UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA MESTRADO PROFISSIONAL

RODRIGO JUNIOR RODRIGUES

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE 1º GRAU:
Uma sequência didática para alunos do Ensino Fundamental

UBERLÂNDIA
2021

RODRIGO JUNIOR RODRIGUES

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE 1º GRAU:
Uma sequência didática para alunos do Ensino Fundamental

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para obtenção do título de mestre.
Orientador (a): Prof.ª Dr. ª Odaléa Aparecida Viana.

UBERLÂNDIA

2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

R696 Rodrigues, Rodrigo Junior, 1978-
2021 Aprendizagem significativa de sistemas de equações de 1º grau: Uma sequência didática para alunos do ensino fundamental [recurso eletrônico] / Rodrigo Junior Rodrigues. - 2021.

Orientadora: Odalea Viana.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.589
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Ciência - Estudo ensino. I. Viana, Odalea ,1955-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 50:37

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1A, Sala 207 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3230-9419 - www.ppgecm.ufu.br - secretaria@ppgecm.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Ensino de Ciências e Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Mestrado Profissional PPGECM				
Data:	17/09/2021	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:	11:20
Matrícula do Discente:	11912ECM019				
Nome do Discente:	Rodrigo Junior Rodrigues				
Título do Trabalho:	Aprendizagem Significativa de Sistemas de Equações de 1o grau: uma sequência didática para alunos do ensino fundamental				
Área de concentração:	Ensino de Ciências e Matemática				
Linha de pesquisa:	Ensino e Aprendizagem				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por meio da Plataforma Google Meet, a banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da da Universidade Federal de Uberlândia, assim composta: Professores Doutores: Odaléa Aparecida Viana - UFU); orientadora do candidato; Mirian Cardoso Utsumi - Universidade Estadual de Campinas UNCAMP; Vlademir Marim - ICENP/UFU.

Iniciando os trabalhos o(a) presidente da mesa, Dra. Profa. Odaléa Aparecida Viana, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato(a), agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Odalea Aparecida Viana**, **Usuário Externo**, em 17/09/2021, às 11:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Vlademir Marim**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 17/09/2021, às 11:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **MIRIAM CARDOSO UTSUMI**, **Usuário Externo**, em 17/09/2021, às 15:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3046785** e o código CRC **A28CE974**.

Dedico este trabalho à minha família, e, de forma especial, à minha querida mãe, Geny, que de forma incondicional sempre me incentiva, apoia e contribui para meu crescimento pessoal e profissional.

AGRADECIMENTOS

Mais uma vez, Deus me fortaleceu, para chegar ao fim desse desafio. Obrigado, Senhor!

Ao meu pai, Vicente, que logo aos meus oito anos de vida, partiu para a morada eterna, e mesmo com poucos anos de convívio, as lembranças e os ensinamentos são eternos.

À minha mãe, Geny, minha eterna gratidão por tudo que representa em minha caminhada. Seus exemplos de garra, fibra e força, são permanentes em minha trajetória.

Aos meus irmãos, irmãs, cunhados, cunhadas, sobrinhos e sobrinhas, pelas inestimáveis contribuições em meu percurso.

Aos poucos e bons amigos, em especial, ao Herivelto Cardoso, pelo apoio, incentivo e por entenderem os meus momentos de ausência.

Aos meus colegas de pós-graduação, por cada momento em que estivemos juntos. Vocês foram enriquecedores para minha formação profissional e pessoal.

À Professora Odaléa Viana, pela orientação neste trabalho, mas, sobretudo, por sua paciência, ensinamentos e contribuição para minha formação acadêmica e profissional.

RESUMO

Este estudo tem como objetivo geral analisar, com base na resolução de problemas, uma proposta didática para o conteúdo “Sistemas de Equações de 1º grau” direcionada a alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental. Para tanto, analisou-se a potencialidade significativa do material e os aspectos do desenvolvimento do pensamento algébrico na aprendizagem de uma estratégia algébrica a partir de estratégias aritméticas de resolução de problemas. A sequência didática, composta por seis atividades e aplicada pelo pesquisador em suas aulas normais, caracterizou a chamada “pesquisa do professor”, tendo sido observados e anotados os diálogos produzidos e verificadas as respostas escritas pelos alunos às tarefas solicitadas. Concluiu-se que a sequência didática produzida tinha características de um material potencialmente significativo, sendo analisados a estrutura lógica de organização das atividades, os conhecimentos prévios evidenciados na resolução de problemas, as relações com a estratégia aprendida e a atividade docente na aprendizagem de procedimentos. Houve indícios de que os alunos, em sua maioria, avançaram no desenvolvimento do pensamento algébrico, já que tiveram bom desempenho no emprego da estratégia algébrica aprendida, tendo sido identificadas algumas ações referentes às distintas dimensões da álgebra, que são: Aritmética Generalizada, Álgebra de Equações e Álgebra Estrutural. Nas tarefas, foram identificadas, também, as Atividades Geracionais e Transformacionais. Além de considerar a contribuição desta pesquisa para a formação deste professor, espera-se que o produto educacional oriundo do trabalho possa auxiliar os docentes na fase introdutória do conteúdo “Sistemas de Equações de 1° grau”.

Palavras-chave: Pensamento algébrico. Sistema de equações de 1º grau. Sequência didática. Aprendizagem significativa. Resolução de problemas.

ABSTRACT

The following academic study aims to analyze a didactic proposal for 1st degree Equation Systems headed to 8th year Elementary School students, based on problem solution. There has been analyzed i) the significant potentiality of the material and ii) the aspects of the algebraic thinking development when learning an algebraic strategy as from arithmetic problem-solving strategies. The learning sequence, composed by six exercises and applied by the researcher during ordinary classes, gave rise to the teacher's research. From there on dialogues among students were observed and notes were taken, and the students' written down answers for the exercises were checked. It was concluded that the produced didactic sequence showed characteristics of a significant potential material, by the analyze of the logical structure of activities organization, prior knowledge evidenced in problem solving, the relation with the strategy learned and the teaching intermediation in the learning procedures. There were indications that most of the students advanced in the algebraic thinking development once they achieved a good performance when they used the algebraic strategies learned and it was possible to identify some actions referring to algebra distinct dimensions. In addition to considering the contribution of this research to this teacher's educational background, it is expected that the result of this work might help other teachers in the introductory phase of the 1st degree Equation System subject.

Key words: Algebraic thinking. 1st degree Equation Systems. Didactic sequence. Significant learning. Problem solving.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica
EF	Ensino Fundamental
ESA	Estratégia de Substituição por Agrupamento
FACAM	Faculdade do Maranhão
FIES	Fundo de Financiamento Estudantil
FTD	*Frère Théophane Durand*
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
MG	Minas Gerais
PNE	Plano Nacional de Educação
PPGECM	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PR	Paraná
REVEMAT	Revista Eletrônica de Educação Matemática
SEED	Secretaria Estadual de Educação
SP	São Paulo
UFSCAR	Universidade de São Carlos
UFU	Universidade Federal de Uberlândia
UNIUBE	Universidade de Uberaba

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao menos duas justificativas podem ser dadas para a presença da disciplina Matemática nos currículos oficiais educacionais. Uma delas refere-se à importância da matemática na vida cotidiana, já que, independentemente de fórmulas, cálculos e operações, ela está presente nas decisões do cidadão, desde a compra de um simples pão até a aplicação no setor financeiro. Neste aspecto utilitário da Matemática, inclui-se seu valor instrumental para outras áreas do conhecimento, o que contribui para o avanço da ciência e o desenvolvimento de tecnologias. Outra justificativa é a relevância da matemática na formação intelectual do aluno e no desenvolvimento de formas de pensamento, como o numérico, o algébrico e o geométrico.

Quanto ao conteúdo elencado para ser ensinado e aprendido, este é normatizado atualmente pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), documento normativo que rege os currículos da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. A BNCC define, de forma substancial e gradual, o conjunto de conhecimentos que os alunos precisam aprender no decorrer desses ciclos e modalidades da Educação Básica, de forma que seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento sejam garantidos conforme o que estabelece o Plano Nacional de Educação – PNE (BRASIL, 2014). A BNCC é apresentada como uma referência para os sistemas educacionais dos Estados, Distrito Federal e Municípios, de modo a ajudar na superação da fragmentação das políticas educacionais e fortalecer o sistema de colaboração entre as três esferas de governo, podendo resultar em uma melhor qualidade da educação.

As aprendizagens essenciais estabelecidas na BNCC devem contribuir para que os estudantes desenvolvam competências gerais que concretizem na esfera pedagógica os direitos de aprendizagem e desenvolvimento. O documento utiliza a noção de competência no sentido da mobilização e aplicação dos conhecimentos escolares que envolvem os conceitos, os procedimentos, os valores e as atitudes. Dessa forma, ser competente significa ser capaz de resolver problemas e indagações da vida cotidiana, demonstrando preparo para o exercício da cidadania e qualificação no campo do trabalho.

Nos anos finais do Ensino Fundamental – nível em que este pesquisador atua há alguns anos – os estudantes estão em transição entre a infância e adolescência, fase marcada por transformações biológicas, psicológicas, sociais e emocionais. De acordo com a BNCC, é importante fortalecer a autonomia desses estudantes, proporcionando-lhes condições e meios para interagir criticamente com diferentes conhecimentos e fontes geradoras de informações, já que eles irão se deparar com desafios de maior complexidade na vida profissional, pessoal e/ou acadêmica. Para tanto, considera-se importante, nas diversas áreas, retomar e ressignificar as aprendizagens dos anos iniciais do Ensino Fundamental, objetivando o aprofundamento e a ampliação do repertório dos estudantes.

Diretamente à matemática no Ensino Fundamental, a BNCC (2018) indica:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BRASIL, 2018, p. 266).

Nesse âmbito, entre as competências específicas da matemática para o Ensino Fundamental, destacam-se aquelas que indicam que o aluno deve conseguir compreender a matemática como uma ciência viva, que colabora na solução de problemas e embasa descobertas e construções nos diversos campos da disciplina. O documento também indica a competência do aluno para interagir com seus pares cooperativamente, respeitando o modo de pensar dos colegas e buscando os aspectos consensuais ou não na discussão de questões e na resolução de problemas. Ainda segundo a BNCC (2018, p. 266), atividades envolvendo a resolução e a elaboração de problemas "são formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental".

Várias vertentes de ensino da matemática que utilizam problemas têm por base os trabalhos de Polya (1995), que, entre outras indicações, estabelece etapas do processo de resolução (compreensão, dados e condições, elaboração, execução e verificação do problema). Segundo Onuchic e Allevato (2011), aqueles professores que se utilizam da metodologia Resolução de Problemas se mostram empolgados e geralmente optam por não voltar a ensinar de forma tradicional.

Para trabalhar com essa metodologia, o professor deve ter clareza quanto ao significado de "problema". Van de Walle (2001) indica que um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a noção de que haja uma maneira específica para chegar à solução correta. A resolução de problemas sempre foi objeto de interesse deste pesquisador, já que, pautado pela experiência de 12 anos como professor de Matemática, sendo três no Ensino Fundamental, foi possível verificar como a aplicação de problemas na sala de aula pode favorecer uma melhor compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos.

Entre os conteúdos matemáticos indicados pela BNCC (BRASIL, 2018) para o Ensino Fundamental – dispostos em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística –, foi escolhido, para este estudo, o tema Álgebra, visto que a experiência tem mostrado a dificuldade dos alunos em realizar cálculos literais e resolver problemas valendo-se do pensamento algébrico. O documento explica que:

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos. (BRASIL, 2018, p. 270).

Na unidade temática definida para esta pesquisa, destacou-se o assunto Sistemas de Equações do 1º grau e justifica-se a opção pelo tema com base na experiência relatada a seguir. No segundo semestre letivo de 2018, pela primeira vez, este pesquisador trabalhou com o conteúdo Sistemas de Equações com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental. Na ocasião, havia um cenário caracterizado por três situações: a pouca experiência deste professor com o ensino deste conteúdo, o que restringiu a iniciativa por metodologias diferenciadas; alunos considerados, pela direção da escola, como de baixo rendimento, acarretando, assim, insegurança quanto aos resultados a serem alcançados; e uma restrição no número de aulas para desenvolver o tema, dado que a execução do cronograma planejado no início do ano se encontrava em atraso e havia receio de que não houvesse tempo para explorar outros conteúdos também importantes para aquele ano. Diante desse cenário, optou-se por desenvolver o conteúdo da seguinte maneira: partiu-se da definição de sistema de equações como um conjunto de duas ou mais equações; a seguir, apresentou-se o método de resolução por substituição, dando vários exemplos, e, finalmente, foram passados exercícios de fixação. Finalizado o ano letivo, com base nas avaliações realizadas, este pesquisador constatou indícios de que os alunos não haviam aprendido o conteúdo de maneira significativa.

Aprender conteúdos algébricos com significado refere-se, por exemplo, a dar sentido aos valores numéricos das variáveis em uma expressão com letras, a calcular mentalmente o valor de uma incógnita, a generalizar uma propriedade por meio de uma expressão algébrica etc. A constatação de que essas competências não foram formadas – tampouco aquelas habilidades mencionadas pela BNCC relativas à resolução de problemas –, aliada à inquietação por obter entendimento acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, levou este pesquisador a questionar como empregar uma metodologia de modo a promover uma aprendizagem significativa do conteúdo Sistemas de Equações do primeiro grau.

No âmbito da Psicologia Educacional, buscou-se apoio na teoria de David Ausubel (1918-2008) sobre aprendizagem significativa. Para Ausubel (2003), aprender significativamente é ampliar e reconfigurar ideias já existentes na estrutura cognitiva, e com isso, tornar-se capaz de relacionar e acessar novos conteúdos. O autor indica as condições necessárias para que a aprendizagem seja significativa: as que são relativas ao material (logicamente organizado e apresentado em linguagem adequada) e as que se referem ao aprendiz (conhecimentos prévios, motivação etc.).

No caso do conteúdo Sistemas de Equações, acreditou-se ser possível organizar um material na forma de uma sequência de atividades, de modo a favorecer a mobilização de conhecimentos prévios e também o estabelecimento de relações entre as ideias já estabelecidas e os novos conceitos a serem aprendidos. Para além do entendimento do conceito de sistemas de equações, colocou-se foco nas estratégias de resolução dos sistemas, o que motivou os estudos acerca da aprendizagem significativa de procedimentos. Estes, de acordo com Coll e Valls (1998), são aprendidos por reconstrução da própria prática como produto de uma reflexão e da tomada de consciência sobre o que fazer e como fazer – e do pensamento algébrico – este manifestado na capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos (GROSSMANN; PONTE, 2011) (PEREIRA; PONTE, 2011).

Buscando mais elementos para subsidiar a elaboração de um material de aprendizagem potencialmente significativo, foram encontrados alguns estudos que relacionaram o pensamento aritmético e o pensamento algébrico (LINS; GIMENEZ, 2001) (KIERAN, 2004) e destacaram que a discussão e a reflexão dos alunos acerca de diferentes estratégias empregadas na resolução de problemas podem ser uma oportunidade para enriquecer o pensamento algébrico (WINDSOR, 2010).

Diante do contexto ora descrito, formulou-se a seguinte pergunta de pesquisa: **Como uma sequência didática sobre o conteúdo Sistemas de Equações, direcionada a alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental e com base na Resolução de Problemas, pode contribuir para a aprendizagem significativa do tema?**

Em especial, pretendeu-se trabalhar com os alunos um método de resolução de sistemas com base nas estratégias aritméticas de resolução de problemas. A sequência foi elaborada no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, PPGECM/UFU, Mestrado Profissional, e aplicada a alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental da escola em que este pesquisador atua como professor.

Pretende-se analisar a potencialidade do material com base na teoria de Ausubel (2003), em especial quanto à aprendizagem significativa de procedimentos (COLL; VALLS, 1998), bem como evidenciar aspectos do desenvolvimento do pensamento algébrico na aprendizagem de uma estratégia algébrica a partir de estratégias aritméticas de resolução de problemas (KIERAN, 2004) (USISKIN, 1995). Assim, este trabalho está vinculado à linha de pesquisa que enfoca os fatores psicológicos cognitivos que influenciam o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Trata-se de um trabalho oriundo da prática deste docente no exercício da profissão, o que caracteriza a chamada pesquisa do professor (CARNEIRO, 2008). Concorda-se com a autora quando esta evidencia o caráter instrumental e utilitário desse tipo de pesquisa para a compreensão dos processos de aprendizagem e desenvolvimento de seus próprios alunos, sem buscar generalizações para outros contextos. Assim, todas as etapas ocorridas no desenvolvimento da presente pesquisa, desde a elaboração da proposta didática a partir dos estudos realizados, as aplicações da sequência em dois momentos, a verificação das adaptações das estratégias empregadas pelos alunos durante as atividades até as próprias mudanças de atuação na sequência de suas aulas, fazem parte da proposta maior de formação continuada deste profissional do ensino.

O produto desta pesquisa, vinculado ao PPGECM/UFU, será constituído por uma proposta de ensino na forma de uma sequência didática – cujas atividades serão descritas de modo a auxiliar os professores no desenvolvimento de suas aulas – seguida de uma breve fundamentação teórica, além das reflexões oriundas da experiência de sua aplicação. A sequência didática, assim planejada e aplicada, constituirá o produto educacional exigido conforme o regimento deste programa (UFU, 2018). Com isso, espera-se que este estudo possa contribuir para a formação continuada deste pesquisador, bem como servir de apoio para outros professores de matemática do Ensino Fundamental.

2 ÁLGEBRA E SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Neste capítulo, após serem apresentadas algumas diretrizes gerais para o ensino básico no Brasil e no estado de Minas Gerais, por meio de documentos oficiais, são destacadas as definições de álgebra e de pensamento algébrico, e, em especial, as habilidades que se referem aos sistemas de equações no Ensino Fundamental. A seguir, são apresentadas as definições de equações lineares e de sistemas de equações, são comparados os métodos mais comuns de resolução e, é explicado e exemplificado o método sugerido na sequência didática deste trabalho.

2.1 A álgebra nos documentos oficiais

A BNCC (BRASIL, 2018), documento que estabelece regras e diretrizes essenciais para aquilo que deve ser ensinado aos alunos, é referência para a construção dos currículos de todos os sistemas e redes de ensino, dos estados, Distrito Federal e municípios brasileiros. Este documento foi construído por definição do § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB, Lei n.º 9.394/1996 (BRASIL, 1996), "e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN)" (BRASIL, 2018, p. 7).

As regras e diretrizes definidas na BNCC buscam garantir aos alunos o desenvolvimento de competências gerais que unificam, no campo pedagógico, "os direitos de aprendizagem e desenvolvimento" (BRASIL, 2018, p. 8). Essas competências são definidas na BNCC (BRASIL, 2018, p. 8) "como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho".

A BNCC é fundamentada em alguns documentos como, por exemplo, a Constituição Federal de 1988, que em seu Artigo 205 legitima a educação como direito imprescindível, sendo dever do Estado e da família promover e incentivar, sempre com o auxílio e contribuição da sociedade, o indivíduo para desempenhar a cidadania e a capacitação para o trabalho. A LDB (BRASIL, 1996), no Inciso IV de seu Artigo 9º, aponta para a ligação entre dois importantes pontos, que são o básico-comum e o diverso em matéria curricular. Sobre estes dois pontos, a LDB continua, no Artigo 26:

> os currículos da Educação Infantil, do Ensino Fundamental e do Ensino Médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos. (BRASIL, 1996, p. 9).

Reafirmando a LDB e entendendo a autonomia dos entes federados, a BNCC possui papel imprescindível na busca pela igualdade, equidade e diversidade, já que o Brasil dispõe de profunda diversidade cultural e demasiada desigualdades sociais. Perante isso a BNCC orienta que:

> os sistemas e redes de ensino devem construir currículos, e as escolas precisam elaborar propostas pedagógicas que considerem as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes, assim como suas identidades linguísticas, étnicas e culturais. (BRASIL, 2018, p. 15).

Diante das indicações da LDB (BRASIL, 1996) e da BNCC (BRASIL, 2018), que são documentos construídos com base nos fundamentos educacionais expostos na Constituição Federal de 1988, foi elaborado o Currículo Referência de Minas Gerais (MINAS GERAIS, 2019), para orientar na elaboração dos planos e ações educacionais em Minas Gerais[1], buscando adequar o diverso em matéria curricular do Estado a cada localidade, haja vista suas diferenças culturais, sociais, étnicas e renda.

O Currículo Referência de Minas Gerais (MINAS GERAIS, 2019), como é de se esperar, apresenta o mesmo entendimento sobre a importância da matemática e as competências específicas idênticas às da BNCC, já que esta é a base comum e que deve ser seguida em todos os sistemas e redes de ensino. Estes dois documentos seguem, também, alinhados no tocante à divisão do conteúdo em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística.

A unidade temática da álgebra tem como objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico, que é importante na utilização de modelos matemáticos e para compreender, analisar e representar relações quantitativas de grandezas. Seu uso também é essencial em situações e estruturas matemáticas, valendo-se de letras e outros símbolos. A BNCC (2018) prossegue, dizendo que

[1] A opção por citar o documento deve-se ao fato de a pesquisa ter sido realizada em escola da rede pública do estado de Minas Gerais.

> Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados (BRASIL, 2018, p. 270).

A BNCC (2018) continua apontando, seguida pelo Currículo Referência de Minas Gerais (MINAS GERAIS, 2019), que o ensino da álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental é momento de aprofundamento e ampliação do que foi trabalhado nos anos iniciais. Os alunos precisam assimilar os variados significados das variáveis numéricas em uma expressão, "estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas" (BRASIL, 2018, p. 271).

Nos supracitados documentos, têm-se os mesmos objetos de conhecimento quando se observa a unidade temática da álgebra para o oitavo ano. A diferença fica por conta das habilidades, já que no Currículo Referência de MG são acrescentadas as habilidades cujos códigos são acrescidos da sigla "MG" (Quadro 1). Foram inseridas cinco habilidades, das quais quatro são iniciadas com as palavras "reconhecer" e "identificar". Este pesquisador entende ser uma forma de reafirmar as demais habilidades já existentes na BNCC, já que, para desenvolvê-las, o aluno precisa reconhecer um sistema de equações e uma equação do primeiro grau e identificar suas soluções.

Quadro 1 - Objeto de Conhecimento e Habilidades para a Unidade Temática Álgebra de acordo com a BNCC

8º ano	
Objetos do conhecimento	**Habilidades**
Valor numérico de expressões algébricas	(EF08MA06A) Resolver problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações. (EF08MA06B) Elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano	(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	(EF08MA31MG) Reconhecer um sistema de duas equações lineares e utilizá-lo para modelar problemas. (EF08MA32MG) Identificar a(s) solução (ões) de um sistema de duas equações lineares. (EF08MA33MG) Resolver um sistema de equações do primeiro grau. (EF08MA08A) Resolver problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso. (EF08MA08B) Elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano
Equação polinomial de 2º grau do tipo ax2 = b	(EF08MA34MG) Reconhecer uma equação de segundo grau do tipo ax2 = b. (EF08MA35MG) Identificar a(s) raiz(ízes) de uma equação do segundo grau. (EF08MA09A) Resolver, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo ax2 = b. (EF08MA09B) Elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo ax2 = b.
Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma

Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.
Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA13A) Resolver problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas. (EF08MA13B) Elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Fonte: Currículo Referência de Minas Gerais (MINAS GERAIS, 2019).

O Currículo Referência de Minas Gerais (MINAS GERAIS, 2019) orienta que no oitavo ano do Ensino Fundamental devem ser estudados sistemas de equações de primeiro grau com duas incógnitas que admitem uma única solução[2] (solução particular). As habilidades exigidas nos documentos oficiais a serem desenvolvidas com este conteúdo podem ser verificadas no Quadro 2.

Quadro 2 - Habilidades a serem desenvolvidas com sistema de equações de 1º grau

8º Ano		
Unidades Temáticas	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidades**
Álgebra	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	(EF08MA31MG) Reconhecer um sistema de duas equações lineares e utilizá-lo para modelar problemas. (EF08MA32MG) Identificar a(s) solução (ões) de um sistema de duas equações lineares. (EF08MA33MG) Resolver um sistema de equações do primeiro grau. (EF08MA08A) Resolver problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso. (EF08MA08B) Elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Fonte: Currículo Referência de Minas Gerais (MINAS GERAIS, 2019, p. 720).

[2] Os sistemas lineares podem ser classificados como: Sistema Possível e Determinado (SPD); Sistema Impossível ou Incompatível (SI); Sistema Possível e Indeterminado (SPI).

O que pode ser um ponto de crítica aos dois documentos é não haver referência, em nenhum deles, ao modo como devem ser desenvolvidas certas habilidades nos alunos, por exemplo, como levar o aluno a “reconhecer” uma equação e, consequentemente, um Sistema de Equações. Este pesquisador entende que os documentos apostam na autonomia do professor em empregar metodologias e elaborar seus planejamentos; assim, considera-se que a proposta de trabalho aqui apresentada constitui uma sugestão metodológica para levar o aluno a “reconhecer” e resolver um Sistema de Equações a partir do domínio de estratégias aritméticas de solução de problemas.

2.2. Os sistemas de equações

Uma equação linear nas incógnitas, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ é uma equação que pode ser escrita na seguinte forma: $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \ldots + a_n\, x_n = b$, em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são números reais chamados de constantes. Dizemos que a constante a_k é o coeficiente de x_k e b é o termo constante da equação.

Uma solução da equação linear é uma lista de valores $s_1, s_2, \ldots s_n$, tais que, ao substituir $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, s_n = x_n$, tem-se a seguinte afirmação: $a_1\, s_1 + a_2\, s_2 + \ldots + a_n\, s_n = b$. Dizemos, nesse caso, que a equação é satisfeita.

Para evitar o uso de índices, sem perda de generalidade, costumamos usar *x, y* para duas incógnitas; *x, y, z* para três incógnitas; e *x, y, z, t* para quatro incógnitas. Estas grandezas são sempre ordenadas dessa forma.

Um sistema de equações lineares é uma lista de equações com as mesmas incógnitas. Em particular, um sistema de equações lineares e incógnitas pode ser escrito na seguinte forma:

$$S = \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12} x_2 + \cdots a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22} x_2 + \cdots a_{2n} x_n = b_{12} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots a_{m}\ x_n = b_m \end{cases}$$

onde $a_{i\,j} e\ b_i$ são constantes.

O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado de conjunto solução ou solução geral do sistema.

Conforme consta no Quadro 2, no oitavo ano do Ensino Fundamental são estudados os sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, que admitem uma única solução. Convém acrescentar que um sistema linear possui obrigatoriamente: uma solução; nenhuma solução; infinitas soluções. Os sistemas lineares são classificados, respectivamente, como: Sistema Possível e Determinado (SPD), Sistema Impossível ou Incompatível (SI), Sistema Possível e Indeterminado (SPI). Quanto às técnicas de resolução, em geral, são ensinados os métodos da substituição, da adição e o da comparação. O Quadro 3 exemplifica os procedimentos para cada um dos métodos.

Quadro 3 - Métodos de resolução de sistemas

Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+4y=32 \end{cases}$

Método de substituição	Método da adição	Método da comparação
$\begin{cases} x+y=10 & (I) \\ 2x+4y=32 & (II) \end{cases}$ Isolando *x* na equação *(I)* $(I)x+y=10 \leftrightarrow x=10-y$ Substituindo em *(II)*, temos: $(II)2x+4y=32$ $\leftrightarrow 2(10-y)+4y=32$ $\leftrightarrow 20-2y+4y=32$ $\leftrightarrow 2y=12 \leftrightarrow y=6$ Substituindo *y=6* em *(I)*, temos $x+y=10 \leftrightarrow x+6=10 \leftrightarrow x=4$ Logo a solução é *S= (4, 6)*	$\begin{cases} x+y=10 & (I) \\ 2x+4y=32 & (II) \end{cases}$ Multiplicando a equação *(I)* por -2 e somando as equações temos: $\begin{cases} -2x-2y=-20 & (I) \\ 2x+4y=32 & (II) \end{cases}$ ____________________ $2y=12 \leftrightarrow y=6$ Substituindo *y=6* em *(I)*, temos $x+y=10 \leftrightarrow x+6=10 \leftrightarrow x=4$ Logo a solução é *S= (4, 6)*	$\begin{cases} x+y=10 & (I) \\ 2x+4y=32 & (II) \end{cases}$ Isolando *x* nas equações *(I)* e *(II)* $(I)x+y=10 \leftrightarrow x=10-y$ *(A)* $(II)2x+4y=32$ $2x=32-4y \leftrightarrow$ $x=\frac{32-4y}{2} \leftrightarrow$ $x=16-2y$ *(B)* Igualando as expressões *(A)* e *(B)*: $10-y=16-2y \leftrightarrow$ $-y+2y=16-10 \leftrightarrow y=6$ Substituindo *y=6* em *(I)*, temos $x+y=10 \leftrightarrow x+6=10 \leftrightarrow x=4$ Logo a solução é *S= (4, 6)*

Fonte: Elaborado pelo pesquisador.

O método que o presente trabalho sugere difere desses e é característico para os chamados ‘Sistemas Aditivos’, isto é, aqueles sistemas possíveis, determinados e de equações[3] do primeiro grau em que: (a) os coeficientes são números naturais; e (b) o primeiro membro de uma das equações pode ser inteiramente substituído na outra equação, de modo que esta passe a ter apenas uma incógnita.

[3] A maioria dos sistemas constantes na sequência didática é formada por sistemas de duas equações, mas há alguns com três equações e três incógnitas em que é possível utilizar o método aqui apresentado.

Um exemplo desse método é mostrado no Quadro 4, em que pode ser constatada a manipulação algébrica referente aos monômios[4], ou seja, a expressão $3x + 5y$ da segunda equação é decomposta de modo a permitir o agrupamento dos termos na forma da expressão $(x + y)$ – que será substituída pelo valor indicado na primeira equação. Chamamos esse procedimento de Estratégia[5] da Substituição por Agrupamento (ESA).

Quadro 4 - Resolução de sistema por ESA

Resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 8 \quad (I) \\ 3x + 5y = 42 \quad (II) \end{cases}$
$(II)\ 3x + 5y = 42 \leftrightarrow x + x + x + y + y + y + y + y = 42 \leftrightarrow (x + y) + (x + y) + (x + y) + 2y = 42$
Substituindo $x + y$ pelo valor 8 (conforme indica a primeira equação), encontra-se o valor da incógnita y:
$(II)\ 8 + 8 + 8 + 2y = 42 \leftrightarrow 24 + 2y = 42 \leftrightarrow 2y = 18 \leftrightarrow y = 9$
Substituindo $y = 9$ em (I), temos $x + y = 8 \leftrightarrow x + 9 = 8 \leftrightarrow x = -1$
Logo a solução é $S = (-1, 9)$

Fonte: Elaborado pelo pesquisador.

É importante ponderar que ESA não é apresentada como uma estratégia mais relevante ou mais simples que as outras três mencionadas. Na verdade, aconselha-se sua utilização na etapa de introdução do conteúdo Sistema de Equações, pois, ela requer procedimentos algébricos relativos a estratégias aritméticas já conhecidas, o que pode favorecer a atribuição de significados às ações empregadas pelos alunos.

[4] No Ensino Fundamental, é comum os alunos simplificarem expressões algébricas somando os monômios, por exemplo: dada a expressão $3x+y+x+4y$, o aluno deve reduzir os termos semelhantes e encontrar $4x+5y$. Dificilmente é solicitado o contrário, ou seja, decompor a $4x+5y$ em $x+3x+2y+3y$ *ou* $2x+x+x+y+2y+2y$ ou $x+x+x+x+y+y+y+y+y$ etc., nem agrupar alguns termos, como $(x+2y)+(3x+y)+2y$, por exemplo.

[5] Para manter coerência com os fundamentos teóricos, será utilizado o termo “estratégia”, em vez de “método”.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, composto por três seções, a primeira delas busca apresentar as ideias de pensamento algébrico de vários autores. Muitas dessas ideias convergem para a importância da articulação entre a aritmética e o pensamento algébrico, sendo exatamente o que se busca no presente trabalho.

A seção seguinte inicia-se com uma descrição de competências conforme a BNCC, o que serve para introduzir a ideia de aprendizagem significativa de Ausubel (2003), e também o entendimento de Moreira (2010) a respeito deste tema. Na continuidade, a seção adentra na aprendizagem significativa de procedimentos, em que é apresentada, entre outros autores, a ideia de Coll e Valls (1998) acerca do ensino e da aprendizagem de técnicas e estratégias.

Por fim, a última seção discorre sobre as definições de "problema" dadas por vários autores e o entendimento de alguns aspectos da metodologia resolução de problemas, acrescidos de considerações sobre sua importância para o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

3.1 O pensamento algébrico

Ao relatar aspectos da história da Álgebra, Ponte (2006) afirma que suas origens remetem para a formalização e a sistematização de certas técnicas de resolução de problemas. Com o passar do tempo, a "Álgebra passa a ser entendida como o estudo da resolução de equações ("algébricas")" (PONTE, 2006, p. 9). Buscando um conceito mais usual, o autor resume que: "A visão mais habitual da Álgebra é que se trata simplesmente de regras de transformação de expressões (monômios, polinómios, frações algébricas, expressões com radicais) e processos de resolução de equações" (PONTE, 2006, p. 10).

Ao criticar muitos programas de ensino básico que reduzem a nomenclatura "Álgebra" a "cálculo algébrico", o autor afirma que ocorre certo desprezo a muitos aspectos importantes desta área da Matemática, sejam aqueles relativos à Antiguidade (resolução de problemas), sejam os mais atuais, tais como as relações, estruturas algébricas, estudo de funções e da variação, em geral (PONTE, 2006).

Quanto aos objetivos do estudo da Álgebra no nível escolar, Ponte (2006) indica que se deve visar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Este pensamento diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação.

Vale et al. (2006) entendem que o pensamento algébrico se relaciona substancialmente com a manipulação simbólica e com a resolução de equações; os autores, em linha similar a Ponte (2006), destacam a importância de o aluno conhecer e compreender as concepções algébricas, as estruturas e fundamentos que orientam as manipulações simbólicas e as formas como esses símbolos podem ser empregados para interpretar o conhecimento matemático. Eles apontam ainda que muitos conhecimentos algébricos podem ser concebidos com base nas experiências com os números, já que a identificação de padrões é uma forma de desenvolver o pensamento algébrico. De forma genérica, os autores apontam que: "padrão é usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades" (VALE et al., 2006, p. 194). A identificação de regularidades pode ser incentivada por meio de atividades investigativas, e assim promover uma aprendizagem mais significativa da álgebra.

Em linha similar, Vale et al. (2006) apontam que os alunos precisam ter vivências concretas por meio das quais seja possível estruturar um pensamento algébrico significativo. Para isso, os autores acreditam que a bagagem do aluno com a aritmética favorece sua preparação para o estudo da álgebra. Para a iniciação à álgebra, sugerem atividades em que constem as sequências numéricas e a procura de padrões e generalizações.

Arcavi (2006) também destaca a importância da passagem da aritmética para a álgebra e a compreensão do sentido dos símbolos para o desenvolvimento do pensamento algébrico. O autor cita alguns elementos importantes para o entendimento dos símbolos; por exemplo, utiliza a expressão *simpatia do símbolo,* sendo a compreensão de como os símbolos podem e devem ser utilizados para exibir relações, generalidades e demonstrações. As habilidades de ler e de manipular as expressões simbólicas seriam peças complementares na resolução de problemas algébricos.

No âmbito escolar, alguns autores tratam dos tipos de atividades algébricas. Usiskin (1995) determina quatro diferentes concepções da álgebra. A primeira concepção é chamada Aritmética Generalizada, em que se evidenciam as generalizações que acontecem a partir das propriedades das operações e da descoberta de padrões aritméticos em sequências numéricas e geométricas. Por exemplo, generaliza-se $3 + 5 = 5 + 3$ como $a + b = b + a$.

Já na sequência:

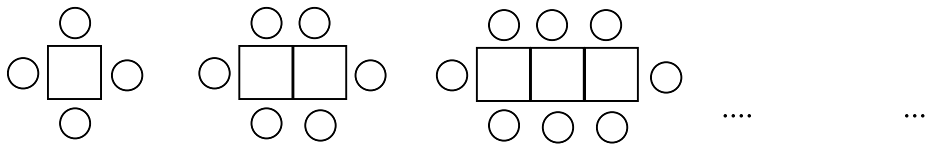
$$3 \,.\, 5 = 15$$
$$2 \,.\, 5 = 10$$
$$1 \,.\, 5 = 5$$
$$0 \,.\, 5 = 0$$

é possível dar continuidade aplicando números negativos e obter:

$$-1 \,.\, 5 = -5$$
$$-2 \,.\, 5 = -10$$
$$-3 \,.\, 5 = -15$$

Com os modelos acima, pode-se generalizar a relação entre os números e obter uma propriedade: *(-x)***.** *y = -xy*. Outro exemplo de generalização acontece na descoberta de padrões, tais como: obter uma expressão que designe o número de cadeiras que contém o desenho com *n* mesas, na sequência:

1	2	3	4	N



4 cadeiras	6 cadeiras	8 cadeiras	2 . 4 + 2	2. n + 2

Na segunda concepção, denominada Álgebra de Equações, as letras são vistas como incógnitas e aparecem nas equações, nas inequações e nos sistemas do primeiro e segundo graus, utilizados especialmente na resolução de problemas. Por exemplo, a equação $5x + 3 = 40$ é a tradução do problema: “adicionando 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma é 40. Achar o número”. Usiskin (1995) alerta que, ao se chegar à equação que reproduz o problema acima, o mesmo é finalizado, pois, o modelo geral já foi encontrado e a resolução prossegue utilizando procedimentos: $5x + 3 – 3 = 40 – 3 \Rightarrow 5x = 37 \Rightarrow x = 7{,}4$. As orientações centrais para o uso das incógnitas enquanto generalizadora de modelos são “traduzir e generalizar”. Já para a utilização das variáveis em procedimentos, as ideias essenciais são “simplificar e resolver”.

A terceira concepção indicada por Usiskin (1995) é a Álgebra Funcional, em que as letras são usadas como variáveis para expressar relações e funções entre grandezas. Fórmulas geométricas, como $A = b.h$, utilizada no cálculo da área do retângulo, são um exemplo da utilização das letras para expressão de uma relação, neste caso, entre três grandezas. Nesta dimensão, há ainda o uso das letras como variáveis nas funções, por exemplo, $y = 3x + 5$ ou

$f(x) = 3x + 5$, onde elas denotam “um argumento, isto é, representa os valores do domínio de uma função ou um parâmetro, isto é, representa um número do qual dependem outros números”[6] (USISKIN, 1995, p. 16).

Finalmente, a última concepção é a Álgebra Estrutural, ou a álgebra como estudo das estruturas, onde as variáveis não se apresentam como incógnitas e nenhum modelo precisa ser generalizado. No ensino superior, são estudadas as estruturas como grupos, anéis, domínio de integridade, corpos e espaços vetoriais. Na educação básica, é estudado o cálculo algébrico – como operações com monômios e polinômios, simplificação de expressões, fatoração etc. – sendo orientado pelas propriedades das operações com números reais. Como exemplo, ao simplificar a expressão $x^2 - 2x + 1$, encontrando como resposta $(x - 1)^2$, não existe uma equação a ser resolvida. Assim, a variável não atua como incógnita e também não há modelo matemático algum, a ser generalizado. A variável tornou-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades.

Nessa mesma perspectiva, Blanton e Kaput (2005) consideram o pensamento algébrico como um tipo de pensamento em que os alunos generalizam ideias matemáticas advindas de um conjunto de instâncias particulares, estabelecem essas generalizações por meio do discurso da argumentação e as expressam de forma cada vez mais formal e adequada à idade. Os autores listaram quatro formas que o pensamento algébrico pode assumir:

> (a) o uso de aritmética como domínio para expressar e formalizar generalizações aritméticas; (b) generalizar padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional); (c) modelar como um domínio para expressar e formalizar generalizações; e (d) generalização sobre sistemas matemáticos abstraídos de cálculos e relações. (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413).

Os autores reconhecem que, das quatro formas listadas, a aritmética generalizada e o pensamento funcional são os tipos mais comuns na iniciação do desenvolvimento do conhecimento algébrico. Eles esclarecem que, dependendo da experiência, a generalização pode ser expressa em palavras ou em símbolos. Assim, independente de formalização simbólica, os autores apresentaram categorias de atividades que podem favorecer o pensamento algébrico. Dentre estas categorias, estão aquelas que exploram propriedades e relacionamentos de números inteiros. Por exemplo, ao propor que os alunos expliquem os deslocamentos (à direita, à esquerda, abaixo ou acima) em um quadro contendo números de 1 a 100 dispostos em dez linhas e dez colunas (com números crescentes de cima para baixo), o aluno pode generalizar

---

[6] O autor explica como as noções de variável dependente e independente podem ser complexas quando o aluno se depara com questões do tipo: ache a equação da reta que passa pelo ponto (6,2) com inclinação 11. Partindo da equação da reta $y = mx + b$, nota-se que m é uma constante e b transformou-se em incógnita. Substitui-se o par de valores (6,2) na expressão $y = mx + b$ porque esta relação descreve um modelo geral entre números.

que, para ir do 22 ao 45, são necessários os deslocamentos ↓↓ →→→ ou →→→ ↓↓, o que sugere o entendimento do sistema de numeração decimal e a conclusão acerca da adição de duas dezenas e três unidades. Outros exemplos referem-se às conclusões que os alunos concretizam quanto às somas e aos produtos de números pares e ímpares, quanto à utilização da igualdade como expressão de uma relação entre quantidades (e não apenas como resultado de uma operação) e quanto à determinação de termos desconhecidos em uma igualdade. Assim, considera-se que Blanton e Kaput (2005) ampliam o entendimento da dimensão da Aritmética Generalizada proposta por Usiskin (1995).

