



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Bacharelado em Matemática

**INTRODUÇÃO A TEORIA DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E
APLICAÇÕES**

Rodrigo Lima Almeida

Uberlândia-MG

2021

Rodrigo Lima Almeida

**INTRODUÇÃO A TEORIA DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E
APLICAÇÕES**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientador: Hernán Roberto Montúfar López

Uberlândia-MG

2021



**Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática**

Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Uberlândia, 05 de novembro de 2021

BANCA EXAMINADORA

Hernán Roberto Montúfar López

Aldicio José Miranda

Jocelino Sato

**Uberlândia-MG
2021**

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe Rozenilda, meu pai Orlando, minhas irmãs Ana Claudia e Patrícia, pelo apoio emocional e financeiro durante todo esse processo.

Agradeço a Universidade Federal de Uberlândia, aos professores, em especial a meu orientador Hernán Roberto Montúfar López, que apesar das limitações do ensino remoto, foram essenciais para minha formação, particularmente em disciplinas específicas do Bacharelado, que me proporcionaram um olhar mais profundo para a matemática.

Agradeço a Universidade Federal de Jataí, onde cursei a primeira parte da graduação, às amizades construídas, aos professores desta, que me inspiraram a buscar sempre o meu melhor.

Agradeço ainda ao professor Aldício e ao professor Sato por se disporem a analisar e dar sugestões à este trabalho.

RESUMO

Palavras-chave: Equações Diferenciais, Sistemas Autônomos, Estabilidade, Poincaré-Bendixson.

Neste trabalho faremos um estudo de alguns tópicos da teoria de equações diferenciais. Começaremos definindo essas equações, caracterizando suas soluções e abordando teoremas clássicos, como os de existência e unicidade. O foco passará então para o estudo de estabilidade estrutural, onde analisaremos o comportamento local de soluções de sistemas lineares com coeficientes constantes em dimensão dois, sujeitos a perturbações nos parâmetros. Veremos também a ideia de estabilidade introduzida por Lyapunov, onde estabeleceremos condições que nos darão informações sobre o comportamento assintótico de soluções. Por fim faremos uma introdução ao estudo da estabilidade orbital com o Teorema de Poincaré-Bendixson.

ABSTRACT

Keywords: Differential Equations, Autonomous Systems, Stability, Poincaré-Bendixson.

In this work we will study some topics in the theory of differential equations. We'll start by defining these equations, characterizing their solutions, and approaching classic theorems such as existence and uniqueness. The focus will then move to the study of structural stability, where we will analyze the local behavior of solutions of linear systems with constant coefficients in two dimensions, subject to disturbances in the parameters. We will also see the idea of stability introduced by Lyapunov, where we will establish conditions that will give us information about the asymptotic behavior of solutions. Finally, we will introduce the study of orbital stability with the Poincaré-Bendixson Theorem.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Exemplo 12	18
2.2	Teorema do Fluxo Tubular	18
2.3	Nó atrator (à esq.), Nó repulsor (ao centro) e Sela (à dir.)	21
2.4	Autovalores iguais: dois autovetores independentes.	23
2.5	Autovalores iguais: um autovetor independente.	23
2.6	Centro (à esq.), foco atrator (ao centro) e foco repulsor (à dir.)	24
3.1	Perturbação esquemática de $r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	26
3.2	Perturbação esquemática de $r_1 = r_2$	26
3.3	Demonstração da Proposição 8.	30
3.4	Demonstração da Propriedade 4.	36
3.5	Demonstração do Lema 6	37
3.6	Equação de Van der Pol	41

SUMÁRIO

Lista de Figuras	I
1 Introdução	1
1.1 Preliminares	1
1.2 Exponencial de uma Matriz	2
1.3 Cálculo de e^A	3
2 Fundamentos de Equações Diferenciais	7
2.1 Equações de Primeira Ordem	7
2.2 Equações de Ordem Superior	12
2.3 Soluções Maximais	13
2.4 Equações Autônomas e o Teorema do Fluxo Tubular	15
2.5 Sistemas Lineares: O caso Bidimensional	19
3 Estabilidade	25
3.1 Estabilidade Estrutural em Sistemas Bidimensionais	25
3.2 Estabilidade de Lyapunov em Sistemas Autônomos	27
3.3 Sistemas Localmente Lineares	30
3.4 Teorema de Poincaré-Bendixson	34
3.5 Aplicações do Teorema de Poincaré-Bendixson	38
Referências Bibliográficas	42

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste em aprofundar os estudos da teoria de equações diferenciais em espaços euclidianos, abrindo caminho para o estudo em objetos mais gerais, como as variedades. Admitiremos os conceitos e resultados da topologia dos espaços métricos, que podem ser encontrados em [1]. Na primeira seção faremos uma revisão de alguns resultados usados no desenvolvimento do presente trabalho.

Na segunda seção abordaremos a teoria de equações diferenciais, com foco em alguns teoremas clássicos sobre existência e unicidade de soluções. Ainda nesta seção, é feito um estudo sobre as soluções maximais, onde é aplicado o Teorema de Existência e Unicidade num importante resultado sobre o domínio máximo em que as soluções estão definidas. Ainda, apresentamos um teorema fundamental para a classe de equações autônomas, o Teorema do Fluxo Tubular.

Na última seção é feito um estudo de um conceito da chamada teoria qualitativa de equações diferenciais, o conceito de estabilidade. Estudaremos o comportamento local de soluções próximo de um ponto ou trajetória em particular, o comportamento em pequenas regiões do chamado espaço de fases. Além disso, apresentamos e provamos o Teorema de Poincaré-Bendixson e uma aplicação do mesmo.

1.1 PRELIMINARES

Nesta seção será feita uma breve revisão de alguns resultados usados no desenvolvimento do trabalho.

Definição 1. Uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^{1+d} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita **localmente lipschitziana** na segunda variável $x \in \mathbb{R}^d$ se $\forall (t_0, x_0) \in U, \exists C > 0, \exists \varepsilon > 0$ tais que

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq C \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x - x_0\| < \varepsilon\} \text{ e } \forall t \in B_\varepsilon(t_0).$$

em que $\|x\|$ denota a norma em \mathbb{R}^n , qualquer que seja o natural n .

Proposição 1. Se uma função é localmente lipschitziana, então sua restrição a qualquer compacto é lipschitziana.

Exemplo 1. Se F é de classe C^1 , então F é localmente lipschitziana.

Exemplo 2. $F(x) = \sqrt{|x|}$ não é localmente lipschitziana em $x_0 = 0$. De fato $\frac{\|F(x) - F(0)\|}{\|x - 0\|}$ tende a infinito quando x tende a 0.

Definição 2. $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma **contração** se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que $d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y) \forall x, y \in U$.

Proposição 2. (Lema do Ponto Fixo) Se $F : X \rightarrow X$ é uma contração e X for um espaço métrico completo, então existe um único $\bar{z} \in X$ tal que $F(\bar{z}) = \bar{z}$. De fato $\bar{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x), \forall x \in X$, onde $F^n(x)$ é definido recursivamente por $F^1(x) = F(x), F^{n+1}(x) = F(F^n(x))$.

Proposição 3. Seja $F : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico completo. Se para algum $k \geq 1$, F^k for contração então F tem um único ponto fixo.

Demonstração. Pelo Lema do Ponto Fixo basta mostrar que se F^k é contração em (X, d) então F é contração em (X, d_1) para uma métrica completa d_1 . Seja $\lambda < 1$ tal que $d(F^k(x_1), F^k(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X$. Seja $\lambda_0 = \lambda^{\frac{1}{k}}$, então $\lambda < \lambda_0 < 1$. Considere a métrica definida da seguinte forma:

$$d_1(x_1, x_2) = d(x_1, x_2) + \lambda_0^{-1}d(F(x_1), F(x_2)) + \dots + \lambda_0^{-k+1}d(F^{k-1}(x_1), F^{k-1}(x_2)).$$

Temos que

$$\begin{aligned} d_1(F(x_1), F(x_2)) &= d(F(x_1), F(x_2)) + \lambda_0^{-1}d(F^2(x_1), F^2(x_2)) + \dots + \\ &\quad \lambda_0^{-k+2}d(F^{k-1}(x_1), F^{k-1}(x_2)) + \lambda_0^{-k+1}d(F^k(x_1), F^k(x_2)) \\ &\leq \lambda_0^{-k+1}\lambda_0^k d(x_1, x_2) + d(F(x_1), F(x_2)) + \lambda_0^{-1}d(F^2(x_1), F^2(x_2)) \\ &\quad + \dots + \lambda_0^{-k+2}d(F^{k-1}(x_1), F^{k-1}(x_2)) \\ &\leq \lambda_0[d(x_1, x_2) + \lambda_0^{-1}d(F(x_1), F(x_2)) + \lambda_0^{-2}d(F^2(x_1), F^2(x_2)) + \dots \\ &\quad + \dots + \lambda_0^{-k+1}d(F^{k-1}(x_1), F^{k-1}(x_2))] = \lambda_0 d_1(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Logo F é contração nessa métrica adaptada. A completude de d_1 segue do fato de d ser completa. \square

1.2 EXPONENCIAL DE UMA MATRIZ

Analogamente a definição de exponencial de um número complexo, podemos definir a exponencial de uma matriz. Seja $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ o conjunto de operadores lineares contínuos de \mathbb{R}^d em \mathbb{R}^d , identificado com o conjunto das matrizes de ordem d . Dada $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, definimos

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

Para justificar a convergência dessa série sabemos que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ é um espaço vetorial de dimensão d^2 . Como quaisquer normas definidas neste espaço são completas e equivalentes, é

conveniente aqui escolher a chamada norma de operador

$$\|A\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|Av\|$$

Proposição 4. *A norma definida acima é submultiplicativa, isto é, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.*

Demonstração.

$$\|AB\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|A(B(v))\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|A\left(\frac{B(v)}{\|B(v)\|}\right)\| \|B(v)\| \leq \sup_{\|v\| \leq 1} \|A\left(\frac{B(v)}{\|B(v)\|}\right)\| \sup_{\|v\| \leq 1} \|B(v)\| \leq \|A\|\|B\|.$$

□

Como consequência, temos que

$$\left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!}.$$

Pelo Critério de Weierstrass para espaços vetoriais normados completos, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|A\|}{n!} = e^{\|A\|}$, temos que a série $I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$ converge em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

Além disso

- i) $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$;
- ii) $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$, isto é, uma mudança de base na matriz faz com que a exponencial sofra a mesma mudança de base;
- iii) $e^AA = Ae^A$;
- iv) $e^{A+B} = e^Ae^B = e^Be^A$ se $AB = BA$.

1.3 CÁLCULO DE e^A

Na seção 2.5 será útil encontrar uma expressão analítica para as soluções de equações diferenciais. Para isso precisaremos saber como calcular exponencial de matrizes, pelo menos em alguns casos particulares. Antes disso vamos relembrar alguns resultados de Álgebra Linear.

Definição 3. *Uma matriz $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ é dita **diagonalizável** se existe uma base do espaço formada por autovetores, isto é, existe uma matriz de mudança de base P , invertível tal que*

$$PAP^{-1} = D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_d \end{pmatrix}$$

Definição 4. *Uma matriz A é dita **nilpotente** se existe $k \geq 2$ tal que $A^k = 0$.*

Exemplo 3. A matriz

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\varepsilon \neq 0$, é nilpotente. De fato, considerando a base canônica $\{e_1, \dots, e_d\}$ do \mathbb{R}^d , temos

$$Ne_1 = 0, Ne_2 = \varepsilon e_1, Ne_3 = \varepsilon e_2, \dots, Ne_d = \varepsilon e_{d-1}$$

$$N^2 e_1 = 0, N^2 e_2 = 0, N^2 e_3 = \varepsilon^2 e_1, \dots, N^2 e_d = \varepsilon^2 e_{d-2}$$

$$N^d e_1 = 0, N^d e_2 = 0, \dots, N^d e_d = 0$$

$$\text{Logo } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon^2 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon^3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon^3 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \varepsilon^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, N^d = 0.$$

$$\text{Pela definição da exponencial temos que } e^N = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \frac{\varepsilon^2}{2} & \frac{\varepsilon^3}{6} & \cdots & \frac{\varepsilon^{(d-1)}}{(d-1)!} \\ 0 & 1 & \varepsilon & \frac{\varepsilon^2}{2} & \cdots & \frac{\varepsilon^{(d-2)}}{(d-2)!} \\ & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \frac{\varepsilon^3}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \frac{\varepsilon^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

O teorema a seguir relaciona qualquer matriz dada com matrizes diagonalizáveis e nilpotentes. Ele nos será útil ao mostrar que basta saber como exponenciar três classes particulares de matrizes.

Teorema 1. (*Forma Canônica de Jordan*) Dados $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ existe $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ inver-

tível tal que $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k \end{pmatrix}$ onde $B_j = D_j + N_j$, sendo:

Caso (a)

$$D_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{pmatrix} = \lambda_j I, \quad N_j = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & 0 \cdots & \varepsilon \\ 0 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Caso (b)

$$D_j = \begin{pmatrix} R_j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_j \end{pmatrix}, \quad N_j = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon I_2 \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & 0 \cdots & \varepsilon I_2 \\ 0 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad R_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $\varepsilon \neq 0$, sendo λ_j e $\alpha_j + i\beta_j$, $\beta_j \neq 0$ zeros do polinômio característico $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Além disso, em qualquer dos casos, $D_j N_j = N_j D_j$ e $\dim N_j = \dim D_j$.

Agora vejamos como calcular a exponencial de matrizes para três casos particulares.

Caso 1: (A é diagonalizável)

Temos $A = P^{-1}DP$ e assim $e^A = e^{P^{-1}DP} = P^{-1}e^D P$. Então essencialmente precisamos apenas calcular e^D .

$$D^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_d^n \end{pmatrix}$$

$$e^D = I + D + \frac{D^2}{2} + \cdots + \frac{D^n}{n!} + \cdots = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_d} \end{pmatrix}.$$

Caso 2: (A é nilpotente)

Sendo A nilpotente existe $k \geq 2$ tal que $A^k = 0$, logo

$$e^A = I + A + \cdots + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!}.$$

$$\text{Caso 3: } R = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Sejam $R_1 = \alpha I = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ e $R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. R_1 e R_2 comutam, logo $e^R = e^{R_1} e^{R_2}$.

Temos então $e^{R_1} = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$.

$$(R_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{pmatrix} = -\beta^2 I$$

$$(R_2)^3 = -\beta^2 I R_2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta^3 \\ -\beta^3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(R_2)^4 = (-\beta^2 I)^2 = \beta^4 I$$

e etc. Daí

$$e^{R_2} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{4!} + \cdots & -\beta + \frac{\beta^3}{3!} - \frac{\beta^5}{5!} + \cdots \\ \beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} + \cdots & 1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{4!} + \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Com isso e com o Teorema 1 temos o que precisamos para o cálculo da exponencial de uma matriz.

2. FUNDAMENTOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma equação diferencial ordinária é uma expressão da forma $x^{(k)} = F(t, x, x', \dots, x^{(k-1)})$ onde $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ é contínua, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^{1+dk}$. O número k é a ordem da equação diferencial e d é a dimensão.

Uma solução da equação diferencial é uma curva conexa $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$, k vezes diferenciável tal que:

- i) $\left(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t), \dots, \frac{d^{k-1}\gamma}{dt^{k-1}}(t)\right) \in U, \forall t \in I;$
- ii) $F\left(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t), \dots, \frac{d^{k-1}\gamma}{dt^{k-1}}(t)\right) = \frac{d^k\gamma(t)}{dt^k}, \forall t \in I.$

2.1 EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

Nesta seção trataremos de equações diferenciais onde $k = 1$.

