Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Faculdade de Matemática - FAMAT
Bacharelado em Matemática

# Teoremas clássicos de Análise Funcional

**Ana Laura Mendonça Marangoni**

Uberlândia - MG
2021

**Ana Laura Mendonça Marangoni**

# Teoremas clássicos de Análise Funcional

Trabalho apresentado à Faculdade de Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em matemática.

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Faculdade de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Fábio José Bertoloto

Uberlândia - MG

2021

**Ana Laura Mendonça Marangoni**

# Teoremas clássicos de Análise Funcional

Trabalho apresentado à Faculdade de Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em matemática.

**Prof. Dr. Fábio José Bertoloto**
Orientador

**Prof. Dr. Jocelino Sato**

**Profa. Dra. Elisa Regina dos Santos**

Uberlândia - MG
2021

# Agradecimentos

Primeiramente, extrema gratidão ao universo, por ter me feito parte da minha família, com quem compartilhei cada pedaço da minha trajetória. Ao meu maior exemplo de mulher e cientista, minha mãe, Karina, por me guiar pelo caminho da força, coragem e perseverança. Aos meus avós, Nadir e Celso, pelo apoio, confiança e amor. Ao meu irmão, Luiz Felipe, que sempre me encheu de carinho, por ser meu porto seguro e me ter como o dele.

Agradeço às irmãs que a vida me deu de presente, Tainá e Luciana, pela presença, cumplicidade, parceria e por todos os aconselhamentos. Por cada passo que deram ao meu lado, desde o início. Por fazerem, de cada avanço conquistado, uma celebração e, de cada obstáculo, um motivo para seguir em frente.

Sou imensamente grata às minhas amigas Rafaela, Pâmela, Alexandra, Jéssica e Beatriz, por todo o incentivo e amor, por toda a criatividade e prontidão. Pela capacidade que têm de me fazer reconhecercomo parte imprescindível do todo, seja ele a Matemática, a Arte ou o mundo.

Agradeço à portaria SESu-MEC pelo fomento financeiro, ao Programa de Educação Tutorial (PET), por cada oportunidade proporcionada ao longo de três anos e aos membros dos grupos que tive o prazer de compor. Às petianas Dhara e Fernanda, pelas atividades que, com excelência, executamos juntas, pela diversão durante as viagens e pela parceria. Aos tesouros que conheci por meio do PET, Aline e Luísa, pelo diálogo, apoio, companheirismo e por ressignificarem meu conceito de amizade. Aos ex-petianos Tiago, Lucas e Japa, que me auxiliaram em cada passo da graduação, por compartilharem conhecimento, risadas e por todas as celebrações. Ao atual tutor do PET Matemática, professor Marcus Bronzi, por ser paciente, íntegro e compreensivo.

Agradeço a cada profissional da educação que me motivou ao longo da vida, especialmente Paulinho, Jesrrael, Frederico, Osvaldo e Liziane, pelo encorajamento. Às professoras Rosana, Luciana, Dylene e, principalmente, à professora e ex-tutora do PET Matemática, Elisa, as quais me inspiraram como mulher e profissional.

Sou infinitamente grata ao meu orientador, professor Fábio, por ser um verdadeiro orientador, em todos os sentidos. Por cada ensinamento, conselho, pela paciência, dedicação, compreensão e persistência, durante todos esses anos. Pelo trabalho impecável que fizemos juntos e por ser um exemplo de professor, pai e pessoa.

Por fim, agradeço a todos e todas que participaram, direta ou indiretamente, tanto da minha formação, quanto para que esse trabalho pudesse ser concretizado.

*À memória de meu bisavô, Osvaldo Marangoni.*

# Resumo

Esse trabalho constrói uma introdução à Análise Funcional e tem como objetivo principal o estudo de teoremas fundamentais dessa teoria. A priori, explora espaços normados, espaços de Banach, espaços de sequências e transformações lineares entre esses espaços, o que garante uma base para o entendimento das demonstrações de alguns dos principais resultados da área: o Teorema de Hahn-Banach, o Teorema de Banach-Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado.

**Palavras-chave:** Espaços de Banach, Teorema de Hahn-Banach, Teorema de Banach-Steinhaus, Teorema da Aplicação Aberta, Teorema do Gráfico Fechado.

# Abstract

This paper makes an introduction to Functional Analysis, and its main objective is the study of this theory's fundamental theorems. At first, it explores normed spaces, Banach spaces, spaces of sequences and linear transformations between these spaces, which assure a basis to understand some of the main results demonstrations of the area: the Hahn-Banach Theorem, the Banach-Steinhaus Theorem, the Open Mapping Theorem and the Closed Graph Theorem.

**Keywords:** Banach Spaces, Hahn-Banach Theorem, Banach-Steinhaus Theorem, Open Mapping Theorem, Closed Graph Theorem.

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

A Análise Funcional é uma área da Matemática que tem como principais objetos de estudo os espaços vetoriais e os operadores sobre estes espaços. No caso da Álgebra Linear, a discussão é limitada ao estudo de espaços vetoriais de dimensão finita e, as transformações lineares podem ser vistas como matrizes com entradas escalares. Já na Análise Funcional, os espaços vetoriais trabalhados são, majoritariamente, de dimensão infinita, com transformações lineares nem sempre, portanto, podendo ser representadas por matrizes. A teoria se torna, assim, mais complexa e rica, mas com similaridades, podendo ser vista, de certa forma, como uma generalização da Álgebra Linear, sendo os elementos de Teoria de Conjuntos e de Topologia, bem como conceitos de aplicações e limite, os mais trabalhados.

Estudos sobre Análise Funcional começaram no início do século XX e criaram força em 1920, com a demonstração do celebrado Teorema de Hahn-Banach, devido aos matemáticos Hans Hahn e Stefan Banach. Esse é um dos principais resultados da área e diz, em certo sentido, que há funcionais lineares contínuos o suficiente em todo espaço normado, de maneira a deixar a teoria sobre espaços duais (espaços cujos elementos são funcionais lineares) interessante. O Teorema de Hahn-Banach, que será estudado no Capítulo 3, leva esse nome pois, inicialmente, foi deduzido pelo austríaco Hahn, em 1927, e generalizado pelo polonês Banach, em 1929.

Considerado um dos maiores influenciadores da Matemática do século passado, Stefan Banach contribuiu, mais uma vez, significativamente com o estudo dos chamados espaços de Banach, que são espaços vetoriais, normados e completos, relativamente, à métrica natural induzida pela norma, os quais serão estudados no Capítulo 2. No ano de 1932, Banach publicou a primeira monografia em teoria geral de Análise Funcional, entitulada *Théorie des Opérations Linéaires* [15] — em português, Teoria de Operadores Lineares —, referência atemporal e utilizada por pesquisadores de todo o planeta.

Os matemáticos poloneses Hugo Steinhaus e Juliusz Pawel Schauder também foram figuras importantíssimas para alavancar o estudo da Análise Funcional. Junto a Banach, Steinhaus contribuiu à teoria com o Princípio da Limitação Uniforme. Também conhecido por Teorema de Banach-Steinhaus, o resultado, que será apresentado e demonstrado no Capítulo 4, afirma que para uma família de operadores lineares contínuos — e, portanto, operadores limitados — cujo domínio é um espaço de Banach, a limitação pontual é equivalente à limitação uniforme na norma de cada operador da família. Em 1927, foi publicado pela primeira vez na revista *Fundamenta Mathematicae*, em um artigo que leva o nome de "*Sur le principe de la condensation de singularités*" [14].

O Teorema da Aplicação Aberta é outro relevante fruto dos estudos de Banach, dessa vez, em parceria com o matemático polonês Schauder. No Capítulo 5, o leitor verá que o Teorema de Banach-Schauder, como também é chamado esse resultado, classifica funções abertas entre espaços de Banach. Sua demonstração, que conta com o auxílio do Teorema de Baire, viabiliza e direciona para uma relevante consequência: o Teorema do Gráfico Fechado, que também será discutido e demonstrado nesse capítulo.

Em todo o trabalho, o corpo $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos números reais ($\mathbb{R}$) ou o corpo dos números complexos ($\mathbb{C}$).

# Capítulo 2

# Espaços de Banach

Para chegarmos à definição de espaço de Banach, temos que conhecer melhor alguns conceitos anteriores.

## 2.1 Espaços Métricos

**Definição 2.1.** Seja um conjunto $M \neq \emptyset$. Uma *métrica* no conjunto $M$ é uma função $d\colon M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa, a cada par ordenado de elementos $(x, y) \in M \times M$, um número real não negativo $d(x, y)$ denominado distância de $x$ a $y$, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $x, y, z \in M$:

(D1) $d(x, x) = 0$;

(D2) $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$;

(D3) $d(x, y) = d(y, x)$;

(D4) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular).

O par $(M, d)$ é chamado **espaço métrico**.

**Exemplo 2.2.** (Reta Real) Seja $|x|$ o módulo de um número real e seja $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$, a função que define a distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$. O par $(\mathbb{R}, d)$ é um exemplo de espaço métrico.

De fato, basta verificarmos que $d$ é uma métrica:

(D1) $d(x, x) = |x - x| = 0$;

(D2) $x \neq y \Rightarrow d(x, y) = |x - y| > 0$;

(D3) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$;

(D4) $d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| = |(x-y)+(y-z)| \leqslant |x-y|+|y-z| = d(x,y)+d(y,z)$.

**Exemplo 2.3.** (Métrica Induzida) Seja $(M,d)$ um espaço métrico. Vale que todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado um espaço métrico com a métrica $d' \colon S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $d'(x,y) = d(x,y)$, para todos $x, y \in S$. Quando isto é feito, $S$ é chamado de *subespaço métrico de M* e $d'$ diz-se *métrica induzida* por $d$.

**Exemplo 2.4. (**Métriza "zero-um") Seja $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ métrica definida como

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

O par $(M,d)$ é um espaço métrico, para todo conjunto $M$. De fato, para $x, y, z \in M$:

(D1) $d(x,x) = 0$.

(D2) $x \neq y \Rightarrow d(x,y) = 1 > 0$.

(D3) $d(x,y) = 1 = d(y,x)$, se $x \neq y$. Se $x = y$, a igualdade é imediata.

(D4) Caso $d(x,z) = 0$, o resultado segue diretamente. Agora, se $d(x,z) = 1$, de $x \neq z$ basta analisar os casos em que temos elementos $y \in M$ com $y = x$, $y = z$ ou $y \neq x, z$ que o resultado segue.

## 2.2 Espaços Normados

Nesta subseção, $E$ e $F$ são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$.

**Definição 2.5. (**Norma) Uma função não negativa $\|\cdot\| \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada *norma* se verifica as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

(N1) $\|x\| \geqslant 0$;

(N2) $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

(N4) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

O par $(E, \|\cdot\|)$ é chamado *espaço normado*.

**Exemplo 2.6.** Sejam $E$ e $F$ espaços normados. A função $\|\cdot\|_1 : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|(x,y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$ é uma norma. De fato:

(N1) Note que $\|x\| \geqslant 0$, para todo $x \in E$, e $\|y\| \geqslant 0$, para todo $y \in F$. Logo, $\|(x,y)\|_1 = \|x\| + \|y\| \geqslant 0$, para todo $(x,y) \in E \times F$.

(N2) $\|(x,y)\|_1 = \|x\| + \|y\| = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$ e $\|y\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $y = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.

(N3) $\|\lambda(x,y)\|_1 = \|(\lambda x, \lambda y)\|_1 = \|\lambda x\| + \|\lambda y\| = |\lambda|\|x\| + |\lambda|\|y\| = |\lambda|(\|x\| + \|y\|) = |\lambda|\|(x,y)\|_1$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x,y) \in E \times F$.

(N4) $\|(x,y)+(w,z)\|_1 = \|(x+w,y+z)\|_1 = \|x+w\|+\|y+z\| \leqslant \|x\|+\|w\|+\|y\|+\|z\| = \|x\| + \|y\| + \|w\| + \|z\| = \|(x,y)\|_1 + \|(w,z)\|_1$, para todos $(x,y),(w,z) \in E \times F$.

**Exemplo 2.7.** Sejam $E$ e $F$ espaços normados. A função $\|\cdot\|_1 : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ é uma norma. De fato:

(N1) Note que $\|x\| \geqslant 0$, para todo $x \in E$ e $\|y\| \geqslant 0$, para todo $y \in F$. Logo, $\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\} \geqslant 0$, para todos $(x,y) \in E \times F$.

(N2) $\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\} = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$ e $\|y\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $y = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$;

(N3) $\|\lambda(x,y)\|_\infty = \|(\lambda x, \lambda y)\|_\infty = \max\{\|\lambda x\|, \|\lambda y\|\} = \max\{|\lambda|\|x\|, |\lambda|\|y\|\} = |\lambda| \max\{\|x\|, \|y\|\} = |\lambda|\|(x,y)\|_\infty$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x,y) \in E \times F$.