Lew (2004, p. 88) argumenta que o pensar algébrico é muito mais que procedimentos, mas está relacionado a algumas habilidades como "generalização, abstração, pensamento analítico, pensamento dinâmico, modelagem e organização".

Por sua vez, Kieran (2004, p. 142) categoriza o ensino da álgebra escolar em "atividades geracionais, atividades transformacionais e atividades globais de meta-nível".

A atividade geracional está relacionada à formação das expressões e equações correspondentes a situações-problema e à generalização de relações numéricas e de padrões em sequências numéricas ou geométricas. Conforme a autora, "grande parte da construção de significado para objetos algébricos ocorre dentro da atividade geracional da álgebra" (KIERAN, 2004, p. 142). As atividades de transformação compreendem a redução de termos semelhantes e operações com expressões polinomiais, também estão relacionadas à resolução de equações e à simplificação de expressões. Esta atividade constitui, em grande parte, oportunidades de buscar equivalência para expressões e equações.

Finalmente, as atividades globais de meta-nível são atividades matemáticas mais amplas, não exclusivas à álgebra, por exemplo, analisar, justificar, provar e prever. Envolvem a resolução de problemas, a modelagem, a generalização, entre outras. Kieran (2004) alega que este tipo de atividade, em que as letras são utilizadas como ferramenta, fornece o contexto em que o aluno se sente motivado a se engajar nas atividades de geração e de transformação, demonstrando o verdadeiro pensamento algébrico. A autora ainda pondera que os alunos envolvidos em uma atividade de nível meta-global devem ser estimulados a realizá-la de várias maneiras, e que a decisão de usar o aparato algébrico deve surgir como escolha dos alunos. Ou seja, os alunos devem sentir a necessidade de utilizar as letras para resolver os desafios propostos.

Estudando as dificuldades dos alunos em empregar o pensamento algébrico, Gil (2008) identificou que, se o aluno não é qualificado em apoderar-se dos conceitos e métodos algébricos, ele não consegue empregar este conhecimento na resolução de problemas, gerando desprazer e afastando-o do estudo da álgebra. A autora entende que muitas das dificuldades decorrem da relação com a aritmética, em que se confunde o significado das letras. Ao contrário do que muitos pregam, nem sempre na álgebra as letras estão associadas à variação (USISKIN, 1995). Gil (2008) também indica que o uso da simbologia gera embaraço, já que "grande parte da simbologia utilizada no contexto algébrico já foi anteriormente utilizada no estudo da Aritmética e, em alguns casos, com significados diferentes" (GIL, 2008, p. 37).

Em seu trabalho, Lew (2004, p. 88) considerou que "a álgebra parece ser muito mais difícil para os alunos do que o esperado". Ele indica que, para os alunos e, até mesmo para os professores, os conceitos de variáveis e funções geram sérios obstáculos epistemológicos[7]. O autor aponta também que, muitas vezes, a álgebra é vista como sem sentido, pois "lida apenas com símbolos abstratos" (LEW, 2004, p.105).

Booth (1995) encontrou que os erros dos alunos em atividades algébricas podem estar ligados ao significado atribuído às letras e aos tipos de relações e de métodos usados em aritmética. O autor exemplifica: "a letra *m* pode ser utilizada em aritmética para representar metros, mas não para representar o número de metros, como em álgebra" (BOOTH, 1995, p. 30). Considerando a aritmética como um dos pontos de origem das dificuldades na álgebra, Lins e Gimenez (2001) entendem que a diferença entre esses dois campos é a forma como são tratados, e sugerem que um depende do outro. Assim, criticam o senso comum que leva a aritmética a ser ensinada primeiro, e a álgebra a iniciar-se tardiamente, e entendem que as duas devem ser ensinadas de forma única e que é necessário compreender onde elas se ligam e o que possuem em comum. Quando os autores afirmam "que a própria atividade aritmética envolve, naturalmente, um certo nível de generalidade" (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 113), acabam por oferecer um caminho para o ensino da álgebra.

Blanton e Kaput (2005) e Kaput (1998; 1999) reforçam, em partes, a ideia anterior, já que eles defendem a utilização da aritmética para expressar e formalizar generalizações. Também corroborando com a importância da aritmética no ensino da álgebra, Canavarro (2007), indica:

> É a partir da estrutura da Aritmética que se podem construir os aspectos sintácticos da Álgebra, o que implica analisar as expressões aritméticas não em termos do valor numérico obtido através do cálculo, mas em termos da sua forma (por exemplo, concluir que $33 + 8 = 8 + 33$ não porque ambos representam 41, mas porque na adição a ordem das parcelas é indiferente). (CANAVARRO, 2007, p. 89).

---

[7] Citando Brousseau (1983), Paias (2019) afirma que obstáculos epistemológicos são as limitações ou impedimentos que afetam a capacidade do aluno em construir um conhecimento.

Van de Walle (2009) compartilha destas ideias e argumenta ser com base nas experiências com os números e operações que se desenvolve o entendimento das generalizações, que faz parte do pensamento algébrico. O autor também se refere ao simbolismo utilizado para expressar as generalizações aritméticas e a estrutura do sistema numérico. Ao exemplificar que a generalização (a + b) = (b + a) garante que 83 + 27 = 27 + 83 sem precisar calcular as somas em cada lado da igualdade, o autor considera que "as generalizações mais importantes no coração do pensamento algébrico são aquelas realizadas sobre os números e cálculos aritméticos" (VAN DE WALLE, 2009, p. 287). Ele argumenta ainda, que ao passo em que as crianças compreendem as operações, elas conseguem compreender as regularidades.

Jogos e as atividades lúdicas devem ser também mecanismos de ensino da álgebra, já que os alunos possuem imaginação muito fértil e desde muito pequenos demonstram entusiasmo em jogar, brincar e manusear objetos. Batllori (2006, p. 16) aponta que é esse "entusiasmo que eles demonstram por jogar que pode ser usado para adquirir novos conhecimentos, habilidades ou atitudes ou consolidar o que já possui". Seguindo em linha similar, Ribeiro (2008) fala dos jogos e também da modelagem como importantes ferramentas para o ensino da matemática e, consequentemente, da álgebra. Com relação aos jogos nas aulas de matemática, a autora evidencia sua significância em razão da capacidade para desenvolver o pensar matemático, a criatividade e a independência dos alunos. Já a modelagem torna-se importante em razão "de seu caráter de atividade de formulação e resolução de problemas para o desenvolvimento de ideias e conceitos matemáticos" (RIBEIRO, 2008, p. 12).

Nesta perspectiva de resolução de problemas, Kieran (2007) apresenta o resultado de pesquisas em que são aplicadas tarefas sequenciadas, chamadas pela autora de "tarefas numéricas estruturadas" (KEIRAN, 2007, p. 16). A respeito da forma como as perguntas são feitas aos alunos pelos professores durante as discussões em sala de aula, a autora concluiu que "se bem concebidas, podem incentivar os alunos para explicitar suas abordagens de solução de problemas e generalizações" (KEIRAN, 2007, p. 16). Salientando a importância da escolha de problemas a serem aplicados em sala de aula – estes precisam superar processos rotineiros –, ela conclui também que:

> (...) pode-se argumentar que sequências gerais são um motor e um aspecto integrante do desenvolvimento do pensamento algébrico e que a generalização tem o poder de elevar o pensamento dos alunos a partir de números aplicáveis, operações específicas e abordagens específicas de resolução de problemas para um nível mais alto que prefiguram variáveis, equações e métodos gerais de solução (KEIRAN, 2007, p. 22).

Reforçando a importância da resolução de problemas, Onuchic e Allevato (2011) destacam alguns pontos importantes dessa metodologia, entre eles, "o dar sentido (...) desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82), são afirmações que podem sugerir uma prática pedagógica que avance para superar as dificuldades de grande parte dos alunos quando aprendem conteúdos algébricos.

Lew (2004) cita a modelagem como um método fundamental no ensino da álgebra. Ele argumenta que este processo é utilizado para investigação e representação de situações complexas por meio de expressões, e permite solucionar problemas. Bassanezi (2010) indica que a modelagem como estratégia de ensino da matemática tem sido eficiente, e afirma que: "a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (BASSANEZI, 2010, p. 16).

Nessa linha, Ponte, Brocado e Oliveira (2003) entendem que a investigação matemática e a resolução de problemas são importantes atividades que se associam e que podem auxiliar os alunos no processo de ensino e aprendizagem da álgebra. Os autores citam quatro momentos para o desenvolvimento de investigações matemáticas, onde se percebe similaridade com a resolução de problemas: (1) Exploração e formulação de questões investigativas ou problemáticas; (2) Organização de dados e elaboração de conjecturas; (3) Realização de testes, refinamento e sistematização das conjecturas; e (4) Construção de justificativas, argumentações ou demonstrações, tendo em vista a validação dos resultados. Além disso, nesta associação da investigação matemática e resolução de problemas, os autores apontam para a importância dos procedimentos e representações matemáticas, auxiliando, assim, o aluno na "apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor" (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

3.2 Aprendizagem significativa

A BNCC (BRASIL, 2018) apresenta competências gerais que visam assegurar aos estudantes o desenvolvimento e a aprendizagem de conteúdo. A Competência é definida "como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (BRASIL, 2018 p. 8). Entre outros pontos importantes envolvendo as competências, o documento sugere que sejam valorizados e utilizados os conhecimentos históricos sociais e estimuladas a curiosidade, a investigação e a reflexão, de modo que novos conhecimentos sejam aprendidos de maneira significativa.

A aprendizagem significativa é definida por Ausubel (2003) como sendo o processo que permite que uma informação, ideia ou conceito recém-adquirido pelo sujeito se relacionem com um aspecto relevante de sua estrutura cognitiva[8].

Para que se concretize a aprendizagem significativa, o autor indica duas condições: a primeira é referente ao material de aprendizagem, que deve ser potencialmente significativo; e a segunda refere-se ao aluno, que deve ter predisposição para relacionar, de maneira não arbitrária e não literal, a nova informação àquelas pertencentes a uma estrutura de conhecimento específico, na qual existem os chamados subsunçores[9] e, dessa forma, modificar, ampliar ou complementar o conhecimento já existente.

Ausubel (2003) aponta que as variáveis da estrutura cognitiva – como a disponibilidade, a clareza, a estabilidade e a capacidade de discriminação das ideias relevantes – são reflexos daquilo que o aprendiz já sabe e que influenciam a aquisição e a retenção do conhecimento. Os chamados conhecimentos prévios são bastante estáveis e resistentes à mudança e diferenciam-se quanto à área e à sua natureza, pois, de acordo com Pozo (1998, p. 39), "alguns conhecimentos são mais conceituais e outros, mais procedimentais; uns mais gerais e outros, mais específicos etc.".

Moreira (2010) indica que o tema é utilizado em muitos trabalhos, mas, na prática, verifica-se uma aprendizagem mecânica, e não significativa, na maioria deles. A aprendizagem mecânica acontece, segundo Ausubel (2003), quando as relações se dão de maneira arbitrária e literal, ou seja, o indivíduo obtém a informação na forma memorizada e verbal, sem conexão com conhecimentos preexistentes; como efeito, ocorre pouca retenção do conhecimento na sua estrutura cognitiva. O conhecimento adquirido por memorização é algo relativamente isolado, discreto e, ademais, relaciona-se com as ideias preexistentes facultativamente, isto é, não é ancorado a algo significativo da estrutura cognitiva – o que deixa esse conhecimento suscetível ao esquecimento. Por sua vez, a situação em que as novas ideias são ancoradas em conceitos subsunçores facilita a compreensão e a apreensão do aluno até mesmo de novos conhecimentos correlatos, isto é, ocorre a retenção dos novos conhecimentos quando se identifica um processo

[8]A estrutura cognitiva pode ser definida como o conteúdo total e organizado das informações, ideias, fatos, dados, conceitos, procedimentos etc. que o sujeito possui a respeito de uma determinada área de conhecimento.
[9]Conceitos subsunçores são aqueles existentes na estrutura cognitiva do aprendiz e que, sendo relevantes e estáveis, podem favorecer a aprendizagem significativa.

de conexão entre os significados recém-adquiridos com os conhecimentos prévios, a partir de um material potencialmente significativo que, em antagonismo à aprendizagem mecânica, é colocado por meio de uma relação não arbitrária e não literal.

Quando se fala em aprendizagem significativa, é importante discorrer sobre as estratégias para que de fato ela ocorra. Segundo Ausubel (2003), as estratégias de aprendizagem percorrem um caminho que vai da aprendizagem por recepção até a aprendizagem por descoberta.

Sobre a aprendizagem por recepção, Ausubel (2003) indica que ela acontece, principalmente, quando os novos significados são adquiridos com base na apresentação de um material que seja potencialmente significativo e que esteja conectado com relevantes subsunçores de cada indivíduo. Para que esse tipo de estratégia não produza uma aprendizagem memorizada e nem passiva, ele deve atender a alguns princípios a serem observados pelo professor, como: (1) uma análise cognitiva, que deve ser realizada para constatação de quais são os aspectos mais relevantes presentes na estrutura cognitiva do aprendiz, para que o novo material seja potencialmente significativo; (2) reconhecimento de semelhanças e de diferenças, e também a resolução de contradições reais ou aparentes entre as ideias novas e as já enraizadas; e (3) reformulação do material em termos de antecedentes intelectuais particulares e do vocabulário do aprendiz.

No que lhe concerne, na aprendizagem por descoberta, o aluno precisa descobrir sobre o conteúdo a ser estudado, apoiado na criação de proposições que representam soluções para os problemas criados ou nas etapas sucessivas para a resolução dos mesmos. Mas, nem por isso, salienta o autor, essa estratégia não se torna necessariamente ativa ou significativa, já que precisa ser adaptada às condições da aprendizagem significativa.

Ausubel (2003) reforça que, em ambas as estratégias, o professor deve estimular em seus alunos a ativação dos conhecimentos prévios, ou seja, conscientizá-los acerca das próprias ideias e levá-los a estabelecer relações entre os conhecimentos prévios e a lógica conceitual do conteúdo e, assim, proporcionar aos estudantes condições para darem sentido às tarefas que executam.

Para o desenvolvimento da aprendizagem significativa, seja ela por recepção ou por descoberta, um vocabulário específico e adequado aos alunos deve ser introduzido progressivamente. Sobre isso, Ausubel (2003) esclarece:

> A linguagem é um importante facilitador da aprendizagem significativa por recepção e pela descoberta. Aumentando-se a manipulação de conceitos e de proposições, através das propriedades representacionais das palavras, e aperfeiçoando

> compreensões subverbais emergentes na aprendizagem por recepção e pela descoberta significativas, clarificam-se tais significados e tornam-se mais precisos e transferíveis. (AUSUBEL, 2003, p. 5).

Nessa perspectiva, a linguagem não exerce apenas o papel de comunicação, pois, ela influencia a natureza e o produto dos processos cognitivos envolvidos na aquisição de novas ideias abstratas. Sendo assim, a linguagem do professor é um fator essencial no processo de aprendizagem significativa de qualquer área (MOREIRA, 2010).

3.2.1 Aprendizagem significativa de procedimentos

A teoria de Ausubel (2003) se aplica a todos os tipos de conteúdo, sejam eles conceituais, atitudinais ou procedimentais. Sobre as diferenças entre esses conceitos, Pozo e Gómez Crespo (2009) apresenta o Quadro 5.

Quadro 5 - Composição dos conteúdos no currículo

Tipos de conteúdos	**Mais específicos**	**↔**	**Mais gerais**
Conceituais	Fatos/Dados	Conceitos	Princípios
Procedimentais	Técnicas		Estratégias
Atitudinais	Atitudes	Normas	Valores

Fonte: POZO; GÓMEZ CRESPO (2009, p. 28).

Conforme os autores, para o desenvolvimento de habilidades cognitivas, experimentais e de resolução de problemas, é fundamental que os conteúdos procedimentais cumpram um papel de destaque no desenvolvimento dessas habilidades. Espera-se que os alunos, na medida do possível, entendam sua responsabilidade no próprio processo de construção e posse do conhecimento. Para tanto, é necessário que as atividades sejam desenvolvidas de forma que sejam acionados os conhecimentos prévios dos alunos. Assim sendo, busca-se que o aluno aprenda os procedimentos de forma compreensiva, intrínseca, útil e permanente.

Pozo (2008, p. 77) define que “os procedimentos implicam sequências de habilidades ou destrezas mais complexas e encadeadas que um simples hábito de conduta” e que estão relacionados à aquisição e ao progresso das habilidades, destrezas ou aptidões em desempenhar ações concretas.

O autor sugere que na aprendizagem de técnicas ou sequências – que são execuções realizadas costumeiramente de modo a obter o mesmo objetivo e muito eficazes quando nos deparamos com exercícios, tarefas rotineiras, sempre iguais a si mesmas – não basta compreender as técnicas, mas é imprescindível ser capaz de adaptá-las em meio à ação de moldar às novas premissas. As técnicas precisam ser seguidas de uma aprendizagem de estratégias. Segundo o autor, elas podem ser "*estratégias* para planejar, tomar decisões e controlar a aplicação das técnicas para adaptá-las às necessidades específicas de cada tarefa" (POZO, 2008, p. 78). O autor salienta a importância da reconstrução da própria prática para o desenvolvimento das estratégias, que é resultado de reflexão e conscientização acerca do que fazemos e como fazemos. Por fim, Pozo (2008) apresenta *estratégias de aprendizagem*, sendo outro tipo específico de aprendizagem que se refere ao manejo pessoal do processo de aprendizagem: ao ter o domínio do conhecimento estratégico, o aluno passa a controlar e a ter melhores possibilidades ao se deparar com novas situações e, bem como, à mudança de rumos diante de reveses.

Seguindo em linha similar, Coll e Valls (1998) destacam as técnicas e as estratégias. A aprendizagem de técnicas refere-se a encadeamentos complexos que requerem uma série de treinamentos explícitos baseados numa aprendizagem associativa, por repetição: esta resulta em uma automatização da cadeia de ações, fazendo com que a própria ação seja mais rápida e menos dispendiosa em matéria de recursos cognitivos. Já a aprendizagem de estratégias implica em reconstruir a própria prática como produto de reflexão e de tomada de consciência sobre o que fazer e como fazer; isto significa a aquisição do controle da aplicação das técnicas, para adaptá-las às necessidades específicas de cada tarefa.

Ao considerar que a aprendizagem de procedimentos se fortalece com a prática, Coll e Valls (1998) realçam três funções que determinam a essência da atividade docente: (a) a exposição; (b) a prática guiada; e (c) a prática autônoma ou independente.

Na exposição, o professor executa a atividade e solicita aos alunos a reprodução de modelos, verbalizando o pensamento envolvido naquela técnica a ser aprendida. Já a prática guiada é o momento que requer do aluno a atenção, a memória e assimilação das etapas a serem realizadas, e também a busca de significados. Do professor, exige-se clareza na explicação da execução, dos elementos da ação, da disposição a ser seguida e da natureza do procedimento. Nesta modalidade de ensino, o professor precisa referir-se às condições da execução, aos eventuais erros e obstáculos, indicar pistas pertinentes para o aluno prosseguir, encorajando-o a analisar e refletir a respeito dos métodos aprendidos. Finalmente, o professor leva os alunos a refletir sobre suas ações, com o objetivo de favorecer o controle das atuações e a condução de maneira autônoma e independente.

Obviamente, deverá o professor determinar o momento de apresentar os passos do procedimento, de modo que os alunos possam segui-lo, e decidir quando gerar situações em que os próprios alunos tenham autonomia para traçar as ações.

Considera-se, no que se refere à aprendizagem de procedimentos, que os alunos devam ter autonomia ao desempenhá-los, ou seja, que eles não sejam dependentes de diretrizes, mas que possam replicar, de modo autônomo, os conhecimentos adquiridos em novas situações e na resolução de problemas. Em linha similar, Echeverria e Pozo (1998) indicam que, ao final da educação básica, o aluno deve ter desenvolvido habilidades de estruturar e desenvolver estratégias pessoais, no sentido de identificar e resolver problemas por meio de práticas de pensamento de forma autônoma.

Para tanto, podem ser tomadas as indicações de Ausubel (2003): a aprendizagem significativa tem como um dos seus pilares o material a ser trabalhado, isto é, para que a aprendizagem significativa, de fato, ocorra, é necessário, ao lado da disposição do aprendiz, que o material seja potencialmente significativo.

Ausubel (2003) sugere que, para que o material de aprendizagem (por exemplo, uma sequência didática) seja potencialmente significativo, é fundamental que tenha suas partes estruturadas de forma lógica, e não postas de forma arbitrária. Este material precisa mobilizar ideias âncoras pertinentes na estrutura cognitiva do aprendiz. É imprescindível que este material instigue os conhecimentos prévios e, dessa forma, favoreça uma interação entre estes e os recém-adquiridos. O material deve também permitir que sejam reconhecidas as diferenças entre as ideias já enraizadas (diferenciação progressiva), para que estas possam ser relacionadas com as novas (reconciliação integradora) e, para isso, a linguagem deve estar adequada ao vocabulário do aluno.

Nesta perspectiva, optou-se por elaborar um material potencialmente significativo, com foco na aprendizagem dos procedimentos algébricos, com base no conhecimento de estratégias aritméticas empregadas na resolução de problemas. Echeverria e Pozo (1998) apontam que a resolução de problemas exige uma sequência de etapas conforme o plano desenvolvido para se alcançar uma meta. Por isso, a opção de utilizar problemas aritméticos, já que se trata de um conteúdo escolar, já aprendido em anos anteriores e com características de conhecimento procedimental.

3.3 Resolução de problemas

Para entender a importância da resolução de problemas no ensino e aprendizagem da matemática, convém verificar as definições para problema.

Segundo Van de Walle (2001), pode-se definir um problema como qualquer dever ou atividade para a qual não se tem estratégias, ou normas estabelecidas, ou já apreendidas, nem a ideia de que se tenha um método específico para chegar à solução correta. Mayer (1992) define problema como um processo que, diante da existência de uma situação sem solução aparente, é necessário que o indivíduo busque competências para compreender tal problema, apoiando-se em decisões pertinentes quanto à aplicação de mecanismos para a sua resolução.

Buscando sintetizar as fases de solução de problemas, amplamente discutidas por estudiosos da psicologia, Brito (2006) indicou algumas etapas que são reproduzidas a seguir, com comentários de Souza, Santos e Viana (2013):

> a) compreensão do texto: habilidade verbal que permite ler e compreender o problema para entender a natureza matemática do mesmo; b) representação do problema: imagem mental que se forma a partir do momento em que o cérebro recebe uma informação, organiza e a transforma em uma representação coerente (codificação e retenção); c) categorização do problema: em que o mesmo pode ser classificado em um determinado tipo, ou relativo a um determinado conteúdo; d) estimativa de solução: quando, por exemplo, é possível apresentar um resultado numérico com valor aproximado ao da solução correta; e) planejamento de solução: em que podem ser planejadas as estratégias, técnicas e/ou algoritmos que serão empregados; f) monitoramento do procedimento: que pode conduzir a uma mudança nos objetivos ou nas estratégias; g) monitoramento do resultado: que pode ser entendido como validação dos resultados e h) resposta: que pode levar o aluno a uma nova leitura da proposição do problema e compreensão do texto (SOUZA; SANTOS; VIANA, 2013, p. 5).

Para Onuchic e Allevato (2011), o ensino–aprendizagem realizado por Resolução de Problemas exige novas posturas do professor e dos alunos. Por parte do professor, exige-se bom planejamento das aulas e uma escolha de métodos apropriados ao conteúdo trabalhado. Os alunos, por sua vez, precisam ser o centro deste processo, isto é, necessitam entender sua importância e responsabilidade com a aprendizagem que desejam adquirir.

Para as autoras, assim como para Van de Walle (2001), há boas razões para se trabalhar com esta metodologia:

> • Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar sentido; • Resolução de problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos; • Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam; • Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática; • Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem

> voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios pensamentos; • A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos. (VAN DE WALLE, 2001, p. 82).

Onuchic e Allevato (2011), afirmam que não existe forma rígida para se trabalhar com Resolução de Problemas, mas sugerem algumas importantes etapas: formar grupos e entregar uma atividade; registrar os resultados na lousa; realizar uma plenária; analisar os resultados; buscar um consenso e fazer a formalização.

Na presente pesquisa, apesar de a resolução de problemas não figurar como uma metodologia adotada na etapa específica de ensino dos procedimentos para resolver os sistemas de primeiro grau, alguns aspectos teóricos aqui apontados devem ser utilizados para analisar as estratégias empregadas pelos participantes. Os alunos foram convidados a empregar procedimentos aritméticos próprios para resolver os problemas constantes na primeira atividade da sequência didática e pretende-se analisar como os alunos avançaram nas diversas etapas do processo.

4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na literatura, é possível encontrar diversas pesquisas[10] direcionadas ao processo de ensino e aprendizagem da álgebra de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Para a seleção dos trabalhos apresentados neste capítulo, foram estabelecidas três expressões-chaves: sistemas de equações de primeiro grau, equações de primeiro grau e pensamento algébrico, pois se entendeu que eles representam o tema desta pesquisa.

No período de leitura e seleção dos trabalhos a serem descritos aqui, constatou-se que grande parte deles se orientam por meio de uma sequência didática para estruturar suas atividades. Esses trabalhos, em sua grande maioria, buscam a exploração de padrões e regularidades, almejando promover a capacidade de generalizar e compreender a linguagem algébrica.

Para uma melhor identificação das pesquisas a serem descritas neste capítulo, elas estão dispostas no Quadro 6. Este quadro se inicia com o trabalho que amparou a elaboração dos principais problemas utilizados na presente pesquisa. Os trabalhos seguem em ordem de publicação. Como foram encontrados poucos trabalhos publicados nos últimos cinco anos, optou-se por alargar o período de busca, de modo a identificar os aspectos que se assemelham ao trabalho apresentado.

Quadro 6 - Identificação dos trabalhos que compõem a revisão bibliográfica dessa pesquisa

Título da Pesquisa	Autor	Ano
Representações na aprendizagem de sistemas de equações	Nobre, S; et al.	2011
O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico	Branco, N. C. V.	2008
Uma abordagem prática no estudo de sistemas de equações lineares para o ensino fundamental	Souza, E. T.	2009
O ensino de sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas no oitavo ano do ensino fundamental através de situação-problema.	Antoniassi, K. R.	2013
Introdução ao estudo da álgebra no ensino fundamental	Pinheiro, P. A.	2013
Uma abordagem de sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.	Silva, M. R. P.	2017

[10]A revisão bibliográfica foi feita a partir do Google Acadêmico e de repositórios institucionais de programas de mestrado em ensino de matemática.

Software Matlab no ensino-aprendizagem da matemática no 8º ano do fundamental: uma análise analítica e geométrica no ensino de expressões algébricas e sistemas de equações do 1º grau	Silva, R. R; et al.	2017
O ensino de funções no 9º ano: construindo significados para função a partir de generalizações	Marques, A. P.	2019

Fonte: Elaborado pelo pesquisador.

Evidencia-se, primeiramente, o trabalho realizado por Nobre, Amado e Ponte (2011), já que a sequência didática do presente estudo se baseou nos problemas propostos por estes autores. A sua pesquisa tinha como objetivos: i) verificar se os alunos, diante de uma tarefa envolvendo sistemas de equações do 1º grau, recorreriam ou não ao simbolismo; e ii) analisar quais os tipos de relações entre os dados poderiam ser realizados por eles, e iii) buscar entender como esta tarefa seria capaz de dar apoio à aprendizagem das técnicas algébricas, favorecendo o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Para os alunos participantes, do 9.º ano do Ensino Fundamental, foram apresentados quatro situações-problemas com gradativo grau de dificuldade. Os alunos foram divididos em duplas, para a resolução das tarefas e toda aula foi transcrita. Deste modo, os pesquisadores puderam analisar não somente as resoluções, mas também as falas dos alunos e da professora. Eles concluíram que quase todos os alunos atingiram o resultado correto dos problemas e que grande parte se valeu da representação aritmética, "conjugando a linguagem natural com o modo de representação pictórico" (NOBRE; AMADO; PONTE, 2011, p. 18). Eles conseguiram organizar relações corretas de dependência, de forma que alcançaram as soluções.

A pesquisa de Branco (2008), aplicada aos alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental, consistia em entender de que modo o estudo de padrões e regularidades poderia colaborar para desenvolver e mobilizar o pensamento algébrico. Para sua proposta pedagógica, a autora se ampara principalmente em Kaput (1999), Kieran (2004) e Usiskin (1995).

Foram realizadas dez atividades que, divididas em 35 aulas, foram executadas pelos alunos em grupos, duplas e também individualmente. As quatro primeiras tarefas relacionavam-se, fundamentalmente, à análise de padrões e observação de regularidade. Nas tarefas 5 e 6, além de seguir a mesma ideia das tarefas anteriores, os alunos eram instigados a verificar a existência de várias expressões algébricas que representassem uma mesma relação e, consequentemente, reconhecer expressões algébricas equivalentes. Nas tarefas 7 e 8, a autora inicia o estudo das equações. Na primeira delas, amparando-se em expressões aritméticas, busca-se dar o sentido de equivalência ao sinal de igual. Já na segunda, utilizando uma balança, os alunos precisavam traduzir, com suas próprias palavras, situações referentes à balança e, posteriormente, representar essas situações em linguagem algébrica. Já nas tarefas 9 e 10, são apresentados problemas que tinham como objetivo a correta interpretação por parte dos alunos e o emprego adequado de estratégias de resolução. Os problemas propostos tiveram gradativo grau de complexidade, da tarefa 9 para a 10.

Para além do significativo crescimento profissional da autora, como a própria conclui, ela faz referência à relação de cumplicidade e amizade estabelecida com os alunos. No que tange às atividades, ela conclui acerca da importância das primeiras tarefas, em que os alunos puderam se familiarizar com as letras, promovendo a compreensão das mesmas. Com relação às atividades de resolução de problemas, a autora realiza uma interessante análise, transcrita pelo pesquisador na íntegra:

> Quando os alunos conseguiam resolver os problemas usando estratégias aritméticas, eram capazes em seguida de os representar por uma equação e resolvê-la depois estabelecendo uma correspondência entre as operações aritméticas e as operações relativas à resolução formal dessa equação. (BRANCO, 2008, p. 188).

Diferentemente do que acontecia em atividades aplicadas em outros contextos, a autora salienta o empenho e envolvimento dos alunos durante as tarefas concernentes à sua pesquisa. Dessa forma, ela conclui que “esta proposta contribuiu para o desenvolvimento, nos alunos, da capacidade de generalização, da compreensão da letra como número generalizado e como incógnita e das expressões” (BRANCO, 2008, p. 189).

Souza (2009) desenvolveu sua pesquisa no âmbito do programa de desenvolvimento educacional da Universidade Estadual do Centro-Oeste com duas turmas do sétimo ano do Ensino Fundamental. O trabalho da autora está baseado nos princípios de Polya (1995) a respeito da resolução de problemas e na teoria sociocultural. Após a aplicação de uma avaliação diagnóstica em que se verificava: a capacidade de interpretação de problemas que envolviam operações básicas da matemática, o desenvolvimento do pensamento lógico matemático, a compreensão de números inteiros, o cálculo do valor desconhecido numa Equação do 1º Grau, a tradução para a linguagem matemática, a resolução de problemas que envolviam equações do 1º grau e a localização de pontos no Referencial Cartesiano, a professora avaliou que as turmas possuíam conhecimentos distintos e desenvolveu um trabalho específico para aqueles alunos que desconheciam equações do 1º grau.

Enfrentando ainda dificuldades relativas à indisciplina e à falta de hábitos de estudo, e entendendo que o ensino da matemática na sala de aula deve estar vinculado à realidade social para se construir seus conceitos e suas significações, a professora utilizou problemas ligados à realidade dos alunos: ela começa a substituir os objetos da situação-problema por uma linguagem simbólica (x , y). Souza (2009) complementou as atividades levando os alunos ao laboratório de informática e utilizando o software "régua e compasso".

Foi possível perceber a mudança de comportamento e o interesse dos alunos, que passaram a questionar e a equacionar os problemas, a encontrar soluções e até a construir gráficos pelo software. Foram aplicadas atividades como brincadeira desafiadora (caça aos tesouros escondidos) e fatos da realidade (parque de diversões), utilizadas para introduzir o estudo de Sistemas de Equações de 1º Grau, de forma algébrica e geométrica. A autora considerou os resultados satisfatórios, ponderando que se tratou apenas de um início de aplicação de uma nova metodologia, que a aplicação desta não é suficiente para transformar a realidade completamente, mas que é uma iniciativa indispensável e imprescindível.

Pensando na utilização de situação-problema no ensino de sistemas de equações de primeiro grau, Antoniassi (2013), incomodado com as dificuldades dos alunos em trabalhar a matemática, em específico o sistema de equações utilizando-se de situação-problema, baseou sua pesquisa na metodologia da Engenharia Didática, segundo a concepção de Carneiro (2005). Já o entendimento de resolução de problemas, ele busca em Smole, Diniz e Cândido (2000), Onuchic (1999) e Polya (1995). Dessa forma, ele propõe a utilização da resolução de situações-problemas, e para isso, se vale de algumas etapas. Primeiramente, Antoniassi (2013) aplicou um questionário aos alunos, acerca do que pensam sobre o estudo da matemática. Em seguida, o autor propõe uma sequência didática, em que os primeiros exercícios não eram contextualizados, seguidos de situações-problema, a partir dos quais, foram identificadas as dificuldades na leitura, interpretação e compreensão dos enunciados. Finalizou-se com as representações gráficas valendo-se do material pedagógico Prancha de Gráficos[11] e o software Geogebra.

A pesquisa do autor foi realizada com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental. O autor conclui sua pesquisa defendendo a metodologia de resolução de problemas e a construção de uma proposta didático-pedagógica para o ensino e aprendizagem de matemática. Conclui também que as intervenções pontuais do professor durante a aplicação foram de grande importância, pois foi possível identificar alguns erros que, se fossem ignorados, levariam ao resultado errado. O autor ainda constatou que na avaliação bimestral e no simulado, aplicados após o trabalho, os alunos tiveram aumento considerável no percentual de acerto, o que ajudou a corroborar suas conclusões.

[11]Prancha de gráficos é um material que representa o plano cartesiano e é impresso em prancha de EVA coberta de PVC, 3 retas em acetato e 1 parábola.

Destaca-se também a pesquisa de Pinheiro (2013), que, em suas aulas para alunos de 9.º ano da rede pública de Cravinhos/SP, percebia a defasagem nos conhecimentos algébricos e identificava pouco significado atribuído ao conteúdo. Diante deste cenário, idealizou um trabalho para o 8.º ano, tendo como objetivo levantar as dificuldades apresentadas pelos alunos, discutir possíveis causas, e assim elaborar uma sequência didática constituída, inicialmente, por um texto histórico sobre o tema, apresentado e discutido com os alunos, utilizando recursos audiovisuais. A seguir, recorrendo à geometria, a autora introduziu a ideia da letra como incógnita e como variável, iniciando a transição da aritmética para a álgebra. A definição de equações e a ideia de incógnita foram introduzidas para resolver cálculos simples, por tentativas, e também recorrendo ao material concreto. Por fim, foram apresentados vários problemas que envolviam generalizações de áreas e perímetros de alguns quadriláteros.

A autora afirma que se baseou em suas reflexões enquanto docente, e como era um trabalho que focava na fase introdutória do conhecimento algébrico, principiou o tema com um texto sobre a história da matemática. Ela buscou apoio em autores que versavam sobre os conceitos de aritmética e álgebra, e sobre os erros dos alunos, como Booth (1995), Teles (2004) e Vailati e Pacheco (2009), citados por Pinheiro (2013). A pesquisadora concluiu que iniciar o conteúdo com um texto histórico despertou o interesse dos alunos para o prosseguimento das atividades. O resultado foi considerado positivo, porém, ressaltou-se que a indisciplina e o fato de os alunos não terem a prática de estudos em casa foram fundamentais para que o resultado não fosse mais satisfatório.

Em sua pesquisa, Silva (2017) recorre à sequência didática para estruturar seu trabalho. Em sua trajetória como docente, ele sempre identificou grandes dificuldades dos alunos em assimilar o conteúdo de sistema de equações com duas incógnitas do primeiro grau. Diante disso, seu trabalho foi dividido em duas partes: na primeira, ele propôs uma análise do material didático da Secretaria Municipal do Rio de Janeiro; e, na segunda, sugeriu uma proposta de ensino daquele conteúdo. Na forma de uma sequência didática, a proposta buscava privilegiar o conhecimento pré-existente do aluno e também auxiliar os professores quanto à sua prática na sala de aula. Para a primeira parte do objetivo, o autor se apoia em Ausubel (2003); já na segunda parte, ele recorre a Booth (1995) e Polya (1995).

O trabalho foi aplicado a alunos do 7.º ano do Ensino Fundamental do município do Rio de Janeiro. Após a análise do material didático, a sequência didática foi composta pelas seguintes tarefas: 1 – Localização no plano cartesiano – Par Ordenado; 2 – Introduzindo as equações de 1º grau com duas incógnitas e sua representação no plano cartesiano, utilizando situações-problemas e o software Geogebra; 3 – Definindo Sistema; e 4 – Resolvendo o sistema, por meio de problemas contextualizados, utilizando-se de tentativa e erro, pensamento lógico e cálculos e, por fim, pelo processo algébrico.

Na análise que ele desenvolveu acerca do material didático disponível, o autor constatou que o mesmo era ultrapassado e que não preparava o aluno para a álgebra do 8.º ano. Com relação à sequência proposta, o autor identificou que as tarefas aproximaram o assunto abordado à realidade do aluno e que as situações-problemas deixaram os alunos mais envolvidos e interessados em resolvê-las, favorecendo o desenvolvimento e a compreensão do conteúdo de sistema de equações, em considerável parte dos alunos.

Ainda no sentido de conhecer e buscar estudos para o ensino da álgebra, é apresentado, a seguir, o trabalho de Silva et al. (2017), no qual os autores buscaram uma forma diferenciada na tecnologia para assimilação do conhecimento e desenvolvimento de estratégias de resolução de sistemas lineares de 1º grau, para alunos do 8.º ano. Dessa forma, eles analisaram o software Matlab, que é uma ferramenta de fácil manuseio e linguagem simples, e que desenvolve e formula rapidamente problemas analíticos, como em expressões algébricas e sistemas lineares de 1º grau.

O trabalho teve como participantes o professor e alunos do 7.º período do curso de graduação em Matemática, da Faculdade do Maranhão – FACAM, e foi executado com base em um planejamento coletivo, isto é, entre professor e alunos. Os autores se basearam em pesquisas bibliográficas, buscando subsídios para a formalização da arquitetura da proposta de trabalho. A definição do tema proposto, metodologia e a aplicação no Matlab foram sempre realizadas em conjunto, planejadas em encontros entre as partes, de modo que cada um tinha uma tarefa.

Após as análises computacionais das soluções encontradas graficamente de resolução de expressões algébricas e sistemas lineares de 1º grau, os autores puderam constatar o desenvolvimento desses conteúdos de forma diferenciada para os alunos. Eles concluíram que as análises virtuais permitiram aos alunos a compreensão e desmistificação dos conceitos dos livros didáticos, constituindo novas ideias e hipóteses.

Ressalta-se também a pesquisa de Marques (2019), que desenvolveu o trabalho com base em sua trajetória como estudante e enquanto professora da Educação Básica. Especificamente nos conteúdos algébricos, apesar de utilizar várias metodologias de ensino, ela percebeu que persistiam as dificuldades de compreensão, já que os alunos pareciam não atribuir significado ao conteúdo. Diante deste cenário, a autora questionou se era possível construir o conceito de função com base em tarefas envolvendo sequências e problemas contextualizados com foco na generalização de padrões. Para a ideia e o conceito das relações funcionais e da generalização, a autora recorre a Carraher (2000, 2006 e 2008), Kieran (2004), Blanton e Kaput (2004), Schlieman et al. (2001) e Carraher e Schliemann (2008), citados por Marques (2019).

O trabalho foi desenvolvido com turmas de 9.º ano de uma escola pública, das quais a autora era professora titular. O trabalho foi dividido em duas atividades, compostas por diferentes tarefas, individuais e em grupos. Em uma delas, denominada de "investigando sequências", é apresentada a ideia de sequências e padrões. Já a segunda atividade, "Introduzindo Função a partir de generalizações", teve o objetivo de colaborar com a construção do conceito de função, por meio de sequências, padrões e situações-problema, buscando o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A autora avalia que ela poderia ter elaborado uma quantidade maior de tarefas e que seria interessante realizar uma retomada de algumas tarefas e assim promover novas discussões, percepções e conclusões dos alunos. Apesar disso, as atividades geraram discussões relevantes, não somente relacionadas diretamente ao conteúdo, mas sim, para situações de vida extraescolar; houve grande participação dos alunos nas tarefas, incluindo aqueles que apresentavam fraco desempenho até então. Notou-se também mudança de postura, aumento da autoconfiança e, consequentemente, melhores resultados a partir desse trabalho.

Assim como dito na introdução do capítulo, com a apresentação destes oito trabalhos, procurou-se verificar e conhecer as diferentes possibilidades para o desenvolvimento e aprendizagem do pensamento algébrico.

O Quadro 7 apresenta um resumo dos trabalhos descritos.