Teorema 2. (Teorema de existência e unicidade) Consideremos uma equação diferencial de primeira ordem $x' = F(t, x)$, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ e suponhamos que F é localmente lipschitziana em x . Então,

- i) $\forall (t_0, x_0) \in U$ existe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$, solução da equação, tal que $t_0 \in I$ e $\gamma(t_0) = x_0$;
- ii) $x' = F(t, x)$ tem a propriedade de unicidade de soluções, isto é, dadas $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ soluções da equação, se existir $t_0 \in I_1 \cap I_2$, tal que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$, então $\gamma_1(t) = \gamma_2(t) \forall t \in I_1 \cap I_2$.

Demonstração. Vamos usar a ideia de ponto fixo. Vamos construir um espaço, cujos elementos são candidatos a solução. Nesse espaço vamos definir uma aplicação com a propriedade de que todo ponto fixo dessa aplicação é uma solução da equação. A seguir vamos usar a Proposição 2 para garantir a existência de pontos fixos.

Tomemos $(t_0, x_0) \in U \subset \mathbb{R}^{1+d}$. Seja $\delta > 0$ tal que $B = \bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0) \subset U$. Tome $M = M_\delta = \sup_B \|F(t, x)\|$. Supondo δ suficientemente pequeno, como F é localmente lipschitziana em x , existe $C = C_\lambda > 0$ tal que $\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\| \forall (t, x_1), (t, x_2) \in B$.

Seja $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq \delta$ e $X = \{\gamma : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínuas tais que $\gamma(t_0) = x_0, \gamma(t) \in \bar{B}_\delta(x_0), \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\}$.

Definindo $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup \{ \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|, t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \}$. Temos que (X, d) é um espaço métrico completo.

Seja $\mathcal{F} : X \rightarrow X$ definida por $\mathcal{F}(\gamma)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \gamma(s))ds$. \mathcal{F} está bem definida. De fato, F contínua implica que a integral está bem definida. Vejamos que $\gamma \in X \Rightarrow \mathcal{F}(\gamma) \in X$. $\mathcal{F}(\gamma)$ é contínua. $\mathcal{F}(\gamma)(t_0) = x_0$ e $\|\mathcal{F}(\gamma)(t) - x_0\| = \|\int_{t_0}^t F(s, \gamma(s))ds\| \leq M|t - t_0| < M\varepsilon$. Supondo também $\varepsilon < \frac{\delta}{M}$, segue que $\mathcal{F}(\gamma)(t) \in \bar{B}_\delta(x_0) \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

\mathcal{F} é uma contração. De fato, dados $\gamma_1, \gamma_2 \in X$,

$$\begin{aligned} d(\mathcal{F}(\gamma_1)(t), \mathcal{F}(\gamma_2)(t)) &= \left\| \int_{t_0}^t [\mathcal{F}(s, \gamma_1(s)) - \mathcal{F}(s, \gamma_2(s))] ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|\mathcal{F}(s, \gamma_1(s)) - \mathcal{F}(s, \gamma_2(s))\| ds \leq \int_{t_0}^t C \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\| ds \leq C\varepsilon d(\gamma_1, \gamma_2). \end{aligned}$$

Supondo $\varepsilon < \frac{1}{C}$, temos $C\varepsilon = \lambda < 1$.

Dessa forma, pela Proposição 2, existe um único $\bar{\gamma} : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d$ com $\bar{\gamma}(t_0) = x_0, \bar{\gamma}(t) \in \bar{B}_\delta(x_0) \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ tal que $\mathcal{F}(\bar{\gamma}) = \bar{\gamma}$, isto é,

$$\bar{\gamma}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (s, \bar{\gamma}(s))ds, \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $\bar{\gamma}$ é diferenciável e $\bar{\gamma}'(t) = F(t, \bar{\gamma}(t)) \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Segue que $\bar{\gamma}$ é solução de $x' = F(t, x)$.

Agora provemos a unicidade. Sejam $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d, \gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ soluções e $t_0 \in I_1 \cap I_2$ tal que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = x_0$. Seja $J = \{t \in I_1 \cap I_2 : \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$. Temos que $J \neq \emptyset (t_0 \in J)$ e J é fechado ($J = (\gamma_1 - \gamma_2)^{-1}(0)$). Para ver que J é aberto seja $s_0 \in J$ e $y_0 = \gamma_1(s_0) = \gamma_2(s_0)$. Para (s_0, y_0) , existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{F}_{(s_0, y_0)} : X_{(s_0, y_0)} \rightarrow X_{(s_0, y_0)}$ é uma contração e portanto tem um único ponto fixo. Mas $\gamma_1|_{(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)}$ e $\gamma_2|_{(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)}$ pertencem a $X_{(s_0, y_0)}$ e são pontos fixos de $\mathcal{F}_{(s_0, y_0)}$ já que $\gamma_j'(t) = F(t, \gamma_j(t)), \forall t \in I_j \iff \gamma_j(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(s, \gamma_j(s))ds, \forall t \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \implies \gamma_j|_{(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)}$ é ponto fixo de $\mathcal{F}_{(s_0, y_0)}, j = 1, 2$. Portanto $\gamma_1(t) = \gamma_2(t), \forall t \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \implies (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \subset J$. Logo J é aberto. Por conexidade $J = I_1 \cap I_2$. \square

O lema a seguir nos dá outro modo de mostrar que \mathcal{F} na demonstração do Teorema 2 é uma contração. Esse modo será mais conveniente em muitas situações, já que evita a restrição $\varepsilon < \frac{1}{C}$, que envolve a constante de lipshitz.

Lema 1. *Existe $k \geq 1$ tal que \mathcal{F}^k é uma contração.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^k(\gamma_1)(t) - \mathcal{F}^k(\gamma_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [F(s_1, \mathcal{F}^{k-1}(\gamma_1)(s_1)) - F(s_1, \mathcal{F}^{k-1}(\gamma_2)(s_1))] ds_1 \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t C \|\mathcal{F}^{k-1}(\gamma_1)(s_1) - \mathcal{F}^{k-1}(\gamma_2)(s_1)\| ds_1 \\ &\leq \int_{t_0}^t C \int_{t_0}^{s_1} C \|\mathcal{F}^{k-2}(\gamma_1)(s_2) - \mathcal{F}^{k-2}(\gamma_2)(s_2)\| ds_2 ds_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{t_0}^t C \int_{t_0}^{s_1} C \int_{t_0}^{s_2} C \|\mathcal{F}^{k-3}(\gamma_1)(s_3) - \mathcal{F}^{k-3}(\gamma_2)(s_3)\| ds_3 ds_2 ds_1 \\ &\quad \vdots \\ &\leq \int_{t_0}^t C \int_{t_0}^{s_1} C \cdots \int_{t_0}^{s_{k-1}} C \|\gamma_1(s_k) - \gamma_2(s_k)\| ds_k ds_{k-1} \cdots ds_1 \\ &\leq C^k d(\gamma_1, \gamma_2) \left[\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \cdots \int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_k ds_{k-1} \cdots ds_1 \right] \end{aligned}$$

Mas

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \cdots \int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_k ds_{k-1} \cdots ds_1 = \frac{(t - t_0)^k}{k!}$$

Logo

$$d(\mathcal{F}^k(\gamma_1), \mathcal{F}^k(\gamma_2)) \leq \frac{C^k \varepsilon^k}{k!} d(\gamma_1, \gamma_2)$$

Para k suficientemente grande, $\frac{(C\varepsilon)^k}{k!} < 1$. Logo \mathcal{F}^k é uma contração. □

Pela Proposição 3, \mathcal{F} tem um único ponto fixo.

Portanto tomando $\delta > 0$ tal que

$$B = \bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0) \subset U \text{ e } M_\delta = \sup_B \|F(t, x)\|$$

existe uma única solução $\gamma : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ para qualquer $0 < \varepsilon \leq \min\{\delta, \frac{\delta}{M}\}$.

A demonstração do Teorema 2 é construtiva, isto é, nos dá uma maneira de encontrar soluções.

Exemplo 4. Considere a equação diferencial $x' = 2tx$ com condição inicial $t_0 = 0, x_0 = 1$. Definamos $F(\gamma) = 1 + \int_0^t 2s\gamma(s)ds$. A solução é encontrada pelo limite uniforme de uma sequência de aproximações da solução. Tomemos um elemento qualquer que satisfaça as condições iniciais, por exemplo $\gamma_0(t) \equiv 1$, definimos

$$\gamma_1(t) = F(\gamma_0)(t) = 1 + \int_0^t 2s ds = 1 + t^2$$

$$\gamma_2(t) = F(\gamma_1)(t) = 1 + \int_0^t 2s(1 + s^2) ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}.$$

Por indução, temos que

$$\gamma_n(t) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6} + \cdots + \frac{t^{2n}}{n!}$$

A afirmação é que $\gamma(t) = \lim \gamma_n(t) = e^{t^2}$ é solução da equação. De fato $\gamma'(t) = 2te^{t^2} = 2t\gamma(t)$.

Exemplo 5. Considere a equação diferencial à variáveis separáveis

$$x' = x^{2/3}$$

Resolvendo-a, temos $x' = x^{2/3} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = x^{2/3} \Leftrightarrow \frac{dx}{x^{2/3}} = dt, x \neq 0 \Leftrightarrow \int x^{-2/3} dx = t + C \Leftrightarrow 3x^{1/3} = t + c$. A solução será $x(t) = \left(\frac{t+c}{3}\right)^3$. Além disso $x(t) \equiv 0$ também é solução, pois 0 é um zero do campo de vetores $F(x) = x^{2/3}$ que define a equação. Logo, pela origem passam pelo menos duas soluções. Observe que a hipótese de $F(x)$ ser localmente lipschitziana não está verificada.

Veremos que a condição de ser lipschitz é necessária para unicidade de soluções, mas não para existência.

Exemplo 6. Seja $U = \mathbb{R}^{1+d}$ e F localmente lipschitziana limitada, então soluções de $x' = F(t, x)$ podem ser definidas em $(-\infty, +\infty)$. De fato, vimos que soluções podem ser definidas em $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ para qualquer $\varepsilon \leq \min\{\delta, \frac{\delta}{M_\delta}\}$. Neste caso, δ pode ser tomado arbitrariamente grande e M pode ser tomado independentemente de δ . Dessa forma podemos tomar ε tão grande quanto se queira. A Proposição 1 nos garante que F é lipschitziana em $B = \bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0)$.

Teorema 3. (Teorema de existência) *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua, U aberto de \mathbb{R}^{1+d} . Então, para todo $(t_0, x_0) \in U$ existe alguma solução $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ de $x' = F(t, x)$ com $\gamma(t_0) = x_0$.*

A demonstração desse teorema será consequência dos lemas a seguir. O primeiro deles é um lema técnico muito importante em várias situações. Em resumo, o conjunto das aplicações C^∞ é denso no conjunto de funções contínuas.

Lema 2. *Existem $F_n : U_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^∞ tais que $F_n \rightarrow F$ uniformemente em compactos no seguinte sentido: dado qualquer compacto $K \subset U$, $U_n \supset K \forall n$ suficientemente grande, $(F_n|_K) \rightarrow (F|_K)$ uniformemente, onde $U_n = \{(t, x) \in U : d((t, x), \partial U) > \frac{1}{n}\}$.*

Demonstração. Usamos a ideia de convolução, uma das técnicas mais clássicas para suavizar funções. Consideramos as chamadas Bumpfunction, funções do tipo $h_n : \mathbb{R}^{1+d} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $h_n(s, y) \geq 0, \forall (s, y) \in \mathbb{R}^{1+d}, h_n(s, y) = 0$ se $\|(s, y)\| \geq \frac{1}{n}, h_n \in C^\infty$ e $\int_{\mathbb{R}^{1+d}} h_n(s, y) ds dy = 1$.

Definimos

$$F_n(t, x) = \int_{\mathbb{R}^{1+d}} h_n(s, y) F(t + s, x + y) ds dy$$

Como \mathbb{R}^{1+d} é ilimitado, precisamos argumentar sobre a integral na definição acima. Como $h_n = 0$ no complementar de $\bar{B}_{\frac{1}{n}}(0)$, temos que

$$F_n(t, x) = \int_{\bar{B}_{\frac{1}{n}}(0)} h_n(s, y) F(t + s, x + y) ds dy$$

Como $\bar{B}_{\frac{1}{n}}(0)$ é compacto, F_n está bem definida. Fazendo a mudança de variável $t + s = \tau$ e $x + y = \xi$ escrevemos

$$F_n(t, x) = \int_{\bar{B}_{\frac{1}{n}}(0)} h_n(\tau - t, \xi - x) F(\tau, \xi) d\tau d\xi$$

Pela Regra de Leibniz, F_n é tão derivável quanto h_n , por exemplo

$$\frac{\partial F_n}{\partial t}(t, x) = \int_{\bar{B}_{\frac{1}{n}}^{1+d}(0)} \frac{\partial h_n}{\partial t}(\tau - t, \xi - x) F(\tau, \xi) d\tau d\xi$$

Logo F_n é C^∞ . Vejamos que F_n converge para F uniformemente em compactos. Seja $(t, x) \in K$, K compacto, $K \subset U$. Então

$$\|F_n(t, x) - F(t, x)\| = \left\| \int_{\bar{B}_{\frac{1}{n}}^{1+d}(0)} h_n(s, y) [F(t + s, x + y) - F(t, x)] ds dy \right\|.$$

Como F é contínua, F é uniformemente contínua em compactos. Assim $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall (t, x) \in K, \|(s, y)\| \leq \delta \Rightarrow \|F(t + s, x + y) - F(t, x)\| \leq \varepsilon$. Se n for suficientemente grande para que $\frac{1}{n} \leq \delta$, então

$$\|F_n(t, x) - F(t, x)\| \leq \int_{\bar{B}_{\frac{1}{n}}^{1+d}(0)} h_n(s, y) \varepsilon ds dy \leq \varepsilon, \forall (t, x) \in K.$$

Logo F_n converge para F uniformemente em qualquer compacto. □

De posse do lema anterior, consideremos as equações

$$x' = F_n(t, x) \quad (*_n)$$

Vimos que dado qualquer $(t_0, x_0) \in U$ existe $\varepsilon > 0$ e $\gamma_n : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d$ solução de $(*_n)$ com $\gamma_n(t_0) = x_0$. Para que o próximo lema faça sentido é necessário observar que esse ε pode ser tomado independente de n . De fato, fixado δ tal que $B = \bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0) \subset U$ devemos tomar $\varepsilon \leq \min\{\delta, \frac{\delta}{M}\}$. M poderia depender de n , ($M = \sup_B \|F_n(t, x)\|$). Mas F_n converge uniformemente para F em compactos, logo $\sup \|F_n - F\| \rightarrow 0$ em B . Podemos então tomar M independente de n (se F é limitada por M , F_n , para n grande, é limitada por $M + 1$).

Lema 3. *A sequência (γ_n) é equicontínua, isto é, $\forall \alpha > 0, \exists \beta > 0; \forall n, \forall t_1, t_2 \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), |t_1 - t_2| \leq \beta \Rightarrow \|\gamma_n(t_1) - \gamma_n(t_2)\| \leq \alpha$.*

Demonstração. Vamos mostrar que as γ_n são lipschitzianas com a mesma constante de lipschitz.

$$\begin{aligned} \gamma_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t F_n(s, \gamma_n(s)) ds \quad \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \\ \|\gamma_n(t_1) - \gamma_n(t_2)\| &= \left\| \int_{t_2}^{t_1} F_n(s, \gamma_n(s)) ds \right\| \\ &\leq |t_1 - t_2| \sup_B \|F_n(t, x)\| \leq M |t_1 - t_2| \end{aligned}$$

Logo, dado α , basta tomar $\beta = \frac{\alpha}{M}$. □

Pelo Teorema de Ascoli, existe uma subsequência (γ_{n_k}) que converge para alguma $\gamma : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d$ uniformemente em compactos.

Lema 4. γ é solução de $x' = F(t, x)$.

