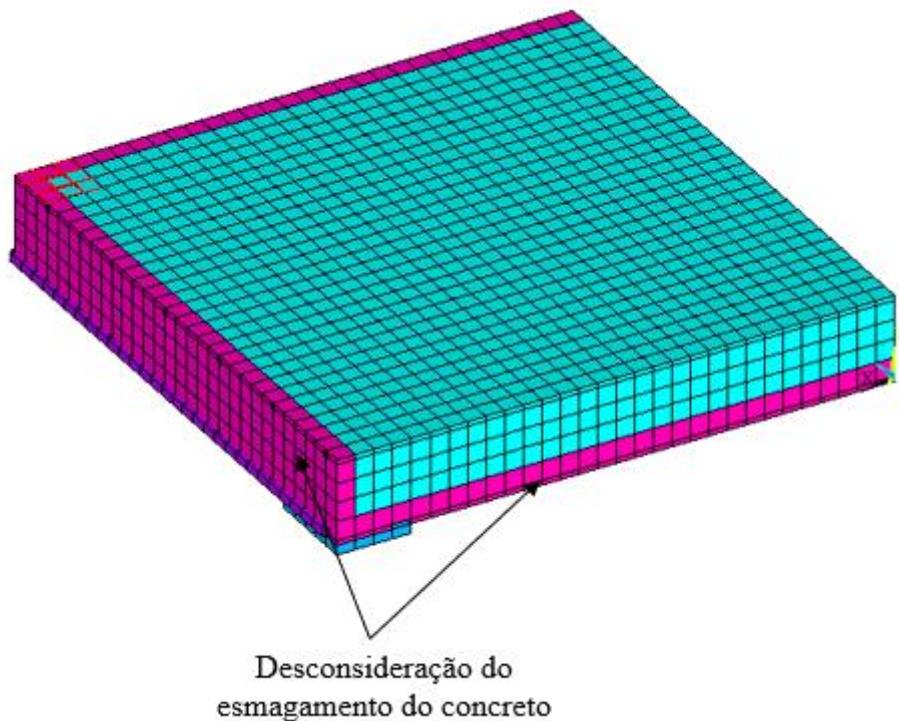
Figura 50 – Comparativo das curvas Força x Deslocamento com e sem a consideração da existência de chapa de aço na modelagem



Fonte: Autora (2021).

Para mais, foi desconsiderada a falha por esmagamento do concreto na região próxima à simetria devido à grande concentração de tensões nessa região, sendo definido na constante 4 do modelo *Concrete*, descrita no Quadro 3, o valor igual a -1, sem a inserção da curva de tensão-deformação. Além disso, para os ensaios em que a aplicação de carga foi feita através de coluna de aço ou de concreto não-armada foi feita a desconsideração do esmagamento do concreto na região que envolve a armadura longitudinal, como mostra a Figura 51, visto que nesses casos havia a ocorrência antecipada de ruptura da laje devido a concentração de tensão na parte inferior da laje.

Figura 51 – Região de desconsideração do esmagamento do concreto para situações onde tem-se aplicação da carga por coluna de concreto ou aço



Fonte: Autora (2021).

Em relação a tensão de escoamento da chapa de aço, a malha e número de iterações máximas do modelo foram admitidos os mesmos valores descritos no Modelo I. Já o valor da tolerância e dos passos de carga adotados neste método são descritos na Tabela 6.

Tabela 6 – Valores de tolerância e passos de carga adotados no Modelo II

Altura (mm)	$\rho$ (%)	Tolerância		Passo de carga		
		Força	Deslocamento	Inicial	Mínimo	Máximo
$h > 100$	$< 0,75$	0,3	0,3	2 kN	1 kN	10 kN
$h \leq 100$	$> 0,75$	0,3	0,3	2 kN	1 kN	10 kN
$h \leq 100$	$\leq 0,75$	0,5	0,5	2 kN	1 kN	5 kN

Por fim, assim como no Modelo I, foram empregados os mesmos modelos numéricos para a definição do limite de escoamento ou a inserção a curva do ensaio de tração do aço.

### 3.4.3 Dados dos modelos experimentais

Os modelos experimentais utilizados nas simulações são listados no Quadro 3, sendo reproduzidos os ensaios citados anteriormente que estavam de acordo com a configuração estabelecida, acrescido de outros modelos experimentais que seguiam o mesmo esquema de montagem de ensaio ilustrado na Figura 39.

Quadro 3 – Modelos experimentais reproduzidos numericamente

Grupo	Modelo	Fonte
Lajes Espessas ( $h > 100$ mm)	G-1	Afefy e El-Tony (2019)
	G-2	Zohrevand <i>et al.</i> (2015)
	G-3	Zohrevand <i>et al.</i> (2015)
	G-4	Xiao <i>et al.</i> (2018)
Lajes Esbeltas ( $h \leq 100$ mm)	F-1	Meisami, Mostofinejad e Nakamura (2013)
	F-2	Torabian <i>et al.</i> (2019)
	F-3	Francesconi, Pani e Stochino (2016)
	F-4	Hegab (2016) apud Mabrouk e Hegab (2017)

Fonte: Autora (2021).

Além disso, para os ensaios que apresentavam apenas a resistência à compressão cúbica do concreto foi utilizada a conversão para resistência à compressão do concreto de acordo com o estabelecido pela norma Eurocode 2 (2004), como consta na Tabela 7.

Tabela 7 – Classes do concreto de acordo com a norma Eurocode 2 (2004)

Classes do concreto														
<b>f<sub>ck</sub> (MPa)</b>	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90
<b>f<sub>cu</sub> (MPa)</b>	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105

Fonte: EUROCODE 2 (2004).

Para os respectivos modelos experimentais tem-se os seguintes dados dos ensaios e os resultados experimentais, dispostos na Tabela 8.

Tabela 8 – Dados dos modelos experimentais

Modelo	Comprimento (mm)	Altura (mm)	Resistência à compressão do concreto (MPa)	Taxa de armadura longitudinal (%)
G-1	1100	120	25 <sup>1</sup>	0,98
G-2	1219	114	45	1,97
G-3	1219	114	45	0,74
G-4	1500	120	39,9	1,14
F-1	1200	85	35	1,31
F-2	1850	100	43	0,36
F-3	1100	50	71,1	0,52
F-4	1100	100	27	1,05

<sup>1</sup>valor obtido através da conversão estabelecida pela Eurocode 2 (2004), disposta na Tabela 7.

Além disso, as propriedades dos materiais utilizados nos ensaios são descritas nas Tabela 9.

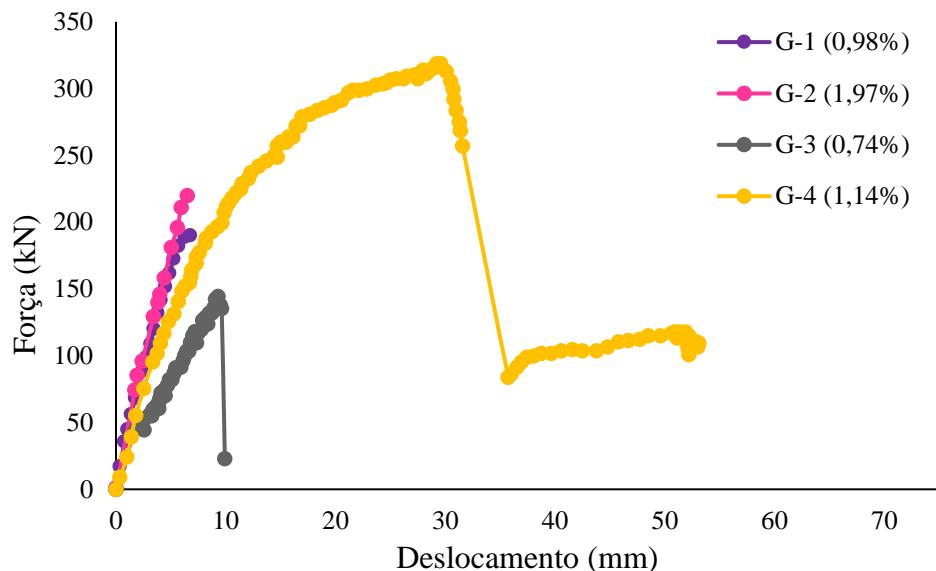
Tabela 9 – Propriedades dos aços utilizados nos ensaios experimentais

Modelo	Curva do aço	$f_y$ (MPa)	Es (GPa)	Armadura inferior	Armadura superior
G-1	Não informado	420	204	13 $\phi$ 10	–
G-2	Não informado	414	200	16 $\phi$ 13	–
G-3	Não informado	414	200	6 $\phi$ 13	–
G-4	Não informado	335	200	15 $\phi$ 12	–
F-1	Não informado	345	200	15 $\phi$ 10	12 $\phi$ 6
F-2	Informado	450	200	13 $\phi$ 10	–
F-3	Não informado	450	200	11 $\phi$ 5	11 $\phi$ 5
F-4	Não informado	360	200	11 $\phi$ 10	11 $\phi$ 10

As Figuras 52 e 53 mostram as curvas de Força x Deslocamento dos ensaios em estudo. Verifica-se que lajes com altura igual ou inferior a 100 mm e baixa taxa de armadura longitudinal apresentam, em sua maioria, comportamento dúctil, com maiores deslocamentos, valores de carga máxima aplicada menores e houve o escoamento da armadura, enquanto que as lajes com altura superior a 100 mm, maior taxa de armadura e sem o escoamento da armadura

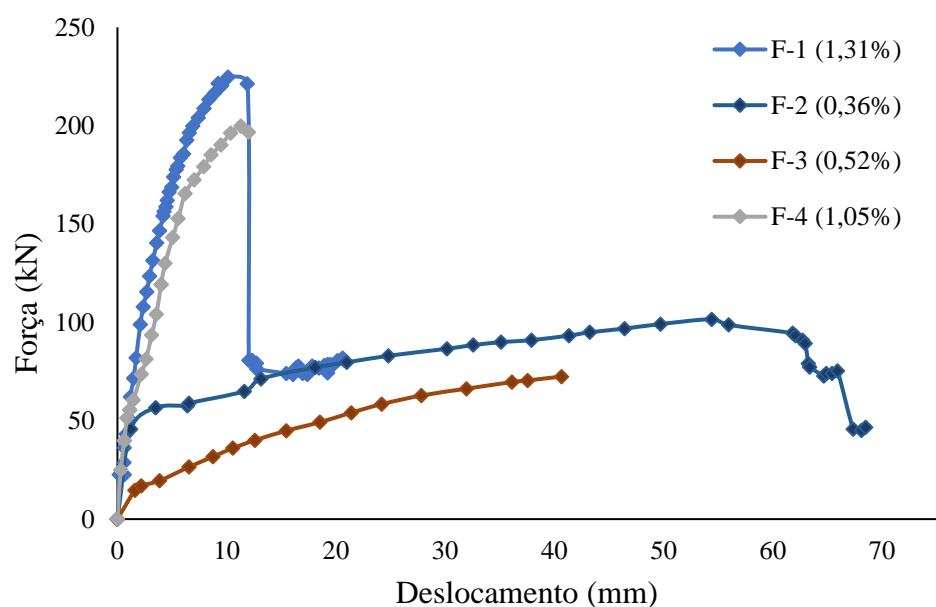
apresentaram comportamento frágil, com a curva Força x Deslocamento aproximadamente linear, além de atingir valores de força máxima maiores em relação às lajes com altura inferior.

Figura 52 – Curvas Força x Deslocamento dos modelos experimentais estudados do grupo de lajes espessas ( $h > 100$  mm) e taxa de armadura entre parênteses



Fonte: Afefy e El-Tony (2019), Zohrevand *et al.* (2015) e Xiao *et al.* (2018).

Figura 53 – Curvas Força x Deslocamento dos modelos experimentais estudados do grupo de lajes esbeltas ( $h \leq 100$  mm) e taxa de armadura entre parênteses



Fonte: Meisami, Mostofinejad e Nakamura (2013), Torabian *et al.* (2019), Francesconi, Pani e Stochino (2016) e Hegab (2016) apud Mabrouk e Hegab (2017).

Além disso, foi observado, ainda na Figura 52, que o modelo G-4 apresenta comportamento inicialmente rígido, semelhante aos modelos com altura superior a 100 mm, porém após 200 kN são atingidos maiores deslocamentos. Este fato pode estar relacionado ao escoamento da armadura longitudinal, caracterizando o platô na curva Força x Deslocamento.

### 3.5 VALIDAÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICOS

#### 3.5.1 *Modelo I – Simetria nos nós das barras*

Para a aplicação do Modelo I foram considerados os valores dos dados de entrada do modelo *Concrete* descritos na Tabela 10, com as demais constantes do modelo admitidas com valor igual a zero.

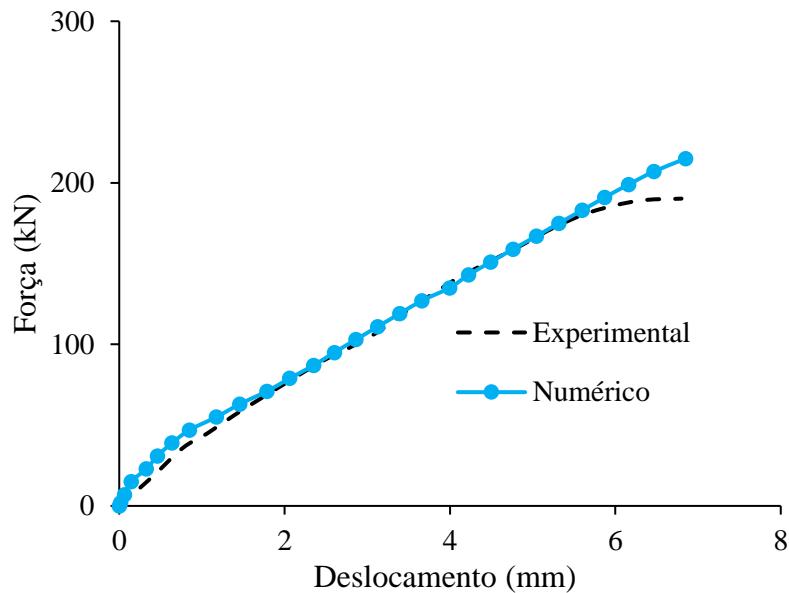
Tabela 10 – Dados de entrada do modelo *Concrete* para os respectivos modelos experimentais simulados utilizados no Modelo I

Modelo	$\beta_1$	$\beta_2$	$f_{ck}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$f_t$ (N/mm <sup>2</sup> )*	TC
G-1	1,0	1,0	25	2,56	0,6
G-2	1,0	1,0	45	3,80	0,6
G-3	1,0	1,0	45	3,80	0,6
G-4	1,0	1,0	39,9	3,50	0,6
F-1	0,5	1,0	35	3,21	0,6
F-2	0,5	1,0	43	3,68	0,6
F-3	0,5	1,0	71,1	4,81	0,6
F-4	0,5	1,0	27	2,70	0,6

\* utilizada a resistência à tração média do concreto, como mostram as Equações 28 e 29.

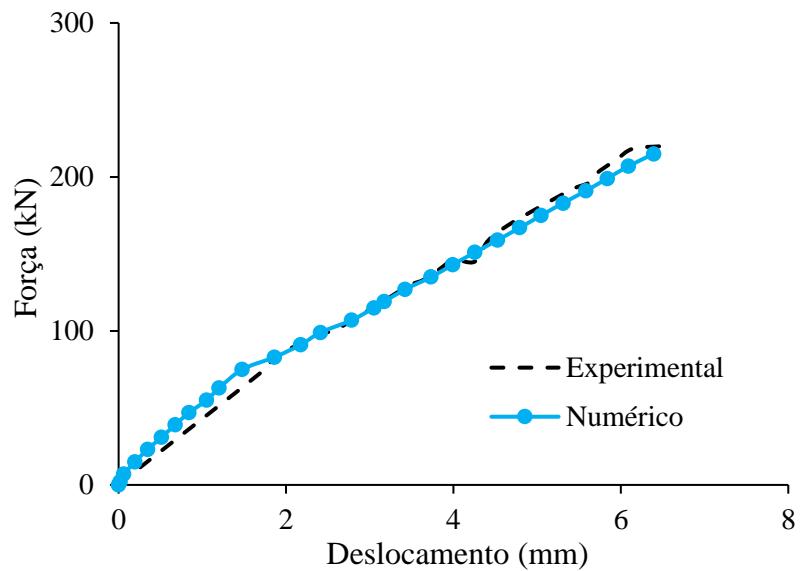
Conforme os ensaios experimentais foram obtidos os seguintes dados relacionados ao deslocamento no ponto central das lajes, como mostrado nas Figuras 54 a 61.

Figura 54 – Curva Força x Deslocamento do Modelo G-1



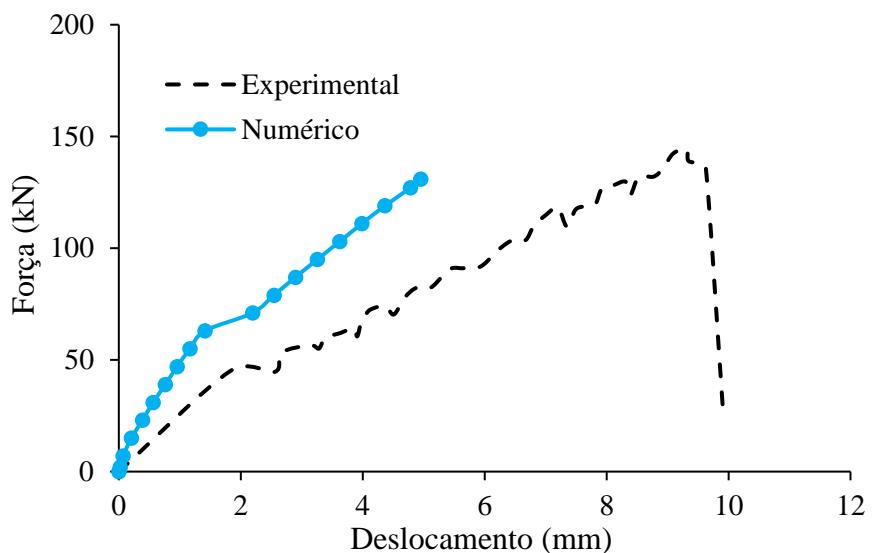
Fonte: Autora (2021).

Figura 55 – Curva Força x Deslocamento do Modelo G-2



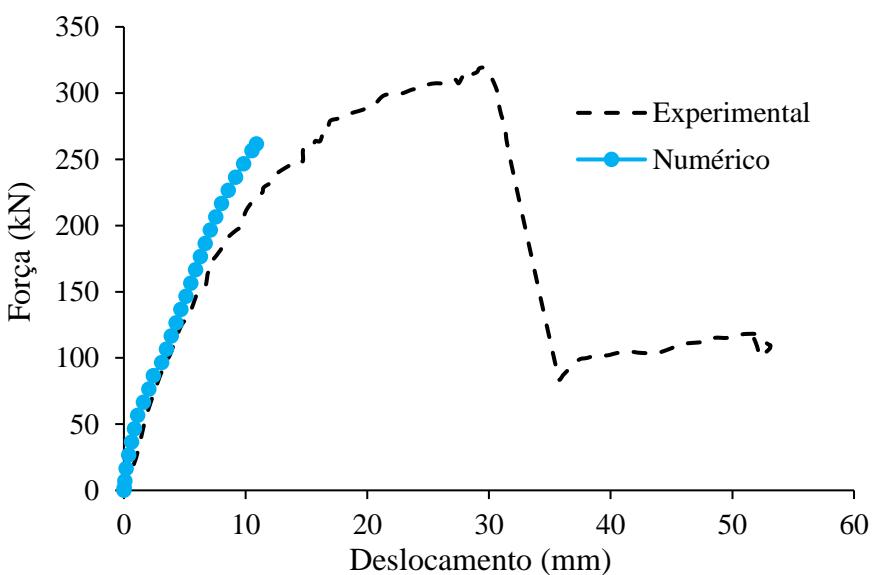
Fonte: Autora (2021).

Figura 56 – Curva Força x Deslocamento do Modelo G-3



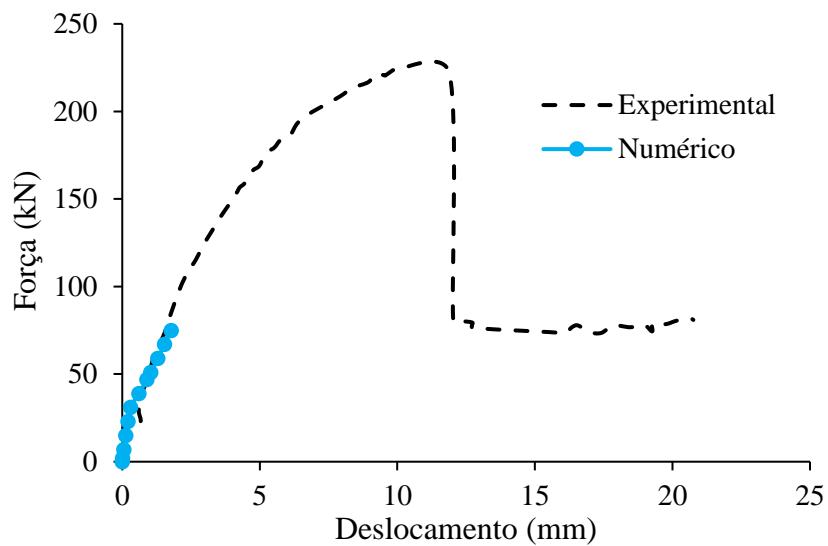
Fonte: Autora (2021).

Figura 57 – Curva Força x Deslocamento do Modelo G-4



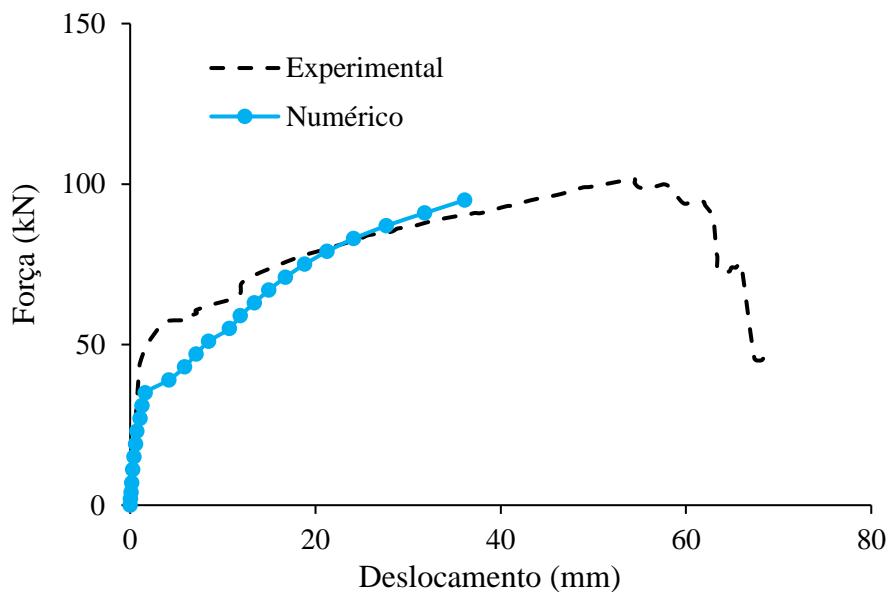
Fonte: Autora (2021).

Figura 58 – Curva Força x Deslocamento do Modelo F-1



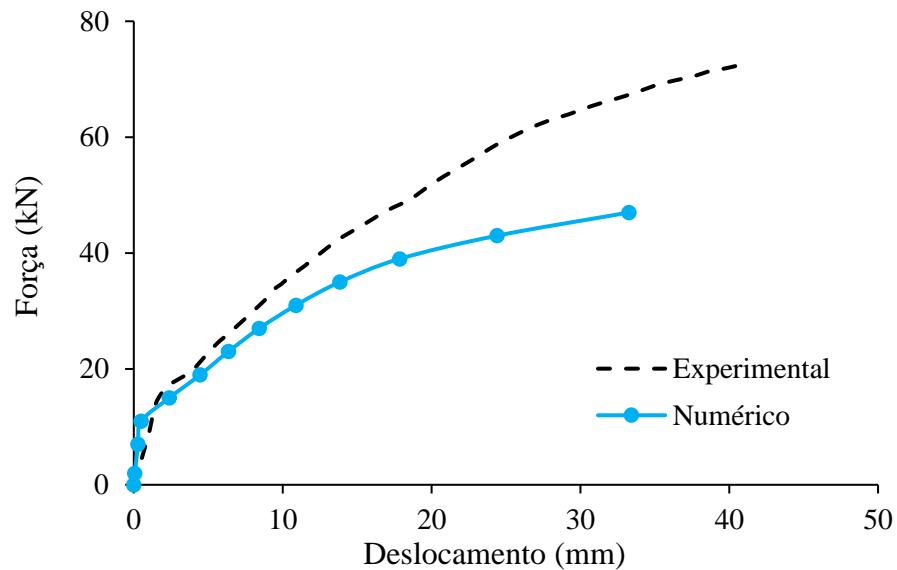
Fonte: Autora (2021).

Figura 59 – Curva Força x Deslocamento do Modelo F-2



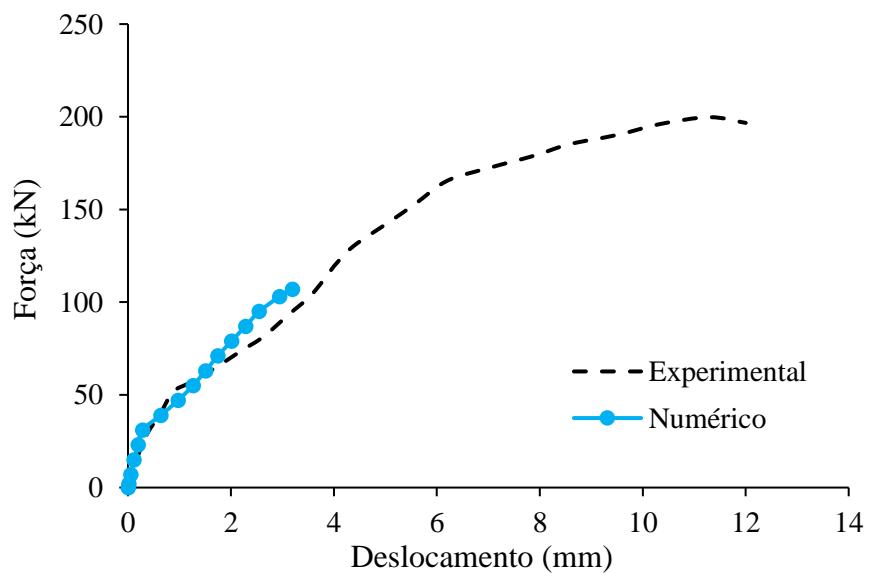
Fonte: Autora (2021).

Figura 60 – Curva Força x Deslocamento do Modelo F-3



Fonte: Autora (2021).

Figura 61 – Curva Força x Deslocamento do Modelo F-4



Fonte: Autora (2021).

Os respectivos valores de força e deslocamento máximos experimental e numérico de cada modelo são apresentados nas Tabelas 11 e 12.

Tabela 11 – Força e deslocamento máximos experimental e numérico do grupo de lajes espessas

<b>Modelo</b>	<b>Força</b>			<b>Deslocamento</b>		
	<b>Experimental (kN)</b>	<b>Numérico (kN)</b>	<b>Diferença (%)</b>	<b>Experimental (mm)</b>	<b>Numérico (mm)</b>	<b>Diferença (%)</b>
G-1	190,2	215	13,04	6,8	6,85	0,75
G-2	220	215	-2,27	6,5	6,39	-1,65
G-3	144	131	-9,03	9,3	4,95	-46,75
G-4	320	261,5	-18,28	29,4	10,88	-64,83

Tabela 12 – Força e deslocamento máximos experimental e numérico do grupo de lajes esbeltas

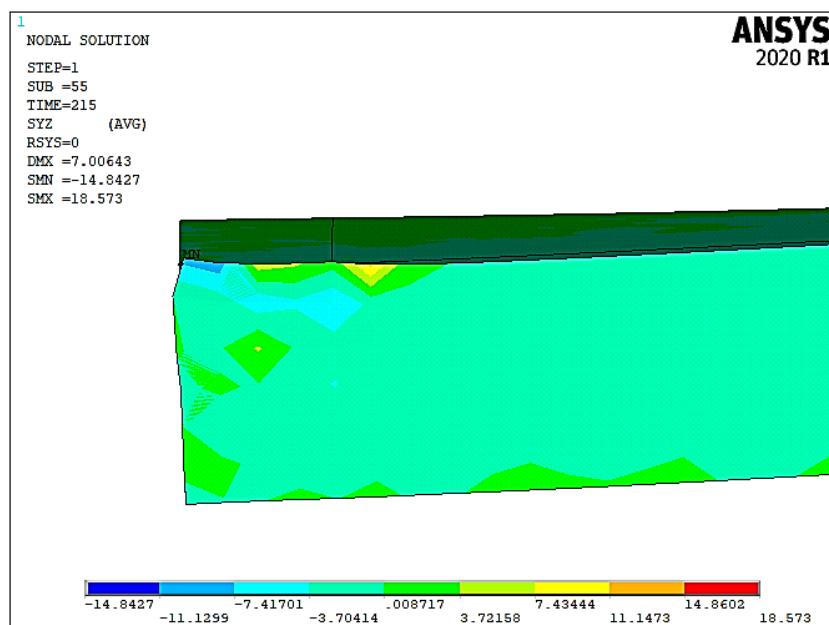
<b>Modelo</b>	<b>Força</b>			<b>Deslocamento</b>		
	<b>Experimental (kN)</b>	<b>Numérico (kN)</b>	<b>Diferença (%)</b>	<b>Experimental (mm)</b>	<b>Numérico (mm)</b>	<b>Diferença (%)</b>
F-1	224,7	117,67	-47,63	10,1	3,43	-66,16
F-2	161	255	58,39	6,4	4,71	-25,87
F-3	101,6	95	-6,50	54,4	36,12	-33,62
F-4	72,5	47	-35,17	40,79	33,27	-18,42
F-5	199,8	107	-46,45	11,3	3,19	-71,75

Ao analisar as Tabelas 11 e 12, verificou-se que no grupo de lajes espessas para os casos em que se têm grandes deslocamentos, como nos modelos G-3 e G-4, o Modelo I houve uma alta rigidez dos modelos, o que resultou na ruptura antecipada, justificando a diferença de deslocamento experimental e numérico superior a 40%.

Em relação ao grupo de lajes esbeltas foi observado que a curva numérica tende, inicialmente, a exibir o mesmo comportamento do modelo experimental, no entanto a ocorrência antecipada da ruptura no modelo numérico resulta na discrepância considerável no comparativo entre os resultados experimental e numérico, fazendo necessária a reavaliação do modelo e ajuste dos parâmetros adotados.

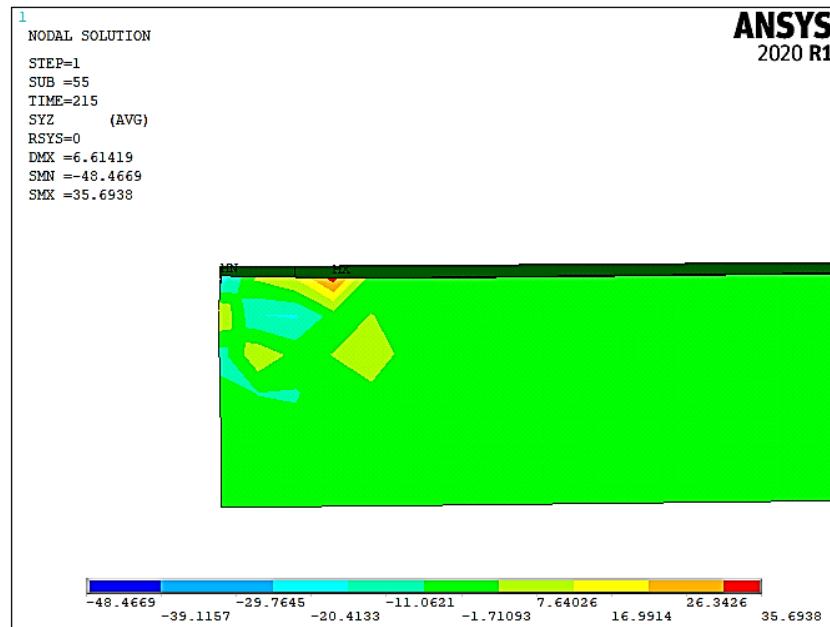
Observando as curvas de tensão de cisalhamento do grupo de lajes espessas, como mostram as Figuras 62 a 65, verificou-se que o emprego da redução do módulo de elasticidade da chapa de aplicação de carga resulta no deslocamento indevido no centro da laje, pois no ensaio experimental a continuidade da chapa e a sua rigidez impossibilita esse tipo de deslocamento do centro da laje. Além disso, foi possível observar que não há a formação das bielas de compressão na região próxima a localização da chapa de aço, o que é comum em ensaios de punção em lajes de concreto armado.

Figura 62 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo G-1 em N/mm<sup>2</sup>



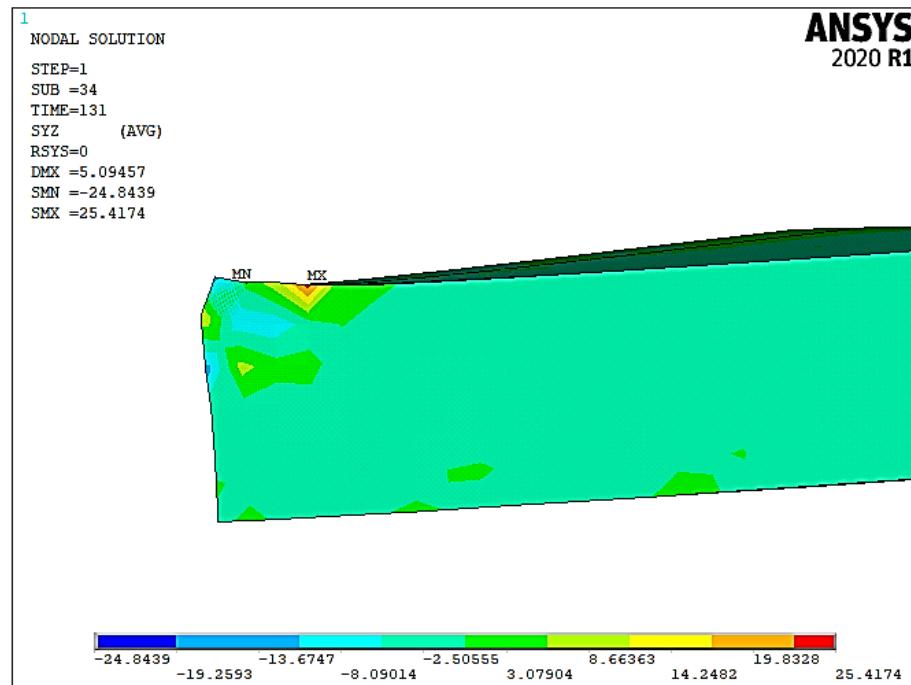
Fonte: Autora (2021).

Figura 63 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo G-2 em N/mm<sup>2</sup>



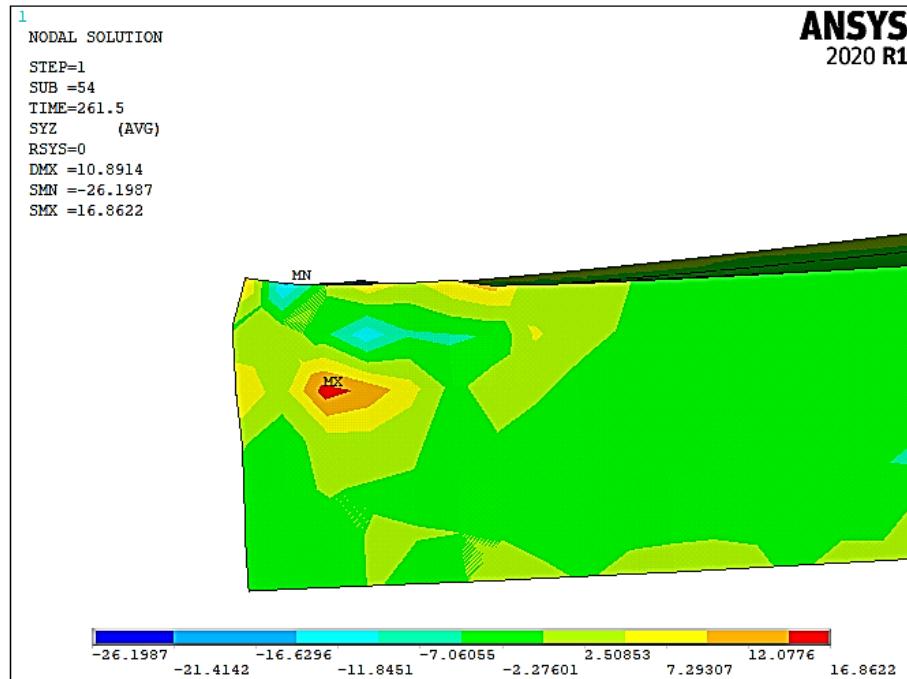
Fonte: Autora (2021).

Figura 64 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo G-3 em N/mm<sup>2</sup>



Fonte: Autora (2021).