Quadro 7 - Resumo dos trabalhos da revisão bibliográfica

Pesquisa	**Qual conteúdo?**	**Faz diagnóstico?**	**Apresenta problemas?**	**Apresenta outros recursos?**	**Quais conclusões?**
1	Sistemas	Não	Sim, no início, problemas com representações pictóricas	Não	Solução correta dos problemas com representação aritmética, organização das relações corretas de dependência
2	Generalização de padrões, expressões e equações1º grau	Não	Sim, articulando os conhecimentos aritméticos e algébricos	Não	Motivação, compreensão da letra como número generalizado e como incógnita, relação entre soluções aritméticas e algébricas
3	Equações 1º grau	Sim	Sim, utilizou problemas ligados à realidade dos alunos, substituindo objetos por	Sim, software para gráficos	Aprenderam a questionar, equacionar e encontrar soluções para os problemas

			linguagem algébrica		
4	Sistemas	Sim	Sim, com intervenção pontuais do professor	Prancha de gráficos	Melhoria no desempenho na avaliação bimestral
5	Geometria e equações	Não	Sim. Inseriu problemas envolvendo a Geometria para realizar a transição da aritmética para a álgebra	Texto histórico	A utilização do texto histórico permitiu o interesse dos alunos para o prosseguimento das atividades. O resultado foi considerado positivo, porém, a indisciplina e a falta da prática de estudo em casa, foram empecilhos para o impedimento de um resultado melhor
6	Equações e Sistemas	Não	Sim. Apresenta problemas contextualizados, utilizando-se de tentativa e erro, pensamento lógico e cálculos, até chegar ao processo algébrico	Material didático da Sec. Municipal do RJ e o Software Geogebra	A análise do material didático considerou-o como ultrapassado e este não preparava o aluno para a álgebra do 8º ano. A proposta didática envolveu os alunos, favorecendo o desenvolvimento e a compreensão do conteúdo de sistema de equações, em considerável parte dos alunos
7	Sistemas	Não	Sim. Problemas computacionais envolvendo expressões algébricas e sistemas	Matlab	Compreensão e desmistificação dos conceitos dos livros didáticos, constituindo novas ideias e hipóteses
8	Função - Generalização de padrões e sequências	Não	Sim. Problemas contextualizados, introduzindo o conceito de funções, a partir de generalização de padrões e sequências	Não	Grande participação dos alunos, mudança de postura, aumento da autoconfiança e consequentemente melhores resultados a partir do trabalho, incluindo alunos que, até então tinham desempenho fraco

Fonte: Elaborado pelo pesquisador.

Conclui-se que a apresentação de problemas parece ser um procedimento útil para aprendizagem de equações, sistemas e, até mesmo, no desenvolvimento do conceito de funções. Verifica-se a preocupação em articular o pensamento aritmético com o algébrico, buscando generalizações de padrões e sequências, mediante problemas contextualizados e ligados à realidade dos alunos. Em alguns casos, a pesquisa utiliza-se do diagnóstico que, para os autores, favoreceram os resultados positivos. Nota-se, em todos os trabalhos, a importância do planejamento e o cuidado com as atividades propostas, favorecendo não somente o desenvolvimento do pensamento algébrico, mas também a motivação, o interesse e a mudança de comportamento, contribuindo para a aprendizagem.

Desse modo, o planejamento da sequência didática aqui apresentada partiu da resolução de problemas aritméticos, tendo como hipótese que as estratégias empregadas pelos alunos poderiam servir como ancoradouro para a aprendizagem de uma estratégia algébrica para resolver sistemas de equações do 1º grau.

5 A PESQUISA

Quatro são as seções que compreendem este capítulo. Na primeira delas, são apresentados o objetivo geral e os específicos; a segunda seção expressa o tipo de pesquisa que mais se identifica com este estudo. Na terceira seção é exposta, brevemente, a característica do ambiente e dos participantes do presente trabalho. Por fim, a quarta seção retrata o contexto geral da condução da pesquisa por parte deste pesquisador, isto é, a aplicação do Piloto e, depois, a aplicação definitiva.

5.1 Objetivos

Esta pesquisa tem por objetivo geral analisar uma proposta didática para o conteúdo Sistema de Equações de 1º grau, direcionada a alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, com base na resolução de problemas.

Especificamente, pretende-se:

a) Analisar a potencialidade significativa do material; e

b) Analisar aspectos do desenvolvimento do pensamento algébrico na aprendizagem de uma estratégia algébrica a partir de estratégias aritméticas de resolução de problemas.

A análise da potencialidade significativa do material está embasada em Ausubel (2003) e em Coll e Valls (1998) e segue os itens de análise: (i) a estrutura lógica de organização das atividades; (ii) os conhecimentos prévios evidenciados na resolução de problemas e as relações com a estratégia aprendida; e (iii) a atividade docente na aprendizagem de procedimentos.

Já a análise dos aspectos do desenvolvimento do pensamento algébrico consistirá na identificação de: (i) as dimensões da álgebra (USISKIN, 1995); e (ii) as ações de geração e de transformação (KIERAN, 2004) evidenciáveis nas atividades, nos registros dos alunos e nos diálogos promovidos.

5.2 Tipologia da pesquisa

Carneiro (2008), ao se referir à "pesquisa do professor", busca diferenciá-la, em parte, da pesquisa científica. Enquanto a segunda tem o compromisso e a preocupação em autenticar seus resultados diante de uma comunidade científica, a primeira se apoia na compreensão da realidade, visando modificá-la, na busca pela evolução das práticas pedagógicas. Na perspectiva de Fiorentini e Lorenzato (2006), a ação investigadora realizada pelo professor em suas comunidades desenvolve e aprimora os conhecimentos e práticas docentes, auxiliando seu crescimento profissional e refletindo em novos modelos do ensinar e aprender.

Neste sentido, este pesquisador identifica semelhança da presente investigação com os estudos dos autores supracitados, já que este trabalho é proveniente de suas aflições como educador, resultando em uma proposta de uma nova conduta pedagógica, apoiada em uma pergunta orientadora, uma revisão bibliográfica e em uma teoria que permita analisar a prática. Diante dessa nova conduta, é possível analisar os resultados e chegar às considerações finais.

Acrescentam-se as ideias de Lüdke (2001), que trata da relevância da pesquisa no processo de desenvolvimento profissional do professor. Assim, esta investigação adota uma perspectiva qualitativa e descritiva, já que o presente trabalho tem o cuidado de identificar e descrever situações e comportamentos dos alunos em sala de aula, diante de uma prática um tanto diferente da qual eles estavam acostumados.

5.3 Campo de pesquisa e participantes

Toda a pesquisa foi realizada em uma escola estadual da cidade de Uberlândia/MG. Essa escola não tem um perfil de comunidade definido. A escola recebe alunos de bairros e realidades distintas e possui cerca de 1.000 alunos.

Trata-se de uma escola centenária e possui aproximadamente 20 salas de aulas, conta com quadra poliesportiva, laboratório de informática, matemática, história, química e uma sala de vídeo.

A sequência didática foi aplicada aos alunos do oitavo ano, em sua maioria, de baixa renda. Muitos possuem como principal alimentação do dia o lanche da escola. A turma possui alunos já fora da faixa etária para o ano em questão, o que a torna ainda mais heterogênea quanto a domínio de conteúdos e ao interesse na aprendizagem.

5.4 Contexto das aulas e procedimentos

Inicialmente, foi aplicado um piloto em uma escola da rede municipal da mesma cidade. A decisão de realizar este piloto foi na intenção de aprimorar e verificar eventuais falhas nas atividades que integravam a sequência, seja no conteúdo das questões, seja na forma trabalhada com os alunos. Neste piloto, o professor pôde, por exemplo, ajustar o espaço deixado na folha para os alunos desenvolverem os cálculos em cada situação-problema, pois, se verificou ser insuficiente para alguns alunos. Na atividade 6, em que havia cinco exercícios, o professor observou a necessidade de incluir mais dois e resolvê-los previamente na lousa, explicando os mesmos, já que seria a primeira atividade que eles realizariam sem imagens.

O resultado deste piloto foi satisfatório, os alunos se envolveram efetivamente: até mesmo aqueles alunos desinteressados nas demais aulas demonstraram estar motivados em todas as atividades. A preparação deste professor na condução da aplicação desta sequência e os ajustes nas atividades foram de grande relevância para a fase adiante.

Já na fase de aplicação definitiva – que será analisada neste trabalho –, o professor, já familiarizado com as atividades e com alguma noção das possíveis reações dos alunos, sentiu mais segurança no desenvolvimento da proposta didática e tornou o trabalho mais produtivo.

Os alunos foram muito receptivos com as atividades e se envolveram de forma satisfatória, o que facilitou o desenvolvimento da sequência. Assim como na turma da aplicação piloto, nesta também havia alunos que normalmente não participavam das aulas. No entanto, diante de um formato diferente de se iniciar o conteúdo, eles acabaram se empenhando nas atividades e discussões promovidas. Eles tiveram bons resultados nas tarefas e, por consequência, boas notas no bimestre.

Nas atividades em que as explicações eram apresentadas na lousa, o envolvimento era intenso por parte dos alunos. O professor buscava a todo momento a participação deles, realizava constantes questionamentos acerca das estratégias, dos cálculos e símbolos a serem empregados. No decorrer das demais atividades, os alunos demonstravam ter iniciativas e certa dose de autonomia. As aulas foram mais silenciosas no sentido de haver menos conversas paralelas e de serem mais movimentadas quanto à participação dos alunos.

Todos os registros dos alunos foram realizados em folhas avulsas recolhidas pelo professor ao término das aulas. Foram tiradas algumas fotos da lousa. Além disso, o professor anotou, ao final de cada aula, os principais diálogos produzidos durante a execução das atividades e alguns comportamentos observáveis dos alunos e do próprio docente.

6. RESULTADOS DA APLICAÇÃO E ANÁLISE

Este capítulo é compreendido por duas seções. A primeira delas apresenta, por meio de um quadro, todas as etapas da sequência didática, e segue com a descrição e os resultados de cada uma delas. Já a segunda traz a análise de dois importantes pontos: (a) a potencialidade significativa do material; e (b) aspectos do desenvolvimento do pensamento algébrico na aprendizagem de uma estratégia algébrica a partir de estratégias aritméticas de resolução de problemas. Para melhor análise e apresentação dos pontos citados, esta segunda seção revela-se em duas subseções.

6.1 A Sequência didática: descrição e os resultados da sua aplicação

A sequência didática[12] é formada por seis atividades, mostradas no Quadro 8.

Quadro 8 - Atividades constantes da sequência didática

Atividades	**Descrição**	**Objetivo**	**Duração**
1ª: Desafio I de Problemas	Apresentação de quatro problemas com imagens para serem resolvidos aritmeticamente.	Aplicar estratégias aritméticas de resolução de problemas.	50 min
2ª: Desafio I de Problemas e estratégia aritmética	Correção dos problemas anteriores, com orientação do professor para a estratégia aritmética.	Entender a aplicação de uma estratégia aritmética específica de resolução de problemas.	90 min
3ª: Desafio II de Problemas e Estratégia Aritmética.	Apresentação de quatro problemas com imagem para serem resolvidos aritmeticamente.	Aplicar a estratégia aritmética da 2ª atividade em problemas similares.	40 min
4ª: Desafio I de Problemas e Sistema	Orientação do professor para que os problemas do Desafio I sejam resolvidos algebricamente (sistema).	Entender uma estratégia algébrica (sistema) a partir da equiparação com a estratégia aritmética.	100 min
5ª: Desafio II de Problemas e Sistema	Apresentação dos problemas do Desafio II	Aplicar a estratégia algébrica (sistema) a	100 min

[12]Sequência didática é um "conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos". (ZABALA, 1998, p. 18).

	(3ª atividade) para serem resolvidos algebricamente (sistema).	partir da equiparação com a estratégia aritmética.	
6ª: Desafio III de Problemas sem imagens – 1ª Etapa.	Orientação do professor para que problemas sem imagens sejam resolvidos por sistemas.	Entender a estratégia algébrica (sistema) para problemas sem imagens	20 min
6ª: Desafio III de Problemas sem imagens – 2ª Etapa.	Apresentação de cinco problemas sem imagem para serem resolvidos algebricamente (sistema).	Aplicar a estratégia algébrica (sistema) para problemas sem imagem	100 min

Fonte: Elaborado pelo pesquisador[13].

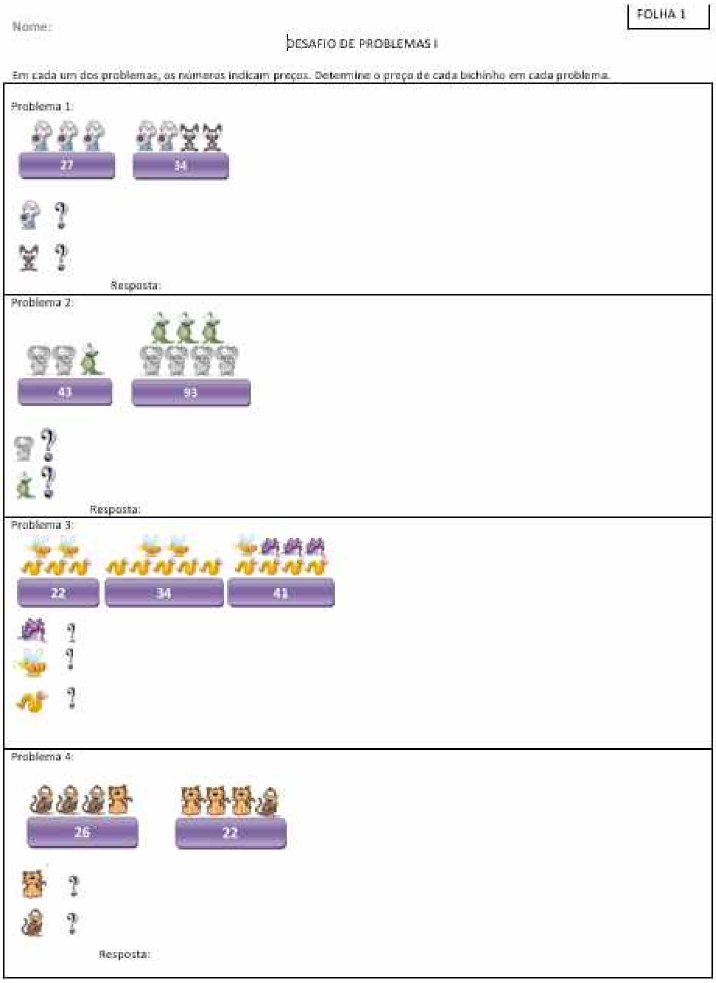
A maneira de aplicação de cada atividade mencionada, o desempenho dos alunos e alguns exemplos de registros produzidos pelos alunos nas folhas de papel e pelo professor no quadro serão descritos a seguir. Nos apêndices dessa dissertação podem ser verificados todos os anexos, isto é, todas as folhas que foram entregues aos alunos.

1ª ATIVIDADE - DESAFIO I DE PROBLEMAS

Na primeira atividade, foram distribuídas 23 cópias da Folha 1 (Figura 1), contendo quatro problemas. O professor orientou os alunos para que os resolvessem livremente, ou seja, que utilizassem seus conhecimentos e estratégias próprias, individualmente. Ele informou também que os alunos não deveriam utilizar letras, somente números. Apesar da solicitação para eles deixarem todos os cálculos na folha, mesmo que errados, muitos realizaram as tentativas em um papel à parte e colocaram na folha apenas os cálculos que julgavam corretos. Os alunos tiveram cerca de uma hora para a realização dessa atividade.

[13] O quadro consta em Viana e Rodrigues (2021).

Figura 1 - Folha 1 da 1ª atividade

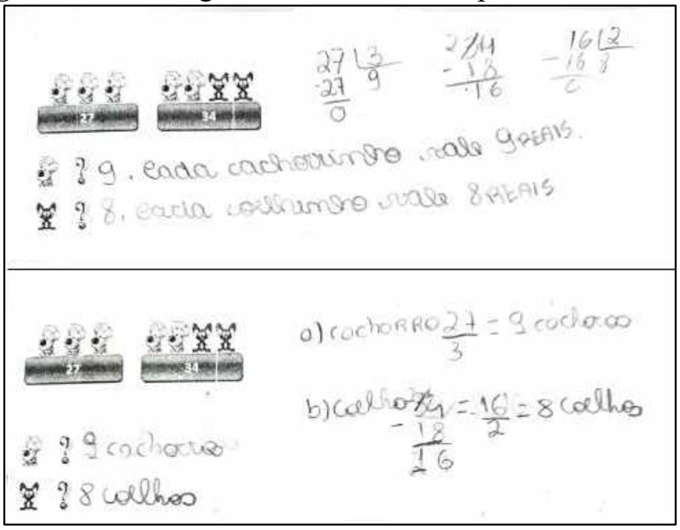


Fonte: Adaptada de Nobre et al (2011).

Problema 1

Foi verificado que 17 alunos chegaram ao resultado correto, ou seja, 74% da turma. Como era esperado, eles realizaram a divisão utilizando a primeira informação (27 ÷ 3 = 9) para determinar o preço de um cachorrinho. Como na segunda informação havia dois cachorrinhos, eles subtraíram o valor 2 x 9 do total (34 – 18 = 16) e efetuaram nova divisão (16 ÷ 2 = 8), chegando, assim, ao preço do coelhinho. A Figura 2 ilustra como dois alunos utilizaram essa estratégia.

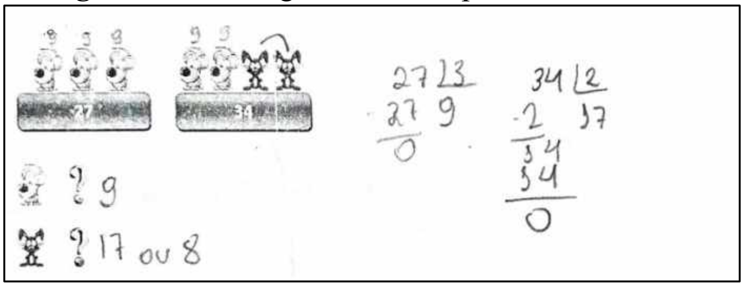
Figura 2 - Estratégia aritmética correta para o Problema 1



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Os demais alunos obtiveram o preço correto do cachorrinho a partir da primeira informação. No entanto, eles não procederam corretamente na sequência. Eles realizaram cálculos errados ou deixaram o procedimento incompleto. Observando a Figura 3, nota-se que o aluno responde com dois valores: aquele encontrado no cálculo e o valor correto, talvez obtido por outra estratégia não representada no papel.

Figura 3 - Estratégia aritmética para o Problema 1

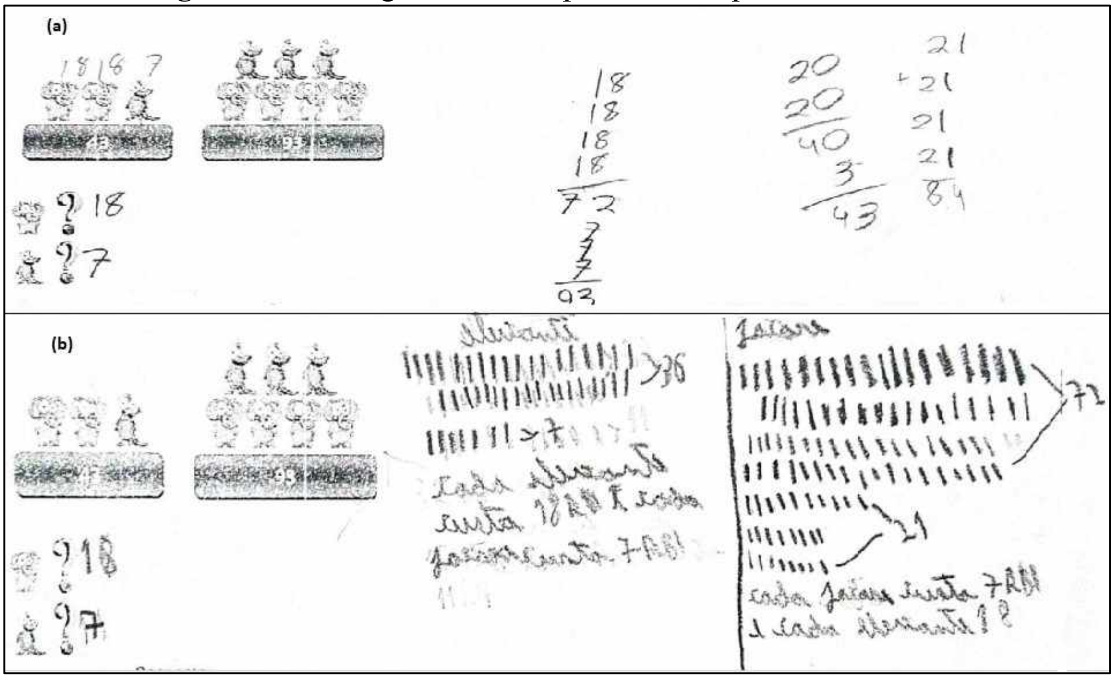


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Problema 2

Dez alunos responderam corretamente ao problema, todos eles se utilizando de tentativas, isto é, adotando por hipótese algum valor e testando nas informações do problema. A Figura 4 ilustra dois registros de alunos.

Figura 4 - Estratégia aritmética por tentativa para o Problema 2

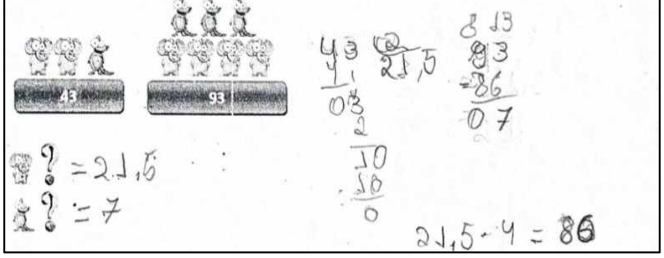


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Note-se, na Figura 4 (a), que o aluno utiliza os valores 20 e 3, para o elefante e o jacaré, respectivamente, somando 20 + 20 + 3 = 43. Talvez ele tenha desistido desses valores ao testar a segunda informação realizando cálculo mental; se assim o fez, teria obtido 4 x 20 = 80, 93 – 80 = 13 e 13 ÷ 2 = 6,5, valor que não satisfaria a primeira informação. Verifica-se que ele testou o número 21 e também o 18. Neste caso, o valor 7 deve ter sido mais uma tentativa, desta vez exitosa. No caso mostrado na Figura 4 (b), o aluno desenhou “pauzinhos” em suas tentativas. Ele mostrou ao professor seu rascunho com sua estratégia, onde ele aumentava ou diminuía os “pauzinhos”, ajustando a quantidade de maneira a satisfazer as duas informações.

Observando os registros dos outros alunos, verificou-se que eles deixaram em branco ou realizaram cálculos, parcial ou totalmente errados. A Figura 5 ilustra um procedimento incorreto.

Figura 5 - Estratégia aritmética incorreta para o Problema 2



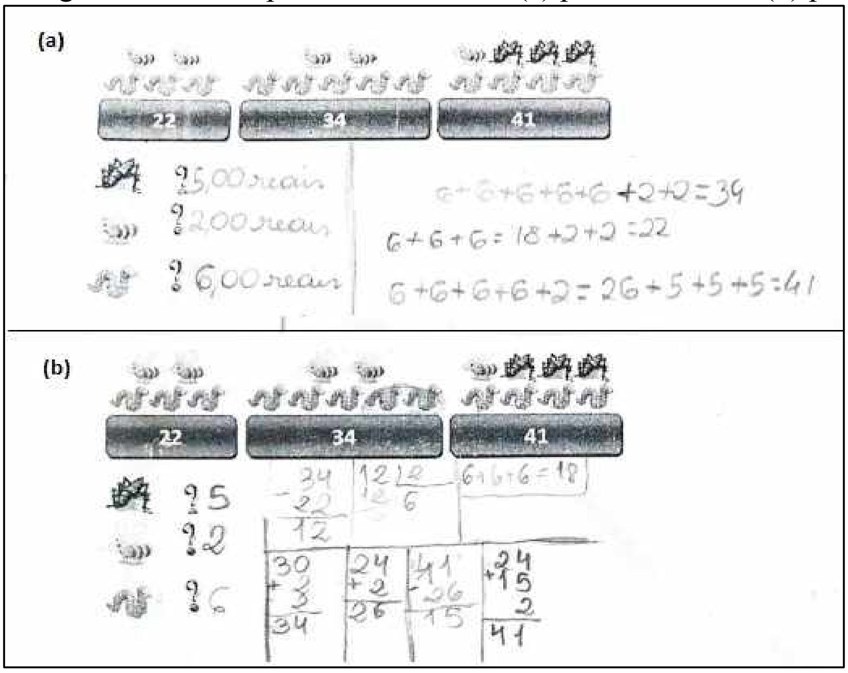
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Verifica-se, na Figura 5, que o aluno parece adotar uma estratégia correta ao subtrair 93 – 86 = 7, e responde corretamente o preço do jacaré. Entretanto, o cálculo para a obtenção do valor 86 não foi executado corretamente.

Problema 3

Cinco alunos chegaram ao resultado correto nas três informações. Dois exemplos são mostrados na Figura 6.

Figura 6 - Estratégias aritméticas para o Problema 2: (a) por tentativas e (b) por agrupamento

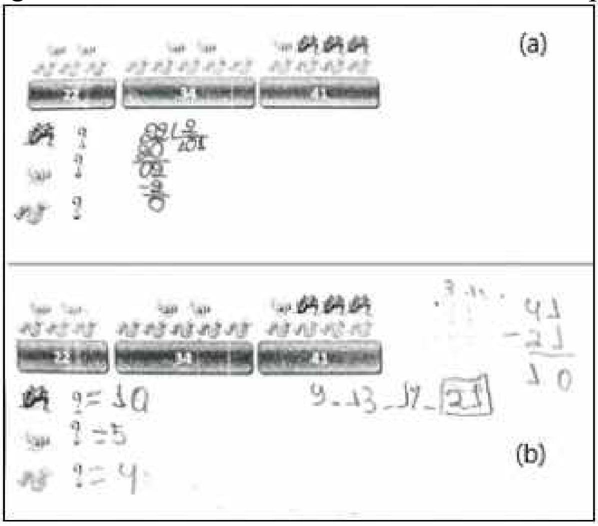


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Na Figura 6(a), nota-se que o aluno parece ter obtido os números por tentativas. O aluno se equivoca ao realizar as equivalências, por exemplo, ao realizar o cálculo 6 + 6 + 6 = 18 + 2 + 2 = 22, isto é, ele escreve 6 + 6 + 6 e finaliza "= 22", quando o correto seria: 6 + 6 + 6 = 18 e 18 + 2 + 2 = 22. Esse fato chamou a atenção do professor e o levou a trabalhar a ideia de equivalência quando, posteriormente, realizou os cálculos aritméticos na lousa. Já a Figura 6(b) ilustra uma estratégia mais elaborada, utilizando agrupamento: o aluno realiza 34 – 22 = 12 e parece entender que este valor corresponde ao preço das duas lagartas, pois, ele indica a divisão 12 ÷ 2 = 6. Na sequência do procedimento, ele parece ter obtido mentalmente o preço 2 da abelha e ainda confere a segunda informação com a adição 30 + 2 + 2 = 34. Nesta linha de pensamento aritmético, ele utiliza a terceira informação para encontrar o valor 5, correspondente ao grilo.

Na Figura 7(a), observam-se cálculos errados na divisão e não é possível apontar o porquê da divisão por 2. Observa-se o erro cometido ao efetuar o algoritmo da divisão 22 ÷ 2 e obter quociente 101, o que parece indicar a não conceitualização do sistema de numeração decimal. Já em (b), não se identifica a estratégia utilizada.

Figura 7 - Estratégias aritméticas incorretas e cálculos errados para o Problema 3

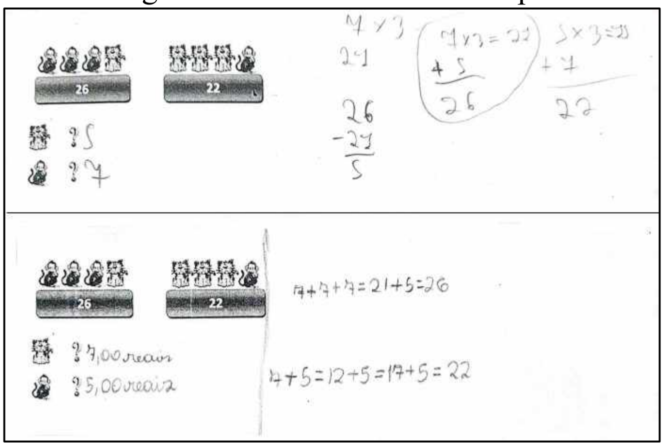


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Problema 4

Apenas três alunos chegaram à solução correta. Eles utilizaram a estratégia de tentativas e as operações adição e multiplicação, conforme pode ser constatado na Figura 8. Nesta mesma figura, é possível verificar a utilização das equivalências erradamente, ao se fazer, por exemplo: 7 + 5 = 12 + 5 = 17 + 5 = 22. O correto deveria ser: 7 + 5 = 12, a seguir 12 + 5 = 17 e 17 + 2 = 22.

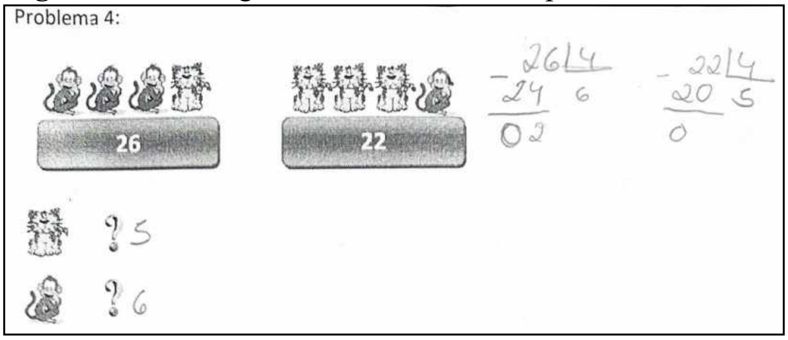
Figura 8 - Estratégias aritméticas de tentativas para o Problema 4



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Oito alunos deixaram o espaço do problema totalmente em branco, sem nenhum sinal de cálculo. Já os outros 12, realizaram alguns poucos cálculos, porém, sem resultado correto. Na figura 9, verifica-se exemplo de cálculos errados. Pode-se observar que o aluno realizou a divisão do valor total de cada informação por todos os animais, independente da espécie. A considerar os cálculos matemáticos, o aluno não deu prosseguimento aos mesmos.

Figura 9 - Estratégias aritméticas erradas para o Problema 4



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

2ª ATIVIDADE - DESAFIO I DE PROBLEMAS E ESTRATÉGIA ARITMÉTICA

Nesta atividade, o professor distribuiu 24 cópias da Folha 2, contendo os mesmos problemas da Atividade I, e apresentou uma breve análise dos resultados da atividade anterior, comentando com os alunos que havia resultados corretos, mas que o objetivo foi verificar os conhecimentos e as estratégias utilizadas por cada um deles. Informou que resolveria os mesmos quatro problemas, utilizando uma estratégia que envolvia agrupamentos e solicitou que os alunos prestassem atenção à resolução e depois copiassem da lousa na folha que haviam recebido. Esta atividade foi realizada em aproximadamente 90 minutos.

Antes de iniciar, o professor reforçou a ideia de que em todos os problemas havia sempre duas ou três informações relativas aos bichinhos e que sempre seria solicitado o valor de cada um deles.

Problema 1

Como a maioria dos alunos havia resolvido corretamente o problema, a explicação pareceu ser simples. O professor se valeu de desenhos, esquemas e legendas na lousa e explicou que, como a primeira informação referia-se ao valor dos três cachorrinhos então para determinar o valor de cada um, bastava requerer a divisão 27 ÷ 3 = 9, ou seja, cada cachorrinho valia 9. Como na segunda informação constava o valor 34 de dois cachorros e dois coelhos, então era preciso concluir que os dois cachorros valiam 18 (já que 2 x 9 = 18) e o valor dos dois coelhos seria obtido pela subtração 34 – 18 = 16; este corresponderia à soma de dois coelhos. Logo, cada coelho valia 16 ÷ 2 = 8. Assim, cada cachorro valia 9 e cada coelho 8.

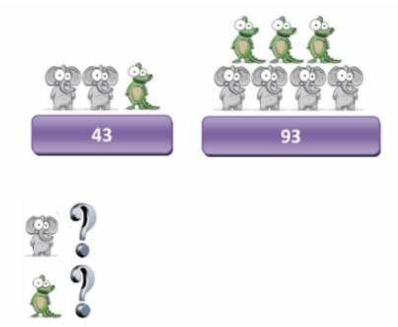
O professor, então, apresentou a verificação dos valores encontrados, em cada uma das informações deste problema, garantindo, assim, que os valores encontrados estavam corretos.

Verificação:

Na primeira informação do problema: 9 + 9 + 9 = 27 => 3 x 9 = 27 => **27 = 27.**

Na segunda informação do problema: 9 + 9 + 8 + 8 = 34 => (2 x 9) + (2 x 8) = 34 => 18 + 16 = 34 => **34 =34.**

Problema 2



O professor chamou a atenção dos alunos para observarem que na primeira informação o valor 43 correspondia a dois elefantes e um crocodilo, e que na segunda informação é possível realizar duas vezes o mesmo agrupamento.

A partir da representação do agrupamento na lousa, as operações aritméticas parecem evidentes e os próprios alunos verbalizam ser possível realizar a soma 43 + 43 = 86. Neste momento, o professor salienta que ele pode também expressar essa operação aritmética, utilizando a multiplicação 43 x 2 = 86 e, consequentemente, a subtração 93 – 86 = 7, chegando-se assim ao valor de um crocodilo.

Neste instante, como é sua característica, o professor busca o envolvimento dos alunos, indagando-os se é possível encontrar o valor de cada elefante. Vários alunos se manifestam, dizendo que pode substituir o valor do crocodilo na primeira informação, ou seja, 43 – 7 = 36 e que este é o valor de dois elefantes. Deste modo, 36 ÷ 2 = 18 e, então, cada elefante vale 18.

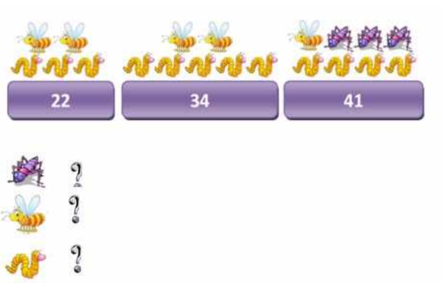
Assim como no problema anterior, o professor ressalta a relevância de se fazer a verificação dos resultados nas duas informações, sempre mostrando os cálculos aritméticos na forma de adição e/ou multiplicação.

Verificação:

Na primeira informação do problema: **18 + 18 + 7 = 43** => (2 x 18) + 7 = 43 => 36 + 7 = 43 => **43 = 43.**

Na segunda informação do problema: **18 + 18 + 18 + 18 + 7 + 7 + 7 =** 93 => (4 x 18) + (3 x 7) = 93 => 72 + 21 = 93 => **93 = 93.**

Problema 3



Neste problema, o professor salienta que existem três informações e chama a atenção dos alunos para as duas primeiras informações. À vista disso, eles mencionam ser possível realizar um agrupamento na segunda informação utilizando a primeira, ou seja, o grupo de três lagartas e duas abelhas estava contido na segunda informação e ainda valia 22.

Utilizando-se da aritmética, os alunos sugerem as operações 34 – 22 = 12 e 12 ÷ 2 = 6 e encontram o valor de 6 para cada lagarta. Os alunos demonstram grande envolvimento com a resolução do problema e rapidamente sugerem substituir o valor de cada lagarta na primeira informação, ficando com o seguinte cálculo aritmético: 6 + 6 + 6 = 18 ou (3 x 6) = 18 que é o valor das três lagartas; a seguir, 22 – 18 = 4 e 4 ÷ 2 = 2; portanto, cada abelha vale 2.

Indagados pelo professor sobre como descobrir o valor de cada grilo, os alunos sugerem substituir os valores da abelha e da lagarta na terceira informação, ficando: 6 + 6 + 6 + 6 + 2 = 26 ou (4 x 6) + 2 = 26, consequentemente, obtendo 41 – 26 = 15 e 15 ÷ 3 = 5. Desta forma, obtendo que cada grilo vale 5.

Como no problema anterior, o professor realiza a verificação dos valores encontrados em cada uma das informações.

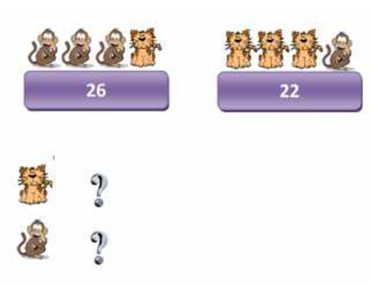
Verificação:

Na primeira informação do problema: **6 + 6 + 6 + 2 + 2 = 22** => (3 x 6) + (2 x 2) = 22 => 18 + 4 = 22 => **22 = 22.**

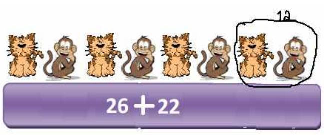
Na segunda informação do problema: **6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 2 + 2 = 34** => (6 x 5) + (2 x 2) = 34 => 30 + 4 = 34 => **34 = 34.**

Já na terceira informação do problema: **6 + 6 + 6 + 6 + 2 + 5 + 5 + 5 = 41** => (6 x 4) + 2 + (5 x 3) = 41 => 24 + 2 + 15 = 41 => **41 = 41.**

Problema 4



No último problema desta atividade, o professor ressalta a impossibilidade de se realizar o agrupamento, já que as características diferem das anteriores, e comenta que será necessário buscar outra estratégia. Então, mostra aos alunos que é possível juntar as duas informações, já que a quantidade de macacos é igual à de leões. Assim, 26 + 22 = 48 bichinhos. Estes poderiam ser agrupados de várias maneiras, mas seriam formadas quatro duplas (cada dupla formada por um leão e um macaco). O valor de cada dupla é, então, 48 ÷ 4 = 12.



Nesta ocasião, um aluno pergunta se seria possível substituir o valor da dupla na primeira informação.

O professor responde que sim, e realiza o cálculo 26 – 12 = 14; portanto, 14 ÷ 2 = 7, chegando, assim, ao valor de cada macaco. Na continuidade, outro aluno sugere substituir o valor do macaco na segunda informação, descobrindo o valor do gato, com o seguinte cálculo aritmético: 22 – 7 = 15; realizando a divisão 15 ÷ 3 = 5, chegou-se ao valor de cada gato. Agora, o professor parabeniza a atenção e participação dos alunos e os questiona se haveria uma alternativa para se chegar ao valor de cada gato. Eles ficaram em silêncio por alguns segundos e, logo em seguida, outro aluno disse que, na mesma segunda informação, se cada dupla de diferentes animais era 12, poder-se-ia também realizar o cálculo 22 – 12 = 10 e 10 ÷ 2 = 5, chegando, assim, ao mesmo valor para o gato.

Neste instante, o professor propositalmente estava deixando de realizar a verificação; rapidamente, dois alunos perguntam se não seria realizada a verificação, o que demonstrou o envolvimento da turma com a aula.

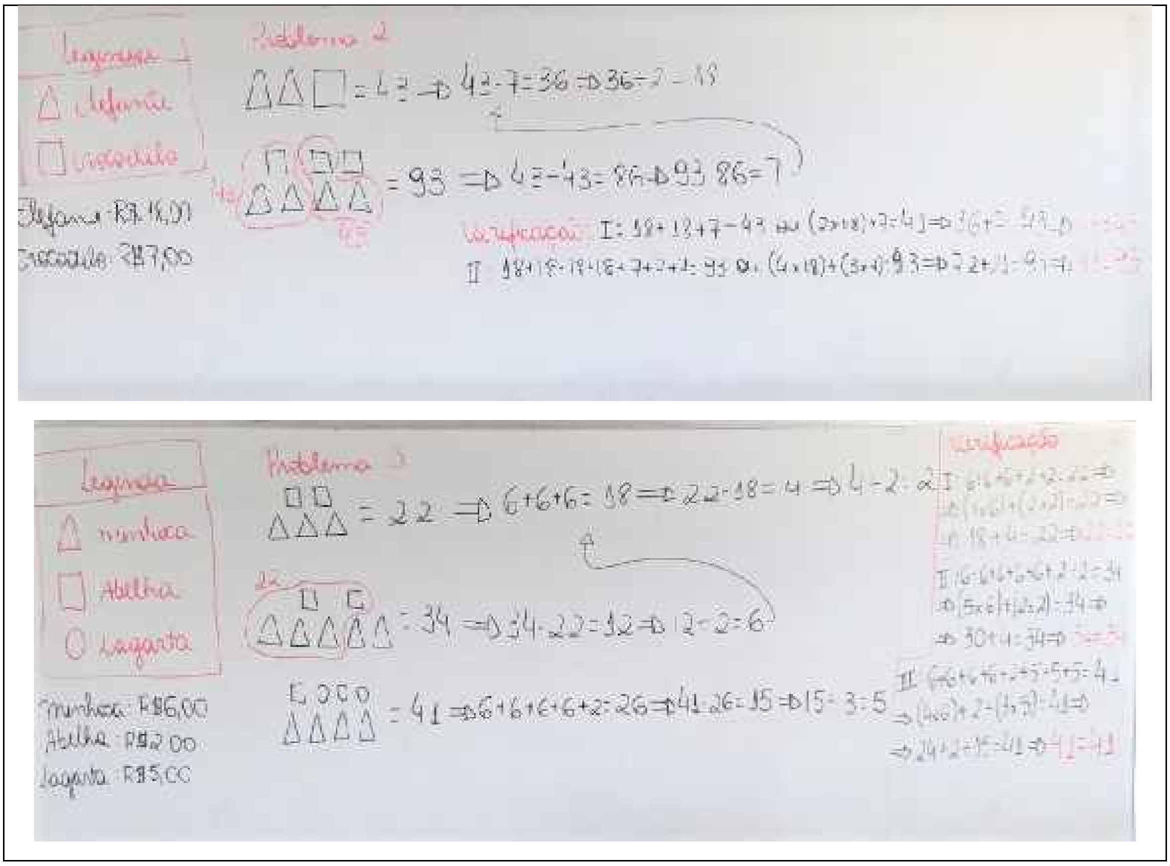
Verificação:

Na primeira informação do problema: 7 + 7 + 7 + 5 + 5 = 26 => (3 x 7) + 5 = 26 => 21 + 5 = 26 => **26 = 26.**

Já na segunda informação do problema: 7 + 5 + 5 + 5 = 22 => 7 + (5 x 3) = 22 => 7 + 15 = 22 => **22 = 22**.