Demonstração. Cada γ_n satisfaz $\gamma_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F_n(s, \gamma_n(s)) ds \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Fazendo n tender a ∞ , como F_n (respect. γ_n) converge para F (respect. γ) uniformemente em compactos e F, F_n são contínuas, ficamos com

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \gamma(s)) ds, \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon).$$

Logo γ é solução de $x' = F(t, x)$. □

2.2 EQUAÇÕES DE ORDEM SUPERIOR

Toda a teoria até agora foi direcionada a equações diferenciais de primeira ordem. Vamos ver que o estudo feito para essa classe de equações diferenciais cobre o caso de equações de ordem superior a 1.

Teorema 4. *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua, U aberto de \mathbb{R}^{1+kd} , então para todo $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \in U$, existe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^k tal que $t_0 \in I, \gamma(t_0) = x_0, \gamma'(t_0) = x_1, \dots, \gamma^{(k-1)}(t_0) = x_{k-1}$ e $\gamma^{(k)}(t) = F(t, \gamma(t), \gamma'(t), \dots, \gamma^{(k-1)}(t)) \forall t \in I$. Além disso, se F for localmente lipschitziana nas variáveis $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ então, dada qualquer outra curva $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^d$ com $t_0 \in J, \beta(t_0) = x_0, \beta'(t_0) = x_1, \dots, \beta^{(k-1)}(t_0) = x_{k-1}$ e $\beta^{(k)}(t) = F(t, \beta(t), \beta'(t), \dots, \beta^{(k-1)}(t)) \forall t \in J$ teremos necessariamente $\gamma(t) = \beta(t) \forall t \in I \cap J$.*

A prova desse teorema segue da observação de que qualquer equação, de qualquer ordem, pode ser transformada em uma equação de primeira ordem da seguinte forma: dada $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d, U$ aberto de \mathbb{R}^{1+kd} , definimos $G : U \rightarrow \mathbb{R}^{kd}$ por

$$G(t, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, F(t, x_0, \dots, x_{k-1})).$$

Uma curva $C^k, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ é solução de $x^{(k)} = F(t, x, x', \dots, x^{(k-1)})$, se e somente se, $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^{kd}, \Gamma(t) = (\gamma(t), \gamma'(t), \dots, \gamma^{(k-1)}(t))$ é solução de $X' = G(t, X), X \in \mathbb{R}^{kd}$.

Exemplo 7. (Lei de Hooke). Considere a equação de segunda ordem $x'' = -Cx$. Fazendo $y = x'$ a equação fica $\begin{cases} y' = -cx \\ x' = y \end{cases}$ ou equivalentemente $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -cx \end{pmatrix}$. Agora temos uma equação de primeira ordem em dimensão 2.

2.3 SOLUÇÕES MAXIMAIS

Consideremos a equação $x' = F(t, x)$, onde $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ é contínua, U aberto de \mathbb{R}^{1+d} , seja $(t_0, x_0) \in U$ e

$$S_{t_0, x_0} := \{\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ soluções de } x' = F(t, x) : \gamma(t_0) = x_0\}$$

Definição 5. Dadas $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$, dizemos que $\gamma_1 \leq \gamma_2$ se, e somente se, $I_1 \subset I_2$ e $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in I_1$.

Isso define uma relação de ordem parcial em S_{t_0, x_0} .

Definição 6. Dizemos que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ é **solução maximal** de S_{t_0, x_0} se não existe $\gamma' : I' \rightarrow \mathbb{R}^d$ em S_{t_0, x_0} tal que $\gamma \leq \gamma'$ e $\gamma' \neq \gamma$.

Exemplo 8. Seja $U = \mathbb{R}^2$ e $x' = F(t, x), F(t, x) = x^2$. A equação $x' = x^2$ é separável, resolvendo-a informalmente temos

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + c \Rightarrow x = -\frac{1}{t + c}.$$

Se $x(t_0) = x_0$ então $x_0 = -\frac{1}{t_0 + c} \Rightarrow c = -\frac{1}{x_0} - t_0$, logo $x(t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{x_0} - t_0} \Rightarrow x(t) = \frac{-x_0}{(t - t_0)x_0 - 1}$.

Vamos estudar as soluções maximais dessa equação.

$$1 - x_0(t - t_0) = 0 \iff t = t_0 + \frac{1}{x_0}.$$

Se $x_0 > 0$, então $t_0 < t_0 + \frac{1}{x_0}$ e portanto a solução maximal é

$$\gamma : \left(-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \gamma(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}$$

Analogamente, se $x_0 < 0$, então o domínio da solução maximal é $\left(t_0 + \frac{1}{x_0}, +\infty\right)$.

Se $x_0 = 0$, a solução maximal é $\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \gamma(t) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$.

O teorema a seguir diz que toda solução pode ser estendida numa solução maximal. Esse teorema vale para F contínua. A prova usa o Lema de Zorn e por isso não é construtiva, não nos exhibe o elemento maximal. Todavia para o caso de F ser localmente lipschitziana veremos como obter o elemento maximal.

Teorema 5. Para toda solução $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ existe alguma solução $\gamma_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ maximal tal que $\gamma \leq \gamma_0$.

Definição 7. Dizemos que $x' = F(t, x)$ tem a propriedade de unicidade de soluções se dadas soluções $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d, \gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $t_0 \in I_1 \cap I_2$ com $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ tem-se $\gamma_1(t) = \gamma_2(t) \forall t \in I_1 \cap I_2$.

Exemplo 9. Se F é localmente lipschitziana na segunda variável x então $x' = F(t, x)$ tem a propriedade de unicidade.

Quando a equação tem a propriedade de unicidade o elemento maximal de S_{t_0, x_0} é $\Gamma : (\bigcup I_\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^d, \Gamma(t) = \gamma(t), t \in I_\gamma, \gamma : I_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^d$ em S_{t_0, x_0} . Essa função está bem definida por que a propriedade de unicidade diz que se $t \in I_\gamma \cap I_\beta$ então $\gamma(t) = \beta(t)$. Nesse caso, mais que maximal, Γ é elemento máximo, logo única.

Exemplo 10. Considerando a equação $x' = x^2, U \subset \mathbb{R}^2$, vimos que sua solução é $x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}$, que não está definida para todo t em $(-\infty, \infty)$.

O próximo teorema nos diz que se uma solução maximal não está definida para todos os valores do tempo, então é porque existe um momento em que a solução sai de qualquer compacto e não volta mais.

Teorema 6. *Seja $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^d$ solução maximal de $x' = F(t, x)$, F localmente lipschitziana em x . Se $b < +\infty$ então $\gamma(t)$ converge para ∂U quando t tende a b , isto é, para todo compacto $K \subset U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall t \in (b - \varepsilon, b)$ temos $(t, \gamma(t)) \notin K$.*

Demonstração. Seja $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^d$ solução maximal com $b < \infty$. Dado K compacto contido em U fixamos $\delta > 0$ tal que $\bar{B}_{2\delta}(t_0) \times \bar{B}_{2\delta}(x_0) \subset U$ para todo $(t_0, x_0) \in K$, isto é, a distância de K ao complementar de U é maior que δ . Sabemos que, tomando $\varepsilon_0 = \min \{ \delta, \frac{\delta}{M} \}, M = \sup \{ \|F(t, x)\| : (t, x) \in \bar{B}_\delta(K) \}$ temos que para todo $(t_0, x_0) \in K$ existe solução $\gamma_{t_0, x_0} : (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^d$ de $x' = F(t, x), \gamma_{t_0, x_0}(t_0) = x_0$.

Suponhamos que existe $\hat{t} \in (b - \varepsilon_0, b)$ tal que $(\hat{t}, \gamma(\hat{t})) \in K$. Então tomando $t_0 = \hat{t}$ e $x_0 = \gamma(\hat{t})$, existe $\hat{\gamma} : (\hat{t} - \varepsilon_0, \hat{t} + \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^d$ solução de $x' = F(t, x)$ com $\hat{\gamma}(t_0) = x_0$.

Por unicidade γ e $\hat{\gamma}$ coincidem na interseção dos seus domínios. Podemos então definir uma nova solução $\Gamma : (a, b) \cup (\hat{t} - \varepsilon_0, \hat{t} + \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^d$ definida por $\Gamma(t) = \gamma(t)$ se $t \in (a, b)$ e $\Gamma(t) = \hat{\gamma}(t)$ se $t \in (\hat{t} - \varepsilon_0, \hat{t} + \varepsilon_0)$. Pela unicidade no Teorema 2, Γ está bem definida. Além disso, como $\hat{t} + \varepsilon_0 > b, \gamma \leq \Gamma$ e $\gamma \neq \Gamma$. Mas isso contradiz a maximalidade de γ .

□

Corolário 1. *Seja $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que $G \in C^1$ e $G(x) \cdot x \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ com $\|x\| > 1000$. Então toda solução maximal de $x' = G(x)$ está definida em $(a, +\infty)$.*

Demonstração. Tem-se que $\frac{d}{dt} \|\gamma(t)\|^2 \leq 0$ sempre que $\|\gamma(t)\| > 1000$. De fato, sempre que $\|\gamma(t)\| > 1000$

$$\|\gamma(t)\|^2 = \gamma(t) \cdot \gamma(t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \|\gamma(t)\|^2 = 2\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = \gamma(t) \cdot G(\gamma(t)) \leq 0.$$

Dessa forma, se $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^d$ é solução intersectando $\partial B_R(0)$ com $R > 1000$ então essa intersecção é no sentido para dentro. Isto é, se $\gamma(t_0) = x_0$ onde $\|x_0\| = R$ então $\gamma(t) \in \bar{B}_R(0) \forall t \geq t_0$, donde $b = +\infty$ pelo teorema anterior.

□

Exemplo 11. Considere a equação $x' = x(x - 1)$. Se $x_0 \in (0, 1)$ as soluções associadas são monótonas decrescentes. A solução maximal nesse caso está definida em $(-\infty, +\infty)$, pois se o

intervalo maximal fosse $(-\infty, b)$, a solução estaria presa no compacto $K = [t_0, b] \times [0, 1]$, o que contradiz o teorema acima. Fora do intervalo $(0, 1)$ as soluções maximais não estão definidas para todo tempo, o comportamento nesse caso (para x grande) é semelhante a $x' = x^2$.

2.4 EQUAÇÕES AUTÔNOMAS E O TEOREMA DO FLUXO TUBULAR

Uma equação diferencial é dita **autônoma** quando F independe do tempo. São equações do tipo $x' = F(x)$. Uma propriedade fundamental dessas equações é a seguinte: se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ é solução, então dado qualquer $a \in \mathbb{R}$, $\beta : I - a \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\beta(t) = \gamma(t + a)$ também é solução. Em outros termos, para equações autônomas, podemos transladar o tempo sem alterar a classe das soluções.

Em particular, sempre existe solução β com condição inicial $\beta(0) = x_0$, isto é, sempre podemos fixar o tempo inicial como sendo 0. Supondo que a equação autônoma tem a propriedade de unicidade de soluções e denotando por I_{x_0} o domínio da solução maximal γ_{x_0} de $x' = F(x)$, $x(0) = x_0$, considere a aplicação $\gamma : D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\gamma(t, x) = \gamma_x(t)$, onde $D = \{(t, x) : t \in I_x\}$. Temos as seguintes propriedades:

i) $\gamma(0, x) = \gamma_x(0) = x \forall x \in U$;

ii) dado $y = \gamma_x(s)$ temos que $\gamma_y(t) = \gamma_x(t + s)$ e $I_y = I_x - s$. Isto é, $\gamma(t, \gamma(s, x)) = \gamma(t + s, x) \forall x \in U, \forall t \in I_y, \forall s \in I_x$;

iii) γ é contínua;

iv) γ é C^k se F é C^k ;

v) se $\gamma(a, x) = \gamma(b, y)$ para algum a e algum b , então $\gamma(t, x) = \gamma(t + (b - a), y) \forall t \in I_x$. De fato, seja $z = \gamma(a, x) = \gamma(b, y)$. Pela propriedade ii), $\gamma(t + b, y) = \gamma(t, z) = \gamma(t + a, x) \forall t \in I_z$, logo $\gamma(t + a, x) = \gamma(t + b, y) \forall t \in I_z$. Fazendo $s = t + a$, $\gamma(s, x) = \gamma(s + (b - a), y) \forall s \in I_x$;

Assim, para equações autônomas com a propriedade de unicidade, se duas trajetórias se intersectam, então são a mesma, a menos de translação no tempo.

vi) em particular se $\gamma(a, x) = \gamma(b, x)$ para algum $a \neq b$ então $\gamma(t, x) = \gamma(t + (b - a), x) \forall t \in I_x$. Neste caso, $\gamma(\cdot, x)$ é periódica e $I_x = \mathbb{R}$. Evidentemente, como essa função é periódica, podemos estendê-la a todo \mathbb{R} , e essa extensão será a solução maximal, definida em toda reta, pois sendo periódica, sua imagem está contida num compacto.

A curva parametrizada por $t \rightarrow \gamma(t, x) = \gamma_x(t)$, $t \in I_x$ é chamada trajetória ou **órbita** do ponto $x \in U$. U é chamado **espaço de fases** da equação.

Segue que existem três tipos de trajetórias:

i) Injetivas (ou Abertas, ou Regulares): $\gamma(a, x) \neq \gamma(b, x) \forall a \neq b$.

ii) Periódicas (ou Fechadas): $\exists T \neq 0; \gamma(t, x) = \gamma(t + T, x), \forall t \in I_x$.

iii) Estacionárias (ou Constantes): $\gamma(t, x) = x \forall t \in I_x$. São funções periódicas sem período definido.

A trajetória de x é estacionária se e somente se $F(x) = 0$.

Seja $x' = F(t, x)$, onde $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é aberto. Uma solução $\varphi(t)$ definida para $t \geq 0$ diz-se **estável** (no sentido de Lyapunov) se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\psi(t)$ é solução com $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta$, então $\psi(t)$ também está definida para todo $t \geq 0$ e $|\varphi(t) - \psi(t)| < \epsilon, \forall t \geq 0$. Uma solução é **instável** se não for estável.

Se além disso existir δ_1 tal que $\delta_1 > |\psi(0) - \varphi(0)| \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0$, diremos que $\varphi(t)$ é **assintoticamente estável**.

Um ponto $x \in U$ é dito **ponto singular** de F se $F(x) = 0$. Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores contínuo e x_0 um ponto singular isolado de F . Consideremos o sistema autônomo associado. Dizemos que x_0 é estável (respectivamente assintoticamente estável) se a órbita constante $\varphi(t) = x_0$ é estável (respectivamente assintoticamente estável). Em outras palavras, se dada uma vizinhança $V \subset U$ de x_0 existir vizinhança W de x_0 tal que $x \in W \implies [0, +\infty) \subset I_x$ e $\varphi_x(t) \in V, \forall t \geq 0$ (respectivamente, se além disso existir vizinhança $W \supset W_1 \ni x_0$ tal que $x \in W_1 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_x(t) = x_0$).

A título de exemplo considere a equação linear $x' = Ax$, onde todo valor característico de $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tem parte real negativa. Vamos mostrar que $x_0 = 0$ é assintoticamente estável. As soluções de um sistema desse tipo são dadas por

$$\gamma_x(t) = e^{tA}x.$$

Para o cálculo da exponencial lembramos que pelo Teorema da Forma Canônica de Jordan, a menos de mudança de base

$$A = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_n] = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix}, \text{ onde } A_i = D_i + N_i.$$

Além disso, D_i é diagonalizável, N_i é nilpotente e $D_i N_i = N_i D_i$.