(N4) $\|(x,y) + (w,z)\|_\infty = \|(x+w, y+z)\|_\infty = \max\{\|x+w\|, \|y+z\|\} \leqslant \max\{\|x\| + \|w\|, \|y\| + \|z\|\} \leqslant \max\{\|x\|, \|y\|\} + \max\{\|w\|, \|z\|\} = \|(x,y)\|_\infty + \|(w,z)\|_\infty$, para todos $(x,y),(w,z) \in E \times F$.

**Exemplo 2.8. (**Métrica Natural Induzida pela Norma) Um espaço normado $(E, \|.\|)$ pode ser considerado um espaço métrico $(E,d)$. Basta definir a chamada *métrica natural induzida pela norma* em $E$, dada por $d(x,y) = \|x - y\|$, para todos $x, y \in E$. Vejamos que $d$ assim definida é uma métrica sobre $E$:

(D1) $d(x,x) = \|x - x\| = \|0\| = 0$, para todo $x \in E$;

(D2) Se $x \neq y$, então $d(x,y) = \|x - y\| > 0$, para todos $x, y \in E$;

(D3) $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|\|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x)$, para todos $x, y \in E$;

(D4) $d(x,z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| = \|(x-y) + (y-z)\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| = d(x,y) + d(y,z)$, para todos $x, y, z \in E$.

**Definição 2.9. (**Sequência Convergente) Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em um espaço métrico $(M,d)$ é uma <u>*sequência convergente*</u> para um ponto $a \in M$, se para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon.$$

**Definição 2.10.** (Sequência de Cauchy) Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço métrico $(M, d)$ é uma *sequência de Cauchy*, se para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n, m > n_0,\ \ m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

**Definição 2.11.** (Espaços Métricos Completos) Um espaço métrico $(M, d)$ é dito *completo*, se toda sequência de Cauchy em $M$, for convergente para um ponto de $M$.

**Definição 2.12.** (Espaços de Banach) $(E,\ \|.\|)$ é um *espaço de Banach*, se é completo em relação à métrica natural.

**Proposição 2.13.** *Sejam $E$ e $F$ espaços normados. Então, $(E \times F, \|.\|_1)$ é completo se, e só se, $E$ e $F$ são completos.*

*Demonstração.* $(\Longrightarrow)$ Sejam $(x_n)$ e $(y_n)$ sequências de Cauchy em $E$ e em $F$, respectivamente. Então, dado $\epsilon > 0$, existem $n_{0_E}$ e $n_{0_F}$ tais que

$$\|x_n - x_m\| < \frac{\epsilon}{2},\ \text{para } n, m \geqslant n_{0_E}$$

e

$$\|y_n - y_m\| < \frac{\epsilon}{2},\ \text{para } n, m \geqslant n_{0_F}$$

Assim, $\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_1 = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$, para $n, m \geqslant n_0$, em que $n_0 = \max\{n_{0_E}, n_{0_F}\}$. Disso, $(x_n, y_n)$ é de Cauchy em $E \times F$. Logo, por hipótese, $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$ em $E \times F$ e, assim, $x_n \longrightarrow x \in E$ e $y_n \longrightarrow y \in F$. Portanto, $E$ e $F$ são completos.

$(\Longleftarrow)$ Agora, seja $(x_n, y_n)$ uma sequência de Cauchy em $(E \times F, \|.\|_1)$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \in \mathbb{N} \Longrightarrow \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_1 < \epsilon.$$

Note que,

$$\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_1 < \epsilon \Leftrightarrow \|x_n - x_m\| + \|y_n + y_m\| < \epsilon.$$

Disso, $(x_n)$ e $(y_n)$ são sequências de Cauchy em $E$ e $F$, respectivamente. Como $E$ e $F$ são completos, $(x_n)$ e $(y_n)$ são convergentes com $x_n \longrightarrow x \in E$ e $y_n \longrightarrow y \in F$. Não é difícil ver que $(x_n, y_n)$ converge para $(x, y)$ em $E \times F$. Logo, $(E \times F, \|.\|_1)$ é completo. □

**Proposição 2.14.** *Sejam $E$ e $F$ espaços normados. Então, $(E \times F, \|.\|_\infty)$ é completo se, e só se, $E$ e $F$ são completos.*

*Demonstração.* A demonstração dessa equivalência é análoga à feita na Proposição 2.13. □

### 2.2.1 Exemplos de espaços normados completos e não completos

Veremos aqui alguns exemplos de espaços normados que são completos (Banach), bem como de espaços normados que não são completos (não são de Banach).

**Definição 2.15.** (Espaços $\ell_p$) Para cada número real $p \geqslant 1$, definimos o conjunto de sequências em $\mathbb{K}$

$$\ell_p = \{(a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty\}.$$

Mostraremos que $\ell_p$ é um espaço vetorial e que definindo para cada $(a_n) \in \ell_p$ o número $\|(a_n)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, temos que $\|.\|_p$ é uma norma em $\ell_p$. Isto é, $(\ell_p, \|.\|_p)$ é um *espaço normado*. Para isso, apresentaremos resultados prévios necessários.

**Lema 2.16.** *Sejam $a, b, \alpha, \beta > 0$ com $\alpha + \beta = 1$. Então,*

$$a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \leqslant \alpha a + \beta b.$$

*Demonstração.* Para cada $0 < \alpha < 1$, considere a função $f = f_{\alpha} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t^{\alpha} - \alpha t$. Como $0 < \alpha < 1$, note que $f'(t) > 0$, se $0 < t < 1$ e $f'(t) < 0$, se $t > 1$. Então, $f$ atinge seu máximo em $t = 1$. Logo, $t^{\alpha} - \alpha t \leqslant 1 - \alpha$, para todo $t \in (0, \infty)$. Fazendo $t = \frac{a}{b}$, segue que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} - \alpha\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant 1 - \alpha \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} \leqslant \alpha\left(\frac{a}{b}\right) + \beta \Rightarrow a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \leqslant \alpha a + \beta b.$$

$\square$

Para o que segue, temos o espaço $n$-dimensional $\mathbb{K}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, n\}$.

**Proposição 2.17.** *(Desigualdade de Hölder para somas) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

*para quaisquer $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$.*

*Demonstração.* Fazendo $\alpha = \frac{1}{p}, \beta = \frac{1}{q}, a = \frac{|a_k|^p}{\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)}$ e $b = \frac{|b_k|^q}{\left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)}$, pelo lema anterior, segue que:

$$\left(\frac{|a_k|^p}{\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|b_k|^q}{\left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|a_k|^p}{\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)} + \frac{1}{q} \frac{|b_k|^q}{\left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)}.$$

Daí,

$$\frac{|a_k|}{\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|b_k|}{\left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|a_k|^p}{\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)} + \frac{1}{q}\frac{|b_k|^q}{\left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q\right)},$$

para cada $k = 1, \ldots, n$. Somando as desigualdades, para $k = 1, \ldots, n$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j=1}^n |a_j b_j|}{\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} &\leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{\sum_{j=1}^n |a_j|^p}{\sum_{j=1}^n |a_j|^p}\right) + \frac{1}{q}\left(\frac{\sum_{j=1}^n |b_j|^q}{\sum_{j=1}^n |b_j|^q}\right) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

**Corolário 2.18.** *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz para somas.) Sejam* $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ *e* $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$*. Então,*

$$\sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Proposição 2.19.** *(Desigualdade de Minkowski para somas) Para* $p \geqslant 1$*, vale que*

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

*para quaisquer* $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$*.*

*Demonstração.* Para $p = 1$, a desigualdade segue da desigualdade triangular do valor absoluto. Para $p > 1$, segue que:

$$\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p = \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^{p-1}|a_j + b_j| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_j||a_j + b_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^n |b_j||a_j + b_j|^{p-1}.$$

Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $pq = p + q$, isto é, $(p-1)q = p$. Pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\sum_{j=1}^n |a_j||a_j + b_j|^{p-1} \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

e

$$\sum_{j=1}^n |b_j||a_j + b_j|^{p-1} \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Daí,

$$\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

Como $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, concluímos que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

**Corolário 2.20.** *(Desigualdade de Hölder para séries) Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $x = (a_j) \in \ell_p$ e $y = (b_j) \in \ell_p$, então*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

*Demonstração.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, vale pela Proposição 2.17 que

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Como $x, y \in \ell_p$, então

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Como a última desigualdade ocorre para todo $n \in \mathbb{N}$, o resultado segue.

$\square$

**Corolário 2.21.** *(Desigualdade de Minkowski para séries) Para $p \geqslant 1$, se $x = (a_j) \in \ell_p$ e $y = (b_j) \in \ell_p$, então*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Demonstração.* Pela Proposição 2.19, procedendo como na demonstração do corolário anterior, o resultado segue.

$\square$

A partir da Desigualdade de Minkowski, podemos afirmar que $\ell_p$, $1 \leq p < \infty$, é um espaço vetorial, pois é fechado para a soma. As oito propriedades de espaço vetorial, bem como o fato de ser fechado para a multiplicação por escalar, seguem diretamente.

Como ressaltado anteriormente, mostraremos que $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, com $\|(a_n)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ para cada $(a_n) \in \ell_p$, é um espaço normado. De fato, sejam $x = (a_j), y = (b_j) \in \ell_p$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:

(N1) $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 0.$

(N2) $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |a_j| = 0, \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = 0.$

(N3) $\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|^p |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x\|_p.$

(N4) Pela Desigualdade de Minkowski para séries, temos que $\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$.

Agora, provaremos que, mais que espaço normado, $(\ell_p, \|.\|_p)$ é um *espaço de Banach*.

**Teorema 2.22.** *Se $1 \leqslant p < \infty$, então $\ell_p$ é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p$. Digamos que $x_n = (a_{nj})_{j=1}^{\infty}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado e $m, n \in \mathbb{N}$ dados, a desigualdade

$$|a_{nj} - a_{mj}| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj} - a_{mj}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x_n - x_m\|_p$$

mostra que a sequência $(a_{nj})_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, portanto, convergente. Seja $a_j = \lim_{n\to\infty} a_{nj}$. Vamos mostrar que $x \in \ell_p$ e que $x_n \longrightarrow x$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geqslant n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\|_p < \epsilon.$$

Daí,

$$n, m \geqslant n_0 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{k} |a_{nj} - a_{mj}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$, segue que

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{k} |a_{nj} - a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \epsilon, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj} - a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \epsilon.$$

Assim, $x_n - x \in \ell_p$ e $x_n - x \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Logo, $x = x_n - (x_n - x) \in \ell_p$ e $x_n \longrightarrow x$ em $\ell_p$.

Concluímos, por fim, que $\ell_p$ é espaço de Banach. □

**Definição 2.23.** (Espaço $\ell_\infty$) Para $p = \infty$, definimos o conjunto de sequências em $\mathbb{K}$

$$\ell_\infty = \{(a_j) : a_j \in \mathbb{K} \text{ e } \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| < \infty\}.$$

Mostraremos que $\ell_\infty$ é um espaço vetorial e que definindo para cada $(a_n) \in \ell_\infty$ o número $\|(a_n)\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j|$, temos que $\|.\|_\infty$ é uma norma em $\ell_\infty$. Isto é, $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$ é um *espaço normado*.

Não é difícil verificar que $\ell_\infty$ é um espaço vetorial.

De fato, as oito propriedades de espaço vetorial, bem como o fato de ser fechado para a multiplicação por escalar, são de fácil verificação. Ainda, se $x = (a_j), y = (b_j) \in \ell_\infty$, então

$$|a_j + b_j| \leq |a_j| + |b_j|, \forall j \in \mathbb{N} \Longrightarrow |a_j + b_j| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| + \sup_{j\in\mathbb{N}} |b_j| < \infty, \forall j \in \mathbb{N},$$

ou seja, $\|x + y\|_\infty = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} |a_j + b_j| < \infty$ e $x + y = (a_j + b_j) \in \ell_\infty$, mostrando que $\ell_\infty$ é fechado para a soma.

Mostraremos que, definindo para cada $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$ o número

$$\|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j|,$$

a função $\|.\|_\infty$ é uma norma em $\ell_\infty$. Isto é, $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$ é um espaço normado. Mais ainda, $\ell_\infty$ é espaço de Banach.

Sejam $x = (a_j), y = (b_j) \in \ell_\infty$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

(N1) Observe que $|a_j| \geqslant 0$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Então, $\|x\|_\infty = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\} \geqslant 0$.

(N2) $\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\} = 0 \Leftrightarrow |a_j| = 0, \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_j = 0, \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = 0$.

(N3) $\|\lambda x\|_\infty = \sup\{|\lambda a_j| : j \in \mathbb{N}\} = \sup\{|\lambda||a_j| : j \in \mathbb{N}\} = |\lambda| \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\} = |\lambda|\|x\|_\infty$.

(N4) A desigualdade triangular está logo acima, quando provamos que $\ell_\infty$ é fechado para a soma.