A Figura 10 mostra as resoluções dos problemas 2 e 3, que possuem quantidade de informações distintas, realizadas na lousa pelo professor. Essa imagem (da lousa) e as demais ao longo da descrição dessa proposta didática, foram colocadas para aproximar e introduzir o leitor, de maneira mais próxima possível, à aplicação e exposição do professor para os alunos.

Figura 10 - Resoluções dos problemas 2 e 3



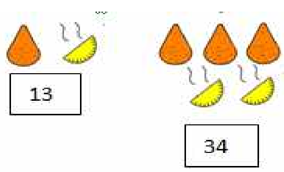
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

3ª ATIVIDADE - DESAFIO II DE PROBLEMAS E ESTRATÉGIA ARITMÉTICA

Foram distribuídas 20 cópias da Folha 3, contando com quatro problemas com imagens diferentes dos anteriores, com a orientação para que os alunos resolvessem os problemas conforme o seu entendimento da atividade anterior – que foi realizada pelo professor na lousa. O professor salienta também que eles deveriam ter atenção ao que se pedia nos problemas, ou seja, o preço de cada salgado/doce e, assim, responder corretamente.

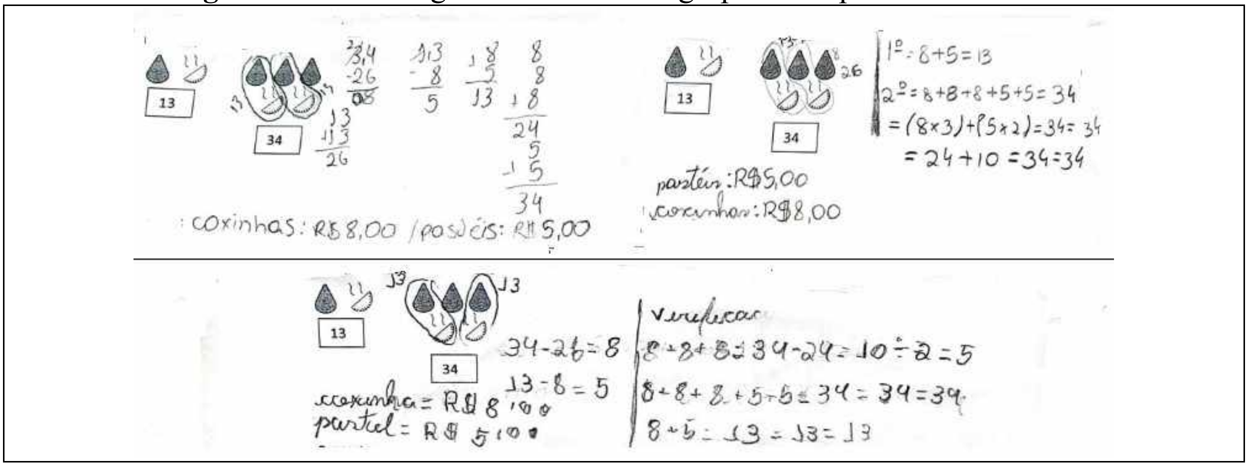
De uma forma geral, o desempenho dos alunos foi satisfatório, já que aplicaram o agrupamento como estratégia aritmética para a resolução dos problemas. O tempo gasto com essa atividade foi de 40 minutos, sendo que os três primeiros alunos a terminar gastaram cerca da metade deste tempo.

Problema 5: Determinar o preço de cada coxinha e de cada pastel.



Neste primeiro problema, 16 alunos chegaram ao resultado correto utilizando a estratégia de agrupamento e substituição do valor da primeira informação na segunda, sendo que alguns realizaram a verificação dos resultados, como pode ser verificado na Figura 11.

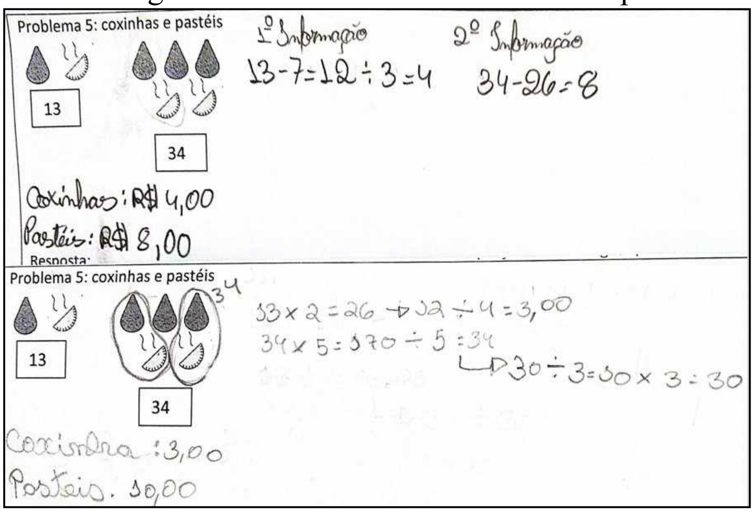
Figura 11 -. Estratégias aritmética de agrupamento para o Problema 5



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

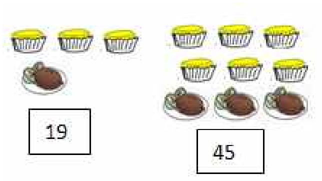
A Figura 12, a seguir, mostra os cálculos realizados pelos alunos que erraram. O primeiro aluno, apesar de apagar o agrupamento na figura, realiza o agrupamento no cálculo da segunda informação, de forma correta, porém, se equivoca na primeira informação, ao subtrair 7, ao invés de 8, já que é o valor encontrado previamente. O aluno prossegue nas falhas quanto ao cálculo aritmético, ao subtrair 13 – 7 = 12 e, também, na utilização da equivalência, quando coloca 13 – 7 = 12 ÷ 3 = 4. Já o segundo aluno, quando faz 13 x 2 = 26, inicia corretamente, isto é, utiliza-se da estratégia aprendida, o agrupamento, contudo, se confunde nos demais cálculos e na utilização equivocada da equivalência.

Figura 12 - Estratégias aritmética com cálculos errados para o Problema 5



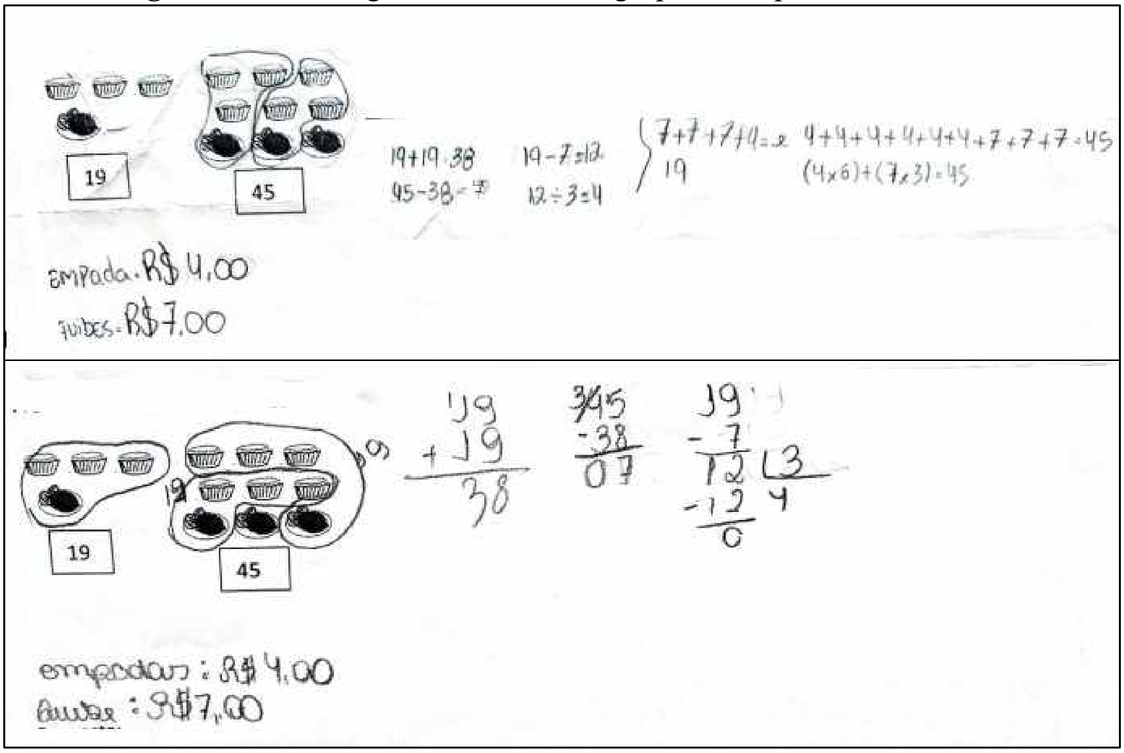
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Problema 6: Determinar o preço de cada empada e de cada quibe.



Quinze alunos chegaram ao resultado correto, empregando a estratégia aritmética de agrupamento. Alguns realizaram também a verificação, colocando as expressões na forma de adição e de multiplicação, o que pode ser verificado na Figura 13.

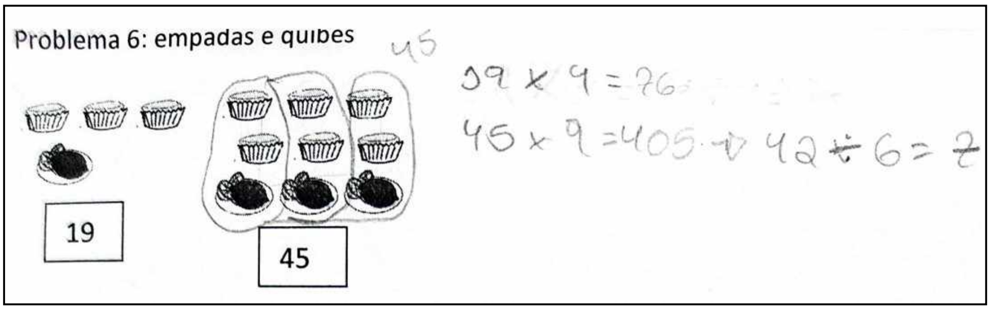
Figura 13 - Estratégias aritmética de agrupamento para o Problema 6



.Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

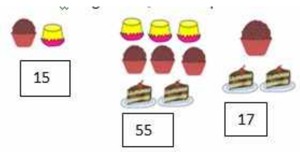
Na Figura 14, podemos observar um exemplo da estratégia aplicada incorretamente. O aluno até faz uma tentativa de agrupamento na figura, porém, os cálculos não são condizentes. A impressão que se tem é que ele multiplica o valor total de cada informação pela quantidade de salgados, isto é, 19 *x* 4 (três empada e um quibe) e 45 *x* 9 (seis empadas e três quibes).

Figura 14 - Estratégia aritmética de agrupamento aplicada de forma incorreta para o Problema 6



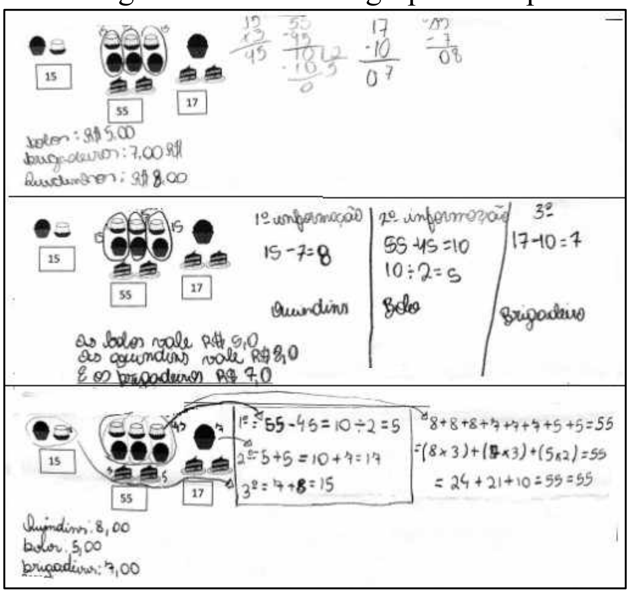
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Problema 7. Determinar o preço de cada brigadeiro, quindim e bolo.



Este problema envolve três tipos de doce e três informações. Na figura 15, é possível verificar o desenvolvimento de três alunos e fica evidente a aplicação da estratégia. O terceiro aluno comete erros de equivalências, por exemplo, ao fazer o cálculo 55 – 45 = 10 ÷ 2 = 5, sendo o correto: 55 – 45 = 10 e 10 ÷ 2 = 5. Assim sendo, 12 alunos conseguiram chegar ao resultado correto. Três alunos deixaram em branco e os outros 5 empregaram estratégias inadequadas e/ou realizaram cálculos errados.

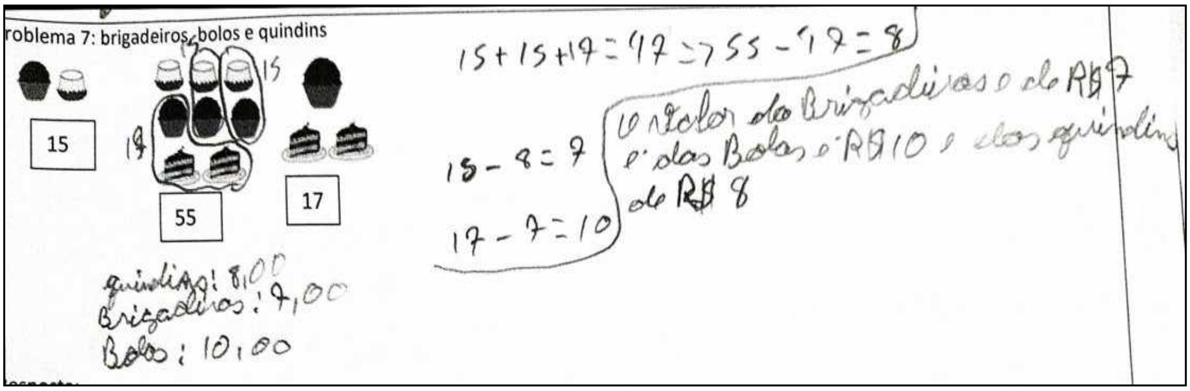
Figura 15 - Estratégias aritmética de agrupamento para o Problema 7



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

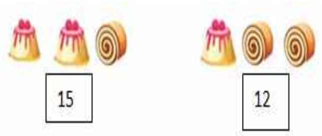
Na Figura 16, observa-se uma estratégia um pouco diferente, mas que não impediu o aluno de chegar ao resultado correto para dois doces. Nota-se que na segunda informação ele realiza três agrupamentos, dois deles com dados da primeira e outro com dados da terceira informação. Ele acerta o valor de cada quindim e de cada brigadeiro, mas se equivoca no valor do bolo, por considerar apenas um, e não dois, isto é, deveria ter realizado a divisão: 10 ÷ 2 = 5.

Figura 16 - Estratégia aritmética de agrupamento para o Problema 7. Cálculos parcialmente incorretos



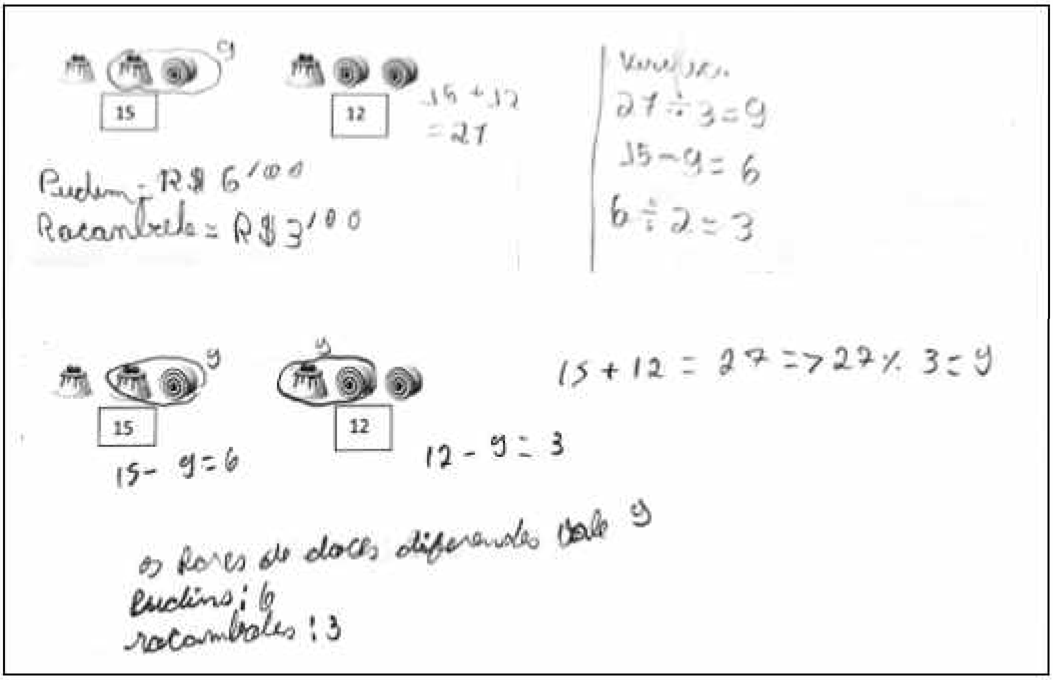
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Problema 8. Determinar o preço de cada pudim e de cada rocambole.



Este problema possuía características do quarto problema da primeira atividade. Assim sendo, era necessário realizar a adição das duas informações e assim descobrir o preço de cada dupla de doces diferentes. Alguns alunos logo notaram que não seria possível realizar o agrupamento, o que foi confirmado pelo professor: este pediu que se lembrassem do quarto problema da atividade anterior. A metade dos alunos conseguiu empregar a estratégia adequada e realizar corretamente os cálculos. A Figura 17 mostra alguns exemplos de resolução. Os dois alunos realizam a soma das duas informações e, ao verificarem que o problema possuía 3 pares de doces iguais, realizam a divisão: 27 ÷ 3 = 9, encontrando, assim, que cada par de doces vale 9. Dessa forma, os dois alunos encontram os valores corretos, porém, o segundo deixa evidente os cálculos nas duas informações, já o primeiro, na segunda informação, mesmo sem deixar o cálculo, deixa entender que ele substitui o valor do pudim, isto é: 12 – 6 = 6 e, por fim, torna evidente o cálculo 6 ÷ 2 = 3.

Figura 17 - Estratégia aritmética de agrupamento para o Problema 7



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

4ª ATIVIDADE - DESAFIO I DE PROBLEMAS E SISTEMA

Nesta atividade, o professor trouxe, pela primeira vez, a ideia de Sistema de Equações. Ele distribuiu a Folha 4 para 22 alunos, contendo os mesmos problemas do Desafio I, isto é, aqueles utilizados nas duas primeiras atividades, para que eles pudessem aprender uma estratégia algébrica de resolução. O professor informa que utilizará como base os procedimentos aritméticos já realizados para solucionar os problemas, mas que, naquele momento, aplicaria o uso de equações. A seguir, como se tratava de uma nova ideia para os alunos, o professor solicita aos mesmos que acompanhem, com muita atenção, a resolução na lousa, para só depois copiarem nos seus cadernos. Como cada um dos problemas foi resolvido detalhadamente, e depois, foi dado um tempo para que os alunos copiassem nos seus cadernos. Foram utilizados dois horários (100 minutos).

Problema 1

Como pode ser verificado na Figura 18, o professor retoma o primeiro problema, e utiliza-se de uma legenda (lado esquerdo da lousa) para a representação do cachorro (um triângulo) e do coelho (um quadrado). Para se chegar à equação, o professor explica aos alunos que irá utilizar a letra *x* para representar o valor do cachorro e *y* para o valor do coelho. Em seguida, indaga aos alunos como poderia representar a primeira informação, utilizando-se das letras previamente acordadas. Quando uma aluna diz que poderia ser x + x + x = 27, o professor recorda haver três monômios iguais e que isso permitia reduzi-los, ficando, então, 3x = 27; esta expressão foi chamada Equação I. O professor prossegue, questionando como ficaria a segunda informação do problema, utilizando as letras combinadas. Desta vez, mais alunos se envolveram e responderam: x + x + y + y = 34; rapidamente, disseram que seria possível "juntar" as letras iguais, na forma 2x + 2y = 34, formando a Equação II.

A seguir, o professor explica que quando temos duas ou mais equações, que juntas respondem a um mesmo problema. Então, temos um Sistema de Equações. Assim, formou-se o seguinte Sistema:

$$\begin{cases} 3x = \quad 27 & (I) \\ 2x + 2y = 34 & (II) \end{cases}$$

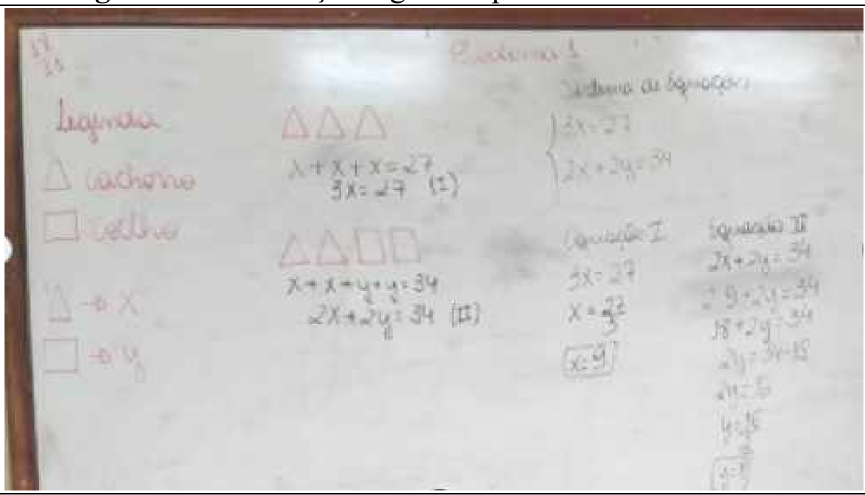
Prosseguindo, o professor toma a primeira equação (que correspondia à primeira informação do problema) e a resolve utilizando a divisão, encontrando, assim, o valor x = 9, correspondente ao cachorro. Nesta ocasião, o professor lembra os alunos acerca da resolução aritmética que foi realizada na segunda atividade, com o mesmo problema. Calculado o valor x de cada cachorro, o professor demonstra ser possível substituir na Equação II, resolvê-la e chegar ao valor y = 8, de cada coelho. O professor chama a atenção para a verificação, no lado direito da lousa, assim como foi realizada na resolução aritmética.

Verificação: (I) 3x = 27 => 3 **.** 9 = 27 => **27 = 27.**

(II) 2x + 2y = 34 => 2 **.** 9 + 2 **.** 8 = 34 => 18 + 16 = 34 => **34 = 34.**

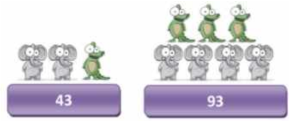
Na Figura 18, é possível verificar a resolução do professor na lousa, utilizando-se das figuras para construir a legenda.

Figura 18 - Resolução algébrica para o Problema 1



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Problema 2

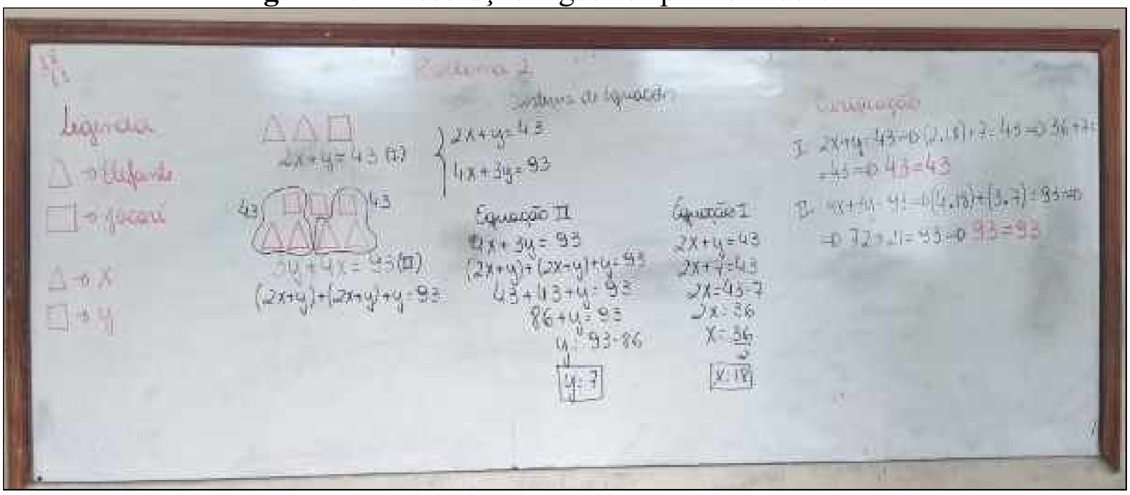


O professor seguiu a mesma ideia do primeiro problema, ou seja, utilizou figuras geométricas para representar os animais e letras para construir as equações. Com a criação das duas equações, obteve o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 43 & (I) \\ 4x + 3y = 93 & (II) \end{cases}$$

Prosseguindo, o professor pede aos alunos que, valendo-se do que aprenderam sobre a estratégia aritmética do agrupamento, observassem as informações e verificassem se existia a possibilidade de realizar a mesma estratégia com as equações. Rapidamente, alguns alunos sugerem aplicar duas vezes o agrupamento da primeira informação na segunda, ou seja, a equação 4x + 3y = 93 passa a ser escrita como x + x + x + x + y + y + y = 93 ou (2x + y) + (2x + y) + y = 93. Substituindo a expressão entre parênteses por 43, obteve-se 43 + 43 + y = 93, resultando no valor y = 7 para o crocodilo. Substituindo esse valor na primeira equação, foi obtido 2x + 7 = 43, o que resultou em x = 18, correspondente ao elefante. A Figura 19 mostra a resolução efetuada na lousa.

Figura 19 - Resolução algébrica para o Problema 2



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

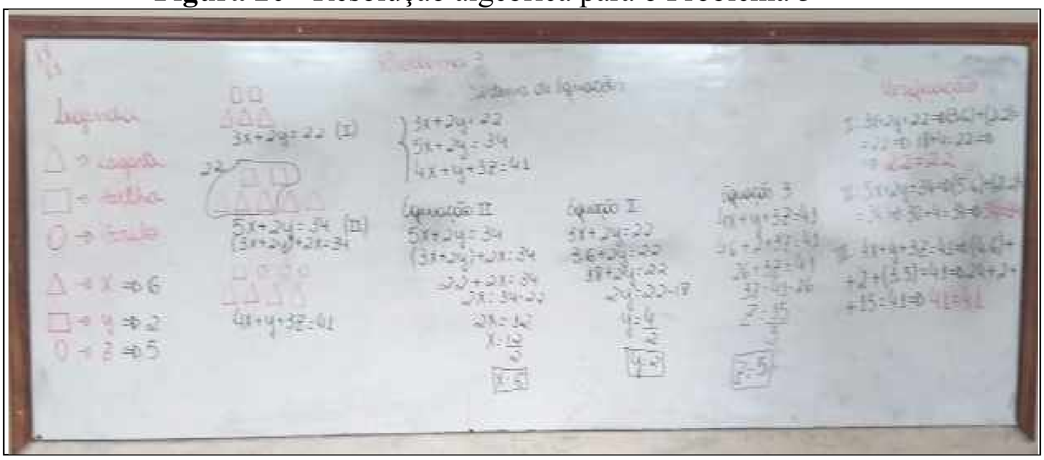
Problema 3

O professor alerta os alunos que neste problema há três informações, com três animais diferentes, sendo assim, o sistema teria três equações. Da mesma maneira que aconteceu nos casos anteriores, o professor simboliza as três informações com as figuras geométricas (Figura 20) e determina as letras a serem utilizadas na construção das equações, ou seja, *x* para a lagarta, *y* para a abelha, e por último *z* para o grilo. Com esses dados, o professor questiona como ficariam as equações e, rapidamente, obtém as respostas: 3x + 2y = 22 (I), 5x + 2y = 34 (II) e 4x + y + 3z = 41 (III). Forma-se, assim, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 22 & (I) \\ 5x + 2y = 34 & (II) \\ 4x + y + 3z = 41 & (III) \end{cases}$$

Nesta ocasião, o professor questiona os alunos da possibilidade do agrupamento. Em silêncio, os alunos parecem analisar as informações representadas pelos desenhos e pelas equações. Após um tempo, uma aluna diz que seria possível agrupar a primeira informação na segunda. À vista disso, o professor copia a Equação II na lousa e insere a primeira equação, questionando os alunos se falta alguma informação. Ao responderem ser 2x, a equação é escrita como (3x + 2x) + 2y = 34 é substituída a expressão 3x + 2y pelo valor 22 e, na sequência, chega-se ao valor x = 6, de cada lagarta. A seguir, o professor copia a Equação I e substitui o x pelo valor encontrado, determinando, então, o valor y = 2 de cada abelha. Com os dois valores encontrados (*x* e *y*), ocorre a substituição na Equação III, encontrando o valor z = 5 para o grilo e finalizando com a verificação.

Figura 20 - Resolução algébrica para o Problema 3



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Problema 4

Neste problema, o professor salienta haver duas informações, com dois animais diferentes, e que seguirá com as figuras geométricas e as letras para representar os animais.

Dessa forma, utiliza a letra x para simbolizar o macaco e o y para o leão, conforme legenda na lousa (Figura 21). A seguir, com a participação dos alunos, que antecipam as escritas do professor, são construídas as duas equações e, logo, o sistema:

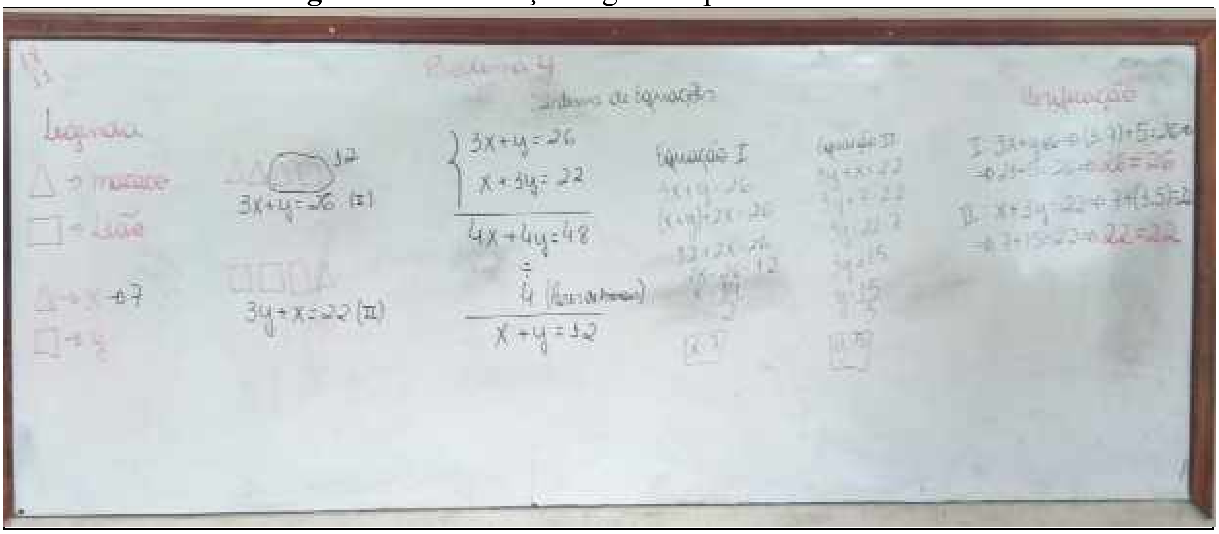
$$\begin{cases} 3x + y = 26 \quad (I) \\ x + 3y = 22 \quad (II) \end{cases}$$

A seguir, o professor questiona os alunos se é possível realizar o agrupamento; um aluno então responde que não é possível, e que precisaria resolver igual ao problema 8, da atividade anterior, ou seja, somando as duas informações.

$$\begin{array}{c} \begin{cases} 3x + y = 26 \\ x + 3y = 22 \end{cases} \\ \hline 4x + 4y = 48 \end{array}$$

O professor, então, pergunta aos alunos o que poderia ser feito com essa soma. Rapidamente, outro aluno diz que, como havia 4 pares de diferentes animais, poderia dividir a soma das duas informações por 4, chegando-se a x + y = 12, ou seja, ao valor de cada par. Conforme a Figura 21, que mostra a resolução na lousa, o professor substitui a equação encontrada x + y = 12 na primeira equação e encontra o valor x = 7 de cada macaco. Substituindo este valor na segunda equação, determina o valor y = 5, correspondente ao leão.

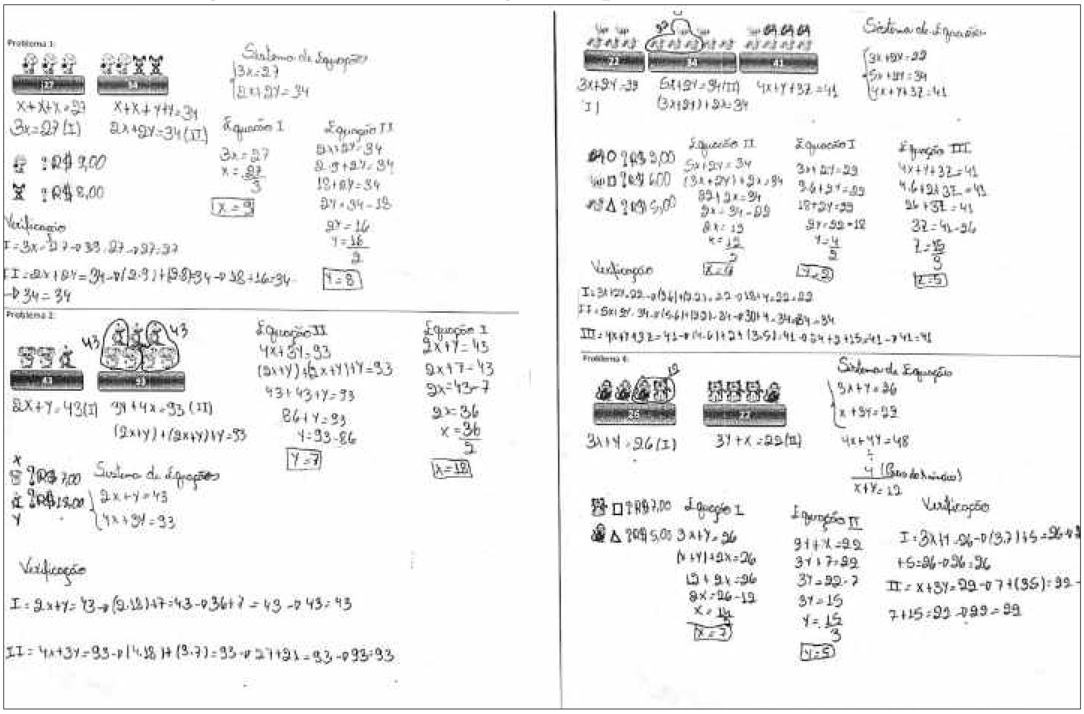
Figura 21 - Resolução algébrica para o Problema 4



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Na Figura 22, é possível verificar como foram os registros de um aluno em suas folhas.

Figura 22 - Resolução algébrica para os Problemas 1 a 4



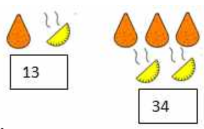
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

5ª ATIVIDADE - DESAFIO II DE PROBLEMAS E SISTEMA

Nesta atividade, foram entregues 24 cópias da Folha 5, contendo os mesmos quatro problemas da terceira atividade. O tempo para esta atividade foi de 100 minutos (duas aulas).

Os alunos foram estimulados a resolver os problemas algebricamente (na forma de sistemas de equações), buscando consolidar os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores. Para que eles pudessem se orientar, foram devolvidas suas folhas da atividade anterior. Foi solicitado aos dois alunos que não estavam presentes na quarta atividade que se sentassem junto a algum colega; isto foi muito produtivo, já que conseguiram desenvolver a atividade, observando a folha do colega e acompanhando as suas explicações. Circulando pela sala de aula, o professor verificou grande interação entre os alunos que estavam em duplas. Já os demais estavam concentrados e gostavam de mostrar ao professor sempre que concluíam um problema.

Problema 5: Determine o preço de cada coxinha e de cada pastel.



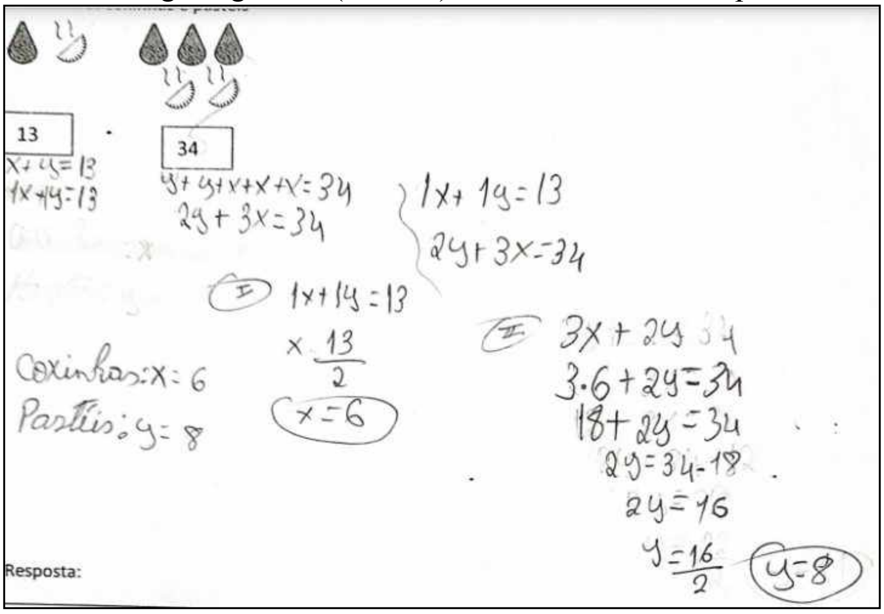
Vinte alunos chegaram ao resultado correto, já os demais esboçaram alguns cálculos, porém, não deram continuidade ou efetuaram cálculos errados. Observando o exemplo mostrado na Figura 23, é possível afirmar que os alunos compreenderam o processo de geração das equações, de agrupamento, de substituição e de simplificação e, consequentemente, o conceito de sistema e o procedimento de resolução.

Figura 23 - Estratégia algébrica (sistema) de dois alunos para o Problema 5

Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

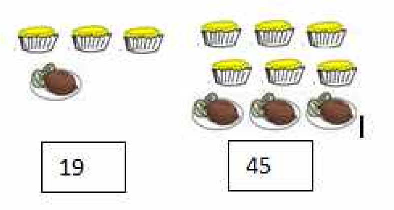
Na Figura 24 pode-se observar que o aluno gerou as equações e, por consequência, o sistema corretamente; entretanto, falhou na manipulação algébrica. Na equação I, ele somou 1x + 1y e realizou a divisão 13 ÷ 2, obtendo 6, isto é, todo o processo foi feito de forma incorreta, desde a soma, até a divisão. Com o resultado errado, ele deu prosseguimento na equação II. Apesar de 8 ser uma das respostas corretas, no caso deste exemplo, o *x* seria 8, e não *y*. Se o aluno tivesse realizado o processo de verificação que o professor ensinou, ele teria observado que o resultado estava errado.

Figura 24 - Estratégia algébrica (sistema) com cálculos errados para o Problema 5



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

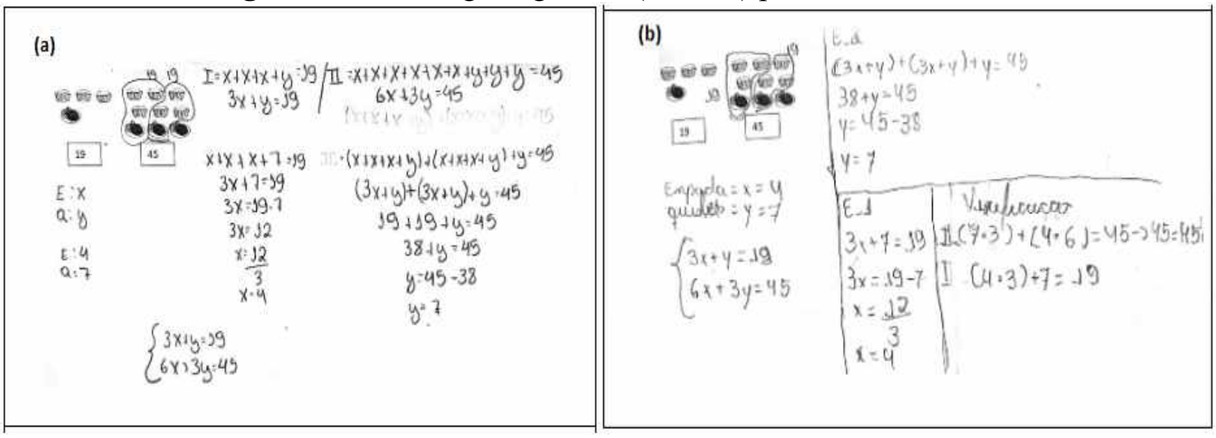
Problema 6. Determine o preço de cada coxinha e de cada pastel.



Conseguiram concluir o problema, de modo correto 19 alunos. Os demais alunos deixaram em branco ou não deram prosseguimento aos cálculos iniciados.

Nota-se, na Figura 25 (a), que o aluno monta as equações de maneira detalhada, isto é, valendo-se da redução dos monômios idênticos e, logo depois, o sistema de equações. Já na Figura 25 (b), pode-se notar que, de modo mais sucinto, o aluno gera o sistema de equações e, a seguir, todos os cálculos. Os dois alunos se valem do agrupamento e desenvolvem corretamente os cálculos.