Temos que $e^{tA} = \text{diag}[e^{tD_1}e^{tN_1}, e^{tD_2}e^{tN_2}, \dots, e^{tD_n}e^{tN_n}]$. Considerando o caso em que só temos valores característicos λ_i reais,

$$e^{tD_i} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_i} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_i} \end{pmatrix}.$$

Temos $\lambda_i < 0 \forall i$. Portanto $e^{t\lambda_i} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, logo $\|e^{tD_i}\| = e^{t\lambda_i} \leq e^{-t\theta}$ onde $\theta = \min\{|\lambda_i|\}$ ($\lambda_i \leq -\theta \Leftrightarrow \theta \leq -\lambda_i = |\lambda_i|$). É possível mostrar que $\|e^{tN_i}\| = \|I + tN_i + \dots + \frac{(tN_i)^k}{k!}\| \leq p(t)$, onde $p(t)$ é um polinômio de grau k . Por exemplo, consideremos a matriz $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\|e^{tN}\| \leq 1+t$. Portanto $\|e^{tD_i}e^{tN_i}\| \leq e^{-t\theta}p(t)$. A exponencial determina o comportamento do produto, logo $e^{-t\theta}p(t) \leq Ce^{-t\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \theta$. Fica provado então que existem $\theta_0 > 0$ e $C > 0$ tais que $\|e^{tA}\| \leq Ce^{-t\theta_0} \quad \forall t \geq 0$. No caso complexo, podemos tomar qualquer $\theta_0 < \min\{|\text{Re}\lambda_i|\}$.

Dado $\varepsilon > 0$ e uma solução $\psi(t) = e^{tA}y$ com $\|y - 0\| < \delta$, $y = \psi(0)$ segue que $\|\psi(t)\| = \|e^{tA}y\| \leq Ce^{-t\theta_0}\|y\| \leq Ce^{-t\theta_0}\delta \forall t \geq 0$. Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ segue que $\|\psi(t) - 0\| \leq Ce^{-t\theta_0}\delta \leq \varepsilon$. Além disso $\|\psi(t) - 0\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Logo $x_0 = 0$ é assintoticamente estável.

Um fluxo em U é uma família de transformações $f^t : U \rightarrow U, t \in \mathbb{R}$ tal que $f^0 = id$ e $f^{t+s} = f^t \circ f^s \forall t, s \in \mathbb{R}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ denotamos

$$U_t = \{x \in U : t \in I_x\}.$$

Definindo $f^t : U_t \rightarrow U, f^t(x) = \gamma(t, x)$ temos que:

i) $f^0 = id$.

ii) $f^{t+s} = f^s \circ f^t \forall t, s \in \mathbb{R}$.

Nesse caso, como f^t está definida em U_t , chamaremos pseudo-fluxo. Dizemos que uma equação autônoma é completa se $I_x = (-\infty, +\infty) \forall x \in U$ ou equivalentemente se $U_t = U \forall t \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se for verdade que $\forall x \in U, \exists K_x$ compacto contido em U tal que $\gamma(t, x) \in K_x \forall t \in I_x$ então $I_x = (-\infty, +\infty) \forall x \in U$ e a equação é completa.

Exemplo 12. Considere a equação

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -x_2 + \varepsilon x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_1 - \varepsilon x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix}.$$

Para $\varepsilon = 0$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Pensando em termos de coordenadas polares, ficamos com o sistema equivalente

$$\begin{cases} \rho' = 0 \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

As trajetórias são periódicas, são círculos percorridos com velocidade proporcional ao raio. Para $\varepsilon > 0$ qualquer

$$\begin{cases} \rho' = \varepsilon\rho(1 - \rho^2) \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

Os zeros do campo de vetores são $\rho = 1, \rho = 0$. Para $\rho = 1$ temos uma trajetória periódica. Se $\rho < 1$, já sabemos que uma solução que começa no interior do círculo não sai mais, além disso $\rho < 1$ implica $\rho' > 0$, logo a distância a origem é uma função crescente no tempo e o giro é em sentido anti-horário. As trajetórias são espirais crescentes. Se $\rho > 1$, temos $\rho' < 0$ e as trajetórias são espirais decrescentes (Figura 2.1). $I_{(x_1, x_2)} = (-\infty, +\infty)$ para todo $(x_1, x_2) \in \bar{B}_1(0, 0)$, pois as trajetórias correspondentes estão presas nesse compacto. $I_{(x_1, x_2)} = (a, +\infty)$ para todos os outros pontos. Uma análise do comportamento das trajetórias nesse exemplo nos dá a impressão de que elas acumulam no círculo unitário. Veremos que de fato isso acontece.

Um dos nossos objetivos nesse trabalho é estudar o comportamento local de soluções próximo

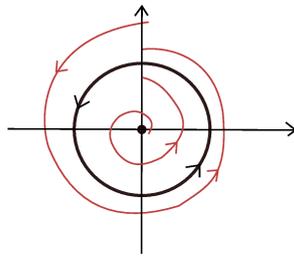


Figura 2.1: Exemplo 12

de um ponto ou trajetória em particular, o comportamento em pequenos pedaços do espaço de fases. Para isso vamos distinguir alguns casos, dependendo do tipo de solução.

O Teorema a seguir tem a ver com essa teoria local para trajetórias próximas de uma trajetória regular, não estacionária. Ele mostra que a menos de escolher uma coordenada adequada, tão diferenciável quanto F , as trajetórias do campo de vetores próximo de um ponto regular são equivalentes a retas horizontais percorridas com velocidade 1 próximo da origem, isto é, existe um único modelo local de comportamento do fluxo próximo de pontos regulares.

Teorema 7. (Teorema do Fluxo Tubular) *Seja U aberto de \mathbb{R}^d , $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d, C^k, 1 \leq k \leq \infty$ e seja $x_0 \in U$ tal que $F(x_0) \neq 0$. Então existe $\varepsilon > 0$ e $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)^{d-1} \rightarrow U$ difeomorfismo C^k tal que $h(0, 0) = x_0$ e $t \mapsto h(t, \xi_2, \dots, \xi_d)$ é solução da equação $x' = F(x)$.*

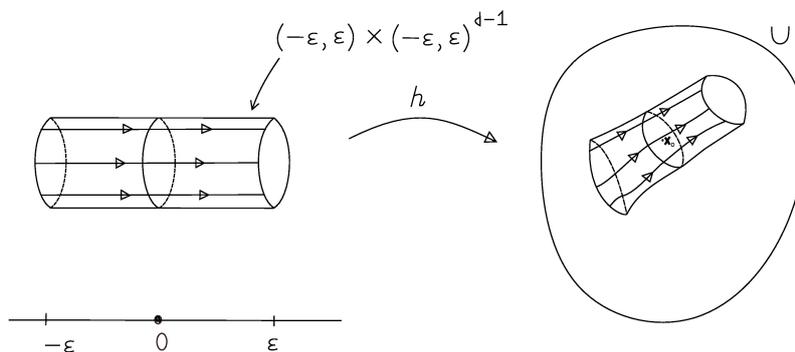


Figura 2.2: Teorema do Fluxo Tubular

Demonstração. Consideremos $g : B_1^{d-1}(0) \rightarrow U$ um mergulho C^∞ (uma aplicação C^∞ que é um difeomorfismo sobre a sua imagem) com $g(0) = x_0$ e cuja imagem é transversal a γ_{x_0} no ponto x_0 . Tomamos $h : D \rightarrow U, h(t, \xi_2, \dots, \xi_d) = \gamma(t, g(\xi_2, \dots, \xi_d))$ onde D é o conjunto dos (t, ξ_2, \dots, ξ_d) tal que t pertence ao domínio da solução maximal que passa por $(0, \xi_2, \dots, \xi_d)$. Temos que h é C^k , pois F e g são C^k . Vejamos que $Dh(0, 0) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um isomorfismo. De fato

$$Dh(0, 0)|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}} = Dg(0) \tag{2.1}$$

pois $h(0, \xi_2, \dots, \xi_d) = \gamma(0, g(\xi_2, \dots, \xi_d)) = g(\xi_2, \dots, \xi_d)$ e g é um mergulho, portanto $Dh(0, 0)|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}}$ é um isomorfismo sobre a sua imagem. Por outro lado

$$Dh(0, 0)_{\mathbb{R} \times \{0\}} = (\partial_t h)(0, 0) = F(\gamma(0, g(0))) = F(x_0) \tag{2.2}$$

pois $\partial_t \gamma(t, g(\xi_2, \dots, \xi_d)) = F(\gamma(t, g(\xi_2, \dots, \xi_d)))$ e $F(x_0)$ é transversal a imagem do mergulho g . Assim $Im Dh(0, 0)$ tem dimensão pelo menos $d - 1$ pelo item (2.1) e com o item (2.2) concluímos que $\dim(Im Dh(0, 0)) \geq d$. Então $Dh(0, 0)$ é sobrejetivo, logo é isomorfismo. Para concluir temos que pelo Teorema da Função Inversa, existe $\varepsilon > 0$ tal que $h|_{(-\varepsilon, \varepsilon)^d}$ é difeomorfismo sobre a sua imagem. A aplicação h , da forma como foi definida, tem as propriedades que procuramos. \square

Corolário 2. *Seja $\gamma_{x_0} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^d, \gamma_{x_0}(0) = x_0$ solução maximal de $x' = F(x)$ e suponhamos que existe $p = \lim_{t \rightarrow b} \gamma_{x_0}(t) \in U$. Então $b = +\infty$ e p é ponto estacionário, isto é, $F(p) = 0$.*

Demonstração. Seja $\rho > 0$ tal que, $\bar{B}_\rho(0) \subset U$. Como $\gamma_{x_0}(t) \rightarrow p$ temos que γ_{x_0} nunca sai de $\bar{B}_\rho(0)$, logo $b = +\infty$. Suponhamos que $F(p) \neq 0$. Como $\gamma_{x_0}(t) \rightarrow p$, existe $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\gamma_{x_0}(t_k) \rightarrow p$, então

$$\begin{aligned} \gamma(t_k, x_0) &\rightarrow p = \gamma(0, p) \\ \gamma\left(t_k + \frac{\varepsilon}{2}, x_0\right) &= \gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}, \gamma(t_k, x_0)\right) \rightarrow \gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}, p\right). \end{aligned}$$

Daí $\gamma_{x_0}(t_k + \frac{\varepsilon}{2}) \rightarrow \gamma_p(\frac{\varepsilon}{2})$, onde γ_p é a solução de $x' = F(x), \gamma_p(0) = p$. Mas pelo teorema do fluxo tubular $\gamma_p(\frac{\varepsilon}{2}) = h(\frac{\varepsilon}{2}) \neq h(0) = p$, com h um difeomorfismo, logo $\gamma(\frac{\varepsilon}{2}, p) \neq \gamma(0, p) = p$. Então $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_{x_0}(t)$ não existe, o que é uma contradição. \square

Voltando ao Exemplo 12, vemos que as soluções satisfazem as condições do corolário acima e portando convergem para o ponto estacionário $\rho = 1$, ou seja, acumulam no círculo unitário.

2.5 SISTEMAS LINEARES: O CASO BIDIMENSIONAL

Vamos passar agora a analisar fluxos na vizinhança de pontos estacionários. Suponha p um ponto estacionário. Pela Fórmula de Taylor, para x próximo de p

$$F(x) \approx F(p) + DF(p)(x - p).$$

Logo $F(x) \approx DF(p)(x - p)$. Isso sugere que, na vizinhança de p , o fluxo, as soluções de $x' = F(x)$ seja parecido com o fluxo de $v' = Av$ onde $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, A = DF(p), v = x - p$, para v próximo da origem. Vamos fazer um breve estudo dessas equações lineares.

Proposição 5. *A aplicação $\mathbb{R} \ni t \rightarrow e^{tA} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ é derivável e $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$, isto é, essa aplicação é solução da equação diferencial $X' = AX, X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.*

Demonstração.

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2} + \dots + \frac{t^n A^n}{n!} + \dots$$

Derivando termo a termo, temos a série $A + tA^2 + \frac{t^2 A^3}{2} + \dots + \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} + \dots$ ou ainda $A[I + tA + \frac{t^2 A^2}{2} + \dots + \frac{t^{n-1} A^{n-1}}{(n-1)!} + \dots] = Ae^{tA}$. Essa derivação pode ser feita, pois as duas séries são convergentes, pelo critério de Weierstrass. \square

Vamos entender como podemos calcular a exponencial e qual o comportamento do fluxo para uma equação linear com coeficientes constantes em dimensão dois

$$x' = Ax, x \in \mathbb{R}^2$$

e $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

Vamos supor que A é invertível, ou seja, que $\det A \neq 0$. Segue que $x = 0$ é o único ponto crítico do sistema linear e vale o seguinte resultado.

Teorema 8. *O ponto crítico $x = 0$ do sistema linear $x' = Ax$ será:*

- i) assintoticamente estável se λ_1 e λ_2 são reais e negativos ou tem parte real negativa;*
- ii) estável, mas não assintoticamente estável, se λ_1 e λ_2 são imaginários puros;*
- iii) instável se λ_1 e λ_2 são reais e um deles é positivo ou se ambos tem parte real positiva.*

Demonstração. Vamos analisar alguns casos.

Caso 1 - A tem dois auto-valores reais e distintos $\lambda_1 < \lambda_2$. Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes. Portanto os autovetores associados a λ_1 e λ_2 formam uma base, isto é, A é diagonalizável. Assim, existe $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ invertível tal que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Assim

$$Pe^{tA}P^{-1} = e^{PtAP^{-1}} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Para entendermos o comportamento desse fluxo temos que considerar alguns subcasos, já que o comportamento de $e^{t\lambda}$ depende do sinal de λ .

Caso 1.1 - $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: Nesse caso, quando $t \rightarrow +\infty$, as soluções também tendem a infinito, e quando $t \rightarrow -\infty$, as soluções tendem a zero. Temos o que se chama um **nó repulsor**. Como $\lambda_2 > \lambda_1$, a coordenada relativa ao autoespaço E_2 gerado pelo autovetor λ_2 cresce mais rápido. Temos então o comportamento da Figura 2.3 (ao centro).

Caso 1.2 - $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: O comportamento é o mesmo que no caso anterior com o sentido do movimento nas trajetórias sendo invertido. Nesse caso temos o que se chama **nó atrator** (Figura 2.3 (a esq.)).

Caso 1.3 - $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: O fluxo é dado pela aplicação $t \rightarrow e^{tA}x$, isto é

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Nesse caso a solução que passa por (x_1, x_2) é $\gamma(t) = (e^{t\lambda_1}x_1, e^{t\lambda_2}x_2) = (x(t), y(t))$. Quando $t \rightarrow +\infty$, a primeira coordenada tende a zero e a segunda tende a infinito. Temos $x(t)^{\lambda_2}y(t)^{-\lambda_1} = e^{t\lambda_1\lambda_2}x_1^{\lambda_2}e^{-t\lambda_1\lambda_2}x_2^{-\lambda_1} = x_1^{\lambda_2}x_2^{-\lambda_1}$, ou seja a função $\phi(x, y) = x^{\lambda_2}y^{-\lambda_1}$ é constante em trajetórias do fluxo. Dessa forma, as trajetórias estão contidas em curvas de nível de ϕ , que são deformações de hipérbolas. O retrato de fase ilustrado na Figura 2.3 (a dir.) é chamado **sela**.

Apesar de o conjunto de matrizes que tem 0 como um de seus autovalores ser um conjunto pequeno, vamos olhar os casos onde isso ocorre.

Caso 1.4 - $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$: A solução que passa por (x_1, x_2) é dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0 \implies PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Então o eixo x é um autoespaço da matriz, associado ao autovalor nulo. Portanto o eixo x pertence ao núcleo, logo esse eixo é formado por zeros do campo de vetores. Todo o eixo x consiste de pontos estacionários. O retrato de fase consiste em retas verticais paralelas ao eixo y , cada reta dessas representando 3 trajetórias. As trajetórias associadas a $y > 0$ apontam para cima e as associadas a $y < 0$ apontam para baixo, se $y = 0$ a trajetória é estacionária.

Caso 1.5 - $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$: Análogo ao caso anterior.