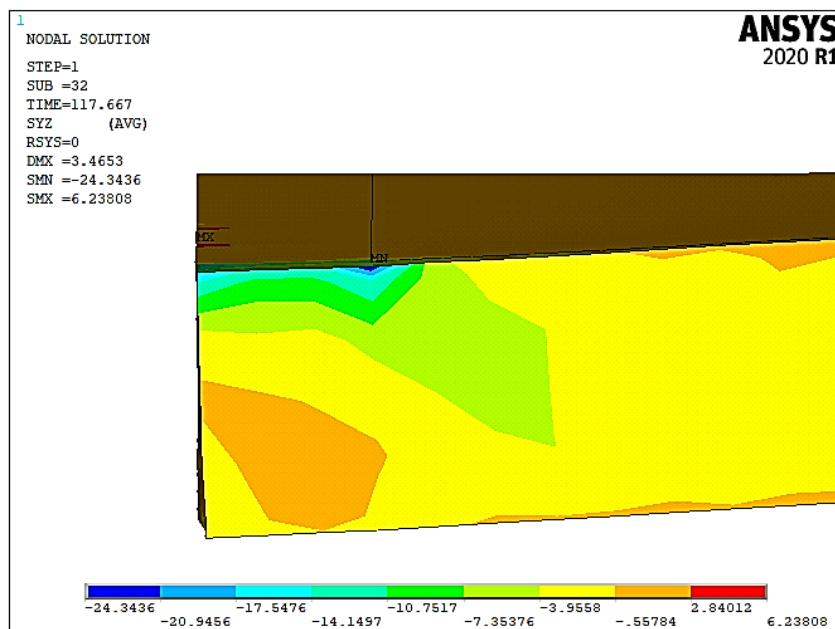
Figura 65 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo G-4 em N/mm<sup>2</sup>



Fonte: Autora (2021).

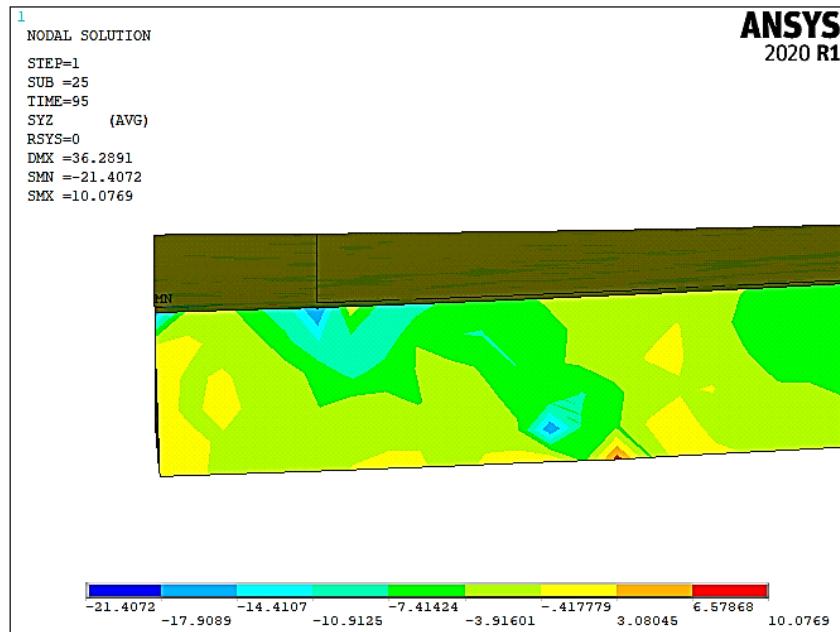
Ao analisar as Figuras 66 a 69 do grupo de lajes esbeltas foi possível sugerir a presença da formação das bielas de compressão próximas a chapa de aplicação de carga, ao contrário do ocorrido nos modelos anteriores.

Figura 66 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo F-1 em N/mm<sup>2</sup>



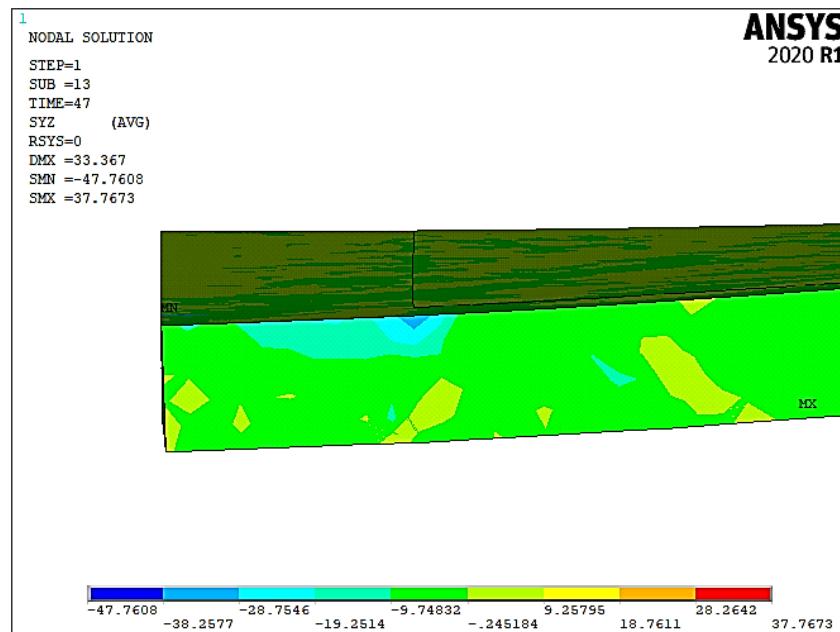
Fonte: Autora (2021).

Figura 67 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo F-2 em N/mm<sup>2</sup>



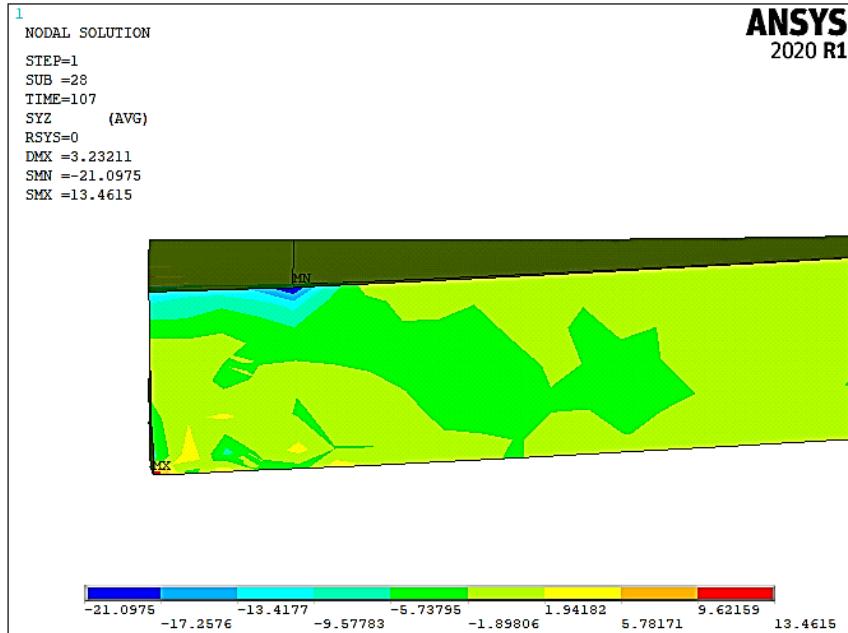
Fonte: Autora (2021).

Figura 68 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo F-3 em N/mm<sup>2</sup>



Fonte: Autora (2021).

Figura 69 – Fluxo de tensão de cisalhamento no plano yz do modelo F-4 em N/mm<sup>2</sup>



Fonte: Autora (2021).

### 3.5.2 Modelo II – Apoio elástico

Para o presente método empregado foram considerados os valores dos dados de entrada do modelo *Concrete* descritos na Tabela 13, com as demais constantes do modelo admitidas com valor igual a zero, assim como no método anterior.

Tabela 13 – Dados de entrada do modelo *Concrete* para os respectivos modelos experimentais simulados utilizados no Modelo II

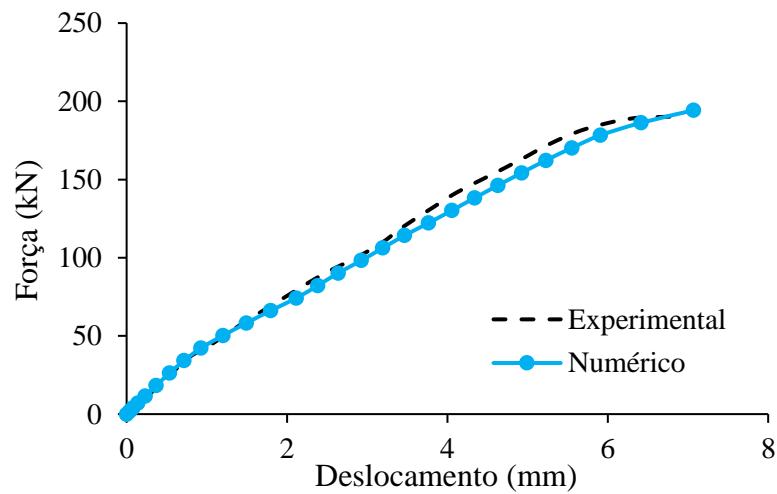
Modelo	$\beta_1$	$\beta_2$	$f_{ck}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$f_t$ (N/mm <sup>2</sup> )	TC	Eapoio (MPa)
G-1	0,3	1,0	25	2,56 <sup>a</sup>	0,6	300
G-2	0,3	1,0	45	3,80 <sup>a</sup>	0,6	300
G-3	0,1	1,0	45	3,80 <sup>a</sup>	0,6	150
G-4	0,3	1,0	39,9	3,50 <sup>a</sup>	0,6	300
F-1	0,3	1,0	35	3,21 <sup>b</sup>	0,6	300
F-2	0,1	1,0	43	3,68 <sup>b</sup>	0,6	150
F-3	0,1	1,0	71,1	4,81 <sup>b</sup>	0,6	150
F-4	0,3	1,0	27	2,70 <sup>b</sup>	0,6	300

<sup>a</sup> utilizada a resistência à tração inferior do concreto para o grupo de lajes espessas, disposta na Equação 30.

<sup>b</sup> utilizada a resistência à tração média do concreto, como mostram as Equações 28 e 29.

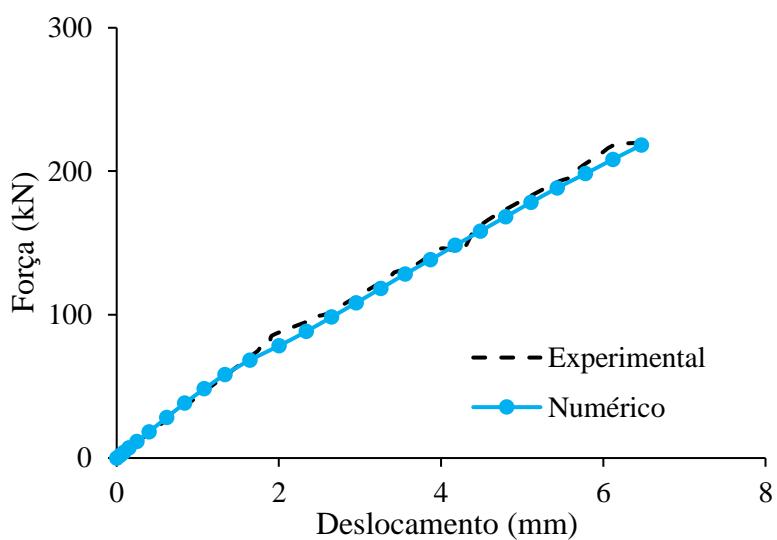
Com isso, foram obtidas as curvas de Força x Deslocamento descritas nas Figuras de 70 a 73.

Figura 70 – Curva Força x Deslocamento do modelo G-1 aplicando o Modelo II



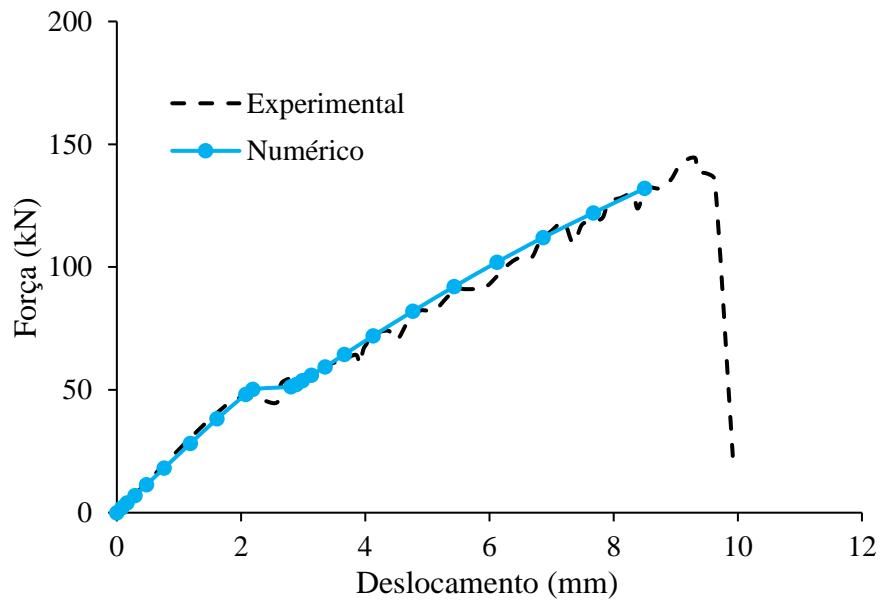
Fonte: Autora (2021).

Figura 71 – Curva Força x Deslocamento do modelo G-2 aplicando o Modelo II



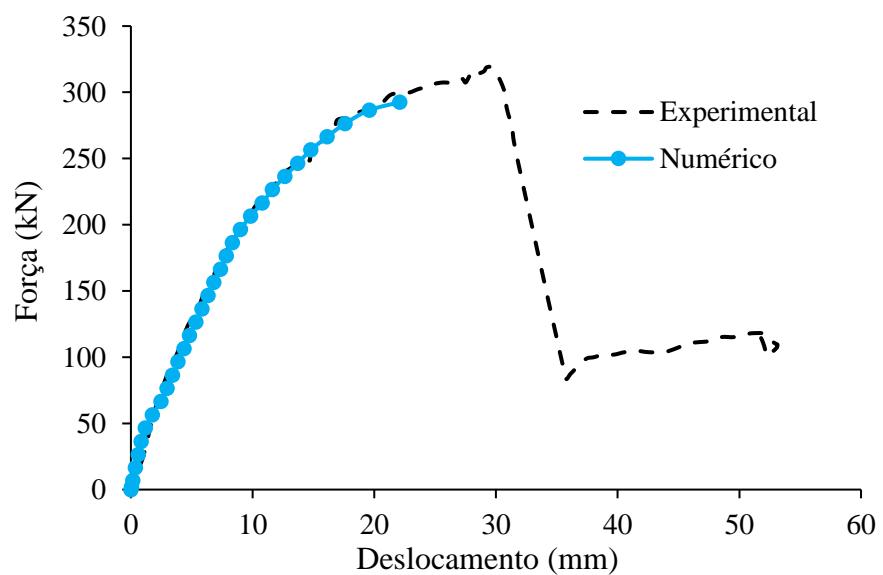
Fonte: Autora (2021).

Figura 72 – Curva Força x Deslocamento do modelo G-3 aplicando o Modelo II



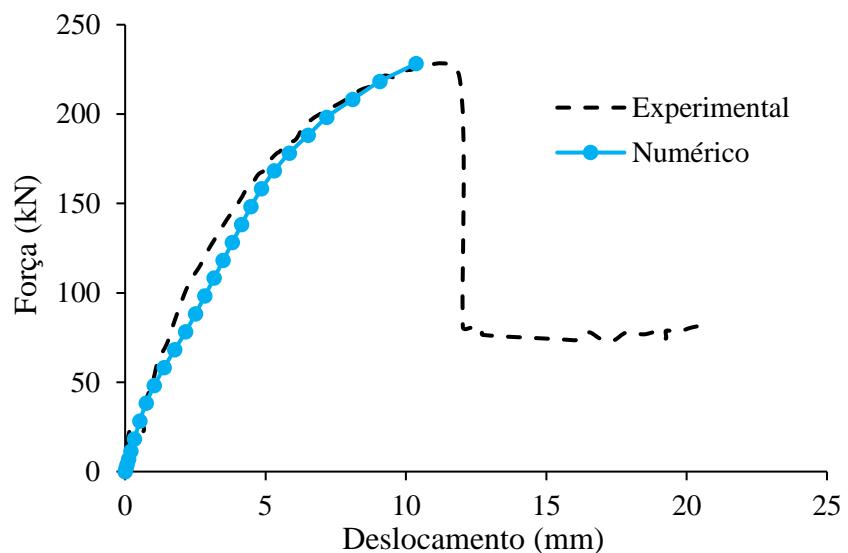
Fonte: Autora (2021).

Figura 73 – Curva Força x Deslocamento do modelo G-4 aplicando o Modelo II



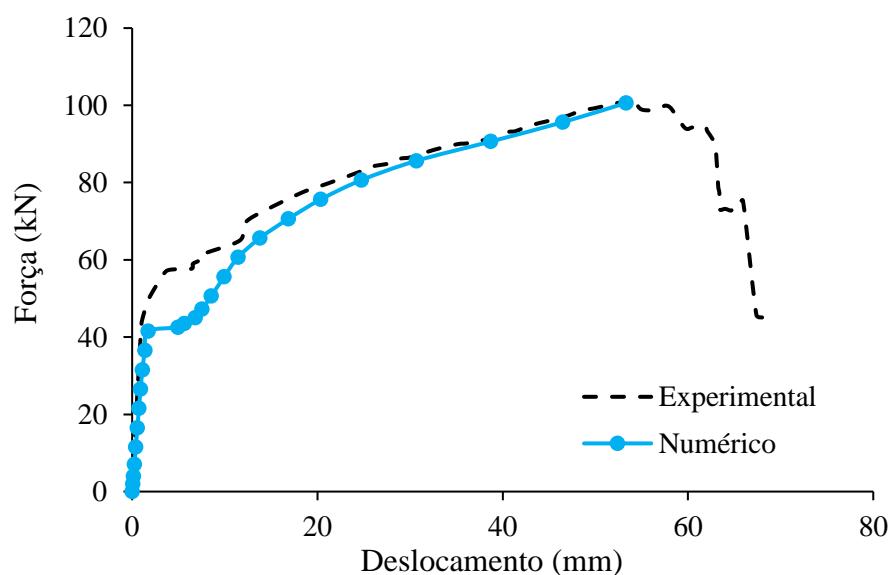
Fonte: Autora (2021).

Figura 74 – Curva Força x Deslocamento do modelo F-1 aplicando o Modelo II



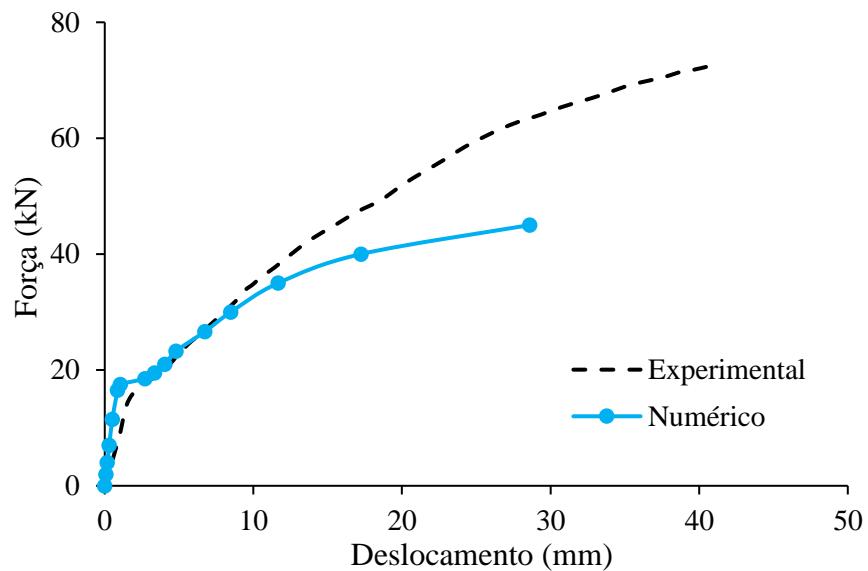
Fonte: Autora (2021).

Figura 75 – Curva Força x Deslocamento do modelo F-2 aplicando o Modelo II



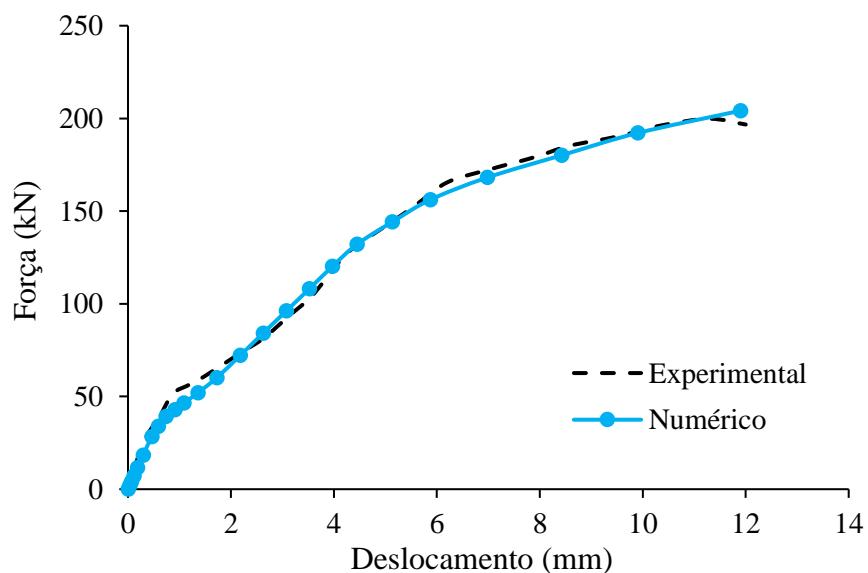
Fonte: Autora (2021).

Figura 76 – Curva Força x Deslocamento do modelo F-3 aplicando o Modelo II



Fonte: Autora (2021).

Figura 77 – Curva Força x Deslocamento do modelo F-4 aplicando o Modelo II



Fonte: Autora (2021).

Ao analisar as Figuras 70 a 77 notou-se que o Modelo II conseguiu apresentar resultados representativos dos modelos experimentais, com uma discrepância presente no modelo F-3 que possivelmente está relacionada a necessidade do conhecimento da curva do ensaio de tração do aço utilizado no experimento em questão. Dessa forma, em concretos de alta resistência faz-se necessária a utilização do modelo *Multilinear Isotropic Hardening* de von Mises, com a inserção da curva de tração do aço.

O comparativo entre os deslocamentos máximos experimentais e numéricos e as forças máximas aplicadas no modelo experimental e numérico de cada modelo são apresentados nas Tabelas 14 e 15.

Tabela 14 – Força e deslocamento máximos experimental e numérico do grupo de lajes espessas

Modelo	Força			Deslocamento		
	Experimental (kN)	Numérico (kN)	Diferença (%)	Experimental (mm)	Numérico (mm)	Diferença (%)
G-1	190,2	194,25	2,13	6,8	7,07	3,99
G-2	220	218,3	-0,80	6,5	6,47	-0,43
G-3	144	132,1	-8,25	9,3	8,5	-8,66
G-4	320	301,92	-5,65	29,4	33,28	13,64

Tabela 15 – Força e deslocamento máximos experimental e numérico do grupo de lajes esbeltas

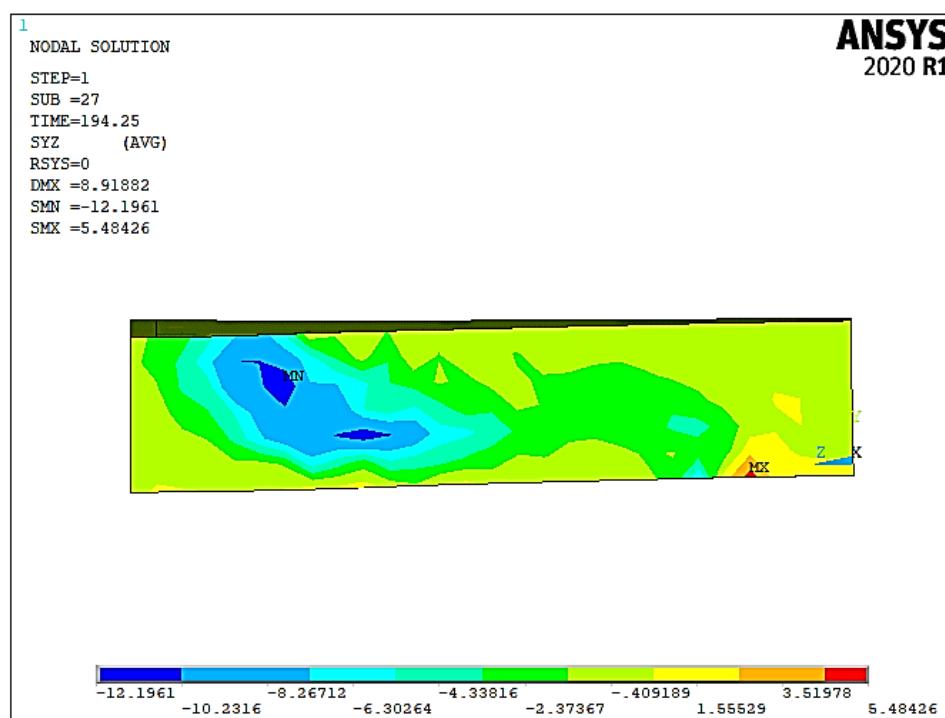
Modelo	Força			Deslocamento		
	Experimental (kN)	Numérico (kN)	Diferença (%)	Experimental (mm)	Numérico (mm)	Diferença (%)
F-1	224,7	228,25	1,59	10,1	10,36	2,28
F-2	101,6	100,6	-0,96	54,4	53,32	-2,03
F-3	72,5	45	-37,93	40,79	28,61	-29,85
F-4	199,8	204,13	2,17	11,3	11,90	5,29

Com as informações dispostas nas Tabelas 14 e 15 observou-se que a discrepância entre os valores numérico e experimental de força e deslocamento se mantêm dentro da faixa de 15%, com exceção do modelo F-3 que apresentou uma discordância relacionada a ausência da informação dos dados do ensaio de tração do aço utilizado na amostra ensaiada. Sendo assim,

o Modelo II exibiu resultados representativos dos modelos experimentais mantendo-os dentro de uma faixa aceitável de discrepância.

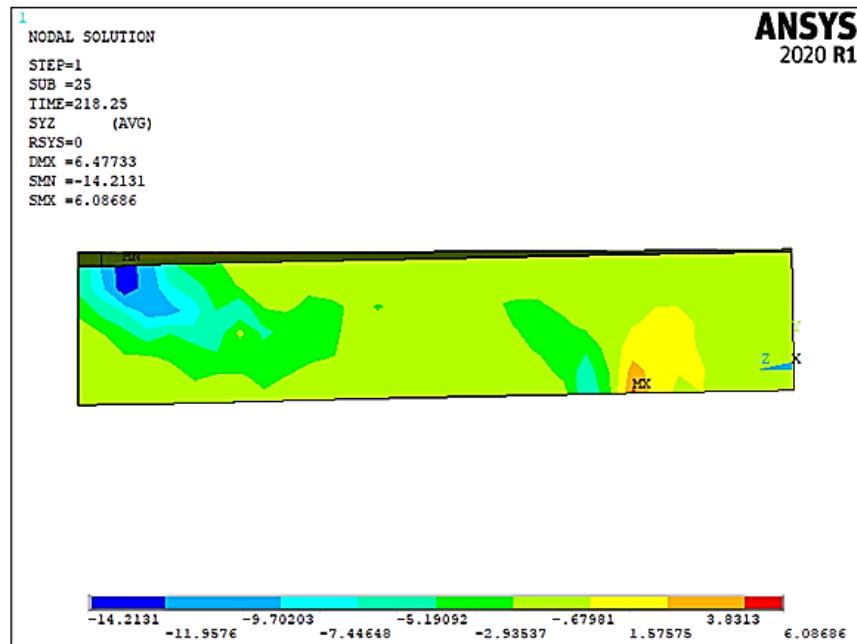
Além disso, nas Figuras 78 a 85 foi possível observar a formação das bielas de compressão, comuns em ensaios de punção em lajes de concreto armado, o que não foi possível observar no método anterior.

Figura 78 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo G-1  
em N/mm<sup>2</sup>



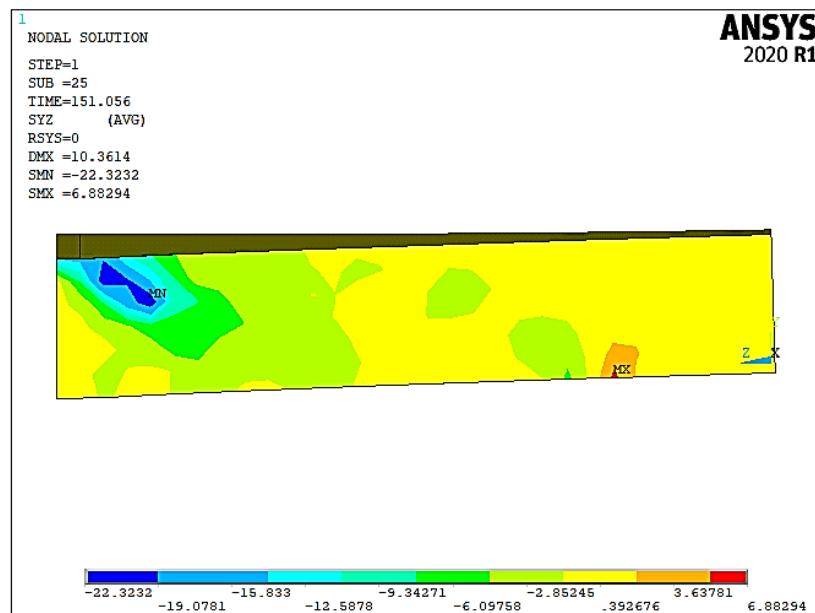
Fonte: Autora (2021).

Figura 79 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo G-2  
em N/mm<sup>2</sup>



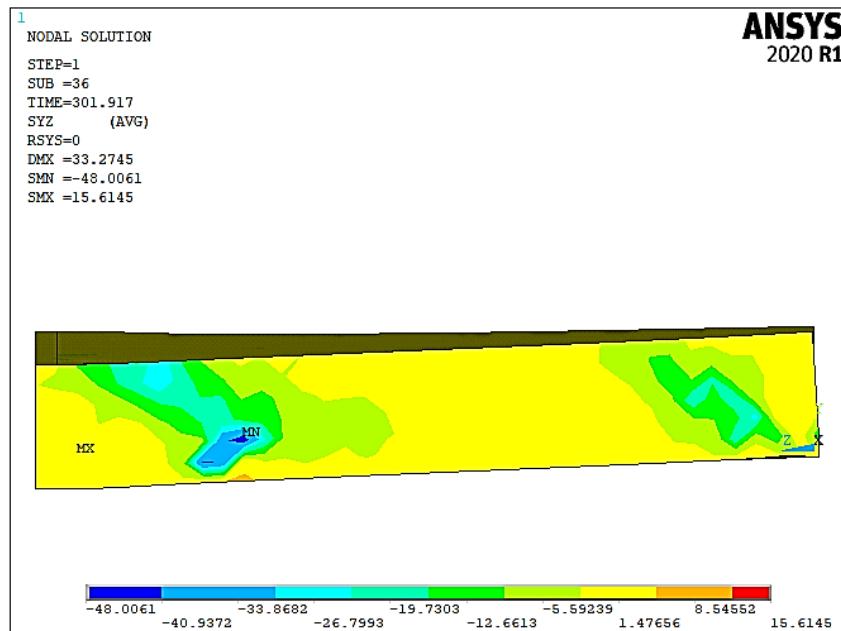
Fonte: Autora (2021).

Figura 80 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo G-3  
em N/mm<sup>2</sup>



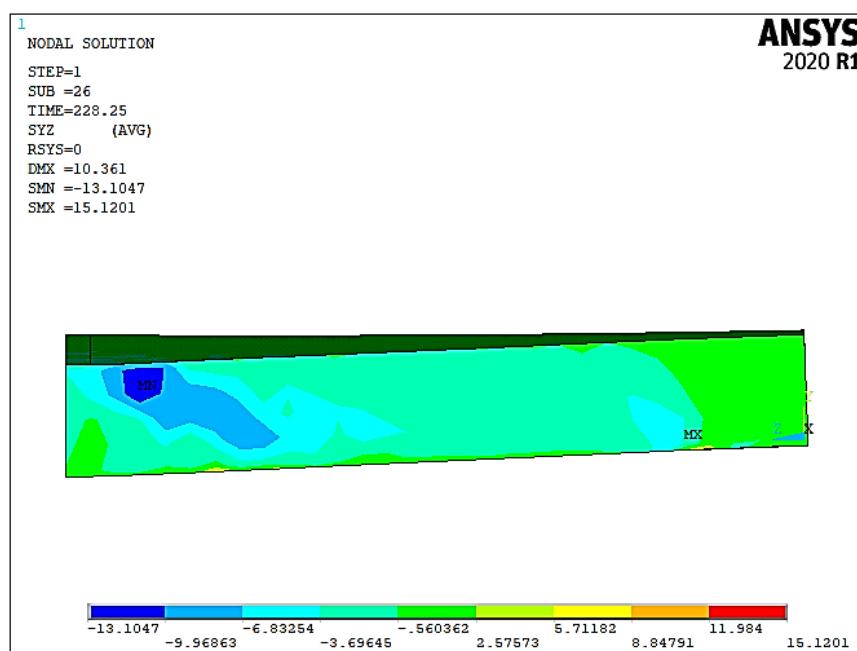
Fonte: Autora (2021).

Figura 81 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo G-4  
em N/mm<sup>2</sup>



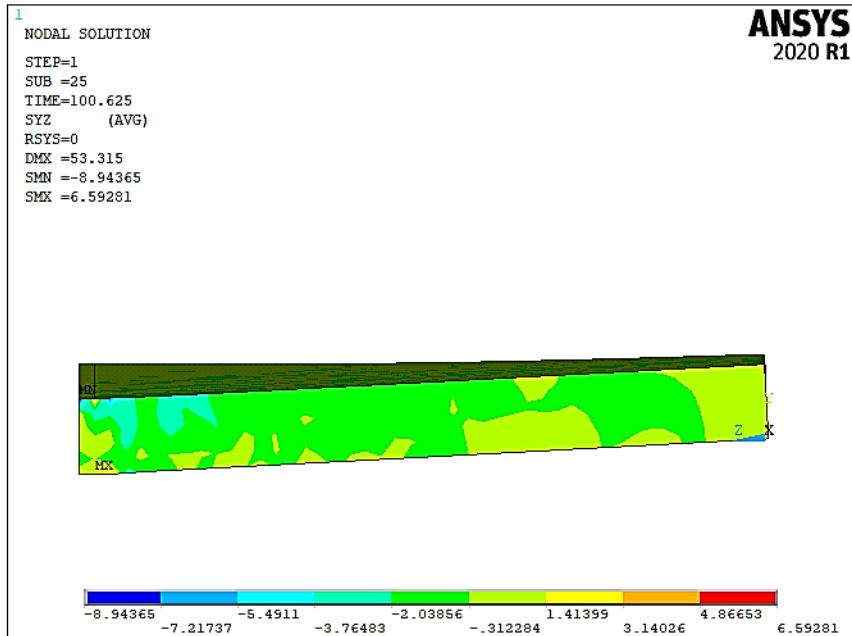
Fonte: Autora (2021).

Figura 82 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo F-1 em N/mm<sup>2</sup>



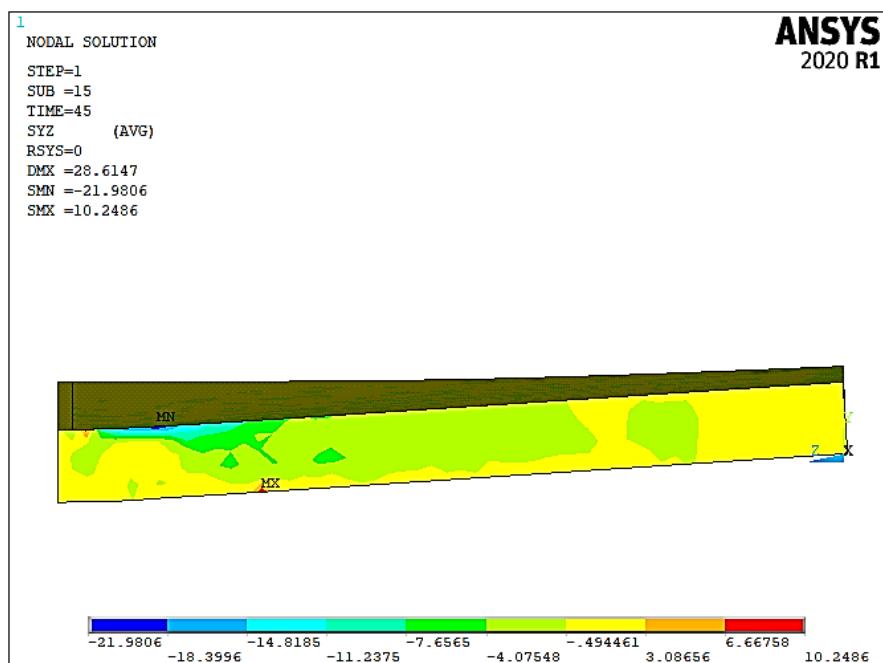
Fonte: Autora (2021).