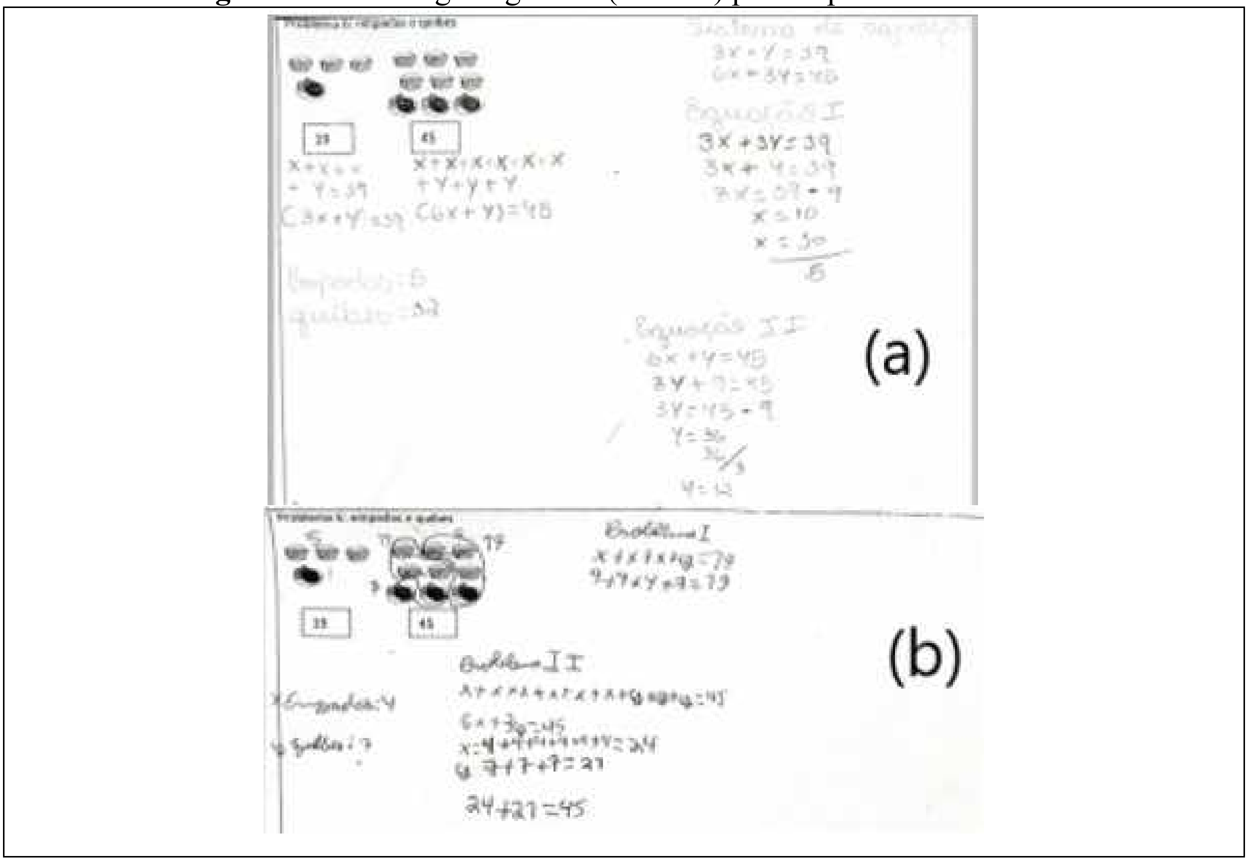
Figura 25 - Estratégia algébrica (sistema) para o Problema 6



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

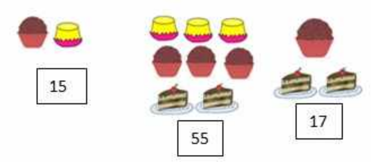
Na Figura 26 (a), o aluno gera as equações e sistema corretamente, porém, se atrapalha no prosseguimento e nos cálculos, e fica evidente o entendimento apenas parcial daquilo que lhe foi ensinado. Já em (b), o aluno chega aos resultados corretos, entretanto, apesar de executar corretamente o agrupamento na imagem e elaborar as equações iniciais, não se percebe o desenvolvimento correto do sistema para se chegar ao resultado satisfatório.

Figura 26 - Estratégia algébrica (sistema) parcial para o Problema 6



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Problema 7. Determine o preço de cada um dos doces.

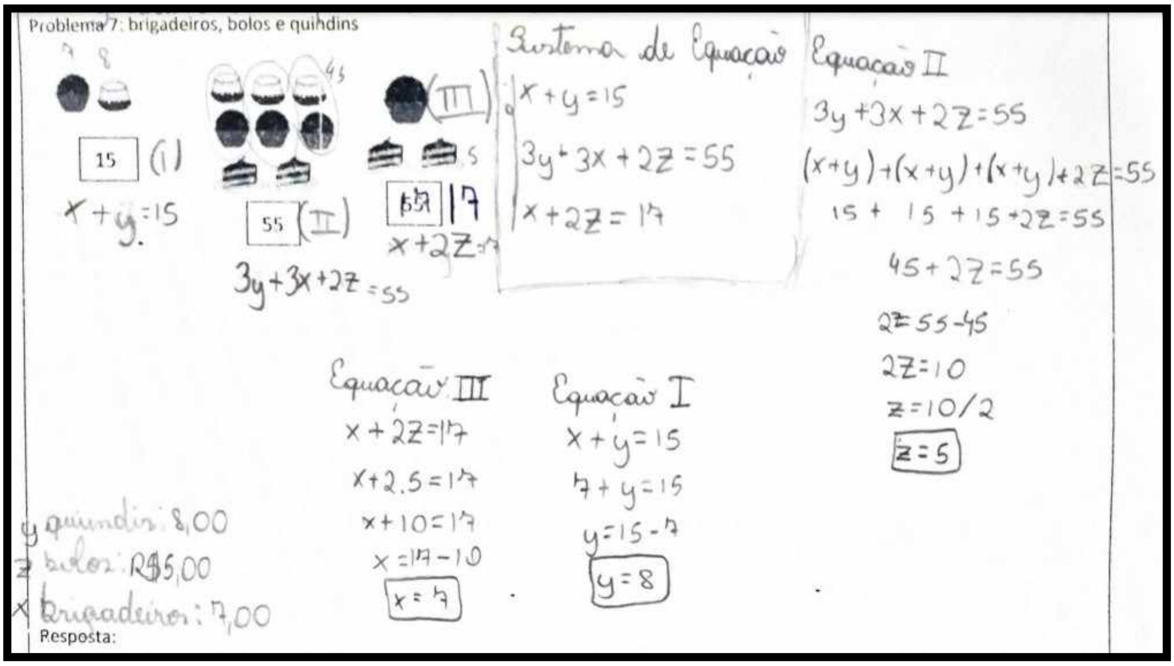


Para este problema, o professor chama a atenção dos alunos para o fato de haver, diferentemente dos anteriores, três informações e três tipos diferentes de doces, o que resultaria na geração de três equações e três incógnitas, portanto, três respostas.

Mesmo sendo um problema com maior grau de complexidade que os demais, 19 alunos resolveram corretamente, ou seja, mesmo número que o anterior. Andando pela sala de aula, o professor observou que dois alunos que haviam deixado o problema anterior com cálculos errados, estavam também se confundindo em detalhes. Neste momento, o professor realizou pequenas intervenções, questionando os alunos e os levando a observar alguns erros. Dessa forma, eles conseguiram dar prosseguimento aos cálculos corretos. Em um desses erros, o aluno estava considerando o brigadeiro com a incógnita x na primeira informação, e essa mesma incógnita para o bolo na terceira informação, e assim ele construiu as equações e o sistema; no entanto, não estava conseguindo evoluir. Efetuada a correção, ele desenvolveu os cálculos corretamente. Já outro aluno realizou o agrupamento na imagem, construiu as equações e o sistema acertadamente, porém, no momento de substituir a equação I, na segunda, que deveria ser três vezes, ele estava substituindo apenas duas vezes, ou seja, $15 + 15 + 2z = 55$, encontrando o valor $z = 10$, onde o correto era $15 + 15 + 15 + 2z = 55$, sendo o valor de $z = 5$. Realizado o ajuste, prosseguiu corretamente aos demais cálculos.

Na Figura 27, pode-se observar que o aluno demonstrara entendimento de todo o processo, isto é, agrupamento na imagem, geração das equações e do sistema. No momento de realizar o agrupamento da equação I, na segunda, os alunos se diferenciaram entre si, ou seja, o primeiro efetuou o agrupamento, mas a seguir, prosseguiu de forma mais direta. O segundo aluno conduziu de modo mais detalhado, colocando três vezes a equação I, depois seus valores e, assim, avançou nos demais cálculos. Já o terceiro aluno, assim como o primeiro, foi mais objetivo em seus cálculos, substituindo, diretamente, os valores da equação I; porém, foi o único dos três que realizou a verificação dos valores encontrados nas equações.

Figura 27 - Estratégia algébrica (sistema) para o Problema 7

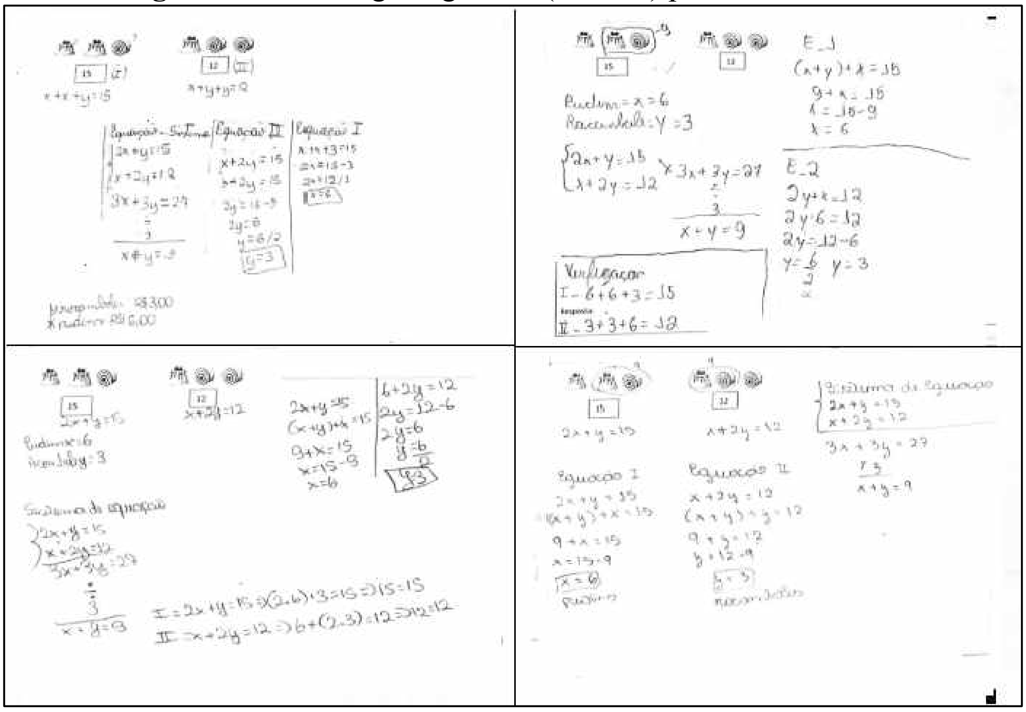


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Problema 8. Descobrir o valor de cada pudim e de cada rocambole.

Como era um problema um pouco diferente dos demais, o professor esperava que menos alunos apresentassem resposta correta. Percebendo que a turma se mostrava um pouco cansada e ansiosa pelo fim da atividade, o professor intensificou o trabalho de circular pela sala e, na tentativa de motivá-los, incentivou-os a buscar, em estratégias apreendidas anteriormente, mecanismos que pudessem auxiliá-los a compreender a situação e assim terminar a tarefa. Essa ação foi considerada exitosa, já que, se inicialmente parecia que a maioria dos alunos não conseguiria desenvolver corretamente o problema, ao final da atividade verificou-se que 14 alunos (54%) chegaram ao resultado correto. Na Figura 28, é possível notar a correta resolução de quatro alunos. Eles montam o sistema de equações e desenvolvem os cálculos e é possível verificar o agrupamento ao valor de x + y.

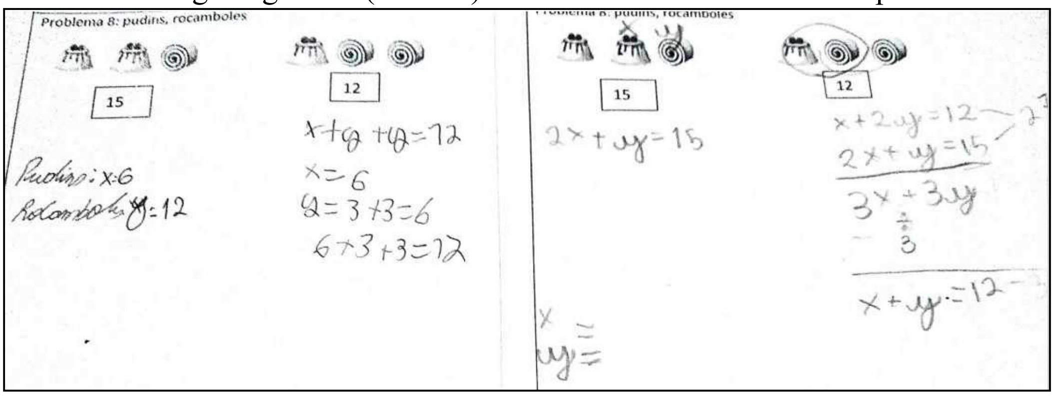
Figura 28 - Estratégia algébrica (sistema) para o Problema 8



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Na Figura 29, verifica-se que o primeiro aluno desenvolve apenas a equação II. Contudo, não se identifica o desenvolvimento de sistema de equações. Este aluno realiza alguns cálculos, mas não é possível certificar como foram obtidos os resultados. Já o segundo aluno desenvolve as duas equações e até emprega a estratégia de somá-las; a seguir, efetua a divisão por três, já que se trata "3 duplas de diferentes doces", mas não dá prosseguimento aos cálculos.

Figura 29 - Estratégia algébrica (sistema) de dois alunos sem conclusão para o Problema 8



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

6ª ATIVIDADE – DESAFIO III DE PROBLEMAS SEM IMAGENS – 2 ETAPAS

Nesta atividade, foram entregues 24 cópias da Folha 6, com sete problemas sem imagens. O professor solicitou aos alunos que resolvessem de forma algébrica, ou seja, por sistemas de equações. Esta atividade, por ser a primeira com problemas sem imagens, foi dividida pelo professor em duas etapas: na primeira, os dois primeiros problemas foram resolvidos na lousa pelo professor; já na segunda etapa, os problemas foram resolvidos pelos alunos, individualmente.

Problema 1: Três empadinhas custam R$12,00. Sabe-se que 2 empadinhas e 3 coxinhas custam R$ 29,00. Quanto custa cada empadinha e cada coxinha?

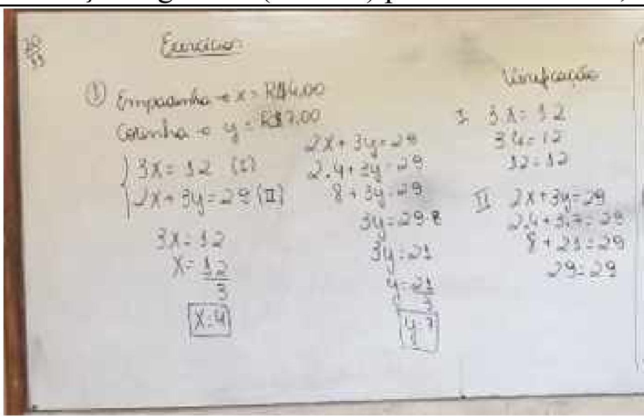
Inicialmente, o professor solicita a leitura individual e silenciosa; a seguir, escolhe um aluno aleatoriamente e pede que ele leia o problema em voz alta. Ao serem questionados do que se tratava o problema, vários alunos respondem que se pedia o preço de cada empadinha e de cada coxinha. Desta forma, como não se sabia o valor de cada salgado, o professor sugere “chamar” cada um deles de uma incógnita, ou seja, de uma letra. Então, os próprios alunos sugerem chamar o preço da Empadinha => x e o da Coxinha => y.

Nesse momento, o professor faz uma leitura do problema, pedindo a atenção de todos para construir as equações de acordo com cada informação. Ao ler novamente a primeira informação, “Três empadinhas custam R$ 12,00”, questiona como ficaria a equação que representava a situação. Rapidamente, os alunos respondem: 3x = 12, e esta foi chamada Equação I. Seguindo, o professor faz a leitura da segunda parte: “Sabe-se que 2 empadinhas e 3 coxinhas custam R$ 29,00”; logo, eles falam: 2x + 3y = 29, identificada como Equação II. O sistema foi então formado:

$$\begin{cases} 3x = 12 \quad (I) \\ 2x + 3y = 29 \quad (II) \end{cases}$$

Como pode ser observado na Figura 30, sempre envolvendo os alunos em todo o processo, o professor desenvolve a Equação I, substitui o valor de x na Equação II e encontra o valor de y. Finalmente, faz a verificação dos resultados encontrados.

Figura 30 -Resolução algébrica (sistema) para o Problema 1, feita na lousa



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Problema 2: Comprei 2 canetas e uma lapiseira por R$ 28,00. Se tivesse comprado 5 canetas e duas lapiseiras (iguais às anteriores), teria pago R$64,00. Quanto custa cada uma?

O professor faz a leitura do problema e pede aos alunos que a realizem individualmente, em silêncio e com muita atenção às informações. Em seguida, o professor utiliza-se das incógnitas *x* e *y* para representar, respectivamente, o preço da caneta e da lapiseira: Caneta => x e Lapiseira => y. Diante disso, formaliza as duas equações e, consequentemente, o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 28 & (I) \\ 5x + 2y = 64 & (II) \end{cases}$$

Nesse instante, o professor pede aos alunos para observarem as duas equações e que verifiquem a possibilidade do agrupamento. Uma aluna, então, diz que a equação I, “cabia” duas vezes na segunda e ainda “sobrava um *x*”.

Então, trabalhando com a Equação II, o professor realiza a substituição, ou o “agrupamento” – conforme alguns alunos chamavam – e resolve o sistema, conforme a seguir:

5x + 2y = 64	Substituindo na Equação I.
(2x + y) + (2x + y) + x = 64	2x + y = 28
28 + 28 + x = 64	2 . 8 + y = 28
56 + x = 64	16 + y = 28
x = 64 – 56	y = 28 - 16
x = 8	y = 12

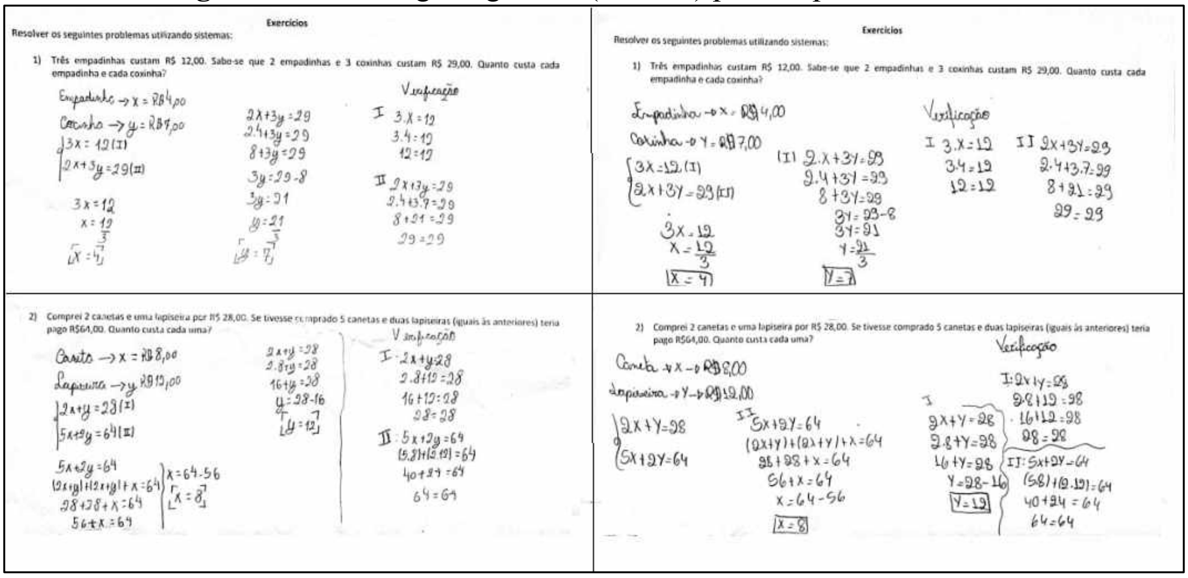
Em seguida, o professor reforça a possibilidade da verificação dos resultados encontrados.

Verificação:

I – 2x + y = 28	II – 5x + 2y = 64
2 . 8 + 12 = 28	5 . 8 + 2 . 12 = 64
16 + 12 = 28	40 + 24 = 64
28 = 28	64 = 64

Na Figura 31, é possível verificar os registros de dois alunos, nos dois primeiros exercícios.

Figura 31 - Estratégia algébrica (sistema) para os problemas 1 e 2



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

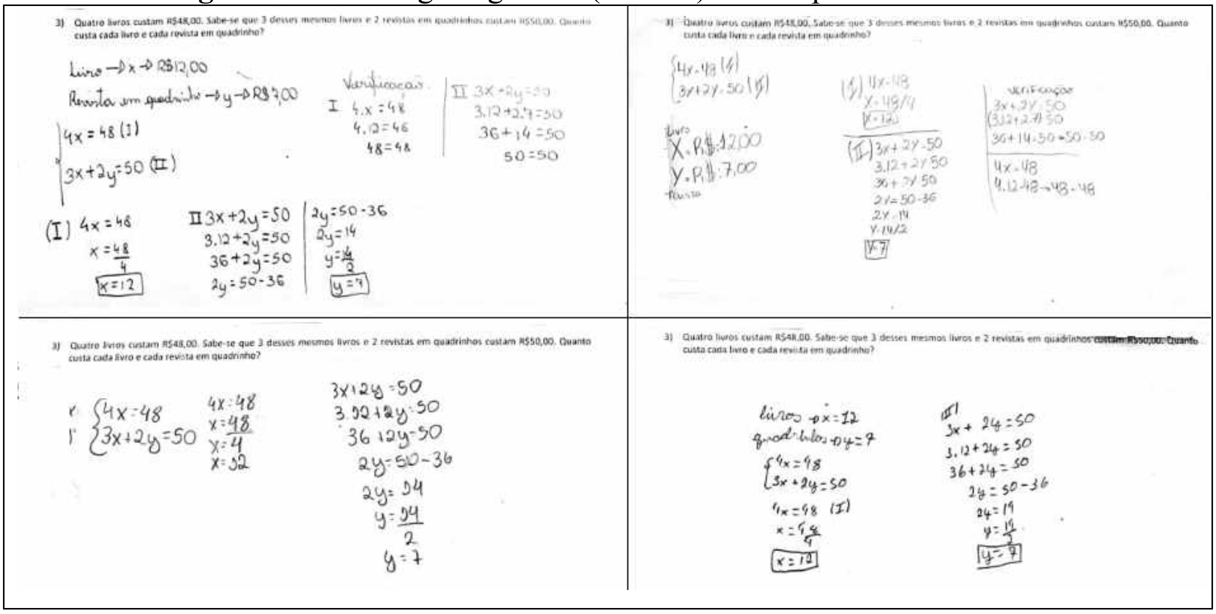
Na aula seguinte, quando os alunos já estavam com a Folha 6, o professor reforçou a importância da leitura – que deveria ser realizada quantas vezes fossem necessárias – da interpretação dos dados e do que estava sendo pedido em cada situação. Outro ponto enfatizado foi que os alunos deveriam ir “tirando as informações” para formar as equações, montar o sistema e resolvê-los. Esta atividade foi realizada por 24 alunos que tiveram 2h/aula (100 minutos) para a resolução.

Os exercícios 3 e 4 foram elaborados de forma que ficassem parecidos com o 1 e 2, assim, esperava-se que os alunos, já familiarizados com o procedimento, pudessem ter mais confiança em resolvê-los.

Problema 3: Quatro livros custam R$48,00. Sabe-se que 3 desses mesmos livros e 2 revistas em quadrinhos custam R$50,00. Quanto custa cada livro e cada revista em quadrinhos?

Na Figura 32, é possível verificar o desenvolvimento de quatro alunos e observar que conseguiram realizar os procedimentos corretamente, isto é, identificam as equações e realizam todo o processo organizadamente, sendo que dois deles realizam a verificação. Acertaram o problema 21 alunos.

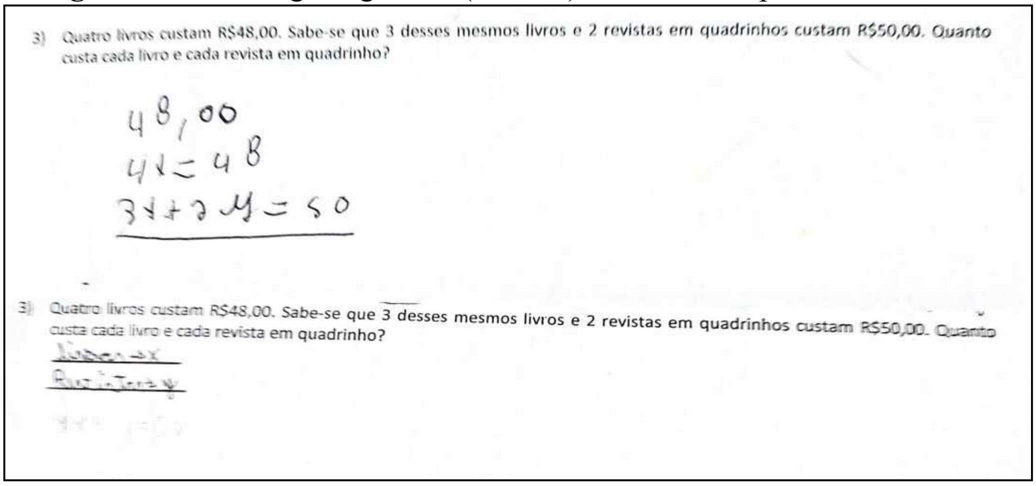
Figura 32 - Estratégia algébrica (sistema) correta para o Problema 3



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Já na Figura 33, temos a tentativa de dois alunos, sendo que o primeiro chega a construir as equações, porém, não dá prosseguimento. O segundo aluno identifica os itens com as incógnitas, mas não dá continuidade; é possível observar que ele chegou a construir alguma equação, mas apagou, e, como pode ser visto, não deu seguimento ao processo de resolução.

Figura 33 - Estratégia algébrica (sistema) sem cálculos para o Problema 3

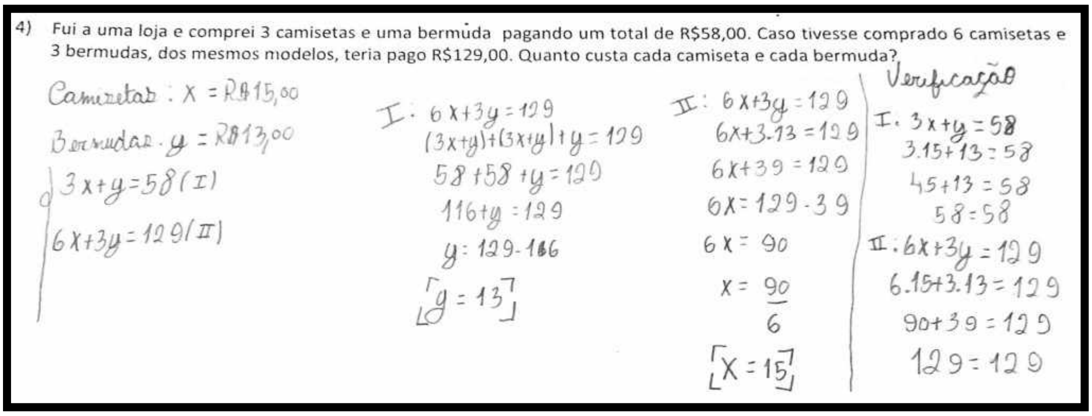


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Problema 4: Fui a uma loja e comprei 3 camisetas e uma bermuda, pagando um total de R$58,00. Caso tivesse comprado 6 camisetas e 3 bermudas, dos mesmos modelos, teria pago R$129,00. Quanto custa cada camiseta e cada bermuda?

Neste problema, vinte alunos chegaram ao resultado correto. Os demais alunos iniciaram o desenvolvimento, porém, não deram prosseguimento ou erraram os cálculos. Na Figura 34, podemos verificar o desenvolvimento de um aluno neste exercício. Observa-se que ele identifica os itens com as incógnitas, constrói as equações e monta o sistema, realizando os cálculos de maneira organizada, inclusive a verificação.

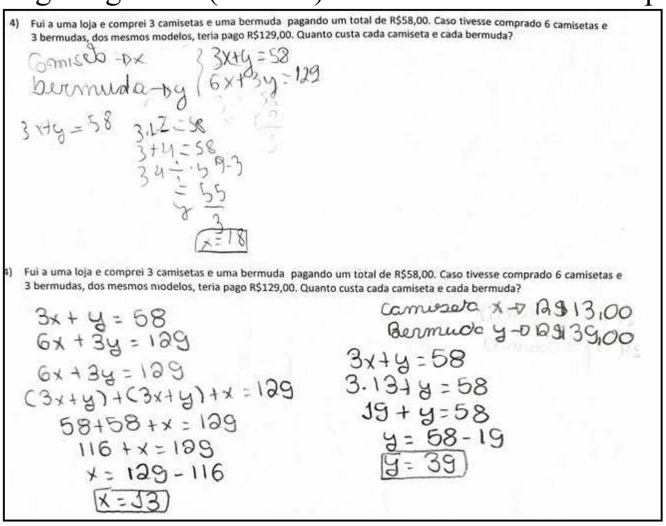
Figura 34 - Estratégia algébrica (sistema) para o Problema 4



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Na Figura 35, nota-se que ambos os alunos identificam os itens com as incógnitas, constroem as equações e o sistema, demonstrando entendimento inicial, para a resolução de um sistema. Não é possível entender o raciocínio do primeiro aluno, que realiza poucos cálculos, não finalizando a solução. Já o segundo aluno faz o agrupamento da primeira informação; na segunda, porém, ele complementa com um x, ao invés do y, de modo que encontra o valor de x, sendo o correto y. No cálculo seguinte, mesmo que não cometesse o erro de multiplicação (3 *x* 13), seu resultado não seria correto.

Figura 35 - Estratégia algébrica (sistema) com cálculos incorretos para o Problema 4

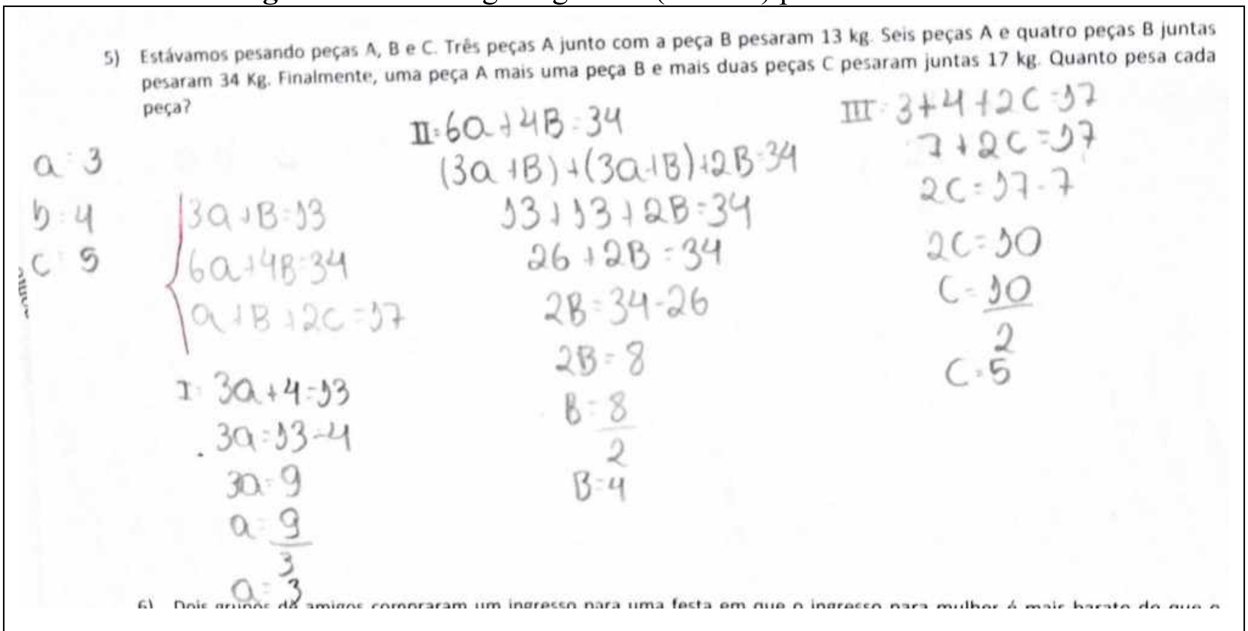


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Problema 5: Estávamos pesando peças A, B e C. Três peças A, junto com a peça B, pesaram 13 kg. Seis peças A e quatro peças B juntas pesaram 34 Kg. Finalmente, uma peça A mais uma peça B e mais duas peças C pesaram juntas 17 kg. Quanto pesa cada peça?

Este exercício apresentava três informações, isto é, o sistema teria três equações. Os alunos questionaram o professor se poderiam "chamar" as peças pelas próprias letras A, B e C, o que foi confirmado pelo professor que ainda reforçou a ideia de que facilitaria o entendimento e a resolução do exercício. Alguns alunos se "assustaram" quando viram uma quantidade maior de informações – o que foi rechaçado pelo professor – e foram, então, orientados a ler os enunciados dos problemas quantas vezes fossem necessárias, e que deveriam ir "tirando" as informações por etapas. O professor disse que havia uma equação até o primeiro ponto final; outra equação até o segundo ponto, e assim por diante. Quinze alunos acertaram o problema, outros acertaram parcialmente ou não realizaram cálculos corretos. Na Figura 36, é possível verificar que o aluno utiliza as próprias letras dos "nomes" das peças, monta o sistema com as três equações, realiza o agrupamento e, por fim, desenvolve corretamente os cálculos. Nota-se que o aluno demonstra falta de atenção na leitura da pergunta final do problema, já que se questiona o peso de cada peça, isto é, ele não coloca "kg" na resposta.

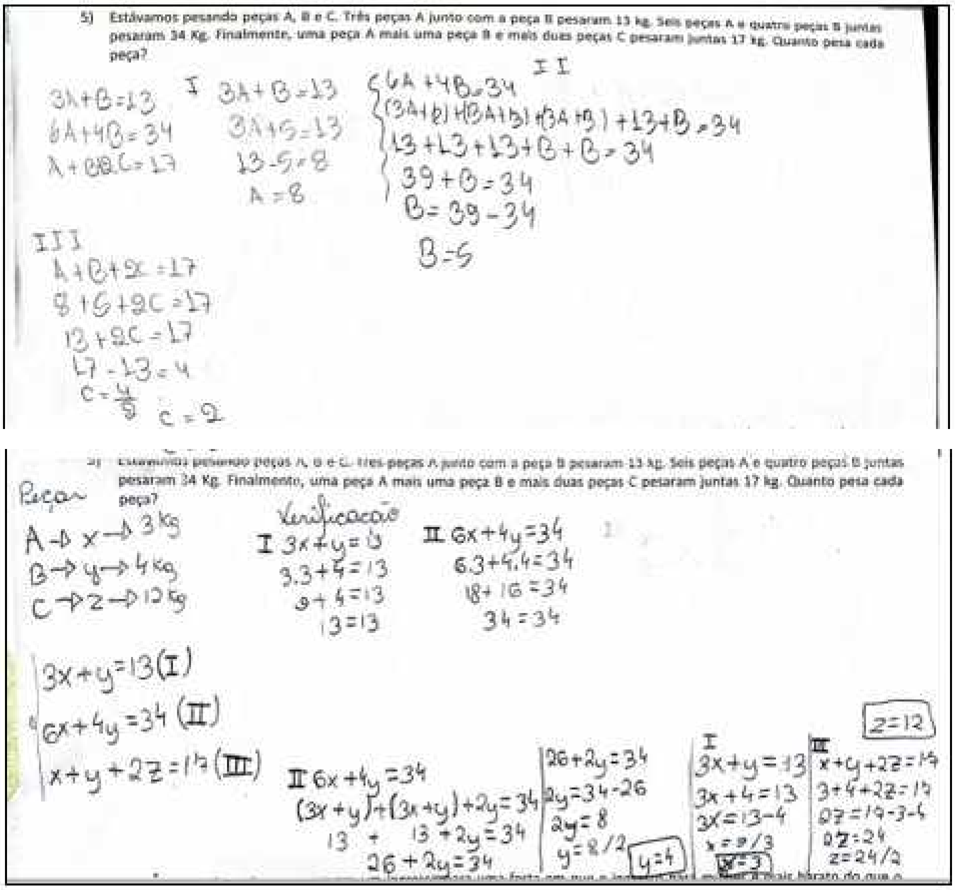
Figura 36 - Estratégia algébrica (sistema) para o Problema 5



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Na Figura 37, observa-se que o primeiro aluno trabalhou com as próprias letras A, B e C. Ele gerou as equações de modo correto. No momento de realizar o agrupamento ou a substituição da equação I, na II, o aluno, ao invés de colocar “duas vezes”, inseriu “três vezes” a equação I, na II, o que fez com que o cálculo ficasse incorreto, já que o valor correto era de 4 kg. Já o segundo aluno realizou todo processo acertadamente e de forma muito organizada. Entretanto, teve um erro ao final, na equação III, onde, na operação 17 - 3 - 4, ele considerou 24 como resultado dessa operação, ou seja, realizou uma soma, ao invés de subtração. É possível notar que o aluno realiza a verificação da terceira equação, assim como das demais, porém, ele apaga. Isso leva este pesquisador a pensar que ao realizar os cálculos da verificação e não chegar ao resultado satisfatório, o aluno apaga; no entanto, não retorna aos cálculos de *z*, ou, mesmo que tenha retornado, não consegue identificar onde que foi seu erro, mantendo-os da forma com que havia feito.

Figura 37 - Estratégia algébrica (sistema) com cálculos parcialmente incorretos para o Problema 5

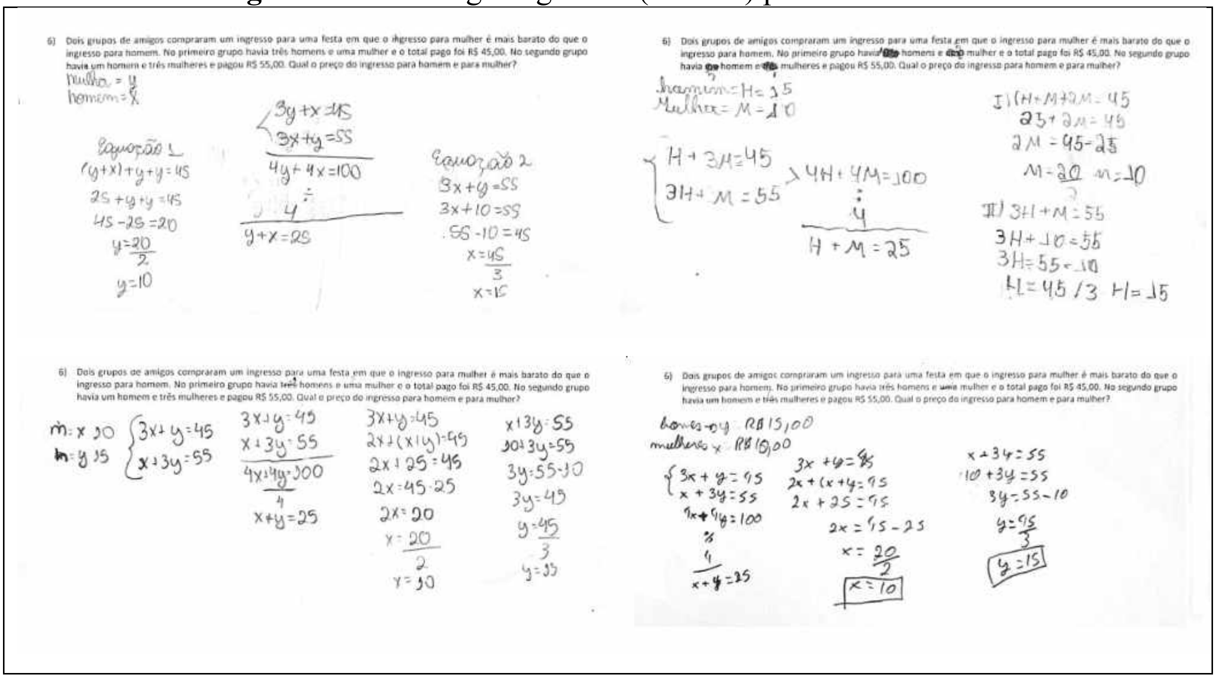


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Problema 6: Dois grupos de amigos compraram um ingresso para uma festa em que o ingresso para mulher é mais barato do que o ingresso para homem. No primeiro grupo, havia três homens e uma mulher e o total pago foi R$ 45,00. No segundo grupo, havia um homem e três mulheres e o valor pago foi R$ 55,00. Qual o preço do ingresso para homem e para mulher?

Este exercício, apesar de se diferir dos demais, foi resolvido corretamente por mais alunos, se comparado ao problema anterior: 18 alunos desenvolveram corretamente os cálculos. Alguns alunos não se prenderam às letras *x* e *y* e utilizaram as iniciais das variáveis, por exemplo, *h* e *m*, para homens e mulheres, respectivamente. Os demais construíram as equações, no entanto, não deram prosseguimento nos cálculos. Na Figura 38, é possível verificar o devido entendimento e desenvolvimento da estratégia por parte de quatro alunos, chegando ao resultado correto.