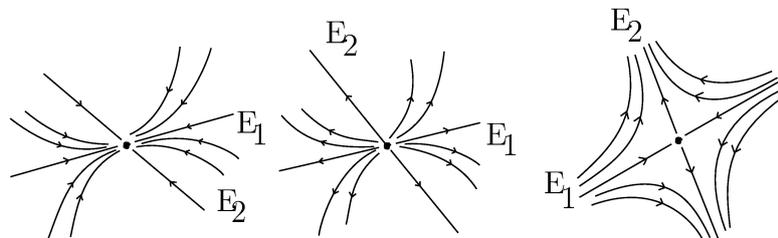


Figura 2.3: Nó atrator (à esq.), Nó repulsor (ao centro) e Sela (à dir.).

Caso 2 - A tem um único autovalor λ : Pelo Teorema da Forma Canônica de Jordan temos duas possibilidades para PAP^{-1} .

Caso 2.1 - $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Caso 2.1.1 - $\lambda > 0$: As soluções são

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Como $\lambda > 0$, as soluções tendem a infinito e o retrato de fase consiste em retas apontando

para fora como na Figura 2.4 (à dir.). A origem é instável.

Caso 2.1.2 - $\lambda < 0$: Análogo a 2.1.1 com as retas apontando para dentro, convergindo para a origem. A origem é assintoticamente estável.

Caso 2.1.3 - $\lambda = 0$: Nesse caso as soluções são $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Então todos os pontos são estacionários.

Caso 2.2 - $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: Nesse caso

$$Pe^{tA}P^{-1} = e^{tD}e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t\varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Caso 2.2.1 - $\lambda > 0$: As soluções ficam

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & t\varepsilon e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Quando $t \rightarrow +\infty$ as trajetórias tendem a $+\infty$. Quando $t \rightarrow -\infty$ tendem a 0. A primeira coordenada tende a infinito mais rápido que a segunda devido ao fator t em $t\varepsilon e^{t\lambda}$.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda}x_1 + t\varepsilon e^{t\lambda}x_2 \\ e^{t\lambda}x_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{x_1}{x_2} + t\varepsilon$$

Temos nesse caso um **nó repulsor** indicado na Figura 2.5(à dir.).

Caso 2.2.2 - $\lambda < 0$: Análogo ao caso anterior com sentido invertido, **nó atrator**.

Caso 2.2.3 - $\lambda = 0$: Temos

$$Pe^{tA}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & t\varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aqui, em comparação com o caso 2.1.3, o comportamento muda radicalmente. As soluções não são todas estacionárias.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t\varepsilon y_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Todo o eixo y é formado por pontos estacionários. As trajetórias no retrato de fase são retas paralelas ao eixo x , apontando para a direita se $y > 0$ e para a esquerda se $y < 0$. Esse caso é o que se chama **cisalhamento**.

Caso 3 - Nenhum autovalor, isto é, os zeros do polinômio característico são complexos não

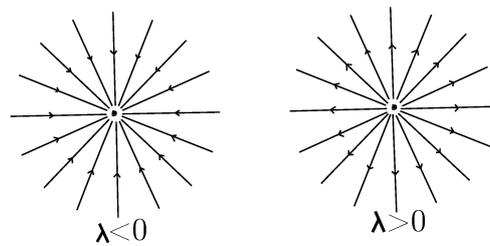


Figura 2.4: Autovalores iguais: dois autovetores independentes.

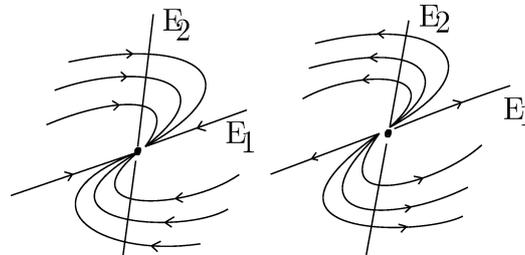


Figura 2.5: Autovalores iguais: um autovetor independente.

reais $\alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$.

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$Pe^{tA}P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 \\ 0 & e^{t\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Caso 3.1 - $\alpha > 0, \beta > 0$: As soluções são

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 \\ 0 & e^{t\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t\beta & -\sin t\beta \\ \sin t\beta & \cos t\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Logo temos um **foco repulsor** (Figura 2.6 (a dir.)).

Caso 3.2 - $\alpha > 0, \beta < 0$: Análogo ao caso anterior mas as soluções espiralam em sentido contrário.

Caso 3.3 - $\alpha < 0, \beta > 0$: As trajetórias espiralam para dentro. Temos um foco atrator (Figura 2.6 (ao centro)).

Caso 3.4 - $\alpha < 0, \beta < 0$: Análogo ao caso anterior com o sentido das trajetórias sendo invertido.

Caso 3.5 - $\alpha = 0, \beta > 0$: As trajetórias são círculos em torno da origem. Essa configuração se chama **centro** (Figura 2.6 (a esq.)).

Caso 3.6 - $\alpha = 0, \beta < 0$: Análogo ao caso anterior com sentido contrário.

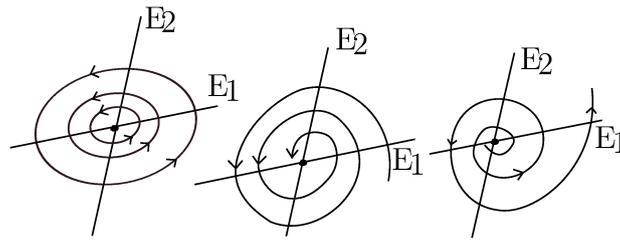


Figura 2.6: Centro (à esq.), foco atrator (ao centro) e foco repulsor (à dir.)

□

Segue-se do Teorema 8 que os autovalores da matriz A determinam o tipo de ponto crítico em $x = 0$ e suas características de estabilidade. No caso do centro, se mudarmos um pouco o valor de α passamos de trajetórias fechadas para espirais (que vão a infinito se $\alpha > 0$ e para 0 se $\alpha < 0$). Dizemos então que o centro é estruturalmente instável, pequenas mudanças nos parâmetros do campo de vetores podem afetar "drasticamente" o retrato de fase. Estudaremos mais a fundo situações como essa na seção 3.1.

3. ESTABILIDADE

O conceito de estabilidade é um dos principais na teoria moderna de equações diferenciais. Uma das maneiras de se pensar em estabilidade consiste em estabelecer se um dado sistema dinâmico, dado por exemplo pelas soluções de um sistema de equações diferenciais, pode ser perturbado sem que as suas soluções ou o seu comportamento assintótico (quando o tempo tende a infinito) mude radicalmente. Outro modo de se pensar em estabilidade é devido a Lyapunov e busca estabelecer se, dada uma solução de uma equação diferencial, as soluções suficientemente próximas a esta solução fixada, permanecem próximas a esta com o passar do tempo. Em particular, se temos uma singularidade (uma solução estacionária), perguntamos se soluções partindo de pontos suficientemente próximos a esta singularidade, permanecem próximas a esta ou mesmo, no caso do que se chamará estabilidade assintótica, se estas soluções convergem para a singularidade com o passar do tempo.

3.1 ESTABILIDADE ESTRUTURAL EM SISTEMAS BIDIMENSIONAIS

O problema da estabilidade estrutural consiste em analisar se modificando um pouco o campo de vetores F , o retrato de fase não modifica muito. Em geral isso não é verdade.

Quando um sistema $x' = Ax$ aparece em algum campo aplicado, os coeficientes resultam, em geral, de medidas de determinadas quantidades físicas. Tais medidas estão sujeitas, muitas vezes, a pequenos erros, de modo que é de interesse investigar se pequenas mudanças (perturbações) nos coeficientes, afetam a estabilidade ou instabilidade de um ponto crítico e/ou o padrão das trajetórias.

A dependência do comportamento global das soluções aos autovalores fica evidente ao perturbarmos o sistema, em dois dos casos essas perturbações alteram a natureza dos autovalores e isso influencia, em maior ou menor grau, o comportamento das trajetórias no espaço de fase.

Como os valores característicos r_1, r_2 são as raízes da equação polinomial $\det(A - rI) = 0$, então pequenas perturbações em alguns dos coeficientes são refletidas em pequenas perturbações nos valores característicos.

CASO 1 - Os autovalores r_1, r_2 de A são reais, distintos e não nulos: Neste caso, perturbações suficientemente pequenas nos coeficientes não alteram a estabilidade ou instabilidade do sistema, nem o tipo de ponto crítico. Por exemplo, se r_1 e r_2 são reais, negativos e distin-

tos, então uma mudança pequena nos coeficientes não vai alterar os sinais de r_1 e r_2 , nem vai permitir que eles se tornem iguais. Assim, o ponto crítico permanecerá um nó assintoticamente estável.

CASO 2 - Os autovalores são complexos conjugados, necessariamente com parte imaginária não nula: A situação sensível acontece quando $r_1 = i\mu$ e $r_2 = -i\mu$, ou seja, quando o ponto crítico é um centro. Uma ligeira mudança nos coeficientes, implica em novos autovalores $r'_1 = \lambda' + i\mu'$ e $r'_2 = \lambda' - i\mu'$, onde λ' é pequeno em valor absoluto e $\mu' \cong \mu$. Se $\lambda' \neq 0$, então as trajetórias do sistema perturbado serão espirais, em vez de elipses. O sistema é assintoticamente estável se $\lambda' < 0$, mas é instável se $\lambda' > 0$.

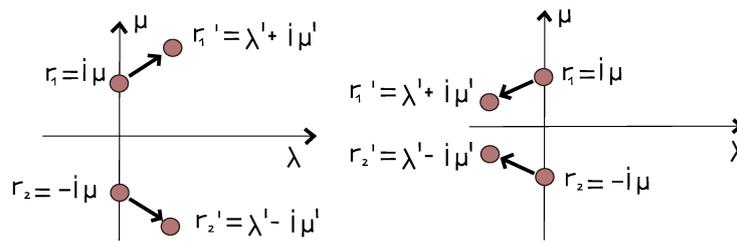


Figura 3.1: Perturbação esquemática de $r_1 = i\mu$, $r_2 = -i\mu$.

Por exemplo, sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & \epsilon \end{pmatrix}$ com $|\epsilon|$ arbitrariamente pequeno.

Para o sistema $x' = Ax$ temos $\det(A - rI) = 0 \Leftrightarrow r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i$. Logo $(0, 0)$ é um centro.

Para o sistema $x' = Bx$ temos $\det(B - rI) = 0 \Leftrightarrow r^2 - 2\epsilon r + 1 + \epsilon^2 = 0 \Leftrightarrow r = \epsilon \pm i$. Logo $(0, 0)$ é um ponto espiral para $\epsilon \neq 0$. Se $\epsilon < 0$, o ponto espiral vai ser assintoticamente estável; se $\epsilon > 0$, o ponto espiral vai ser instável.

CASO 3: Os autovalores são reais, iguais e não nulos. Neste caso o ponto crítico é um nó. Pequenas perturbações nos coeficientes fazem com que as raízes iguais se separem (bifurquem). Se as raízes separadas forem reais, então o ponto crítico do sistema perturbado permanecerá um nó, mas se as raízes separadas forem complexas conjugadas então o ponto crítico se transformará em um ponto espiral. Nesse caso, a estabilidade ou instabilidade do sistema não é afetada por pequenas perturbações nos coeficientes, mas o tipo de ponto crítico pode mudar.

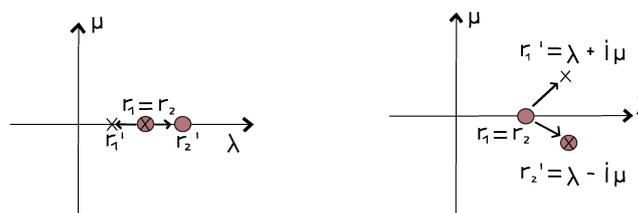


Figura 3.2: Perturbação esquemática de $r_1 = r_2$.

Por exemplo, sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\epsilon & -1 \end{pmatrix}$ com $|\epsilon|$ arbitrariamente pequeno. Para o sistema $x' = Ax$ temos $\det(A - rI) = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = -1$, de modo que $(0,0)$ é um nó assintoticamente estável. Para o sistema $x' = Bx$ temos $\det(B - rI) = 0 \Leftrightarrow r^2 + 2r + 1 + \epsilon = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm \sqrt{-\epsilon}$. Se $\epsilon > 0$, então os autovalores são $-1 \pm i\sqrt{\epsilon}$, de modo que o nó assintoticamente estável se transformou em um ponto espiral assintoticamente estável. Se $\epsilon < 0$, então os autovalores são $-1 \pm \sqrt{|\epsilon|}$, e o ponto crítico permanece sendo um nó assintoticamente estável.

3.2 ESTABILIDADE DE LYAPUNOV EM SISTEMAS AUTÔNOMOS

A ideia de Lyapunov para o estudo do comportamento de soluções foi a de introduzir funções que poderiam garantir estabilidade através de condições na derivada da função ao longo das órbitas do campo de vetores que descreve a equação diferencial dada.

Seja $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^1 . Dada qualquer trajetória $\psi(t)$ de um sistema autônomo denotamos $\dot{V}(t) = \frac{d}{dt}V(\psi(t))$ ou ainda $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} V(\psi(t))$.

Definição 8. Uma função de Lyapunov para um ponto singular x_0 é uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 definida em um aberto $U \ni x_0$, satisfazendo às seguintes condições:

1. $V(x_0) = 0$ e $V(x) > 0, \forall x \neq x_0$;

2. $\dot{V} \leq 0$ para todo t e toda trajetória;

A função de Lyapunov V diz-se estrita quando

3. $\dot{V} < 0$ para todo t e toda trajetória diferente de x_0 .

Segue-se que uma função de Lyapunov (respectivamente função de Lyapunov estrita) é uma função não-crescente (decrecente) ao longo do tempo. A seguir temos um exemplo de uma função de Lyapunov estrita.

Exemplo 13. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ com todos os valores característicos com parte real negativa e considere o sistema autônomo associado a A . Pelo Teorema da Forma Canônica de Jordan existe uma matriz $B = PAP^{-1}$ tal que $B(x) \cdot x < 0 \forall x \neq 0$. Considerando agora o campo de vetores B ao invés de A temos que

$$V(x) = \|x\|^2$$

é função de Lyapunov estrita para $x_0 = 0$. De fato, tomando $\psi(t)$ solução de $x' = Bx$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\psi(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}[\psi(t) \cdot \psi(t)] = 2[\psi(t) \cdot \psi'(t)] \\ &= 2[\psi(t) \cdot B\psi(t)] < 0. \end{aligned}$$

As proposições a seguir mostram como as funções de Lyapunov são úteis no nosso estudo de estabilidade.

Proposição 6. *Seja x_0 um ponto singular. Se existe uma função de Lyapunov V para x_0 , então x_0 é estável.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ seja

$$M_\varepsilon = \inf \{V(x) : x \in \partial B_\varepsilon(x_0)\}$$

Como a função é positiva para $x \neq x_0$ e $\partial B_\varepsilon(x_0)$ é compacto temos $M_\varepsilon > 0$. Por continuidade, existe $\delta > 0$ tal que $V(x) < M_\varepsilon \forall x \in B_\delta(x_0)$. Para todo $x \in B_\delta(x_0)$ e todo $t \geq 0$ temos que

$$V(f^t(x)) \leq V(x) < M_\varepsilon$$

Logo $f^t(x) \notin \partial B_\varepsilon(x_0)$. Portanto $f^t(x) \in B_\varepsilon(x_0) \forall t$ e pelo Teorema 6, $f^t(x)$ está definida para todo $t \geq 0$. \square

Exemplo 14. Considere o sistema autônomo

$$\begin{cases} x' = y - x^3 \\ y' = -x^3 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

A origem $(0, 0)$ é um ponto singular isolado e a função $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $V(x, y) = x^4 + 2y^2$ é uma função de Lyapunov para $(0, 0)$. Logo, $(0, 0)$ é estável.

