

ODAIR AMÉRICO COELHO JUNIOR

# Alguns teoremas sobre Polinômios



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
2021

ODAIR AMÉRICO COELHO JUNIOR

# Alguns teoremas sobre Polinômios

**Dissertação** apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, para obtenção do grau de **MESTRE**.

**Área de Concentração:** Matemática.

**Linha de Pesquisa:** Geometria.

**Orientador:** Prof. Dr. Luis Renato Gonçalves Dias.

UBERLÂNDIA - MG  
2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C672 2021	<p>Coelho Júnior, Odair Américo, 1984- Alguns teoremas sobre Polinômios [recurso eletrônico] / Odair Américo Coelho Júnior. - 2021.</p> <p>Orientador: Luis Renato Gonçalves Dias. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática. Modo de acesso: Internet. Disponível em: <a href="http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.613">http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.613</a> Inclui bibliografia.</p> <p>1. Matemática. I. Dias, Luis Renato Gonçalves ,1982-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós- graduação em Matemática. III. Título.</p> <p>CDU: 51</p>
--------------	--

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado  
 Profissional em Rede Nacional  
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
 Telefone: (34) 3230-9452 - www.famat.ufu.br - profmat@famat.ufu.br



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 5, PROFMAT				
Data:	dez de dezembro de dois mil e vinte e um	Hora de início:	10:00	Hora de encerramento:	12:00
Matrícula do Discente:	11912PFT016				
Nome do Discente:	Odair Américo Coelho Júnior				
Título do Trabalho:	Alguns resultados sobre polinômios				
Área de concentração:	Geometria e Topologia				
Linha de pesquisa:	Geometria				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há.				

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Google Meet a Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), assim composta pelos professores doutores: Nilva Rodrigues Ribeiro - UFV; Ana Paula Tremura Galves - FAMAT/UFU e Luis Renato Gonçalves Dias - FAMAT/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Luis Renato Gonçalves Dias, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato agradeceu os presentes. Posteriormente, concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor presidente concedeu a palavra aos examinadores que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.





Documento assinado eletronicamente por **Luis Renato Gonçalves Dias, Professor(a) do Magistério Superior**, em 10/12/2021, às 11:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Ana Paula Tremura Galves, Professor(a) do Magistério Superior**, em 10/12/2021, às 11:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Nilva Rodrigues Ribeiro, Usuário Externo**, em 10/12/2021, às 11:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3219733** e o código CRC **145897AF**.

---

# Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer à minha esposa Giselle e a minha filha Manuela pela inspiração e apoio constante. Também quero agradecer ao departamento de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia. Um agradecimento especial para Luis Renato Gonçalves Dias pela sua imensa paciência e ainda mais pelas nossas conversas que acrescentaram enormemente o meu desenvolvimento nesta dissertação. Agradeço todos aos meu alunos e ex-alunos pelo carinho e apoio nessa jornada.

# Resumo

Nesta dissertação apresentamos três teoremas para motivar e auxiliar o aprendizado de polinômios na Educação Básica. O primeiro teorema apresenta um intervalo onde estão contidas as raízes de um polinômio. Outro teorema apresenta uma desigualdade que relaciona as áreas do triângulo tangencial e do retângulo tangencial com a área sobre a curva do polinômio. E por último, mostramos um teorema em que dados quatro polinômios que possuam 0 como uma de suas raízes, teremos 24 possíveis configurações dos gráficos dos mesmos para  $x$  próximo da origem, mas duas dessas permutações são impossíveis de se obter. O nosso propósito dessa dissertação é que esses resultados possam servir como aporte para auxiliar no ensino de polinômios na educação básica.

Palavras-Chave: Polinômios, Desigualdade das Médias, Raízes de um Polinômio, Gráfico de um polinômio.

# Abstract

In this dissertation we present three theorems to motivate and help the learning of polynomials in Basic Education. The first theorem presents an interval where they are contained as roots of a polynomial. Another theorem presents an inequality that relates the areas of the tangential triangle and the tangential rectangle to the area under the curve of the polynomial. And by, we show a theorem that given four polynomials that have 0 as one of their roots, we have 24 possible configurations of their graphs for  $x$  near the origin, but two such permutations are impossible to obtain. Our purpose of this dissertation is that these results served as a contribution to help in the teaching of polynomials in basic education.

Palavras-Chave: Polynomials, Inequality of Means, Roots of a Polynomial, Graph of a Polynomial.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Definições e resultados preparatórios</b>	<b>3</b>
1.1	Desigualdades das Médias . . . . .	3
1.1.1	Exemplos . . . . .	5
1.1.2	Produto Interno . . . . .	7
1.1.3	Desigualdade de Cauchy-Schwarz . . . . .	8
1.2	Polinômios e suas relações . . . . .	9
1.2.1	Teorema Fundamental da Álgebra . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Resultados sobre raízes de um polinômio real</b>	<b>12</b>
2.1	Intervalo das raízes de um polinômio . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Aplicações</b>	<b>16</b>
3.1	Cálculo de Áreas . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Intersecção de polinômios</b>	<b>21</b>
4.1	Configurações de Polinômios Afins . . . . .	21
4.2	Teorema de Kontsevich . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>27</b>

# Introdução

A álgebra tem como principal meta estudar a manipulação formal de equações, operações matemáticas, polinômios e estruturas algébricas. Um tópico importante dessa teoria é o estudo dos polinômios, envolvendo equações polinomiais e funções polinomiais. Começamos a estudar álgebra no ensino fundamental, na busca de raízes para um polinômio do primeiro e segundo grau. No ensino médio, essa teoria passa a ser vista com números complexos e com um grau maior do que dois.

De acordo com os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) esse assunto deve constar na parte flexível do currículo. De acordo com Dierings [3] esta flexibilidade nos chama a atenção e sugere que o aprofundamento desse conteúdo não seja fundamental para esses níveis de ensino. Entendemos que as escolas devem trabalhar com a preparação dos estudantes apresentando condições mínimas e embasamento para acompanhar qualquer curso de nível superior no futuro.

Esta dissertação trata, essencialmente, de alguns resultados sobre polinômios enquanto possibilidade para o Ensino Médio. Iniciaremos esta dissertação com um capítulo dedicado às definições e resultados preparatórios. No Capítulo 2 será abordada parte da teoria envolvendo as raízes de um polinômio real. Vale ressaltar que o problema de calcular raízes de uma equação sempre foi objeto de estudo da matemática ao longo dos séculos. No Capítulo 3 estudaremos algumas aplicações envolvendo o cálculo de áreas, com uma interessante desigualdade apresentada por Paul Erdős e Tibor Gallai.

No Capítulo 4 a intersecção de polinômios é estudada. O objetivo deste capítulo é dar exemplos de aplicações que poderão servir de aporte para uma futura aplicação em sala de aula, com alunos do ensino médio. Na Seção 4.1 apresentaremos as configurações de polinômios. Na Seção 4.2 apresentaremos o teorema de Kontsevich, cujo resultado apresenta algumas restrições para a posição relativa dos gráficos de quatro polinômios reais.

Conforme já mencionamos, o foco central desta dissertação é o estudo de alguns resultados de polinômios. Um objetivo importante desta dissertação é o preenchimento dos detalhes das demonstrações de alguns resultados. A maioria dos resultados expostos nesta dissertação já eram conhecidos e alguns deles são considerados como triviais. Isso significa que raramente suas demonstrações aparecem e, quando aparecem, muitos detalhes são omitidos. Procura-se nesta dissertação preencher esses detalhes e, além disso, contribuir com exemplos e aplicações que poderão servir de aporte para uma futura aplicação em sala de aula, com estudantes do ensino médio.

# Capítulo 1

## Definições e resultados preparatórios

Para os nossos propósitos, resultados da álgebra serão úteis para o estudo desta dissertação. Devido a isso apresentaremos neste capítulo os conceitos de Médias, Relações de Girad, polinômio complexo, produto interno, desigualdade de Cauchy e Teorema Fundamental da Álgebra. Utilizamos como referências os trabalhos [1], [5], [8] e [11].

### 1.1 Desigualdades das Médias

Uma ideia importante de aplicação matemática é o conceito de média, que é um número real que está associado a um conjunto de dados e pode representar esse conjunto que está sendo analisado. Há diversas médias na literatura e cabe a quem estiver analisando os dados definir qual a média será mais conveniente utilizar. Em geral, a média de uma lista de números é um valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar certa característica da lista. Nessa seção apresentamos os conceitos de média aritmética, geométrica e harmônica, e desenvolvemos alguns exemplos e aplicações. Ainda nos debruçaremos sobre as desigualdades das médias e alguns problemas de otimização.

**Definição 1** (Média Aritmética Simples). *Dada uma lista de  $n > 1$  números reais,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , a média aritmética  $A$  é definida pela igualdade:*

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (1.1.1)$$

**Definição 2** (Média Geométrica). *Dada uma lista de  $n > 1$  números reais positivos,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , a média geométrica  $G$  é definida pela igualdade:*

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}. \quad (1.1.2)$$

**Definição 3** (Média Harmônica Simples). *Dada uma lista de  $n > 1$  números reais positivos,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , a média harmônica  $H$  é definida pela igualdade:*

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}. \quad (1.1.3)$$

**Teorema 1** (Desigualdade das Médias). *Sejam  $x_1, \dots, x_n$  números reais positivos, então*

$$H \leq G \leq A,$$

*ou seja, vale:*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (1.1.4)$$

*Além disso, vale a igualdade se, e somente se,  $x_1 = \dots = x_n$ .*

*Demonstração:* Para essa demonstração, iremos utilizar as notas de aula do professor Pedro J. de Rezende [9] sobre provas por indução. Nessas notas, Rezende demonstra esse teorema utilizando o princípio da indução reversa.

Para isso vamos dividir essa demonstração em três passos.