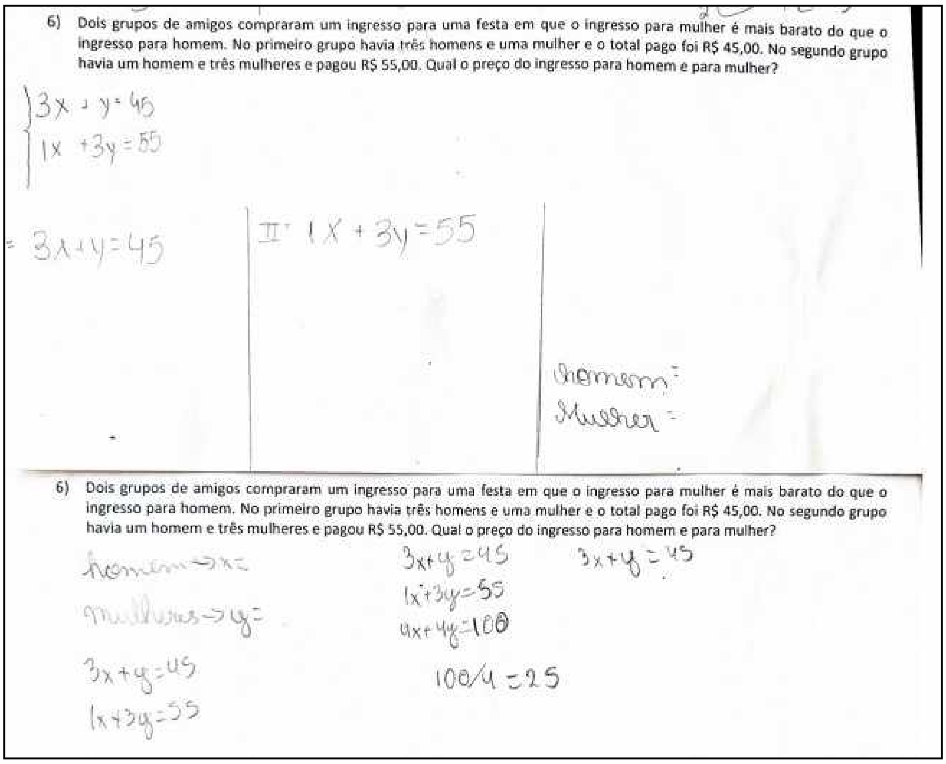
Figura 38 - Estratégia algébrica (sistema) para o Problema 6



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Na Figura 39, o primeiro aluno desenvolveu as equações, porém, não deu prosseguimento nos cálculos. Já o outro aluno, construiu as equações, realizou a estratégia da soma dessas equações, contudo, não efetuou a divisão de toda equação por 4.

Figura 39 - Estratégia algébrica (sistema) sem resolução correta para o Problema 6



6) Dois grupos de amigos compraram um ingresso para uma festa em que o ingresso para mulher é mais barato do que o ingresso para homem. No primeiro grupo havia três homens e uma mulher e o total pago foi R$ 45,00. No segundo grupo havia um homem e três mulheres e pagou R$ 55,00. Qual o preço do ingresso para homem e para mulher?

$$\begin{cases} 3x + y = 45 \\ 1x + 3y = 55 \end{cases}$$

$3x + y = 45$

II: $1x + 3y = 55$

homem =
Mulher =

6) Dois grupos de amigos compraram um ingresso para uma festa em que o ingresso para mulher é mais barato do que o ingresso para homem. No primeiro grupo havia três homens e uma mulher e o total pago foi R$ 45,00. No segundo grupo havia um homem e três mulheres e pagou R$ 55,00. Qual o preço do ingresso para homem e para mulher?

homem → x =
mulheres → y =

$3x + y = 45$
$1x + 3y = 55$

$3x + y = 45$
$1x + 3y = 55$
$4x + 4y = 100$

$100/4 = 25$

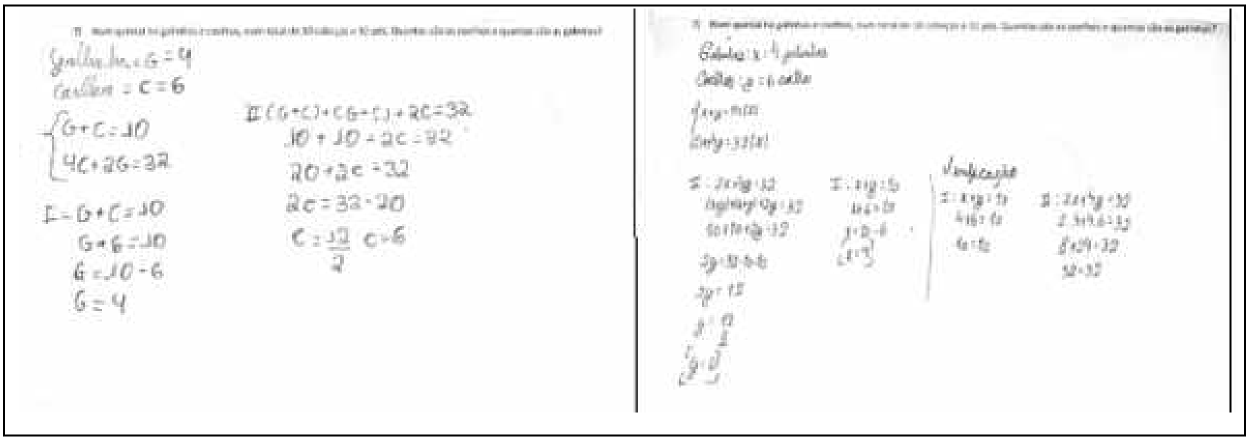
$3x + y = 45$

Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Problema 7: Num quintal há galinhas e coelhos, num total de 10 cabeças e 32 pés. Quantos são os coelhos e quantas são as galinhas?

Os alunos tiveram dificuldade em iniciar o processo de resolução deste problema. Uma aluna perguntou se o “*x* e *y*” seriam os dois animais. Quando o professor respondeu que x e y poderiam representar as quantidades de galinhas e coelhos, respectivamente, os alunos começaram a tentar gerar as equações; alguns usam as iniciais dos animais, isto é, *G* e *C*. Foi possível notar grande interação entre os alunos e entre eles e o professor. Um dos alunos pergunta se seriam duas equações, uma para a quantidade de cabeças e outra para a quantidade de pés; outro, se uma das equações seria x + y = 10; finalmente, alguém pergunta se a segunda equação poderia ser 4C + 2G = 32. Ao receberem resposta afirmativa do professor, resolvem rapidamente o problema. Chegaram ao resultado correto: 18 alunos, como pode ser verificado na Figura 40, com o desenvolvimento de dois alunos. Os demais identificaram as equações, no entanto, não deram prosseguimento nos cálculos.

Figura 40 - Estratégia algébrica (sistema) para o Problema 7



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

A Tabela 1 mostra os acertos e erros nos problemas constantes da sequência didática e que foram resolvidos pelos alunos.

De uma forma geral, os dados constantes na tabela demonstram a evolução dos alunos a cada atividade realizada, isto é, pode-se associar aos resultados: o planejamento, a condução, o envolvimento dos alunos e, especialmente, a potencialidade do material.

Tabela 1 - Distribuição dos alunos por acertos e erros nos problemas

Atividade	**Problema**	**Acertaram**	**Erraram/em branco**	**Total**
1ª Atividade	Problema 1	17	6	23
Desafio I de Problemas	Problema 2	10	13	23
	Problema 3	5	18	23
	Problema 4	3	20	23
3ª Atividade	Problema 5	16	4	20
Desafio II de Problemas e	Problema 6	15	5	20
estratégia aritmética	Problema 7	12	8	20
	Problema 8	10	10	20
	Problema 5	20	4	24
5ª Atividade	Problema 6	19	5	24
Desafio II de Problemas e Sistema	Problema 7	19	5	24
	Problema 8	14	10	24
	Problema 3	21	3	24

6ª Atividade – 2ª Etapa - Desafio III de Problemas sem imagens	Problema 4	20	4	24
	Problema 5	15	9	24
	Problema 6	18	6	24
	Problema 7	18	6	24

Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Da primeira atividade para a terceira, que tratavam de cálculos aritméticos, é nítida a queda na quantidade dos erros, o que leva a entender que os novos conhecimentos foram bem assimilados pelos alunos, já que na segunda atividade o professor apresentou aos alunos a estratégia do agrupamento.

Na quarta atividade, o professor apresenta, pela primeira vez, os Sistemas de Equações, associados à estratégia do agrupamento, o que pode ser entendido como uma intervenção razoavelmente bem-sucedida, já que a quantidade de erros na quinta atividade foi cerca de 20% nos Problemas 5, 6 e 7. O Problema 8, que teve 58% de acerto, necessitava de uma estratégia inicial, diferente dos demais, o que parece não ter sido bem compreendida por uma parte dos alunos. De toda forma, o resultado foi considerado satisfatório.

Já na atividade seis, em que os problemas se apresentavam sem imagens, é possível verificar que os alunos se saíram bem, demonstrando, mais uma vez, a aquisição e compreensão dos novos conhecimentos, já que empregaram os procedimentos de forma satisfatória. Considerando os cinco problemas, verificaram-se 77% de acerto, variando um pouco para baixo, ou para cima, de acordo com cada problema. O Problema 5, em que se nota um percentual menor de acerto (62,5%), possuía três informações, o que levou um número maior de alunos a se confundir com os cálculos e, consequentemente, foram levados ao erro.

6.2 Análises

6.2.1 Análise da potencialidade significativa do material

Conforme mencionado, a potencialidade significativa do material de aprendizagem que nesta pesquisa está sob a forma de uma sequência didática, será analisada seguindo os itens: (i) a estrutura lógica de organização das atividades; (ii) os conhecimentos prévios evidenciados na resolução de problemas e as relações com a estratégia aprendida; e (iii) a atividade docente na aprendizagem de procedimentos.

6.2.1.1 A estrutura lógica de organização das atividades

Uma das condições indicadas por Ausubel (2003) para que ocorra a aprendizagem significativa é o material a ser trabalhado: para ser potencialmente significativo, deve possuir uma estrutura lógica de organização das atividades, as quais devem ter objetivos interligados, e não apenas sobrepostos. No planejamento do material de aprendizagem, é necessário analisar quais aspectos da estrutura cognitiva dos aprendizes são mais relevantes para relacionar com o novo conceito ou procedimento e até que ponto há clareza e estabilidade naqueles aspectos.

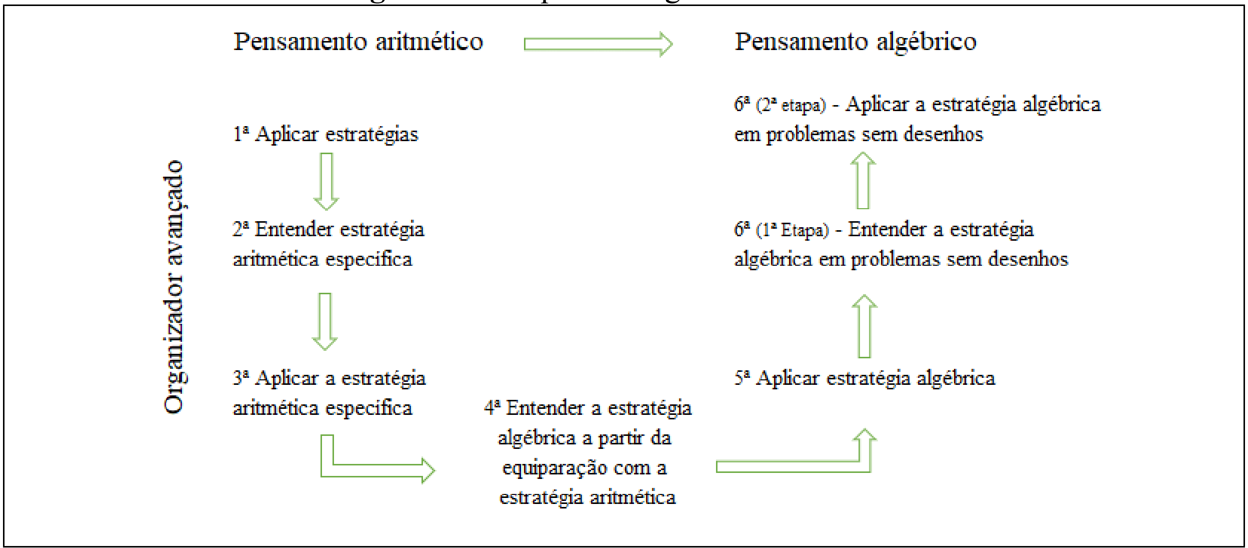
Uma importante particularidade que se buscou neste trabalho, assim como sugerem Lins e Gimenez (2001), Blanton e Kaput (2005) e Arcavi (2006), entre outros, é fazer a articulação entre o pensamento algébrico e aritmético. Em linha similar a esses autores, a BNCC (BRASIL, 2018) indica que, nas diversas áreas, deve-se resgatar e ressignificar as aprendizagens dos anos iniciais do ensino fundamental. À vista disso, optou-se por planejar problemas com duas informações e dois valores desconhecidos na forma pictórica, considerando relevante o conhecimento de estratégias aritméticas já aprendidas pelos alunos nos anos anteriores. Como entre as estratégias utilizadas poderia não haver clareza e disponibilidade quanto à estratégia de agrupamento (os dados mostram que realmente isso aconteceu com a maioria dos participantes), essa estratégia foi apresentada pelo professor após o diagnóstico e foi requerida na sequência de atividades.

Considera-se que essa primeira parte do material (primeira, segunda e terceira atividades) pode ser considerada um organizador avançado; no caso, trata-se de um recurso instrucional que colaborou para estabelecer uma ligação entre aquilo que os alunos já sabiam e a nova estratégia algébrica que seria aprendida na sequência.

Na perspectiva de Ausubel (2003), outro princípio a ser atendido por um material potencialmente é o de levar os alunos a estabelecer semelhanças e diferenças entre as ideias anteriores e as novas e resolver contradições reais ou aparentes. Levando isso em conta, na quarta atividade, os mesmos problemas iniciais foram utilizados para o professor apresentar a estratégia algébrica a partir das estratégias aritméticas de agrupamento, buscando as semelhanças e diferenças entre os métodos empregados; na quinta atividade, os alunos ainda se apoiavam nos desenhos, com objetivo de favorecer as relações de semelhança entre as estratégias aprendidas. Finalmente, a última atividade com problemas sem figuras, visava reconciliar algumas inconsistências reais ou aparentes, a combinar ou integrar ideias semelhantes que eram logicamente relacionais umas com as outras e a tornar as relações mais claras e transferíveis.

A Figura 41, a seguir, mostra os objetivos das atividades em uma sequência lógica.

Figura 41 - Sequência lógica das atividades

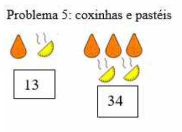
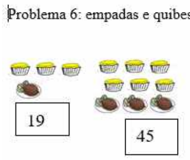
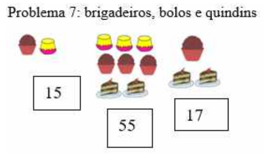
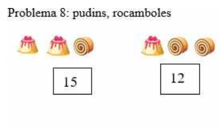


Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Duas séries de problemas com desenhos foram trabalhadas no âmbito do pensamento aritmético e depois no pensamento algébrico. Note-se um grau crescente de dificuldade na primeira série de problemas com imagens: eles continham duas informações e duas incógnitas; depois, três informações e três incógnitas e, finalmente, apesar de ter duas informações e duas incógnitas, estes últimos requeriam a estratégia de somar as equações para depois realizar o agrupamento – o que pode ser considerado um pouco mais difícil para os alunos. Estes níveis de dificuldade podem ser verificados também na terceira série de problemas sem desenhos, trabalhadas apenas no âmbito do pensamento algébrico. Na Figura 42 constam as séries de problemas e os referidos sistemas algébricos com três cores que, partindo da mais clara para a mais escura, indicam os níveis de dificuldade.

Figura 42 - Séries de problemas e níveis de dificuldade

$\begin{cases} 3x = 27 \\ 2x + 2y = 34 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y = 43 \\ 4x + 3y = 93 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 34 \\ x + 4y + 3z = 41 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + y = 26 \\ x + 3y = 22 \end{cases}$

			
$\begin{cases} x+y=13 \\ 3x+2y=34 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y=19 \\ 6x+3y=45 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=15 \\ 3x+3y+2z=55 \\ x+2z=17 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y=15 \\ x+2y=12 \end{cases}$
1-Três empadinhas custam R$ 12,00. Sabe-se que 2 empadinhas e 3 coxinhas custam R$ 29,00. Quanto custa cada empadinha e cada coxinha?	2-Comprei 2 canetas e uma lapiseira por R$ 28,00. Se tivesse comprado 5 canetas e duas lapiseiras (iguais às anteriores) teria pago R$64,00. Quanto custa cada uma?	3-Quatro livros custam R$48,00. Sabe-se que 3 desses mesmos livros e 2 revistas em quadrinhos custam R$50,00. Quanto custa cada livro e cada revista em quadrinho?	4-Fui a uma loja e comprei 3 camisetas e uma bermuda pagando um total de R$58,00. Caso tivesse comprado 6 camisetas e 3 bermudas, dos mesmos modelos, teria pago R$129,00. Quanto custa cada camiseta e cada bermuda?
$\begin{cases} 3x=12 \\ 2x+3y=29 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y=28 \\ 5x+2y=64 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x=48 \\ 3x+2y=50 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y=58 \\ 6x+3y=129 \end{cases}$
5-Estávamos pesando peças A, B e C. Três peças A, junto com a peça B, pesaram 13 kg. Seis peças A e quatro peças B juntas pesaram 34 Kg. Finalmente, uma peça A mais uma peça B e mais duas peças C pesaram juntas 17 kg. Quanto pesa cada peça?	6-Dois grupos de amigos compraram um ingresso para uma festa em que o ingresso para mulher é mais barato do que o ingresso para homem. No primeiro grupo havia três homens e uma mulher e o total pago foi R$ 45,00. No segundo grupo havia um homem e três mulheres e pagou R$ 55,00. Qual o preço do ingresso para homem e para mulher?	7-Num quintal há galinhas e coelhos, num total de 10 cabeças e 32 pés. Quantos são os coelhos e quantas são as galinhas?	
$\begin{cases} 3A+B=13 \\ 6A+4B=34 \\ A+B+2C=17 \end{cases}$	$\begin{cases} 3H+M=45 \\ H+3M=55 \end{cases}$	$\begin{cases} G+C=10 \\ 2G+4C=32 \end{cases}$	

Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

A organização de vários problemas em níveis de dificuldade procurou atender alguns princípios da aprendizagem significativa de procedimentos. Na aprendizagem de estratégias, o sujeito deve aprender como, onde e de que forma utilizar as técnicas que domina. Como este processo envolve tomada de decisão e o controle da aplicação dessas técnicas, planejou-se uma série de situações (com e sem desenhos, com duas ou três equações e incógnitas, com letras *x, y, a, b* etc.) que propiciassem aos alunos várias oportunidades para que eles pudessem adaptar os procedimentos às necessidades específicas de cada problema. A variedade de situações – apesar de manterem certas semelhanças – visava levar os alunos a refletirem sobre os erros e corrigi-los, já que, conforme Coll e Valls (1998), a aprendizagem significativa é obtida por reconstrução da própria prática como produto de uma reflexão e tomada de consciência sobre o que fazer e como fazer.

6.2.1.2 Os conhecimentos prévios evidenciados na resolução de problemas e as relações com a estratégia aprendida

A primeira atividade da sequência didática buscou identificar o conhecimento prévio dos alunos, ou seja, as estratégias aritméticas de resolução de problemas já aprendidas nos anos anteriores. Assim como sugere Pozo (1998), a resolução de situações-problema é uma das maneiras de se realizar esse diagnóstico – que tem, como um dos objetivos, ajudar o professor a conhecer melhor quais as ideias principais dos alunos a respeito do assunto e assim planejar o seu trabalho.

Constatou-se, na primeira atividade, que a maior parte dos alunos sabia empreender as principais etapas do processo de resolução de um problema, conforme resumidas por Brito (2011): compreensão do texto (lembrando que as figuras podem ter colaborado nessa compreensão); categorização do problema (as operações aritméticas necessárias foram identificadas); estimativa de solução (foram utilizadas tentativas, para encontrar os resultados); planejamento de solução (as operações foram empregadas na ordem correta, a partir das informações); e monitoramento do procedimento e do resultado (lembrando que a estratégia de tentativas utilizada requer idas e vindas, durante o processo).

No entanto, a maioria dos alunos não utilizou a estratégia de agrupamento e substituição, considerada ancoradouro para a estratégia algébrica. Na segunda atividade, é possível verificar, na descrição da aplicação, que vários alunos participavam ativamente da apresentação do professor, antecipando as ações, sugerindo agrupamentos e substituições, apontando caminhos, dando os valores dos bichinhos etc. Tais comportamentos parecem demonstrar relações entre os conhecimentos anteriores – em que, em tentativas, atribuíam valores numéricos aos bichinhos e substituíam nas informações para validar os resultados – a esta nova maneira mais organizada de encaminhar a estratégia. O aluno demonstra, então, que mobiliza seus conhecimentos prévios sobre as operações básicas e os utiliza em um procedimento novo aprendido; o agrupamento realizado na imagem constante nos enunciados (os alunos circundavam os bichinhos) e a montagem dos algoritmos das operações aritméticas são procedimentos que sugerem a ocorrência de aprendizagem significativa desta estratégia.

Na terceira atividade, outros problemas foram resolvidos pela técnica aprendida, ainda escopo do pensamento aritmético. O conhecimento dessa estratégia se apresentou com certa clareza – já que cerca de 70% dos alunos acertaram os problemas – o que foi considerado como um aspecto relevante da estrutura cognitiva para servir, em momento posterior, como ancoradouro para aprendizagem da estratégia algébrica.

Pode-se identificar, também, a aquisição das técnicas e estratégias apreendidas, conforme Coll e Valls (1998). Segundo os autores, no âmbito da aprendizagem significativa, é esperado do aluno que ele saiba executar com correção as ações, respeitando a ordem e os passos necessários, sem cometer erros, seja nas operações em particular, seja no conjunto. Pelo que mostram os dados, a ordem de passos foi seguida e poucos erros foram cometidos nos agrupamentos, substituições e operações efetuadas. Convém notar certa autonomia de alguns alunos em empregar o procedimento de agrupar os valores e de substituí-los na equação seguindo uma ordem diferente daquela ensinada pelo professor. No Problema 7 (dos doces), em que havia três equações e três incógnitas, alguns alunos iniciaram o processo de resolução seguindo a ordem de substituir a primeira informação na segunda; já outros perceberam que poderia iniciar com três agrupamentos, sendo dois deles com dados da primeira, e outro com dados da terceira informação – diminuindo, assim, o número de passos (Figura 16).

Segundo os referidos autores, o aluno deve também decidir sobre a adequação do procedimento em um contexto: note-se que o procedimento de somar os valores no Problema 8 foi decidido pela maioria. Os autores indicam também que se espera que os alunos realizem o procedimento com certo grau de automaticidade, de modo a poder liberar esforço cognitivo para monitorar suas estratégias. Verificou-se esta automaticidade quando parte dos alunos não realizava o agrupamento nas imagens, isto é, entendia que uma das informações "cabia", uma, duas ou três vezes em outra informação e, para agilizar os primeiros passos, iniciava os cálculos.

Duas ideias enraizadas foram mobilizadas para a aprendizagem significativa da ESA: a estratégia aritmética de cálculo por agrupamento e substituição (aprendida nas atividades anteriores) e as técnicas de resolução de equações do 1º grau (já aprendidas nas aulas anteriores à aplicação da sequência didática aqui analisada). Aliado a essas ideias, o professor apresentou, na atividade 4, a estratégia de transformar as informações dos problemas em equações e, consequentemente, em um sistema de equações.

Analisando a descrição dos diálogos estabelecidos durante a aula, verifica-se que os comentários, as respostas às perguntas do professor, as antecipações de procedimentos, as observâncias de erros propositais efetuados pelo professor e até mesmo o vocabulário utilizado – nota-se que, a princípio, os alunos utilizavam-se da palavra "cabia" e, posteriormente, empregavam o "agrupamento" –, parecem indicar os processos de diferenciação progressiva e de reconciliação integradora presentes na aprendizagem significativa. Os alunos pareciam diferenciar os procedimentos numéricos dos algébricos; em simultâneo, percebiam as semelhanças e levantavam questionamentos para resolver contradições e reconciliar as inconsistências reais ou aparentes. Na execução da tarefa (atividade 5), parecem ter reconhecido e entendido a semelhança entre agrupar os salgados/bichinhos e atribuir seu valor numérico e agrupar os mesmos salgados/bichinhos e atribuir uma equação, já que muitos empregaram corretamente este procedimento.

A reconciliação integradora entre os procedimentos aritméticos e os algébricos pode ter tornado as ideias mais claras e transferíveis quando os alunos passaram a resolver os problemas sem imagens da Atividade 6. Mesmo sem o auxílio das figuras para designar as letras que constituiriam as incógnitas e ajudar na percepção do agrupamento, vários alunos conseguiram aplicar a estratégia nova aprendida nesse novo contexto.

Aprender estratégia de maneira significativa implica, de acordo com Coll e Valls (1998), em reconstruir a própria prática, requer reflexão e tomada de consciência sobre o que fazer e como fazer. Considera-se que os alunos tenham adquirido certo controle para aplicar as técnicas já conhecidas (como a resolução de equações) para adaptá-las às necessidades específicas de cada problema. A leitura e interpretação do enunciado dos problemas sem imagens evidencia a primeira etapa de solução, sendo a compreensão do texto, amparada pela habilidade verbal para ler e compreender o problema e entender a natureza matemática do mesmo, conforme Brito (2011).

Ancorado nas ideias supracitadas, é importante salientar que em alguns problemas os alunos não se prendem às incógnitas x e y: utilizam as letras A, B e C para representar as peças do Problema 5 (Figura 36), as iniciais das palavras “homem” e “mulher” do Problema 6 (Figura 38), o que indica a construção, por parte dos alunos, de certa autonomia, por meio da reflexão sobre procedimentos aprendidos.

6.2.1.3 A atividade docente

Conforme Ausubel (2003), a aprendizagem significativa pode se dar por recepção verbal, em que os conceitos, procedimentos e princípios são apresentados aos alunos por um material potencialmente significativo, ou por descoberta, quando é necessário que o aprendiz descubra os elementos do conteúdo a ser estudado, apoiado na criação de proposições que representam soluções para os problemas. No presente trabalho, considera-se que a estratégia adotada foi a de aprendizagem por recepção verbal, em que se evidencia a importância da atuação do professor no processo. Com base em Coll e Valls (1998) – para quem a aprendizagem de procedimentos se consolide com a prática –, puderam ser analisadas algumas funções da atividade docente no contexto ativo de aprendizagem por recepção verbal: a exposição; a prática guiada e, por fim, a prática autônoma ou independente.

A função de exposição pôde ser verificada na introdução de cada atividade cuja descrição do objetivo se inicia com a palavra "entender" (veja Quadro 8, segunda, quarta e sexta atividade). Na segunda atividade, o professor expôs a estratégia aritmética que viria a ser usada para resolver os problemas daquela e da próxima atividade. O professor valeu-se da lousa para desenhar legendas na forma de figuras de modo a representar as imagens contidas nos problemas; com o auxílio dessas legendas e utilizando uma linguagem apropriada, expõe a técnica a ser aprendida, explicando o procedimento a ser empregado e as operações envolvidas, questionando os alunos a respeito do que estavam percebendo a cada ação executada e acerca das ações futuras. Nota-se que, após resolver os dois primeiros problemas com a estratégia aritmética de agrupamentos, o professor inicia o terceiro problema expondo a diferença deste em relação aos primeiros (já que havia três informações e três valores desconhecidos), mas já é antecipado por vários alunos que percebem a possibilidade de realizar um agrupamento na segunda informação a partir da primeira. Isso demonstra a prática guiada: os alunos executam algumas ações de maneira autônoma, mas necessitam de orientação para os passos seguintes. Ao término da exposição, o professor solicitou que os alunos replicassem os modelos aprendidos e incentivou a expressão verbal do raciocínio envolvido na estratégia, o que foi amplamente atendido.

A exposição pode ser vista também na quarta atividade, cujo objetivo era levar o aluno a entender uma estratégia algébrica (sistema) a partir da equiparação com a estratégia aritmética. O professor retoma a sequência de ações pertinentes à estratégia aprendida, compara as semelhanças (agrupamento, substituição das figuras) e as diferenças (formação de equações, substituição de expressões algébricas em vez de valores numéricos) e orienta os procedimentos a serem empregados. É possível notar, no decorrer desta e das demais atividades, a prática guiada em várias situações: quando o docente questiona os alunos acerca da quantidade de informações – e consequentemente de equações – do problema, quando os faz perceber que não seria possível agrupar os dados antes de somar as equações etc. Ainda nessa ação docente, nota-se que o professor orientou para que realizassem os procedimentos aprendidos, isto é, que tivessem atenção às informações de cada problema e ao que se pedia em cada um deles, fossem eles com imagens (segunda e quarta atividades) ou sem (sexta atividade) e que resgatassem os procedimentos na memória para adequá-los às situações propostas com vistas à criação de significados para aquelas ações.

Ausubel (2003) considera que a linguagem é um importante facilitador da aprendizagem significativa por recepção e pela descoberta. A linguagem adequada do professor pode ajudar a clarificar os significados e torná-los mais precisos e transferíveis. Nas funções de exposição e de prática guiada, houve preocupação do professor em explicar, sempre com vocabulário pertinente, a execução e os elementos da ação, a ordem a ser seguida e os benefícios alcançados com a aprendizagem daquela estratégia. Na explicação, não faltou referência aos possíveis obstáculos (por exemplo, quando o professor faz os alunos perceberem que não era possível agrupar os valores) e às pistas adequadas para o aluno refletir sobre os procedimentos empregados (quando repete a escrita da equação erroneamente e indaga se está correta), de modo a conduzir suas ações de maneira independente. Assim, a função docente para a prática autônoma pode ser analisada nas atividades cujos objetivos se iniciam com a palavra "aplicar" (veja Quadro 8, terceira, quinta e sexta (2.ª etapa) atividades. A tarefa de resolver os problemas proporcionou aos alunos a oportunidade de traçar os caminhos independentemente.

O desempenho na última atividade – cerca de 80% de acertos – parece demonstrar certa autonomia para conduzir e replicar as ações: os alunos conseguiram adequar a estratégia aprendida naqueles problemas com representações pictóricas aos problemas com enunciados verbais.

6.2.2 Análise dos aspectos do desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de estratégias aritméticas de resolução de problemas

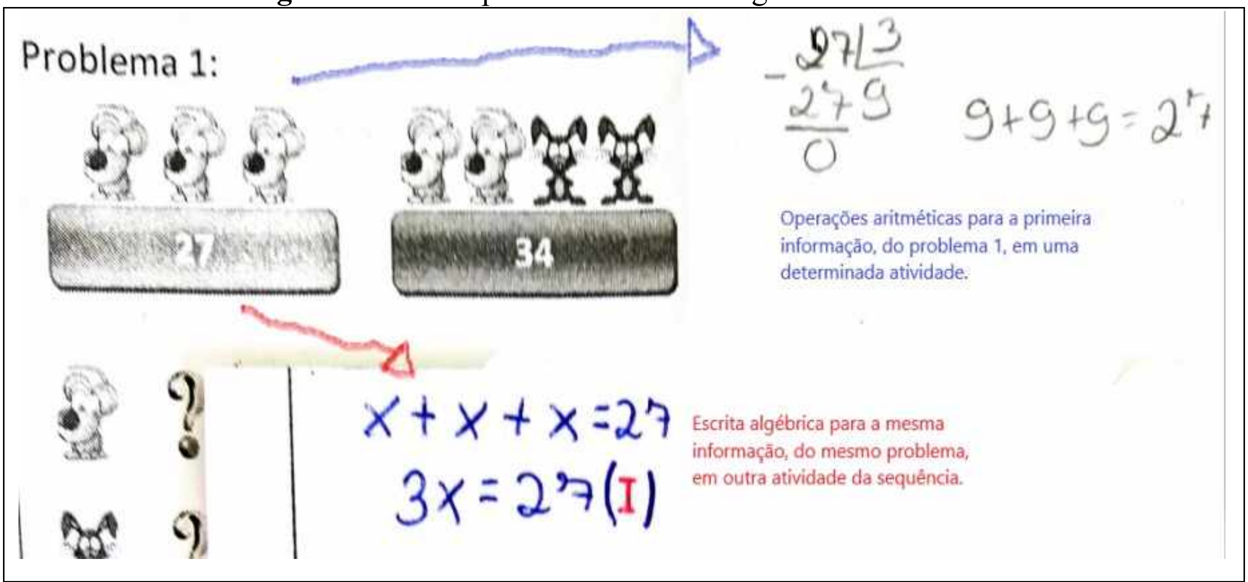
Dimensões distintas da álgebra – conforme anunciadas por Usiskin (1995) – foram notadas nas atividades da sequência: propriedades das operações numéricas puderam ser generalizadas com escrita algébrica, letras puderam ser vistas como incógnitas e operações com monômios e polinômios foram realizadas.

Com relação à primeira dimensão, a Aritmética Generalizada pode ser identificada quando o aluno generaliza as propriedades das operações e descobre padrões aritméticos. Na sequência didática apresentada, é possível identificar a generalização de operações aritméticas na resolução de um mesmo problema em momentos diferentes: por exemplo, as operações numéricas do primeiro problema (Figura 43) $27 \div 3 = 9$ e $9 + 9 + 9 = 27$ puderam ser generalizadas posteriormente para a escrita algébrica $x + x + x = 27 \Rightarrow 3x = 27$. Nessa situação, o aluno teve a oportunidade de se valer de operações numéricas na resolução de um problema para, depois dos novos conhecimentos, empregar a escrita algébrica para representar os mesmos procedimentos.

Ainda nessa dimensão referente à aritmética generalizada, pode-se utilizar algumas ideias de Blanton e Kaput (2005), quando estes se referem a um início de manifestação do pensamento algébrico em situações aritméticas. Por exemplo, a determinação de termos desconhecidos em uma igualdade pôde ser observada ainda no escopo da estratégia aritmética de tentativas empregada por quase todos os alunos para resolver os problemas da primeira atividade. Ainda que essa estratégia não tenha sido utilizada para ser generalizada em uma estratégia algébrica, fica evidente, com base nos autores, um início de pensamento algébrico. Outra situação apontada pelos autores refere-se à utilização da igualdade como expressão de uma relação entre quantidades e não apenas como resultado de uma operação: para empregar os procedimentos de substituição de valores (no campo aritmético) e de expressões (no campo algébrico), os alunos devem ter atribuído significado ao sinal de "=" nessa perspectiva.

Evidentemente, parte da generalização aritmética aqui apontada já havia ocorrido em aulas anteriores, em que os participantes dessa pesquisa conheciam e resolviam equações; no entanto, o contexto criado, contendo os problemas e a sequência de sua apresentação, pode ter contribuído para o processo de generalização tão importante no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Figura 43 - Exemplos de Dimensão Álgebra Generalizada



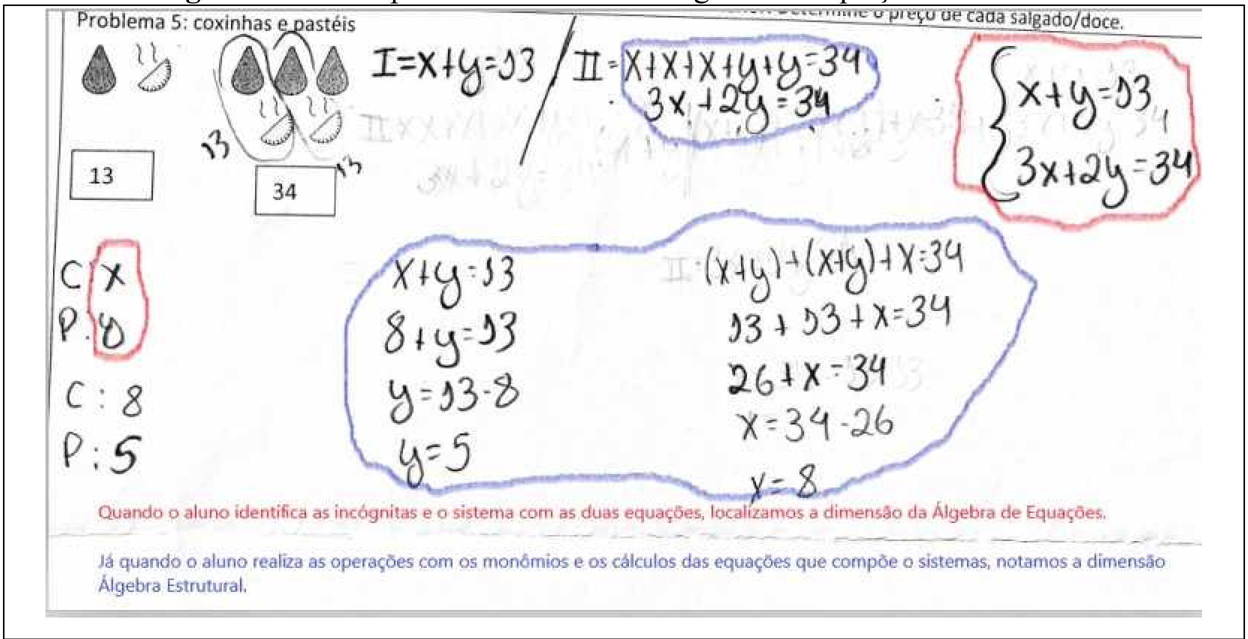
Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Na segunda dimensão, Álgebra de Equações, as letras são reconhecidas como incógnitas nas equações e nos sistemas de equações que traduziam os modelos de resolução dos problemas contidos na presente sequência didática. Identificadas as equações, e consequentemente o sistema que representava o problema, a resolução prosseguia utilizando-se os procedimentos aprendidos. Essa dimensão é identificada quando, de forma autônoma, os alunos resolveram os problemas da quinta e da sexta atividade: além de identificar as incógnitas, representá-las por letras, montar as equações e entender e resolver o sistema como um conjunto de equações simultâneas, os alunos relacionavam os valores encontrados com as perguntas do problema, validando a solução.

Por fim, a terceira dimensão – Álgebra Estrutural – é notada, nesta pesquisa, quando surgem as operações com monômios e polinômios. No momento que surgiam esses itens, o professor recordava essas operações e as possíveis simplificações – na ação referente à função da prática guiada – o que facilitou a aprendizagem dos alunos. Essas manipulações algébricas podem ser notadas em todos os problemas da quinta e da sexta atividade; nota-se que grande parte dos alunos realizou corretamente as operações com os monômios, aplicou a propriedade distributiva e reduziu os termos semelhantes, o que parece ter contribuído para o desenvolvimento do pensamento algébrico nessa dimensão.

Na Figura 44, nota-se as dimensões da Álgebra de Equações e Estrutural.

Figura 44 - Exemplos das Dimensões: Álgebra de Equações e Estrutural



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Usiskin (1995) propõe, ainda, uma quarta dimensão – Álgebra Funcional – na qual as letras se apresentam como variáveis, expressando relações e funções entre grandezas, ou seja, essa dimensão não é identificada nas atividades aqui propostas, e por isso não foi tratada.

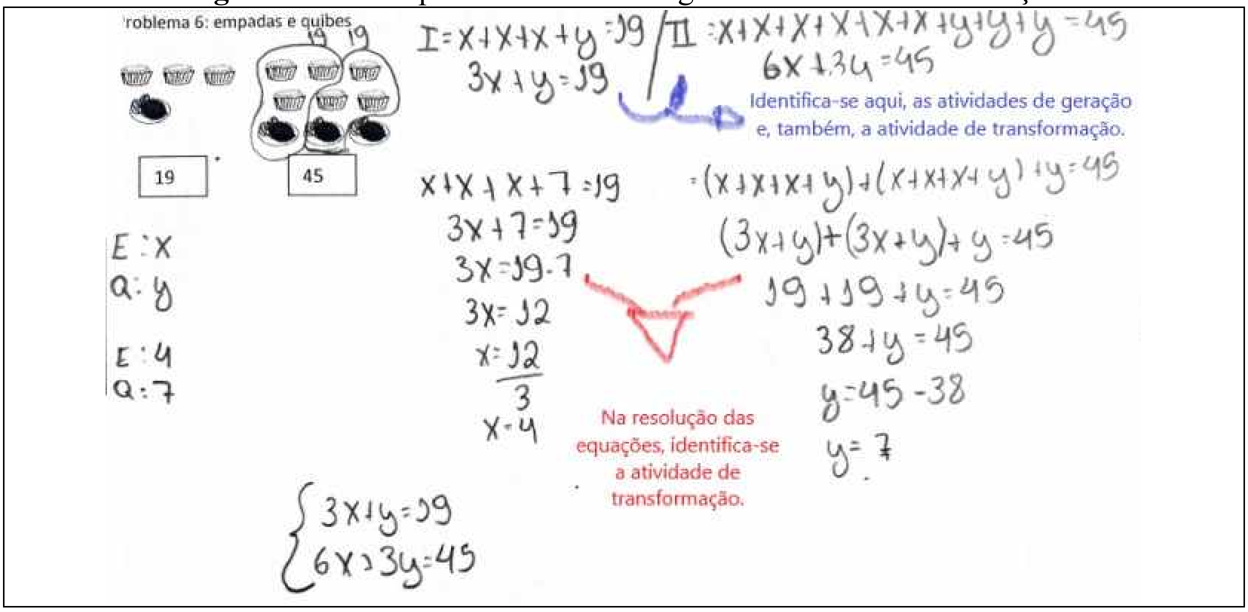
Quando um aluno formula equações e sistemas de equações, tem-se um exemplo de uma atividade geracional e, ao resolver as equações, tem-se uma atividade de transformação, segundo Kieran (2004; 2007).