Figura 83 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo F-2 em  $\text{N/mm}^2$



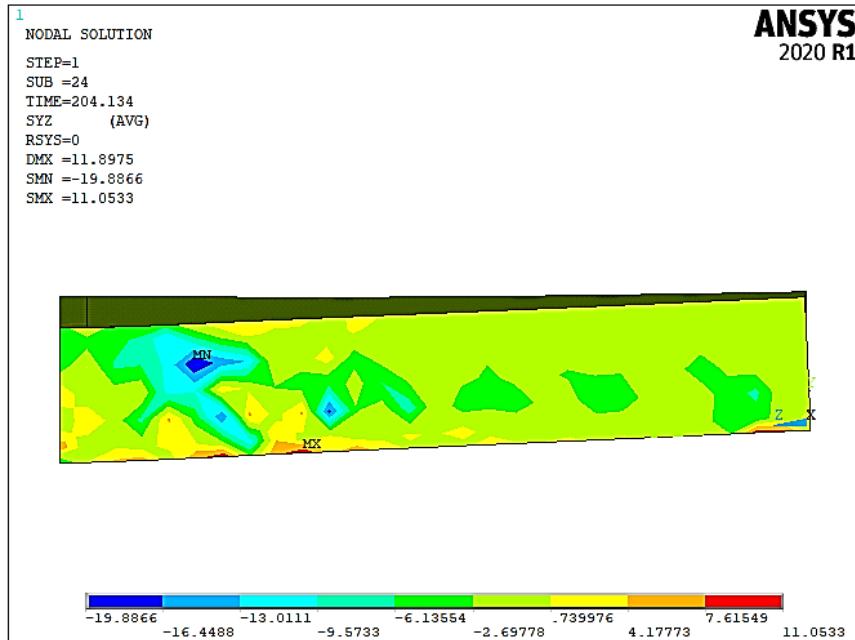
Fonte: Autora (2021).

Figura 84 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo F-3 em  $\text{N/mm}^2$



Fonte: Autora (2021).

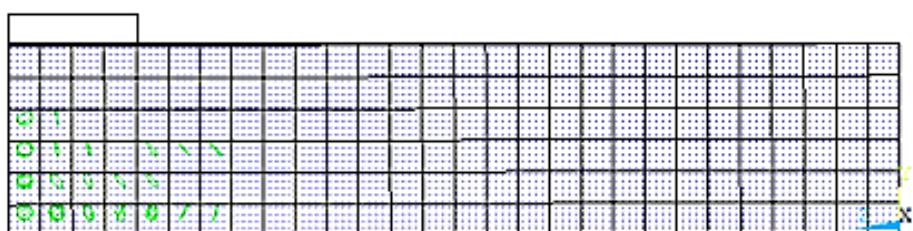
Figura 85 – Fluxo de tensão de cisalhamento para a carga máxima aplicada no modelo F-4 em  $\text{N/mm}^2$



Fonte: Autora (2021).

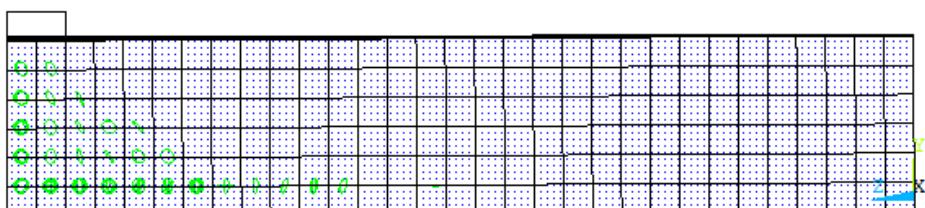
Para mais, há a formação do cone de punção visualizado após a primeira abertura da fissura na laje, como mostram as figuras abaixo.

Figura 86 – Primeira abertura da fissura no modelo G-1



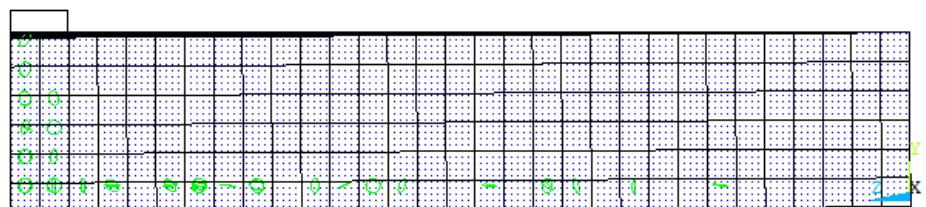
Fonte: Autora (2021).

Figura 87 – Primeira abertura da fissura no modelo G-2



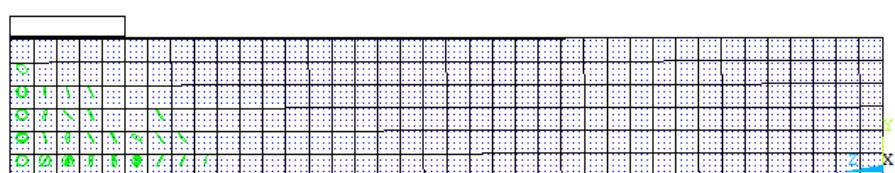
Fonte: Autora (2021).

Figura 88 – Primeira abertura da fissura no modelo G-3



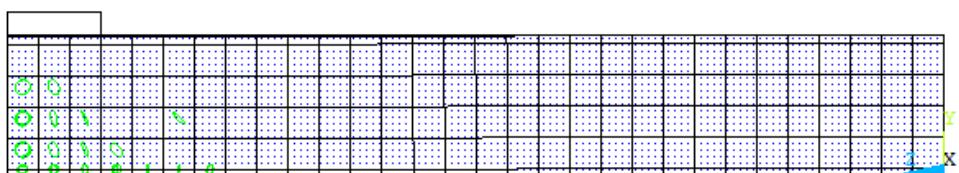
Fonte: Autora (2021).

Figura 89 – Primeira abertura da fissura no modelo G-4



Fonte: Autora (2021).

Figura 90 – Primeira abertura da fissura no modelo F-1



Fonte: Autora (2021).

Figura 91 – Primeira abertura da fissura no modelo F-2



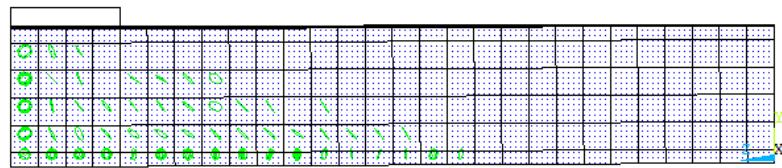
Fonte: Autora (2021).

Figura 92 – Primeira abertura da fissura no modelo F-3



Fonte: Autora (2021).

Figura 93 – Primeira abertura da fissura no modelo F-4



Fonte: Autora (2021).

### 3.6 VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS COM A APLICAÇÃO DO MODELO II

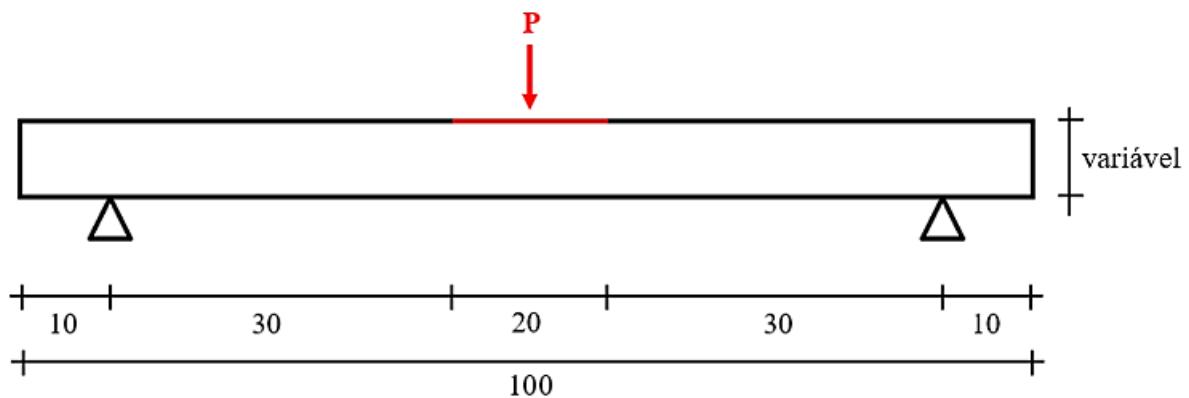
Após o comparativo dos valores das simulações empregando os dois métodos citados anteriormente foi admitido o Modelo II para a realização das simulações numéricas envolvendo a variação dos parâmetros analisados no presente estudo, devido a boa representação do comportamento das lajes ensaiadas nos modelos experimentais.

#### 3.6.1 Dados considerados na simulação numérica

Para a realização do estudo foi considerado no modelo numérico a divisão de dois grupos de lajes esbeltas (8, 9 e 10 cm) e lajes espessas (12, 13 e 14 cm) conforme as observações de comportamento descritas anteriormente. Para isso, foi considerada uma laje quadrada de comprimento fixo de 100 cm, variando sua altura e taxa de armadura em 0,25%, 0,50% e 0,75% em ambos os grupos.

Para a aplicação da carga foi delimitada uma área considerando uma chapa de aço quadrada com dimensões de 20 x 20 cm e as dimensões do apoio de 10 cm, como ilustra a Figura 94.

Figura 94 – Dimensões consideradas no modelo numérico, em cm.



Fonte: Autora (2021).

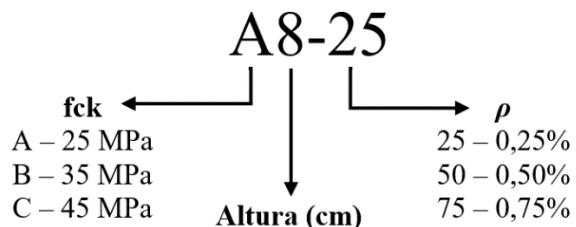
Por fim, foi admitido para todos os casos a utilização de aços CA-60, com limite de escoamento de 600 MPa, sendo definida a curva de tração e compressão do aço como elástico perfeitamente plástico, como mostra a Figura 37.

### 3.6.2 Resultados das simulações

#### 3.6.2.1 Lajes esbeltas

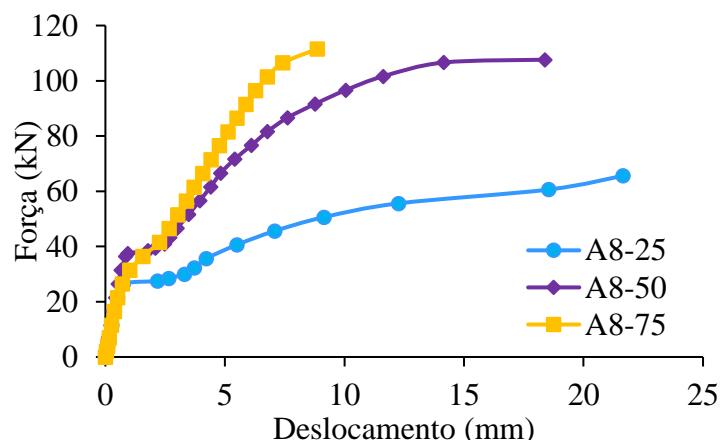
Com aplicação do Modelo II e admitida a variação dos parâmetros de  $f_{ck}$ , altura e taxa de armadura foram obtidas curvas de Força x Deslocamento dos modelos numéricos elaborados, descritas nas figuras abaixo, seguindo a nomenclatura conforme a legenda disposta na Figura 95.

Figura 95 – Legenda considerada na nomenclatura dos modelos numéricos



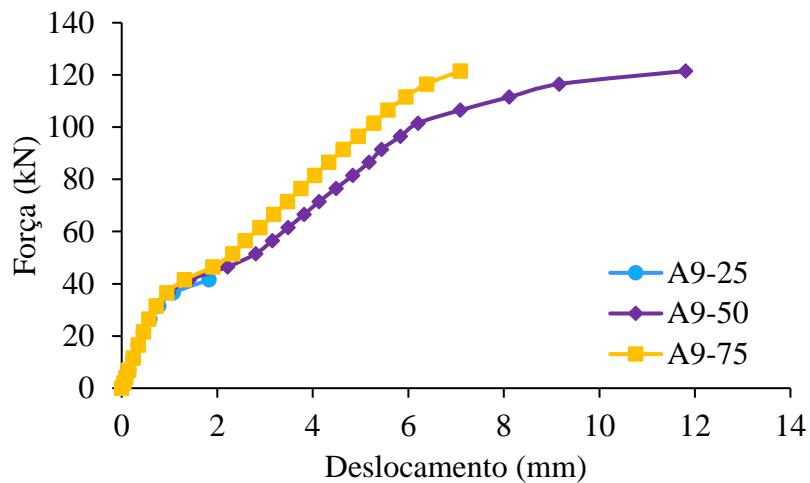
Fonte: Autora (2021).

Figura 96 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 25 MPa, altura de 8 cm e variação da taxa de armadura



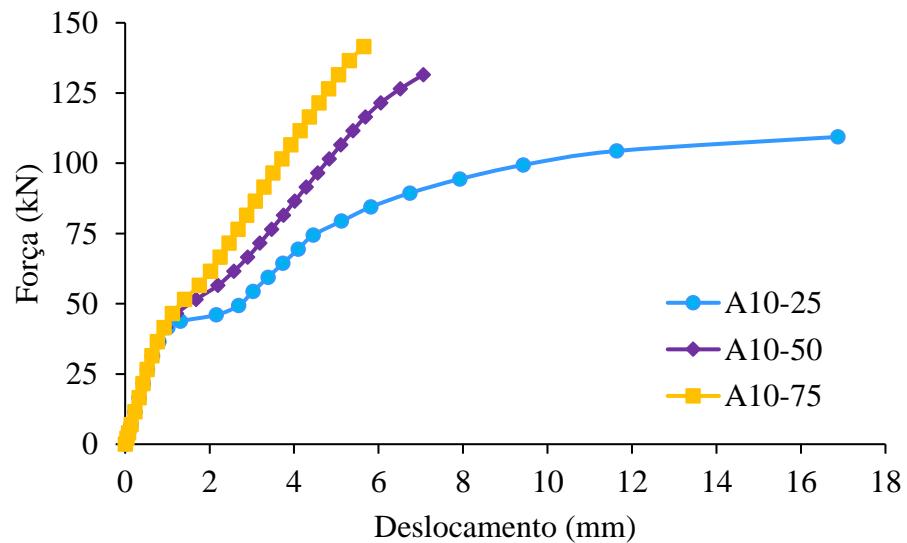
Fonte: Autora (2021).

Figura 97 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 25 MPa, altura de 9 cm e variação da taxa de armadura



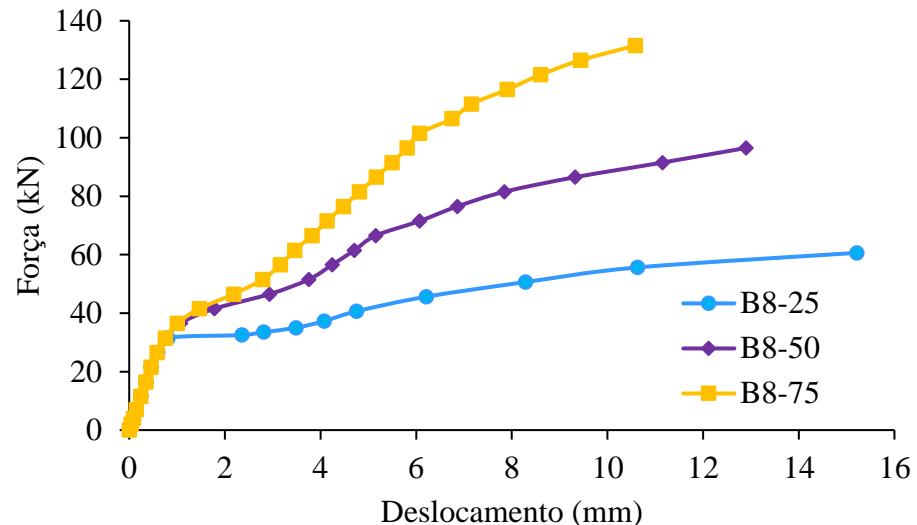
Fonte: Autora (2021).

Figura 98 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 25 MPa, altura de 10 cm e variação da taxa de armadura



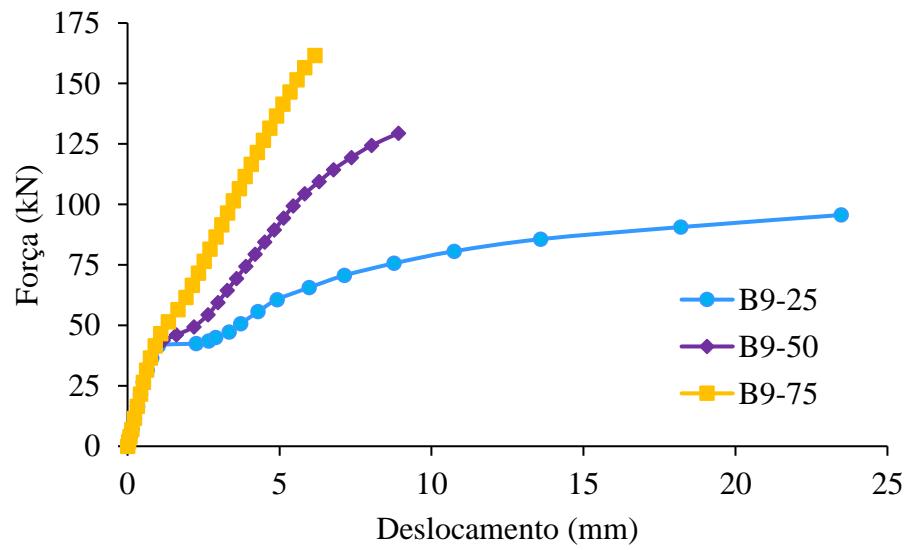
Fonte: Autora (2021).

Figura 99 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 35 MPa, altura de 8 cm e variação da taxa de armadura



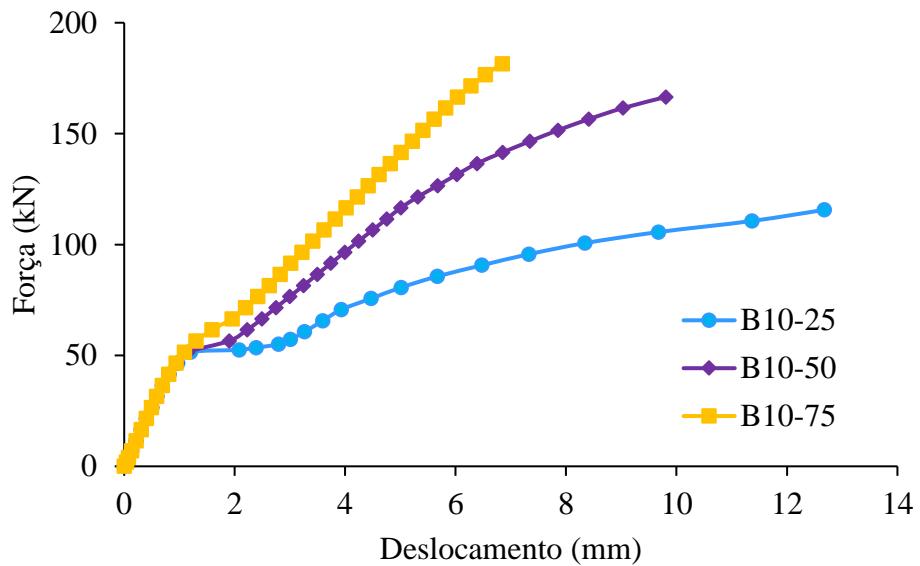
Fonte: Autora (2021).

Figura 100 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 35 MPa, altura de 9 cm e variação da taxa de armadura



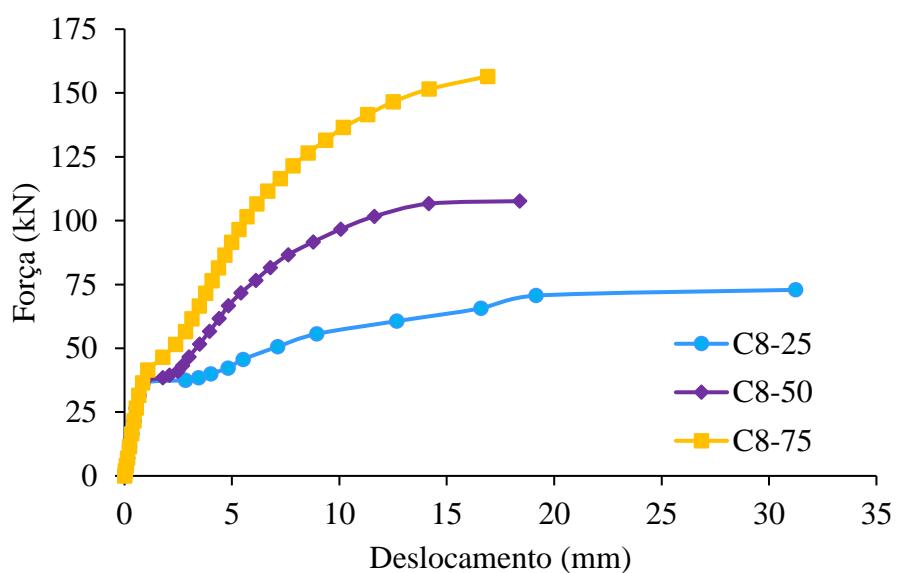
Fonte: Autora (2021).

Figura 101 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 35 MPa, altura de 10 cm e variação da taxa de armadura



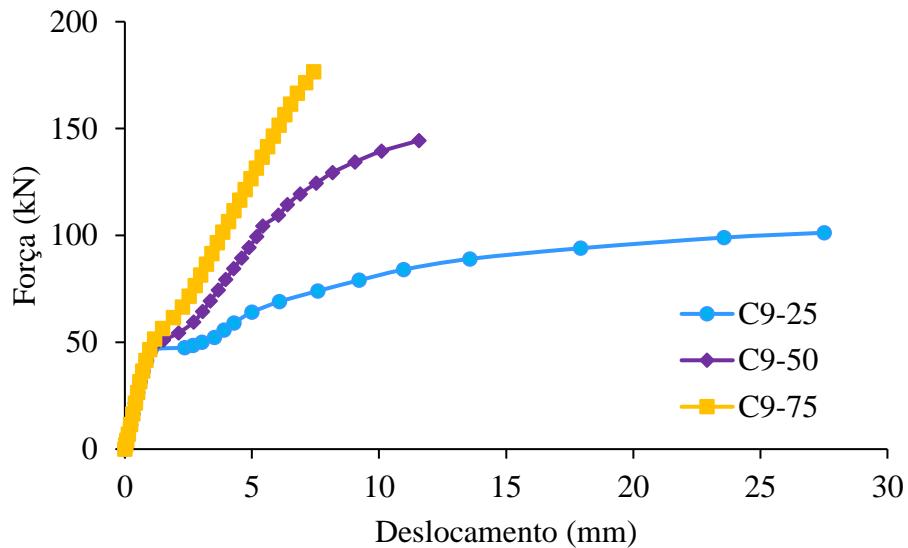
Fonte: Autora (2021).

Figura 102 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 45 MPa, altura de 8 cm e variação da taxa de armadura



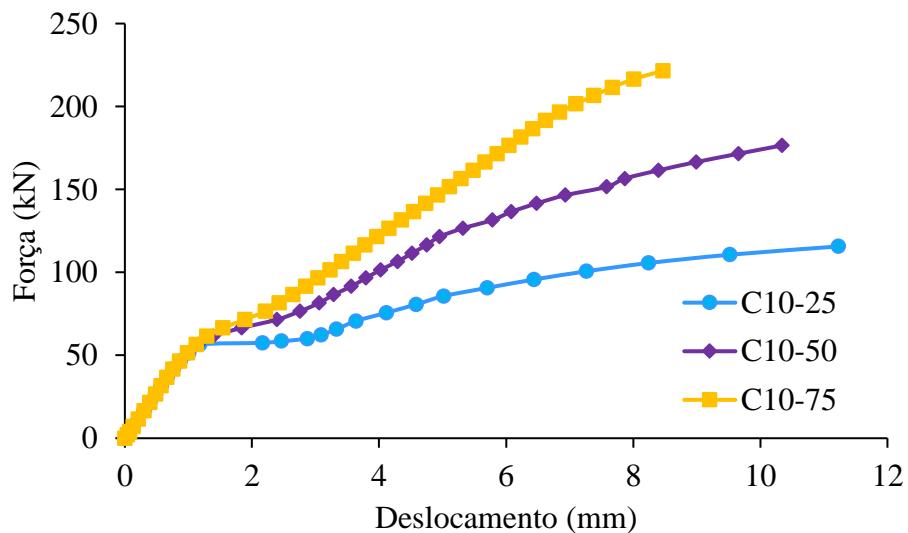
Fonte: Autora (2021).

Figura 103 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 45 MPa, altura de 9 cm e variação da taxa de armadura



Fonte: Autora (2021).

Figura 104 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 45 MPa, altura de 10 cm e variação da taxa de armadura



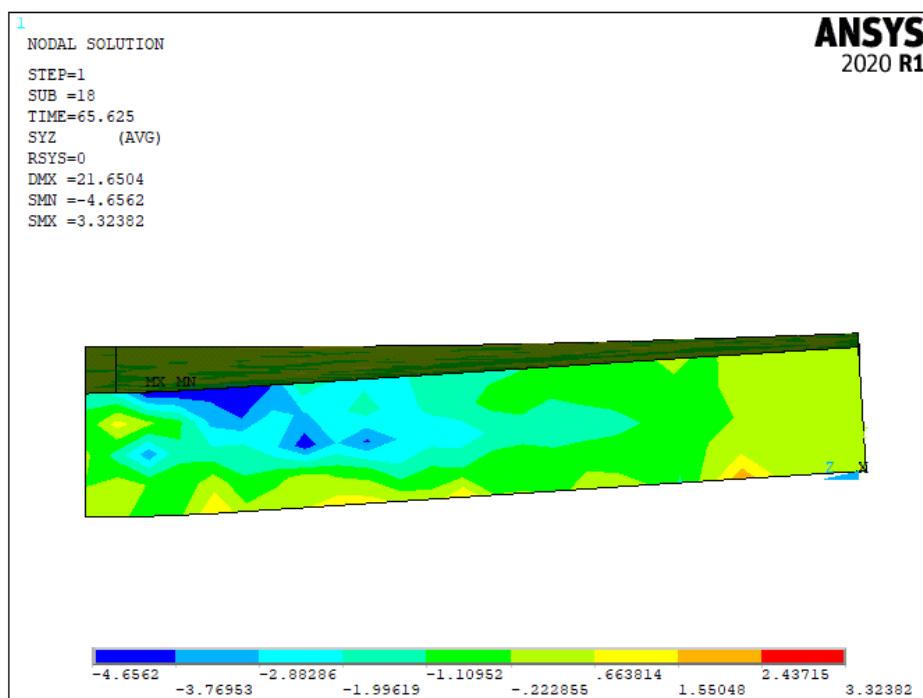
Fonte: Autora (2021).

Analizando as curvas de Força x Deslocamento dos modelos numéricos do grupo de lajes esbeltas, por meio das figuras anteriores, observou-se que o aumento da taxa de armadura longitudinal contribuiu para maiores valores de força máxima aplicada, além de contribuir para o aumento da rigidez da peça o que faz com se tenham menores deslocamentos.

Para mais, uma análise mais completa sobre a influência dos parâmetros sobre o comportamento das lajes estudas será vista no Capítulo 4, em que será utilizada a Análise de Variância (Anova) para se obter maiores conclusões.

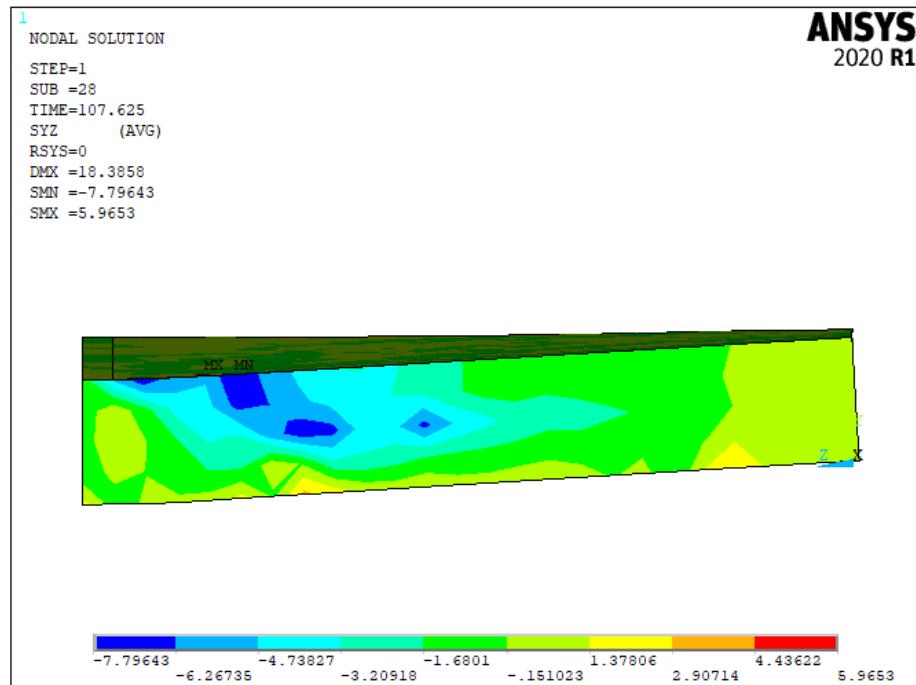
Em relação ao fluxo de tensão de cisalhamento das lajes simuladas, como mostram as Figuras de 105 a 131, notou-se a presença da formação das bielas de compressão em nas lajes simuladas, com o fluxo de tensões de cisalhamento sendo direcionado para a localização dos apoios.

Figura 105 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A8-25 em N/mm<sup>2</sup>



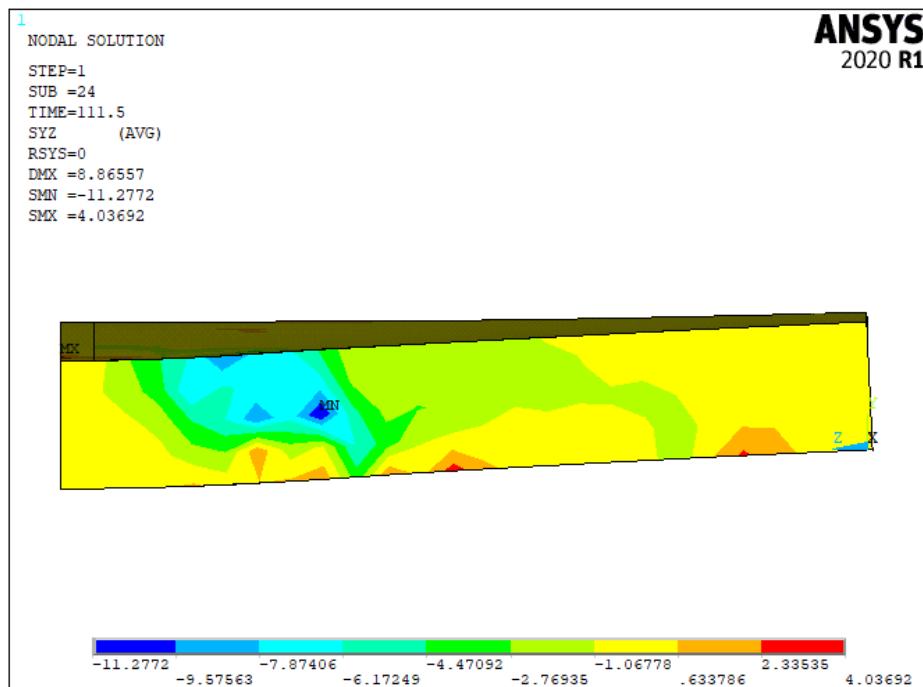
Fonte: Autora (2021).

Figura 106 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A8-50 em N/mm<sup>2</sup>



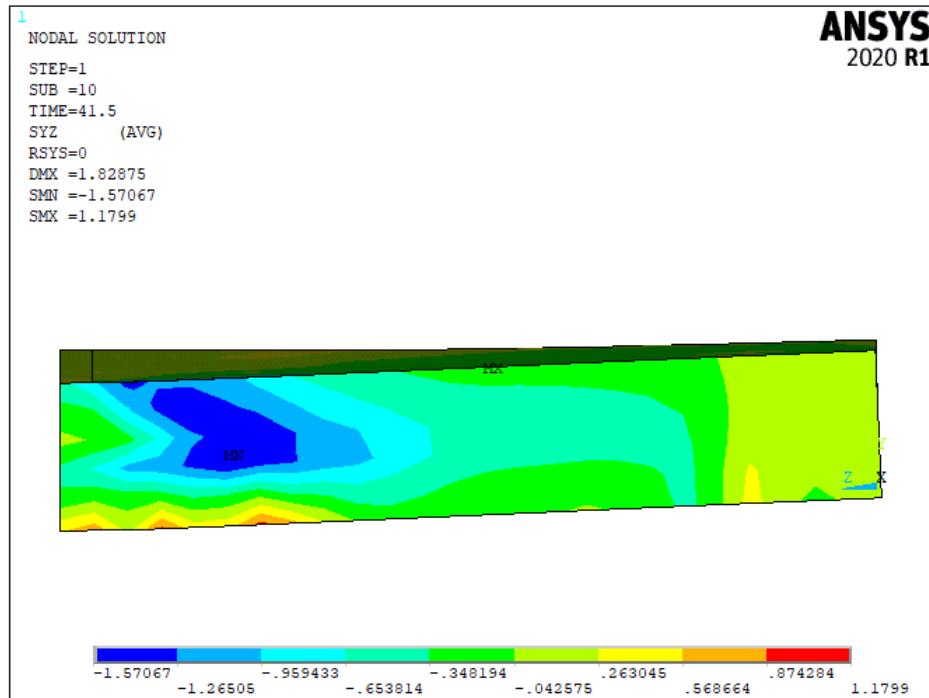
Fonte: Autora (2021).

Figura 107 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A8-75 em N/mm<sup>2</sup>



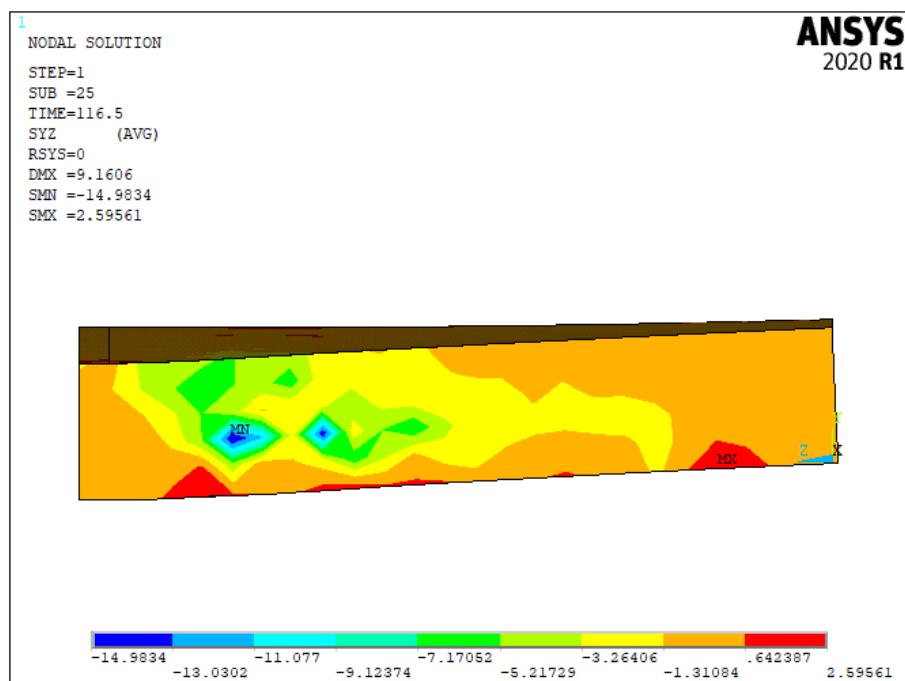
Fonte: Autora (2021).

Figura 108 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A9-25 em N/mm<sup>2</sup>



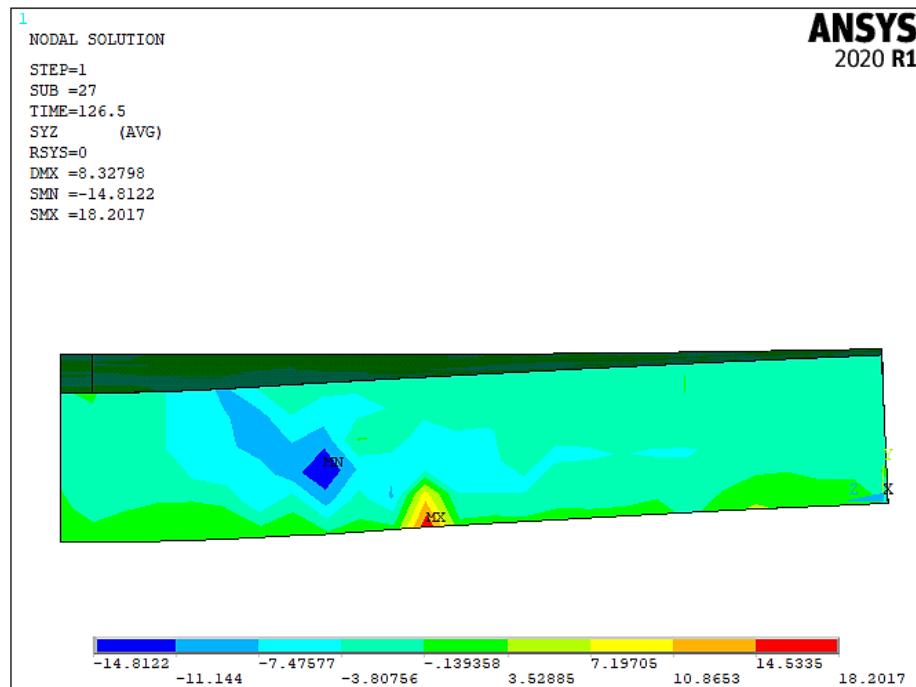
Fonte: Autora (2021).