**PASSO 1:** Iremos demonstrar por indução que o teorema é válido para  $n = 2^k$ .

Primeiro vamos demonstrar que o teorema vale para  $n = 2$ :

Se  $x_1$  e  $x_2$  são números reais positivos, sabemos que  $\sqrt{x_1}$  e  $\sqrt{x_2}$  são números reais e que  $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$ .

Dessa forma, segue que:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 &\geq 0 \\ (\sqrt{x_1})^2 - 2(\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}) + (\sqrt{x_2})^2 &\geq 0 \\ x_1 - 2\sqrt{x_1x_2} + x_2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\geq 2\sqrt{x_1x_2} \\ \frac{x_1 + x_2}{2} &\geq \sqrt{x_1x_2} \end{aligned}$$

Logo, para dois números reais positivos, temos que  $A \geq G$ .

Agora, iremos demonstrar que o teorema vale para  $2^{k+1}$ ,  $k \geq 1$ :

$$\begin{aligned} (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &= (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{2n}} \cdot (x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot \dots \cdot x_{2n})^{\frac{1}{2n}} \\ &= \sqrt{(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \cdot (x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot \dots \cdot x_{2n})^{\frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

Fazendo  $y_1 = (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$  e  $y_2 = (x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot \dots \cdot x_{2n})^{\frac{1}{n}}$  e empregando a base ( $n = 2$ ), temos:

$$(y_1 y_2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Mas, aplicando agora a hipótese de indução para  $n$  em  $y_1$   $y_2$ , temos:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} \leq \frac{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}}{n}}{2}.$$

De onde podemos derivar o caso  $2n$ , que é  $2^{k+1}$ , pois:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2n})^{\frac{1}{2n}} \leq \frac{y_1 + y_2}{2} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}}{2n}.$$

**PASSO 2:** Por hipótese assumimos que o teorema vale para  $n > 2$ . Mostraremos que o teorema vale para  $n - 1$ , isto é, que:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}.$$

Mas, sabemos por hipótese de indução que, para qualquer  $z > 0$ :

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot z)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + z}{n}. \quad (1.1.5)$$

Então, em particular, podemos escolher  $z$  como:

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}. \quad (1.1.6)$$



Substituindo a expressão (1.1.6) no lado direito da inequação (1.1.5) temos:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot z)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{(n-1)z + z}{n} = z. \quad (1.1.7)$$

Elevando-se à potência  $n$  ambos os lados da inequação (1.1.7) , temos:

$$\begin{aligned} (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot z) &\leq z^n. \\ (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} &\leq z. \end{aligned}$$

Substituindo agora  $z$  pelo seu valor em 1.1.6, temos:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}.$$

Portanto, segue dos passos 1, 2 e 3 que  $G \leq A$ .

**PASSO 3:** Para demonstrar a segunda desigualdade do teorema, iremos aplicar a desigualdade  $A \geq G$  para os números reais positivos  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ :

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x_n}},$$

donde segue que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} &\geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}} \\ \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} &\geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}. \end{aligned}$$

Portanto, temos  $G \geq H$ . ■

### 1.1.1 Exemplos

No que segue, apresentamos algumas aplicações da desigualdade das médias, em situações que foram organizadas da seguinte forma: problema envolvendo máximo e mínimo de uma função, problema envolvendo geometria espacial e problema envolvendo geometria plana.

**Exemplo 1.** Seja  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}.$$

*Solução:* Analisemos os possíveis extremos de  $f$ . Temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 1}{x + 1} \\ &= \frac{(x + 1)^2 - 2x}{x + 1} \\ &= (x + 1) - \frac{2x}{x + 1} \\ &= (x + 1) - \left( \frac{2(x + 1) - 2}{x + 1} \right) \\ &= (x + 1) - 2 + \frac{2}{x + 1}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para os termos  $(x + 1)$  e  $\left(\frac{2}{x + 1}\right)$ , temos:

$$\frac{(x + 1) + \frac{2}{x + 1}}{2} \geq \sqrt{(x + 1)\left(\frac{2}{x + 1}\right)},$$

$$(x + 1) + \frac{2}{x + 1} \geq 2\sqrt{2}.$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se,  $x + 1 = \frac{2}{x + 1}$ , ou seja,  $x^2 + 2x - 1 = 0$ . Como  $x \geq 0$ , a igualdade ocorre se, e somente se,

$$x = \frac{-2 + \sqrt{4 + 4}}{2} = -1 + \sqrt{2}.$$

Assim temos:

$$f(x) = (x + 1) - 2 + \frac{2}{x + 1} \geq 2\sqrt{2} - 2,$$

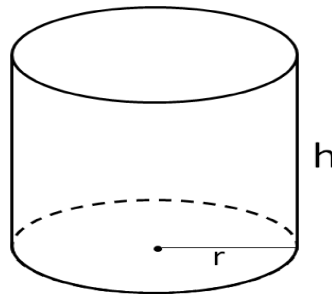
onde  $2\sqrt{2} - 2$  é atingido quando  $x = -1 + \sqrt{2}$ . Logo,  $2\sqrt{2} - 2$  é o valor mínimo de  $f$ . Por fim, temos que para  $x \geq 0$ ,

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x + 1} \geq x - 1,$$

e como  $x - 1$  não possui máximo. Logo,  $f$  não possui máximo.

Consideramos o seguinte problema:

**Exemplo 2.** Dado um cilindro circular reto, com volume total  $V$ , qual a menor área possível desse cilindro? Que relação deve existir entre o raio da base  $r$  do cilindro e sua altura  $h$  para que o mesmo tenha a menor área possível?



**Solução:** A área total do cilindro é  $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$  e o volume do cilindro é  $V = \pi r^2 h$ . Aplicando a desigualdade das médias  $A \geq G$  para os números  $\pi rh, \pi rh$  e  $2\pi r^2$ , temos:

$$\frac{\pi rh + \pi rh + 2\pi r^2}{3} = \frac{S}{3} \geq \sqrt[3]{\pi rh \cdot \pi rh \cdot 2\pi r^2} = \sqrt[3]{(\pi r^2 h) \cdot (\pi r^2 h) \cdot 2\pi}.$$

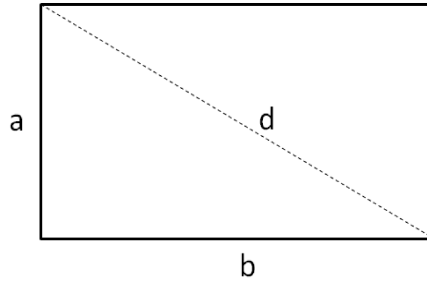
que implica

$$\frac{S}{3} \geq \sqrt[3]{V^2 \cdot 2\pi} \rightarrow S \geq 3\sqrt[3]{V^2 \cdot 2\pi}.$$

Portanto, a menor área possível é  $S = 3\sqrt[3]{V^2 \cdot 2\pi}$ , que ocorre se, e somente se,  $\pi rh = 2\pi r^2$ , ou seja,  $h = 2r$ . Portanto, o cilindro de volume constante com a menor área possível é o cilindro equilátero.

Outro problema que discutimos é o seguinte:

**Exemplo 3.** Qual o perímetro máximo de um retângulo com diagonal  $d$ ?



**Solução:** Sejam  $a$  e  $b$  os lados do retângulo, logo o perímetro  $2p$  é dado por  $2p = 2a + 2b$ . Sabemos também que  $a^2 + b^2 = d^2$ . Aplicando a desigualdade das médias  $A \geq G$  em  $a^2$  e  $b^2$ , obtemos:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b \rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Somando  $a^2 + b^2$  em ambos os lados da desigualdade  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  e depois dividindo por 4, obtemos:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{d^2}{2} \rightarrow \frac{a+b}{2} \leq \frac{d}{\sqrt{2}},$$

que implica

$$4 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 4 \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \rightarrow 2a + 2b \leq 2d\sqrt{2} \rightarrow 2p \leq 2d\sqrt{2}.$$

Portanto, o maior perímetro possível é  $2p = 2d\sqrt{2}$ , que ocorre quando  $a = b$ .

### 1.1.2 Produto Interno

Nesta seção, apresentamos a noção de produto interno em espaços vetoriais. Esta noção, como veremos, generaliza a noção de produto escalar em  $\mathbb{R}^2$  e em  $\mathbb{R}^3$  e enriquece a estrutura de um espaço vetorial, usaremos essa definição para apresentar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz [4].

**Definição 4** (Produto Interno). Seja  $V$  um espaço vetorial. Um produto interno em  $V$  é uma função que a cada par de vetores  $u$  e  $v$  em  $V$  associa um número real, denotado por  $\langle u, v \rangle$ , que satisfaz as seguintes condições:

Para quaisquer vetores  $u$ ,  $v$  e  $w$  de  $V$  e qualquer número real  $k$ ,

**PI 1**  $\langle v, v \rangle \geq 0$ ;

**PI 2**  $\langle v, v \rangle = 0$  se, e somente se,  $v = 0$ ;

**PI 3**  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ ;

**PI 4**  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ ;

**PI 5**  $\langle ku, v \rangle = k\langle u, v \rangle$ .

Um espaço vetorial com um produto interno é chamado de espaço com produto interno.

**Exemplo 4.** Sejam  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  vetores em  $\mathbb{R}^n$ . Definimos

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (1.1.8)$$

Temos que

$$\langle u, u \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

e que

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n = \langle v, u \rangle,$$

mostrando que as condições **PI 1** e **PI 3** da definição de produto interno são satisfeitas. A condição **PI 2** também é satisfeita já que

$$\langle u, u \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \iff u = 0.$$

Se  $w = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , então

$$\begin{aligned} \langle u + v, w \rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + \dots + (x_n + y_n)z_n \\ &= (x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_n z_n) + (y_1 z_1 + y_2 z_2 + \dots + y_n z_n) \\ &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

mostrando que a condição **PI 4** é satisfeita. A condição **PI 5** também é satisfeita pois  $k \in \mathbb{R}$ , então

$$\langle ku, v \rangle = (kx_1)y_1 + (kx_2)y_2 + \dots + (kx_n)y_n = k(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) = k\langle u, v \rangle.$$

Assim, (1.1.8) define um produto interno em  $\mathbb{R}^n$ , chamado de produto interno usual de  $\mathbb{R}^n$  ou produto escalar de  $\mathbb{R}^n$ , generalizando a noção de produto escalar de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.1.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz, também conhecida como a Desigualdade de Schwarz, Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz ou simplesmente Cauchy, é uma desigualdade muito útil que aparece em vários contextos diferentes, tais como em análise, aplicando-se a séries infinitas e integração de produtos, e, na teoria de probabilidade, aplicando-se as variâncias e covariâncias.