A atividade geracional pode ser identificada em todos os problemas da quinta e sexta atividade da sequência didática. Na quinta atividade, em que os alunos dispunham de representações pictóricas, todos eles nomeavam os elementos dessas representações por *x* e *y*, mesmo tendo o professor informado nas primeiras aulas que poderiam utilizar qualquer letra para designar as incógnitas. Já na sexta atividade, diferentemente da anterior, os problemas não tinham imagens, o que poderia ter acarretado maior dificuldade em denominar as incógnitas, pois, exigia leitura e interpretação dos enunciados; apesar disso, grande parte dos alunos não teve dificuldades e alguns deles não se apegaram às letras *x* e *y*; utilizaram as iniciais das palavras, como H e M, para "homem" e "mulher". Intituladas as incógnitas, os alunos não demonstraram dificuldade em gerar as equações, e, consequentemente, os sistemas de equações, fossem esses formados por duas ou três incógnitas.

A atividade de transformação pode ser identificada na quinta e na sexta atividade, quando os alunos realizam os cálculos de redução de termos semelhantes e a resolução das equações e os sistemas.

Na figura 45, é possível verificar as atividades supracitadas, quando o aluno nomeia as grandezas com as incógnitas *x* e *y* e produz as equações (geracional) e quando o aluno reduz os termos semelhantes e resolve as equações e, em consequência, o sistema (transformação).

Figura 45 - Exemplos das Atividades geracional e de transformação



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Seja com base nas dimensões identificadas por Usiskin (1995), seja pelos tipos de ação apontados por Kieran (2004; 2007), considera-se que as atividades propostas tenham proporcionado oportunidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Apesar de os estudantes já terem aprendido equações do primeiro grau antes da participação dessa pesquisa, eles demonstraram entendimento das ações referentes a identificar e nomear as incógnitas em problemas com ou sem imagens, a identificar e reduzir termos semelhantes e a reconhecer, gerar e resolver equações e sistemas de equações, já que na quinta e na sexta atividade tiveram 76% de acertos, mostrando, assim, compreensão da estratégia de resolução aprendida.

Dessa maneira, a análise realizada neste capítulo indica que o objetivo geral das atividades foi alcançado conforme se pretendia: promover a aprendizagem significativa e contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente, precisamos retomar à pergunta introdutória desta pesquisa: **Como uma sequência didática sobre o conteúdo Sistemas de Equações, direcionada a alunos do oitavo ano do ensino fundamental e com base na Resolução de Problemas, pode contribuir para a aprendizagem significativa do tema?**

Para responder, devemos refletir que, para o desenvolvimento de todo o processo desta pesquisa, foi necessário um planejamento para a aplicação da sequência didática e isso exige do professor organização, estudo do material e do conteúdo a ser trabalhado; requer também certo conhecimento acerca do comportamento dos alunos.

O trabalho é amparado na teoria de Ausubel (2003), que trata do processo de aprendizagem significativa e indica duas condições: que o material a ser trabalhado seja potencialmente significativo e que o aprendiz busque relacionar as novas ideias com aquelas relevantes e presentes em sua estrutura cognitiva. Para a primeira condição, as atividades desta pesquisa foram planejadas e organizadas de forma lógica, com objetivos interligados, e não apenas sobrepostos. Já para promover a segunda condição, esta pesquisa buscou na aritmética o apoio necessário para introduzir a álgebra, pois, se entendeu que as estratégias aritméticas poderiam se constituir em um conhecimento com certa clareza e estabilidade, facilitando, assim, o entendimento dos alunos no que se refere ao conteúdo sistemas de equações. Esta articulação da aritmética com a álgebra é sugerida por diversos autores, entre eles, Lins e Gimenez (2001), Blanton e Kaput (2005), Arcavi (2006) e Van de Walle (2009).

Para citar um pouco das atividades desenvolvidas, é importante mencionar a aplicação desta sequência didática na forma de um estudo piloto em outra escola, da qual este pesquisador era também professor. A aplicação do piloto foi essencial para êxito final, já que puderam ser modificadas uma parte do material e a condução da aplicação. Assim, o material foi amplamente revisto, sempre com o objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos e facilitar a aprendizagem significativa dos procedimentos empregados.

Apesar de não ter sido aplicada a metodologia resolução de problemas, alguns aspectos teóricos do tema serviram para embasar a organização e os resultados das atividades apresentadas nessa pesquisa, por exemplo, a relevância do papel desse professor/pesquisador no planejamento e organização das atividades pertinentes ao conteúdo trabalhado; a importância da condução durante a aplicação, sempre envolvendo ativamente os alunos, isto é, colocando-os como o centro de todo o processo, assim como sugerem Onuchic e Allevato

(2011). Outra perspectiva teórica relevante e identificada nesta pesquisa é a que se refere às etapas de resolução de problemas proposta por Brito (2006), tais como: compreensão do texto; representação do problema; categorização do problema; estimativa de solução; planejamento de solução; monitoramento do procedimento; e monitoramento do resultado.

Dessa forma, não se pode negar a importância atribuída aos problemas utilizados ao longo da sequência. Conforme concebido por Echeverría e Pozo (1998), o ensino baseado na resolução de problemas pressupõe promover nos alunos a utilização do conhecimento prévio e o domínio de procedimentos adequados ao raciocínio empregado na busca de solução. Mais que a aplicação de conhecimentos, considera-se que os problemas trabalhados ao longo da sequência tenham contribuído para a atribuição de significados pelos alunos aos conceitos e procedimentos relativos aos sistemas de equações.

A sequência didática contemplou algumas dimensões propostas por Usiskin (1995) para as atividades algébricas, como a Álgebra Generalizada – quando os alunos, em uma atividade, representaram um problema aritmeticamente e, depois, em outra atividade, representava o mesmo problema em escrita algébrica; a Álgebra de Equações, quando as letras foram utilizadas como incógnitas nas equações e nos sistemas de equações, traduzindo, assim, um modelo para representar uma situação-problema e a Álgebra Estrutural, quando os monômios e polinômios foram manipulados para se realizar as transformações necessárias nos procedimentos de resolução. Na descrição das produções dos alunos, foi possível verificar as atividades geracionais e transformacionais, expostas por Kieran (2004; 2007). A geração é identificada quando os alunos identificam e escrevem as equações; as transformações são observadas ao longo do processo de resolução das equações e dos sistemas.

Todos os trabalhos apresentados na revisão bibliográfica desta pesquisa valeram-se da resolução de problemas. Evidencia-se aqui, o trabalho de Branco (2008), que, assim como esta pesquisa, promoveu a articulação entre os conhecimentos aritméticos e algébricos nos processos de resolução e concluiu que esta metodologia contribuiu para que os alunos atribuíssem sentido às situações que envolviam as equações. A preocupação com a criação de significados pode ser identificada em outros trabalhos que apresentaram problemas relacionados à realidade dos alunos (SOUZA, 2009) ou que se valeram de recursos tecnológicos (SILVA, 2017).

Em todos eles, pode-se verificar a importância atribuída ao desenvolvimento do pensamento algébrico, apontando os resultados positivos alcançados pelos alunos, seja na compreensão da letra como número generalizado e como incógnita; seja na facilidade de resolver problemas, equações e sistemas ou mesmo nas mudanças de postura dos alunos, no aumento da motivação e da autoconfiança.

Para o desenvolvimento e análise das atividades desta proposta didática, foi fundamental o entendimento das funções da prática docente definidas por Coll e Valls (1998). Apesar da experiência deste professor, identificar as ações relativas à exposição, à prática guiada e à prática autônoma ou independente colaborou para a segurança quanto ao trabalho docente em várias outras situações didáticas.

Considera-se que as funções supracitadas são fundamentais no desenvolvimento das habilidades exigidas no Currículo Referência de MG (MINAS GERAIS, 2019): neste, há orientações para que, no estudo de sistemas de equações de 1º grau, o aluno reconheça e resolva um sistema de equações em situações-problema relacionado ao seu contexto próximo.

A sequência didática aqui apresentada foi propositadamente elaborada para atender a uma turma específica de alunos, cuja maioria já dominava as técnicas de resolução de equações do primeiro grau. Apesar disso, nem todos os alunos conseguiram aplicar a ESA adequadamente e um dos motivos pode ser o fato de certas estratégias para cálculo numérico não fazerem parte do repertório dos alunos; em outras palavras, a cadeia de ações no campo aritmético parecia não estar suficientemente automatizada para ser utilizada. Conforme Ausubel (2003), variáveis da estrutura cognitiva – entre elas, a clareza e a estabilidade – são reflexos daquilo que o aprendiz já sabe e influenciam a aquisição e a retenção do conhecimento.

Ausubel (2003) pondera, ainda como um dos princípios de um material potencialmente significativo, a possibilidade de reformulação do material em termos de antecedentes intelectuais particulares e do vocabulário do aprendiz. Assim, a presente sequência didática pode ser aplicada por outros professores de matemática, desde que seja adequada à sua realidade, modificando os materiais e acrescentando atividades, por exemplo.

A contribuição deste trabalho foi de grande valia para a formação deste professor/pesquisador e, principalmente, para o processo de ensino-aprendizagem dos alunos envolvidos. Para além do resultado quantitativo, é importante salientar o resultado qualitativo, que foi o envolvimento dos alunos em todas as atividades, demonstrando interesse e participação, mesmo nas atividades que eram de exposição do professor. Espera-se que o produto educacional oriundo deste trabalho sirva como norteador para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, especificamente na fase introdutória do conteúdo de Sistemas de Equações do 1º Grau, contribuindo, assim, para a prática em sala de aula. Que seja, também, caminho para posteriores pesquisas da área da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. L. R. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema,** Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/72994/2-s2.0-84873689803.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 03 set. 2020.

ANTONIASSI, K. R. **O Ensino de Sistemas de Equações do Primeiro Grau Com Duas Incógnitas no Oitavo Ano do Ensino Fundamental através de Situações-Problema**. 2013, 66 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

ARCAVI, A. El desarrolo y el uso del sentido de los símbolos. In: VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. **Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática. Lisboa, 2006.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos:** Uma Perspectiva Cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

BASSANEZI, R. C**. Ensino-Aprendizagem com Modelagem matemática**. 3. ed. 2. reimp. São Paulo: Contexto, 2010.

BATLLORI, J. A. **Juegos Para Entrenar El Cerebro**. Universidad de Barcelona. Narcea, S. A. de Ediciones, Madrid, Espanha, 2006. Disponível em: https://kupdf.net/download/juegos-para-entrenar-el-cerebro_5af83aa4e2b6f58744ecde64_pdf. Acesso em: 23 set. 2020.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal For Research in Mathematics Education,** v. 36, n. 5, 412-446, 2005. Disponível em: https://mathed.byu.edu/kleatham/Classes/Fall2010/MthEd590Library.enlp/MthEd590Library.Data/PDF/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning-1974150144/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning.pdf. Acesso em: 03 set. 2020.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. **As ideias da Álgebra.** São Paulo: Atual, 1995.

BRANCO, N. C. V. **O Estudo de Padrões e Regularidades no Desenvolvimento do Pensamento Algébrico**. 2008, 251 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2008.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Lei n.º 9.394, 20 de dezembro de 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 11 out. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 02 set. 2020.

BRASIL. **Lei nº.13.005, de 25 de junho de 2014**. Aprova o Plano Nacional de Educação – PNE e dá outras providências. Diário Oficial da União, Brasília, DF., 26 jun. 2014. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2014/lei/l13005.htm. Acesso em: 11 out. 2020.

BRITO, M. R. F. **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas: Alínea, 2006.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante,** Évora, v. XVI, n. 2, 2007. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/62447846.pdf. Acesso em: 03 set. 2020.

CARNEIRO, V. C. G. Contribuições para a Formação do Professor de Matemática Pesquisador nos Mestrados Profissionalizantes na Área de Ensino. **Bolema,** Rio Claro, Ano 21, n. 29, p. 199-222, 2008. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/mar172008revisadoVeraClotilde.pdf. Acesso em: 03 set. 2020.

COLL, C.; VALLS, E. Aprendizagem e o Ensino de Procedimentos. In: COLL, C.; POZO, J. I; SARABIA, B.; VALLS, E. **Os Conteúdos na Reforma. Ensino e Aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes**. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médica, 1998. p.70-118.

ECHEVERRÍA, M. D. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (Org.). **Solução de problemas***:* aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos**.** 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. 2008, 120 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciência e Matemática, Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

GROSSMANN, M. T.; PONTE, J. P. **O sentido de símbolo de um aluno e a álgebra do 12º Ano**. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, 2011.

KAPUT, J. J. Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. In: FENNEL, S. (Ed.). **The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: proceedings of a national symposium**. Washington, DC: National Academy Press, 1998. p. 25-26.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Eds.), **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Erlbaum, 1999. p. 133-155.

KIERAN, C. Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? **The Mathematics Educator**, University of Georgia, v. 8, n. 1, 139-151, 2004. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it. Acesso em: 11 out. 2020.

KIERAN, C. Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. **Quadrante,** v. XVI, n. 1. 2007. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/index.php/quadrante/article/view/176. Acesso em: 11 out. 2020.

LEW, H. C. Developing Algebraic Thinking in Early Grades: Case Studyof Korean Elementary School Mathematics. **The Mathematics Educator,** University of Georgia, v. 8, n. 1, 88-106, 2004.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 2001. Disponível em: https://docplayer.com.br/123326665-Romulo-campos-lins-joaquim-gimenez.html. Acesso em: 23 set. 2020.

LÜDKE, M. A. complexa relação entre o professor e a pesquisa. In: ANDRÉ, M. (Org.). **O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores**. Campinas: Papirus, 2001, p. 27-54.

MARQUES, A. P. **O ensino de funções no 9º ano:** construindo significados para função a partir de generalizações**.** 2019, 210 f**.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação e Docência) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2019.

MAYER, R. A capacidade para a matemática. In: STERNBERG, R. **As capacidades intelectuais humanas**. Porto Alegre: Artmed, 1992.

MINAS GERAIS. Secretaria Estadual de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais.** 2019. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br. Acesso em: 25 set. 2020.

MOREIRA, M. A. **O que é afinal aprendizagem significativa?** Instituto de Física – UFRGS. Porto Alegre, 2010. Disponível em: http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf. Acesso em: 11 out. 2020.

NOBRE, S.; AMADO, N.; PONTE, J. P. Representações na Aprendizagem de Sistemas de Equações. In: Encontro de Investigação em Educação Matemática – Ensino e aprendizagem da álgebra, Póvoa de Varzim, 2011. **Anais...** Póvoa de Varzim, 2011. Disponível em: https://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/14.Nobre_Amado_Ponte.pdf Acesso em: 13 fev. 2020.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema,** Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

PAIAS, A. M. **Obstáculos no ensino e na aprendizagem do objeto matemático potência.** 2019, 308 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP - São Paulo, 2019.

PEREIRA, J. M.; PONTE, J. P. **Raciocínio matemático em contexto algébrico uma análise com alunos de 9º ano**. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2011.

PINHEIRO, P. A. **Introdução ao estudo da álgebra no ensino fundamental**. 2013, 68 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. 2. reimp. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2003.

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. In VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. **Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática. Lisboa, 2006. p. 5-27.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Ministério da Educação, Direção de Inovação e Desenvolvimento Curricular. Lisboa: ME-DGIDC, 2009. Disponível em: https://repositorio.ipsantarem.pt/bitstream/10400.15/1994/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf. Acesso em: 03 set. 2020.

POZO, J. I. Aprendizagem e o Ensino de Fatos e Conceitos In: COLL, C; POZO, J. I; SARABIA; VALLS, E. **Os Conteúdos na Reforma. Ensino e Aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes**. Tradução Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998. p. 17-71.

POZO, J. I. **Aprendizes e mestres: a nova cultura da aprendizagem**. Tradução Ernani Rosa. Porto Alegre: Artes Médicas, 2008.

POZO, J. I.; GÓMEZ CRESPO, M. A. **A aprendizagem e o ensino de ciências: do conhecimento cotidiano ao conhecimento científico**. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

RIBEIRO. F. D. **Jogos e Modelagem na Educação Matemática**. Jogos na educação matemática. Curitiba: Editora Intersaberes, 2008.

SILVA, R. R.; MELO, D. A.; VERAS, C. C.; SOUSA, S. W. Software MATLAB no ensino-aprendizagem da Matemática no 8º ano do fundamental: Uma análise analítica e geométrica no ensino de expressões algébricas e sistemas de equações do 1º grau. **REVEMAT,** Florianópolis, v. 12, n. 2, p. 58-66, 2017. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2017v12n2p58. Acesso em: 02 set. 2020.
https://doi.org/10.5007/1981-1322.2017v12n2p58

SILVA, M. R. P. **Uma Abordagem De Sistema De Equações Do 1º Grau Com Duas Incógnitas**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2017, 55 f. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/TCC_2017_milton_roberto_silva.pdf. Acesso em: 03 set. 2020.

SOUZA, E. T. O. **Uma abordagem prática no estudo de sistemas de equações lineares para o ensino fundamental**. Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE é uma iniciativa do Governo do Estado do Paraná/SEED. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2458-8.pdf. Acesso em: 02 set. 2020.

SOUZA, A. B.; SANTOS, L. K. C. A.; VIANA, O. A. **Processos cognitivos e a solução de problemas no contexto das aulas de matemática do ensino fundament**al. In. Encontro Nacional de Educação Matemática – Educação matemática: Retrospectivas e perspectivas, Curitiba, 2013. **Anais...** Curitiba, 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA – UFU. Conselho de Pesquisa e Pós-Graduação. **Resolução SEI n.º 14/2018**. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2018. Disponível em: https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&codigo_verificador=0899334%20&codigo_crc=5E027810&hash_download=19883e433408a36f73d6e6129d4853b90a61dce4481369bc5111c3cce739f111b1cbe74d5fca15f20ebb8eb66dfce9c17bf479f2e8531dcf7439c4214c6e672b&visualizacao=1&id_orgao_acesso_externo=0. Acesso em: 01 set. 2020.

USISKIN, Z. **As ideias da álgebra**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, 1995.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In: VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. **Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática. Lisboa, 2006. p. 193-211.

VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. **Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática. Lisboa, 2006.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. 4. ed. New York: Longman, 2001.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental. Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula.** Porto Alegre: Penso Editora, 2009. p. 287-319.

VIANA, O. A.; RODRIGUES, R. J. Aprendizagem significativa de estratégia para resolução de sistemas de equações. **REVEMAT.** Florianópolis, v. 15, p. 01-15, 2021. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2021.e75657

WINDSOR, W. Algebraic Thinking: A Problem Solving Approach. In. Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Fremantle, 2010. **Anais...** Fremantle, 2010.

ZABALA, A. **A prática educativa.** Tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A: FOLHA 1 – DESAFIO DE PROBLEMAS I

FOLHA 1

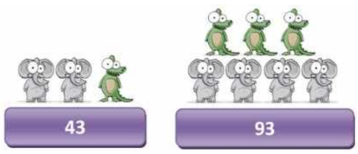
DESAFIO DE PROBLEMAS I

Em cada um dos problemas, os números indicam preços. Determine o preço de cada bichinho em cada problema.

Problema 1:

Resposta:

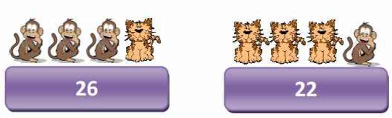
Problema 2:



Resposta:

Problema 3:

Problema 4:



Resposta:

APÊNDICE B: FOLHA 2 – DESAFIO DE PROBLEMAS I

DESAFIO DE PROBLEMAS I

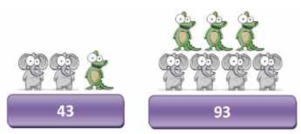
FOLHA 2

Vamos acompanhar uma forma de resolver os problemas:

Problema 1:

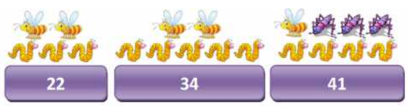
Resposta:

Problema 2:



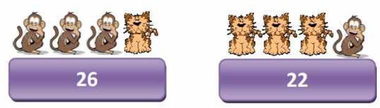
Resposta:

Problema 3:



Resposta:

Problema 4:



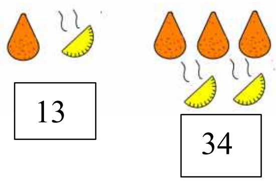
APÊNDICE C: FOLHA 3 – DESAFIO DE PROBLEMAS II

FOLHA 3

DESAFIO DE PROBLEMAS II

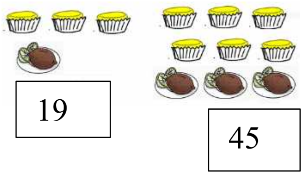
De acordo com o entendimento da atividade anterior. Determine o preço de cada salgado/doce.

Problema 5: coxinhas e pastéis



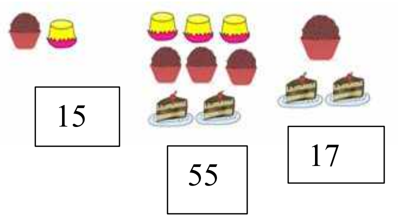
Resposta:

Problema 6: empadas e quibes



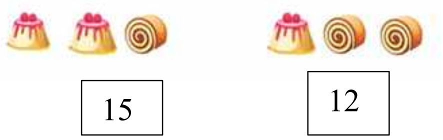
Resposta:

Problema 7: brigadeiros, bolos e quindins



Resposta:

Problema 8: pudins, rocamboles



Resposta:

APÊNDICE D: FOLHA 4 – DESAFIO DE PROBLEMAS I E SISTEMA

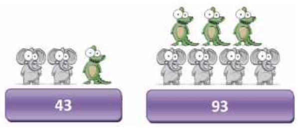
DESAFIO DE PROBLEMAS I E SISTEMA | FOLHA 4

Agora vamos resolver os problemas utilizando sistemas de equações do primeiro grau.

Problema 1:

Resposta:

Problema 2:

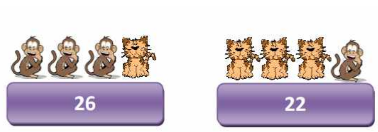


Resposta:

Problema 3:

Resposta:

Problema 4:



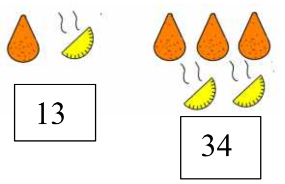
APÊNDICE E: FOLHA 5 – DESAFIO DE PROBLEMAS II E SISTEMA

FOLHA 5

DESAFIO DE PROBLEMAS II E SISTEMA

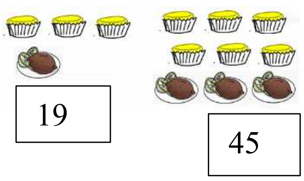
Utilizando a ideia de sistemas de equações apresentada na atividade anterior. Determine o preço de cada salgado/doce.

Problema 5: coxinhas e pastéis



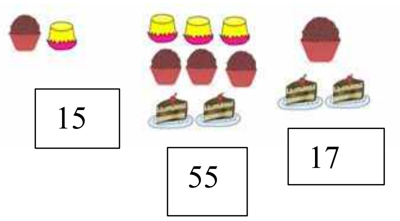
Resposta:

Problema 6: empadas e quibes



Resposta:

Problema 7: brigadeiros, bolos e quindins



Resposta:

Problema 8: pudins, rocamboles

Resposta:

APÊNDICE F: FOLHA 6 – EXERCÍCIOS SEM IMAGEM

FOLHA 6

Exercícios

Resolver os seguintes problemas utilizando sistemas:

1-Três empadinhas custam R$ 12,00. Sabe-se que 2 empadinhas e 3 coxinhas custam R$ 29,00. Quanto custa cada empadinha e cada coxinha?

2-Comprei 2 canetas e uma lapiseira por R$ 28,00. Se tivesse comprado 5 canetas e duas lapiseiras (iguais às anteriores) teria pago R$64,00. Quanto custa cada uma?

3-Quatro livros custam R$48,00. Sabe-se que 3 desses mesmos livros e 2 revistas em quadrinhos custam R$50,00. Quanto custa cada livro e cada revista em quadrinho?

4-Fui a uma loja e comprei 3 camisetas e uma bermuda pagando um total de R$58,00. Caso tivesse comprado 6 camisetas e 3 bermudas, dos mesmos modelos, teria pago R$129,00. Quanto custa cada camiseta e cada bermuda?

5-Estávamos pesando peças A, B e C. Três peças A, junto com a peça B, pesaram 13 kg. Seis peças A e quatro peças B juntas pesaram 34 Kg. Finalmente, uma peça A mais uma peça B e mais duas peças C pesaram juntas 17 kg. Quanto pesa cada peça?

6-Dois grupos de amigos compraram um ingresso para uma festa em que o ingresso para mulher é mais barato do que o ingresso para homem. No primeiro grupo havia três homens e uma mulher e o total pago foi R$ 45,00. No segundo grupo havia um homem e três mulheres e pagou R$ 55,00. Qual o preço do ingresso para homem e para mulher?

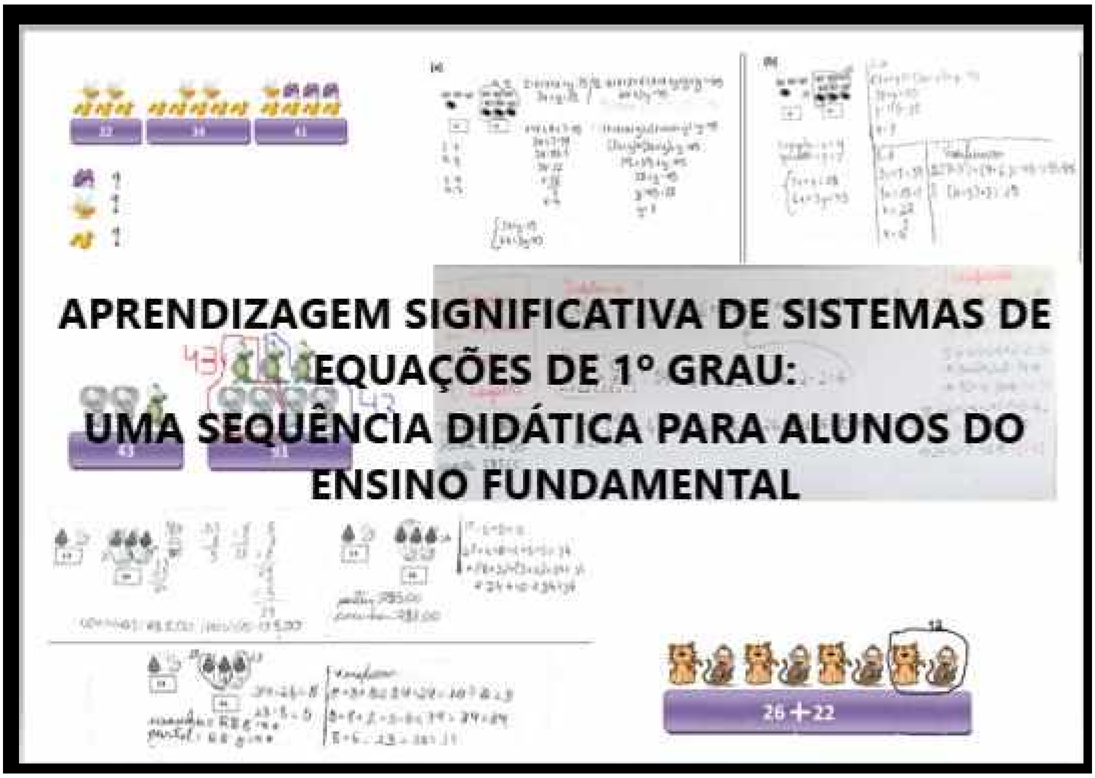
7-Num quintal há galinhas e coelhos, num total de 10 cabeças e 32 pés. Quantos são os coelhos e quantas são as galinhas?

Universidade Federal de Uberlândia

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Mestrado Profissional

Produto Educacional



Mestrando: Rodrigo Junior Rodrigues

Professora Orientadora: Drª Odaléa Aparecida Viana

Uberlândia

2021

Sumário

APRESENTAÇÃO

Caro (a) Professor (a)

Este produto educacional foi elaborado no âmbito do Mestrado Profissional de Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, sendo parte da dissertação defendida por este pesquisador.

Trata-se de uma proposta didática na forma de uma sequência de atividades direcionadas a alunos do 8.º ano do ensino fundamental com o tema Sistemas de Equações do 1º Grau e visa, especificamente, à aprendizagem de uma estratégia para solucionar os sistemas – que é diferente dos métodos de substituição, adição e de comparação normalmente ensinados nas aulas de matemática do ensino fundamental. Apresentando vários problemas com figuras, buscou-se a aprendizagem desta estratégia algébrica a partir de estratégias aritméticas de resolução já conhecidas pelos alunos.

O trabalho tem fundamentação na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel e nos teóricos que tratam da resolução de problemas nas aulas de matemática e do desenvolvimento do pensamento algébrico. Um resumo dessas teorias e das indicações da Base Nacional Comum Curricular será apresentado na primeira seção.

Na segunda seção será apresentada a estratégia algébrica de resolução de sistemas adotada para este trabalho, aqui chamada de ESA – estratégia algébrica de agrupamento.

A apresentação da proposta e sua aplicação – feita por este professor/pesquisador em dois momentos: um estudo piloto em uma escola e uma aplicação definitiva em outra – são mostradas na terceira seção. O estudo piloto foi essencial para o êxito final, já que puderam ser modificadas uma parte do material e, também, a condução da aplicação. Assim, o material foi amplamente revisto, sempre com o objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos e facilitar a aprendizagem significativa dos procedimentos empregados na estratégia de resolução dos sistemas.

Para melhor orientação ao leitor, as atividades desenvolvidas nessa proposta didática estão descritas conforme foram aplicadas nas aulas deste professor/pesquisador, em que constam: as ações do professor e a interação com os alunos, exemplos dos registros produzidos pelos estudantes e os resultados obtidos naquela ocasião.

Seguem as considerações finais e algumas referências utilizadas neste trabalho e, ao final, as folhas de atividades em anexo.

Espera-se que o presente produto possa trazer contribuições para a prática do professor de matemática do ensino básico, no que tange ao desenvolvimento do pensamento algébrico, especificamente na fase introdutória do objeto do conhecimento: Sistema de Equações do 1º grau. Obviamente as atividades foram planejadas e realizadas para uma turma específica, porém, pode ser replicada em sua integralidade e/ou ser adaptada para atender a uma outra realidade.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E BNCC

Este trabalho se fundamenta na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel. Para Ausubel (2003), a aprendizagem significativa é o processo que permite que uma nova ideia, conceito ou procedimento se relacionem com as ideias relevantes já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Essas ideias são chamadas de conhecimentos prévios e, neste trabalho, considerou-se como ideias já aprendidas as estratégias de resolução de problemas com cálculos aritméticos.

A resolução de problemas nas aulas de matemática tem sido defendida por vários autores como Brito (2006), Onuchic (2011), Van de Walle (2001) e muitos outros. Entende-se problema como um processo que, diante da existência de uma situação sem solução aparente, é necessário que o indivíduo busque competências para compreender tal problema, apoiando-se em decisões pertinentes quanto à aplicação de mecanismos para a sua resolução. (MAYER, 1992).

O processo de resolução de problemas tem várias etapas, desde a compreensão do texto, a representação mental e a categorização do problema até a estimativa de solução, o planejamento das estratégias de solução e o monitoramento do procedimento, seguidos da resposta e validação. Neste trabalho, optou-se por apresentar problemas cujos enunciados eram, a princípio, na forma de desenhos e que foram resolvidos de duas maneiras: utilizando operações (estratégia aritmética) e depois utilizando equações que formavam um sistema (estratégia algébrica).

Vários autores compreendem que o raciocínio algébrico – este manifestado na capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos – pode ser desenvolvido em articulação com o pensamento aritmético (KIERAN, 2004; USISKIN, 1995).

A BNCC (BRASIL, 2018) também se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico, alegando que ele é importante na utilização de modelos matemáticos e para compreender, analisar e representar relações quantitativas de grandezas; seu uso também é essencial em situações e estruturas matemáticas, valendo-se de letras e outros símbolos. Um dos assuntos a serem trabalhos nos anos finais do ensino fundamental refere-se aos sistemas de equações, tema deste trabalho.

Assim, pressupõe-se que a aprendizagem significativa de uma estratégia de resolução de um sistema de equações pode estar amparada numa estratégia aritmética já conhecida pelos alunos e que a sequência de atividades aqui proposta possa contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes.

2. A ESTRATÉGIA ALGÉBRICA DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS

Conforme consta no Quadro 1 no oitavo ano do ensino fundamental são estudados os sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e que admitem uma única solução. Convém acrescentar que um sistema linear possui obrigatoriamente: uma solução; nenhuma solução; infinitas soluções. São classificados respectivamente como: Sistema Possível e Determinado (SPD); Sistema Impossível ou Incompatível (SI); Sistema Possível e Indeterminado (SPI).

Quadro 1. Objeto de Conhecimento e Habilidades para a Unidade Temática Álgebra de acordo com a BNCC

8º Ano		
Unidades Temáticas	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidades**
Álgebra	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	(EF08MA31MG) Reconhecer um sistema de dua equações lineares e utilizá-lo para modelar probl (EF08MA32MG) Identificar a(s) solução (ões) de sistema de duas equações lineares. (EF08MA33MG) Resolver um sistema de equaçõ primeiro grau. (EF08MA08A) Resolver problemas relacionados seu contexto próximo, que possam ser represent por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, plano cartesiano como recurso. (EF08MA08B) Elaborar problemas relacionados contexto próximo, que possam ser representado sistemas de equações de 1º grau com duas incóg e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Fonte: Currículo Referência de Minas Gerais (MINAS GERAIS, 2019, p. 720).

Quanto às técnicas de resolução, em geral, são ensinados os métodos da substituição, da adição e o da comparação.

O Quadro 2 exemplifica os procedimentos para cada um dos métodos.

Quadro 2. Métodos de resolução de sistemas

<table>
<tr><td colspan="3">Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+4y=32 \end{cases}$</td></tr>
<tr>
<td>Método de substituição

$\begin{cases} x+y=10 \quad (I) \\ 2x+4y=32 \quad (II) \end{cases}$

Isolando x na equação (I)
$(I) x+y=10 \leftrightarrow x=10-y$
Substituindo em (II), temos:

$(II) 2x+4y=32$
$\leftrightarrow 2(10-y)+4y=32$
$\leftrightarrow 20-2y+4y=32$
$\leftrightarrow 2y=12 \leftrightarrow y=6$

Substituindo y=6 em (I), temos $x+y=10 \leftrightarrow x+6=10 \leftrightarrow x=4$
Logo a solução é S= (4, 6)</td>
<td>Método da adição

$\begin{cases} x+y=10 \quad (I) \\ 2x+4y=32 \quad (II) \end{cases}$

Multiplicando a equação (I) por -2 e somando as equações temos:

$\begin{cases} -2x-2y=-20 \quad (I) \\ 2x+4y=32 \quad (II) \end{cases}$
____
$2y=12 \leftrightarrow y=6$

Substituindo y=6 em (I), temos $x+y=10 \leftrightarrow x+6=10 \leftrightarrow x=4$
Logo a solução é S= (4, 6)</td>
<td>Método da comparação

$\begin{cases} x+y=10 \quad (I) \\ 2x+4y=32 \quad (II) \end{cases}$

Isolando x nas equações (I) e (II)
$(I) x+y=10 \leftrightarrow x=10-y$ (A)
$(II) 2x+4y=32$
$2x=32-4y \leftrightarrow$
$x=\dfrac{32-4y}{2} \leftrightarrow$
$x=16-2y$ (B)
Igualando as expressões (A) e (B):
$10-y=16-2y \leftrightarrow$
$-y+2y=16-10 \leftrightarrow y=6$
Substituindo y=6 em (I), temos $x+y=10 \leftrightarrow x+6=10 \leftrightarrow x=4$
Logo a solução é S= (4, 6)</td>
</tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo pesquisador

O método que o presente trabalho sugere é diferente desses e é característico para os chamados 'Sistemas Aditivos', isto é, aqueles sistemas possíveis, determinados e de equações[1] do primeiro grau em que: (a) os coeficientes são números naturais e (b) o primeiro membro de uma das equações pode ser inteiramente substituído na outra equação de modo que esta, passe a ter apenas uma incógnita.

Um exemplo desse método é mostrado no Quadro 3, em que pode ser vista a manipulação algébrica referente aos monômios[2], ou seja, a expressão 3x + 5y da segunda equação é decomposta de modo a permitir o agrupamento dos termos na forma da expressão (x + y) – que será substituída pelo valor indicado na primeira equação. Chamamos esse procedimento de Estratégia da Substituição por Agrupamento (ESA).

---

[1] A maioria dos sistemas constantes na sequência didática é formada por sistemas de duas equações, mas há alguns com três equações e três incógnitas em que é possível utilizar o método aqui apresentado.

[2] No ensino fundamental é comum os alunos simplificarem expressões algébricas somando os monômios, por exemplo, dada a expressão $3x+y+x+4y$ o aluno deve reduzir os termos semelhantes e encontrar $4x+5y$. Dificilmente é solicitado o contrário, ou seja, decompor a $4x+5y$ em $x+3x+2y+3y$ *ou* $2x+x+x+y+2y+2y$ ou $x+x+x+x+y+y+y+y+y$ etc., nem agrupar alguns termos, como $(x+2y)+(3x+y)+2y$, por exemplo.

Quadro 3. Resolução de sistema por ESA

Resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 8 \quad (I) \\ 3x + 5y = 42 \quad (II) \end{cases}$
(II) 3x + 5y = 42 ↔ x+ x + x + y + y + y + y + y = 42 ↔ (x + y) + (x + y) + (x + y) + 2y = 42
Substituindo *x + y* pelo valor 8 (conforme indica a primeira equação), encontra-se o valor da incógnita *y*:
(II) 8 + 8 + 8 + 2y = 42 ↔ 24 + 2y = 42 ↔ 2y = 18 ↔ y = 9
Substituindo *y = 9* em *(I),* temos *x+ y = 8 ↔ x + 9 = 8 ↔ x = -1*
Logo a solução é *S= (-1, 9)*

Fonte: elaborado pelo autor

É importante ponderar que ESA não é apresentado como um método mais relevante ou mais simples que os outros três mencionados. Na verdade, recomenda-se sua utilização na etapa de introdução do conteúdo Sistema de Equações, pois, ele requer procedimentos algébricos relativos a estratégias aritméticas já conhecidas, o que pode favorecer a atribuição de significados às ações empregadas pelos alunos.

4. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E SUA APLICAÇÃO

A sequência didática[3] é formada por seis atividades mostradas no Quadro 4.

Quadro 4. Atividades constantes da sequência didática

Atividades	Descrição	Objetivo	Duração
1ª: Desafio I de Problemas	Apresentação de quatro problemas com imagens para serem resolvidos aritmeticamente.	Aplicar estratégias aritméticas de resolução de problemas.	50 min
2ª: Desafio I de Problemas e estratégia aritmética	Correção dos problemas anteriores, com orientação do professor para a estratégia aritmética.	Entender a aplicação de uma estratégia aritmética específica de resolução de problemas.	90 min
3ª: Desafio II de Problemas e Estratégia Aritmética.	Apresentação de quatro problemas com imagem para serem resolvidos aritmeticamente.	Aplicar a estratégia aritmética da 2a atividade em problemas similares.	40 min
4ª: Desafio I de Problemas e Sistema	Orientação do professor para que os problemas do Desafio I sejam resolvidos algebricamente (sistema).	Entender uma estratégia algébrica (sistema) a partir da equiparação com a estratégia aritmética.	100 min
5ª: Desafio II de Problemas e Sistema	Apresentação dos problemas do Desafio II (3ª atividade) para serem resolvidos algebricamente (sistema).	Aplicar a estratégia algébrica (sistema) a partir da equiparação com a estratégia aritmética.	100 min
6ª: Desafio III de Problemas sem imagens – 1ª Etapa.	Orientação do professor para que problemas sem imagens sejam resolvidos por sistemas.	Entender a estratégia algébrica (sistema) para problemas sem imagens	20 min
6ª: Desafio III de Problemas sem imagens – 2ª Etapa.	Apresentação de cinco problemas sem imagem para serem resolvidos algebricamente (sistema).	Aplicar a estratégia algébrica (sistema) para problemas sem imagem	80 min

Fonte: elaborado pelo pesquisador

A maneira de aplicação de cada atividade mencionada, o desempenho dos alunos e alguns exemplos de registros produzidos pelos alunos nas folhas de papel e pelo professor no quadro serão descritos a seguir.