Figura 109 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A9-50 em N/mm<sup>2</sup>



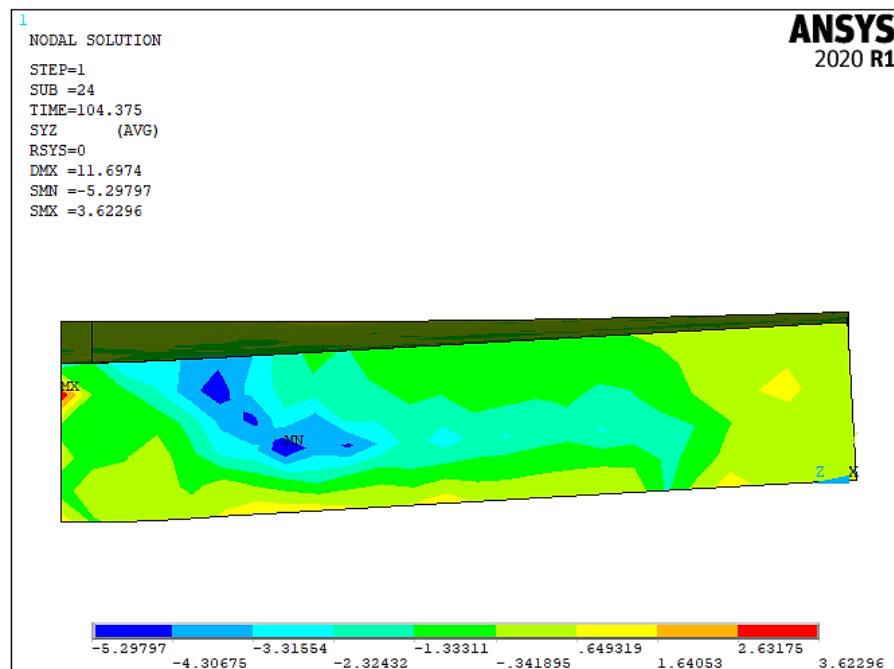
Fonte: Autora (2021).

Figura 110 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A9-75 em N/mm<sup>2</sup>



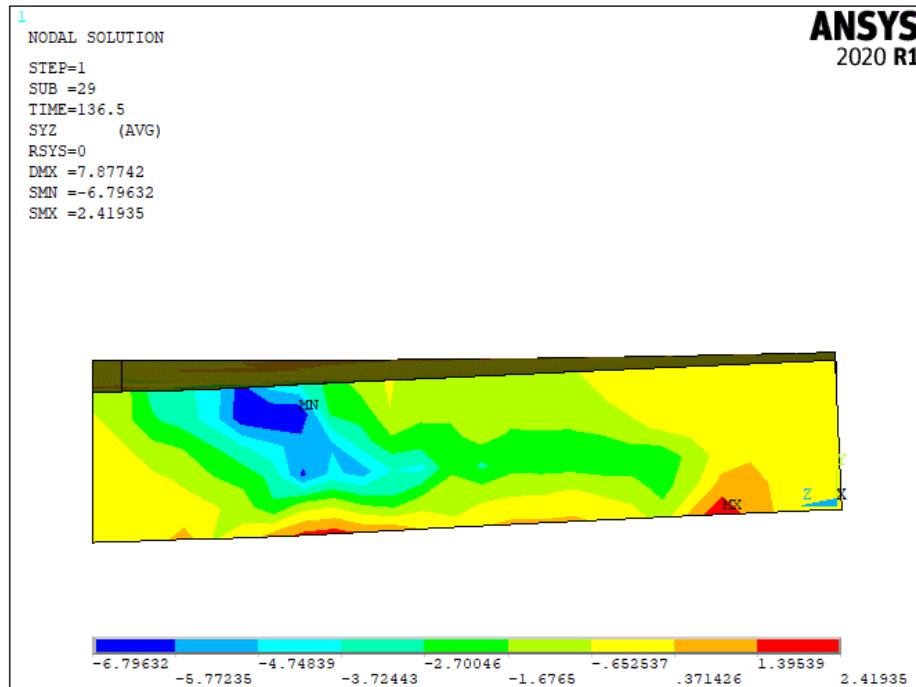
Fonte: Autora (2021).

Figura 111 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A10-25 em N/mm<sup>2</sup>



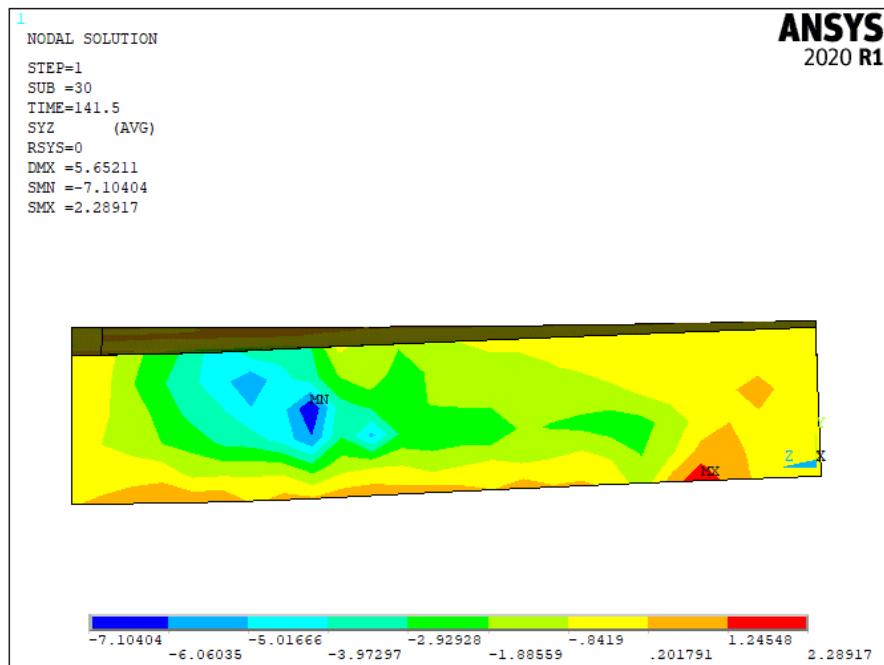
Fonte: Autora (2021).

Figura 112 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A10-50 em N/mm<sup>2</sup>



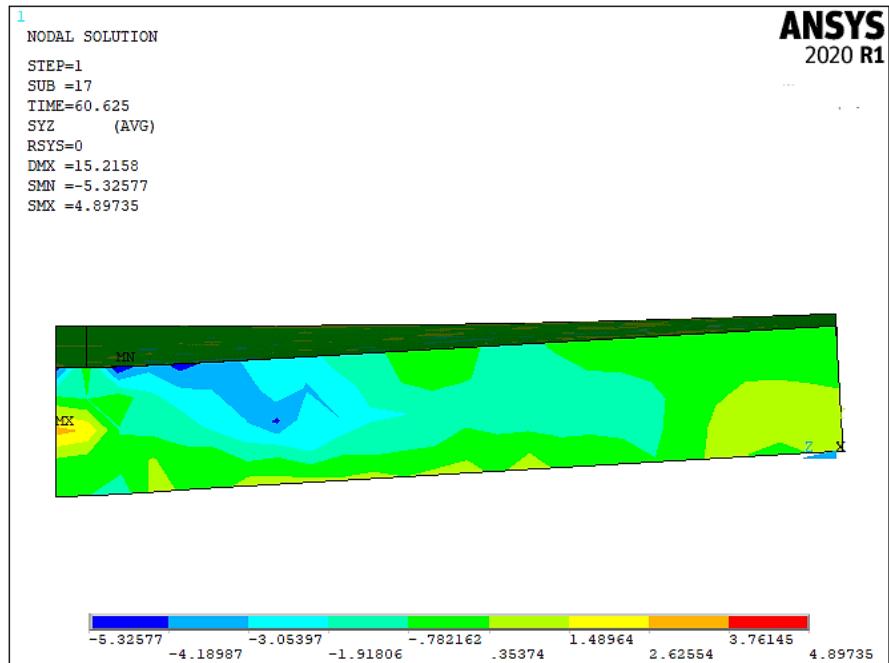
Fonte: Autora (2021).

Figura 113 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A10-75 em N/mm<sup>2</sup>



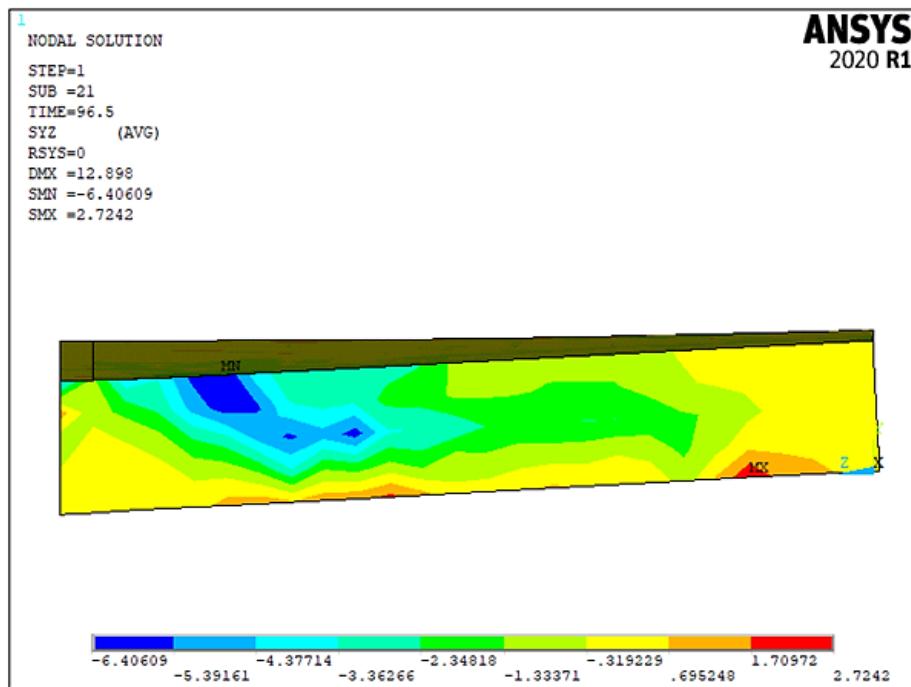
Fonte: Autora (2021).

Figura 114 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B8-25 em N/mm<sup>2</sup>



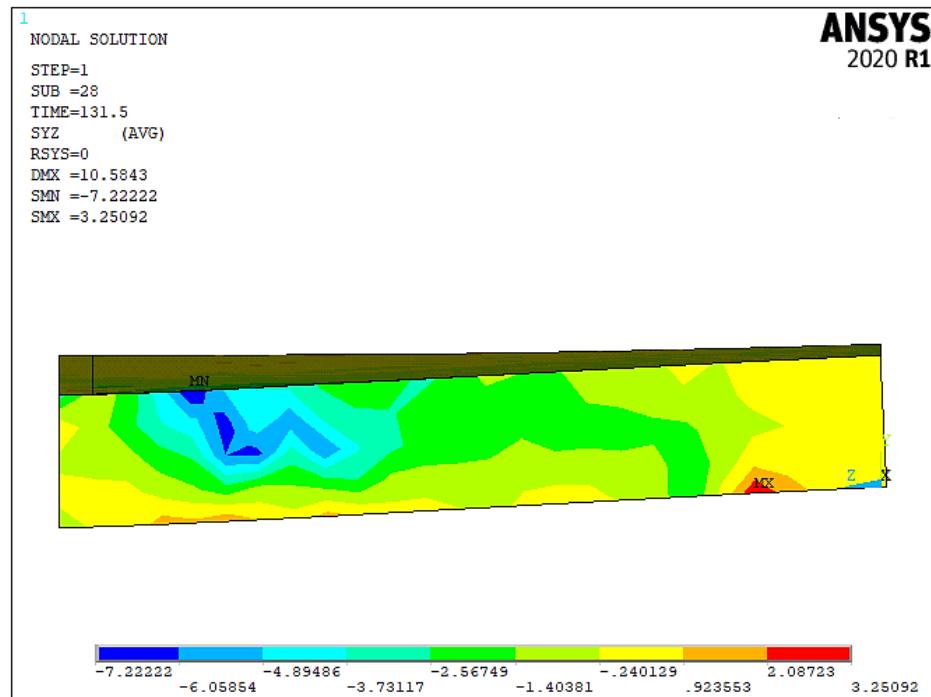
Fonte: Autora (2021).

Figura 115 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B8-50 em N/mm<sup>2</sup>



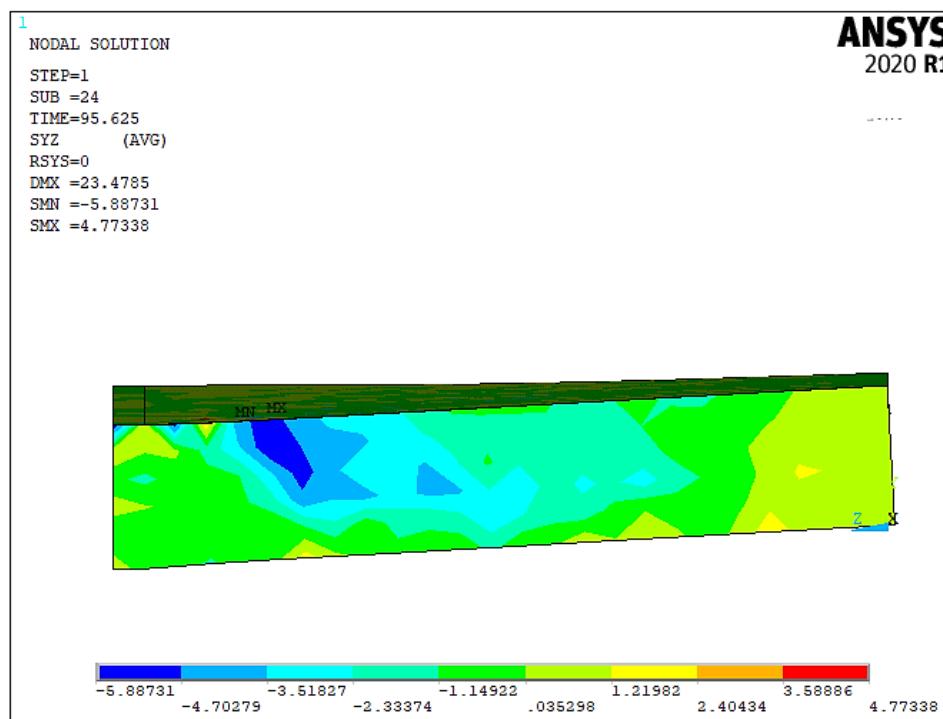
Fonte: Autora (2021).

Figura 116 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B8-75 em N/mm<sup>2</sup>



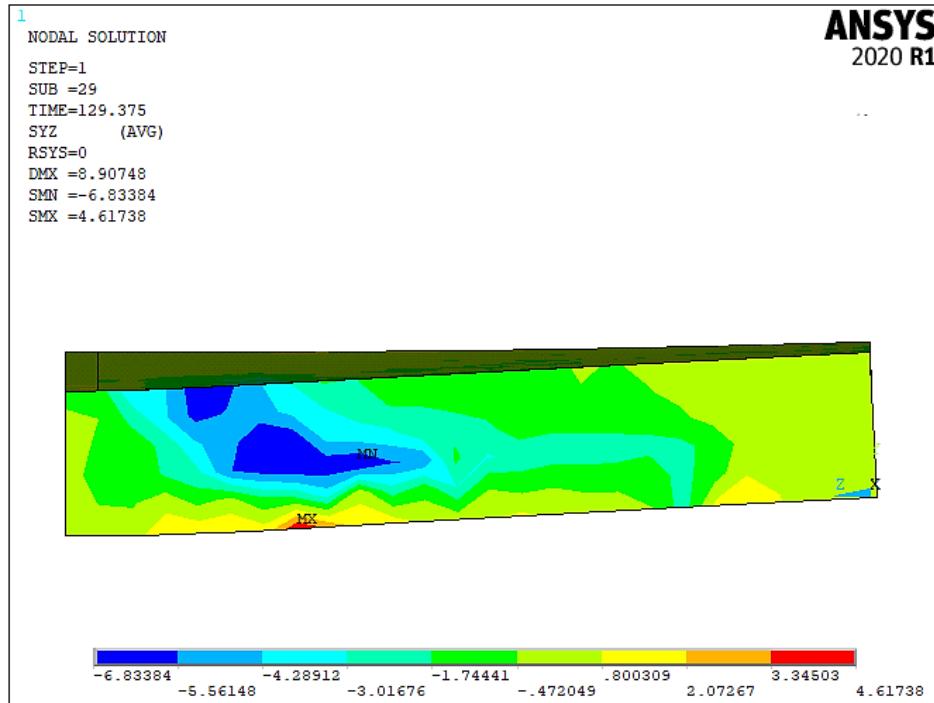
Fonte: Autora (2021).

Figura 117 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B9-25 em N/mm<sup>2</sup>



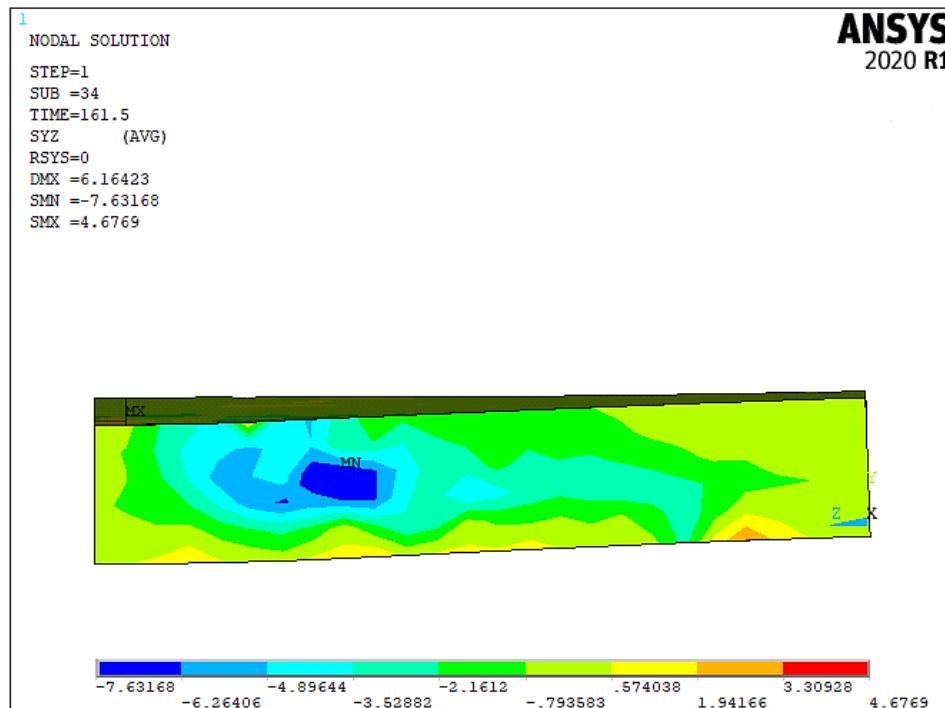
Fonte: Autora (2021).

Figura 118 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B9-50 em N/mm<sup>2</sup>



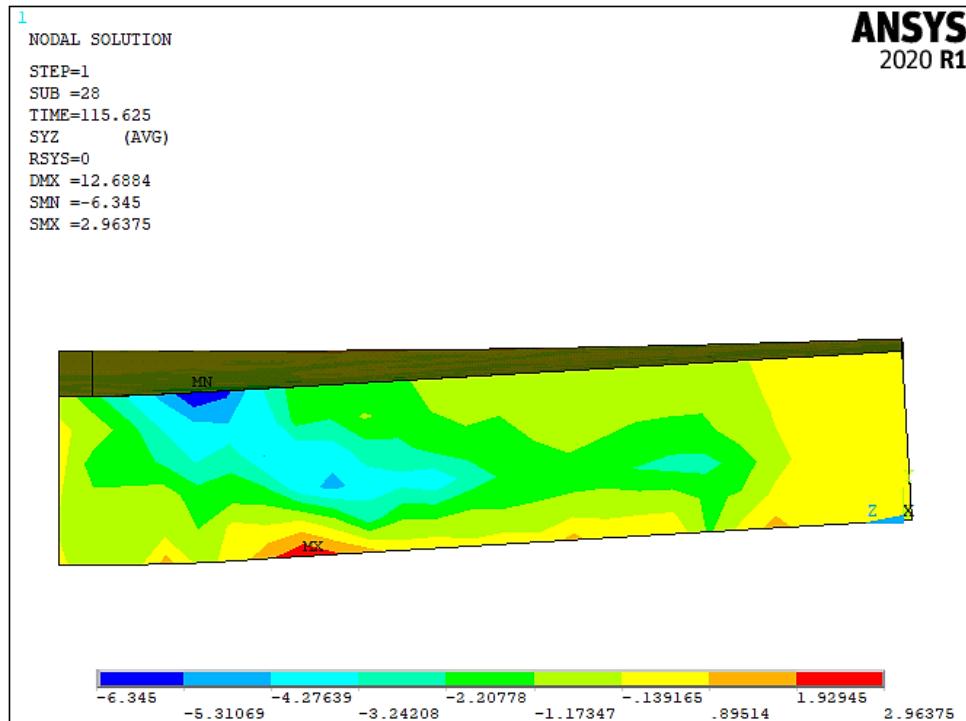
Fonte: Autora (2021).

Figura 119 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B9-75 em N/mm<sup>2</sup>



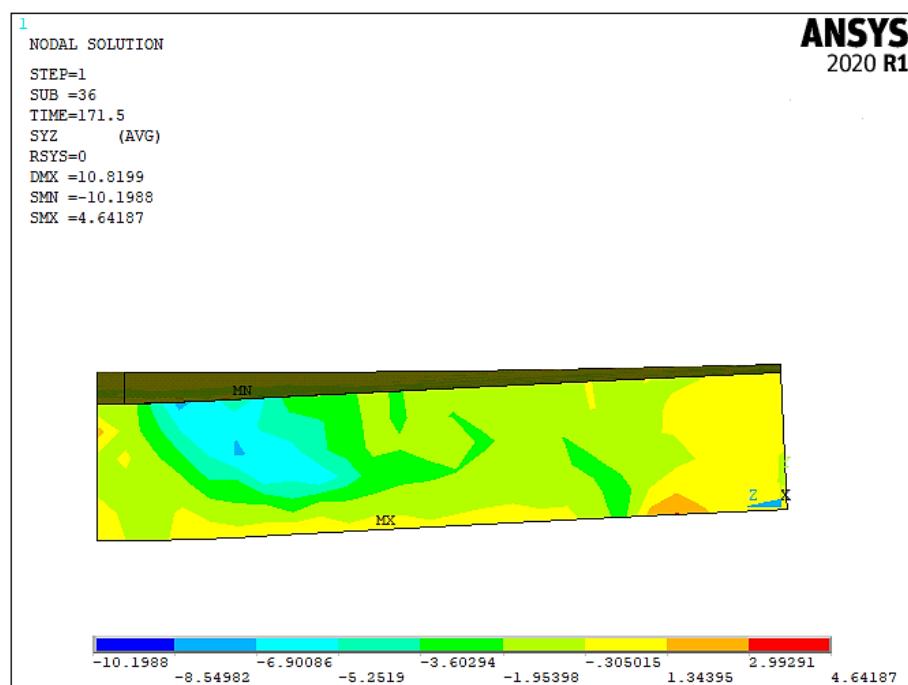
Fonte: Autora (2021).

Figura 120 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B10-25 em N/mm<sup>2</sup>



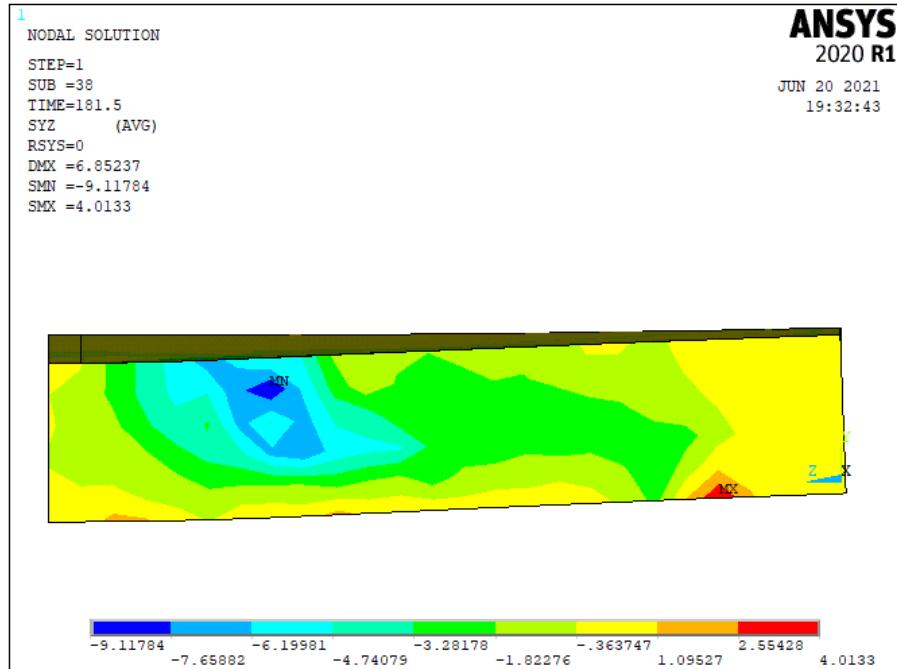
Fonte: Autora (2021).

Figura 121 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B10-50 em N/mm<sup>2</sup>



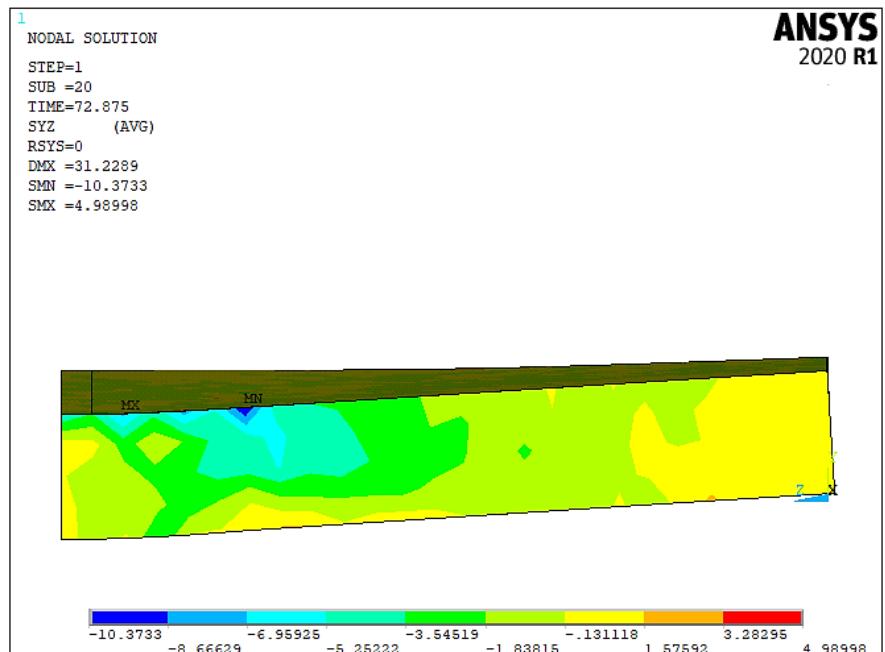
Fonte: Autora (2021).

Figura 122 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B10-75 em N/mm<sup>2</sup>



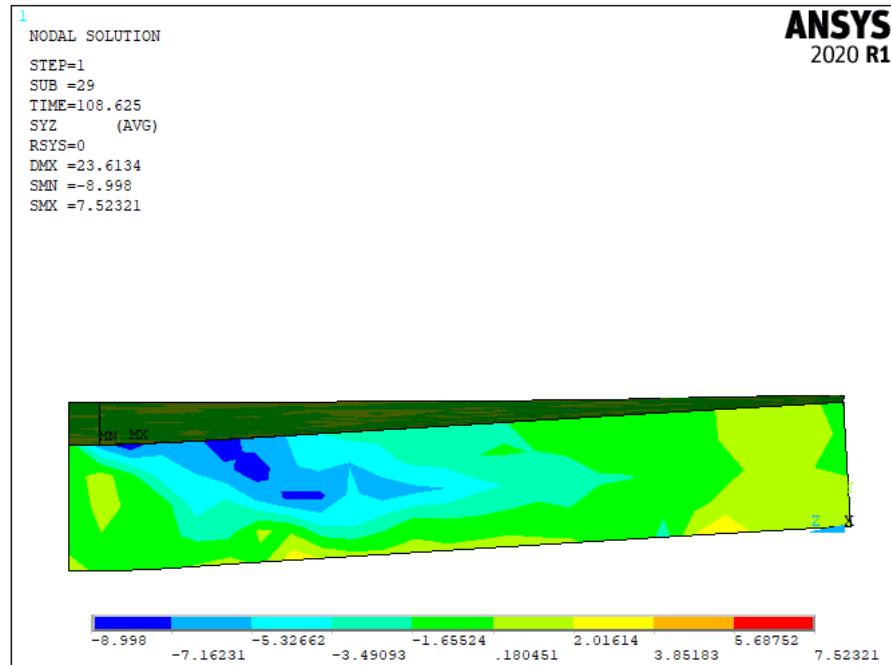
Fonte: Autora (2021).

Figura 123 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C8-25 em N/mm<sup>2</sup>



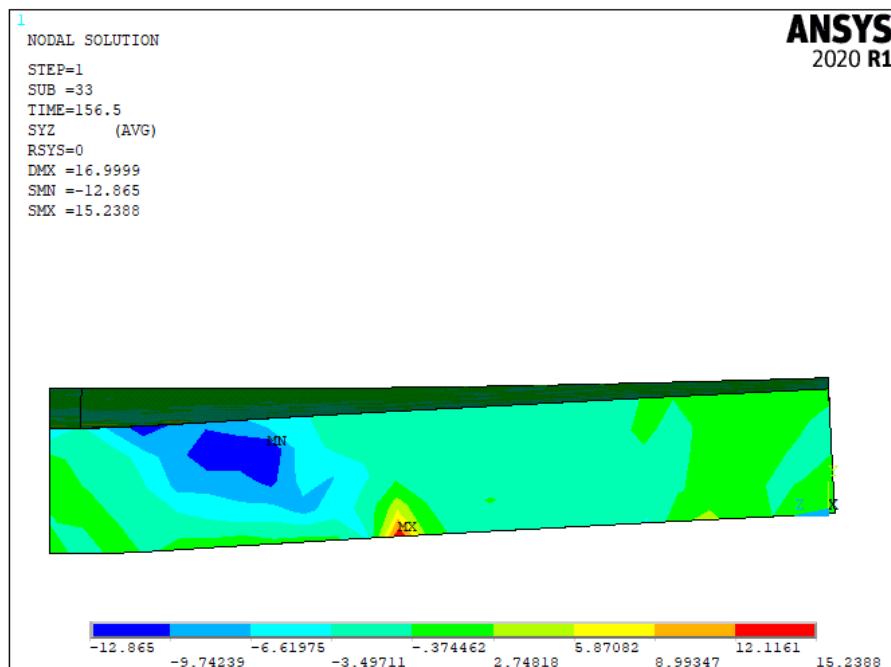
Fonte: Autora (2021).

Figura 124 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C8-50 em N/mm<sup>2</sup>



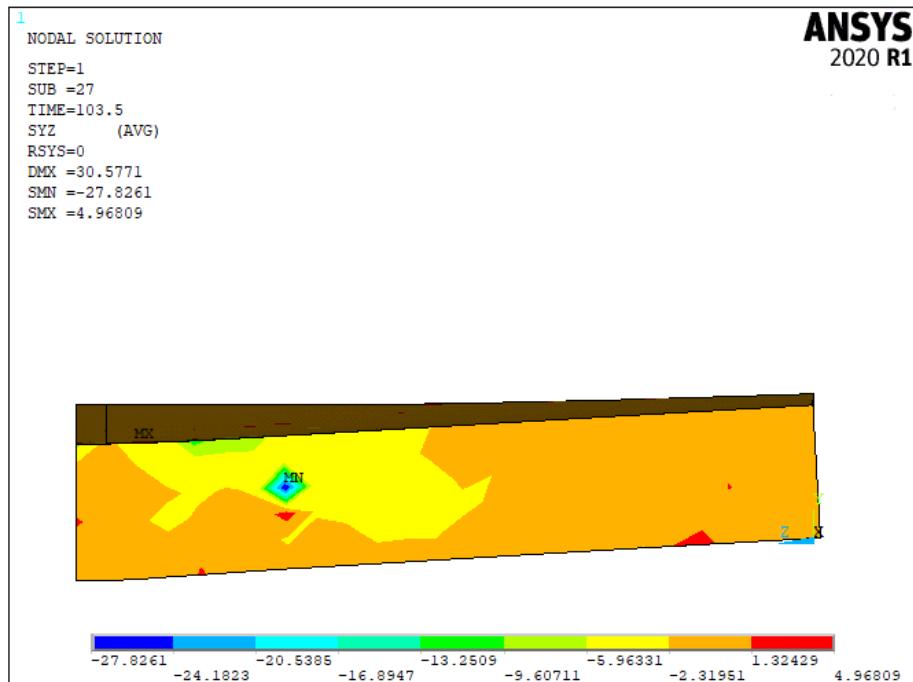
Fonte: Autora (2021).

Figura 125 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C8-75 em N/mm<sup>2</sup>



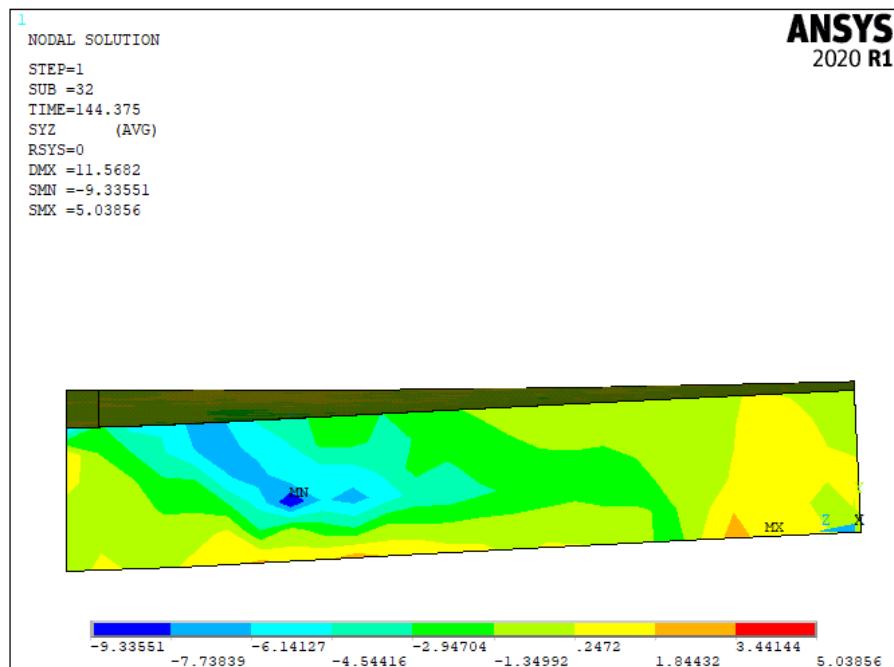
Fonte: Autora (2021).

Figura 126 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C9-25 em N/mm<sup>2</sup>



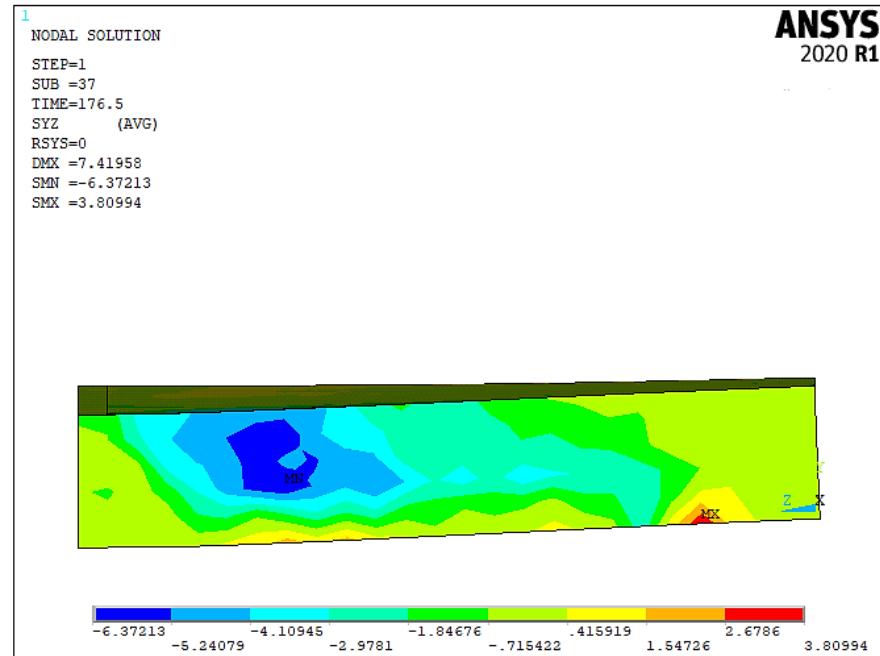
Fonte: Autora (2021).