Essa desigualdade foi publicada por Augustin Cauchy (1821), matemático francês responsável pela introdução do rigor na análise matemática e um dos fundadores da teoria de grupos finitos. Em análise infinitesimal, criou a noção moderna de descontinuidade para as funções de variável real ou complexa. A prova do próximo teorema é baseada na referência [11].

**Teorema 2** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja  $V$  espaço vetorial com produto interno e norma  $|a| = \langle a, a \rangle$ ,  $\forall a \in V$ . Então*

$$\langle a, b \rangle^2 \leq |a|^2 |b|^2, \forall a, b \in V, \quad (1.1.9)$$

com a igualdade sendo verificada se, e somente se,  $a$  e  $b$  são linearmente dependentes.

*Demonstração.* Consideremos a seguinte função quadrática na variável  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} q(x) &= |xa + b|^2 \\ &= x^2 |a|^2 + 2x \langle a, b \rangle + |b|^2. \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Se  $a = 0$ , então a desigualdade (1.1.9) segue trivialmente. Portanto, assumimos  $a \neq 0$ . Se  $b = \lambda a$ , então claramente  $\langle a, b \rangle^2 = |a|^2 |b|^2$ , o que prova a desigualdade (1.1.9).

Finalmente, analisemos o caso em que  $a$  e  $b$  são linearmente independentes. Desta forma, temos que  $|xa + b|^2 > 0$ , para todo  $x$ . Logo, o discriminante de  $q(x)$  é negativo, ou seja,  $\langle a, b \rangle^2 - |a|^2|b|^2 < 0$ . Esta última inequação implica  $\langle a, b \rangle^2 < |a|^2|b|^2$ , o que prova a desigualdade (1.1.9).

Pelos argumentos acima, temos a igualdade em (1.1.9) se, e somente se,  $a$  e  $b$  são linearmente dependentes, o que termina nossa prova. ■

**Exemplo 5.** *Determine o menor e o maior valor da expressão  $E(x, y, z) = 2x + 3y + 6z$  para valores de  $x, y, z$  satisfazendo a condição  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .*

Note que a condição imposta sobre  $x, y, z$  pode ser entendida geometricamente, sendo que esse valores representam coordenadas de um ponto que está situado sobre a esfera de centro na origem e raio 1. Fazendo analogia com a forma geral da desigualdade de Cauchy, que é da forma:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2),$$

teremos:

$$(2x + 3y + 6z)^2 \leq (2^2 + 3^2 + 6^2) (x^2 + y^2 + z^2) \leq (49)(1)$$

e, por fim:

$$(2x + 3y + 6z)^2 \leq 49$$

Podemos concluir que a expressão  $E$  tem  $-7$  e  $+7$  como valores mínimo e máximo, respectivamente. Contudo, podemos empregar a condição de proporcionalidade para verificar quais  $x, y$  e  $z$  determinam esses  $-7$  e  $7$  como extremos. Como os membros da desigualdade de Cauchy se tornam iguais mediante a existência de proporcionalidade entre seus termos, conforme demonstrado anteriormente, temos:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6},$$

onde  $y = \frac{3x}{2}$  e  $z = 3x$ .

Substituindo  $y = \frac{3x}{2}$  e  $z = 3x$  em  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e resolvendo em função de  $x$ , obtemos as soluções:

$$\left(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right) \text{ e } \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right).$$

Assim, temos sobre a esfera de equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  a função  $E(x, y, z) = 2x + 3y + 6z$  admite como valor mínimo  $-7$  e como valor máximo  $7$  nos pontos acima.

## 1.2 Polinômios e suas relações

Neste tópico apresentamos a definição de polinômio e o Teorema Fundamental da Álgebra. Esses conceitos são usados na demonstração das relações de Girard.

**Definição 5** (Polinômios). *Uma função polinomial, ou simplesmente polinômio, é uma função  $p: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , definida por:*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{j=0}^n a_jx^j,$$

$n \in \mathbb{N}$  onde  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ , são denominados coeficientes de  $p(x)$ ,  $x \in \mathbb{C}$  é a variável e  $a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n$  são chamados termos do polinômio  $p$ .

**Exemplo 6.**

- (i)  $p(x) = 8x^7 + (5 + 2i)x^5 + \pi x^2 + x + i$  é um polinômio.
- (ii)  $p(x) = a$ ,  $a \in \mathbb{C}$  é chamado de polinômio constante.
- (iii)  $p(x) = 0$  é chamado de polinômio nulo.

**Definição 6.** Considere  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  um polinômio complexo não nulo, com  $a_n \neq 0$ . O grau de  $p(x)$  é definido como o maior expoente da variável dos termos com coeficiente não nulo:

$$\text{gr}[p(x)] = n.$$

O coeficiente  $a_n$  é chamado de coeficiente líder de  $p(x)$ .

Por exemplo, no polinômio  $p(x) = 2x^3 + x^2 - x + 11$ , seu grau é 3 e o coeficiente líder é 2.

### 1.2.1 Teorema Fundamental da Álgebra

Apresentaremos o contexto histórico do Teorema Fundamental da Álgebra fundamentados em Salvado [10]. Os estudos e discussões sobre resultados envolvendo a existência e a natureza de soluções de equações algébricas e raízes de polinômios complexos datam de muitos séculos atrás. Em 1608, em seu trabalho *Arithmetica Philosophica*, o matemático alemão Peter Rothe afirma que toda equação real de grau  $n$  tem no máximo  $n$  soluções.

Em 1629, o matemático franco-holandês Albert Girard (1595-1632) afirmou em seu livro *L'invention nouvelle en l'Algèbre* que uma equação algébrica de grau  $n$  possuía  $n$  raízes, porém não chegou a demonstrar tal afirmativa ou caracterizar estas raízes.

Em 1637, o matemático francês René Descartes (1596-1650) provou o resultado que limita o número máximo de raízes de um polinômio, porém não chegou a demonstrar a existência de tais raízes.

A primeira demonstração de destaque para o Teorema Fundamental da Álgebra foi apresentada em 1746 e se deve ao matemático francês Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783). Contudo, esta demonstração foi considerada falha, sendo melhorada e simplificada em 1806 e 1814 por Jean Robert Argand (1768-1822). Esta última versão foi usada em vários livros no século XIX. O problema da demonstração de Argand é que esta utilizava o resultado da existência de um mínimo absoluto em funções contínuas sobre um conjunto limitado e fechado, o qual só foi demonstrado em 1874 por Karl Weierstrass (1815-1897) após a construção dos números reais por Richard Dedekind (1831-1916) por volta de 1870.

Outros matemáticos, como Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Pierre Simon Laplace (1749-1827) e James Wood (1760-1839) apresentaram demonstrações para o Teorema Fundamental da Álgebra, as quais apresentavam falhas ou estavam incompletas.

Em sua tese de doutorado publicada em 1799, Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fez críticas às demonstrações anteriores do teorema e apresentou a primeira das quatro demonstrações que elaborou durante sua vida. Duas das demais demonstrações foram apresentadas em 1816 e a última em 1849, em que trabalhou com polinômios de variável e coeficientes complexos.

Atualmente, o Teorema Fundamental da Álgebra é apresentado de forma simples como corolário do Teorema de Liouville na Análise Complexa, o qual diz que toda função complexa inteira e limitada é constante.

**Teorema 3** (Teorema Fundamental da Álgebra). *Todo polinômio não constante admite, pelo menos, uma raiz complexa.*

Como vimos, se  $p(x) \in \mathbb{C}[x]$  de grau  $n \geq 1$  admite pelo menos uma raiz, então possuirá, exatamente,  $n$  raízes. Logo, um enunciado equivalente ao Teorema 3 seria:

**Teorema 4** (Teorema Fundamental da Álgebra - Outra versão). *Todo polinômio  $p(x)$  de grau  $n \geq 1$  se escreve de maneira única (a menos da ordem dos fatores) como:*

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k)^{n_k}$$

onde  $a_n$  é o coeficiente líder de  $p(x)$ , os complexos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  são raízes distintas e  $n_1, n_2, \dots, n_k$  são suas respectivas multiplicidades, ou seja,  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .

No século XVII Albert Girard (1590-1633) apresentou uma importante relação entre os coeficientes e as raízes de uma equação polinomial, conhecida como Relações de Girard.

**Proposição 1** (Relações de Girard). *Consideremos o polinômio  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  sendo  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$  e  $n \geq 1$ . Com  $x_1, \dots, x_n$  sendo as raízes de  $p(x)$ , temos as seguintes relações:*

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad (1.2.1)$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad (1.2.2)$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \quad (1.2.3)$$

$$\vdots$$

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \quad (1.2.4)$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 4 podemos reescrever o polinômio na forma fatorada. Então temos:

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Aplicando a propriedade distributiva, reduzindo os termos semelhantes e ordenando o polinômio, temos:

$$p(x) = a_n x^n - x^{n-1} \sum_{i=1}^n x_i + x^{n-2} \sum_{i < j} x_i x_j - x^{n-3} \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k + \dots + (-1)^n \prod_{i=1}^n x_i \quad (1.2.5)$$

Dividindo a expressão por  $a_n$  e igualando os coeficientes deste último polinômio com o polinômio considerado inicialmente, obteremos as relações do teorema. ■

Apresentaremos a seguir um exemplo que faz uso das relações de Girard para polinômio de  $2^\circ$  e  $3^\circ$  graus.