**Teorema 2.24.** *$\ell_\infty$ é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy em $\ell_\infty$, com $x_n = (a_{nk})_{k=1}^\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, a sequência $(a_{nj})_{n=1}^\infty$ é convergente, pois é de Cauchy em $\mathbb{K}$. De fato,

$$|a_{nj} - a_{mj}| \leqslant \|x_n - x_m\|_\infty = \sup\{|a_{nj} - a_{mj}| : j \in \mathbb{N}\}.$$

Digamos que $a_{nj} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_j$. Denotando $x = (a_j)_{j=1}^\infty$, mostraremos que $x \in \ell_\infty$ e que $x_n \longrightarrow x$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n, m \geqslant n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\|_\infty < \epsilon \Rightarrow |a_{nj} - a_{mj}| < \epsilon, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$, segue que

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_{nj} - a_j| \leqslant \epsilon, \forall j \in \mathbb{N},$$

concluindo que $\|x_n - x\|_\infty \leqslant \epsilon$. Segue que $x_n - x \in \ell_\infty$ e $x_n - x \longrightarrow 0$. Portanto, $x = x_n - (x_n - x) \in \ell_\infty$ e $x_n \longrightarrow x$ em $\ell_\infty$, resultando que $\ell_\infty$ é espaço de Banach.

□

A seguir, apresentaremos a demonstração de um importante teorema para o desenvolvimento do exemplo seguinte.

**Proposição 2.25.** *Se $E$ é um espaço de Banach e $S \subset E$ é um subespaço fechado, então $S$ é um espaço de Banach com a norma induzida.*

*Demonstração.* Tome $(x_n)$ uma sequência de Cauchy em $S$. Logo, $(x_n)$ é de Cauchy em $E$, que é completo. Então, $(x_n)$ converge para algum $x \in E$. Como $S$ é fechado, $x \in S$. Portanto, toda sequência de Cauchy $(x_n)$ em $S$ converge para um elemento de $S$, concluindo que $S$ é espaço de Banach. □

**Exemplo 2.26.** (Espaços $c_0$ e $c$) Sejam os conjuntos

$$c_0 = \{x = (a_j) : a_j \in \mathbb{K} \text{ e } (a_j) \text{ converge a zero}\}$$

e

$$c = \{x = (a_j) : a_j \in \mathbb{K} \text{ e } (a_j) \text{ é convergente}\}.$$

É claro que estes dois conjuntos são subespaços vetoriais de $\ell_\infty$. Vamos mostrar que $c_0$ e $c$ são subespaços fechados de $\ell_\infty$ e, portanto, são espaços de Banach. Seja $(x_j) = ((b_{jn})_{n=1}^\infty))_{j=1}^\infty$ uma sequência em $c$. Então,

$$\begin{aligned}
x_1 &= (b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n}, \ldots), b_{1n} \to a_1 \\
x_2 &= (b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n}, \ldots), b_{2n} \to a_2 \\
&\vdots \\
x_j &= (b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{jn}, \ldots), b_{jn} \to a_j \\
&\vdots
\end{aligned}$$

para alguns $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$ em $\mathbb{K}$.

Vamos mostrar que se $x_j \xrightarrow{\ell_\infty} x = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, para algum $x \in \ell_\infty$, então $a_j \xrightarrow{\mathbb{K}} a$, para algum $a \in \mathbb{K}$. Posteriormente, concluiremos que $b_n \xrightarrow{\mathbb{K}} a$ e, portanto, $x \in c$. De fato,

$$\begin{aligned}
|a_j - a_m| &= |a_j - b_{jn} + b_{jn} - a_m| \\
&\leqslant |a_j - b_{jn}| + |b_{jn} - a_m| \\
&= |a_j - b_{jn}| + |b_{jn} - b_{mn} + b_{mn} - a_m| \\
&\leqslant |a_j - b_{jn}| + |b_{jn} - b_{mn}| + |b_{mn} - a_m| \\
&\leqslant |a_j - b_{jn}| + \|x_j - x_m\|_\infty + |b_{mn} - a_m|.
\end{aligned}$$

Do fato de $b_{jn} \xrightarrow{\mathbb{K}} a_j$, $b_{mn} \xrightarrow{\mathbb{K}} a_m$ e de $(x_j)$ ser convergente em $\ell_\infty$, portanto de Cauchy, segue que $(a_j)$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, ou seja, $a_j \xrightarrow{\mathbb{K}} a$ para algum $a \in \mathbb{K}$. Agora,

$$\begin{aligned} |b_n - a| &\leqslant |b_n - b_{jn} + b_{jn} - a| \\ &\leqslant |b_n - b_{jn}| + |b_{jn} - a| \\ &= |b_n - b_{jn}| + |b_{jn} - a_j + a_j - a| \\ &\leqslant \|x - x_j\|_\infty + |b_{jn} - a_j| + |a_j - a|. \end{aligned}$$

Portanto, de $x_j \xrightarrow{\ell_\infty} x$, de $b_{jn} \xrightarrow{\mathbb{K}} a_j$ e de $a_j \xrightarrow{\mathbb{K}} a$, resulta que $b_n \xrightarrow{\mathbb{K}} a$ e concluímos a demonstração mostrando que $x \in c$. Logo $c$ é um subespaço fechado de $\ell_\infty$, sendo um espaço de Banach.

A partir desta demonstração, pode-se mostrar também que $c_0$ é um subespaço fechado de $\ell_\infty$ e que, portanto, é um espaço de Banach.

### 2.2.2 Espaços Separáveis

**Definição 2.27.** (Espaço Separável) Seja $M$ um espaço métrico. Se existir um conjunto enumerável $D \subset M$ que é denso em $M$, ou seja, $\overline{D} = M$, então $M$ é denominado *espaço separável.*

**Proposição 2.28.** *O espaço $\ell_p$ é separável, para cada $1 \leqslant p < \infty$.*

*Demonstração.* Sejam

$$c_{00} = \{x = (a_j) \in c_0 : \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_j = 0 \text{ para todo } j \geqslant n\}$$

e

$$D = \{x = (a_j) \in c_{00} : a_j \in \mathbb{Q} \,(\text{ ou } \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i)\}.$$

Note que $D \subset c_{00}$ e que $D$ é enumerável. De fato, $a_j \in \mathbb{Q}$, (ou $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$), logo $D$ é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis a saber:

$$D \cong (\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^2 \cup \ldots \cup \mathbb{Q}^n \cup \ldots) = \cup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n, \text{ quando } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \text{ ou}$$

$$D \cong (\mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{Q}^4 \cup \ldots \cup \mathbb{Q}^{2n} \cup \ldots) = \cup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^{2n}, \text{ quando } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Vamos mostrar, então, que $D$ é denso em $\ell_p$. Sejam $x = (a_j) \in \ell_p$ e $\epsilon > 0$ dados. Como $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j|^p < \epsilon^p$. Sejam $y = (a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) \in c_{00}$ e $z = (b_1, \ldots, b_n, 0, 0, \ldots)$, com $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}\,(\text{ ou } \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i)$, tais que

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j - b_j|^p < \epsilon^p.$$

Observe que $z \in D$ e que

$$\begin{aligned}
\|x - z\|_p = \|(x-y) + (y-z)\|_p &\leqslant \|x-y\|_p + \|y-z\|_p \\
&= \|(a_j)_{j=n+1}^{\infty}\|_p + \|(a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n, 0, 0, \ldots)\|_p \\
&= \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j - b_j|\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant (\epsilon^p)^{\frac{1}{p}} + (\epsilon^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $D$ é denso em $\ell_p$. Portanto, $\ell_p$ é separável. □

**Observação 2.29.** O espaço $\mathbb{K}_p^n = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ é um exemplo mais simples de espaço separável, para cada $1 \leqslant p \leqslant \infty$. De fato, tomando $D = \{(r_k) \in \mathbb{K}_p^n : r_k \in \mathbb{Q}(\text{ou } \mathbb{Q} + i\mathbb{Q})\}$ o resultado segue de forma semelhante ao que foi provado na proposição anterior.

**Proposição 2.30.** *O espaço $\ell_\infty$ não é separável.*

*Demonstração.* Seja $(x_n)$ um subconjunto enumerável de $\ell_\infty$. Seja $x_n = (a_{nj})_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de pontos em $\ell_\infty$, ou seja:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots) \\
x_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots) \\
&\vdots \\
x_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}, \ldots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Analisando a diagonal da representação acima, definimos $x = (a_j)$ dado por:

$$a_j = \begin{cases} a_{jj} + 1, & \text{se } |a_{jj}| \leqslant 1, \\ 0, & \text{se } |a_{jj}| > 1 \end{cases}$$

Note que $x \in \ell_\infty$, pois $|a_j| = 0$ ou $|a_j| \leqslant |a_{jj}| + 1$ o que resulta em $|a_j| \leqslant 2$ sempre. Porém,

$$\|x - x_j\|_\infty = \|(a_k - a_{jk})_{k=1}^{\infty}\|_\infty \geqslant |a_j - a_{jj}| \geqslant 1.$$

Portanto, $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ não é denso em $\ell_\infty$ e $\ell_\infty$ não é separável.

□

## 2.3 Transformações Lineares entre espaços normados

Nesta seção, vamos considerar $E$ e $F$ espaços normados.

**Definição 2.31.** Sejam $a \in E$ e $r > 0$. A *bola aberta de centro a e raio r* é o conjunto

$$B_E(a; r) = \{x \in E : \|x - a\| < r\}.$$

Quando $r = 1$ escrevemos, simplesmente, $B_E$. A *bola fechada de centro a e raio r* é o conjunto

$$B_E[a; r] = \{x \in E : \|x - a\| \leqslant r\}.$$

Quando $r = 1$ escrevemos, simplesmente, $\overline{B_E}$. A *esfera de centro a e raio r* é o conjunto

$$S_E(a; r) = \{x \in E : \|x - a\| = r\}.$$

Quando $r = 1$ escrevemos, simplesmente, $S_E$.

**Definição 2.32.** Dada uma aplicação linear $T : E \longrightarrow F$, define-se $\|T\|$ da seguinte maneira:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leqslant 1\}.$$

$T$ é dita *limitada* se $\|T\| < \infty$.

Note que $\| \cdot \|$ é uma norma. De fato, considerando $T$, $T_1$ e $T_2$ transformações limitadas, obtemos:

(N1) $\|T(x)\| \geqslant 0, \forall x \in E \Rightarrow \|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_E\} \geqslant 0$.

(N2) $T \equiv 0$ implica $T(x) = 0 \in F$ para todo $x \in E$. Daí, $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_E\} = 0$.

Agora, suponhamos $0 = \|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_E\}$. Disso, $\|T(x)\| = 0$, para todo $x \in B_E$. Em particular, $T(x) = 0$, para todo $x \in B_E$. Então, $T \equiv 0$, pois, dado $y \in E, y \neq 0$, segue que:

$$T(y) = T\left(\|y\| \cdot \frac{y}{\|y\|}\right) = \|y\| \cdot T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \|y\| \cdot 0 = 0.$$

(N3) $\|\lambda T\| = \sup\{\|\lambda T(x)\| : x \in E, \|x\| \leqslant 1\} = \sup\{|\lambda|\|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leqslant 1\} = |\lambda| \sup\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leqslant 1\} = |\lambda|\|T\|$.

(N4) Vale que:

$$\sup\{\|(T_1 + T_2)(x)\| : x \in B_E\} \leqslant \sup\{\|T_1(x)\| : x \in B_E\} + \sup\{\|T_2(x)\| : x \in B_E\}.$$

De fato, para todo $x \in B_E$, temos

$$\|T_1(x)+T_2(x)\| \leq \|T_1(x)\|+\|T_2(x)\| \leqslant \sup\{\|T_1(x)\| : x \in B_E\}+\sup\{\|T_2(x)\| : x \in B_E\}.$$

Aplicando o supremo na parte esquerda da desigualdade, o resultado segue, ou seja,

$$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|.$$

**Proposição 2.33.** *Dada uma aplicação linear $T\colon E \longrightarrow F$, as seguintes condições são equivalentes:*

*(a) $T$ é limitada;*

*(b) $T$ é uniformemente contínua;*

*(c) $T$ é contínua;*

*(d) $T$ é contínua na origem.*

*Demonstração.* Devemos mostrar a equivalência das condições acima.

Suponha $T$ limitada **(a)**, isto é, $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leqslant 1\} < \infty$. Em particular, $\|T(x)\| \leqslant \|T\|$, para todo $x \in E, \|x\| \leqslant 1$. Seja $x \in E, x \neq 0$. Então, $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \|T\|$, pois $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$. Daí, $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leqslant \|T\|$ e, segue que,

$$\|T(x)\| \leqslant \|T\|\|x\|. \tag{2.1}$$

Assim, $\|T(x-y)\| \leqslant \|T\|\|x-y\|$, para todos $x, y \in E$.

Queremos mostrar que $T$ é uniformemente contínua **(b)**, ou seja, que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\|x - y\| < \delta$ implica $\|T(x-y)\| < \epsilon$. Tome $\delta = \frac{\epsilon}{\|T\|}$. Se $\|x-y\| < \frac{\epsilon}{\|T\|}$, então $\|T(x-y)\| \leqslant \|T\|\frac{\epsilon}{\|T\|} = \epsilon$, e concluímos que $T$ é uniformemente contínua.