Figura 127 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C9-50 em N/mm<sup>2</sup>



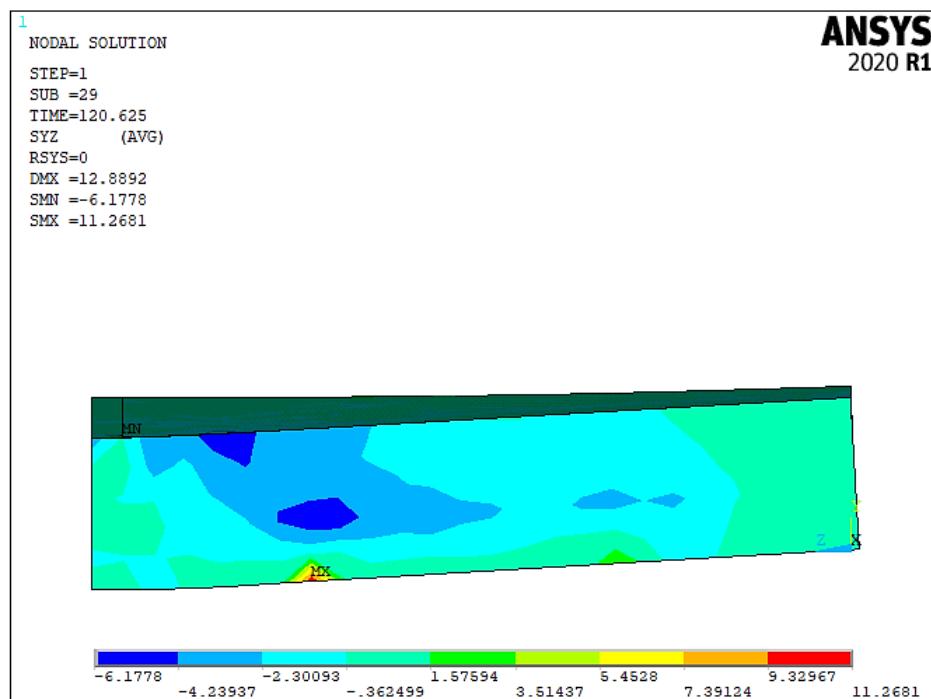
Fonte: Autora (2021).

Figura 128 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C9-75 em N/mm<sup>2</sup>



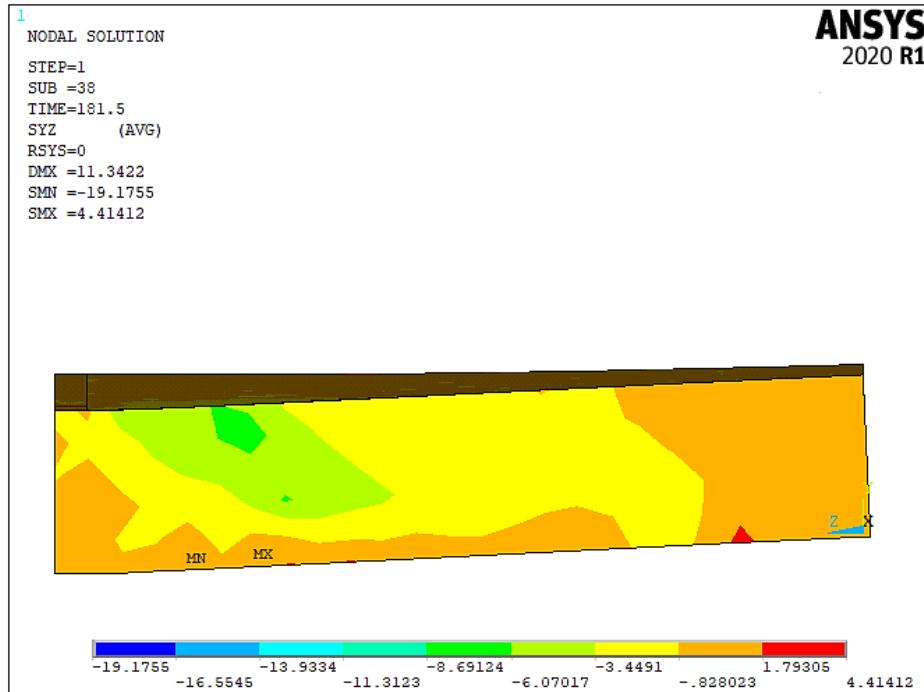
Fonte: Autora (2021).

Figura 129 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C10-25 em N/mm<sup>2</sup>



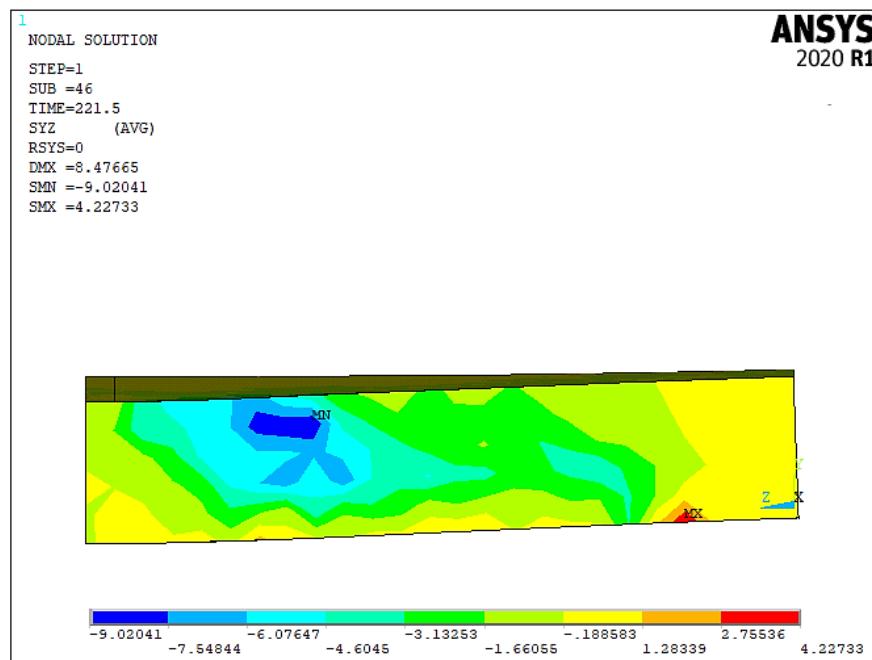
Fonte: Autora (2021).

Figura 130 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C10-50 em N/mm<sup>2</sup>



Fonte: Autora (2021).

Figura 131 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C10-75 em N/mm<sup>2</sup>

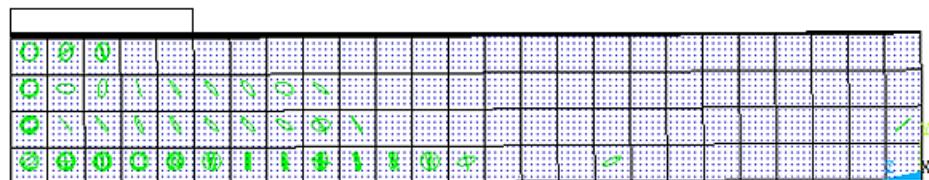


Fonte: Autora (2021).

As figuras abaixo mostram a formação da primeira fissura aberta nos modelos numéricos. Ao observá-las verificou-se a ocorrência da formação da fissura na diagonal que é

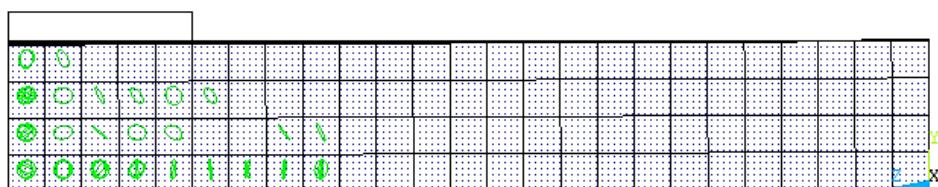
característico em lajes submetidas a ensaios de punção, em que a fissura se propaga na diagonal, em direção a localização aos vértices do pilar.

Figura 132 – Primeira fissura aberta no modelo A8-25



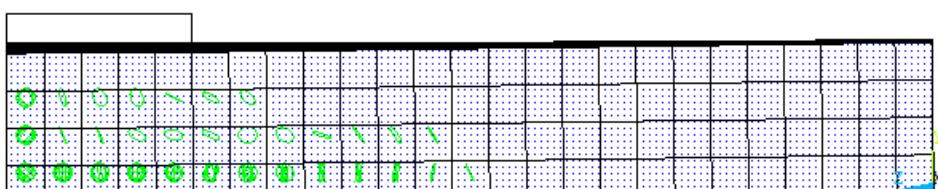
Fonte: Autora (2021).

Figura 133 – Primeira fissura aberta no modelo A8-50



Fonte: Autora (2021).

Figura 134 – Primeira fissura aberta no modelo A8-75



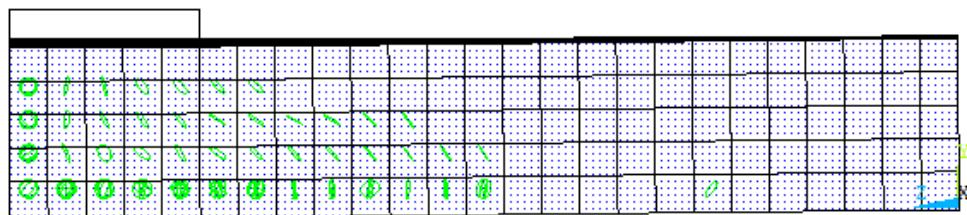
Fonte: Autora (2021).

Figura 135 – Primeira fissura aberta no modelo A9-25



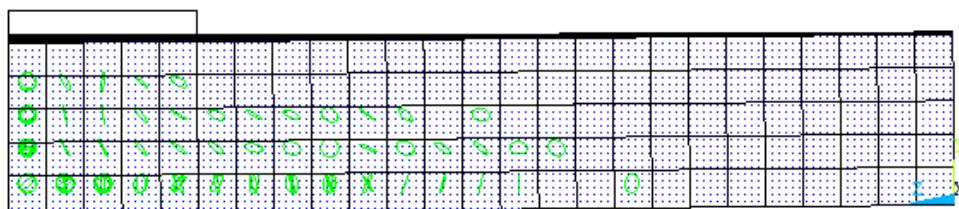
Fonte: Autora (2021).

Figura 136 – Primeira fissura aberta no modelo A9-50



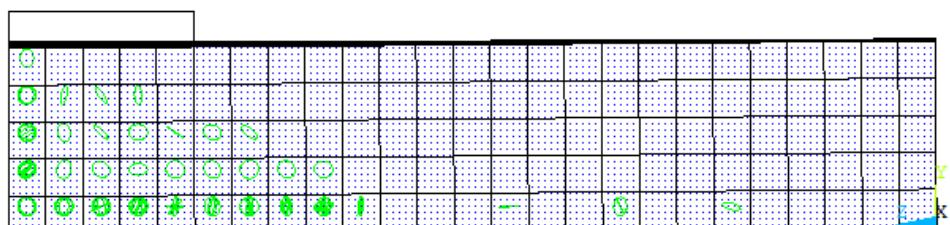
Fonte: Autora (2021).

Figura 137 – Primeira fissura aberta no modelo A9-75



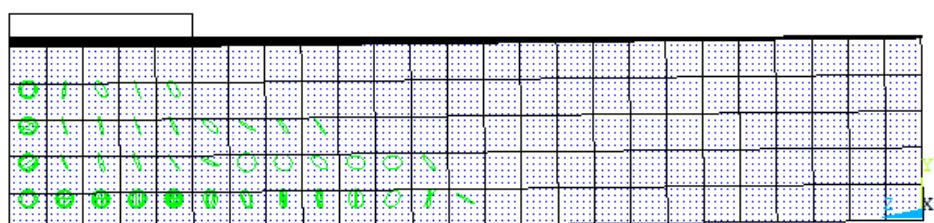
Fonte: Autora (2021).

Figura 138 – Primeira fissura aberta no modelo A10-25



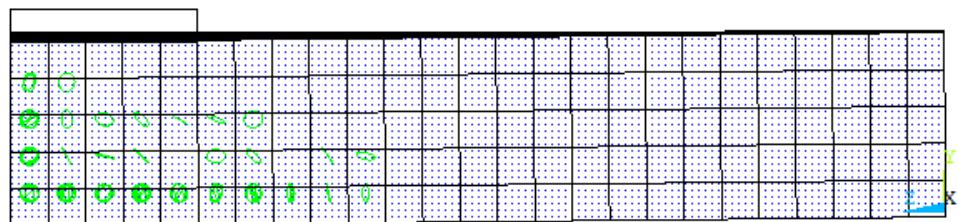
Fonte: Autora (2021).

Figura 139 – Primeira fissura aberta no modelo A10-50



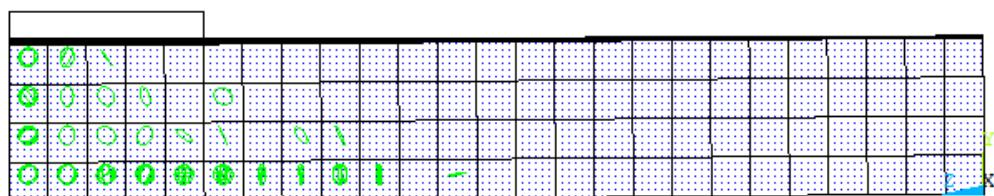
Fonte: Autora (2021).

Figura 140 – Primeira fissura aberta no modelo A10-75



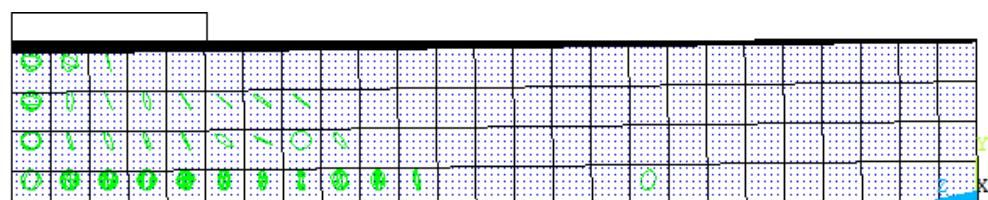
Fonte: Autora (2021).

Figura 141 – Primeira fissura aberta no modelo B8-25



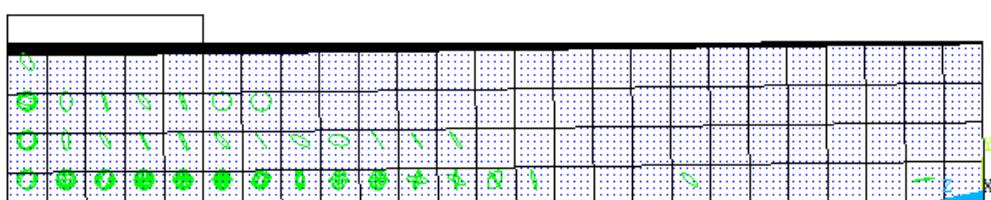
Fonte: Autora (2021).

Figura 142 – Primeira fissura aberta no modelo B8-50



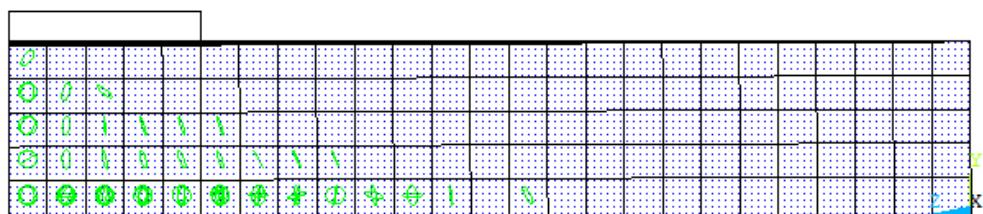
Fonte: Autora (2021).

Figura 143 – Primeira fissura aberta no modelo B8-75



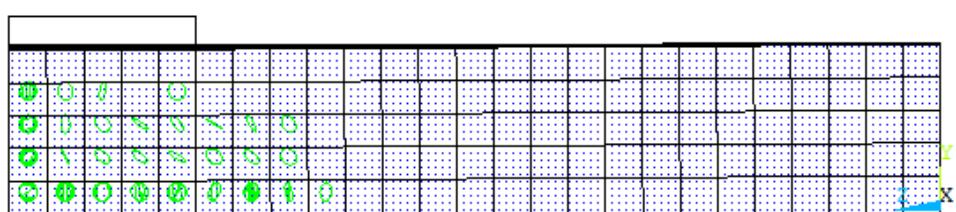
Fonte: Autora (2021).

Figura 144 – Primeira fissura aberta no modelo B9-25



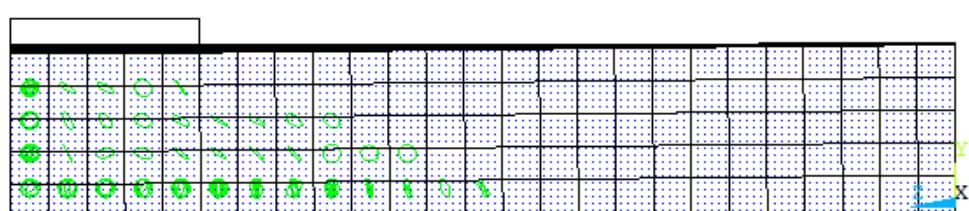
Fonte: Autora (2021).

Figura 145 – Primeira fissura aberta no modelo B9-50



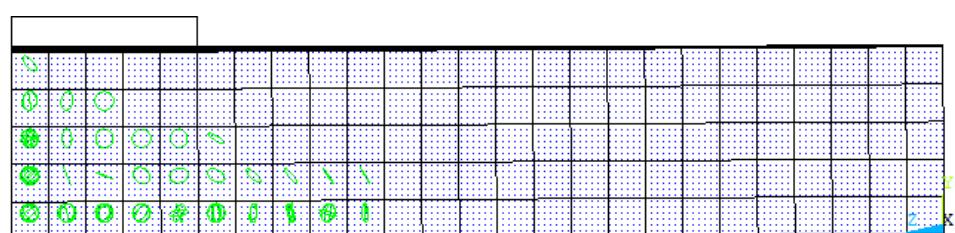
Fonte: Autora (2021).

Figura 146 – Primeira fissura aberta no modelo B9-75



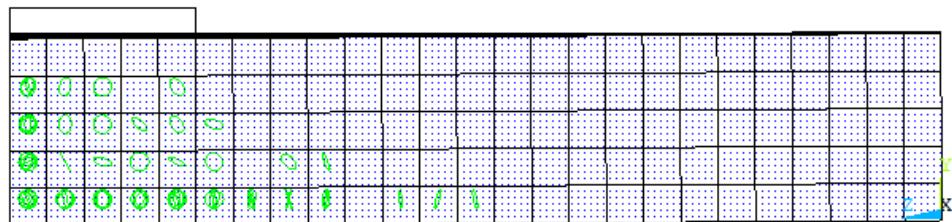
Fonte: Autora (2021).

Figura 147 – Primeira fissura aberta no modelo B10-25



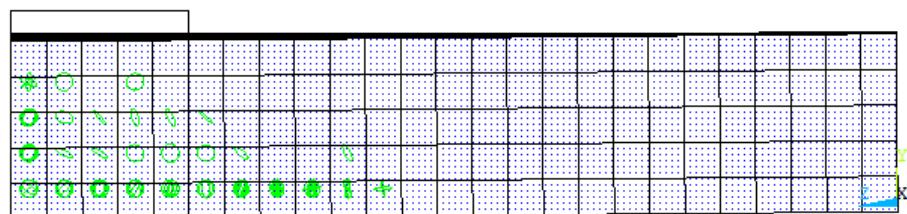
Fonte: Autora (2021).

Figura 148 – Primeira fissura aberta no modelo B10-50



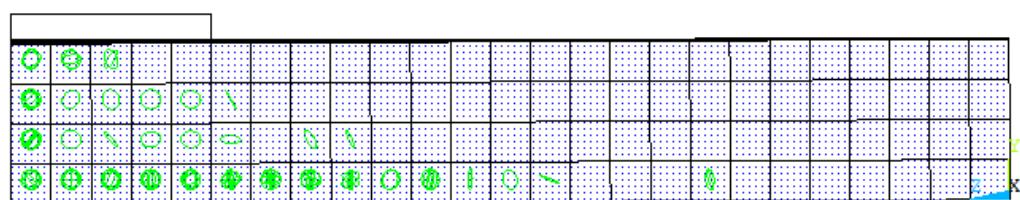
Fonte: Autora (2021).

Figura 149 – Primeira fissura aberta no modelo B10-75



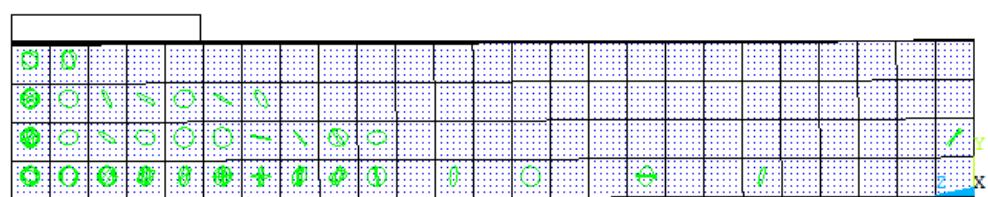
Fonte: Autora (2021).

Figura 150 – Primeira fissura aberta no modelo C8-25



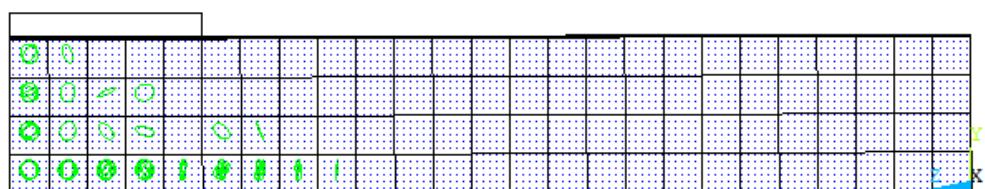
Fonte: Autora (2021).

Figura 151 – Primeira fissura aberta no modelo C8-50



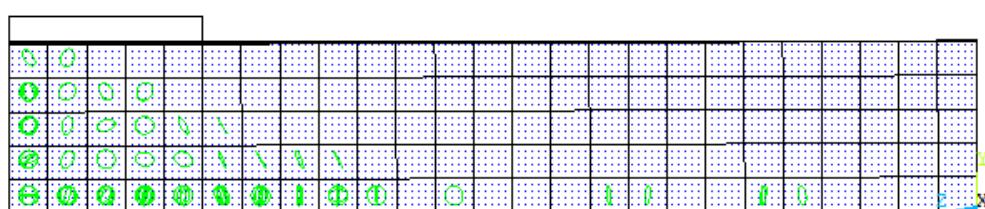
Fonte: Autora (2021).

Figura 152 – Primeira fissura aberta no modelo C8-75



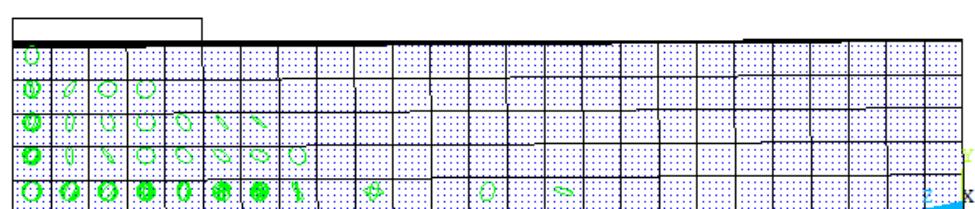
Fonte: Autora (2021).

Figura 153 – Primeira fissura aberta no modelo C9-25



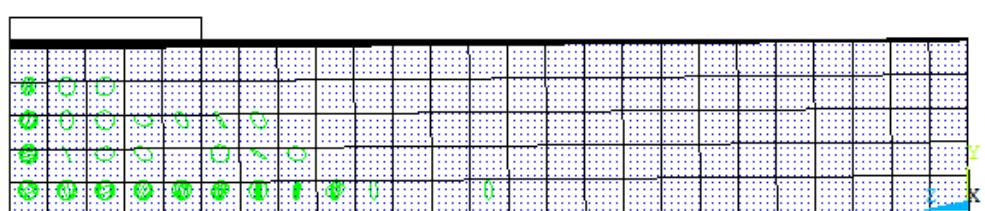
Fonte: Autora (2021).

Figura 154 – Primeira fissura aberta no modelo C9-50



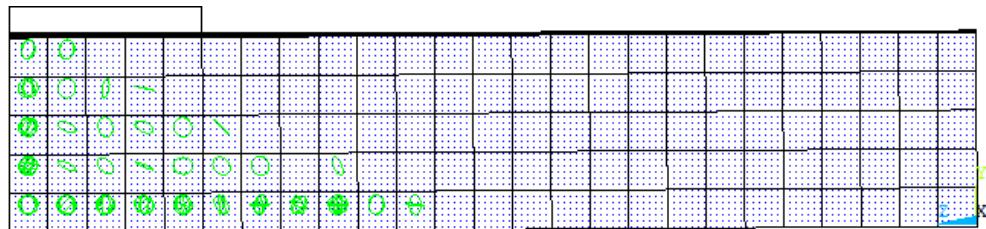
Fonte: Autora (2021).

Figura 155 – Primeira fissura aberta no modelo C9-75



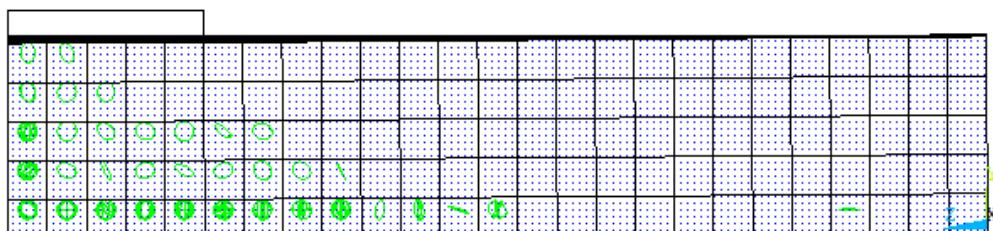
Fonte: Autora (2021).

Figura 156 – Primeira fissura aberta no modelo C10-25



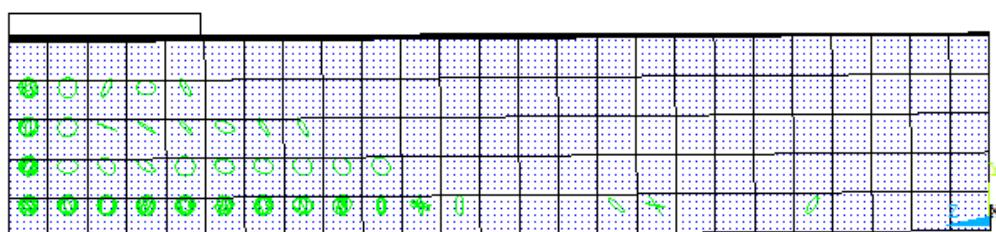
Fonte: Autora (2021).

Figura 157 – Primeira fissura aberta no modelo C10-50



Fonte: Autora (2021).

Figura 158 – Primeira fissura aberta no modelo C10-75

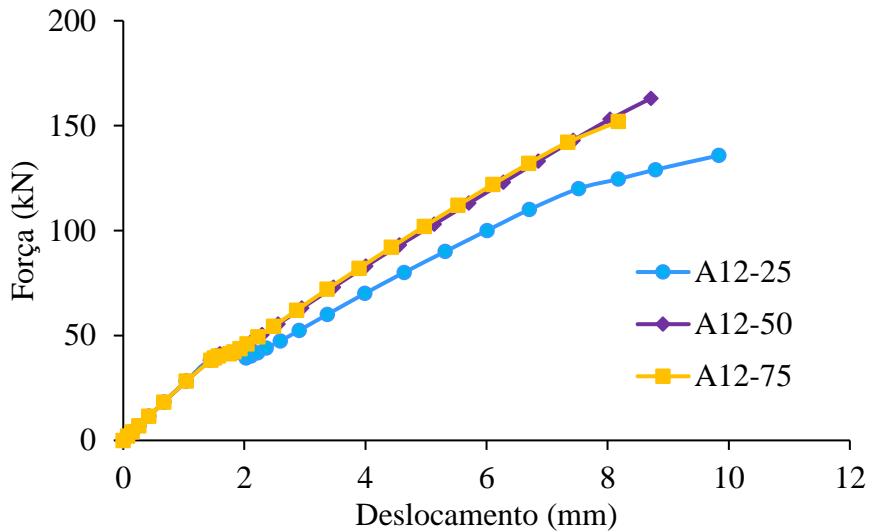


Fonte: Autora (2021).

### 3.6.2.2 Lajes espessas

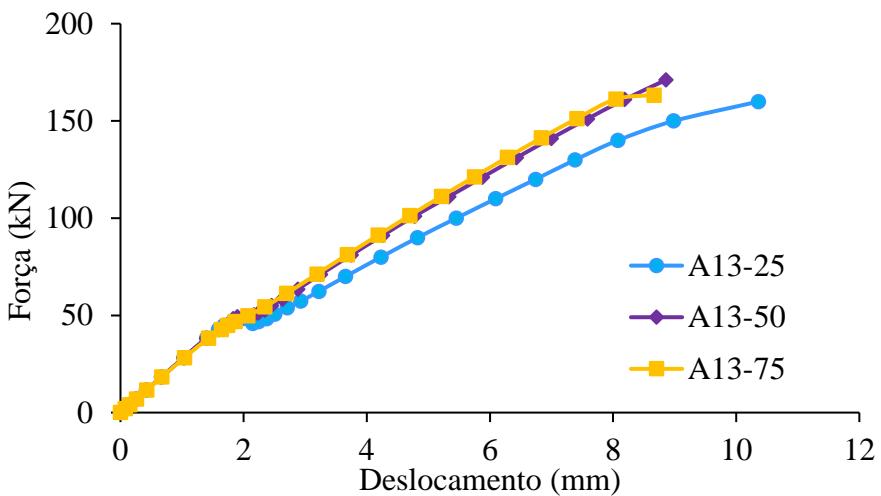
Seguindo a mesma metodologia do Modelo II e considerando a variação dos parâmetros em estudo, foram obtidas curvas de Força x Deslocamento dos modelos numéricos descritas nas figuras abaixo, conforme a nomenclatura descrita na Figura 95.

Figura 159 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 25 MPa, altura de 12 cm e variação da taxa de armadura



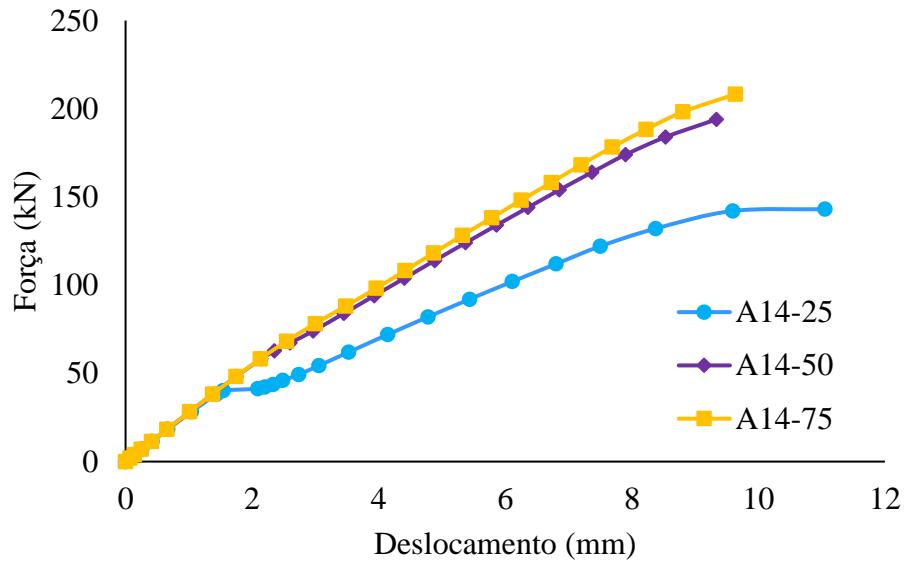
Fonte: Autora (2021).

Figura 160 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 25 MPa, altura de 13 cm e variação da taxa de armadura



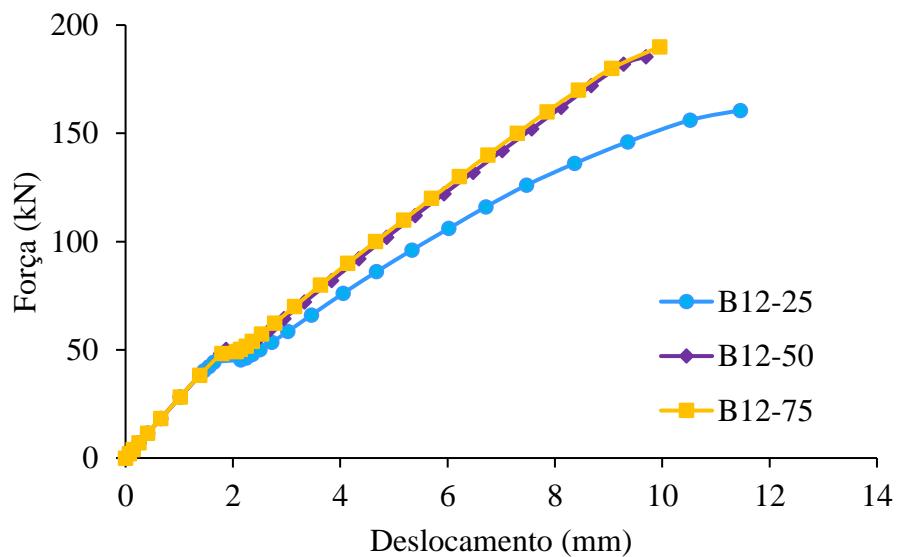
Fonte: Autora (2021).

Figura 161 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 25 MPa, altura de 14 cm e variação da taxa de armadura



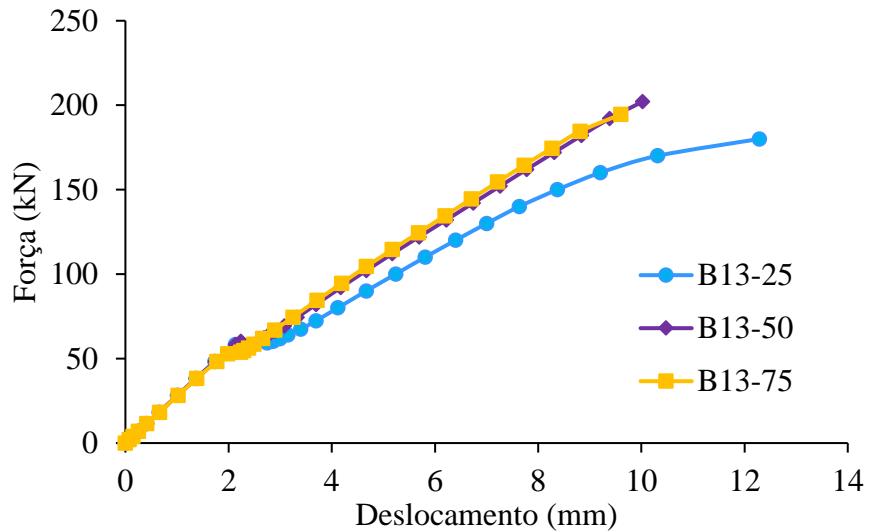
Fonte: Autora (2021).

Figura 162 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 35 MPa, altura de 12 cm e variação da taxa de armadura



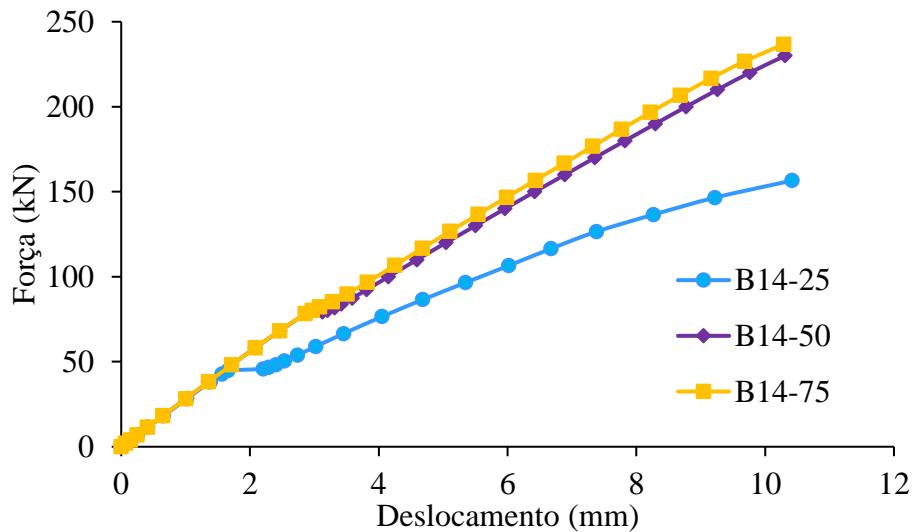
Fonte: Autora (2021).