**Exemplo 7.** *Consideremos o polinômio do  $2^\circ$  grau  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ , cujas raízes são  $x_1$  e  $x_2$ . Logo pelas relações de Girard temos:*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

*Tomemos, agora, o polinômio de grau 3  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  com  $a \neq 0$ , cujas raízes são  $x_1, x_2$  e  $x_3$ . Logo pelas relações de Girard temos:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a}, x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}.$$

## Capítulo 2

# Resultados sobre raízes de um polinômio real

Desde o surgimento da álgebra, os matemáticos tem buscado estabelecer fórmulas ou algoritmos para a obtenção das raízes de um polinômio real ou soluções de equações algébricas. Vários pensadores deram suas contribuições. Para o 1º grau, bastava isolar a variável diretamente. Mas, para os demais casos possíveis, várias ideias engenhosas foram criadas.

O problema de calcular as raízes de uma equação sempre foi objeto de estudo da matemática ao longo dos séculos. Já era conhecida, na antiga Babilônia, a fórmula para o cálculo das raízes exatas de uma equação geral do segundo grau. No século XVI, matemáticos italianos descobriram fórmulas para o cálculo de soluções exatas de equações polinomiais do terceiro e do quarto grau. Essas fórmulas são muito complicadas e por isso são raramente usadas nos dias de hoje. No século XVII, um matemático norueguês, Niels Abel (1802-1829), que apesar de sua curta vida, contribuiu com vários resultados notáveis e importantes para o desenvolvimento da matemática, provou que não existe uma fórmula geral para o cálculo das raízes exatas de uma equação polinomial de grau maior ou igual a 5. Nesses casos, e mesmo em casos mais simples, muitas vezes é necessário recorrer a métodos numéricos para calcular aproximações para as raízes reais de uma dada equação. A seguir, apresentaremos um teorema que determina um intervalo onde estão contidas as raízes de um polinômio com coeficientes reais e que possui todas as raízes reais.

A principal referência bibliográfica utilizada neste capítulo foi de Aigner [1].

### 2.1 Intervalo das raízes de um polinômio

**Teorema 5.** *Seja  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$  um polinômio com  $a_i \in \mathbb{R}$ . Suponha que todas as raízes de  $p(x)$  são reais. Então, as raízes  $p(x)$  estão contidas no intervalo com os pontos de extremidade.*

$$-\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n} \sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}. \quad (2.1.1)$$

*Demonstração.* Sejam  $y, y_1, \dots, y_{n-1}$  as raízes de  $p(x)$ . Então podemos escrever  $p(x)$  da seguinte forma  $p(x) = (x-y)(x-y_1) \dots (x-y_{n-1})$ . Pelas Relações de Girard (Proposição 1), que compara as raízes de  $p(x)$  com seus coeficientes, obtemos:

$$-a_{n-1} = y + y_1 + \dots + y_{n-1}. \quad (2.1.2)$$

$$a_{n-2} = y(y_1 + \dots + y_{n-1}) + \sum_{i < j} y_i y_j. \quad (2.1.3)$$



Elevando ao quadrado a equação de (2.1.2) e multiplicando por dois a equação de (2.1.3) obtemos.

$$(-a_{n-1})^2 = (y + y_1 + \dots + y_{n-1})^2 = y^2 + y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 + 2y(y_1 + \dots + y_{n-1}) + 2 \sum_{i < j} y_i y_j. \quad (2.1.4)$$

$$2(a_{n-2}) = 2(y)(y_1 + \dots + y_{n-1}) + 2 \sum_{i < j} y_i y_j. \quad (2.1.5)$$

Subtraindo cada lado da igualdade em (2.1.5) com os de (2.1.4), obtemos:

$$\begin{aligned} (a_{n-1})^2 - 2(a_{n-2}) &= y^2 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2y \left( \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) + 2 \sum_{i < j} y_i y_j - \left[ 2y \left( \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) + 2 \sum_{i < j} y_i y_j \right]. \\ a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} &= y^2 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2. \end{aligned}$$

Então

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2. \quad (2.1.6)$$

Por outro lado, pela equação (2.1.2) e desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 2) aplicada a  $(y_1, \dots, y_{n-1})$  e  $(1, \dots, 1)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} -a_{n-1} &= y + y_1 + \dots + y_{n-1} \\ (a_{n-1} + y)^2 &= (y_1 + \dots + y_{n-1})^2 \\ &= \langle (1, \dots, 1), (y_1, \dots, y_{n-1}) \rangle^2 \\ &\leq |(1, \dots, 1)|^2 |(y_1, \dots, y_{n-1})|^2 \\ &\leq (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2. \end{aligned}$$

Então, com a inequação acima e (2.1.6) obtemos:

$$(a_{n-1} + y)^2 \leq (n-1)(a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2).$$

Manipulando diretamente a inequação acima obtemos:

$$ny^2 + 2a_{n-1}y + 2(n-1)a_{n-2} - (n-2)a_{n-1}^2 \leq 0,$$

e consequentemente:

$$y^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}y + \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} - \frac{n-2}{n}a_{n-1}^2 \leq 0.$$

Assim,  $y$  (pois  $y$  é uma raiz arbitrária) fica entre as duas raízes da função quadrática descrita acima. As raízes desta equação quadrática são os nossos limites descritos em (2.1.1). ■

Relacionado com a prova do Teorema 5, temos que dado um polinômio  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ , com  $a_i \in \mathbb{R}$ , podemos considerar o polinômio quadrático

$$q(z) = z^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}z + \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} - \frac{n-2}{n}a_{n-1}^2.$$

Podemos calcular as raízes de  $q(z)$  explicitamente usando a fórmula de Bhaskara.

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{-\frac{2}{n}a_{n-1} \pm \sqrt{\left(\frac{2a_{n-1}}{n}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} - \frac{n-2}{n}a_{n-1}^2\right)}}{2 \cdot 1}, \\
 z &= \frac{-\frac{2}{n}a_{n-1} \pm \sqrt{\frac{4}{n^2}(n-1)^2 \left(a_{n-1}^2 - \frac{2na_{n-2}}{n-1}\right)}}{2}, \\
 z &= \frac{-\frac{2}{n}a_{n-1} \pm \frac{2}{n}(n-1) \sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2na_{n-2}}{n-1}}}{2}, \\
 z &= -\frac{a_{n-1}}{n} - \pm \frac{n-1}{n} \sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}.
 \end{aligned}$$

**Exemplo 8.** Seja  $p(x) = x^2 + bx + c$  um polinômio com  $b, c \in \mathbb{R}$ . Para  $n = 2$  temos que os extremos do intervalo são as próprias raízes do polinômios.

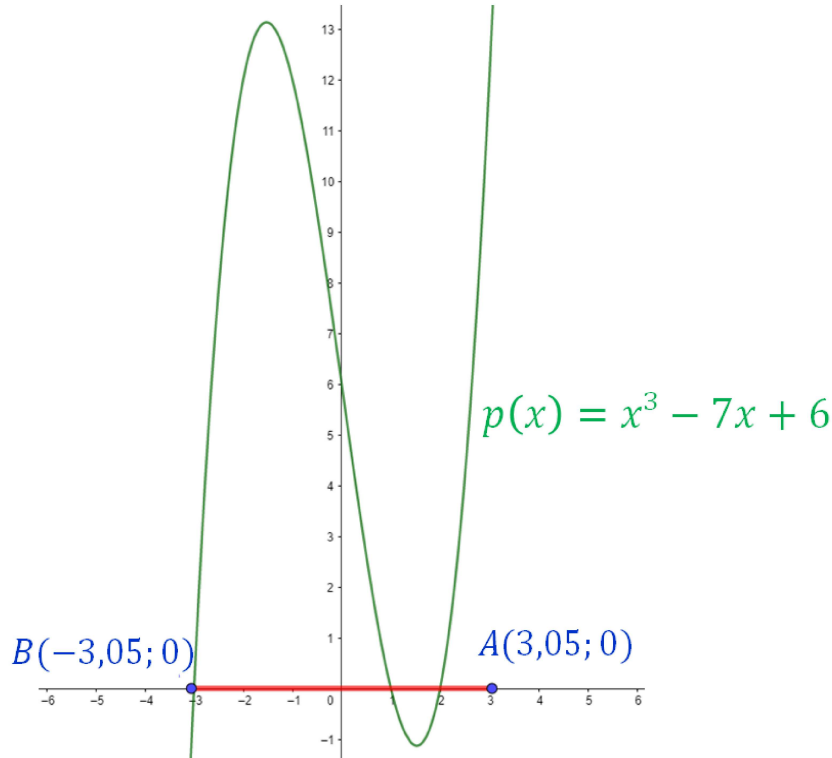
$$\begin{aligned}
 x &= -\frac{b}{2} \pm \frac{2-1}{2} \sqrt{b^2 - \frac{2 \cdot 2}{2-1}c}, \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot c}}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Os valores de (2.1.7) correspondem as raízes do polinômio  $p(x)$ .

**Exemplo 9.** As raízes do polinômio  $p(x) = x^3 - 7x + 6$  são  $-3$ ,  $1$  e  $2$ . Por outro lado, o intervalo do Teorema 5, possui extremos

$$\left[ -\frac{0}{3} - \frac{3-1}{3} \sqrt{0^2 - \frac{2 \cdot 3}{3-1}(-7)}, -\frac{0}{3} + \frac{3-1}{3} \sqrt{0^2 - \frac{2 \cdot 3}{3-1}(-7)} \right] = \left[ -\frac{2}{3}\sqrt{21}, +\frac{2}{3}\sqrt{21} \right].$$

Portanto, as raízes estão contidas no intervalo  $\left[ -\frac{2}{3}\sqrt{21}, +\frac{2}{3}\sqrt{21} \right]$ .