Suponha $T$ uniformemente contínua **(b)** e mostremos que $T$ é contínua **(c)**. Sabemos que:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ :\ \|x-y\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\| < \epsilon.$$

Tome $y = a, a \in E$. Então,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ :\ \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(a)\| < \epsilon.$$

Portanto, $T$ é contínua em $a \in E$. Como $a$ é arbitrário, $T$ é contínua.

Agora, assumindo $T$ contínua **(c)**, é claro que $T$ é contínua na origem **(d)**, uma vez que é contínua em todos os pontos.

Por fim, vamos mostrar que se $T$ é contínua na origem **(d)**, então $T$ é limitada **(a)**. Suponha que $T$ não seja limitada. Então, existiria uma sequência $(x_n)$ em $E$, tal que $\|x_n\| \leqslant 1$ e $\|T(x_n)\| \geqslant n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $y_n = \frac{x_n}{\|T(x_n)\|}$, para cada $n$. Então, $\|y_n\| \leqslant \frac{1}{n}$ e $\|T(y_n)\| = 1$, para cada $n$. Logo, teríamos $y_n \to 0$, porém $T(y_n) \nrightarrow T(0) = 0$ e concluímos. $\square$

**Corolário 2.34.** *Seja $T\colon E \to F$ uma aplicação linear. Então, $T$ é contínua se, e só se, existe uma constante $c > 0$ tal que $\|T(x)\| \leqslant c\|x\|$, para todo $x \in E$.*

*Demonstração.* Esse resultado é provado utilizando a proposição anterior e o seguinte fato:

$$\forall x \in E, x \neq 0, \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant c \Longleftrightarrow \|T(x)\| \leqslant c\|x\|.$$

□

Nesse momento, alguns conceitos essenciais para o desenvolvimento deste trabalho serão apresentados.

**Definição 2.35.** (Espaços de Aplicações Lineares) Denota-se por $L_a(E;F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações lineares $T\colon E \to F$. O subespaço de todas as aplicações lineares $T \in L_a(E;F)$, com $T$ contínua, será denotado por $L(E;F)$. Os elementos de $L_a(E;F)$ são usualmente chamados de operadores lineares.

**Definição 2.36.** (Dual Algébrico e Dual Topológico)

(a) O espaço $L_a(E;\mathbb{K})$ é denotado por $E^*$ e é chamado de *dual algébrico* de $E$.

(b) O espaço $L(E;\mathbb{K})$ é denotado por $E'$ e é chamado de *dual topológico* de $E$ ou, simplesmente, dual.

**Definição 2.37.** (Isomorfismo e Mergulho Topológicos) Seja $T \in L(E;F)$.

(a) Se $T$ é bijetiva e seu inverso é contínuo, então $T$ é chamado de *isomorfismo topológico*.

(b) Se $T$ é um isomorfismo topológico entre $E$ e o subespaço $T(E)$ de $F$, então $T$ é chamado de *mergulho topológico*.

**Definição 2.38.** (Isomorfismo e Mergulho Isométricos) Seja $T \in L(E;F)$.

(a) Se $T$ é bijetiva e $\|T(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in E$, $T$ é chamado de *isomorfismo isométrico*.

(b) Se $T$ é um isomorfismo isométrico entre $E$ e o subespaço $T(E)$ de $F$, então $T$ é chamado de *mergulho isométrico*.

**Definição 2.39.** Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ normas em um espaço vetorial $E$. Se a aplicação identidade de $(E, \|\cdot\|_1)$ em $(E, \|\cdot\|_2)$ é um isomorfismo topológico, então $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são ditas *normas equivalentes*.

**Corolário 2.40.** *Seja $T \in L_a(E;F)$. Então, $T$ é um mergulho topológico se, e só se, existem $b \geqslant a > 0$ tais que*

$$a\|x\| \leqslant \|T(x)\| \leqslant b\|x\|,$$

*para todo $x \in E$.*

*Demonstração.* Suponha que $T$ seja um mergulho topológico. Então, $T$ é contínua e existe $b > 0$ tal que $\|T(x)\| \leqslant b\|x\|$, para todo $x \in E$. Além disso, como $T^{-1}: T(E) \longrightarrow E$ é contínua, existe $c > 0$ tal que $\|T^{-1}\| \leqslant c\|y\|$, para todo $y \in T(E)$. Daí,

$$\|x\| \leqslant c\|T(x)\|,$$

para todo $x \in E$. Tomando $a = \dfrac{1}{c}$, segue que $a\|x\| \leqslant \|T(x)\|$, para todo $x \in E$. Claro que $a \leqslant b$.

Suponha, agora, que existam $b \geqslant a > 0$ tais que $a\|x\| \leqslant \|T(x)\| \leqslant b\|x\|$, para todo $x \in E$. Note que $T$ é injetora. De fato, se $x \in Ker(T)$, então $T(x) = 0$. Daí, $a\|x\| \leqslant \|T(x)\| = 0$. Como $a \neq 0$, segue que $\|x\| = 0$ e, portanto, $x = 0$. Além disso, como $\|T(x)\| \leqslant b\|x\|$, para todo $x \in E$, vale que $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|T(x)\| \leqslant b$, ou seja, $T$ é limitada e, portanto, contínua. De $a\|x\| \leqslant \|T(x)\|$, para todo $x \in E$, resulta $\|T^{-1}(y) \leqslant \dfrac{\|y\|}{a}$, para todo $y \in T(E)$. Logo, $T^{-1}$ é limitada e, portanto, contínua. Sendo assim, $T$ é um mergulho topológico. □

**Corolário 2.41.** *Seja $E$ um espaço vetorial. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em $E$ são equivalentes se, e só se, existem constantes $b \geqslant a > 0$ tais que*

$$a\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant b\|x\|_1,$$

*para todo $x \in E$.*

*Demonstração.* Suponha $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ equivalentes em $E$, então $I: (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ é um isomorfismo topológico, em que $I$ é a função identidade. Daí, pelo Corolário 2.40, existem $b \geqslant a > 0$ tais que

$$a\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant b\|x\|_1,$$

para todo $x \in E$.

Suponha, agora, que existam $b \geqslant a > 0$ tais que

$$a\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant b\|x\|_1,$$

para todo $x \in E$. Então, pelo Corolário 2.40, $I$ é um mergulho topológico e, como também é sobrejetora, $I$ é um isomorfismo topológico. □

**Proposição 2.42.** *A função $T \mapsto \|T\|$ é uma norma em $L(E; F)$. Se $F$ é um espaço de Banach, então $L(E; F)$ também é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Note que $\|\cdot\|$ é uma norma. De fato, considerando $T$, $T_1$ e $T_2$ transformações limitadas, obtemos:

(N1) $\|T(x)\| \geqslant 0, \forall x \in E \Rightarrow \|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_E\} \geqslant 0.$

(N2) $T \equiv 0$ implica $T(x) = 0 \in F$ para todo $x \in E$. Daí, $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_E\} = 0$.

Agora, suponhamos $0 = \|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_E\}$. Disso, $\|T(x)\| = 0$, para todo $x \in B_E$. Em particular, $T(x) = 0$, para todo $x \in B_E$. Então, $T \equiv 0$, pois, dado $y \in E, y \neq 0$, segue que:

$$T(y) = T\left(\|y\| \cdot \frac{y}{\|y\|}\right) = \|y\| \cdot T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \|y\| \cdot 0 = 0.$$

(N3) $\|\lambda T\| = \sup\{\|\lambda T(x)\| : x \in E, \|x\| \leqslant 1\} = \sup\{|\lambda|\|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leqslant 1\} = |\lambda| \sup\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leqslant 1\} = |\lambda|\|T\|$.

(N4) Vale que:

$$\sup\{\|(T_1 + T_2)(x)\| : x \in B_E\} \leqslant \sup\{\|T_1(x)\| : x \in B_E\} + \sup\{\|T_2(x)\| : x \in B_E\}.$$

De fato, para todo $x \in B_E$, temos

$$\|T_1(x)+T_2(x)\| \leq \|T_1(x)\|+\|T_2(x)\| \leqslant \sup\{\|T_1(x)\| : x \in B_E\}+\sup\{\|T_2(x)\| : x \in B_E\}.$$

Aplicando o supremo na parte esquerda da desigualdade, o resultado segue, ou seja,

$$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|.$$

Agora, vamos mostrar que $L(E; F)$ é completo se $F$ é completo. Seja $(T_n)$ uma sequência de Cauchy em $L(E; F)$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| \leqslant \epsilon$, para todo $m, n \geqslant n_0$. Segue que:

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leqslant \|T_n - T_m\|\|x\| \leqslant \epsilon\|x\|, \tag{2.2}$$

para todo $m, n \geqslant n_0$ e $x \in E$. Daí, $(T_n(x))$ é uma sequência de Cauchy em $F$, para cada $x \in E$. Como, por hipótese, $F$ é completo, existe o limite $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$, para cada $x \in E$. Definamos $T\colon E \longrightarrow F$ por $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, para cada $x \in E$. Note que $T$ é linear. Fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (2.2), segue que $\|T_n(x) - T(x)\| \leqslant \epsilon\|x\|$, para todo $n \geqslant n_0$ e $x \in E$. Pelo Corolário 2.34, $T_n - T$ é contínua, para $n \geqslant n_0$. Daí, $T_n - T \in L(E; F)$, para todo $n \geqslant n_0$.

Por fim, $T = (T - T_n) + T_n \in L(E; F)$ e $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$. □

**Corolário 2.43.** *O dual de um espaço normado é sempre um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Por definição, o dual de um espaço normado é o espaço $L(E; \mathbb{K})$, em que $\mathbb{K}$ é um corpo completo ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Logo, $\mathbb{K}$ é um espaço de Banach e, pela Proposição 2.42, $L(E; \mathbb{K}) = E'$ é um espaço de Banach. □

**Proposição 2.44.** *Dado $T \in L(E;F)$. Vale que:*

$$\begin{aligned} \|T\| &\overset{(1)}{=} \sup\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| < 1\} \\ &\overset{(2)}{=} \sup\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| = 1\} \\ &\overset{(3)}{=} \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\right\} \\ &\overset{(4)}{=} \inf\{c > 0 : \|T(x)\| \leqslant c\|x\|, \forall x \in E\}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* *Provemos a igualdade (1).* Sejam $A = \{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leqslant 1\}$, $B = \{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| < 1\}$, $a = \sup A$ e $b = \sup B$. Note que $b \leqslant a$. Suponha que $b < a$. Então, existe $x \in B_E[0;1]$, com $b < \|T(x)\| \leqslant a$. Claro que, pela definição de $b$, $\|x\| < 1$ não pode ocorrer. Só nos resta $\|x\| = 1$. Como $\|x\| = 1$, podemos construir $(x_n)$ tal que $x_n \longrightarrow x$ e $\|x_n\| < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tome, por exemplo, $x_n = x - \dfrac{x}{n} = \dfrac{nx - x}{n} = \dfrac{(n-1)}{n}x$. Segue que $\|x_n\| = \dfrac{(n-1)}{n}\|x\| < \|x\| = 1$ e $x_n \longrightarrow x$. Como $T$ é contínua, $T(x_n) \longrightarrow T(x)$. Daí, $\|T(x_n)\| \longrightarrow \|T(x)\|$. Sendo assim, para algum $n \in \mathbb{N}$, ocorre $b < \|T(x_n)\|$. Um absurdo, já que $b = \sup B$. Logo, $b = a$ e provamos a primeira igualdade.

*Provemos a igualdade (2).* Sejam $C = \{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$, $c = \sup C$ e $a$ como antes. De $C \subset A$, segue que $c \leqslant a$. Se $x \in B_E - \{0\}$, então

$$\|T(x)\| = \left\|\|x\|\frac{T(x)}{\|x\|}\right\| = \|x\| \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant c.$$

Além disso, se $x = 0$, então $\|T(x)\| = 0 \leqslant 0$.

Pela definição de supremo, como acabamos de obter que $c$ é cota superior de $A$, então $a \leqslant c$. Portanto, $a = c$. De $a = b$, o resultado segue.

*Provemos a igualdade (3).* Seja $D = \left\{\dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\right\}$. O objetivo, agora, é mostrar que $C = D$, com $C$ como acima. Se $r \in C$, então $r = \|T(x)\|$, com $x \in E$ e $\|x\| = 1$. Isso equivale a escrever $r = \dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|}$, pois $\|x\| = 1$. Ou seja, $r \in D$. Logo, $C \subset D$. Se $s \in D$, então $s = \dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|}, x \neq 0, x \in E$. Disso, $s = \left\|T\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\|$ e $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\| = 1$. Segue que $s \in C$. Isto é, $C = D$ e $c = \sup C = \sup D$. Assim, vale (3).