De fato, $V(0, 0) = 0$, $V(x, y) > 0 \forall (x, y) \neq (0, 0)$ e dada $\psi(t) = (x(t), y(t))$ solução desse sistema temos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = \frac{dV}{dx}x'(t) + \frac{dV}{dy}y'(t) = 4x(t)^3x'(t) + 4y(t)y'(t) \\ &= 4x(t)^3(y(t) - x(t)^3) + 4y(t)(-x(t)^3) = -4x(t)^6 \leq 0 \forall t. \end{aligned}$$

Proposição 7. *Seja x_0 um ponto singular. Se existe uma função de Lyapunov estrita V para x_0 , então x_0 é assintoticamente estável.*

Demonstração. Queremos mostrar que $\forall x \in B_\delta(x_0)$, $f^t(x) \rightarrow x_0$ quando $t \rightarrow +\infty$, $x \neq x_0$. Pela Proposição 6, $f^t(x) \in B_\varepsilon(x_0) \forall t \geq 0$. Logo $f^t(x) \in \overline{B_\varepsilon(x_0)}$, segue que $f^t(x)$ acumula em algum ponto. Consideremos $t_n \rightarrow +\infty$ e $y \in B_\varepsilon(x_0)$ tal que

$$f^{t_n}(x) \rightarrow y.$$

Temos que $V(f^{t_n}(x)) \rightarrow V(y)$ e $V(f^t(z)) < V(z) \forall t > 0$ já que a aplicação $t \mapsto V(f^t(z))$ é decrescente ($\forall z \neq x_0$). Suponhamos, por contradição que $y \neq x_0$. Então $V(y) > V(f^1(y))$, logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(f^{t_n}(x)) = V(y) > V(f^1(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(f^{t_n+1}(x))$$

Para m, n suficientemente grandes, $V(f^{t_n+1}(x)) < V(y)$ e como $V(f^{t_n}(x))$ é decrescente, $V(f^{t_m}(x)) > V(y)$. Temos ainda que $V(f^{t_m}(x)) < V(f^{t_n+1}(x))$ desde que se tome $t_m > t_n + 1$, logo $V(y) < V(f^{t_m}(x)) < V(f^{t_n+1}(x)) < V(y)$, o que é uma contradição, portanto $y = x_0$. \square

A seguir um exemplo de aplicação dessa proposição.

Exemplo 15. Considere o sistema autônomo

$$\begin{cases} x' = -x + xy^2 \\ y' = -y - x^2y \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vamos mostrar que $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, V(x, y) = x^2 + y^2$ é função de Lyapunov estrita para $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e que então $(0, 0)$ é assintoticamente estável.

De fato, $V(0, 0) = 0, V(x, y) > 0 \forall (x, y) \neq (0, 0)$ e dada uma trajetória $\psi(t) = (x(t), y(t))$ temos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = 2x(t)(-x(t) + x(t)y(t)^2) + 2y(t)(-y(t) - x(t)^2y(t)) \\ &= -2(x(t)^2 + y(t)^2) < 0, \quad \forall t \text{ e } \forall \psi(t) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Agora vejamos um critério para instabilidade.

Proposição 8. *Seja x_0 ponto singular do sistema autônomo e $D \subset U$ um aberto tal que $x_0 \in \partial D$. Suponha que exista uma função $C^1 V : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V|_{\partial D} \equiv 0, V|_D > 0$ e $\dot{V}|_D > 0$. Então x_0 é instável.*

Demonstração. A demonstração está ilustrada pela Figura 3.3. Dado $\varepsilon > 0$, queremos mostrar que existem pontos $x \in B_\varepsilon(x_0)$ cuja trajetória escapa de $B_\varepsilon(x_0)$. Seja $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap D$ e suponhamos que $f^t(x)$ está definida $\forall t \geq 0$ e $f^t(x) \in B_\varepsilon(x_0) \forall t \geq 0$. Sabemos que $V(x) > 0$ e $V(f^t(x)) > V(x)$ para todo t tal que $f^s(x) \in D \forall 0 \leq s < t$. Então $f^t(x) \notin \partial D \forall t \geq 0$. Mais ainda, por continuidade de V existe uma vizinhança W de ∂D tal que $f^t(x) \notin W \forall t \geq 0$. Ou seja, existe um compacto $K \subset D$ tal que $f^t(x) \in K \forall t \geq 0$. \dot{V} é claramente contínua. Seja

$$\beta = \inf \dot{V}|_K$$

Temos $\beta > 0$ já que $\dot{V} > 0$ em K . Então, sendo $\dot{V} \geq \beta, V(f^t(x)) \geq V(x) + \beta t \forall t \geq 0$. Assim $V(f^t(x)) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, mas por outro lado $f^t(x) \in B_\varepsilon(x_0) \cap D \forall t \geq 0$ e $V(B_\varepsilon(x_0))$ é limitado, o que é uma contradição. Portanto a trajetória de x não está contida em $B_\varepsilon(x_0)$. \square

Exemplo 16. Seja agora o sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x(x^2 + y^2) \\ y' = x + y(x^2 + y^2) \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

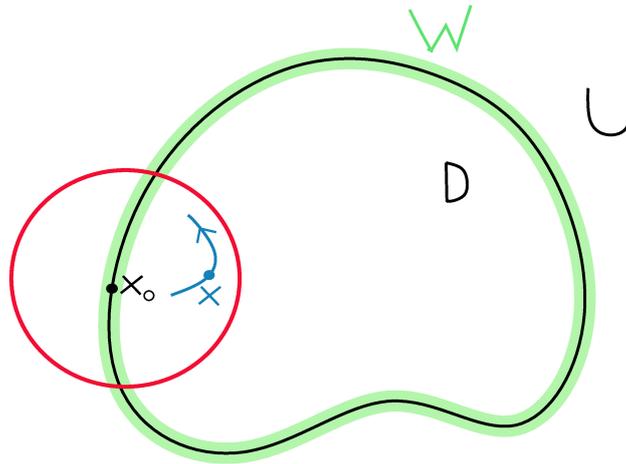


Figura 3.3: Demonstração da Proposição 8.

Tome $V(x, y) = x^2 + y^2$ e $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, temos que $V > 0$ em D e $V = 0$ em $\partial D = (0, 0)$.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), y(t)) &= 2x(t) [-y(t) + x(t)(x(t)^2 + y(t)^2)] + 2y(t) [x(t) + y(t)(x(t)^2 + y(t)^2)] \\ &= -2x(t)y(t) + 2x(t)y(t) + 2x(t)^4 + 2x(t)^2y(t)^2 + 2y(t)^2x(t)^2 + 2y(t)^4 > 0 \quad \forall (x(t), y(t)) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Logo, dada qualquer bola B centrada na origem, $\dot{V}(x(t), y(t)) > 0 \quad \forall (x(t), y(t)) \in D \cap B$. Em virtude da Proposição 8, $(0, 0)$ é instável.

3.3 SISTEMAS LOCALMENTE LINEARES

Considere o sistema não linear

$$x' = Ax + g(x)$$

É conveniente escolher o ponto crítico como a origem. Isso não envolve perda de generalidade, já que se $x_0 \neq 0$, é sempre possível fazer a substituição $u = x - x_0$. Então u satisfaz um sistema autônomo com um ponto crítico na origem. Suponha ainda que $x = 0$ é um ponto crítico isolado do sistema acima. Isso significa que existe algum círculo em torno da origem no interior do qual não existem outros pontos críticos. Além disso, vamos supor que $\det A \neq 0$, de modo que $x = 0$ também é um ponto crítico isolado do sistema linear $x' = Ax$. Para que o sistema não linear acima esteja próximo do sistema linear $x' = Ax$, temos que supor que $g(x)$ é pequeno. Mais precisamente, vamos supor que as componentes de g têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que g satisfaz a condição

$$\|g(x)\|/\|x\| \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow 0$$

ou seja, $\|g\|$ é pequeno em comparação com a própria $\|x\|$ perto da origem. Segue que a condição acima é satisfeita se, e somente se,

$$g_1(x, y)/r \rightarrow 0, \quad g_2(x, y)/r \rightarrow 0 \text{ quando } r \rightarrow 0.$$

Tal sistema é chamado de sistema **localmente linear** na vizinhança do ponto crítico $x = 0$. Como o termo não linear $g(x)$ é pequeno comparado ao termo linear Ax quando x é pequeno, é razoável esperar que as trajetórias do sistema linear sejam boas aproximações das trajetórias do sistema não linear, pelo menos perto da origem. Isso ocorre na maioria dos casos (mas não em todos). Para x (ou $x - x_0$) pequeno os termos não lineares também são pequenos e não afetam a estabilidade e o tipo de ponto crítico determinados pelo sistema linear, exceto em dois casos sensíveis: quando os valores característicos forem imaginários puros e quando forem reais e iguais.

Na seção 3.1 afirmamos que pequenas perturbações nos coeficientes do sistema linear, e portanto nos autovalores, só podem alterar o tipo e a estabilidade nesses dois casos. É razoável esperar que o pequeno termo não linear possa ter um efeito substancial semelhante, pelo menos nesses dois casos. Isso ocorre, mas em todos os outros casos o termo pequeno não linear não altera o tipo ou a estabilidade do ponto crítico. Assim, exceto nos dois casos sensíveis o tipo e a estabilidade do ponto crítico do sistema não linear podem ser determinados por um estudo do sistema linear correspondente muito mais simples.

Definição 9. *Seja $V : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ com $0 \in U$. V é dita positiva definida em U se $V(0) = 0$ e $V(x) > 0, \forall x \in U - \{0\}$. Analogamente, V é negativa definida em U se $V(0) = 0, V(x) < 0 \forall x \in U - \{0\}$. Se as desigualdades $>, <$ são substituídas por \geq, \leq então V é dita positiva semidefinida e negativa semidefinida, respectivamente.*

Teorema 9. *A função $V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ é positiva definida se, e somente se, $a > 0$ e $4ac - b^2 > 0$ e é negativa definida se, e somente se, $a < 0$ e $4ac - b^2 > 0$.*

Teorema 10. *Suponha que a origem é um ponto crítico isolado de um sistema autônomo. Seja V uma função C^1 . Suponha que $V(0, 0) = 0$ e que em toda vizinhança da origem, existe pelo menos um ponto onde V é negativa. Se existe um domínio D contendo a origem tal que \dot{V} é negativa definida em D , então a origem é instável.*

Demonstração. Dado $\delta > 0$, seja, $x_0 \in B_\delta(0)$ tal que $V(x_0) < 0$. Considere a trajetória de x_0 . Ao longo dessa trajetória V tem que decrescer, já que $\dot{V}(x) < 0$; além disso, como $V(x_0) < 0$, a trajetória não pode se aproximar da origem, pois $V(0) = 0$. Assim a origem é instável. \square

Teorema 11. *Considere o sistema localmente linear*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + F_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + G_1(x, y) \end{cases} .$$

Se $(0, 0)$ for um ponto crítico assintoticamente estável do sistema linear correspondente, então ele será um ponto crítico assintoticamente estável do sistema localmente linear.

Demonstração. Primeiro vamos considerar o sistema linear correspondente. Como $(0, 0)$ é um ponto crítico assintoticamente estável temos que $a_{11} + a_{22} < 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$. De fato,

os autovalores da matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ são as raízes do polinômio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - \lambda(a_{11} + a_{22}) + \lambda^2 - a_{12}a_{21}.$$

Então $P(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \iff$

$$\lambda = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Para simplificar denotemos $p = a_{11} + a_{22}$ e $q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Como $(0, 0)$ é assintoticamente estável, temos três possibilidades para os autovalores λ_1 e λ_2 .

i) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: Para isso devemos ter

$$\Delta > 0 \iff p^2 - 4q > 0 \Rightarrow p^2 > 4q$$

$$\lambda_1 = \frac{p + \sqrt{\Delta}}{2} < 0 \Leftrightarrow p < -\sqrt{\Delta} \Rightarrow p < 0$$

$$\lambda_2 = \frac{p - \sqrt{\Delta}}{2} < 0$$

$$q = \lambda_1\lambda_2 > 0$$

ii) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$: Para isso, $\Delta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{p}{2} < 0 \Rightarrow p < 0$, $\Delta = p^2 - 4q = 0 \Rightarrow p^2 = 4q \Rightarrow q > 0$ $q = \lambda_1\lambda_2 > 0$.

iii) $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda \pm i\mu$ com $\lambda < 0$: Assim $\Delta = p^2 - 4q < 0 \Rightarrow p^2 < 4q \Rightarrow q > 0$, $\lambda = \frac{p}{2} < 0 \Rightarrow p < 0$.

Vamos construir uma função de Lyapunov da forma $V(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ que seja positiva definida e tal que $\dot{V}(x, y) = -x^2 - y^2$. Vamos determinar A, B e C nessas condições.

$$\dot{V}(x, y) = 2Ax \frac{dx}{dt} + B \frac{dx}{dt} y + Bx \frac{dy}{dt} + 2Cy \frac{dy}{dt} = -x^2 - y^2$$

$$\iff 2Ax(a_{11}x + a_{12}y) + By(a_{11}x + a_{12}y) + Bx(a_{21}x + a_{22}y) + 2cy(a_{21}x + a_{22}y) = -x^2 - y^2.$$

Ficamos então com o sistema

$$\begin{cases} 2Aa_{11} + Ba_{21} = -1 \\ 2Aa_{12} + Ba_{11} + Ba_{22} + 2Ca_{21} = 0 \\ Ba_{12} + 2Ca_{22} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{21} & 0 \\ 2a_{12} & a_{11} + a_{22} & 2a_{21} \\ 0 & a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$MX = Z, M = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{21} & 0 \\ 2a_{12} & a_{11} + a_{22} & 2a_{21} \\ 0 & a_{21} & 2a_{22} \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{12}a_{21} - a_{22}^2 - a_{11}a_{22}}{2\sigma} & \frac{a_{21}a_{22}}{2\sigma} & \frac{-a_{21}^2}{2\sigma} \\ \frac{a_{12}a_{22}}{\sigma} & \frac{-a_{11}a_{22}}{\sigma} & \frac{a_{11}a_{21}}{\sigma} \\ \frac{-a_{12}^2}{2\sigma} & \frac{a_{11}a_{12}}{2\sigma} & \frac{-a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}{2\sigma} \end{pmatrix}$$

onde $\sigma = a_{11}a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}^2 - a_{11}^2a_{22} + a_{12}a_{21}a_{22} = (a_{11} + a_{22})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$. Isso nos leva a

$$X = \begin{pmatrix} \frac{a_{12}a_{21} - a_{22}^2 - a_{11}a_{22}}{2\sigma} & \frac{a_{21}a_{22}}{2\sigma} & \frac{-a_{21}^2}{2\sigma} \\ \frac{a_{12}a_{22}}{\sigma} & \frac{-a_{11}a_{22}}{\sigma} & \frac{a_{11}a_{21}}{\sigma} \\ \frac{-a_{12}^2}{2\sigma} & \frac{a_{11}a_{12}}{2\sigma} & \frac{-a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}{2\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{21}^2 - a_{12}a_{21} + a_{22}^2 + a_{11}a_{21}}{2\sigma} \\ \frac{-a_{11}a_{21} - a_{12}a_{22}}{\sigma} \\ \frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22}}{2\sigma} \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_{21}^2 - a_{12}a_{21} + a_{22}^2 + a_{11}a_{22}}{2a_{11}a_{12}a_{21} - 2a_{11}a_{22}^2 - 2a_{11}^2a_{22} + 2a_{12}a_{21}a_{22}} \\ \Leftrightarrow A &= -\frac{a_{21}^2 + a_{22}^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{2(a_{11}^2a_{22} - a_{11}a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22}^2 - a_{12}a_{21}a_{22})} \\ \Leftrightarrow A &= -\frac{a_{21}^2 + a_{22}^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{2\sigma}. \end{aligned}$$