Agora mostraremos que o Teorema 5 não se aplica para um polinômio que possui alguma raiz complexa.

**Exemplo 10.** *As raízes do polinômio  $p(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$  são  $-3, -i$  e  $i$ . O intervalo do Teorema 5 é:*

$$\left[ -\frac{3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3^2 - \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 1} \quad , \quad -\frac{3}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3^2 - \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 1} \right] \\ \left[ -1 - \frac{2}{3}\sqrt{6} \quad , \quad -1 + \frac{2}{3}\sqrt{6} \right]$$

*E como  $-3$  não pertence ao intervalo e é uma raiz de  $p(x)$ , então temos que o Teorema 5 não se aplica para um polinômio que possui uma raiz complexa.*

# Capítulo 3

## Aplicações

Nesse capítulo apresentaremos uma interessante desigualdade sobre áreas, apresentada por Paul Erdős e Tibor Gallai.

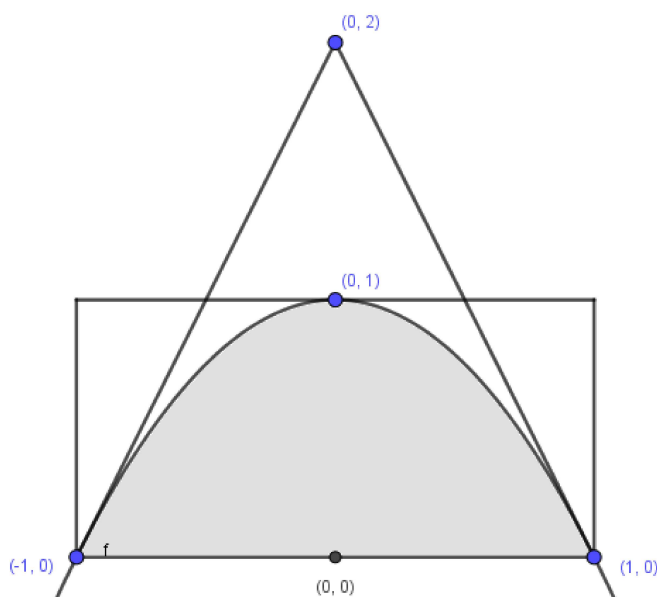
Paul Erdős foi um matemático extremamente prolífico que, com centenas de colaboradores, trabalhou em problemas de análise combinatória, teoria dos grafos e teoria dos números.

Tibor Gallai (nascido em Tibor Grünwald, 15 de julho de 1912 - 2 de janeiro de 1992) foi um matemático húngaro. Ele trabalhou em combinatória, especialmente em teoria dos grafos, e foi amigo e colaborador de Paul Erdős. Ele foi aluno de Dénes Kőnig e conselheiro de László Lovász. Ele foi um membro correspondente da Academia de Ciências da Hungria (1991).

### 3.1 Cálculo de Áreas

Para nossa aplicação partiremos de uma propriedade elementar bem conhecida de uma parábola. Considere a parábola descrita por  $f(x) = 1 - x^2$  entre  $x = -1$  e  $x = 1$ . Associamos a  $f(x)$  o triângulo tangencial e o retângulo tangencial como na figura.

O triângulo tangencial é o triângulo formado pelas retas tangentes a função  $f(x)$



Calculando a área sombreada temos:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx \\
 &= \int_{-1}^1 1 dx - \int_{-1}^1 x^2 dx \\
 &= x \Big|_{-1}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 \\
 &= (1 - (-1)) - \left( \frac{1^3}{3} - \left( \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) \\
 &= 2 - \left( \frac{2}{3} \right) \\
 &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

O ponto de máximo de  $f(x)$  encontra-se no ponto  $(0, 1)$ , logo a altura do retângulo mede 1. Então a área do retângulo  $R$  é  $base \cdot altura = 2 \cdot 1 = 2$ .

Para calcular a área do triângulo  $T$  precisamos encontrar as retas tangentes a função  $f(x)$  nos pontos  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ . Como  $f'(x) = -2x$ , temos que os coeficientes angulares dessas retas são 2 e  $-2$ , respectivamente. Assim, essas retas tangentes possuem equações  $y = 2x + 2$  e  $y = -2x + 2$ .

O ponto  $(0, 2)$  é a interseção dessas retas tangentes, assim a altura do triângulo tangencial mede 2. Com isso a área do triângulo  $T$  é  $\frac{base \cdot altura}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$ .

Portanto,

$$\frac{T}{A} = \frac{3}{2} \text{ e } \frac{R}{A} = \frac{3}{2}$$

Em um artigo, Paul Erdős e Tibor Gallai perguntaram o que acontece quando  $f(x)$  é um polinômio real arbitrário de  $n$ -ésimo grau com  $f(x) > 0$  para  $-1 < x < 1$ , e  $f(-1) = f(1) = 0$ .

A área  $A$  é então  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ . Suponha que  $f(x)$  assume em  $(-1, 1)$  seu valor máximo em  $b$ , então  $R = 2f(b)$ .

A área  $T$  do triângulo tangencial é precisamente  $y_0$ , onde  $(x_0, y_0)$  é o ponto de interseção das duas tangentes. A equação dessas retas tangentes são  $y = f'(-1)(x + 1)$  e  $y = f'(1)(x - 1)$ , consequentemente

$$x_0 = \frac{f'(1) + f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)}.$$

E assim

$$y_0 = f'(1) \left( \frac{f'(1) + f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)} - 1 \right) = 2 \frac{f'(1)f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)}.$$

Logo, temos que:

$$T = \frac{2f'(1)f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)}. \quad (3.1.1)$$

Temos  $T = 0$  para  $f'(1) = 0$  ou  $f'(-1) = 0$ .

Em geral, não há limites não triviais para  $\frac{T}{A}$  e  $\frac{R}{A}$ . Para ver isso, considere  $f(x) = 1 - x^{2n}$ . Assim,

$$\begin{aligned} T &= \frac{2f'(1)f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)} \\ &= \frac{2(-2n)(2n)}{-2n - 2n} \\ &= \frac{-8n^2}{-4n} \\ &= 2n. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 (1 - x^{2n}) dx \\ &= \left( x - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= (1 - (-1)) - \left( \frac{1^{2n+1}}{2n+1} - \left( \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \right) \right) \\ &= 2 - \frac{2}{2n+1} \\ &= \frac{4n}{2n+1}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\frac{T}{A} = \frac{2n}{\frac{4n}{2n+1}} = n + \frac{1}{2} > n$ . Similarmente,  $R = 2$  e  $\frac{R}{A} = \frac{2}{\frac{4n}{2n+1}}$ , que se aproxima de 1 quando  $n$  tende ao infinito.

No entanto, para polinômios com apenas raízes reais, tais limites existem e são descritos pelo seguinte resultado apresentado em [1]:

**Teorema 6.** *Seja  $f(x)$  um polinômio real de grau  $n \geq 2$  com apenas raízes reais. Suponha que  $f(x) > 0$  para  $-1 < x < 1$  e  $f(-1) = f(1) = 0$ . Então*

$$\frac{2}{3}T \leq A \leq \frac{2}{3}R.$$

*E a igualdade se aplica em ambos os casos apenas para  $n = 2$ .*

Erdős e Gallai estabeleceram esse resultado por meio de uma complexa prova de indução [1], que não apresentaremos nesta dissertação. No entanto, na revisão do artigo desses pesquisadores, apresentada no "Mathematical Reviews", George Pólya mostrou que a primeira desigualdade  $\frac{2}{3}T \leq A$  também poderia ser provada utilizando a desigualdade das médias (Teorema 1). Essa demonstração apresentaremos a seguir.

*Demonstração.* Mostraremos que  $\frac{2}{3}T \leq A$ .

Seendo  $\alpha_i, \beta_j, -1$  e  $1$  as raízes reais de  $f(x)$ , e nenhuma delas no intervalo aberto  $(-1, 1)$ , pelo Teorema Fundamental da Álgebra, podemos escrever:

$$f(x) = (1 - x^2) \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x). \quad (3.1.2)$$

Com  $\alpha_i \geq 1, \beta_j \geq 1$ . Consequentemente

$$A = \int_{-1}^1 (1-x^2) \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x) dx.$$

Fazendo a substituição  $x \mapsto -x$  descobrimos que também

$$A = \int_{-1}^1 (1-x^2) \prod_i (\alpha_i + x) \prod_j (\beta_j - x) dx.$$

E, portanto, pela desigualdade da média aritmética e geométrica (note que todos os fatores são  $\geq 0$ ); veja Teorema 1, e somando as duas igualdades acima, obtemos:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \left[ (1-x^2) \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x) + (1-x^2) \prod_i (\alpha_i + x) \prod_j (\beta_j - x) \right] dx. \\ A &= \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)}{2} \left[ \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x) + \prod_i (\alpha_i + x) \prod_j (\beta_j - x) \right] dx. \\ A &\geq \int_{-1}^1 (1-x^2) \left[ \prod_i (\alpha_i - x) \prod_i (\beta_j + x) \prod_i (\alpha_i + x) \prod_j (\beta_j - x) \right]^{1/2} dx. \\ &\geq \int_{-1}^1 (1-x^2) \left[ \prod_i (\alpha_i^2 - x^2) \prod_j (\beta_j^2 - x^2) \right]^{1/2} dx. \\ &\geq \int_{-1}^1 (1-x^2) \left[ \prod_i (\alpha_i^2 - 1) \prod_j (\beta_j^2 - 1) \right]^{1/2} dx. \\ &= \frac{4}{3} \left[ \prod_i (\alpha_i^2 - 1) \prod_j (\beta_j^2 - 1) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Vamos calcular  $f'(1)$  e  $f'(-1)$ . Podemos assumir  $f'(1), f'(-1) \neq 0$ , pois, caso contrário  $T = 0$  e a desigualdade  $\frac{2}{3}T \leq A$  se torna trivial. Mas por (3.1.2) temos que:

$$f'(1) = -2 \prod_i (\alpha_i - 1) \prod_j (\beta_j + 1).$$

Da mesma forma

$$f'(-1) = 2 \prod_i (\alpha_i + 1) \prod_j (\beta_j - 1).$$

Portanto, concluímos

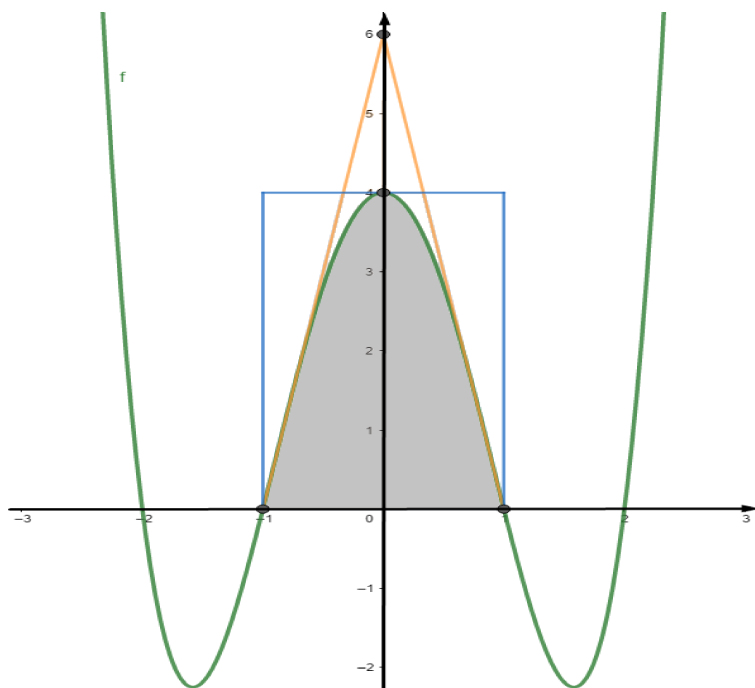
$$A \geq \frac{2}{3} \left( -f'(1) \cdot f'(-1) \right)^{1/2}.$$

Aplicando agora a desigualdade da média harmônica e geométrica para  $-f'(1)$  e  $f'(-1)$ , chegamos por (3.1.1) à conclusão:

$$A \geq \frac{2}{3} \frac{2}{\frac{1}{-f'(1)} + \frac{1}{f'(-1)}} = \frac{4}{3} \frac{f'(1)f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)} = \frac{2}{3}T.$$

■

**Exemplo 11.** Seja o polinômio  $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ . O triângulo tangencial e o retângulo tangencial estão representados na figura a seguir



O ponto de máximo de  $f(x)$  em  $[-1, 1]$  encontra-se no ponto  $(0, 4)$ , logo a altura do retângulo mede 4. Então a área do retângulo  $R$  é  $base \cdot altura = 2 \cdot 4 = 8$ .

Para calcular a área do triângulo  $T$  precisamos encontrar as retas tangentes ao polinômio  $f(x)$  nos pontos  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ . Como  $f'(x) = 4x^3 - 10x$ , temos que os coeficientes angulares dessas retas são 6 e  $-6$ , respectivamente. Assim, essas retas tangentes possuem equações  $y = 6x + 6$  e  $y = -6x + 6$ .

O ponto  $(0, 6)$  é a interseção dessas retas tangentes, assim a altura do triângulo tangencial mede 6. Com isso a área do triângulo  $T$  é  $\frac{base \cdot altura}{2} = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$ .

Calculando a área sombreada  $A$  temos:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^1 (x^4 - 5x^2 + 4) dx. \\
 &= \int_{-1}^1 x^4 dx - \int_{-1}^1 5x^2 dx + \int_{-1}^1 4 dx. \\
 &= \left. \frac{x^5}{5} \right|_{-1}^1 - \left. \frac{5x^3}{3} \right|_{-1}^1 + 4x \Big|_{-1}^1 \\
 &= \left( \frac{1}{5} - \left( -\frac{1}{5} \right) \right) - \left( \frac{5}{3} - \left( -\frac{5}{3} \right) \right) + 4 - (-4). \\
 &= \frac{2}{5} - \frac{10}{3} + 8. \\
 &= \frac{76}{15}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{2}{3}T \leq A \leq \frac{2}{3}R.$$



# Capítulo 4

## Intersecção de polinômios

No ensino médio os polinômios são vistos no estudo da busca de suas raízes, em alguns casos envolvendo números complexos e polinômios de grau maior do que dois. O estudo envolve operações elementares entre polinômios e encontrar suas raízes (Relações de Girard). Visto todas essas ferramentas envolvendo polinômios, podemos nos questionar o que acontece quando dois ou mais polinômios se interceptam. A resposta para essa questão está relacionada com outro conteúdo da matemática, a análise combinatória. Esse capítulo é baseado em Ghys [5] e Silva [11].

### 4.1 Configurações de Polinômios Afins

Considere  $n$  polinômios  $P_1, P_2, \dots, P_n$  tais que  $P_1(0) = P_2(0) = \dots = P_n(0) = 0$ . Como os polinômios são distintos, podemos enumerar tais polinômios de modo que para  $x$  próximo da origem e  $x < 0$ ,  $P_1(x) < P_2(x) < \dots < P_n(x)$ . Neste capítulo, desejamos conhecer as possíveis ordens em que esses polinômios podem configurar, se  $x$  for próximo da origem e  $x > 0$ .

Para o caso de dois polinômios  $P_1$  e  $P_2$ , por exemplo, com  $P_1(x) < P_2(x)$  para  $x$  próximo da origem e negativo, pretende-se saber qual o número total de possíveis configurações dos seus gráficos para  $x$  próximo da origem e positivo. Existem  $2! = 2$  possíveis configurações, sendo elas:

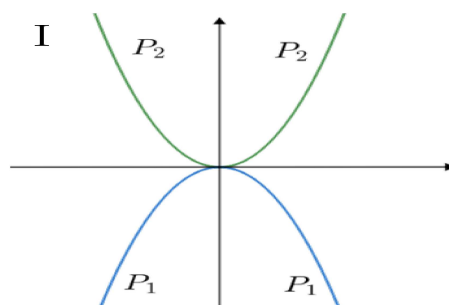
Caso I:

$P_1(x) < P_2(x)$ , para  $x$  próximo da origem e  $x < 0$  e  $P_1(x) < P_2(x)$ , para  $x$  próximo da origem e  $x > 0$ .

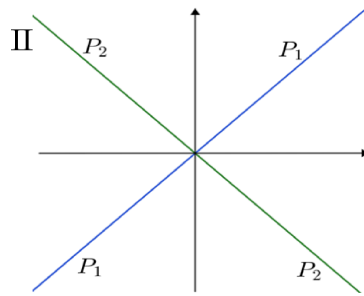
Caso II:

$P_1(x) < P_2(x)$ , para  $x$  próximo da origem e  $x < 0$  e  $P_2(x) < P_1(x)$ , para  $x$  próximo da origem e  $x > 0$ .

Para ilustrar o caso I, os polinômios  $P_1(x) = -x^2$  e  $P_2(x) = x^2$  podem ser usados.



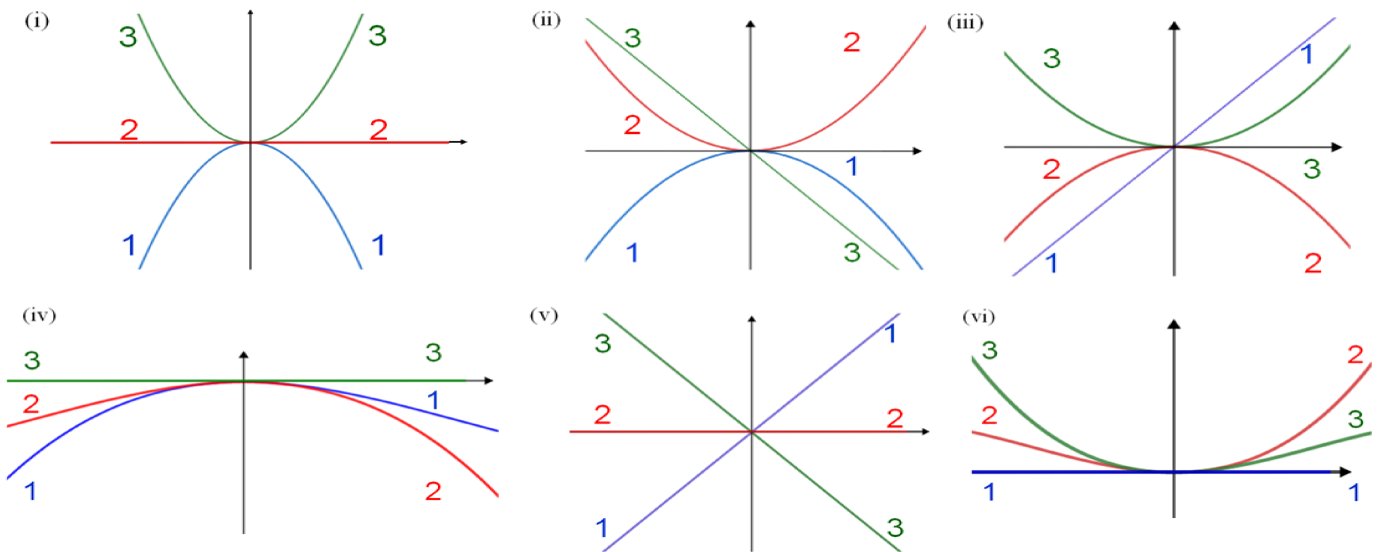
Exemplos de polinômios que se encaixam na configuração II são  $P_1(x) = x$  e  $P_2(x) = -x$ .