*Provemos a igualdade (4).* Notemos que:

$$\begin{aligned} \inf\{c > 0 : \|T(x)\| \leqslant c\|x\|, \forall x \in E\} &= \inf\left\{c > 0 : \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leqslant c, x \in E, x \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\right\}. \end{aligned}$$

De fato, o supremo de um conjunto é o ínfimo das cotas superiores. Portanto, vale a última igualdade.

$\square$

# Capítulo 3

# O Teorema de Hahn-Banach

## 3.1 O Lema de Zorn

A seguir, veremos alguns conceitos essenciais para a compreensão do Lema de Zorn.

**Definição 3.1.** Uma *ordem parcial* no conjunto $P$ é uma relação $\leqslant$ em $P$ que satisfaz as propriedades abaixo.

(a) Para todo $x \in P$, $x \leqslant x$ (reflexiva).

(b) Se $x, y \in P$, $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$, então $x = y$ (antissimétrica).

(c) Se $x, y, z \in P$, $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$, então $x \leqslant z$ (transitiva).

Nesse caso, $(P, \leqslant)$ é dito um *conjunto parcialmente ordenado.*

No que segue, $(P, \leqslant)$ é um conjunto parcialmente ordenado e $Q \subset P$.

**Definição 3.2.** Uma *cota superior* de $Q$, se existir, é um elemento $p \in P$ tal que $q \leqslant p$, para todo $q \in Q$.

**Exemplo 3.3.** Seja $(Q, \leqslant)$, em que $Q = \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < x < 1\}$ e " $\leqslant$ " é a relação de ordem usual da reta. Então, 1 é uma cota superior de $Q$.

**Definição 3.4.** Um elemento $q \in Q$ é dito um *elemento maximal* de $Q$ na ordenação $\leqslant$, se não existe $x \in Q$ tal que $q \leqslant x$ e $x \neq q$. Se o conjunto for totalmente ordenado, então $q$ passa a ser um *máximo* de $Q$.

**Exemplo 3.5.** Seja o conjunto $Q = \{1, 3, 5, 7\}$ e a relação $x \leqslant y$ se $x$ divide $y$. Temos que 7 é elemento maximal de $Q$, pois não existe $x \in Q$ tal que $7 \leqslant x$ com $x \neq 7$.

**Definição 3.6.** $Q$ é uma *cadeia* em $P$ se quaisquer dois elementos de $Q$ são comparáveis. Isto é, dados $q_1, q_2 \in Q$, vale que $q_1 \leqslant q_2$ ou $q_2 \leqslant q_1$.

**Exemplo 3.7.** Considere o conjunto $P = \{2, 4, 8, 16, \dots\}$ e a relação $\leqslant$ de tal forma que, para $x, y \in P$, $x \leqslant y$ se $x$ é múltiplo de $y$. Então, $P$ é uma cadeia em $P$.

**Lema 3.8.** ***(Lema de Zorn)*** *Se toda cadeia em um conjunto não-vazio e parcialmente ordenado tem uma cota superior, então o conjunto parcialmente ordenado tem um elemento maximal.*

**Exemplo 3.9.** Uma aplicação esclarecedora, simples e bastante conhecida do Lema de Zorn garante que todo espaço vetorial possui uma base (veja, por exemplo, [[6], Teorema 2.8.1]).

## 3.2 O Teorema de Hahn-Banach e sua demonstração

Neste capítulo, apresentaremos o Teorema de Hahn-Banach e sua demonstração, tanto para espaços normados reais, quanto para espaços normados complexos. A seguir, provaremos dois resultados que viabilizam ambas as provas desse importante teorema.

**Lema 3.10.** *Sejam $E$ um espaço normado real e $M \subset E$ um subespaço próprio de $E$. Dado $y_0 \in E \setminus M$, considere $N = M \oplus [y_0]$. Então, para cada $\Phi \in M'$, existe $\psi \in N'$ tal que:*

*(a)* $\psi(x) = \Phi(x)$, *para todo* $x \in M$;

*(b)* $\|\psi\| = \|\Phi\|$.

*Demonstração.* Pela continuidade de $\Phi$, vale que

$$|\Phi(x)| \leqslant \|\Phi\|\|x\|, \text{ para todo } x \in M.$$

Ou seja,

$$-\|\Phi\|\|x\| \leqslant \Phi(x) \leqslant \|\Phi\|\|x\|, \text{ para todo } x \in M. \tag{3.1}$$

Como $y_0 \notin M$, cada $z \in N$ pode ser escrito de maneira única na forma $z = x + \lambda y_0$, com $x \in M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos definir $\psi \colon N \to \mathbb{R}$ por $\psi(z) = \Phi(x) + \lambda\eta_0$, onde $\eta_0$ é um número real independente de $z$, o qual escolheremos depois.

Note que $\psi$ é linear. De fato, dados $z_1 = x_1 + \lambda_1 y_0, z_2 = x_2 + \lambda_2 y_0 \in N$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\psi(z_1 + \alpha z_2) &= \psi(x_1 + \lambda_1 y_0 + \alpha(x_2 + \lambda_2 y_0)) \\
&= \psi(x_1 + \alpha x_2 + (\lambda_1 + \alpha\lambda_2) y_0) \\
&= \Phi(x_1 + \alpha x_2) + (\lambda_1 + \alpha\lambda_2)\eta_0 \\
&= \Phi(x_1) + \alpha\Phi(x_2) + \lambda_1\eta_0 + \alpha\lambda_2\eta_0 \\
&= \Phi(x_1) + \lambda_1\eta_0 + \alpha(\Phi(x_2) + \lambda_2\eta_0) \\
&= \psi(z_1) + \alpha\psi(z_2).
\end{aligned}$$

Além disso, $\psi(x) = \psi(x + 0y_0) = \Phi(x) + 0\eta_0 = \Phi(x)$, para todo $x \in M$, o que verifica (a).

Agora, queremos mostrar (b). Vamos mostrar, primeiramente, que $\|\psi\| \leqslant \|\Phi\|$ e, para isso, basta provar que vale $|\psi(z)| \leqslant \|\Phi\|\|z\|$, para todo $z \in N$. Ou seja,

$$-\|\Phi\|\|x + \lambda y_0\| \leqslant \Phi(x) + \lambda\eta_0 \leqslant \|\Phi\|\|x + \lambda y_0\|, \text{ para todo } x \in M, \lambda \in \mathbb{R},$$

ou ainda,

$$-\Phi(x) - \|\Phi\|\|x + \lambda y_0\| \leqslant \lambda\eta_0 \leqslant -\Phi(x) + \|\Phi\|\|x + \lambda y_0\|, \text{ para todo } x \in M, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Tome $\lambda = 1$ em (3.2). Segue que

$$-\Phi(x) - \|\Phi\|\|x + y_0\| \leqslant \eta_0 \leqslant -\Phi(x) + \|\Phi\|\|x + y_0\|, \text{ para todo } x \in M \quad (3.3)$$

e, portanto, (3.2) implica (3.3). Vamos mostrar que (3.3) implica (3.2). De fato, se $\lambda = 0$, então (3.2) segue de (3.1). Se $\lambda > 0$, em (3.3), ao aplicar $\frac{x}{\lambda}$ no lugar de $x$ e multiplicar por $\lambda$, obtemos (3.2). Da mesma maneira, se $\lambda < 0$, em (3.3), ao aplicar $\frac{x}{\lambda}$ no lugar de $x$ e multiplicar por $\lambda$, obtemos (3.2).

Considere a afirmação:

$$\sup_{x\in M}(-\Phi(x) - \|\Phi\|\|x + y_0\|) \leqslant \inf_{x\in M}(-\Phi(x) + \|\Phi\|\|x + y_0\|). \quad (3.4)$$

Para mostrar (3.4), basta mostrar que vale

$$-\Phi(x_1) - \|\Phi\|\|x_1 + y_0\| \leqslant -\Phi(x_2) + \|\Phi\|\|x_2 + y_0\|, \text{ para todos } x_1, x_2 \in M. \quad (3.5)$$

Observe que, para todos $x_1, x_2 \in M$,

$$\begin{aligned}\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(x_1 - x_2) &\leqslant \|\Phi\|\|x_1 - x_2\| \\ &\leqslant \|\Phi\|\|(x_2 + y_0) - (x_1 + y_0)\| \\ &\leqslant \|\Phi\|\|x_2 + y_0\| + \|\Phi\|\|x_1 + y_0\|\end{aligned}$$

e, daí, segue (3.5).

Seja $\eta_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{x\in M}(-\Phi(x) - \|\Phi\|\|x + y_0\|) \leqslant \eta_0 \leqslant \inf_{x\in M}(-\Phi(x) + \|\Phi\|\|x + y_0\|).$$

Assim, (3.3) é verificada e, consequentemente, (3.2) também. Agora, como $M \subset N$, pela definição de supremo, segue que $\|\psi\| \geqslant \|\Phi\|$. Portanto, está demonstrado que $\psi$ verifica (b).

□

**Lema 3.11.** *Seja $E$ um espaço vetorial complexo e seja $E_{\mathbb{R}}$ o espaço vetorial real associado.*

*(a) Cada $\Phi \in E^*$ admite uma única representação da forma*

$$\Phi(x) = u(x) - iu(ix), \text{ para todo } x \in E, \tag{3.6}$$

*com $u \in E^*_{\mathbb{R}}$.*

*(b) Dado $u \in E^*_{\mathbb{R}}$, a equação (3.6) define um $\Phi \in E^*$.*

*Demonstração. (a)* Seja $\Phi \in E^*$. Para cada $x \in E$, é possível escrever de maneira única

$$\Phi(x) = u(x) + iv(x),$$

com $u(x)$, $v(x) \in \mathbb{R}$. Como $\Phi \in E^*$, então $\Phi \in E^*_{\mathbb{R}}$. Daí, segue que $u, v \in E^*_{\mathbb{R}}$. Note que

$$i\Phi(x) = \Phi(ix) = u(ix) + iv(ix) \Rightarrow \Phi(x) = -iu(ix) + v(ix)$$

e, daí, $u(x) = v(ix)$ e $v(x) = -u(ix)$. Portanto,

$$\Phi(x) = u(x) - iu(ix).$$

*(b)* Seja $u \in E^*_{\mathbb{R}}$ e seja $\Phi\colon E \to \mathbb{C}$ definida por (3.6). De $u \in E^*_{\mathbb{R}}$, segue que $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ e $\Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x)$, para todos $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\begin{aligned}\Phi(x+y) &= u(x+y) - iu(i(x+y)) \\ &= u(x) + u(y) - iu(ix) - iu(iy) \\ &= u(x) - iu(ix) + u(y) - iu(iy) \\ &= \Phi(x) + \Phi(y)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda x) &= u(\lambda x) - iu(i\lambda x) \\ &= \lambda u(x) - \lambda iu(ix) \\ &= \lambda(u(x) - iu(ix)) \\ &= \lambda\Phi(x),\end{aligned}$$

para todo $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$. Por outro lado,

$$\Phi(ix) = u(ix) + iu(x) = i\Phi(x),$$

para todos $x \in E$. Portanto, $\Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x)$, para todo $x \in E, \lambda \in \mathbb{C}$. Logo, $\Phi \in E^*$.

□

Agora que já temos as ferramentas necessárias, prosseguiremos com as demonstrações do Teorema de Hahn-Banach para espaços normados reais e espaços normados complexos.

**Teorema 3.12.** *(Teorema de Hahn-Banach) Sejam $E$ um espaço normado e $M_0$ um subespaço de $E$. Então, para cada $\Phi_0 \in M_0'$, existe $\Phi \in E$ tal que:*

*(a)* $\Phi(x) = \Phi_0(x)$, *para todo* $x \in M_0$;

*(b)* $\|\Phi\| = \|\Phi_0\|$.

*Demonstração.* (Demonstração do Teorema de Hahn-Banach para espaços normados reais) Seja $\mathcal{P}$ a família de todos os pares $(M, \Phi)$ tais que:

(i) $M$ é um subespaço de $E$ contendo $M_0$;

(ii) $\Phi \in M', \Phi|_{M_0} = \Phi_0$ e $\|\Phi\| = \|\Phi_0\|$.