Além disso

$$\sigma = pq < 0 \Rightarrow A = -\frac{a_{21}^2 + a_{22}^2 + q}{2\sigma} > 0$$

$$\begin{aligned} 4AC - B^2 &= \frac{1}{\sigma} \left((a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \frac{1}{\sigma^2} (a_{12}a_{22} + a_{11}a_{21})^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} [a_{11}^3a_{22} - a_{11}^2a_{12}a_{21} + a_{12}^2a_{11}a_{22} - a_{12}^3a_{21} + a_{21}^2a_{11}a_{22} - a_{21}^3a_{12} + a_{22}^3a_{11} \\ &\quad - a_{22}^2a_{12}a_{21} + 2a_{11}^2a_{22}^2 - 4a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} + 2a_{12}^2a_{21}^2] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} [(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + 2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2]. \end{aligned}$$

Dessa forma, $4AC - B^2 > 0$. Pelo Teorema 9, V é positiva definida

A função de Lyapunov construída anteriormente também é uma função de Lyapunov para o sistema localmente linear. Para provar isso vamos mostrar que existe alguma região contendo a origem na qual \dot{V} é negativa definida.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= 2Ax \frac{dx}{dt} + B \frac{dx}{dt} y + Bx \frac{dy}{dt} + 2Cy \frac{dy}{dt} = \\ &= 2Ax(a_{11}x + a_{12}y + F_1(x, y)) + By(a_{11}x + a_{12}y + F_1(x, y)) \\ &+ Bx(a_{21}x + a_{23}y + G_1(x, y)) + 2Cy(a_{21}x + a_{22}y + G_1(x, y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 [2Aa_{11} + Ba_{21}] + xy [2Aa_{12} + Ba_{11} + Ba_{22} + 2Ca_{21}] + y^2 [Ba_{12} + 2Ca_{22}] \\
&\quad + F_1(x, y)[2Ax + By] + G_1(x, y)[Bx + 2Cy] \\
&= - (x^2 + y^2) + F_1(x, y)[2Ax + By] + G_2(x, y)[Bx + 2Cy].
\end{aligned}$$

Como o sistema é localmente linear, temos que $\frac{F_1(x, y)}{r} \rightarrow 0$ e $\frac{G_1(x, y)}{r} \rightarrow 0$ quando $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$. Seja $M = \max\{|2A|, |B|, |2C|\}$. Reescrevendo \dot{V} usando coordenadas polares, temos que

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -r^2 + F_1(x, y)(2Ar \cos \theta + Br \sin \theta) + G_1(x, y)(Br \cos \theta + 2Cr \sin \theta) \\
&= -r^2 + r^2 \left[(2A \cos \theta + B \sin \theta) \frac{F_1(x, y)}{r} + (B \cos \theta + 2 \sin \theta) \frac{G_2(x, y)}{r} \right] \\
&\leq -r^2 + r^2 M \left[(\cos \theta + \sin \theta) \frac{F_1(x, y)}{r} + (\cos \theta + \sin \theta) \frac{G_1(x, y)}{2} \right].
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon = \frac{1}{8M}$ existe um círculo de raio δ em torno da origem tal que se $0 < r < \delta$, então $\frac{|F_1(x, y)|}{r} < \frac{1}{8M}$, $\frac{|G_1(x, y)|}{r} < \frac{1}{8M}$ e

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -r^2 + r^2 M \left[(\cos \theta + \sin \theta) \frac{F_1(x, y)}{r} + (\cos \theta + \sin \theta) \frac{G_1(x, y)}{r} \right] \\
&< -r^2 \left[1 - M4 \frac{1}{8M} \right] = -r^2 \left[1 - \frac{1}{2} \right] < 0.
\end{aligned}$$

Assim $\dot{V}(x, y) < 0$ para $r < \delta$.

□

Teorema 12. *Considerando o sistema localmente linear. Se $a_{11} + a_{22} > 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$, então a origem é um ponto instável do sistema linear e também do sistema localmente linear.*

Demonstração. Consideremos novamente a função

$$V(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

do teorema anterior. Para o sistema linear, vimos que $\dot{V}(x, y) < 0 \forall x \neq 0$. Para $a_{11} + a_{22} > 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ temos que $A < 0$. Assim $V|_{\mathbb{R} \times \{0\}} < 0$. Segue que em qualquer vizinhança do ponto 0 existem pontos onde V é negativa. Pelo Teorema 10, a origem é instável. Para o caso do sistema localmente linear, a situação é análoga ao teorema anterior e temos que a origem é instável pelo Teorema 10. □

3.4 TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON

O Teorema de Poincaré-Bendixson é um teorema que tira proveito de informações sobre o domínio, em particular da topologia do plano. Considere a equação diferencial $x' = F(x)$, $F :$

$U \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 (para evitar questões de unicidade) e $p \in U$ tal que o fluxo (trajetória) $\gamma_p(t)$ está definido para todo $t \geq 0$.

Definição 10. O conjunto ômega limite $\omega(p)$ é o conjunto dos pontos de acumulação de $\gamma_p(t)$ quando t tende a $+\infty$, isto é $\omega(p) = \{z \in U : \exists (t_n) \rightarrow +\infty \text{ tal que } \gamma_p(t_n) \rightarrow z\}$.

Definição 11. Analogamente, o conjunto alfa limite de um ponto p ($\alpha(p)$) é o conjunto dos pontos de acumulação do fluxo quando t tende a menos infinito, supondo claro $\gamma_p(t)$ definida para todo $t < 0$.

Geometricamente, o conjunto $\omega(p)$ (respectivamente $\alpha(p)$), interpreta-se como o conjunto dos pontos de U onde "morre" (respectivamente "nasce") a trajetória que passa por p no instante 0.

Proposição 9. Se p tem uma trajetória periódica, então $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ coincidem com a trajetória de p .

Demonstração. De fato, como a trajetória de p é periódica, existe $\tau > 0$ tal que a solução maximal $\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow U$ é periódica de período τ . Seja q na trajetória de p , então $\exists t_0 \in \mathbb{R}$, tal que $q = \gamma_p(t_0)$. Tomando a sequência $t_n = t_0 + n\tau, n \in \mathbb{N}$, temos $t_n \rightarrow +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_p(t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_p(t_0 + n\tau) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_p(t_0) = \gamma_p(t_0) = q$, logo $q \in \omega(p)$. Assim a trajetória de p está contida em $\omega(p)$. Para mostrar a outra inclusão, tomemos $q \in \omega(p)$, então existe $(t_n) \subset \mathbb{R}, t_n \rightarrow +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_p(t_n) = q$. Temos que a sequência $(\gamma_p(t_n))$ está contida na trajetória de p , logo q pertence ao fecho dessa trajetória, que é a própria trajetória por que sendo periódica ela é fechada. Assim $\omega(p)$ está contido na trajetória. Analogamente para $\alpha(p)$. \square

Proposição 10. Suponhamos que $\gamma_p(t)$ está definida $\forall t \geq 0$ e a semi trajetória $\{\gamma_p(t), t \geq 0\}$ está contida num compacto. Então

1. $\omega(p) \neq \emptyset$;
2. $\omega(p)$ é invariante pelo fluxo, isto é, dado $q \in \omega(p)$, a trajetória de q está contida em $\omega(p)$;
3. $\omega(p)$ é compacto;
4. $\omega(p)$ é conexo.

Demonstração. 1. Por hipótese existe a semitrajetória possíviva está contida em K compacto. A sequência $t_n = n$ tende a $+\infty$ e $(\gamma_p(t_n))$ está contida na semi trajetória de p , então $(\gamma_p(t_n)) \subset K$. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, como K é limitado, existe $(\gamma_p(t_{k_n})) \subseteq (\gamma_p(t_n))$, e $q \in K$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_p(t_{k_n}) = q$, donde $q \in \omega(p)$. Segue que $\omega(p)$ é não vazio.

2. Seja $q \in \omega(p)$ e r na trajetória de q . Então $\exists (t_n), t_n \rightarrow +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_p(t_n) = q$ e t_0 tal que $r = \gamma_p(t_0) = \gamma(t_0, q)$. Seja $t'_n = t_n + t_0, \forall n \in \mathbb{N}$. $t'_n \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_p(t'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma(t_n + t_0, p) =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma(t_0, \gamma_x(t_n, p)) = \gamma\left(t_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_x(t_n, p)\right) = \gamma(t_0, q) = \gamma_q(t_0) = r.$$

Portanto $r \in \omega(p)$, e então a trajetória de q está contida em $\omega(p)$.

3. Seja K o compacto tal que $\{\gamma_p(t), t \geq 0\} \subset K$. Então os pontos de acumulação também devem pertencer ao compacto, logo $\omega(p) \subset K$ e $\omega(p)$ é limitado. Basta mostrar que $\omega(p)$ é fechado. Para isso seja (q_n) uma sequência em $\omega(p)$ convergindo para algum q . Para cada n , existe (t_k^n) que converge para $+\infty$ quando $k \rightarrow \infty$ tal que $\gamma_p(t_k^n) \rightarrow q_n$ quando $k \rightarrow +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos n tal que $d(q_n, q) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $k(n)$ tal que $d(\gamma_p(t_k^n), q_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, então $d(\gamma_p(t_k^n), q) < \varepsilon$, o que mostra que $q \in \omega(p)$.

4. Por contradição, suponha que existem abertos disjuntos A e B tais que $\omega(p) \subset A \cup B$, $\omega(p) \cap A \neq \emptyset$ e $\omega(p) \cap B \neq \emptyset$. Sejam $q_a \in \omega(p) \cap A$ e $q_b \in \omega(p) \cap B$. Em algum momento, digamos t_n , $\gamma_p(t_n)$ está próximo de q_a , fixado esse t_n , em algum momento posterior, digamos s_n , $\gamma_p(s_n)$ está próximo de q_b . Posteriormente, em um momento t_{n+1} , $\gamma_p(t_{n+1})$ está próximo de q_a . Com esse argumento construímos uma sequência $0 < t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < \dots < t_n < s_n < t_{n+1} < \dots$ tal que $\gamma_p(t_n) \rightarrow q_a$ e $\gamma_p(s_n) \rightarrow q_b$. O segmento de trajetória entre o momento t_n e o momento s_n é um conexo, portanto não pode ser desconectado por A e B , assim existe um momento $u_n \in (t_n, s_n)$ tal que $\gamma_p(u_n) \notin A \cup B, \forall n$. Como $(t_n) \rightarrow +\infty$ e $(s_n) \rightarrow +\infty$, $(u_n) \rightarrow +\infty$. Seja r um ponto de acumulação qualquer de $(\gamma_p(u_n))$, que existe porque $\gamma_p(u_n) \in K$, $r \in \omega(p)$ e $r \notin A \cup B$, pois o complementar de $A \cup B$ é fechado. Contradição com $\omega(p) \subset A \cup B$.

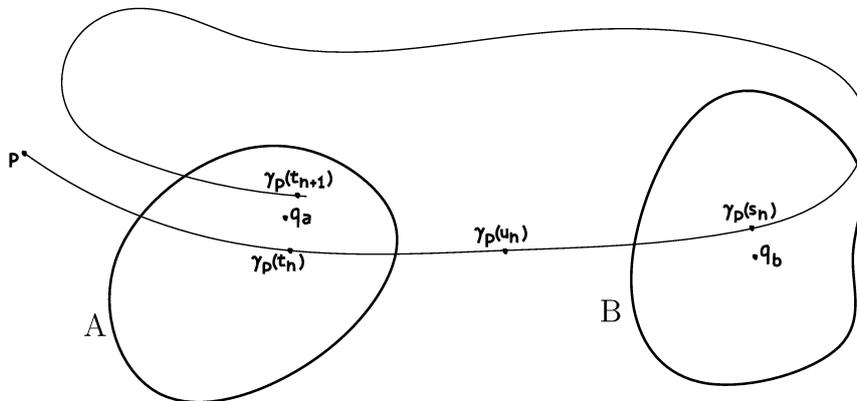


Figura 3.4: Demonstração da Propriedade 4.

□

Agora veremos alguns lemas antes de enunciar e provar o Teorema de Poincaré-Bendixon.

Lema 5. *Sejam q ponto regular em $\omega(p)$ e Σ seção transversal local ao fluxo em q . Então existe $(t_n) \rightarrow +\infty$ tal que $\gamma_p(t_n) \in \Sigma, \forall n$ e $\gamma_p(t_n) \rightarrow q$.*

Demonstração.

$$q \in \omega(p) \Rightarrow \exists (t'_n) \subseteq \mathbb{R}^+, \lim t'_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_p(t'_n) = q.$$

Pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe $W_q \subset U$, vizinhança aberta de q e existe $h : W_q \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k tal que $h(W_q \cap \Sigma) = \{0\}$. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_p(t'_n) = q$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow$

$\gamma_p(t'_n) \in W_q$. Definimos $t_n = t'_n + h(\gamma_p(t'_n))$, $\forall n \geq n_0$, segue que

$$(t_n)_{n \geq n_0} \subset \mathbb{R}^+ \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

$$\gamma_p(t_n) = \gamma(t'_n + h(\gamma_p(t'_n)), p) = \gamma(h(\gamma_p(t'_n)), \gamma(t'_n, p)) \in \Sigma.$$

Assim $(\gamma_p(t_n))_{n \geq n_0} \subset \Sigma$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_p(t_n) = \gamma(h(q), q) = \gamma(0, q) = q$. \square

Uma observação que deve ser feita é que como estamos em dimensão 2, Σ é um mergulho g de um intervalo em U . É possível então definir uma relação de ordem em Σ . Com isso, fará sentido falar de sequência monótona em Σ .

Lema 6. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$, p ponto regular do campo de vetores e Σ uma seção transversal local em p , então $\{\gamma_p(t), t \geq 0\} \cap \Sigma$ ou é um conjunto finito (ordenado) ou é uma sequência monótona.*

Demonstração. Seja $A = \{t \geq 0; \gamma_p(t) \in \Sigma\}$, $\gamma_p(A) = \{\gamma_p(t), t \geq 0\} \cap \Sigma$. Pelo Teorema do Fluxo Tubular A é discreto. Logo A é finito ou $A = \{0 < t_1 < t_2 < \dots\}$. Seja $p_1 = \gamma_p(t_1)$, $p_2 = \gamma_p(t_2)$, \dots , $p_n = \gamma_p(t_n)$. Temos duas alternativas:

1. $p_1 = p \Rightarrow \gamma_p(t_1) = \gamma_p(0) \Rightarrow \gamma_p$ é periódica, logo $\{\gamma_p(t), t \geq 0\} \cap \Sigma = \{p\}$.