Figura 163 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 35 MPa, altura de 13 cm e variação da taxa de armadura



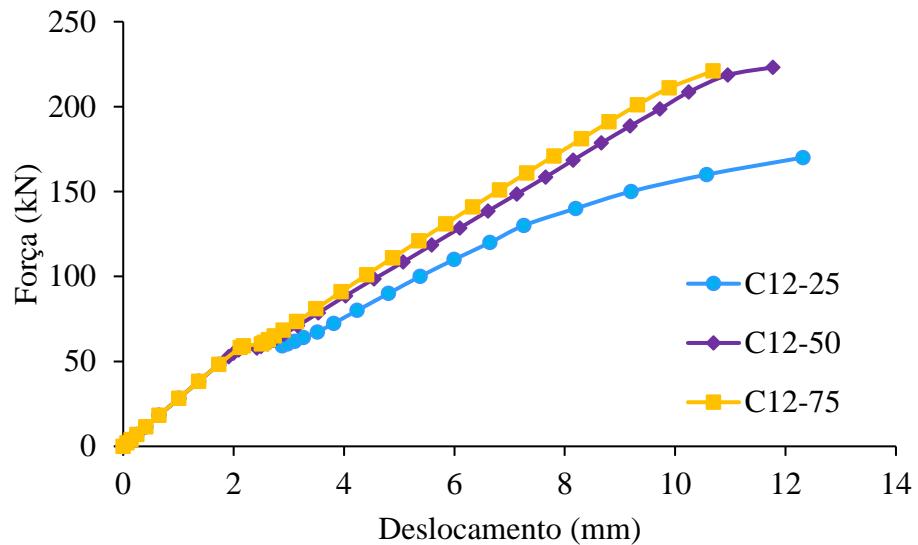
Fonte: Autora (2021).

Figura 164 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 35 MPa, altura de 14 cm e variação da taxa de armadura



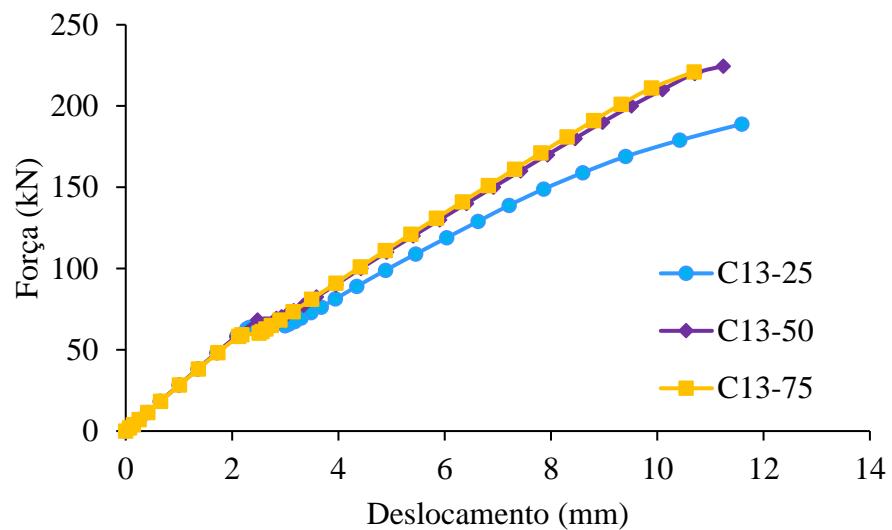
Fonte: Autora (2021).

Figura 165 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 45 MPa, altura de 12 cm e variação da taxa de armadura



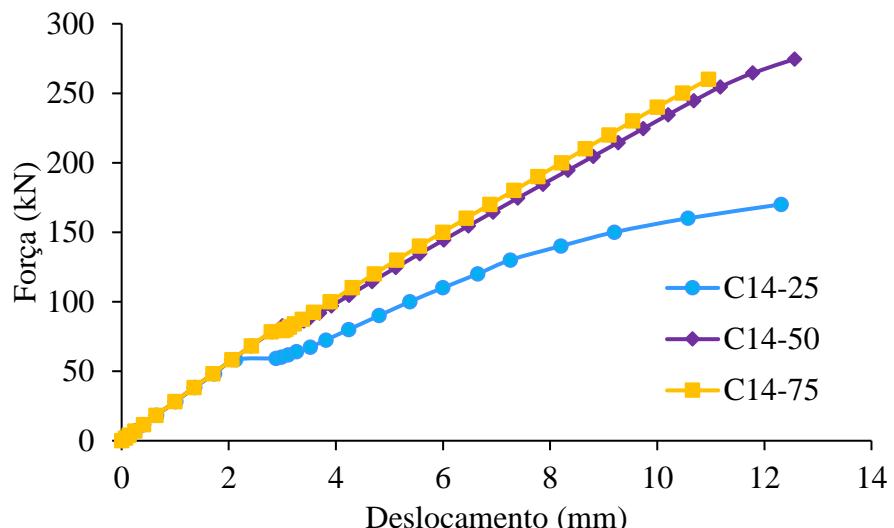
Fonte: Autora (2021).

Figura 166 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 45 MPa, altura de 13 cm e variação da taxa de armadura



Fonte: Autora (2021).

Figura 167 – Curva Força x Deslocamento para  $f_{ck}$  de 45 MPa, altura de 14 cm e variação da taxa de armadura

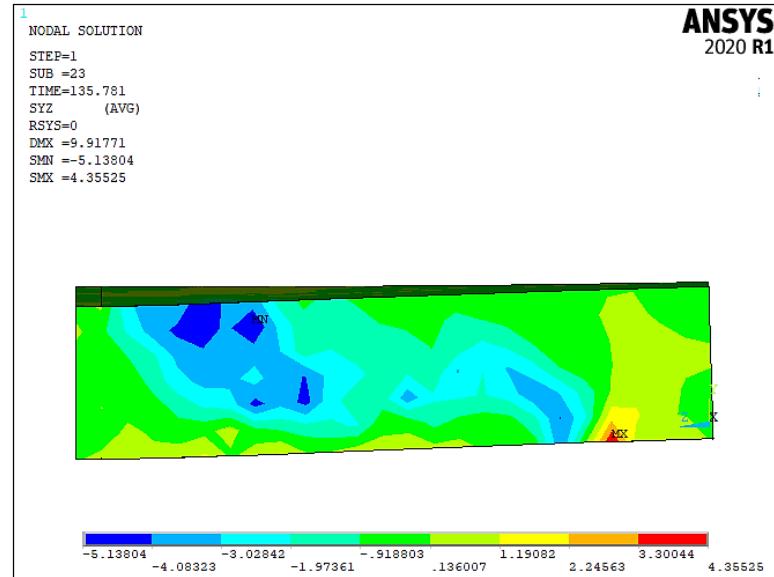


Fonte: Autora (2021).

Observando as Figuras de 159 a 167 verificou-se que até 0,50% a taxa de armadura longitudinal exerce certa influência sobre o aumento da força máxima aplicada. No entanto, quando aplicada a taxa de armadura de 0,75% não há um aumento considerável da força máxima aplicada na laje e o mesmo é verificado para a rigidez da mesma, diferente do ocorrido no grupo de lajes esbeltas. Para maiores avaliações sobre o comportamento, assim como no grupo de lajes esbeltas, será empregada a Análise de Variância (Anova), descrita no Capítulo 4.

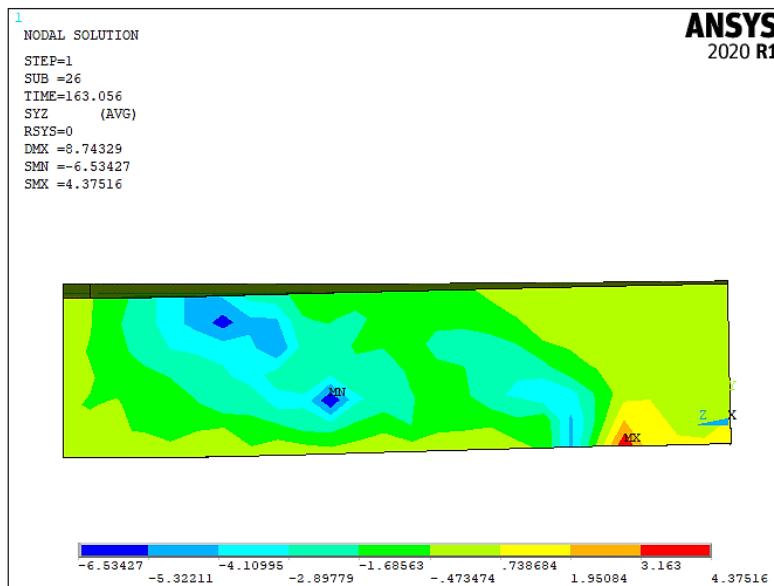
Os fluxos de tensão de cisalhamento dos modelos são apresentados nas Figuras de 168 a 194. Ao observá-las é possível notar que há a formação das bielas de compressão com fluxo direcionado para os apoios, assim como no grupo de lajes esbeltas.

Figura 168 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A12-25 em N/mm<sup>2</sup>



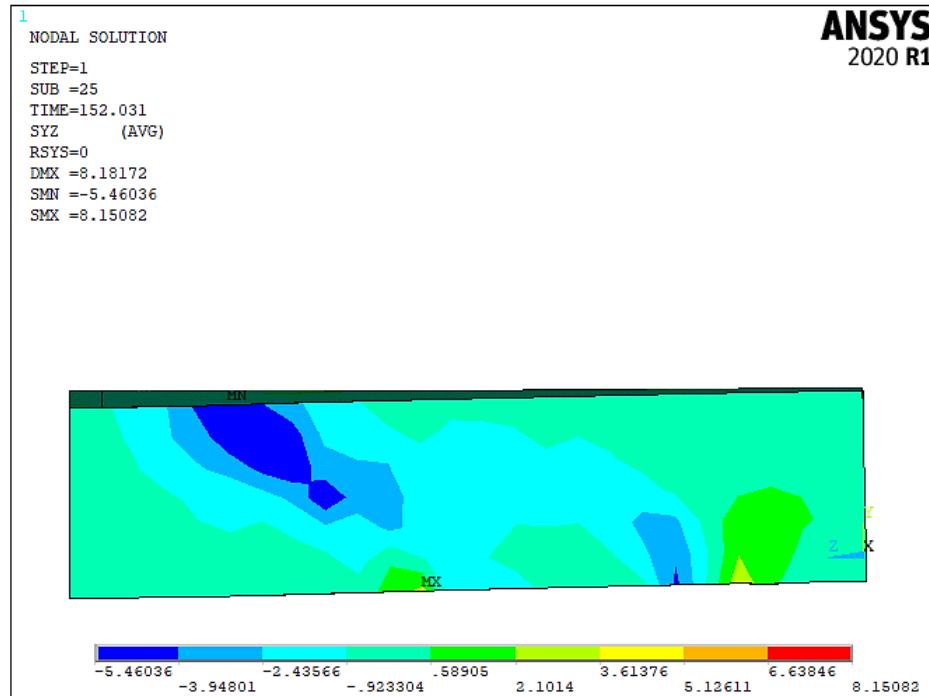
Fonte: Autora (2021).

Figura 169 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A12-50 em N/mm<sup>2</sup>



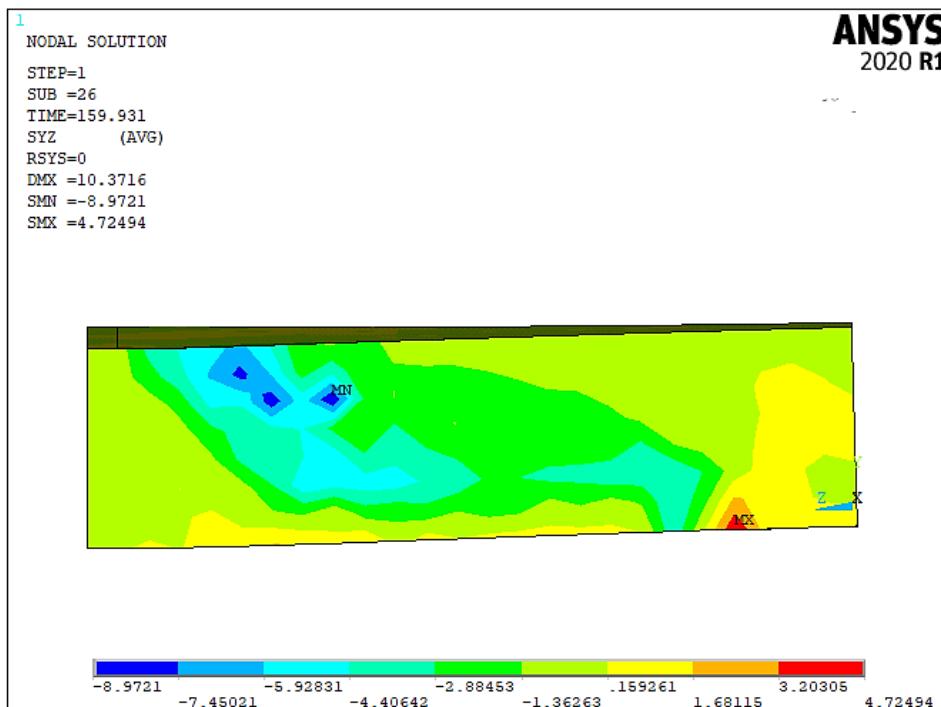
Fonte: Autora (2021).

Figura 170 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A12-75 em N/mm<sup>2</sup>



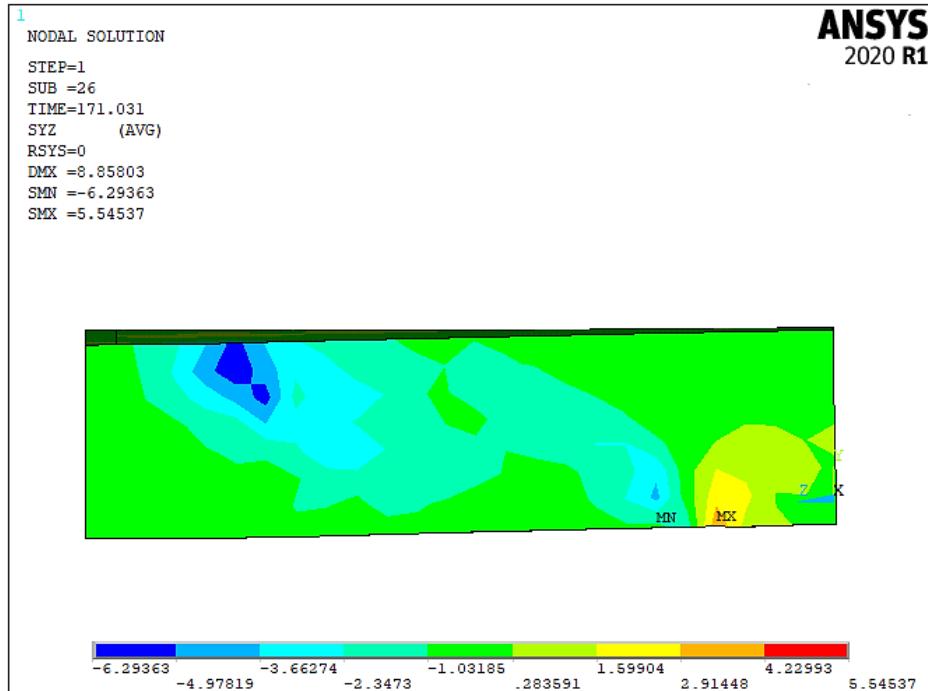
Fonte: Autora (2021).

Figura 171 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A13-25 em N/mm<sup>2</sup>



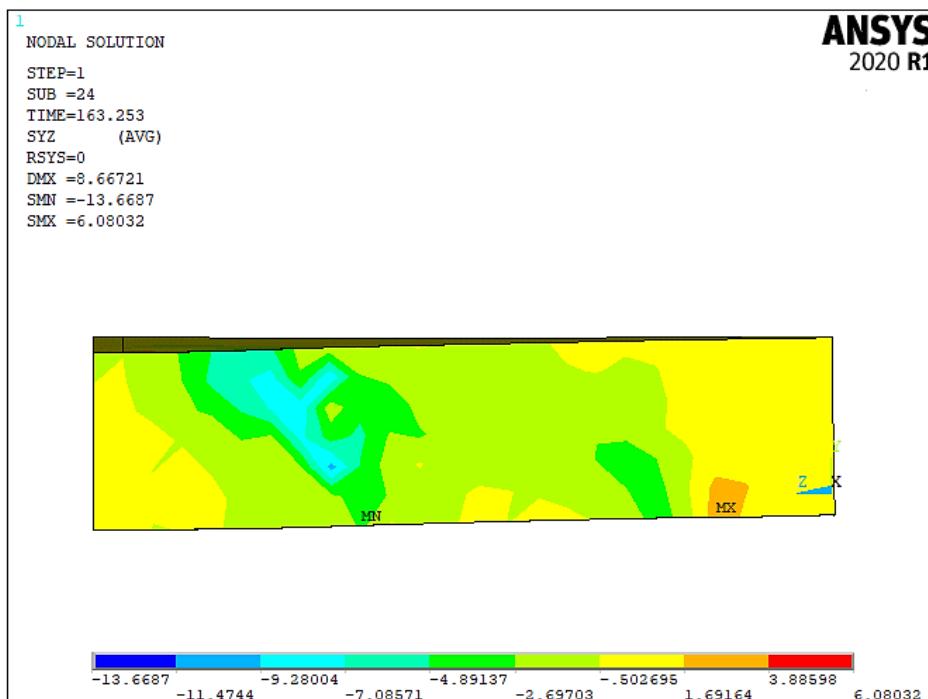
Fonte: Autora (2021).

Figura 172 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A13-50 em N/mm<sup>2</sup>



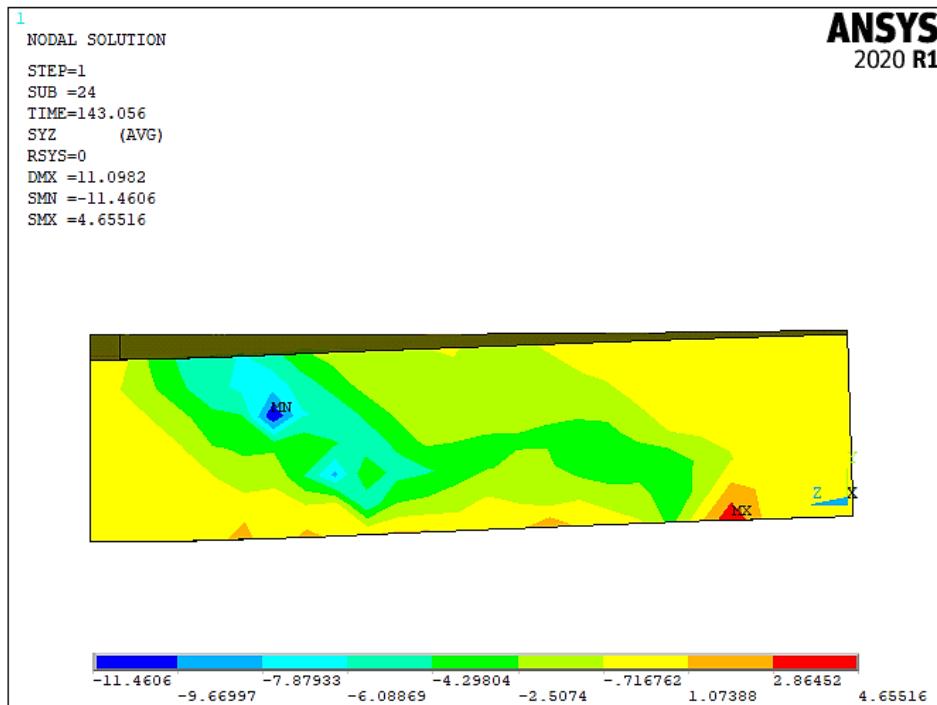
Fonte: Autora (2021).

Figura 173 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A13-75 em N/mm<sup>2</sup>



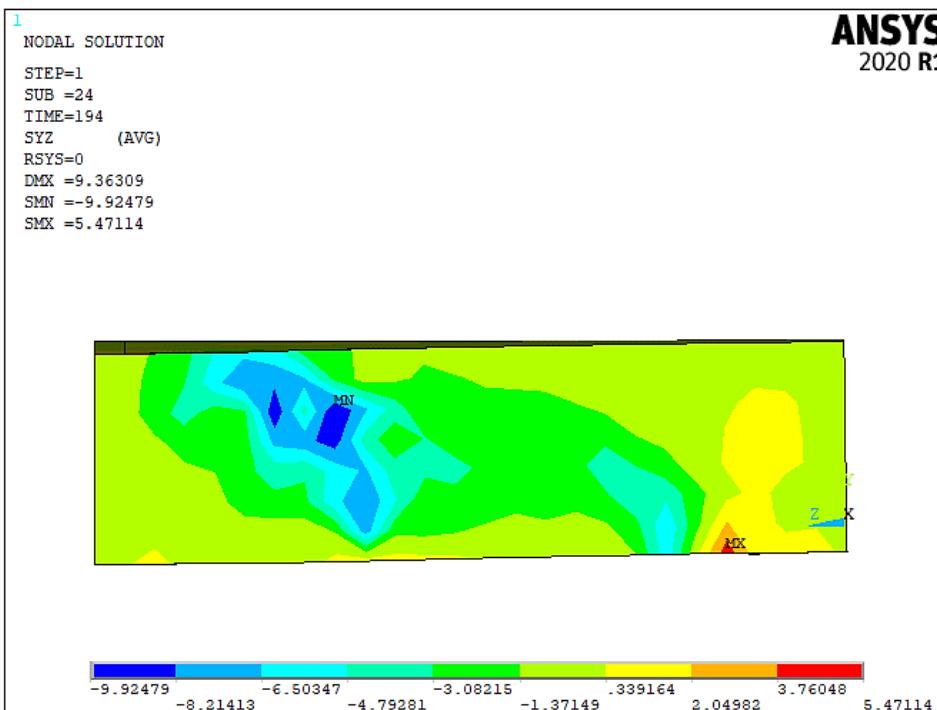
Fonte: Autora (2021).

Figura 174 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A14-25 em N/mm<sup>2</sup>



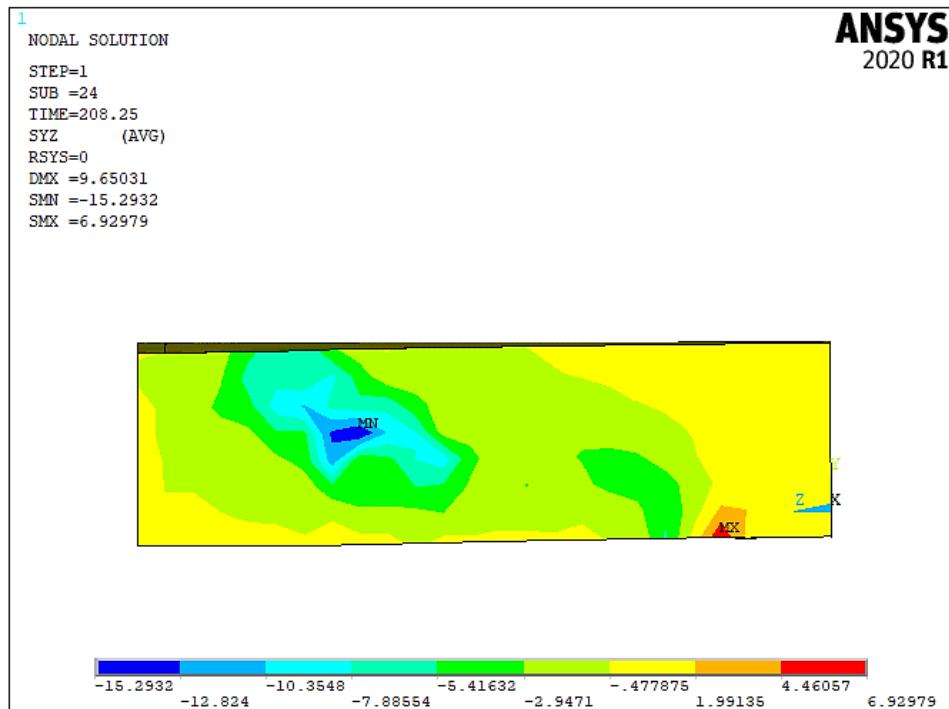
Fonte: Autora (2021).

Figura 175 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A14-50 em N/mm<sup>2</sup>



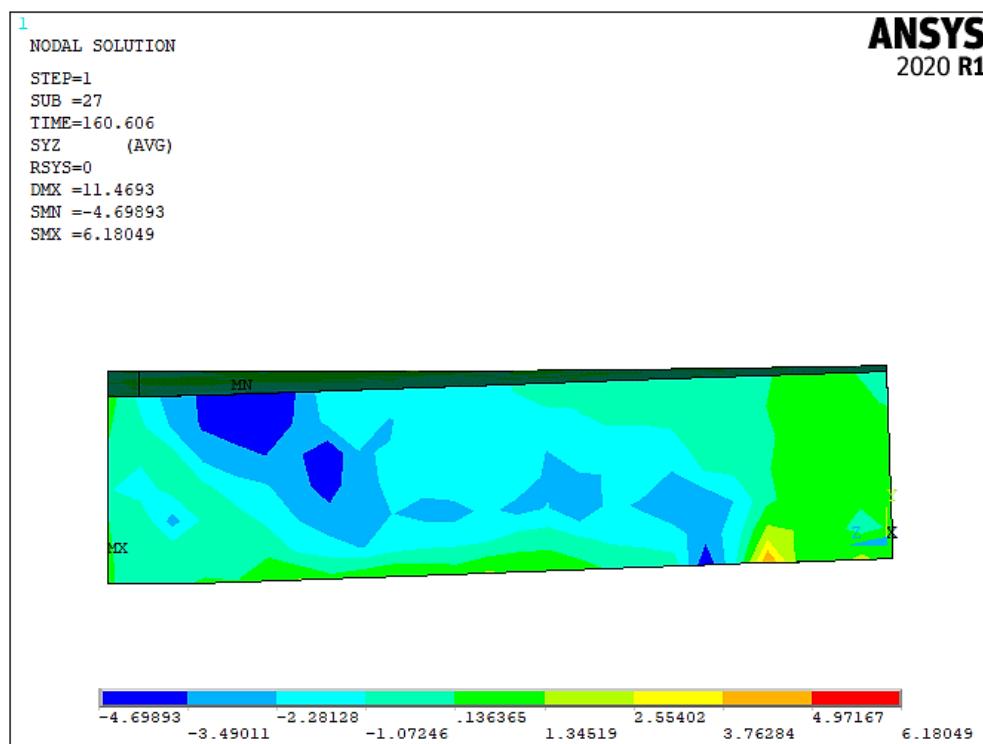
Fonte: Autora (2021).

Figura 176 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo A14-75 em N/mm<sup>2</sup>



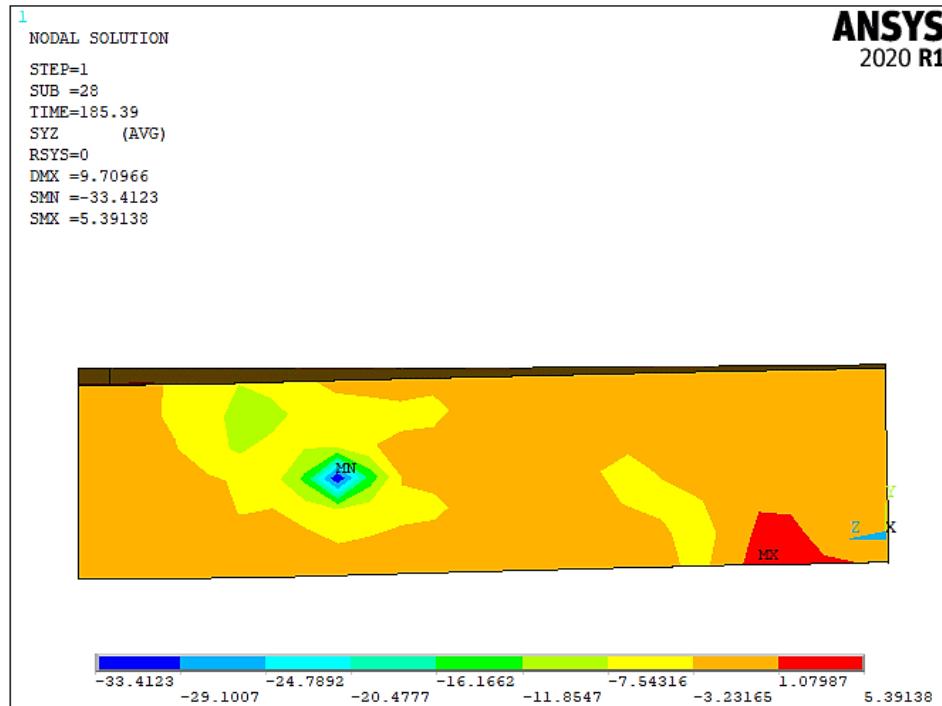
Fonte: Autora (2021).

Figura 177 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B12-25 em N/mm<sup>2</sup>



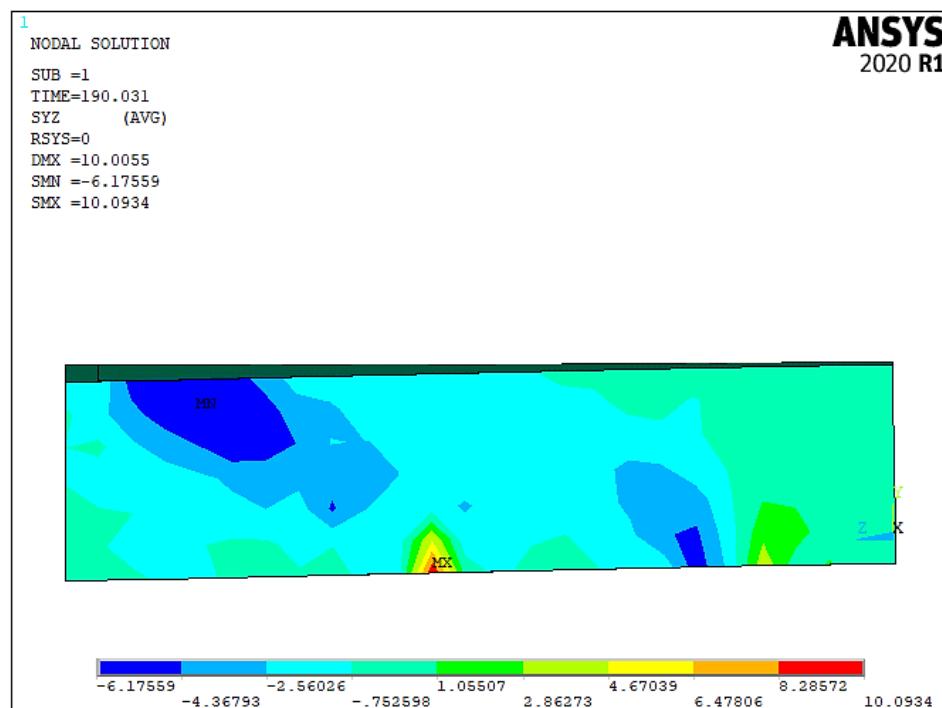
Fonte: Autora (2021).

Figura 178 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B12-50 em N/mm<sup>2</sup>



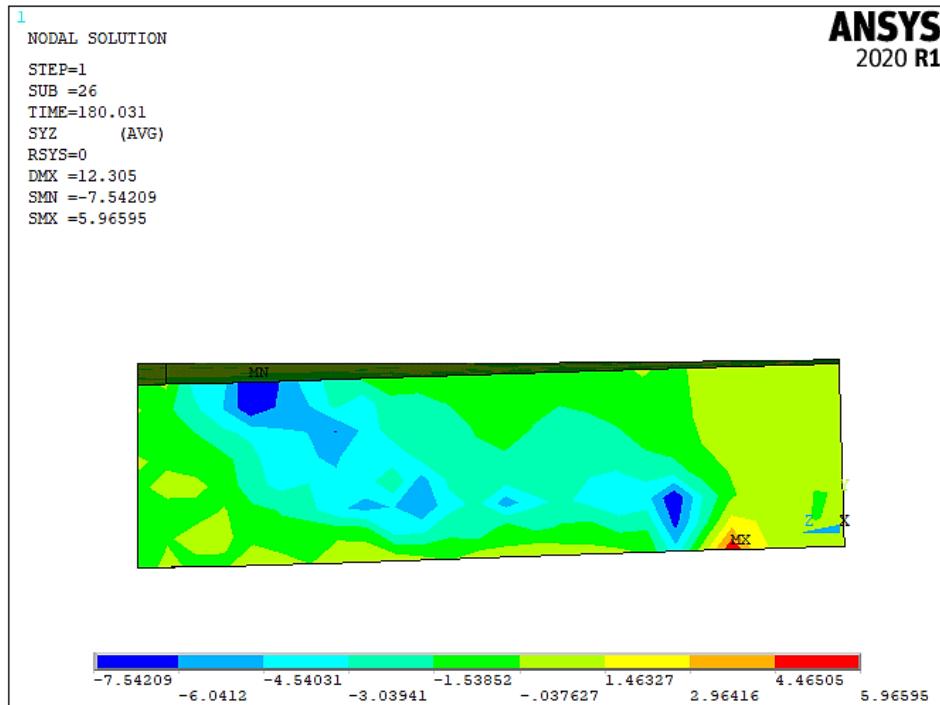
Fonte: Autora (2021).

Figura 179 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B12-75 em N/mm<sup>2</sup>



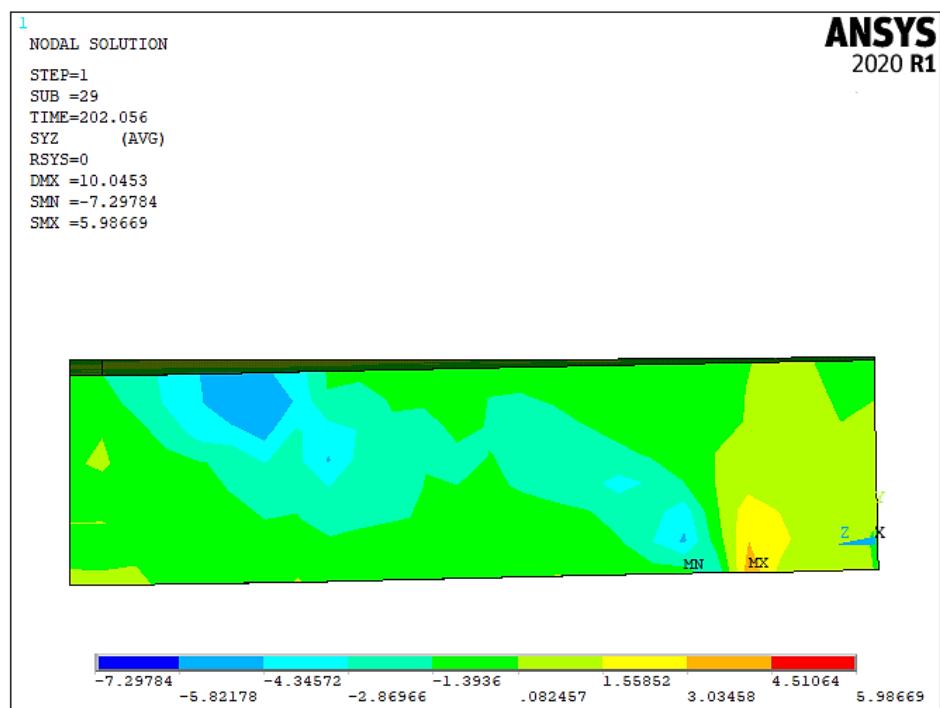
Fonte: Autora (2021).

Figura 180 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B13-25 em N/mm<sup>2</sup>



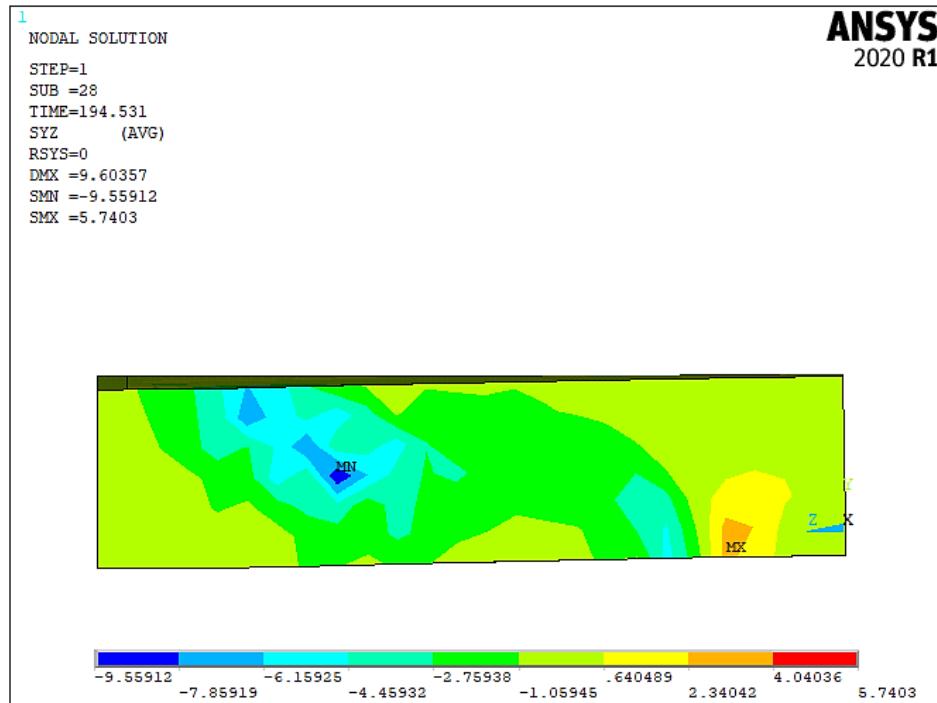
Fonte: Autora (2021).