A mesma análise pode ser feita para três polinômios  $P_1, P_2$  e  $P_3$ , em condições idênticas às citadas anteriormente. Ou seja, se  $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x)$  para  $x$  próximo da origem e negativo, qual o número total de possíveis configurações dos gráficos para  $x$  próximo da origem e positivo?

Neste caso, existem  $3! = 6$  possíveis configurações dos gráficos, todas ilustradas na figura.

**Exemplo 12.** Suponha agora que temos três polinômios  $P_1, P_2, P_3$  e vejamos as possíveis imagens na vizinhança da origem. As seis figuras a seguir mostram que todas as seis permutações de 1, 2, 3 podem ser realizadas se escolhermos convenientemente os polinômios



- (i) Para  $P_1(x) = -x^2$ ;  $P_2(x) = 0$  e  $P_3(x) = x^2$  temos:  
 $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x)$ , para  $x$  pequeno e  $x < 0$  e,  
 $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x)$ , para  $x$  pequeno e  $x > 0$ .
- (ii) Para  $P_1(x) = -x^2$ ;  $P_2(x) = x^2$  e  $P_3(x) = -x$  temos:  
 $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x)$ , para  $x$  pequeno e  $x < 0$  e,  
 $P_3(x) < P_1(x) < P_2(x)$ , para  $x$  pequeno e  $x > 0$ .
- (iii) Para  $P_1(x) = x$ ;  $P_2(x) = -x^2$  e  $P_3(x) = x^2$  temos:  
 $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x)$ , para  $x$  pequeno e  $x < 0$  e,  
 $P_2(x) < P_3(x) < P_1(x)$ , para  $x$  pequeno e  $x > 0$ .
- (iv) Para  $P_1(x) = -x^2 + x^3$ ;  $P_2(x) = -x^2 - x^3$  e  $P_3(x) = 0$  temos:  
 $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x)$ , para  $x$  pequeno e  $x < 0$  e,  
 $P_2(x) < P_1(x) < P_3(x)$ , para  $x$  pequeno e  $x > 0$ .

(v) Para  $P_1(x) = x$ ;  $P_2(x) = 0$  e  $P_3(x) = -x$  temos:

$P_1(x) < P_2(x) < P_3(x)$ , para  $x$  pequeno e  $x < 0$  e,

$P_3(x) < P_2(x) < P_1(x)$ , para  $x$  pequeno e  $x > 0$ .

(vi) Para  $P_1(x) = 0$ ;  $P_2(x) = x^2 + x^3$  e  $P_3(x) = x^2 - x^3$  temos:

$P_1(x) < P_2(x) < P_3(x)$ , para  $x$  pequeno e  $x < 0$  e,

$P_1(x) < P_3(x) < P_2(x)$ , para  $x$  pequeno e  $x > 0$ .

Para o caso de quatro polinômios algo diferente acontece. Dados quatro polinômios afins em  $\mathbb{R}[x]$ ,  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ , tais que  $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$ , se  $x < 0$  e próximo da origem, poderia-se esperar  $4! = 24$  possíveis configurações dos gráficos dos mesmos para  $x$  próximo da origem e  $x > 0$ . Estas configurações esperadas estão descritas abaixo, utilizando-se a notação de permutação dos elementos do conjunto  $P_1, P_2, P_3, P_4$ .

$(P_1, P_2, P_3, P_4), (P_1, P_2, P_4, P_3), (P_1, P_3, P_2, P_4), (P_1, P_3, P_4, P_2), (P_1, P_4, P_2, P_3), (P_1, P_4, P_3, P_2),$   
 $(P_2, P_1, P_3, P_4), (P_2, P_1, P_4, P_3), (P_2, P_3, P_1, P_4), (P_2, P_3, P_4, P_1), (P_2, P_4, P_1, P_3), (P_2, P_4, P_3, P_1),$   
 $(P_3, P_1, P_2, P_4), (P_3, P_1, P_4, P_2), (P_3, P_2, P_1, P_4), (P_3, P_2, P_4, P_1), (P_3, P_4, P_1, P_2), (P_3, P_4, P_2, P_1),$   
 $(P_4, P_1, P_2, P_3), (P_4, P_1, P_3, P_2), (P_4, P_2, P_1, P_3), (P_4, P_2, P_3, P_1), (P_4, P_3, P_1, P_2), (P_4, P_3, P_2, P_1).$

Entretanto, duas dessas permutações,  $(P_2, P_4, P_1, P_3)$  e  $(P_3, P_1, P_4, P_2)$ , são impossíveis de se obter. Esse é o resultado do teorema de Kontsevich que será apresentado e demonstrado na próxima seção.

## 4.2 Teorema de Kontsevich

Nesta seção vamos estudar um resultado de Maxim Kontsevich, que afirma que a posição relativa dos gráficos de quatro polinômios reais está sujeito a algumas condições.

Maxim Kontsevich, (nascido em 25 de agosto de 1964, Khimki, Rússia, URSS), matemático russo que ganhou a Medalha Fields em 1998 por seu trabalho em geometria algébrica e topologia algébrica. Kontsevich estudou matemática na Universidade Estadual de Moscou de 1980 a 1985 antes de receber seu doutorado (1992) pela Universidade de Bonn. Ele ocupou cargos na Alemanha na Universidade de Bonn; nos Estados Unidos, na Harvard University, Princeton University, na University of California at Berkeley e na Rutgers University; e na França, no Instituto de Estudos Científicos Avançados, Bures-sur-Yvette.

Além da Medalha Fields, Kontsevich recebeu várias outras homenagens, incluindo o Prêmio Crafoord (2008), que reconheceu suas “importantes contribuições para a matemática inspiradas pela física teórica moderna”.

**Teorema 7** (Teorema de Kontsevich). *Quatro polinômios  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  de variável real  $x$  não podem satisfazer*

I.  $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$  para  $x$  próximo da origem e  $x < 0$ ,

$P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$  para  $x$  próximo da origem e  $x > 0$ , ou analogamente

II.  $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$  para  $x$  próximo da origem e  $x < 0$ ,

$P_3(x) < P_1(x) < P_4(x) < P_2(x)$  para  $x$  próximo da origem e  $x > 0$ .

Antes de provar o teorema de Kontsevich, apresentaremos uma observação mais elementar. Considere a posição do gráfico de um único polinômio real diferente de zero  $P(x)$ , em relação ao eixo  $x$  próximo a 0.

Existem duas possibilidades. Ou o gráfico de  $P(x)$  cruza o eixo  $x$  em 0, ou permanece do mesmo lado. Para distinguir entre esses dois casos, apresentaremos a seguinte definição.

**Definição 7.** Seja  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  um polinômio. A valuação  $v(P)$  de  $P$  é o menor inteiro  $k$  tal que  $a_k \neq 0$ . Por convenção, a valuação do polinômio zero é  $\infty$ .

**Exemplo 13.** Para polinômios  $P(x) = 3x + 5x^2$  e  $Q(x) = 5x^3 + x^4 - 3x^7$  temos que suas valuações valem  $v(P) = 1$  e  $v(Q) = 3$ , respectivamente.

Então podemos escrever o polinômio  $P(x)$  da seguinte forma:

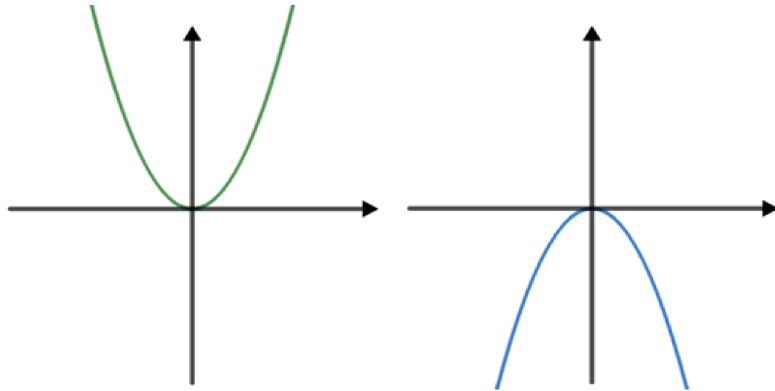
$$P(x) = a_{v(P)}x^{v(P)} + a_{v(P)+1}x^{v(P)+1} + a_{v(P)+2}x^{v(P)+2} + \dots$$

Colocando  $x^{v(P)}$  em evidência temos:

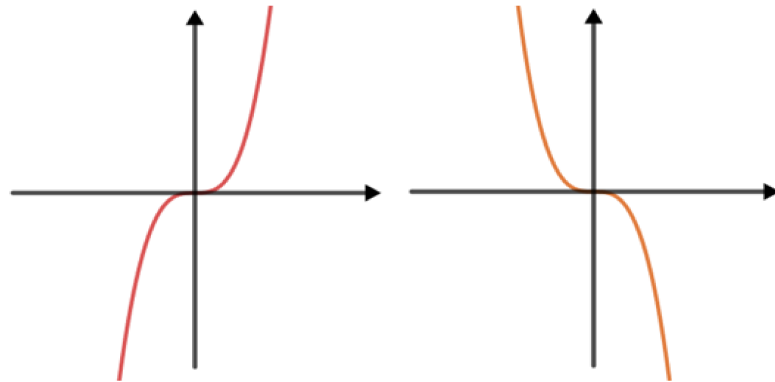
$$P(x) = x^{v(P)} \cdot (a_{v(P)} + a_{v(P)+1}x^1 + a_{v(P)+2}x^{v(P)+1} + \dots)$$

Com isso, podemos definir a posição do gráfico de  $P(x)$  em relação ao eixo  $x$  próximo a 0.