Dados $(M_1, \Phi_1), (M_2, \Phi_2) \in \mathcal{P}$, definimos

$$(M_1, \Phi_1) \leqslant (M_2, \Phi_2) \text{ se } M_1 \subset M_2 \text{ e } \Phi_1 = \Phi_2|_{M_1}.$$

Note que esta é uma relação de ordem parcial em $\mathcal{P}$. Sejam $\{(M_i, \Phi_i) : i \in I\}$ uma cadeia em $\mathcal{P}$ e $M = \cup_{i \in I} M_i$. Considere o funcional $\Phi \colon M \to \mathbb{R}$, definido por $\Phi(x) = \Phi_i(x)$, se $x \in M_i$. Observe que $\Phi$ está bem definido e que $(M, \Phi) \in \mathcal{P}$. De fato, é claro que $M_0 \subset M$. Dados $a, b \in M$, então $a \in M_i$ e $b \in M_j$, para algum $i$ e para algum $j$. Como $\{(M_i, \Phi_i) : i \in I\}$ é uma cadeia, sem perda de generalidade, suponhamos $M_i \subset M_j$. Assim, $a, b \in M_j$ e $a + b \in M_j \subset M$. Ainda, se $a \in M$, então $a \in M_j$, para algum $j \in I$, e $\lambda a \in M_j \subset M$. Além disso, é fácil ver que $\Phi$ é linear, já que os $\Phi_i$'s são lineares e $\Phi|_{M_0} = \Phi_0$, já que $\Phi_i|_{M_0} = \Phi_0$, para todo $i \in I$. Também, sabemos que $\|\Phi(x)\| = \|\Phi_i(x)\|$, pois $x \in M_i$, para algum $i \in I$. Daí,

$$\|\Phi(x)\| = \|\Phi_i(x)\| \leqslant \|\Phi_i\|\|x\| = \|\Phi_0\|\|x\|.$$

Ou seja, $\Phi \in M'$ e $\|\Phi\| \leqslant \|\Phi_0\|$. Como $\|Phi_0\| = \|\Phi_i\| \leqslant \|\Phi\|$, podemos concluir que $\|\Phi\| = \|\Phi_0\|$.

Note, também, que $(M, \Phi)$ é uma cota superior da cadeia $\{(M_i, \Phi_i) : i \in I\}$. De fato, para todo $i \in I$, vale que $(M_i, \Phi_i) \leqslant (M, \Phi)$, pois $M_i \subset M$ e $\Phi = \Phi_i|_{M_i}$. Então, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{P}$ possui um elemento maximal $(M, \Phi)$.

Agora, basta mostrarmos que $M = E$. Suponhamos, então, $M \neq E$. Sejam $y_0 \in E \setminus M$ e $N = M \oplus [y_0]$. Pelo Lema 3.10, existe $\psi \in N'$ tal que $\psi|_M = \Phi$ e $\|\psi\| = \|\Phi\|$. Então, $(N, \psi) \in \mathcal{P}$ e $(M, \Phi)$ não seria maximal, o que é uma contradição. Portanto, $M = E$, como queríamos.

□

*Demonstração.* (Demonstração do Teorema de Hahn-Banach para espaços normados complexos) Seja $\Phi_0 \in M_0'$. Pelo Lema 3.11, podemos escrever $\Phi_0(x) = u_0(x) - iu_0(ix)$, para todo $x \in M_0$, com $u_0 \in ((M_0)_{\mathbb{R}})^*$. Como $|\Phi_0(x)| = \sqrt{u_0^2(x) + u_0^2(ix)}$, segue que

$$|u_0(x)| \leqslant |\Phi_0(x)| \leqslant \|\Phi_0\| \|x\|,$$

para todo $x \in M_0$. Daí, $\|u_0\| \leqslant \|\Phi_0\|$. Pelo Teorema de Hahn-Banach para espaços normados reais, existe $u \in (E_{\mathbb{R}})'$ tal que

(i) $u(x) = u_0(x)$, para todo $x \in M_0$;

(ii) $\|u\| = \|u_0\|$. Seja $\Phi \colon E \to \mathbb{C}$ o funcional definido por $\Phi(x) = u(x) - iu(ix)$, para todo $x \in E$. Pelo Lema 3.11, $\Phi \in E^*$. De (i), segue que

(iii) $\Phi(x) = \Phi_0(x)$, para todo $x \in M_0$. Para mostrar que $\|\Phi\| = \|\Phi_0\|$, fixemos $x \in E$ e escrevamos $\Phi(x) = re^{i\theta}$, com $r \geqslant 0$. Então,

$$\Phi(e^{-i\theta}x) = e^{-i\theta}\Phi(x) = r \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, $\Phi(e^{-i\theta}x) = u(e^{-i\theta}x) - iu(ie^{-i\theta}x)$. Ou seja, $\Phi(e^{-i\theta}x) = u(e^{-i\theta}x)$. Logo,

$$|\Phi(e^{-i\theta}x)| \leqslant \|u\| \|e^{-i\theta}x\|.$$

Daí,

$$|\Phi(x)| \leqslant \|u\| \|x\| = \|u_0\| \|x\| \leqslant \|\Phi_0\| \|x\|$$

e, portanto, $\|\Phi\| \leqslant \|\Phi_0\|$. De (iii), segue que $\|\Phi_0\| \leqslant \|\Phi\|$ e acabamos. □

## 3.3 Algumas consequências do Teorema de Hahn-Banach

Nesta seção, abordaremos algumas fortes consequências do Teorema de Hahn-Banach, as quais se configuram em grandes ferramentas no estudo da Análise Funcional.

**Proposição 3.13.** *(Teorema de Phillips) Sejam $E$ um espaço normado, $M_0$ um subespaço de $E$ e $T_0 \in \mathcal{L}(M_0, \ell_\infty)$. Então, existe $T \in L(E, \ell_\infty)$ tal que:*

*(i)* $T(x) = T_0(x)$, *para todo* $x \in M_0$;

*(ii)* $\|T\| = \|T_0\|$.

*Demonstração.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o funcional linear contínuo, de norma 1, dado por

$$\Phi_n \colon \ell_\infty \to \mathbb{K}, \Phi_n((a_j)_{j=1}^\infty) = a_n.$$

Então, $\Phi_n \circ T_0 \in M_0'$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $T_0(x) = ((\Phi_n \circ T_0)(x))_{n=1}^\infty)$, para todo $x \in M_0$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\psi_n$ extensão de $\Phi_n \circ T_0$ a $E$, com $\|\Phi_n \circ T_0\| = \|\psi_n\|$.

Observe que o operador $T\colon E \to \ell_\infty$, $T(x) = (\psi_n(x))_{n=1}^{\infty}$, é linear, contínuo e estende $T_0$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|T(x)\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\psi_n(x)| \\
&\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\psi_n\|\|x\| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\Phi_n \circ T_0\|\|x\| \\
&\leqslant \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\Phi_n\|}_{=1} \|T_0\|\|x\| \\
&= \|T_0\|\|x\|
\end{aligned}$$

e podemos concluir que $\|T\| \leqslant \|T_0\|$. Por fim, note que $\|T_0\| \leqslant \|T\|$, já que $M_0 \subset E$ e $\|T_0\|$ e $\|T\|$ são dadas, respectivamente, por:

$$\|T_0\| = \sup\{\|T_0(x)\|\colon \|x\| \leqslant 1, x \in M_0\}$$

e

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|\colon \|x\| \leqslant 1, x \in E\}.$$

Ou seja, $\|T\| = \|T_0\|$ e acabamos. □

**Proposição 3.14.** *Seja $E$ um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\Phi \in E'$ tal que $\|\Phi\| = 1$ e $\Phi(x_0) = \|x_0\|$.*

*Demonstração.* Sejam $M_0 = [x_0]$ o subespaço vetorial de $E$ gerado por $x_0$ e $\Phi_0 \in M_0'$, definido por $\Phi_0(ax_0) = a\|x_0\|$, para $a \in \mathbb{K}$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\Phi \in E'$, tal que $\|\Phi\| = \|\Phi_0\|$ e $\Phi(x) = \Phi_0(x)$, para todo $x \in M_0$. Daí, vale que

$$\begin{aligned}
\|\Phi\| = \|\Phi_0\| &= \sup\{|\Phi_0(ax_0)|\colon ax_0 \in M_0 \text{ e } \|ax_0\| \leqslant 1\} \\
&= \sup\{|a|\|x_0\|\colon ax_0 \in M_0 \text{ e } \|ax_0\| \leqslant 1\} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Note, também, que vale $\Phi(x_0) = \|x_0\|$, uma vez que $\Phi(x_0) = \Phi_0(x_0) = \|x_0\|$. □

**Proposição 3.15.** *Sejam $E$ um espaço normado, $E \neq \{0\}$, e $x \in E$. Então,*

$$\|x\| = \sup\{|\Phi(x)|\colon \Phi \in E' \text{ e } \|\Phi\| \leqslant 1\}$$

*e o supremo é atingido.*

*Demonstração.* Para cara $\Phi \in E'$, com $\|\Phi\| \leqslant 1$, vale que

$$|\Phi(x)| \leqslant \|\Phi\|\|x\| \leqslant \|x\|.$$

Então,

$$\sup\{|\Phi(x)|\colon \Phi \in E' \text{ e } \|\Phi\| \leqslant 1\} \leqslant \|x\|.$$

Pela Proposição 3.14, é possível garantir que o supremo é atingido em um funcional de norma igual a 1. $\square$

# Capítulo 4

# O Teorema de Banach-Steinhaus

## 4.1 Conceitos Introdutórios ao Teorema

Para a compreensão do Teorema de Banach-Steinhaus e de sua demonstração, apresentaremos, primeiramente, algumas definições e resultados fundamentais.

**Definição 4.1.** Sejam $X$ um espaço métrico e $A \subset X$.

(a) $X$ é chamado de *espaço de Baire* se a interseção de cada sequência de subconjuntos abertos e densos de $X$ é um subconjunto denso de $X$.

(b) $A$ é dito de *primeira categoria* em $X$ se é possível escrever

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

com $int(\overline{A_n}) = \emptyset$, para cada $n$, ou seja, como podemos encontrar em textos de língua inglesa, cada $A_n$ é *nowhere dense*. Caso contrário, $A$ é dito de *segunda categoria* em $X$.

**Proposição 4.2.** *Todo espaço de Baire não vazio é de segunda categoria em si mesmo.*

*Demonstração.* Seja $X$ um espaço de Baire, $X \neq \emptyset$. Suponha $X$ de primeira categoria em si mesmo. Então, podemos escrever

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

onde $A_n$ é fechado em $X$ e $int(A_n) = \emptyset$ para cada $n$. Segue que

$$\emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n),$$

em que $X \setminus A_n$ é aberto e $\overline{X \setminus A_n} = X \setminus int(A_n) = X$, para cada $n$. Logo, $X$ não seria espaço de Baire. Assim, concluímos a demonstração. $\square$

**Teorema 4.3.** *(Teorema de Baire) Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.*

*Demonstração.* Seja $X$ um espaço métrico completo, $X \neq \emptyset$. Seja $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de subconjuntos abertos e densos em $X$. Queremos mostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ é denso em $X$. Para isso, basta mostrarmos que, para cada bola $B(a;r)$ em $X$, ou seja, $r > 0$ e $a \in X$ são quaisquer, vale que $(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \cap B(a;r) \neq \emptyset$, ou seja, $\overline{(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n)} = X$.

Fixemos uma bola $B(a;r)$ em $X$. Como $U_1$ é denso em $X$, existe $x_1 \in (U_1 \cap B(a;r))$. Seja $0 < \epsilon_1 < 1$, tal que

$$B[x_1; \epsilon_1] \subset (U_1 \cap B(a;r)).$$

Como $U_2$ é denso em $X$, existe $x_2 \in (U_2 \cap B(x_1;\epsilon_1))$. Seja $0 < \epsilon_2 < \dfrac{1}{2}$, tal que

$$B[x_2; \epsilon_2] \subset (U_2 \cap B(x_1;\epsilon_1)).$$

Procedendo, por indução, é possível encontrar sequências $(x_n)$ em $X$ e $(\epsilon_n)$ em $\mathbb{R}$, tais que $0 < \epsilon_n < \dfrac{1}{n}$ e

$$B[x_n; \epsilon_n] \subset (U_n \cap B(x_{n-1};\epsilon_{n-1})),$$

para cada $n \geqslant 2$. Segue que $(x_n)$ *é uma sequência de Cauchy em* $X$ e, portanto, converge para um ponto $x \in X$. Note que,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B[x_n;\epsilon_n] \subset \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \cap B(a;r).$$

Logo, $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ é denso em $X$ e acabamos. □

**Definição 4.4.** Sejam $E$ um espaço vetorial e $A \subset E$.

(a) Se $-x \in A$ sempre que $x \in A$, então $A$ é dito *simétrico*.

(b) Se $(1-\lambda)x + \lambda y \in A$ sempre que $x, y \in A$ e $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, então $A$ é dito *convexo*.

(c) O menor subconjunto convexo de $E$ que contém $A$ é chamado de *envoltória convexa* e é denotado por $co(A)$. Podemos dizer que $co(A)$ é a interseção de todos os convexos que contém $A$ ou, ainda, que qualquer convexo $C$ que contenha $A$ é tal que $co(A) \subset C$.

**Lema 4.5.** *Seja $E$ um espaço normado. Consideremos $B(a;r) \subset E$, com $a \in E$ e $r > 0$ quaisquer. O conjunto simétrico de $B(a;r)$ é $B(-a;r)$, ou seja, $-B(a;r) = B(-a;r)$.*

*Demonstração.* Seja $y \in -B(a;r)$. Então, $y = -x$, com $x \in B(a;r)$. Assim, $x = a + rt$, com $\|t\| < 1$. Disso, vale que $-x = -a - rt$ e $-x - (-a) = -rt$. Logo, $\|-x-(-a)\| = \|-rt\| < r$. Ou seja, $y = -x \in B(-a;r)$.