Figura 181 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B13-50 em N/mm<sup>2</sup>



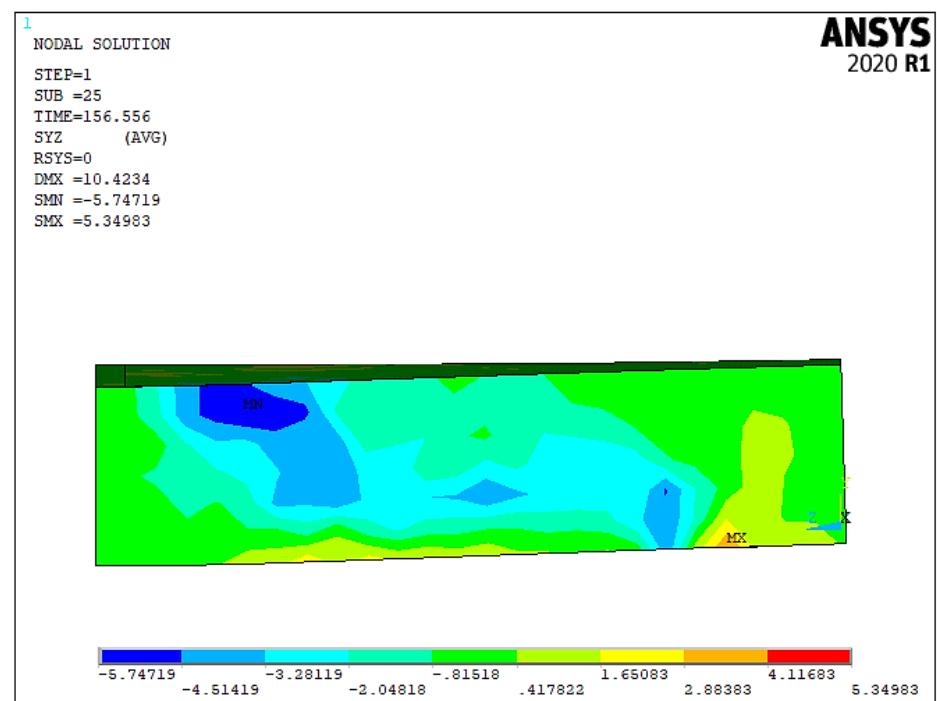
Fonte: Autora (2021).

Figura 182 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B13-75 em N/mm<sup>2</sup>



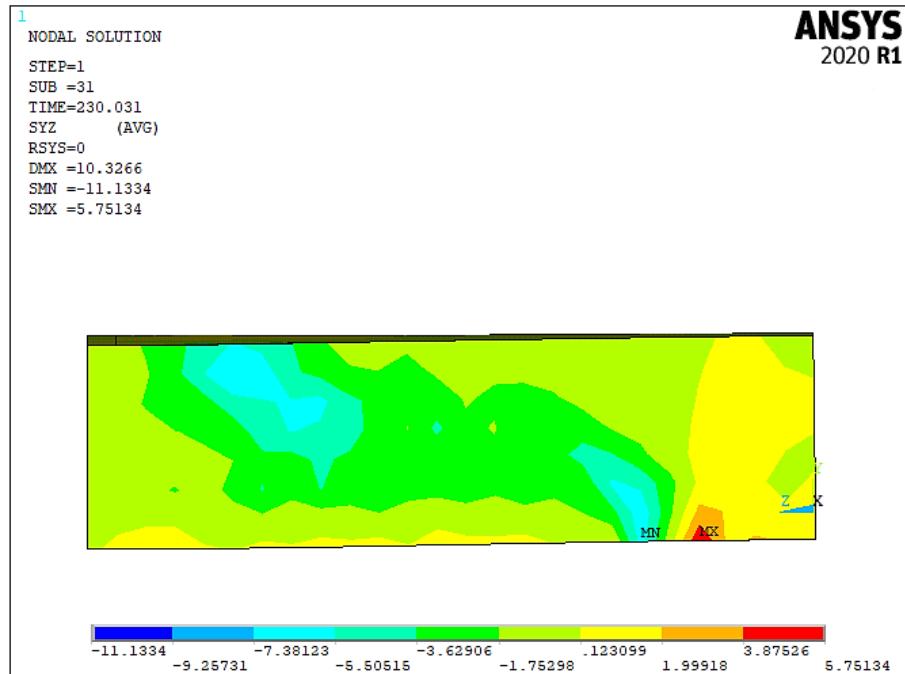
Fonte: Autora (2021).

Figura 183 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B14-25 em N/mm<sup>2</sup>



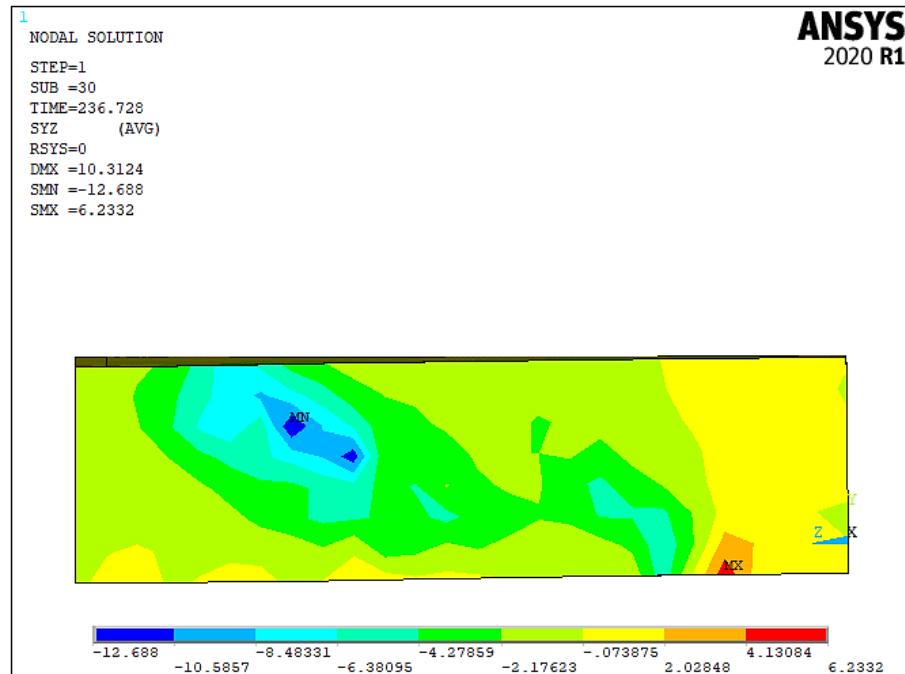
Fonte: Autora (2021).

Figura 184 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B14-50 em N/mm<sup>2</sup>



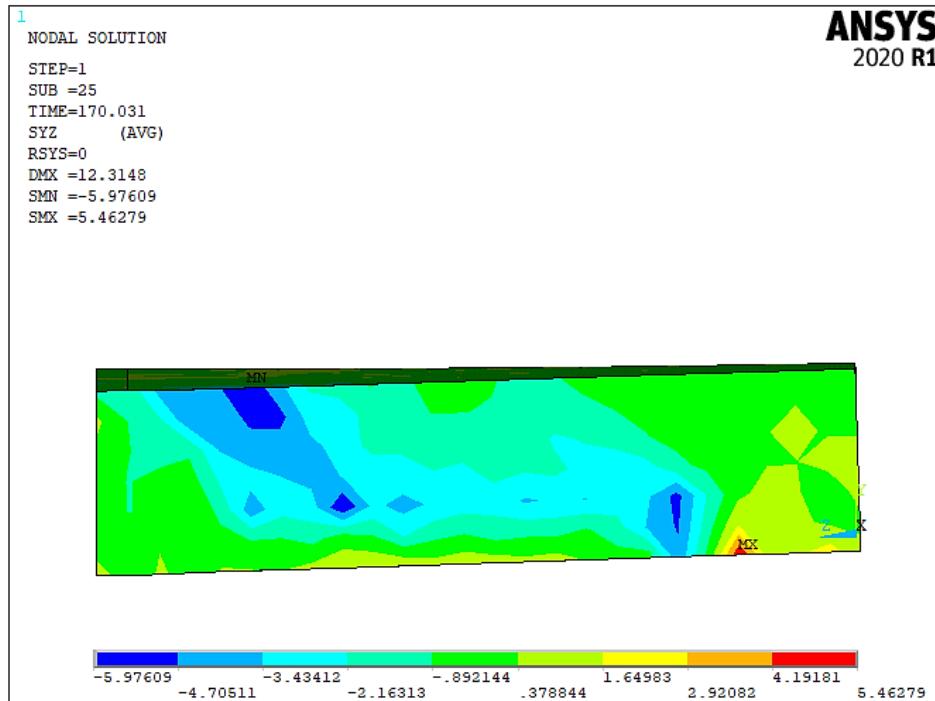
Fonte: Autora (2021).

Figura 185 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo B14-75 em N/mm<sup>2</sup>



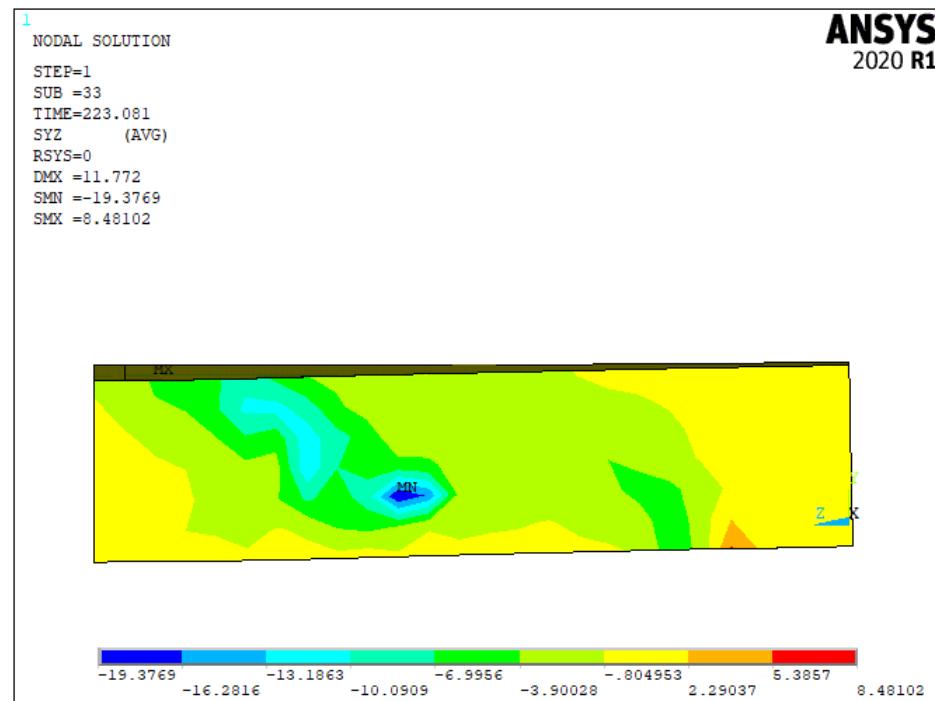
Fonte: Autora (2021).

Figura 186 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C12-25 em N/mm<sup>2</sup>



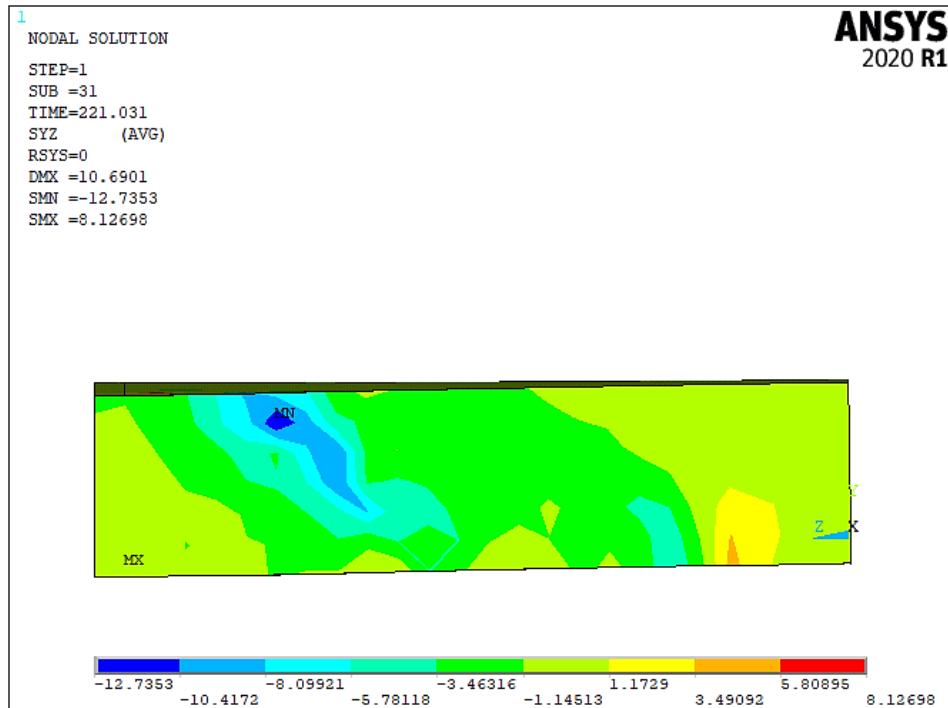
Fonte: Autora (2021).

Figura 187 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C12-50 em N/mm<sup>2</sup>



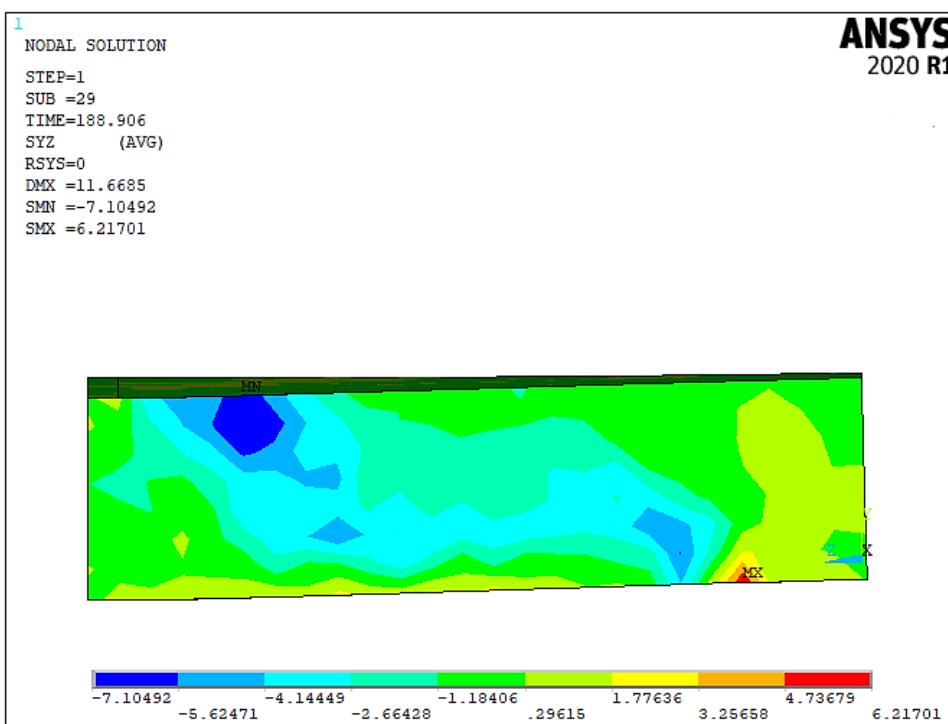
Fonte: Autora (2021).

Figura 188 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C12-75 em N/mm<sup>2</sup>



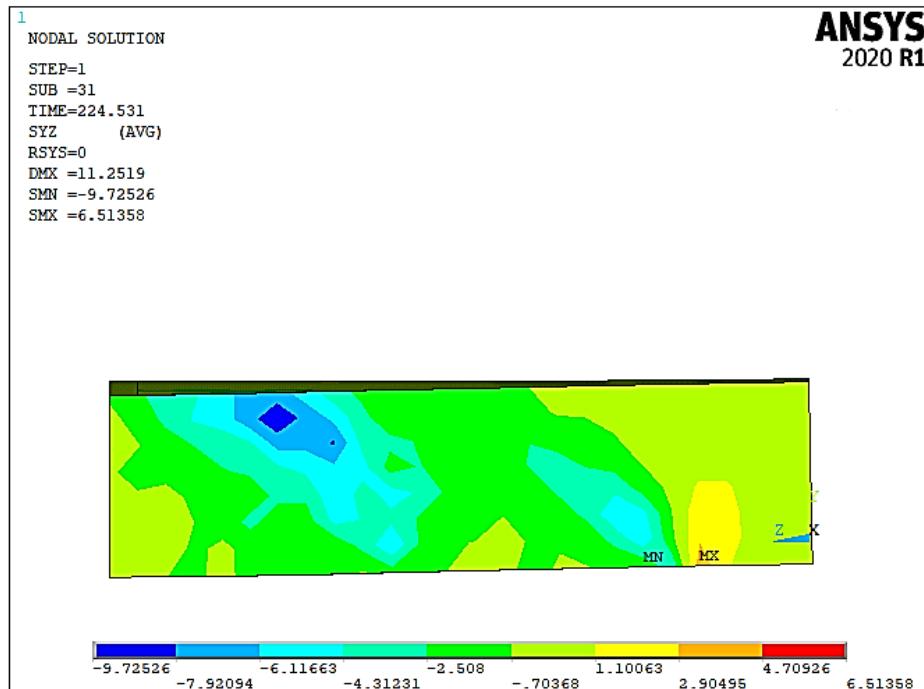
Fonte: Autora (2021).

Figura 189 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C13-25 em N/mm<sup>2</sup>



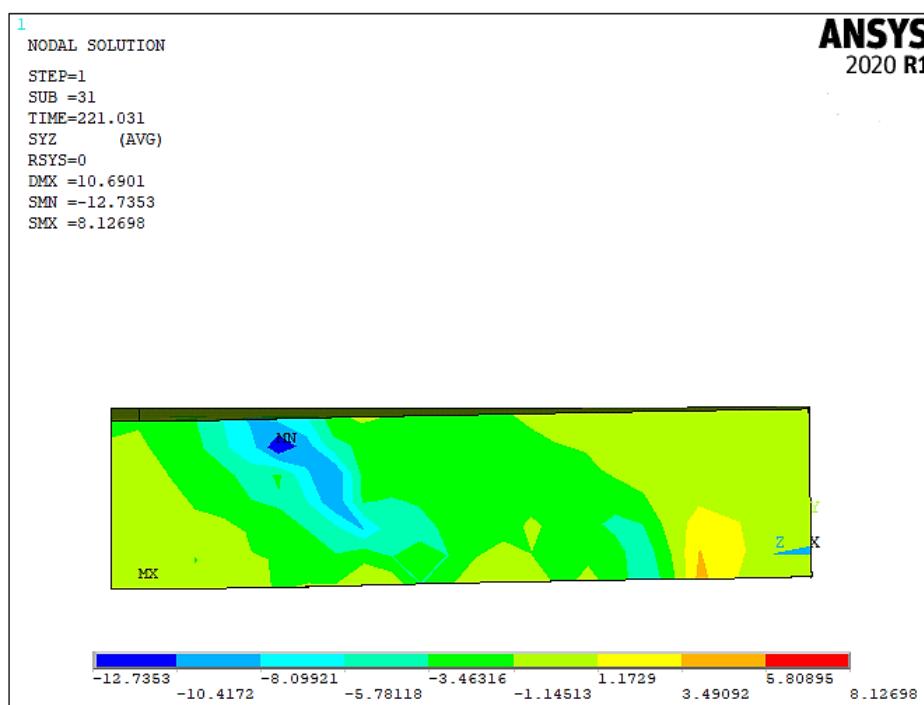
Fonte: Autora (2021).

Figura 190 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C13-50 em N/mm<sup>2</sup>



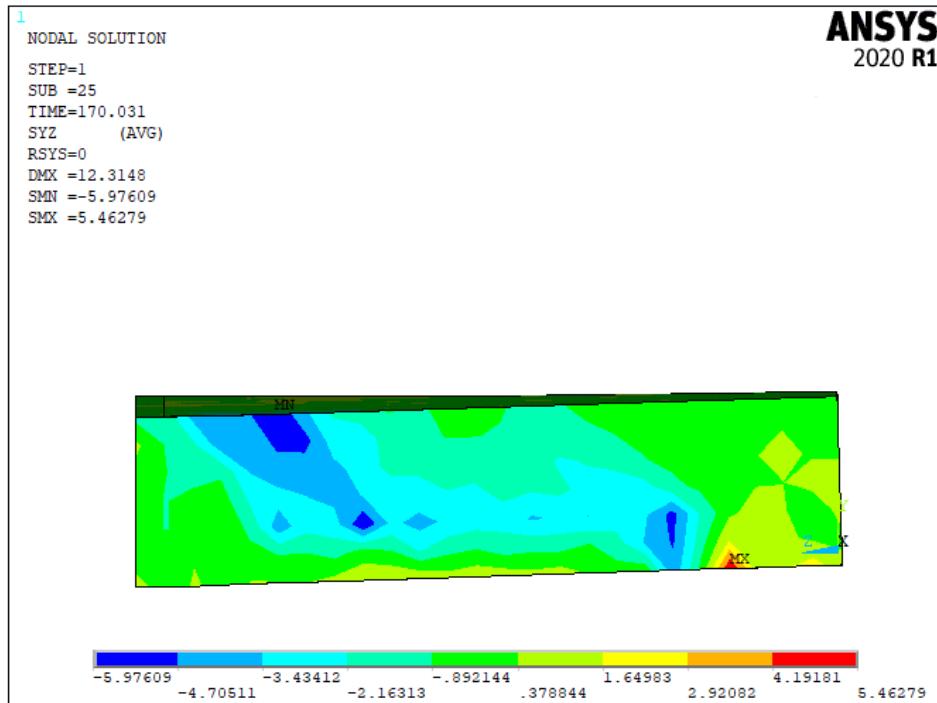
Fonte: Autora (2021).

Figura 191 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C13-75 em N/mm<sup>2</sup>



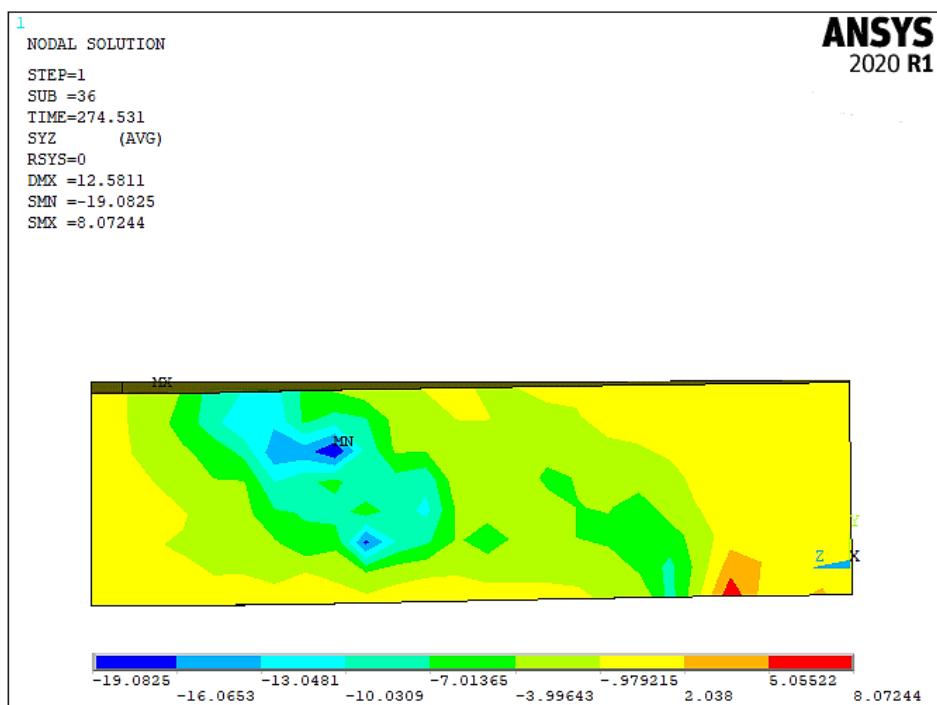
Fonte: Autora (2021).

Figura 192 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C14-25 em N/mm<sup>2</sup>



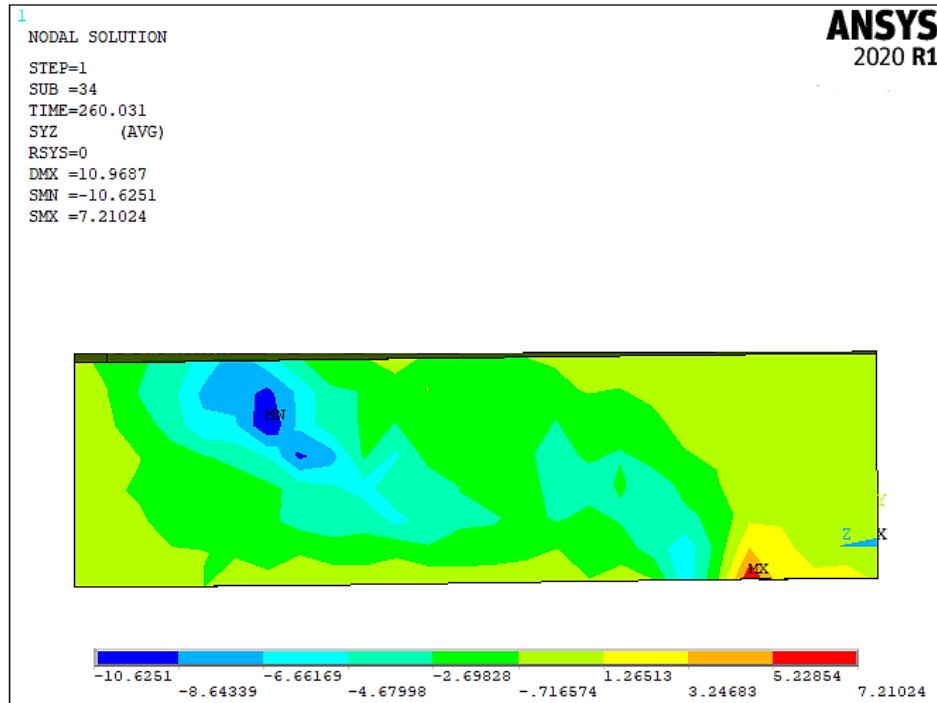
Fonte: Autora (2021).

Figura 193 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C14-50 em N/mm<sup>2</sup>



Fonte: Autora (2021).

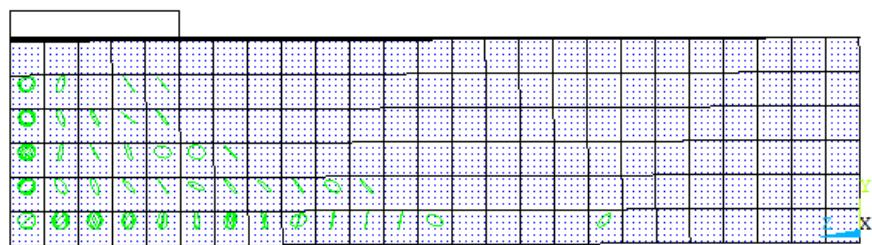
Figura 194 – Fluxo de tensão de cisalhamento do modelo C14-75 em N/mm<sup>2</sup>



Fonte: Autora (2021).

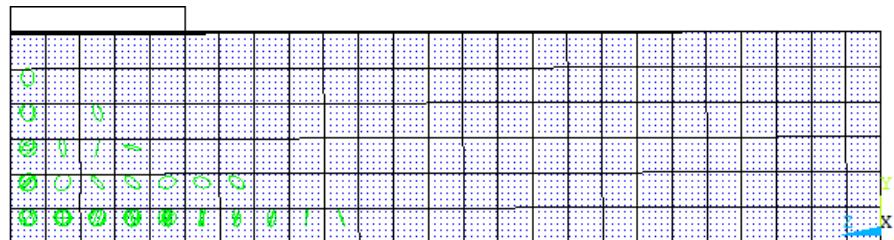
As figuras abaixo ilustram a formação da primeira fissura aberta dos modelos do grupo de lajes espessas. Ao observá-las notou-se a formação da fissura inclinada que se estende até os vértices do pilar se torna mais evidente para uma baixa taxa de armadura longitudinal, como no caso da taxa de 0,25%. Já com o aumento da taxa de armadura para 0,50% e 0,75% a abertura da fissura é predominante na parte inferior das lajes.

Figura 195 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A12-25



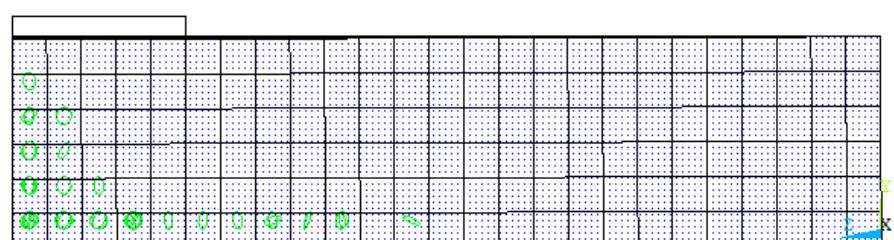
Fonte: Autora (2021).

Figura 196 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A12-50



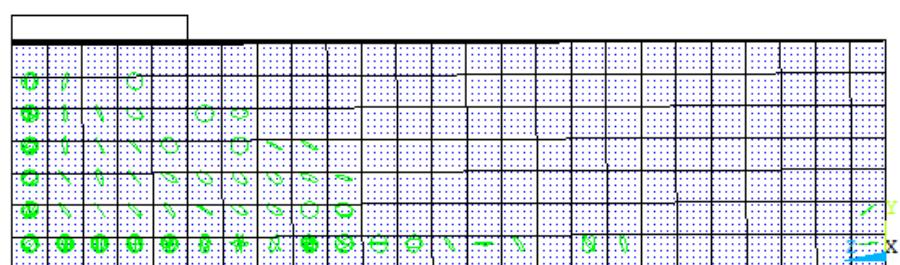
Fonte: Autora (2021).

Figura 197 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A12-75



Fonte: Autora (2021).

Figura 198 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A13-25



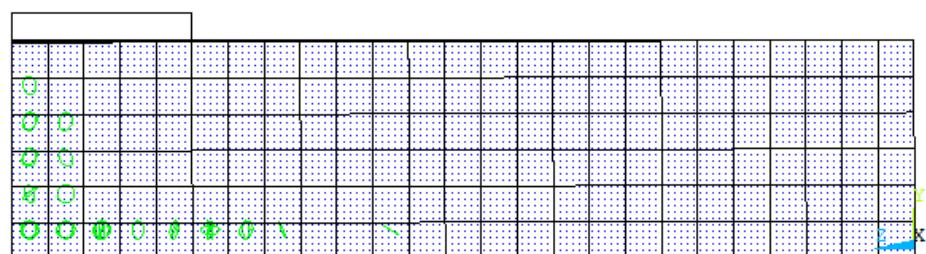
Fonte: Autora (2021).

Figura 199 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A13-50



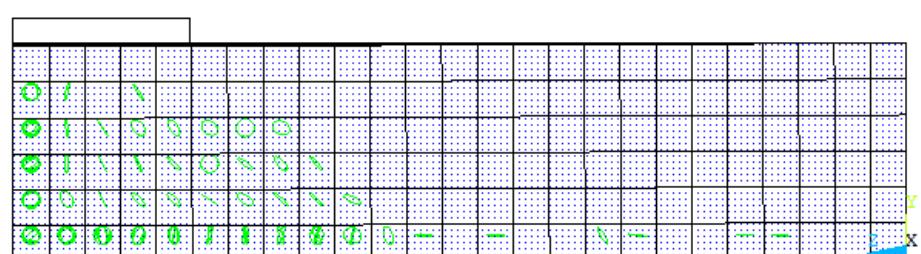
Fonte: Autora (2021).

Figura 200 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A13-75



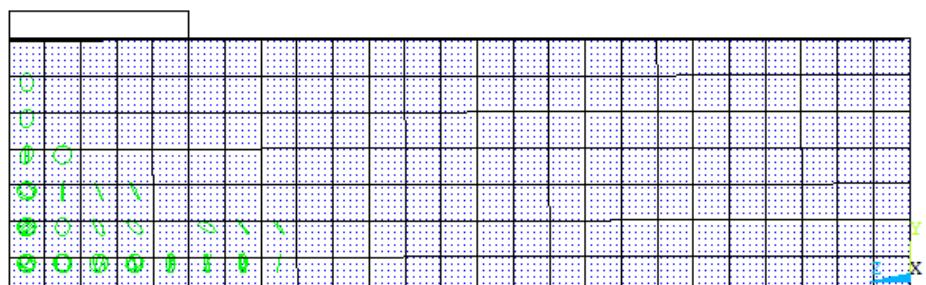
Fonte: Autora (2021).

Figura 201 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A14-25



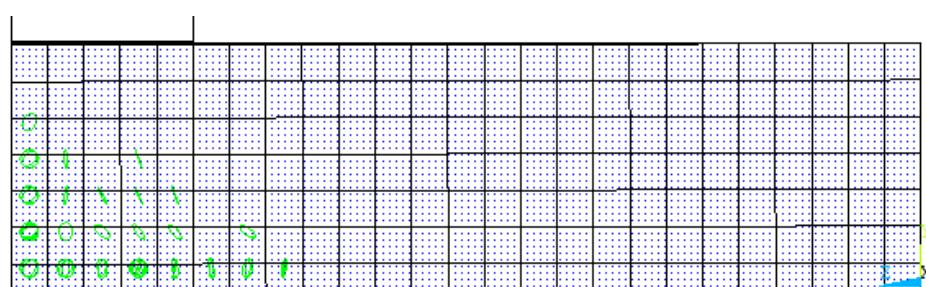
Fonte: Autora (2021).

Figura 202 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A14-50



Fonte: Autora (2021).

Figura 203 – Formação da primeira fissura aberta no modelo A14-75



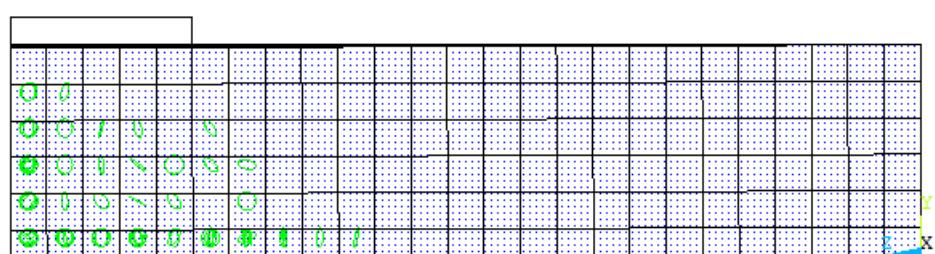
Fonte: Autora (2021).

Figura 204 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B12-25



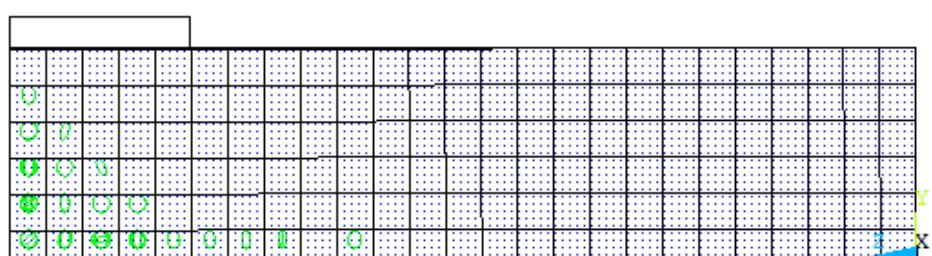
Fonte: Autora (2021).

Figura 205 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B12-50



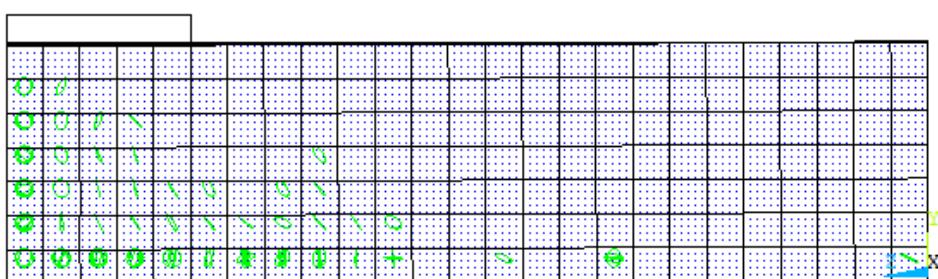
Fonte: Autora (2021).

Figura 206 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B12-75



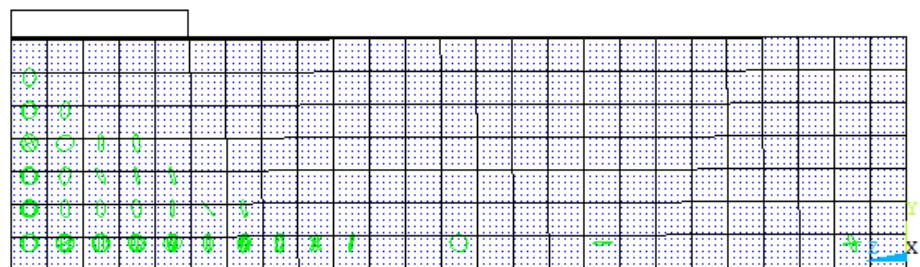
Fonte: Autora (2021).