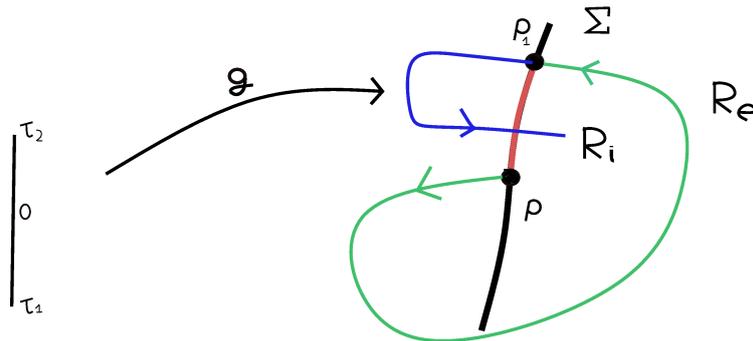


Figura 3.5: Demonstração do Lema 6

2. $p_1 \neq p \Rightarrow p < p_1$. Se p_2 não está definida $\Rightarrow \{\gamma_p(t), t \geq 0\} \cap \Sigma = \{p, p_1\}$. Se p_2 estiver definida teremos $p_1 < p_2$. De fato, seja Γ a curva formada pela união das curvas em vermelho e verde na Figura 3.5. Γ é uma curva de Jordan (fechada, contínua, sem auto interseções). Pelo Teorema da Curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ tem duas componentes conexas, uma limitada (R_i) e outra não limitada (R_e) tal que $\partial R_i = \partial R_e = \Gamma$. Afirmação: $\gamma_p(t) \in R_e \forall t > t_1$. Supondo que $\exists t > t_1$ tal que $\gamma_p(t) \notin R_e$ teríamos, pelo Teorema da Alfândega que $\exists t' \in (t_1, t)$ tal que $\gamma_p(t') \in \Gamma$. Observemos que pelo Teorema de Existência e Unicidade $\gamma_p(t')$ não pode pertencer a curva em verde, logo $\gamma_p(t')$ pertence a curva em vermelho, daí o comportamento de $\gamma_p(t)$ seria como descrito no trecho em azul na Figura 3.5, o que contradiz o Teorema do Fluxo Tubular. Logo $p_2 > p_1$. E assim por diante, se p_3 não estiver definido então $\{\gamma_p(t), t \geq 0\} \cap \Sigma = \{p, p_1, p_2\}$. Se p_3 estiver definido continuamos o processo. \square

Lema 7. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $p \in U$ e Σ uma seção transversal em p . Então $\Sigma \cap \omega(p)$ tem no máximo um ponto.*

Demonstração. Se $\Sigma \cap \omega(p)$ for vazio não há o que provar. Seja $q \in \Sigma \cap \omega(p)$. Pelo Lema 5, $\exists (\gamma_p(t_n)) \subset \Sigma$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_p(t_n) = q$, logo $(\gamma_p(t_n)) \subset \{\gamma_q(t), t \geq 0\} \cap \Sigma$. Pelo Lema 6, $\{\gamma_q(t), t \geq 0\} \cap \Sigma$ é um conjunto ordenado. Dessa forma $\gamma_p(t_n)$ é monótona, logo tem um único limite. \square

Lema 8. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $p \in U$ um ponto regular, tal que existe um compacto $K \subset U$ com $\{\gamma_p(t), t \geq 0\} \subset K$. Considere x_0 tal que $\gamma_{x_0}(t) \subset \omega(p)$. Se $\omega(p)$ contém algum ponto regular, então $\gamma_{x_0}(t)$ é uma órbita periódica e coincide com $\omega(p)$.*

Demonstração. Por hipótese $\exists q \in \omega(p)$ ponto regular. Seja Σ seção transversal local a campo em q . Pelo Lema 5 $\exists (\gamma_{x_0}(t_n)) \subset \Sigma$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_{x_0}(t_n) = q$. Assim $(\gamma_{x_0}(t_n)) \subset \{\gamma_{x_0}(t), t \geq 0\} \subset \gamma_{x_0}(t) \subset \omega(p)$. Logo $(\gamma_{x_0}(t_n)) \subset \Sigma \cap \omega(p)$. O Lema 7 garante que $\gamma_{x_0}(t_n)$ é constante e assim a órbita de x_0 é periódica, logo fechada. Como a trajetória de x_0 é não vazia e está contida em $\omega(p)$, que é um conexo, basta usar o Lema 7 e o Teorema do Fluxo Tubular para concluir que essa trajetória é aberta e então coincide com $\omega(p)$. \square

Teorema 13. *(Poincaré-Bendixon) Suponhamos $U \subset \mathbb{R}^2$ e $p \in U$ tal que $\{\gamma_p(t) : t \geq 0\} \subset K, K$ compacto. Suponhamos ainda que F tem um número finito de pontos estacionários.*

- i) Se $\omega(p)$ contém apenas pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma trajetória fechada.*
- ii) Se $\omega(p)$ contém apenas pontos estacionários, então $\omega(p)$ é um ponto estacionário.*
- iii) Caso contrário, então $\omega(p)$ é a união finita de pontos estacionários z_1, \dots, z_m e trajetórias regulares $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tais que $\alpha(\gamma_i)$ é um dos z'_j s e $\omega(\gamma_i)$ é um dos z'_j s.*

Demonstração. **i)** Seja $q \in \omega(p)$, então $\gamma_q(t) \subset \omega(p)$. Como $\{\gamma_q(t); t \geq 0\} \subset \omega(p)$ e $\omega(p)$ é compacto, temos que $\omega(q) \neq \emptyset$. Seja $r \in \omega(q)$, então $\exists (t_n) \subseteq \mathbb{R}^+, t_n \rightarrow +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_q(t_n) = r$. Logo $r \in \overline{\gamma_q(t)} \subset \overline{\omega(p)} = \omega(p) \implies r \in \omega(p) \implies \omega(q) \subseteq \omega(p)$. Como $\omega(p)$ só tem pontos regulares, pelo Lema 8 $\omega(p) = \gamma_q(t)$ é periódica.

ii) Como $\omega(p)$ está contida no conjunto finito dos pontos estacionários e $\omega(p)$ é conexo, $\omega(p)$ é ponto estacionário.

iii) Seja $q \in \omega(p) \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$. Então $\gamma_q(t) \subset \omega(p)$. Logo $\gamma_q(t)$ não contém pontos estacionários e $\omega(q) \subseteq \omega(p)$. Suponha que $\omega(q)$ contém pontos regulares. Pelo Lema 8 $\gamma_q(t)$ é periódica e $\gamma_q(t) = \omega(p)$. Assim $\omega(p) \cap \text{Sing} = \emptyset$. Absurdo. Logo, $\omega(q) \subseteq \text{Sing}$. Então $\omega(q) \subseteq \{z_1, \dots, z_m\}$. Logo $\exists i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\omega(q) = z_i$. Analogamente para $\alpha(q)$. \square

3.5 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON

Nesta seção iremos apresentar um teorema que de certa forma generaliza o Teorema de Poincaré-Bendixson e faremos uma análise qualitativa de uma conhecida equação da física, a Equação de Van der Pol.

Considere $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ e suponha $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3, C^1, U$ sendo uma vizinhança aberta de S^2 e que $F(x)$ pertence ao plano tangente $T_x S^2 \forall x \in S^2$ para que $f^t(x) \in S^2 \forall t$ qualquer que seja $x \in S^2$. Consideremos o fluxo restrito a S^2 , isto é

$$f^t : S^2 \rightarrow S^2 \quad t \in \mathbb{R}$$

Teorema 14. (Teorema de Poincaré-Bendixson em S^2) Suponhamos que F tem um número finito de pontos estacionários em S^2 . Para todo $p \in S^2$, o conjunto $\omega(p)$ satisfaz uma das 3 condições do Teorema de Poincaré-Bendixson.

Isto é, o Teorema de Poincaré-Bendixson também é verdadeiro na esfera. A diferença aqui é que a condição de que a trajetória esteja contida num compacto está automaticamente satisfeita.

Teorema 15. (Equação de Van der Pol) A equação

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0$$

possui uma trajetória periódica.

Demonstração. Seja $g(x) = \mu(x^2 - 1)$ e $G(x) = \int_0^x g(s)ds$, $G(x) = \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$

A equação é equivalente a

$$\begin{cases} u' = v - G(u) \\ v' = -u \end{cases}$$

De fato

$$u'' = v' - G'(u)u' = -u - g(u)u' \iff u'' + \mu(u^2 - 1)u' + u = 0.$$

Considere então o campo de vetores $F(u, v) = (v - G(u), -u)$

$$F(u, v) = (0, 0) \iff \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

Segue que o único ponto estacionário é a origem. Analisando a expressão do campo de vetores, temos que sobre o gráfico de G a primeira coordenada de F é nula, logo o campo de vetores é vertical, apontando para baixo se $u > 0$ e para cima se $u < 0$, como indicado na Figura 3.6.

A segunda coordenada se anula quando $u = 0$. Logo, no eixo v o campo de vetores é horizontal e aponta para a direita acima do gráfico de G e para esquerda abaixo do gráfico.

Na Figura 3.6, a partir de uma análise qualitativa da equação, temos algumas setas indicando o comportamento do fluxo em cada um dos quatro quadrantes determinados pelo eixo v e pelo gráfico da função G .

Para analisar o comportamento próximo da origem, consideremos a função auxiliar $\phi(u, v) =$

$\|(u, v)\|^2 = u^2 + v^2$. Dada uma trajetória $(u(t), v(t))$

$$\frac{d}{dt}\phi(u(t), v(t)) = 2uu' + 2vv' = 2uv - 2uG(u) - 2vu = -2u(t)G(u(t)).$$

Próximo da origem, em $D = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \times \mathbb{R}$, $uG(u) \leq 0$ e $uG(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$, portanto $\frac{d\phi}{dt} > 0$. Assim $\phi(t) = \phi(u(t), v(t))$ é monótona crescente. Logo $(0, 0)$ é um repulsor, é instável. Dessa forma a origem não pertence ao ômega limite de nenhuma trajetória não nula, ou seja, ômega limite não contém nenhum ponto estacionário, logo é uma trajetória periódica desde que não saia de um compacto.

O objetivo agora é provar que existe uma trajetória que está contida num compacto e o resultado seguirá do Teorema de Poincaré-Bendixson.

O campo de vetores $F(u, v)$ é ímpar, já que $G(u)$ é ímpar. Considerando os pontos indicados na Figura 3.6. Se $a > e$, a curva fechada ACEA'C'E'A delimita um domínio compacto positivamente invariante D , isto é, se $x \in D$ então $f^t(x) \in D \forall t \geq 0$. Então para qualquer $x \in D - \{(0, 0)\}$ temos que $\omega(x)$ será uma órbita periódica. Usando o Teorema de Poincaré-Bendixson e o fato que a origem é instável o teorema estará provado.

Vamos mostrar então que $a > e$, isto é, $\phi(A) > \phi(E) \Leftrightarrow \int_A^E d\phi < 0$, para a suficientemente grande, onde a integral aqui é integral de caminho.

$$\begin{aligned} \int_A^E d\phi &= \int_A^B d\phi + \int_B^D d\phi + \int_D^E d\phi \\ \int_A^B d\phi &= \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\phi}{dt} dt = \int_{u_A}^{u_B} \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{du} du \\ &= \int_{u_A}^{u_B} -2uG(u) \frac{1}{v - G(u)} du \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} -2uG(u) \frac{1}{v - G(u)} du \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} -\frac{2uG(u)}{v(u) - G(u)} du. \end{aligned}$$

Já que $\frac{du}{dt} = v - G(u)$, $u_A = 0$, $u_B = \sqrt{3}$ e observando que a mudança de variável de t para u pode ser feita pois $u(t)' > 0$ nesse domínio.

Quando a cresce, o domínio de integração não muda, G não muda, a única mudança acontece na função v . Quando $a \rightarrow +\infty$ a função $v_A \rightarrow +\infty$ uniformemente em $[0, \sqrt{3}]$, logo $\int_A^B d\phi \rightarrow 0$. Analogamente $\int_D^E d\phi \rightarrow 0$ quando $a \rightarrow +\infty$ o que implica $e \rightarrow \infty$.

$$\int_B^D d\phi = \int_{t_B}^{t_D} \frac{d\phi}{dt} dt = \int_{v_B}^{v_D} \frac{d\phi}{dt} \left| \frac{dt}{dv} \right| dv = \int_{v_D}^{v_B} -2uG(u) \frac{1}{-u} dv = - \int_{v_B}^{v_D} 2G(u) dv.$$

No domínio de integração acima, $G \geq 0$, diminuindo o domínio, como $G \geq |FH|$, temos

$$\begin{aligned}
 - \int_{v_B}^{v_D} 2G(u)dv &\leq - \int_{v_{B'}}^{v_{D'}} 2G(u)dv \\
 &\leq \int_{v_{B'}}^{v_{D'}} |FH| dv = -|FH| |B'D'|.
 \end{aligned}$$

Quando $a \rightarrow +\infty$, $|FH|$ é fixo e $|B'D'| \rightarrow +\infty$, logo $\int_B^D d\phi \rightarrow -\infty$ quando $a \rightarrow +\infty$.
 Concluimos que $e - a = \int_A^B d\phi + \int_B^D d\phi + \int_D^E d\phi < 0$ como queríamos. □

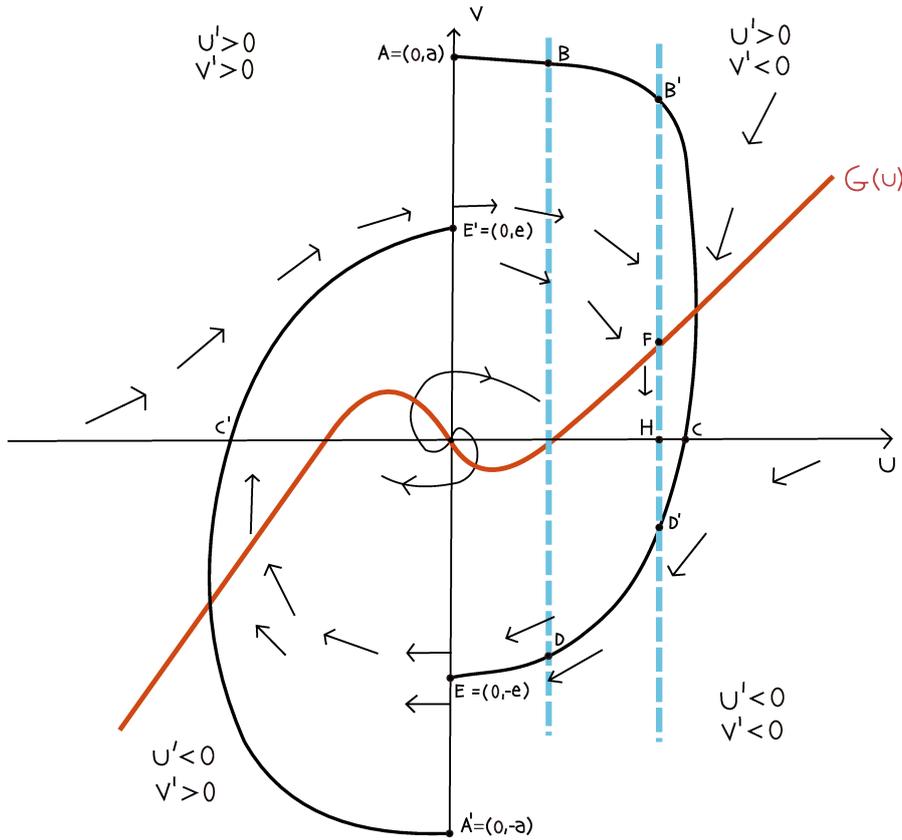


Figura 3.6: Equação de Van der Pol

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LAGES LIMA, Elon. Espaços métricos. Projeto Euclides, Brasília DF, 1977.
- [2] Instituto de Matemática Pura e Aplicada. **Programa de Mestrado: Equações Diferenciais Ordinárias**. Youtube. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=V2lyjyBRx5Y&list=PLo4jXE-LdDTR9q44hqm2w3NWtvyP_ZoiP. Acesso em: 14 de Março de 2021.
- [3] SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
- [4] LEÓN, Victor; SCÁRDUA, Bruno. *Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além*. 33^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Julho 2021.
- [5] 33o Colóquio Brasileiro de Matemática. **33^o CBM – Cursos Introdutórios – Introdução a Geometria e Topologia dos Sist. Dinâmicos... (Aula 1)**. Youtube. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=wP0gXT2B8p0&t=1s>. Acesso em: 5 de Outubro de 2021.
- [6] ALMEIDA, R. L.; MONTÚFAR, H. Perturbações de sistemas lineares bidimensionais $x' = Ax$. Caderno de resumos da X Mostra de Iniciação Científica da FAMAT, 2021, Uberlândia. Anais da X Mostra IC, 2021. p. 140-145.
- [7] ALMEIDA, R. L.; MONTÚFAR, H. Estabilidade de Lyapunov em Sistemas Autônomos. Preprint da XXI Semana da Matemática e XI Semana da Estatística, 2021, Universidade Federal de Uberlândia, 2021.
- [8] BOYCE, W. E. e DIPRIMA, R. C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 8a. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2006.
- [9] Hirsch, W.; Smale, S.; Devaney, R. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Academic press, 2012.
- [10] Robinson, C. Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos. CRC Press Inc, 1995.