Agora, se $z \in B(-a;r)$, então $z = -a + rt$, com $\|t\| < 1$. Daí, $-z = a - rt \in B(a;r)$. Por fim, $z \in -B(a;r)$. □

## 4.2 O Teorema de Banach-Steinhaus e sua Demonstração

**Teorema 4.6.** ***(Teorema de Banach-Steinhaus)*** *Sejam $E$ e $F$ espaços normados, com $E$ completo, e um conjunto $\{T_i : i \in I\} \subset L(E;F)$. Consideremos as seguintes afirmações:*

1. $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty,$ *para cada $x \in E$.*

2. $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$

*As afirmações (1) e (2) são equivalentes. A primeira afirmação em palavras, seria dizer que o conjunto $\{T_i : i \in I\}$ é pontualmente limitado.*

*Demonstração.* A parte (2) $\Longrightarrow$ (1) é imediata. Vejamos (1) $\Longrightarrow$ (2).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$A_n = \{x \in E : \|T_i(x)\| \leqslant n, \forall i \in I\}.$$

Como $A_n = \bigcap_{i \in I}\{x \in E : \|T_i(x)\| \leqslant n\}$, vale que cada $A_n$ é fechado. De fato, perceba que podemos escrever

$$\{x \in E : \|T_i(x)\| \leqslant n\} = \|T_i(x)\|^{-1}([0,n]),$$

com cada aplicação $\|T_i\| \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Além disso, $[0,n]$ é fechado e, por isso, $\|T_i(x)\|^{-1}([0,n])$ também é fechado. Como a interseção de fechados é fechado, concluímos que $A_n$ é fechado.

Note que, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. De fato, considere $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Logo, $x \in A_n$, para algum $n$ e, por definição, $x \in E$. Por outro lado, considere $x \in E$. De (1), vale que $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < n$, para algum $n$. Daí, $x \in \bigcap_{i \in I}\{x \in E : \|T_i(x)\| \leqslant n\} = A_n$. Ademais, como $E$ é completo, pelo Teorema de Baire, $E$ é um espaço de Baire e, consequentemente, de segunda categoria em si mesmo. Isto é, algum $A_n$ possui interior não vazio. Digamos, então, que $A_n$ contém uma bola $B(a;r)$.

Note que o conjunto $A_n$ é simétrico. De fato, dado $x \in A_n$, considere $-x \in E$. Então,

$$\|T_i(-x)\| = \|(-1)T_i(x)\| = |-1|\|T_i(x)\| = \|T_i(x)\| \leqslant n, \text{ para cada } i \in I,$$

o que mostra que $A_n$ é simétrico e, pelo Lema 4.5, $B(-a;r) \subset A_n$.

Observe, agora, que $A_n$ é um conjunto convexo. Dados $x, y \in A_n$, por definição $\|T_i(x)\| \leqslant n$ e $\|T_i(y)\| \leqslant n$, para todo $i \in I$. Seja $0 < \lambda \leqslant 1$. Então:

$$\begin{aligned}\|T_i((1-\lambda)x + \lambda y)\| &= \|T_i((1-\lambda)x) + T_i(\lambda y)\| \\ &\leqslant |1-\lambda|\|T_i(x)\| + |\lambda|\|T_i(y)\| \\ &\leqslant (1-\lambda)n + \lambda n \\ &= n - \lambda n + \lambda n \\ &= n\end{aligned}$$

e mostramos a convexidade de $A_n$.

Disso, segue que

$$A_n \supset co(B(a;r) \cup B(-a;r)) \supset B(0;r).$$

De fato, pela definição de envoltória convexa, $A_n \supset co(B(a;r) \cup B(-a;r))$. Vamos mostrar, então, que $B(0;r) \subset co(B(a;r) \cup B(-a;r))$. Note que $co(B(a;r) \cup B(-a;r))$ é um convexo que contém $B(a;r)$ e $B(-a;r)$. No caso, para $y \in B(0;1)$,

$$(a+ry)\frac{1}{2} + (-a+ry)\frac{1}{2} \in co(B(a;r) \cup B(-a;r)),$$

por definição. Isto é, $ry \in co(B(a;r) \cup B(-a;r))$ e $co(B(a;r) \cup B(-a;r)) \supset B(0;r)$.

Daí,

$$\|T_i(x)\| \leqslant n, \text{ para todos } i \in I, x \in B(0;r).$$

Logo,

$$\|T_i(z)\| \leqslant \frac{n}{r}, \text{ para todos } i \in I, z \in B(0;1)$$

e, portanto,

$$\|T_i\| \leqslant \frac{n}{r}, \text{ para todo } i \in I.$$

Isto é,

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

□

A seguir, apresentaremos uma importante consequência do Teorema de Hahn-Banach, o qual estudaremos com mais detalhes mais adiante.

**Corolário 4.7.** *Sejam $E$ um espaço normado e $A \subset E$, tal que $\Phi(A)$ é limitado em $\mathbb{K}$ para cada $\Phi \in E'$. Então, $A$ é limitado em $E$.*

*Demonstração.* Seja $J\colon E \longrightarrow E''$ o mergulho canônico de $E$ em $E''$, isto é, o operador definido por $J(x)(\Phi) = \Phi(x)$, para todo $x \in E$ e $\Phi \in E'$. Por hipótese, $\Phi(A)$ é limitado, ou seja, $J(A)(\Phi) = \Phi(A)$ é limitado. Assim,

$$\sup_{x \in A} \|J(x)(\Phi)\| < \infty, \text{ para cada } \Phi \in E',$$

o que significa que $J(A)$ é um conjunto pontualmente limitado de $E''$. Pelo Teorema Banach-Steinhaus,

$$\sup_{x\in A} \|J(x)\| < \infty,$$

ou seja, $J(A)$ é limitado. Pela Proposição 3.14, vale que:

$$\|x\| = \sup\{|\Phi(x)| : \Phi \in E', \|\Phi\| = 1\} = \sup\{|J(x)(\Phi)| : \Phi \in E', \|\Phi\| = 1\} = \|J(x)\|.$$

Logo, $A$ é limitado. □

**Corolário 4.8.** *Sejam $E$ e $F$ espaços normados, com $E$ completo. Seja $(T_n)$ uma sequência em $L(E;F)$, tal que $(T_n(x))$ converge em $F$ para cada $x \in E$. Se definirmos $T(x) = \lim T_n(x)$, para cada $x \in E$, então $T \in L(E;F)$.*

*Demonstração.* Primeiramente, observe que $T$ é linear. De fato,

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) = \lim T_n(\alpha x + \beta y) &= \lim(\alpha T_n(x) + \beta T_n(y)) \\ &= \alpha \lim T_n(x) + \beta \lim T_n(y) \\ &= \alpha T(x) + \beta T(y). \end{aligned}$$

Para cada $x \in E$, $T_n(x)$ é uma sequência convergente em $F$ e, portanto, limitada. Ou seja,

$$\sup_n \|T_n(x)\| < \infty, \text{ para cada } x \in E.$$

Pelo Teorema 4.6, existe $k > 0$ tal que $\|T_n\| < k$, para todo $n$. Daí

$$\begin{aligned} \|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T(x)\| &= \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|\lim T_n(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1} \lim \|T_n(x)\| \\ &\leqslant \lim \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T_n(x)\| \\ &\leqslant \lim \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T_n\|\|x\| \\ &\leqslant k. \end{aligned}$$

Logo, $T$ é limitada e, portanto, contínua. □

**Proposição 4.9.** *Seja $(\eta_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathbb{K}$, tal que a série $\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j$ converge para cada $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$. Então,*

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & c_0 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j \end{array}$$

*é linear e contínua.*

*Demonstração.* É claro que $\varphi$ é linear. Para $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos $\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j$. Note que, $\varphi_n$ é linear e

$$|\varphi_n(x)| = \left|\sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\xi_j \eta_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|(\xi_j)\|_\infty |\eta_j| = \|(\xi_j)\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |\eta_j|$$
$$= \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |\eta_j|$$

Assim, $\|\varphi_n\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\eta_j|$ e cada $\varphi_n$ é contínua. Observe ainda que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j$$

existe para cada $x = (\xi_n) \in c_0$. Como $c_0$ é completo e $\varphi(x) = \lim \varphi_n(x) \in \mathbb{K}$, então $\varphi \in (c_0)'$, fato garantido pelo Corolário 4.8.

$\square$

**Proposição 4.10.** *Sejam $1 \leqslant p < \infty$ e $(\eta_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathbb{K}$, tal que a série $\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j$ converge para cada $(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Então,*

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \ell_p & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\xi_j) & \longmapsto & \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j \end{array}$$

*é linear e contínua.*

*Demonstração.* A demonstração desta proposição é análoga à demonstração da Proposição 4.9. $\square$

É válido pontuar que, a partir das Proposições 4.9 e 4.10 demonstradas acima, é possível mostrar que o dual de $c_0$ é isometricamente isomorfo ao espaço $\ell_1$ e que o dual de $\ell_p$ é isometricamente isomorfo ao espaço $\ell_q$, para $1 \leqslant p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

# Capítulo 5

# O Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado

## 5.1 O Teorema da Aplicação Aberta e uma Demonstração

Começamos esta seção com uma definição e uma proposição úteis para o lema que demonstraremos logo na sequência.

**Definição 5.1.** (a) Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ em um espaço normado $E$ é dita *convergente* se a sequência das somas parciais

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

é convergente em $E$.

(b) Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ em um espaço normado $E$ é dita *absolutamente convergente* ou *absolutamente somável* se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

**Proposição 5.2.** *Um espaço normado $E$ é completo se, e somente se, cada série absolutamente convergente em $E$ é convergente.*

*Demonstração.* Façamos a implicação direta inicialmente. Suponhamos $E$ completo e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Se $m < n$, então

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} x_j \right\| \leq \sum_{j=m+1}^{n} \|x_j\|.$$

Segue que $(s_n)$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, convergente.

Suponhamos agora que cada série absolutamente convergente em $E$ seja convergente em $E$. Consideremos uma sequência de Cauchy $(x_n)$ em $E$. Existe uma sequência estritamente crescente $(n_j)$ tal que

$$\|x_n - x_m\| \leq 2^{-j},$$

para todo $n, m \geq n_j$. Disso,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1,$$

ou seja, $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_{j+1}} - x_{n_j}$ é absolutamente convergente e, por hipótese,

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_{j+1}} - x_{n_j}$$

é convergente. Como para cada $k$ natural é fato que

$$x_{n_1} + \sum_{j=1}^{k} x_{n_{j+1}} - x_{n_j} = x_{n_{k+1}},$$

resulta que $(x_{n_k})$ é convergente em $E$. Por fim, obtemos que $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy que admite subsequência convergente. Segue que $(x_n)$ é convergente e, portanto, que $E$ é completo. $\square$

Para a compreensão do Teorema da Aplicação Aberta e de sua demonstração, apresentaremos, a priori, o seguinte resultado.

**Lema 5.3.** *Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e seja $T \in L(E; F)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(a) $T$ é sobrejetora.*

*(b) $\overline{T(B_E(0;1))} \supset B_F(0;\delta)$, para algum $\delta > 0$.*

*(c) $T(B_E(0;1)) \supset B_F(0;\delta)$, para algum $\delta > 0$.*

*Demonstração.* Devemos mostrar a equivalência das afirmações acima.

Suponha $T$ sobrejetora. De $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_E(0;n)$, vale que:

$$F = T(E) = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_E(0;n)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_E(0;n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_E(0;n))}.$$

Pelo Teorema de Baire (Teorema 4.3), $F$ é de segunda categoria em si mesmo, isto é, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que o conjunto $\overline{T(B_E(0;n))}$ tem interior não vazio. Então, existem

$b \in F$ e $r > 0$, tais que $B_F(b;r) \subset \overline{T(B_E(0;n))}$. Pela simetria de $\overline{T(B_E(0;n))}$, seque que $B_F(-b;r) \subset \overline{T(B_E(0;n))}$. Pela convexidade de $\overline{T(B_E(0;n))}$, vale que

$$\overline{T(B_E(0;n))} \supset co(B_F(b;r) \cup B_F(-b;r)) \supset B_F(0;r),$$

como visto na demonstração do Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 4.6). Logo, $\overline{T(B_E(0;1))} \supset B_F(0;\frac{r}{n})$. De fato, seja $y \in B_F(0;\frac{r}{n})$. Então, $ny \in B_F(0;r) \subset \overline{T(B_E(0;n))}$. Logo, $ny = \lim y_j$, $y_j \in T(B_E(0;n))$, isto é, $ny = \lim T(x_j), x_j \in B_E(0;n)$. Daí,

$$y = \lim T\left(\frac{x_j}{n}\right), x_j \in B(0;n).$$

Como $\dfrac{x_j}{n} \in B_E(0,1)$, então $y \in \overline{T(B_E(0;1))}$, o que prova **(b)**.