Figura 207 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B13-25



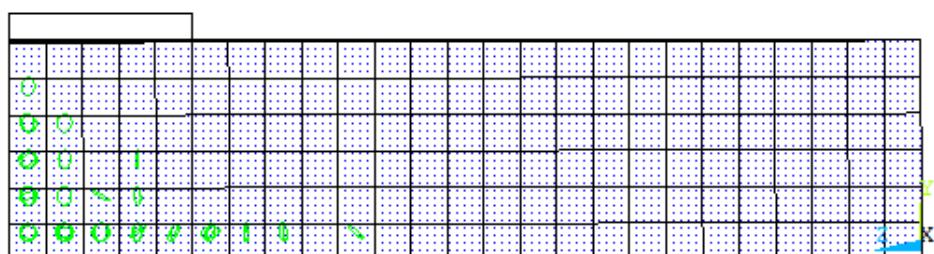
Fonte: Autora (2021).

Figura 208 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B13-50



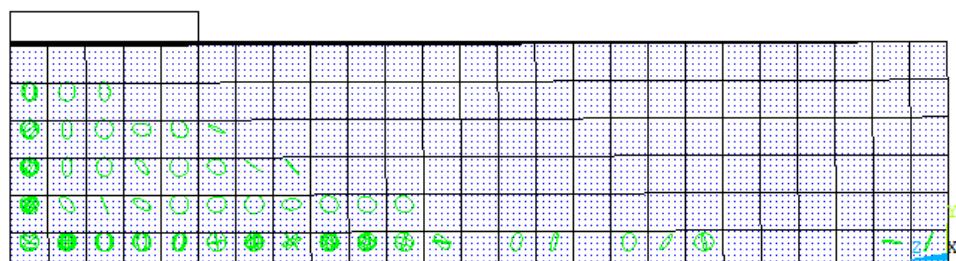
Fonte: Autora (2021).

Figura 209 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B913-75



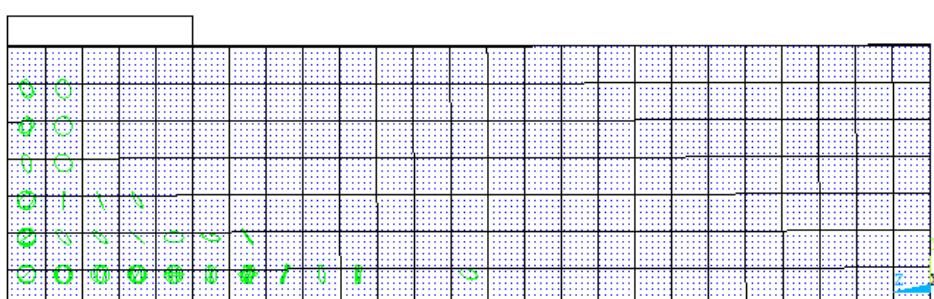
Fonte: Autora (2021).

Figura 210 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B14-25



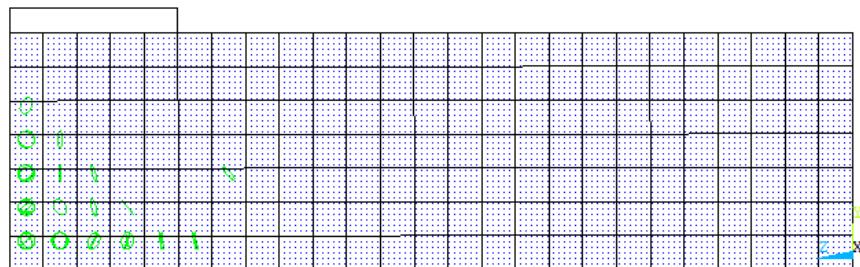
Fonte: Autora (2021).

Figura 211 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B14-50



Fonte: Autora (2021).

Figura 212 – Formação da primeira fissura aberta no modelo B14-75



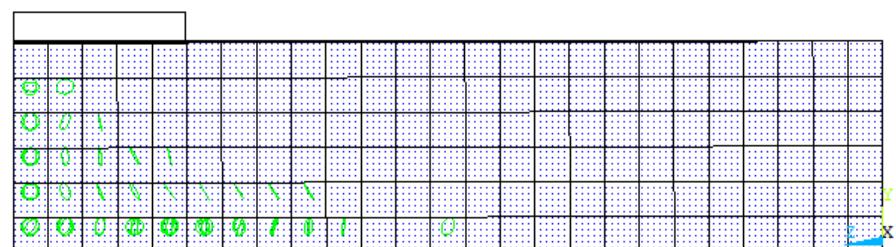
Fonte: Autora (2021).

Figura 213 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C12-25



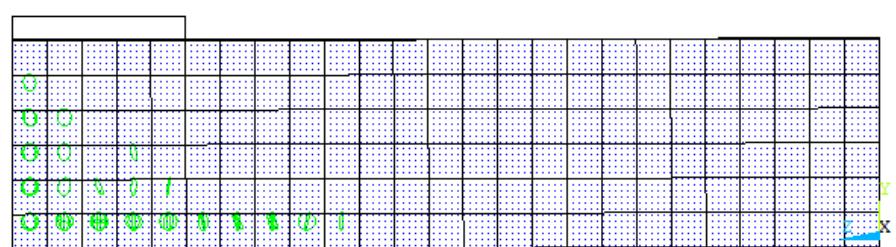
Fonte: Autora (2021).

Figura 214 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C12-50



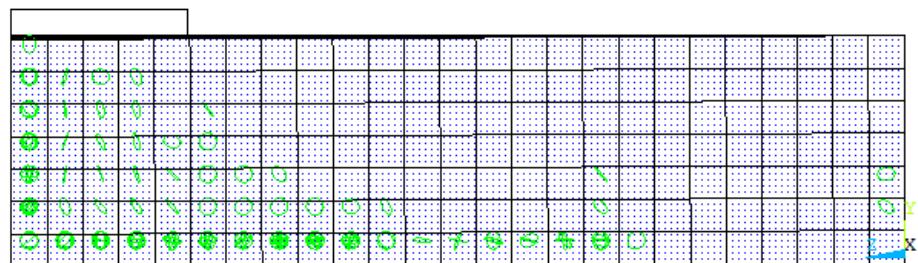
Fonte: Autora (2021).

Figura 215 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C12-75



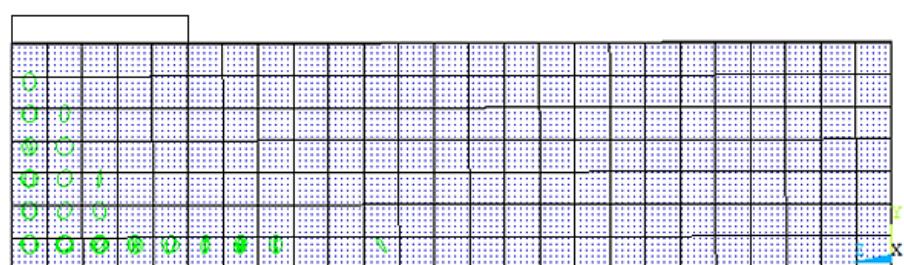
Fonte: Autora (2021).

Figura 216 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C13-25



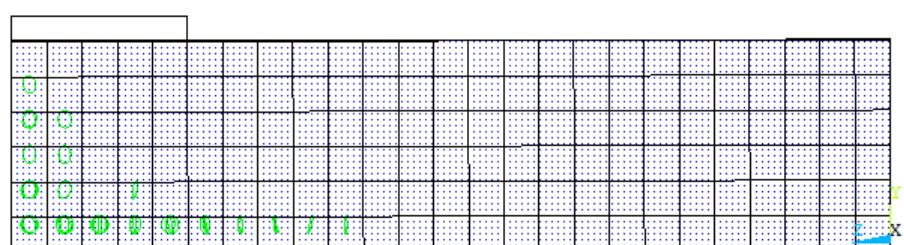
Fonte: Autora (2021).

Figura 217 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C13-50



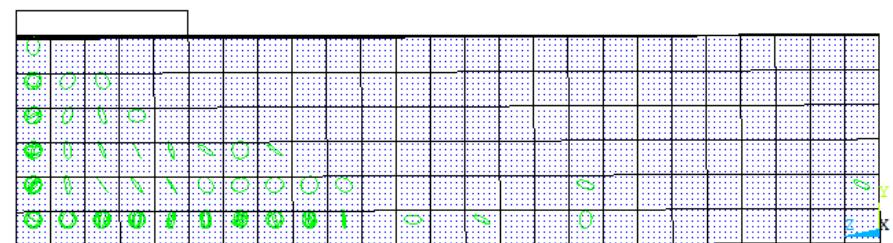
Fonte: Autora (2021).

Figura 218 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C13-75



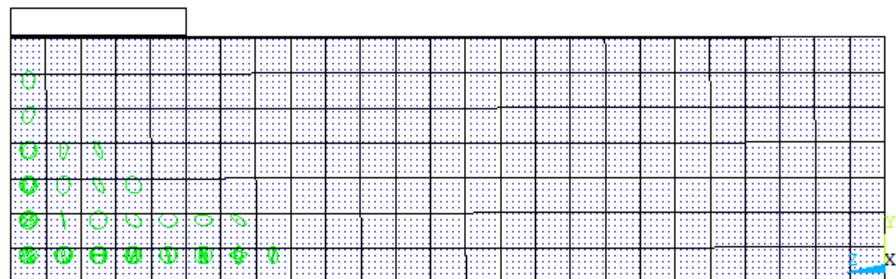
Fonte: Autora (2021).

Figura 219 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C14-25



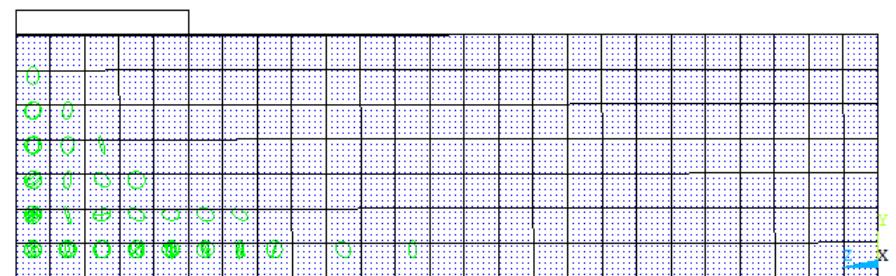
Fonte: Autora (2021).

Figura 220 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C14-50



Fonte: Autora (2021).

Figura 221 – Formação da primeira fissura aberta no modelo C14-75



Fonte: Autora (2021).

## 4 ANÁLISE DE VARIÂNCIA

Neste capítulo foi verificada a relevância dos parâmetros considerados no presente estudo sobre o aumento da resistência ao esforço cortante em lajes de concreto armadas em duas direções. Para isso, foram considerados os resultados de tensão de cisalhamento máxima e mínima obtidos nas simulações numéricas realizadas.

Dessa forma, por meio da análise de variância é possível determinar a significância de um determinado fator através do comparativo entre as médias dos grupos de amostras, além de verificar se há algum fator que exerce certa influência sobre os demais fatores.

Sendo assim, segundo Delalibera (2006), para se determinar a relevância de um fator ou da combinação de vários fatores deve-se aplicar a relação entre a média dos quadrados dos fatores principais ou das combinações consideradas pela média dos quadrados dos erros, essa relação é denominada de  $F_0$ .

O número de graus de liberdade é igual ao número de variações reduzidas em uma unidade. Já o número de graus de liberdade de combinações é igual ao produto dos graus de liberdade dos fatores principais. A Tabela 16 exemplifica essas relações para a aplicação da análise de variância considerando três fatores principais.

Tabela 16 – Equações aplicadas na análise de variância

Fatores	SQ	GL	MQ	$F_0$
A	$SS_A$	$(a - 1)$	$MS_A = SS_A / (a - 1)$	$MS_A / MS_E$
B	$SS_B$	$(b - 1)$	$MS_B = SS_B / (b - 1)$	$MS_B / MS_E$
C	$SS_C$	$(c - 1)$	$MS_B = SS_C / (c - 1)$	$MS_C / MS_E$
A x B	$SS_{AB}$	$(a - 1)(b - 1)$	$MS_{AB} = SS_{AB} / [(a - 1)(b - 1)]$	$MS_{AB} / MS_E$
A x C	$SS_{AC}$	$(a - 1)(c - 1)$	$MS_{AC} = SS_{AC} / [(a - 1)(c - 1)]$	$MS_{AC} / MS_E$
B x C	$SS_{BC}$	$(b - 1)(c - 1)$	$MS_{BC} = SS_{BC} / [(b - 1)(c - 1)]$	$MS_{BC} / MS_E$
A X B X C	$SS_{ABC}$	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$	$MS_{ABC} = SS_{ABC} / [(a-1)(b-1)(c-1)]$	$MS_{ABC} / MS_E$
<b>Erro</b>	$SS_E$	$abc(n - 1)$	$MS_E = SS_E / [abc(n-1)]$	-
<b>Total</b>	$ST$	$abc - 1$	-	-

SQ – soma dos quadrados.

GL – grau de liberdade.

MQ – média dos quadrados.

Fonte: MONTGOMERY; RUNGER (2008).

A soma dos quadrados de cada fator principal pode ser calculada através das Equações 33, 34 e 35.

$$SS_A = \sum_{i=1}^a \frac{y_i^2}{bc} - \frac{y_t^2}{abc} \quad (33)$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^a \frac{y_j^2}{bc} - \frac{y_t^2}{abc} \quad (34)$$

$$SS_C = \sum_{k=1}^c \frac{y_k^2}{ab} - \frac{y_t^2}{abc} \quad (35)$$

Para determinar a soma dos quadrados da combinação dos fatores pode-se aplicar as Equação 36, 37 e 38.

$$SS_{AB} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij}^2}{c} - \frac{y_t^2}{abc} - SS_A - SS_B \quad (36)$$

$$SS_{AC} = \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c \frac{y_{ik}^2}{b} - \frac{y_t^2}{abc} - SS_A - SS_C \quad (37)$$

$$SS_{BC} = \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \frac{y_{jk}^2}{a} - \frac{y_t^2}{abc} - SS_B - SS_C \quad (38)$$

Já a soma dos quadrados total ( $SS_T$ ) e a soma dos quadrados do erro são dadas pelas Equações 39 e 40, respectivamente.

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c y_{ijk}^2 - \frac{y_t^2}{abc} \quad (39)$$

$$SS_E = SS_{ABC} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c y_{ijk}^2 - \frac{y_t^2}{abc} - SS_A - SS_B - SS_C - SS_{AB} - SS_{AC} - SS_{BC} \quad (40)$$

Por fim, para a definição do fator de maior relevância é necessário aplicar o Teste F, sabendo-se o valor crítico tabelado de F de acordo com o nível de confiança definido. Dessa forma, caso o valor de  $F_0$  seja superior ao de  $F_{crítico}$  sugere-se que este fator ou combinação apresenta certa relevância, caso contrário, o fator ou combinação não apresenta significância considerável.

#### 4.1 APLICAÇÃO DA ANÁLISE DE VARIÂNCIA

Os valores de tensão de cisalhamento de máximos e mínimos obtidos nas simulações numéricas, considerando a variação dos parâmetros de altura da laje, resistência à compressão do concreto e taxa de armadura longitudinal, estão dispostos nas Tabelas 17 e 18.

Tabela 17 – Tensões de cisalhamento máximas e mínimas dos modelos do grupo de lajes esbeltas

Modelo	fck (MPa)	Altura (cm)	Taxa de armadura (%)	Tensão de cisalhamento (MPa)	
				Mínima	Máxima
A8-25	25	8	0,25	-4,65620	3,32382
A8-50	25	8	0,50	-7,79643	5,96530
A8-75	25	8	0,75	-11,27720	4,03692
A9-25	25	9	0,25	-1,57067	1,17990
A9-50	25	9	0,50	-14,98340	2,59561
A9-75	25	9	0,75	-14,81220	18,20170
A10-25	25	10	0,25	-5,29797	3,62296
A10-50	25	10	0,50	-6,79632	2,41935
A10-75	25	10	0,75	-7,10404	2,28917
B8-25	35	8	0,25	-5,32577	4,89735
B8-50	35	8	0,50	-6,40609	2,72420
B8-75	35	8	0,75	-7,22222	3,25092
B9-25	35	9	0,25	-5,88731	4,77338
B9-50	35	9	0,50	-6,83384	4,61738
B9-75	35	9	0,75	-7,63168	4,67690
B10-25	35	10	0,25	-6,34500	2,96375
B10-50	35	10	0,50	-10,19880	4,64187
B10-75	35	10	0,75	-9,11784	4,01330
C8-25	45	8	0,25	-10,37330	4,98998
C8-50	45	8	0,50	-8,99800	7,52321
C8-75	45	8	0,75	-12,86500	15,23880
C9-25	45	9	0,25	-27,82610	4,98809
C9-50	45	9	0,50	-9,33551	5,03856
C9-75	45	9	0,75	-6,37213	3,80994
C10-25	45	10	0,25	-6,17780	11,26810
C10-50	45	10	0,50	-19,17550	4,41412
C10-75	45	10	0,75	-9,02041	4,22733

Tabela 18 – Tensões de cisalhamento máximas e mínimas dos modelos do grupo de lajes espessas

Modelo	fck (MPa)	Altura (cm)	Taxa de armadura (%)	Tensão de cisalhamento (MPa)	
				Mínima	Máxima
A12-25	25	12	0,25	-5,13804	4,35525
A12-50	25	12	0,50	-6,53427	4,37516
A12-75	25	12	0,75	-5,46036	8,15082
A13-25	25	13	0,25	-8,97210	4,72494
A13-50	25	13	0,50	-6,29363	5,54537
A13-75	25	13	0,75	-13,66870	6,08032
A14-25	25	14	0,25	-11,46060	4,65516
A14-50	25	14	0,50	-9,92479	5,47114
A14-75	25	14	0,75	-15,29320	6,92979
B12-25	35	12	0,25	-4,69893	6,18049
B12-50	35	12	0,50	-33,41230	5,39138
B12-75	35	12	0,75	-6,17559	10,09340
B13-25	35	13	0,25	-7,54209	5,96595
B13-50	35	13	0,50	-7,29784	5,98669
B13-75	35	13	0,75	-9,55912	5,74030
B14-25	35	14	0,25	-5,74719	5,34983
B14-50	35	14	0,50	-11,13340	5,75134
B14-75	35	14	0,75	-12,68800	6,23320
C12-25	45	12	0,25	-5,97609	5,46279
C12-50	45	12	0,50	-19,37690	8,48102
C12-75	45	12	0,75	-12,73530	8,12698
C13-25	45	13	0,25	-7,10492	6,21701
C13-50	45	13	0,50	-9,72526	6,51358
C13-75	45	13	0,75	-12,73530	8,12698
C14-25	45	14	0,25	-5,97609	5,46279
C14-50	45	14	0,50	-19,08250	8,07244
C14-75	45	14	0,75	-10,62510	7,21024

De posse dos dados contidos nas Tabelas 17 e 18 e empregando a análise de variância, foram obtidos os valores de  $F_0$  de cada fator considerado e suas combinações, além do valor de  $F_{crítico}$  definido através da tabela de Distribuição F de Snedecor levando em conta um nível de confiança de 95% e os graus de liberdade de cada fator ou combinação, ambos descritos nas Tabelas 19, 20, 21 e 22.

Tabela 19 – Resultado da análise de variância das tensões de cisalhamento mínimas do grupo de lajes esbeltas

<b>Fonte</b>	<b>GL</b>	<b>SQ</b>	<b>QM</b>	<b>F<sub>0</sub></b>	<b>F<sub>crítico</sub></b>
fck	2	126,41	63,203	<b>1,61</b>	3,37
Altura	2	25,51	12,753	0,32	3,37
Taxa	2	17,05	8,524	0,22	3,37
fck*Altura	4	32,07	8,017	0,20	2,74
fck*Taxa	4	124,85	31,212	0,79	2,74
Altura*Taxa	4	68,68	17,169	0,44	2,74
<b>Erro</b>	8	314,28	39,285		
<b>Total</b>	26	708,83			

Tabela 20 – Resultado da análise de variância das tensões de cisalhamento máximas do grupo de lajes esbeltas

<b>Fonte</b>	<b>GL</b>	<b>SQ</b>	<b>QM</b>	<b>F<sub>0</sub></b>	<b>F<sub>crítico</sub></b>
fck	2	36,645	18,322	<b>0,87</b>	3,37
Altura	2	9,281	4,640	0,22	3,37
Taxa	2	26,362	13,181	0,62	3,37
fck*Altura	4	56,895	14,224	0,67	2,74
fck*Taxa	4	31,809	7,952	0,38	2,74
Altura*Taxa	4	50,271	12,568	0,60	2,74
<b>Erro</b>	8	168,968	21,121		
<b>Total</b>	26	380,231			

Ao analisar as Tabelas 19 e 20 verificou-se que a resistência à compressão característica do concreto se destaca como fator que, dentre os outros parâmetros, exerce maior influência sobre o aumento da resistência ao esforço cortante nas lajes simuladas, apesar de que o valor de  $F_0$  para esse parâmetro não foi superior ao valor de  $F_{crítico}$ , o que significa ser uma variável que não exerce uma influência relevante para o estudo.

Sendo assim, faz-se necessária a avaliação para a escolha de novas variáveis para verificar o fator que apresenta uma influência com relevância considerável, ou seja, que apresenta valor de  $F_0$  superior a  $F_{crítico}$ .

Por meio das Tabelas 21 e 22, sobre o grupo de lajes espessas, ficou evidenciada a relevância da taxa de armadura longitudinal e da resistência à compressão característica do concreto sobre o aumento da resistência ao cisalhamento, visto que, dentre os demais

parâmetros, estes dois fatores apresentaram valor de  $F_0 > F_{crit}$ . Mas tem-se que a taxa de armadura como parâmetro de maior relevância por apresentar o maior valor de  $F_0$ .

Tabela 21 – Resultado da análise de variância das tensões de cisalhamento mínimas do grupo de lajes espessas

<b>Fonte</b>	<b>GL</b>	<b>SQ</b>	<b>QM</b>	<b><math>F_0</math></b>	<b><math>F_{crítico}</math></b>
fck	2	25,57	12,78	0,57	3,37
Altura	2	23,85	11,92	0,53	3,37
Taxa	2	203,99	101,99	<b>4,55</b>	3,37
fck*Altura	4	124,60	31,15	1,39	2,74
fck*Taxa	4	163,90	40,97	1,83	2,74
Altura*Taxa	4	243,59	60,90	2,72	2,74
<b>Erro</b>	8	179,18	22,40		
<b>Total</b>	26	964,66			

Tabela 22 – Resultado da análise de variância das tensões de cisalhamento máximas do grupo de lajes espessas

<b>Fonte</b>	<b>GL</b>	<b>SQ</b>	<b>QM</b>	<b><math>F_0</math></b>	<b><math>F_{crítico}</math></b>
fck	2	9,961	4,9804	5,79	3,37
Altura	2	2,325	1,1625	1,35	3,37
Taxa	2	18,921	9,4607	<b>11,00</b>	3,37
fck*Altura	4	1,977	0,4942	0,57	2,74
fck*Taxa	4	4,611	1,1527	1,34	2,74
Altura*Taxa	4	6,931	1,7327	2,01	2,74
<b>Erro</b>	8	6,882	0,8602		
<b>Total</b>	26	51,607			

Para mais, é possível observar ainda que, dentre as combinações de fatores, a relação da altura e da taxa de armadura longitudinal exerce influência sobre o ganho de resistência máxima ao esforço cortante, podendo estar relacionado ao aumento da zona de compressão do concreto, sendo um dos mecanismos de transferência de cisalhamento que atuam em lajes de concreto armadas em duas direções sem armadura transversal, contribuindo para o ganho de resistência à força cortante.

## 5 CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por tudo isso, verificou-se a presença de uma diferença de comportamento relacionada à altura das lajes e a taxa de armadura, onde lajes com altura superior a 10 cm e alta taxa de armadura longitudinal têm comportamento mais frágil, enquanto que lajes com altura igual ou inferior a 10 cm e baixa taxa de armadura possuem comportamento dúctil.

Com a validação dos dois métodos elaborados na simulação numérica foi possível verificar que o Modelo II melhor se aplica para a análise feita no presente estudo, por conseguir reproduzir o comportamento das lajes armadas em duas direções submetidas a punção, onde os resultados se aproximaram da curva Força x Deslocamento experimental e o fluxo do fluxo de tensões de cisalhamento apresenta a formação das bielas de compressão, que são características presentes nos ensaios de punção.

Além disso, a validação do modelo F-3 levanta a questão sobre a necessidade da informação sobre a curva do ensaio de tração do aço utilizado na construção da amostra para concretos de alta resistência, onde são atingidos altos valores de resistência e carga máxima, exigindo conhecer a capacidade máxima do aço, visto que a ruptura da amostra pode estar relacionada não ao alcance da resistência máxima do concreto, mas sim à resistência máxima do aço utilizado.

Para mais, a análise estatística feita por meio da análise de variância permitiu verificar que as variáveis escolhidas para avaliar o ganho de resistência à força cortante nas lajes esbeltas não apresentaram grande relevância para o estudo, sendo necessária a escolha de novas variáveis para uma nova verificação e determinação do parâmetro que possuem influência significativa.

Em relação as lajes espessas, na análise de variância foi possível definir a taxa de armadura longitudinal como parâmetro relevante, por possuir valor de  $F_0$  superior a  $F_{crítico}$  definido na pesquisa.

## 6 SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

Sugere-se a realização do mesmo estudo, mas avaliando o comportamento das lajes com taxa de armadura superior a 0,75% para verificar se seu comportamento se assemelha as lajes com taxa inferior, avaliadas neste estudo.

Além disso, é importante o aprofundamento da pesquisa a respeito da determinação de um limite de altura que determina um comportamento mais frágil ou mais dúctil, ou seja, um limite de altura da laje que quando superior a esse valor a laje possuirá um comportamento frágil, enquanto que inferior a esse valor a laje deve apresentar comportamento mais dúctil, devendo estar no intervalo de 10 a 12 cm, de acordo com o presente estudo.

Recomenda-se avaliar se o modo de ruptura ocorrido nas lajes está relacionado à taxa de armadura de flexão ou altura da laje, quando submetidas ao modelo de ensaio descrito nesta pesquisa, visto que no estudo de Huang, Pu e Ding (2018) correlaciona o modo de ruptura e a taxa de armadura longitudinal.

## REFERÊNCIAS

ACI – American Concrete Institute. **ACI 318-19:** Building Code Requirements for Structural Concrete. Michigan: 2011, 628 p.

AFEFY, Hamdy M.; EL-TONY, El-Tony M. Retrofitting of Interior Slab-to-Column Connections for Punching Shear Using Different Techniques. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 33, n. 1, p. 04018088, 2019.

[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)CF.1943-5509.0001246](https://doi.org/10.1061/(ASCE)CF.1943-5509.0001246)

ANSYS MECHANICAL APDL. Versão 20. Ansys Inc., 2020.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118/2014:** Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro: 2014, 256 p.

AURE, Temesgen W.; IOANNIDES, Anastasios M. Fracture analysis of aggregate interlock jointed slabs-on-grade. **Construction and Building Materials:** v. 77, p. 340-348, 2014, 9 f.

<https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2014.12.086>

BASAPPA, U.; RAJAGOPAL, A. Modeling of CFRP strengthened RCC beam using the nonlinear finite element method. **Journal of Structural Engineering**, v. 40, n. 2, p. 169-184, 2013.

BS – British Standard. **BS 8110 – Structural use of concrete – Part 1:** Code of practice for design and construction. 1997, 160 P.

CAVAGNIS, Francesco; RUIZ, Miguel Fernández; MUTTONI, Aurelio. Shear failures in reinforced concrete members without transverse reinforcement: An analysis of the critical shear crack development on the basis of test results. **Engineering Structures:** v. 103, p. 157–173, 2015.

<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.09.015>

CEB-FIP – International Federation For Structural Concrete. **Model Code 2010:** First complete draft. Suíça: 2010, 311 p.

CEB-FIP, CEBFIP. **Model Code 1990 for Concrete Structures**, Comit e Euro-International du Beton and Federation Internationale de la Precontrainte. 1993.

CHOI, Kyoung-Kyu; KIM, Jong-Chan; PARK, Hong-Gun. Shear Strength Model of Concrete Beams Based on Compression Zone Failure Mechanism. **ACI Estructural Journal**, n. 113-S94, v. 113, n. 5, 2016, 26 f.

<https://doi.org/10.14359/51689032>

CORDOVIL, F. A. B. **Lajes de concreto armado - punção.** Santa Catarina: UFSC, 1997. 221 p.

DELALIBERA, Rodrigo Gustavo. **Análise numérica e experimental de blocos de concreto armado sobre duas estacas submetidos à ação de força centrada e excêntrica.** 2006. Tese de Doutorado. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006, São Carlos.

EUROCODE 2 – Comite European de Normalisation. **Design of concrete structures - Part 1-1:** General rules and rules for buildings. 2004, 227 p.

FERNÁNDEZ RUIZ, Miguel; MUTTONI, Aurelio. Applications of the critical shear crack theory to punching of R/C slabs with transverse reinforcement. **ACI Structural Journal**, v. 106, n. ARTICLE, p. 485-494, 2009.

<https://doi.org/10.14359/56614>

FURLAN JÚNIOR, Sydney. **Vigas de concreto com taxas reduzidas de armadura de cisalhamento:** Influência do emprego de CEB-FIPras curtas e de protensão. Tese de Doutorado – Universidade de São Paulo, 386 f, 1995.

FUSCO, Péricles Brasiliense. **Estruturas de concreto: solicitações tangenciais.** São Paulo, Departamento de Engenharia de estruturas e Fundações, Escola Politécnica, USP, 1984.

GUANDALINI, S.; BURDET, O. L.; MUTTONI, A. Punching tests of slabs with low reinforcement ratios. **ACI Structural Journal**, [s. L.], v. 1, n. 106, p.87-85, jun. 2009.

<https://doi.org/10.14359/56287>

HASSAN, Nasr Z. et al. Enhancement of punching shear strength of flat slabs using shear-band reinforcement. **HBRC Journal**, v. 14, n. 3, p. 393-399, 2018.

<https://doi.org/10.1016/j.hbrcj.2017.11.003>

HEGAB, A. **Behavior of RC Flat Slabs with Horizontal and Vertical Shear Reinforcement in Punching.** 2016. Tese de Doutorado. Master thesis, Structural Engineering Department, Faculty of Engineering, Cairo University, Egypt.

HEGGER, Josef et al. Efficiency of various punching shear reinforcement systems for flat slabs. **ACI Structural Journal**, v. 114, n. 3, p. 631, 2017.

<https://doi.org/10.14359/51689434>

HILLERBORG, A. **Analysis of a Single Crack.** Fracture mechanics of concrete. Amsterdam, Netherlands, pp. 223–249, 1983.

HORDIJK, Dirk A. Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete; experiments, modelling and analyses. **Heron**, v. 37, n. 1, 1992.

HUANG, Chuanteng; PU, Shuang; DING, Binbin. An analytical punching shear model of RC slab-column connection based on database. **Journal of Intelligent & Fuzzy Systems**, v. 35, n. 1, p. 469-483, 2018.

<https://doi.org/10.3233/JIFS-169604>

ISMAIL, El-Sayed Ibrahim Mohamed. Non-linear finite element analysis of reinforced concrete flat plates with opening adjacent to column under eccentric punching loads. **HBRC journal**, v. 14, n. 3, p. 438-449, 2018.

<https://doi.org/10.1016/j.hbrcj.2018.01.001>

KANI, G. N. J. Basic facts concerning shear failure. In: **Journal Proceedings**. 1966. p. 675-692.

KIM, Jin-Keun; PARK, Yon-Dong. **Prediction of Shear Strength of Reinforced Concrete Beams without Web Reinforcement.** ACI Materials Journal, 1996, 10 f.

KOTINDA, T. I. **Modelagem numérica de vigas mistas aço-concreto simplesmente apoiadas: ênfase ao estudo da interface laje-viga.** São Carlos, 2006. Tese de Doutorado. Dissertação (mestrado)-Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

LEONHARDT, Fritz; MÖNNIG, Eduard. **Construções de concreto:** princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado. Rio de Janeiro: Interciência, v.1, 2008.

LIBERATI, Elyson AP et al. Nonlinear formulation based on FEM, Mazars damage criterion and Fick's law applied to failure assessment of reinforced concrete structures subjected to chloride ingress and reinforcements corrosion. **Engineering Failure Analysis**, v. 46, p. 247-268, 2014.

<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2014.09.006>

MAEKAWA, Koichi; QURESHI, Juneid. Stress transfer across interfaces in reinforced concrete due to aggregate interlock and dowel action. **Doboku Gakkai Ronbunshu**, v. 1997, n. 557, p. 159-172, 1997.

[https://doi.org/10.2208/jscej.1997.557\\_159](https://doi.org/10.2208/jscej.1997.557_159)

MEISAMI, M. Hasan; MOSTOFINEJAD, Davood; NAKAMURA, Hikaru. Punching shear strengthening of two-way flat slabs using CFRP rods. **Composite Structures**, v. 99, p. 112-122, 2013.

<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.028>

MONTGOMERY, Douglas C.; RUNGER, George C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros.** Rio de Janeiro: LTC, ed. 2, 2008.

OSPINA, Carlos E.; BIRKLE, Gerd; WIDIANTO. Databank of concentric punching shear tests of two-way concrete slabs without shear reinforcement at interior supports. In: **Structures Congress 2012.** 2012. p. 1814-1832.

<https://doi.org/10.1061/9780784412367.160>

OTA, Nadia Suemi Nobre. **O elemento finito T6-3i na análise de placas e dinâmica de cascadas.** 2016. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

PALHARES, Rodolfo de Azevedo. **Análise experimental da punção em lajes lisas de concreto armado com variação da ancoragem da armadura de cisalhamento.** Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília, 2018.

PRAVIA, Zacarias Martin Chamberlain. **Exemplo de um Projeto Completo de um Edifício de Concreto Armado.** São Paulo: 2001, 37 f.

REGAN, P.E Shear combs, reinforcement against punching. **The Structural Engineer**, [s. L.], v. 63, p.76-84, dez. 1985.

SACRAMENTO, P. V. P. et al. Punção em lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento. **Revista IBRACON de estruturas e materiais**, v. 5, n. 5, p. 659-691, 2012.

SAMORA, M. S. **Avaliação dos mecanismos resistentes ao cisalhamento em concreto armado sem armadura transversal.** 140 p. 2015. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia.

SILVA, Victor Miranda de Amorim. **Análise estática e dinâmica de cascas cilíndricas axissimétricas pelo método dos elementos finitos.** 2018. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

SOUZA, AMD; DEBS, MK EL. Análise de resistência à força cortante em lajes sem armadura transversal sob cargas parcialmente distribuídas segundo a ABNT NBR 6118: 2014. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 12, n. 3, p. 658-693, 2019.

SOUZA, W.M.; CAETANO, T.R.G.; FERREIRA, M.P.; OLIVEIRA, D.R.C. Resistência ao cisalhamento de lajes nervuradas unidirecionais de concreto armado. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, v. 7, n. 4, p.648-684, ago. 2014.

<https://doi.org/10.1590/S1983-41952014000400007>

TAPAJÓS, Luamim Sales. **Cisalhamento em elementos de concreto armado com estribos desconectados.** Tese de Mestrado – Universidade Federal do Pará, 2017, 118 f.

TORABIAN, Ala et al. Behavior of thin lightly reinforced flat slabs under concentric loading. **Engineering Structures**, v. 196, p. 109327, 2019.

<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109327>

WALRAVEN, J.C. **Aggregate Interlock:** The theoretical and experimental analysis. Tese de PhD – Delft University of Technology, Holanda, 1980.

WIGHT, James K.; MACGREGOR, James G. **Reinforced concrete:** mechanics and design. New Jersey, ed. 6, 2009.

WILLAM, K. J.; WARNKE, E. D. Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete. **Proceedings, International Association for Bridge and Structural Engineering.** Vol. 19. ISMES. Bergamo, Italy. p. 174. 1975.

XIA, J.; XIAO, Y.; MACKIE, K. R.; AL-RAMAHEE, M.; MIRMIRAN, A. Dowel action and shear strength contribution of high strength rebar embedded in ultra-high performance fiber reinforced concrete. **Engineering Structures**, v.83, 2015, p. 223–232.

<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.11.004>

XIAO, Jianzhuang et al. Punching shear behavior of recycled aggregate concrete slabs with and without steel fibres. **Frontiers of Structural and Civil Engineering**, v. 13, n. 3, p. 725-740, 2019.

<https://doi.org/10.1007/s11709-018-0510-6>

YANG, Yuguang; DEN UIJL, Joop; WALRAVEN, Joost. Critical shear displacement theory: on the way to extending the scope of shear design and assessment for members without shear reinforcement. **Structural Concrete**, v. 17, n. 5, p. 790-798, 2016.

<https://doi.org/10.1002/suco.201500135>

ZARRINPOUR, M.R.; CHAO, Shin-Ho. Shear Strength Enhancement Mechanisms of Steel fiber-Reinforced Concrete Slender Beams. **ACI Structural Journal**, v. 114, 2017, p. 729-742, 15 f.

<https://doi.org/10.14359/51689449>

ZOHREVAND, Pedram *et al.* Punching shear enhancement of flat slabs with partial use of ultrahigh-performance concrete. **Journal of Materials in Civil Engineering**, v. 27, n. 9, p. 04014255, 2015.

[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)MT.1943-5533.0001219](https://doi.org/10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0001219)