(i). Se  $v(P)$  é par e  $a_{v(P)} > 0$  (ii). Se  $v(P)$  é par e  $a_{v(P)} < 0$



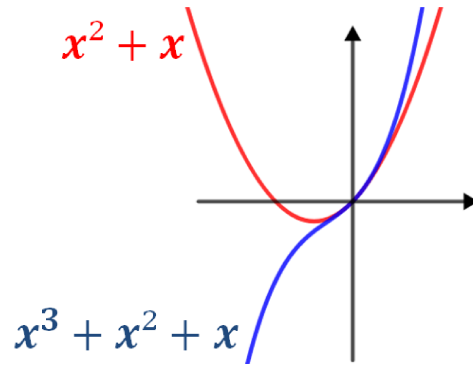
(iii). Se  $v(P)$  é ímpar e  $a_{v(P)} > 0$  (iv). Se  $v(P)$  é ímpar e  $a_{v(P)} < 0$



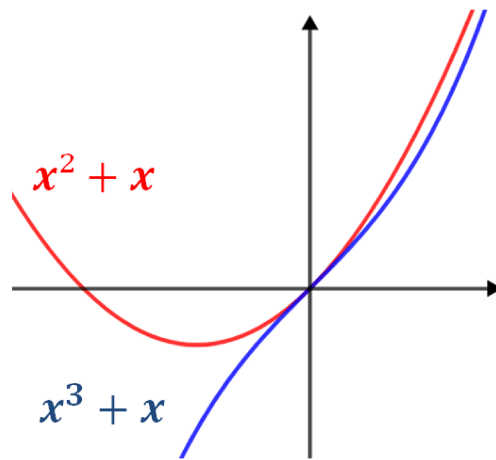
Portanto, temos que o gráfico de  $P$  cruza o eixo  $x$  em 0 se, e somente se, a valuação  $v(P)$  for ímpar.

Se temos dois polinômios distintos  $P_1, P_2$ , o sinal de  $P_1(x) - P_2(x)$  muda em 0 se, e somente se,  $v(P_1 - P_2)$  é ímpar.

**Exemplo 14.** Seja  $P_1(x) = x^3 + x^2 + x$  e  $P_2(x) = x^2 + x$ . Temos que  $P_1(x) - P_2(x) = x^3 + x^2 + x - (x^2 + x) = x^3$ . Dessa forma a valuação  $v(P_1(x) - P_2(x)) = 3$ . Como 3 é um número ímpar os gráficos de  $P_1(x)$  e  $P_2(x)$  se cruzam na origem como está representado na figura abaixo.

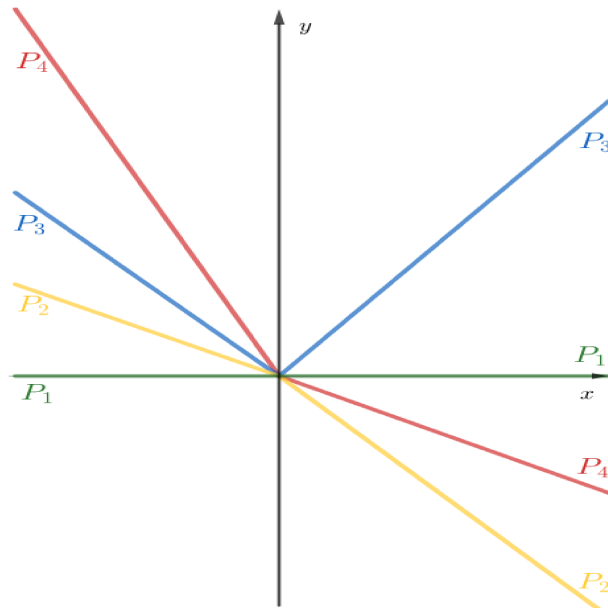


**Exemplo 15.** Seja  $P_1(x) = x^2 + x$  e  $P_2(x) = x^3 + x$ . Temos que  $P_1(x) - P_2(x) = x^2 + x - (x^3 + x) = -x^3 + x^2$ . Dessa forma a avaliação  $v(P_1(x) - P_2(x)) = 2$ . Como 2 é um número par os gráficos de  $P_1(x)$  e  $P_2(x)$  se tocam na origem sem se cruzar como está representado na figura abaixo.



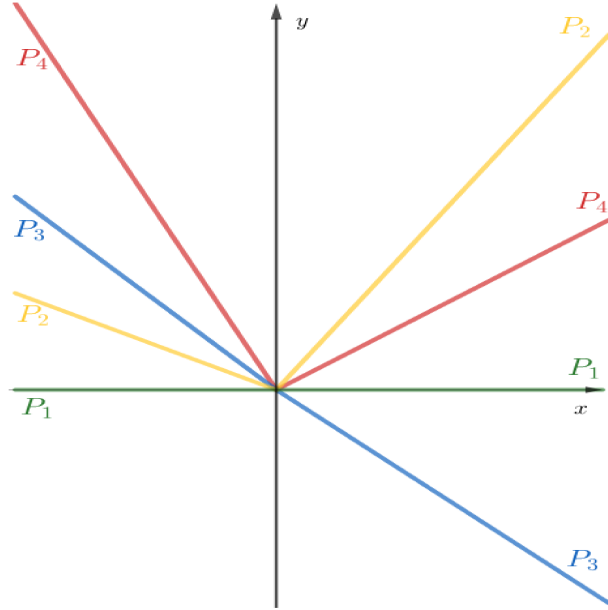
Podemos agora provar o Teorema 7 (Teorema de Kontsevich).

*Demonstração.* I. Por contradição, assuma que existem quatro polinômios  $P_1, P_2, P_3, P_4$  satisfazendo:  $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$  para  $x$  próximo da origem e  $x < 0$ ,  $P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$  para  $x$  próximo da origem e  $x > 0$ . Substituindo cada  $P_i$  por  $P_i - P_1$ , pode-se assumir que  $P_1 = 0$ .



Ao analisar a Figura, pode-se observar que  $P_2$  e  $P_4$  mudam de sinal na origem, logo as suas avaliações  $v(P_2)$  e  $v(P_4)$  são ímpares. Além disso, a Figura também mostra que  $P_3$  não muda de sinal na origem, o que implica que a sua avaliação  $v(P_3)$  é par. Como  $0 < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$  para  $x$  próximo da origem e  $x < 0$ , pode-se concluir que  $v(P_2) \geq v(P_3) \geq v(P_4)$  (basta notar que  $P_i(x) \approx a_{v(P_i)}x^{v(P_i)}$  para  $x$  próximo da origem). Da mesma forma,  $|P_4(x)| < |P_2(x)|$  para  $x$  pequeno positivo implica que  $v(P_4) \geq v(P_2)$ . Isso forçaria as três avaliações a serem iguais, mas duas delas são ímpares e uma delas é par. Contradição!

II. Novamente, por contradição, assuma que existem quatro polinômios  $P_1, P_2, P_3, P_4$  satisfazendo:  $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$  para  $x$  pequeno  $x < 0$ ,  $P_3(x) < P_1(x) < P_4(x) < P_2(x)$  para  $x$  pequeno  $x > 0$ . Substituindo cada  $P_i$  por  $P_i - P_1$  (como foi feito no caso (I.)), pode-se assumir que  $P_1 = 0$ .



Ao analisar a figura acima, pode-se observar que  $P_3$  muda de sinal na origem, logo a sua avaliação  $v(P_3)$  é ímpar. Além disso, a figura também mostra que  $P_2$  e  $P_4$  não mudam de sinal na origem, o que implica que as suas avaliações  $v(P_2)$  e  $v(P_4)$  são pares. Como  $0 < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$  para  $x$  negativo pequeno, pode-se concluir que  $v(P_2) \geq v(P_3) \geq v(P_4)$  (mesmo raciocínio do caso I). Da mesma forma,  $|P_4(x)| < |P_2(x)|$  para  $x$  pequeno positivo implica que  $v(P_4) \geq v(P_2)$ . Isso forçaria as três avaliações a serem iguais, mas duas delas são pares e uma delas é ímpar. Contradição!

■

# Capítulo 5

## Conclusão

Essa dissertação teve como objetivo apresentar resultados importantes sobre polinômios enquanto possibilidade para o Ensino Médio. Primeiro, mostramos um teorema que determina um intervalo onde estão contidas as raízes de um polinômio com coeficientes reais e que possui todas as raízes reais. Mostramos também uma desigualdade sobre áreas, usando os conceitos de triângulo e retângulo tangencial. E para finalizar apresentamos o Teorema de Kontsevich, que exhibe duas configurações impossíveis para os gráficos de quatro polinômios afins, em uma vizinhança da origem.

Procuramos contribuir com essa dissertação, exemplos e aplicações que poderão servir de aporte para uma futura aplicação em sala de aula em um estudo mais aprofundado sobre polinômios no Ensino Médio.

# Referências

- [1] Aigner, Martin; Ziegler, Günter. Proofs from THE BOOK. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-44205-0>
- [2] Dias, Fábio Campos. O teorema fundamental da álgebra. Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática, Macapá, 2016.
- [3] Dierings, André Ricardo. Ensino de Polinômios no Ensino médio - uma nova abordagem. Dissertação - PROFMAT. Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2014.
- [4] Delgado, Jorge; Frensel, Katia; Crissaff, Lhaylla. Geometria Analítica. Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro, 2017.
- [5] Ghys, Étienne. A singular mathematical promenade. ENS Éditions, Lyon, 2017.
- [6] Iezzi, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 6: Complexos, São Paulo, 1977.
- [7] Morgado, Augusto C.; Carvalho, Paulo Cezar P. Matemática Discreta. Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro, 2015.
- [8] Pereira, Jakson Da Cruz. Médias: aritmética, geométrica e harmônica, Campinas, 2014.
- [9] Rezende, Pedro J. Notas de Aula 2<sup>o</sup> Semestre de 2003. Disponível em <https://www.ic.unicamp.br/~rezende/ensino/mc458/Notas-de-aula/inducacao.pdf>.
- [10] Salvado, Claudio D'Alessandro. Teorema Fundamental da Álgebra: Ferramentas para Demonstrar para Alunos do Ensino Médio, 2016.
- [11] Silva, A. J.. Teorema de Kontsevich e os Intercâmbios Polinomiais. Profmat, São João Del-Rei, 2020.