Suponha, agora, que $\overline{T(B_E(0;1))} \supset B_F(0;\delta)$, para algum $\delta > 0$. Então, podemos afirmar que

$$\overline{T\left(B_E\left(0;\frac{1}{2^n}\right)\right)} \supset B_F\left(0;\frac{\delta}{2^n}\right), \text{ para cada } n.$$

A partir disso, provaremos que

$$T(B_E(0;1)) \supset B_F\left(0;\frac{\delta}{2}\right).$$

Seja $y \in B_F(0;\frac{\delta}{2}) \subset \overline{T(B_E(0;\frac{1}{2}))}$. Logo, existe $x_1 \in B_E(0;\frac{1}{2})$ tal que

$$y - T(x_1) \in B_F\left(0;\frac{\delta}{2^2}\right) \subset \overline{T\left(B_E\left(0;\frac{1}{2^2}\right)\right)}.$$

Logo, existe $x_2 \in B_E(0;\frac{1}{2^2})$ tal que

$$y - T(x_1) - T(x_2) \in B_F\left(0;\frac{\delta}{2^3}\right) \subset \overline{T\left(B_E\left(0;\frac{1}{2^3}\right)\right)}.$$

Logo, existe $x_3 \in B_E(0;\frac{1}{2^3})$ tal que

$$y - T(x_1) - T(x_2) - T(x_3) \in B_F\left(0;\frac{\delta}{2^4}\right) \subset \overline{T\left(B_E\left(0;\frac{1}{2^4}\right)\right)}.$$

Procedendo indutivamente, podemos construir uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $E$ tal que

$$x_n \in B_E\left(0;\frac{1}{2^n}\right) \text{ e } y - \sum_{j=1}^{n} T(x_j) \in B_F\left(0;\frac{\delta}{2^{n+1}}\right), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ e $E$ é de Banach, segue, da Proposição 5.2, que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge. Além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in B_E(0;1) \text{ e } T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = y,$$

o que prova **(c)**.

Suponha, finalmente, que $T(B_E(0;1)) \supset B_F(0;\delta)$, para algum $\delta > 0$. Observe que $nT(B_E(0;1)) \supset B_F(0;n\delta)$ e

$$\begin{aligned} nT(B_E(0;1)) &= \{nT(x); x \in B(0;1)\} \\ &= \{T(nx); x \in B(0;1)\} \\ &= \{T(z); z \in B(0;n)\} \subset T(E). \end{aligned}$$

Portanto,

$$F = \bigcup B_F(0;n\delta) \subset T(E) \subset F,$$

isto é, $T$ é sobrejetora e acabamos. □

**Teorema 5.4.** *(Teorema da Aplicação Aberta) Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e seja $T\colon E \longrightarrow F$ linear, contínuo e sobrejetor. Então, $T$ é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo topológico.*

*Demonstração.* Tomemos $A$ um aberto em $E$. Queremos mostrar que $T(A)$ é aberto em $F$. Seja $y \in T(A)$. Então $y = T(x)$, $x \in A$. Portanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_E(x;\epsilon) \subset A$, isto é, $y \in T(B_E(x;\epsilon)) \subset T(A)$.

Vamos mostrar, agora, que $\dfrac{T(B_E(x;\epsilon)) - \{T(x)\}}{\epsilon} = T(B_E(0;1))$. Dividimos a demonstração:

1. Se $z \in B_E(x;\epsilon)$, então $T(z) - T(x) = T(z-x) \in T(B_E(0;\epsilon))$, pois $z - x \in B_E(0;\epsilon)$. Provamos, então, que $\dfrac{T(B_E(x;\epsilon)) - \{T(x)\}}{\epsilon} \subset T(B_E(0;1))$.
2. Observe, agora, que $T(B_E(0;\epsilon)) \subset T(B_E(x;\epsilon)) - \{T(x)\}$. De fato, se $y \in T(B_E(0;\epsilon))$, então $y = T(s)$, onde $s \in B_E(0;\epsilon)$, ou seja, $\|s\| = \|(s+x) - x\| < \epsilon$. Logo, $s + x \in B_E(x;\epsilon)$ e podemos concluir que $s \in B_E(x;\epsilon) - \{x\}$. Como $T$ é linear, segue que $y = T(s) \in T(B_E(x;\epsilon)) - \{T(x)\}$.

Assim, provamos que $T(B_E(0;1)) = \dfrac{T(B_E(x;\epsilon)) - \{T(x)\}}{\epsilon}$ ou, equivalentemente, que $T(B_E(0;\epsilon)) = T(B_E(x;\epsilon)) - \{T(x)\}$.

Pelo Lema 5.3, como $T$ é sobrejetora, resulta que $B_F(0;\delta) \subset T(B_E(0;1))$, para algum $\delta > 0$. Segue que $B_F(0;\delta) \subset T(B_E(0;1)) = \dfrac{T(B_E(x;\epsilon)) - \{T(x)\}}{\epsilon}$. Daí,

$$\begin{aligned} B_F(0;\epsilon\delta) \subset T(B_E(x;\epsilon)) - \{T(x)\} &\Rightarrow B_F(T(x);\epsilon\delta) \subset T(B_E(x;\epsilon)) \subset T(A) \\ &\Rightarrow B_F(y;\epsilon\delta) \subset T(B_E(x;\epsilon)) \subset T(A). \end{aligned}$$

Portanto, $y \in \operatorname{int}(T(A))$ e podemos concluir que $T(A)$ é aberto em $F$.

□

O Teorema da Aplicação Aberta exige que o operador $T\colon E \to F$, definido entre espaços de Banach, seja linear, contínuo e sobrejetor. O resultado e o exemplo a seguir ressaltam a essencialidade de duas das hipóteses desse teorema: a *sobrejetividade de* $T$ e a *completude dos espaços* $E$ *e* $F$.

**Proposição 5.5.** *Toda aplicação linear aberta* $T\colon E \to F$ *é sobrejetora sempre que* $E$ *e* $F$ *são espaços normados.*

*Demonstração.* Seja $r > 0$ e considere $B_E(0;r)$. Como $T$ é aberta, segue que, para algum $\delta > 0$, $T(B_E(0;r)) \supset B_F(0;\delta)$. Isto é, $nT(B_E(0;r)) \supset B_F(0;n\delta)$. Como $T$ é linear, vale que:

$$\begin{aligned} nT(B_E(0;r)) &= \{nT(x); x \in B_E(0;r)\} \\ &= \{T(nx); nx \in B_E(0;nr)\} \\ &= \{T(z); z \in B_E(0;nr)\} \subset T(E). \end{aligned}$$

Portanto, $F = \bigcup B_F(0;n\delta) \subset T(E) \subset F$, isto é, $T$ é sobrejetora. □

**Definição 5.6.** Definimos por $c_{00}$ o subespaço de $c_0$ formado por sequências eventualmente nulas, isto é,

$$c_{00} = \{(a_k)_{k=1}^{\infty};\ \text{existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_k = 0 \text{ para todo } k \geqslant k_0\}.$$

A função $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|a_k|\}$ define uma norma em $c_{00}$, para todo $x = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in c_{00}$.

**Exemplo 5.7.** Seja $T\colon c_{00} \to c_{00}$ o operador linear dado por $T((a_n)_{n=1}^{\infty}) = \left(a_1, \dfrac{a_2}{2}, \dfrac{a_3}{3}, \dots\right)$. Veremos a seguir que $T$ é linear, bijetor e contínuo, mas que o operador inverso $T^{-1}$ não é contínuo.

Sejam $x = (a_n)_{n=1}^{\infty}, y = (b_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Observe que

$$\begin{aligned} T((a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty}) &= T((a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}) \\ &= \left(a_1 + b_1, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{3}, \dots\right) \\ &= \left(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots\right) + \left(b_1, \frac{b_2}{2}, \frac{b_3}{3}, \dots\right) \\ &= T((a_n)_{n=1}^{\infty}) + T((b_n)_{n=1}^{\infty}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(\alpha(a_n)_{n=1}^{\infty}) &= T((\alpha a_n)_{n=1}^{\infty}) \\ &= \left(\alpha a_1, \alpha\frac{a_2}{2}, \alpha\frac{a_3}{3}, \dots\right) \\ &= \alpha\left(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots\right) \\ &= \alpha T((a_n)_{n=1}^{\infty}) \end{aligned}$$

mostram que $T$ é linear.

Ademais,

$$\|T(x)\| = \left\|\left(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots\right)\right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{|a_1|, \left|\frac{a_2}{2}\right|, \left|\frac{a_3}{3}\right|, \ldots\right\} \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots\} = \|x\|,$$

isto é, $T$ é contínua. Mais ainda, $T$ é bijetora e sua inversa é dada por

$$T^{-1}((a_n)_{n=1}^{\infty}) = (a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots).$$

Considere os vetores $e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{n-ésima}}, 0, \ldots)$, $n \in \mathbb{N}$. Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\|_\infty = 1$, mas $\|T^{-1}(e_n)\|_\infty = n$, ou seja, $T^{-1}$ não é contínua.

Como consequência do Teorema da Aplicação Aberta, é possível garantir que sempre que os espaços $E$ e $F$ forem completos, a inversa de uma bijeção linear $T\colon E \longrightarrow F$ sempre é contínua. É importante observar que $c_{00}$ não é completo, (ver [5], Exemplo 1.1.7) e, por isso, não vale a continuidade de $T^{-1}$, algo equivalente a dizer que $T$ é aberta.

## 5.2 O Teorema do Gráfico Fechado e sua Demonstração

Para a compreensão do Teorema do Gráfico Fechado e de sua demonstração, é necessário que a seguinte definição seja apresentada.

**Definição 5.8.** Sejam $E$ e $F$ espaços normados e $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. O gráfico de $T$ é o conjunto

$$G(T) = \{(x, y) : x \in E \text{ e } y = T(x)\} = \{(x, T(x)) : x \in E\} \subset E \times F.$$

É válido ressaltar que $G(T)$ é um subespaço vetorial de $E \times F$, que poderá ser munido tanto com a Norma da Soma ($\|.\|_1$), como com a Norma Eucliana ($\|.\|_2$) ou com a Norma do Máximo ($\|.\|_\infty$). De maneira geral, $G(T)$ pode ser um subconjunto fechado de $E \times F$ ou não.

Veremos a seguir que, para operadores lineares entre espaços de Banach, a continuidade de $T$ equivale ao fato de $G(T)$ ser fechado.

**Teorema 5.9.** *(Teorema do Gráfico Fechado) Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. Então, $T$ é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado em $E \times F$.*

*Demonstração.* Suponha $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo. Então, a função

$$f\colon E \times F \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \|T(x) - y\|$$

é contínua e, portanto, $G(T) = f^{-1}(\{0\})$ é fechado, pois é a imagem inversa do conjunto fechado $\{0\}$ pela função contínua $f$.

Suponha, agora, $G(T)$ fechado. De 2.13, sabemos que $E \times F$ é espaço de Banach com a Norma da Soma ($\|.\|_1$). Note que a função

$$\pi \colon G(T) \longrightarrow E, \pi(x, T(x)) = x$$

é linear e bijetora. Ademais, de

$$\|\pi(x, T(x))\| = \|x\| \leqslant \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|_1,$$

constatamos que $\pi$ é contínua e, do Teorema da Aplicação Aberta, segue que $\pi^{-1}$ também é contínua. Então, existe $c > 0$, tal que $\|(x, T(x))\|_1 \leqslant c\|x\|$, para todo $x \in E$. Portanto,

$$\|T(x)\| \leqslant \|T(x)\| + \|x\| = \|(x, T(x))\|_1 \leqslant c\|x\|,$$

para todo $x \in E$, o que prova que $T$ é contínuo. $\square$

# Referências


[1] MUJICA, J. *Notas de Aula de Análise Funcional*. IMECC-UNICAMP, 2009.

[2] BECKENSTEIN, E; NARICI, L. *The Hanh-Banach theorem: the life and times*. Topology and its Applications **77** (1997), 193–211.

[3] BERNAYS, P.; FRAENKEL, A. *Axiomatic Set Theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.

[4] BLASS, A. *Existence of bases implies the axiom of choice*. Contemporary Mathematics **31** (1984), 31–33.

[5] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[6] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. EDUSP, São Paulo, 2013.

[7] ENDERTON, H. *Elements of Set Theory*. Elsevier, San Diego, 1977.

[8] FARAH, E. *Algumas Proposições Equivalentes ao Axioma da Escolha*. 1958. 62f. Tese.

[9] JECH, T. *The Axiom of Choice*. North-Holland, 1973.

[10] KOVACEC, A. *Lógica*. Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2007.

[11] PIETSCH, A. *History of Banach Spaces and Linear Operators*. Birkhäuser Basel, 2007.

[12] RUSSELL, B. *Principia Mathematica*. Cambridge University Press, Londres, 1927.

[13] ZARISKI, O.; SAMUEL, P. *Comutative Algebra*. vol. 1. D. Van Nostrand Company, Nova York, 1958.

[14] BANACH, S.; STEINHAUS, H. *Sur le principe de la condensation de singularités*, Fundamenta Mathematicae, 1927.

[15] BANACH, S. *Théorie des Opérations Linéaires*, Université de Lwów, 1932.