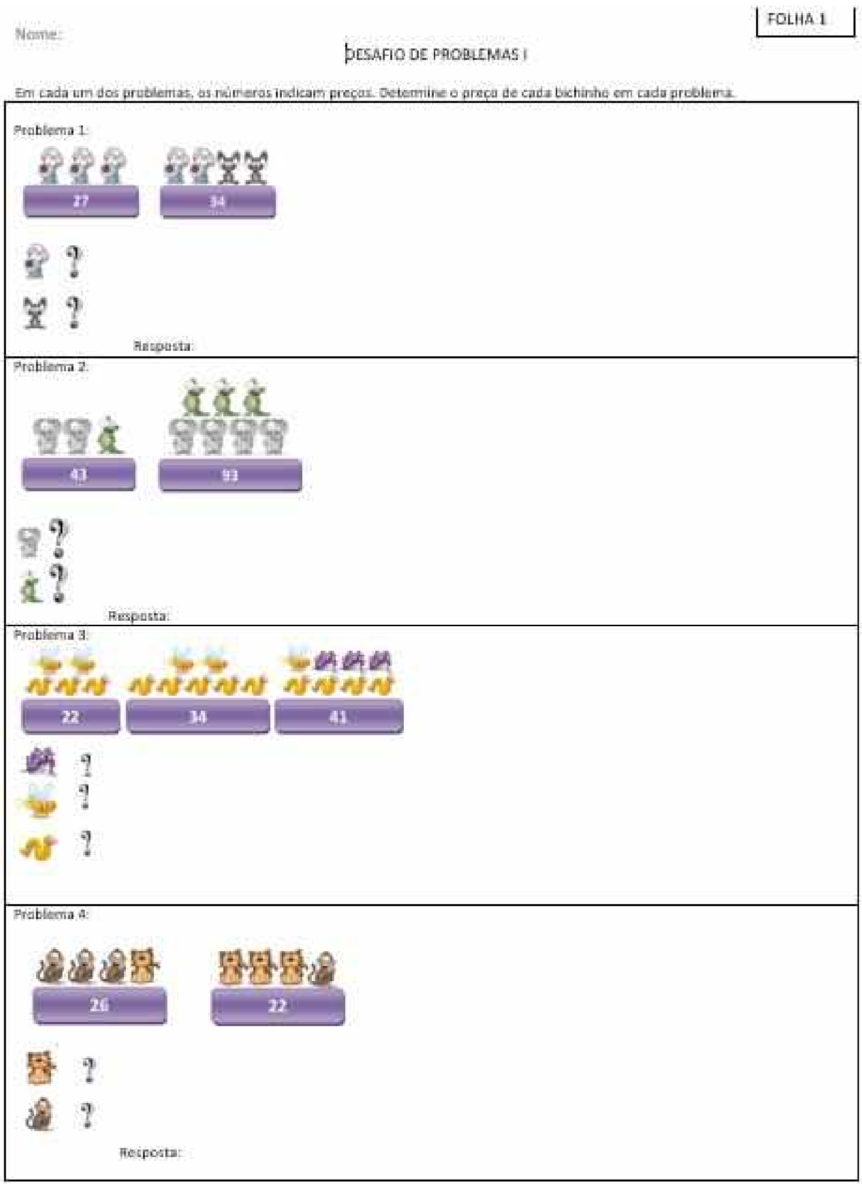
1ª ATIVIDADE - DESAFIO I DE PROBLEMAS

[3]Sequência didática é um "conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos" (Zabala, 1998, p. 18).

A primeira atividade deve ser o momento de instigar os conhecimentos aritméticos dos alunos, isto é, os conhecimentos prévios, conforme sugere Ausubel (2003). Dessa forma, o professor distribui cópias da Folha 1 (Figura 1), contendo quatro problemas e orienta os alunos para que resolvam livremente, ou seja, que utilizem seus conhecimentos e estratégias próprias, individualmente; deve informar que eles não devem utilizar letras, somente números. Esta é uma atividade para conhecer as habilidades aritméticas dos alunos e os erros devem ser avaliados nesta perspectiva.

Os problemas, como pode ser verificado, possuem progressivo grau de dificuldade. Na pesquisa realizada, a estratégia mais utilizada pelos foi a de tentativas, conforme é exemplificado a seguir.

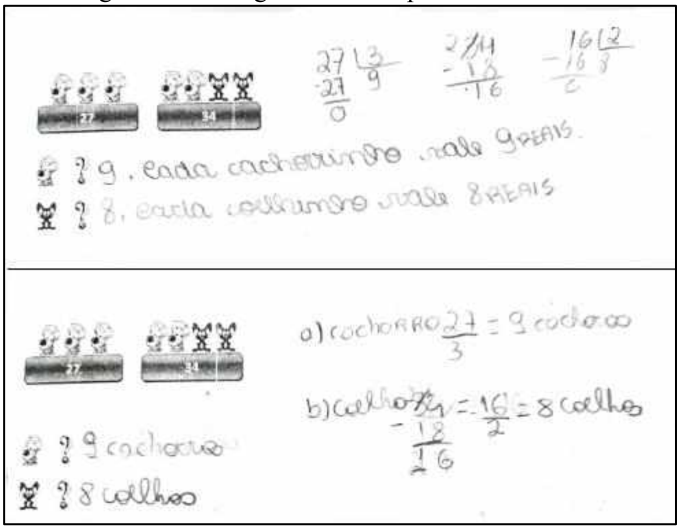
Figura 1. Folha 1 da 1ª atividade



Fonte: Adaptada de Nobre et al (2011)

Problema 1 - Como era de se esperar, grande parte dos alunos chegou aos resultados corretos, realizando a divisão com a primeira informação (27 ÷ 3 = 9) e substituindo o resultado encontrado na segunda informação. Na Figura 2, é possível verificar o desenvolvimento de dois alunos.

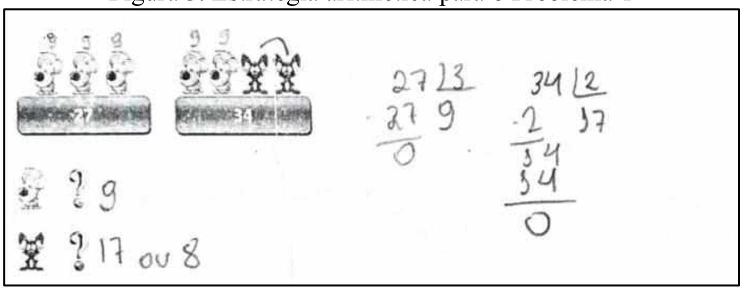
Figura 2. Estratégia aritmética para o Problema 1



Fonte: elaborada pelo pesquisador

Na Figura 3, nota-se o acerto dos cálculos aritméticos com a primeira informação, porém, o aluno não realiza o "desconto" do valor do cachorrinho, no total da segunda informação. Este é um exemplo de erro, evidentemente outros aconteceram e, em uma nova aplicação, com outra turma, provavelmente diferentes erros ocorrerão.

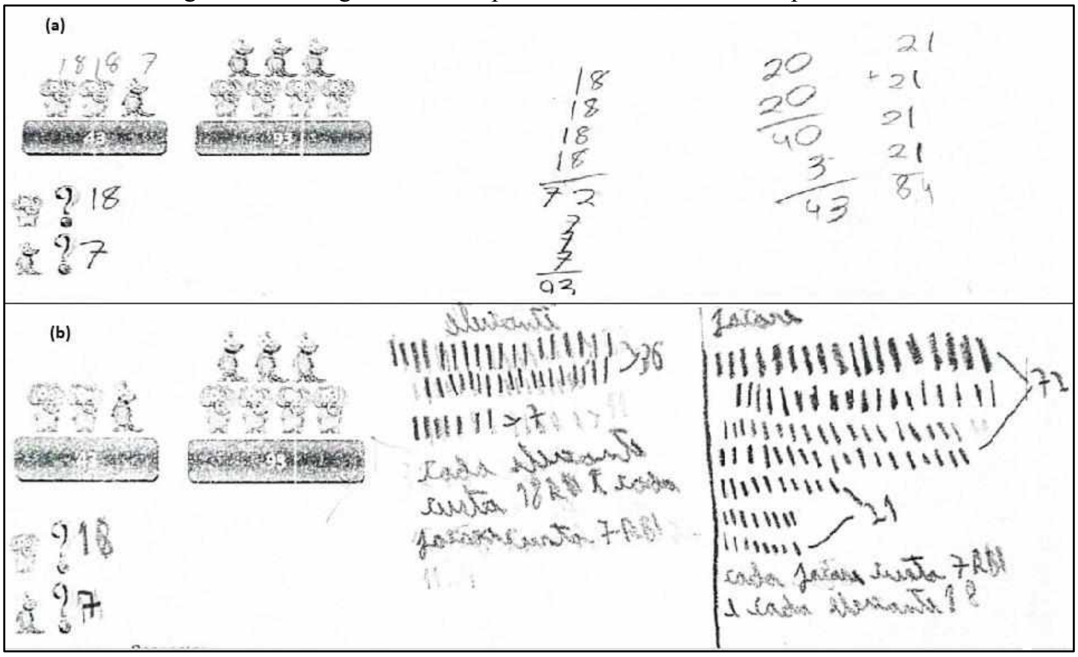
Figura 3. Estratégia aritmética para o Problema 1



Fonte: elaborada pelo pesquisador

Problema 2: Este é um problema em que há um gradativo aumento na dificuldade, já que não basta apenas uma divisão para encontrar os resultados. Considerável parte dos alunos valeu-se de tentativas, isto é, adotaram por hipótese algum valor e testaram nas informações do problema. A Figura 4 ilustra dois registros de alunos.

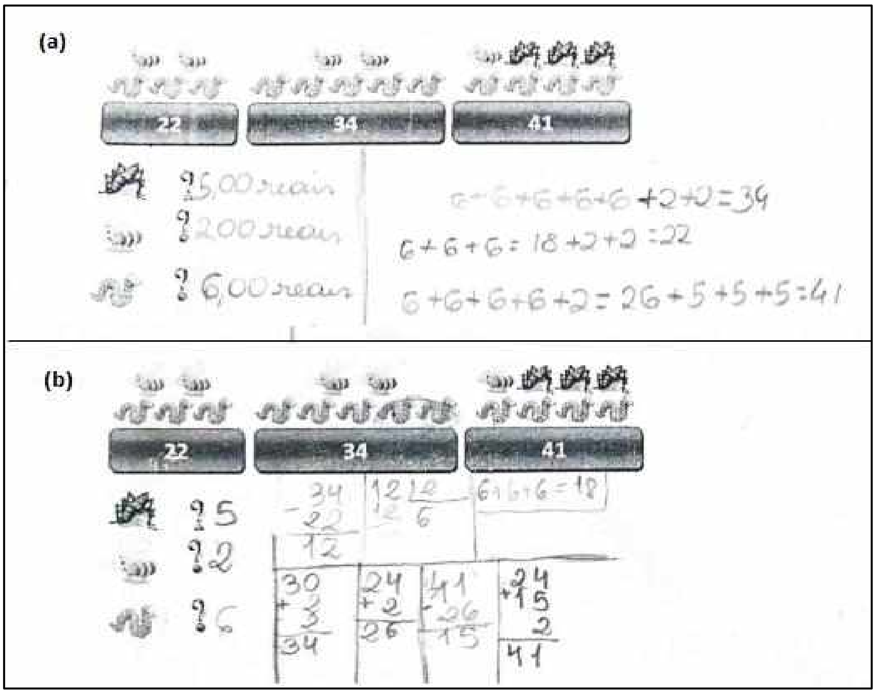
Figura 4. Estratégia aritmética por tentativa de dois alunos para o Problema 2



Fonte: elaborada pelo pesquisador

No Problema 3, prossegue o aumento na dificuldade, já que este possui três informações e três insetos diferentes. Poucos alunos conseguiram chegar ao resultado correto. Na Figura 6, nota-se estratégias diferentes, sendo que em uma dessas estratégias o aluno ensaia um agrupamento.

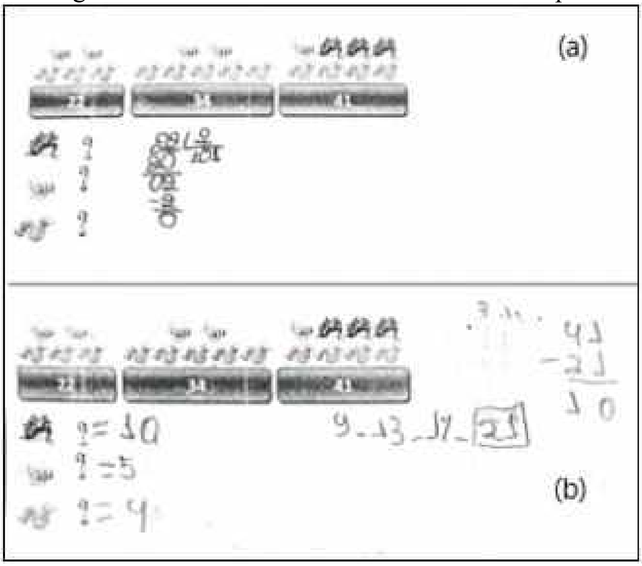
Figura 5. Estratégias aritméticas para o Problema 3: (a) por tentativas e (b) por agrupamento



Fonte: elaborada pelo pesquisador

Na Figura 7(a), observam-se cálculos errados na divisão e não é possível apontar o porquê a divisão por 2. Observa-se falha na manipulação aritmética, ao obter 101 na divisão 22 ÷ 2. Já em (b), não se identifica a estratégia utilizada.

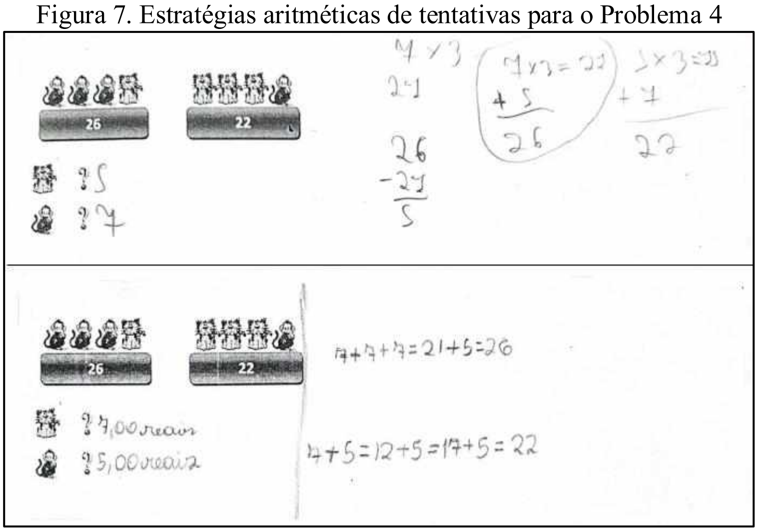
Figura 6. Estratégias aritméticas incorretas e cálculos errados para o Problema 3



Fonte: elaborada pelo pesquisador

Problema 4: Os alunos utilizaram rascunhos para realizar estratégia de tentativas e, a seguir, empreende as operações de adição e multiplicação, conforme pode ser visto na Figura 8, nesta mesma figura é possível verificar a utilização das equivalências de forma errada, ao fazer, por exemplo: 7 + 5 = 12 + 5 = 17 + 5 = 22, quando o correto deveria ser: 7 + 5 = 12, a seguir 12 + 5 = 17 e 17 + 2 = 22.

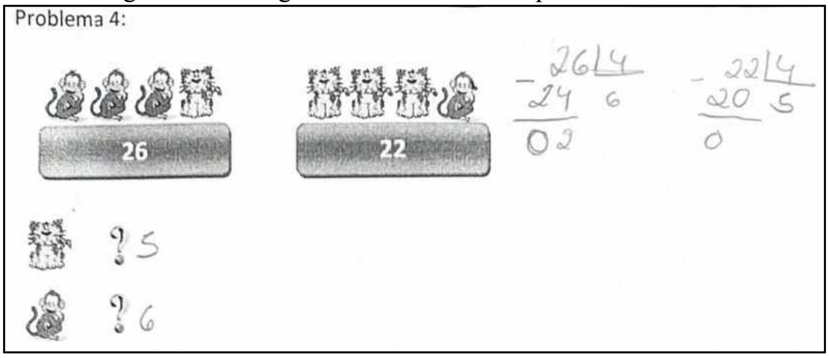
Figura 7. Estratégias aritméticas de tentativas para o Problema 4



Fonte: elaborada pelo pesquisador

Na figura 9 verifica-se exemplo de cálculos errados. Pode-se observar que o aluno realizou a divisão do valor total de cada informação por todos os animais, independente da espécie. A considerar os cálculos matemáticos, o aluno não deu prosseguimento aos mesmos.

Figura 8. Estratégias aritméticas erradas para o Problema 4



Fonte: elaborada pelo pesquisador

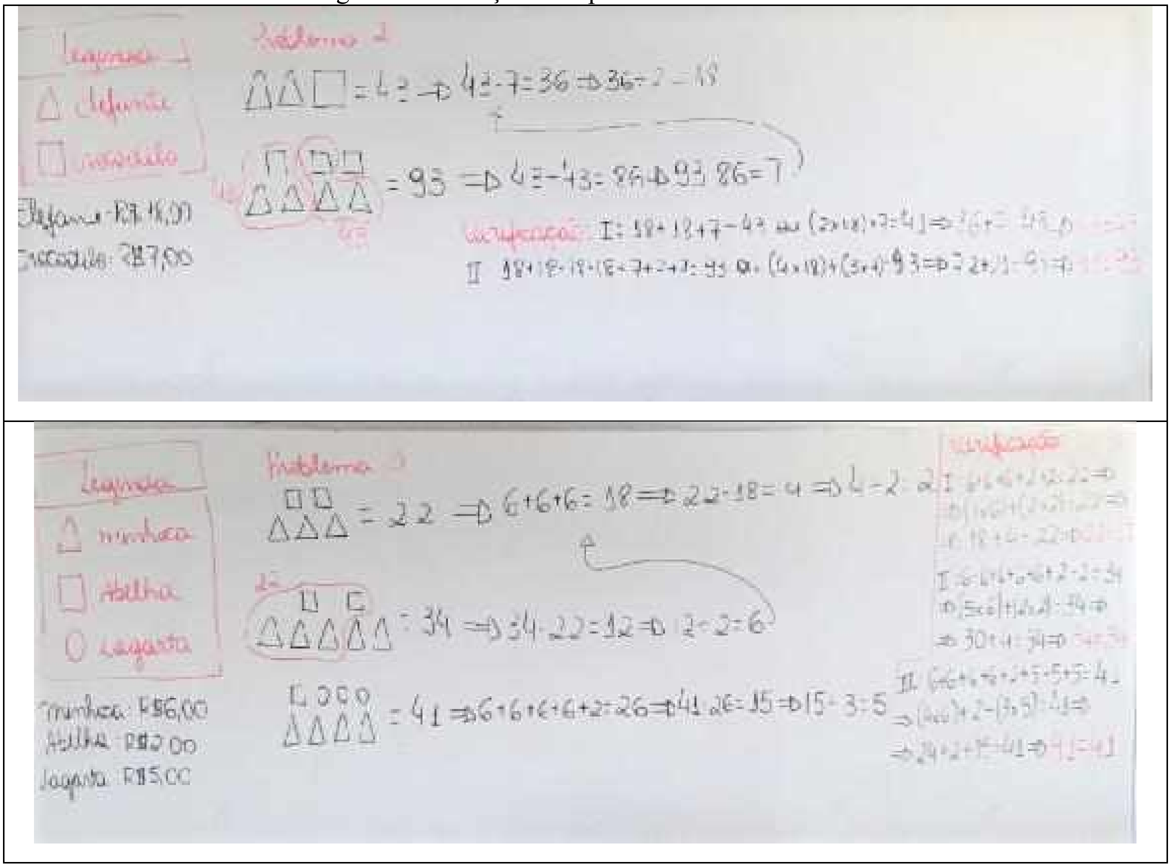
2ª ATIVIDADE - DESAFIO I DE PROBLEMAS E ESTRATÉGIA ARITMÉTICA

Nesta atividade o professor distribui cópias da Folha 2 contendo os mesmos problemas da Atividade I. Ele pode apresentar uma breve análise dos resultados da atividade anterior, comentando os acertos e erros, mas salienta que o objetivo era verificar os conhecimentos e as estratégias utilizadas, por cada um dos alunos.

O professor informa, então, que irá resolver os mesmos quatro problemas utilizando uma estratégia que vai envolver agrupamentos.

Convém reforçar a ideia de que em todos os problemas há sempre duas ou três informações relativas aos bichinhos e que sempre é solicitado o valor de cada um deles. Ao final, deve-se fazer a verificação, ou seja, os valores encontrados devem ser substituídos para confirmar e validar a solução. A estratégia de resolução para cada problema é apresentada em forma resumida na Figura 10, em que constam os problemas 2 e 3 da 2.ª Atividade.

Figura 9. Resoluções dos problemas da atividade 2

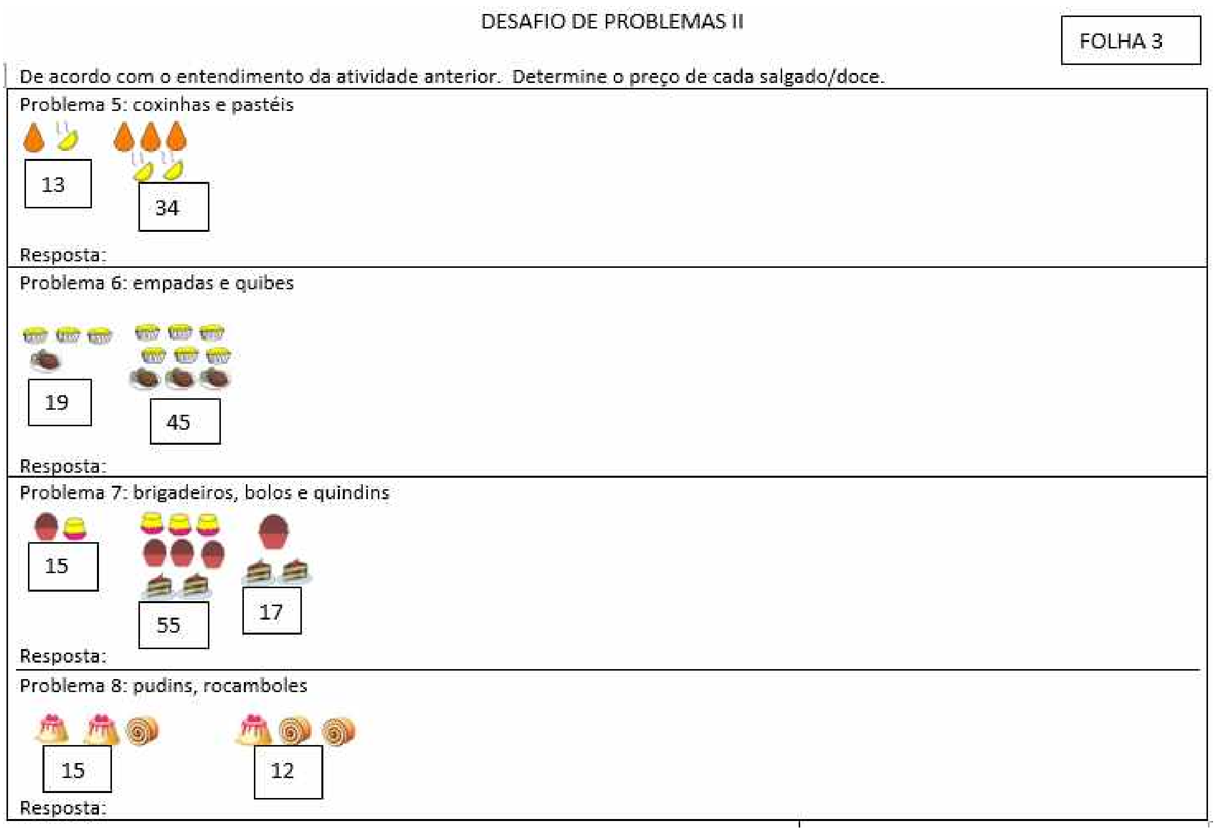


Fonte: elaborada pelo pesquisador

3ª ATIVIDADE - DESAFIO II DE PROBLEMAS E ESTRATÉGIA ARITMÉTICA

Na sequência das atividades, o professor deve distribuir cópias da Folha 3 (Figura 11), contando com quatro problemas com imagens diferentes dos anteriores. Em cada problema há desenhos que se referem a salgados e doces, duas ou três informações e são pedidos os valores desses doces e salgados. Os alunos são orientados para que resolvam os problemas de acordo com o seu entendimento da atividade anterior, realizada pelo professor na lousa. Este é o momento em que os alunos colocam em prática a estratégia de agrupamento aprendida.

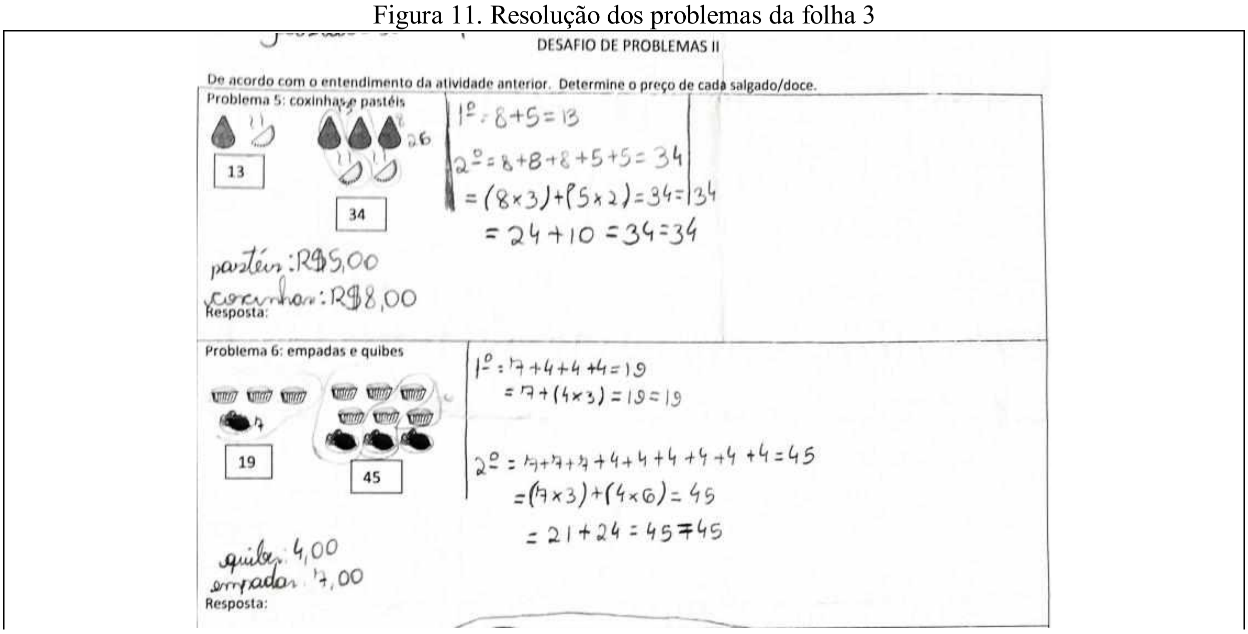
Figura 10. Folha 3 da 3º atividade

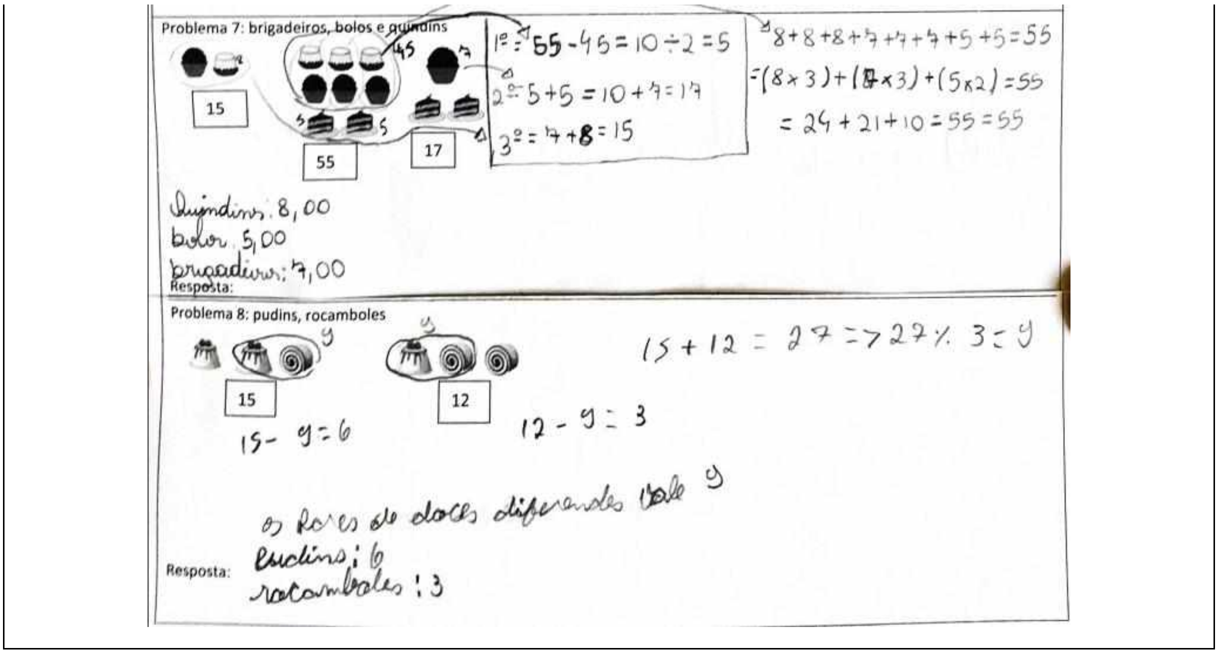


Fonte: elaborada pelo pesquisador

Na Figura 12 são mostrados exemplos de resolução dos problemas 5, 6, 7 e 8, realizados por um aluno, utilizando a estratégia de agrupamento, inclusive, realizando a verificação dos resultados – que é a fase da validação do problema.

Figura 11. Resolução dos problemas da folha 3





Fonte: elaborada pelo pesquisador

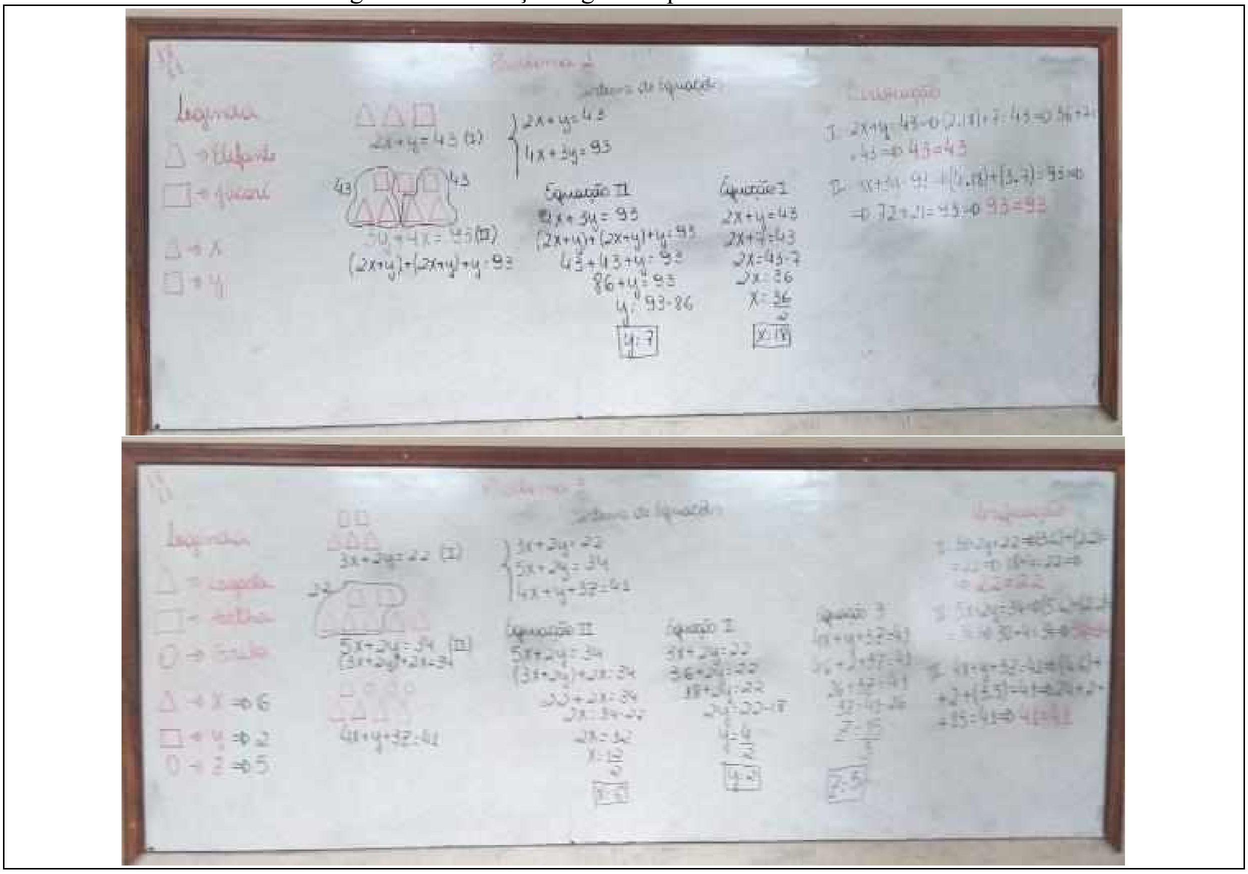
4ª ATIVIDADE - DESAFIO I DE PROBLEMAS E SISTEMA

Nesta atividade o professor trará pela primeira vez a ideia de Sistema de Equações Lineares. Os alunos recebem a Folha 4 que contém os mesmos problemas do Desafio I, isto é, aqueles utilizados nas duas primeiras atividades para que pudessem aprender uma estratégia algébrica de resolução. Com base nos procedimentos aritméticos já realizados para solucionar os problemas, agora são aplicadas as equações.

Como pode ser verificado na Figura 13, na pesquisa realizada o professor retoma a ideia da legenda (lado esquerdo da lousa), para a representação das informações dos problemas contidos na folha; para isso, utiliza-se de figuras geométricas conhecidas dos alunos. Para chegar às equações, o professor explica aos alunos que irá se valer de letras. Como forma de envolver os alunos, o professor instiga os mesmos a verbalizar a representação das informações de cada problema, utilizando-se das letras previamente acordadas. Este é um momento importante para o professor recordar as possibilidades de cálculos com os monômios, ou seja, trabalhar a redução dos termos iguais.

Na Figura 13, nota-se a exposição, na íntegra, das ideias realizadas pelo professor para os problemas 2 e 3.

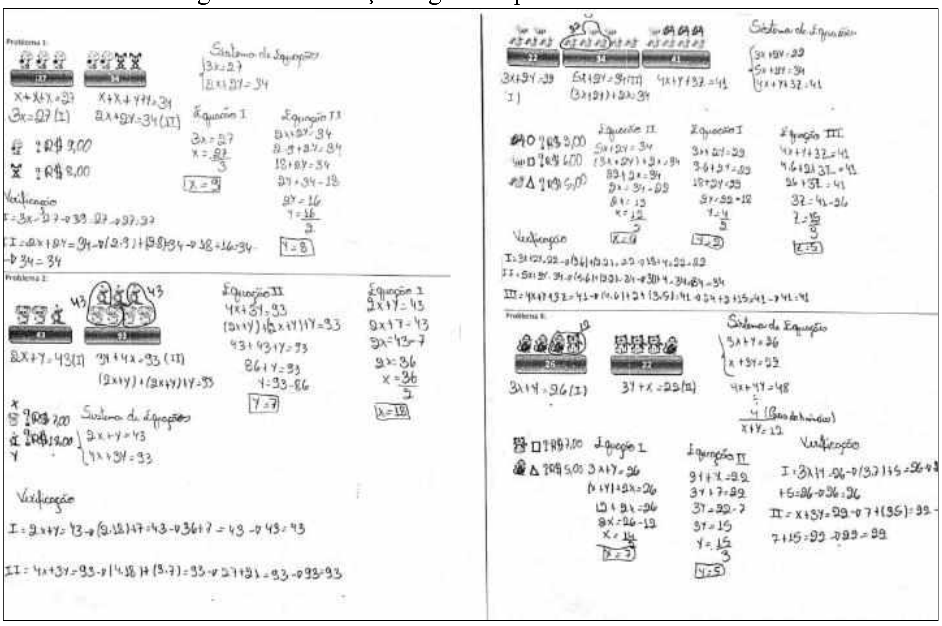
Figura 12. Resolução algébrica para os Problemas 2 e 3



Fonte: elaborada pelo pesquisador

Na Figura 14, é possível verificar como foram os registros de um aluno em sua folha.

Figura 14. Resolução algébrica para os Problemas 1 a 4



Fonte: elaborada pelo pesquisador

5ª ATIVIDADE - DESAFIO II DE PROBLEMAS E SISTEMA

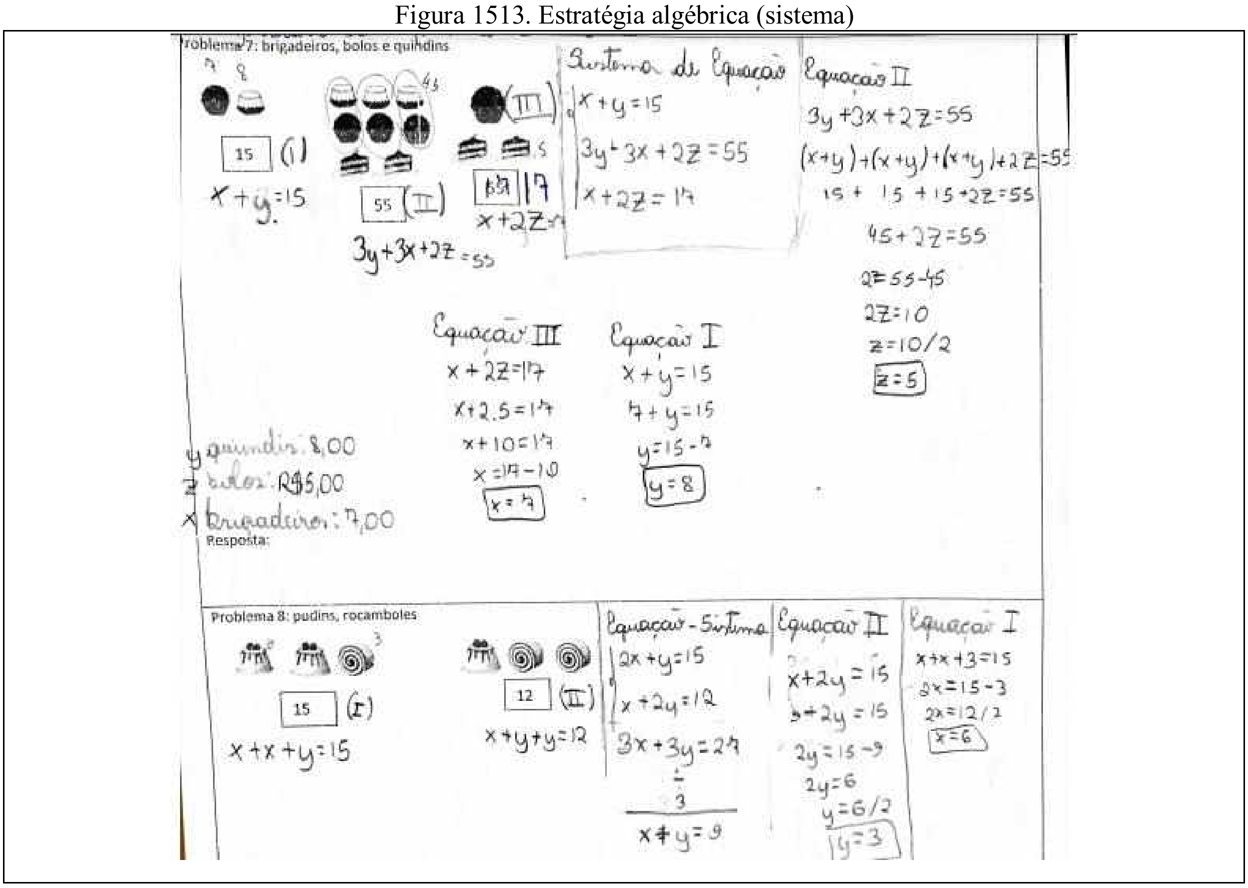
Nesta atividade, o professor entrega cópias da Folha 5, contendo os mesmos quatro problemas da 3.ª atividade.

Os alunos devem ser estimulados a resolver os problemas algebricamente (na forma de sistemas de equações), buscando consolidar os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores. Para que eles pudessem se orientar, podem ser devolvidas suas folhas da atividade anterior.

Na pesquisa realizada, o professor circulou pela sala de aula e verificou grande interação entre os alunos que estavam em duplas. Já os demais estavam concentrados e gostavam de mostrar ao professor sempre que concluíam um problema.

Na Figura 15, pode-se observar a resolução de um aluno, utilizando-se das estratégias algébricas, para os problemas 7 e 8. Nota-se que o aluno demonstra entendimento muito evidente de todo o processo, isto é, agrupamento na imagem, geração das equações e do sistema.

Figura 1513. Estratégia algébrica (sistema)



Fonte: elaborada pelo pesquisador

6ª ATIVIDADE – DESAFIO III DE PROBLEMAS SEM IMAGENS – 2 ETAPAS

Esta sexta atividade (Folha 6 – Figura 16), como é a primeira com problemas sem imagens, pode ser dividida em duas etapas: na primeira, os dois primeiros são solucionados na lousa pelo professor e, na segunda, os demais problemas são resolvidos pelos alunos, sempre na forma algébrica, isto é, por sistema de equações.

Figura 16. Folha 6 da 6º Atividade

Exercícios

FOLHA 6

Resolver os seguintes problemas utilizando sistemas:

1) Três empadinhas custam R$ 12,00. Sabe-se que 2 empadinhas e 3 coxinhas custam R$ 29,00. Quanto custa cada empadinha e cada coxinha?

2) Comprei 2 canetas e uma lapiseira por R$ 28,00. Se tivesse comprado 5 canetas e duas lapiseiras (iguais às anteriores) teria pago R$64,00. Quanto custa cada uma?

3) Quatro livros custam R$48,00. Sabe-se que 3 desses mesmos livros e 2 revistas em quadrinhos custam R$50,00. Quanto custa cada livro e cada revista em quadrinho?

4) Fui a uma loja e comprei 3 camisetas e uma bermuda pagando um total de R$58,00. Caso tivesse comprado 6 camisetas e 3 bermudas, dos mesmos modelos, teria pago R$129,00. Quanto custa cada camiseta e cada bermuda?

5) Estávamos pesando peças A, B e C. Três peças A junto com a peça B pesaram 13 kg. Seis peças A e quatro peças B juntas pesaram 34 Kg. Finalmente, uma peça A mais uma peça B e mais duas peças C pesaram juntas 17 kg. Quanto pesa cada peça?

6) Dois grupos de amigos compraram um ingresso para uma festa em que o ingresso para mulher é mais barato do que o ingresso para homem. No primeiro grupo havia três homens e uma mulher e o total pago foi R$ 45,00. No segundo grupo havia um homem e três mulheres e pagou R$ 55,00. Qual o preço do ingresso para homem e para mulher?

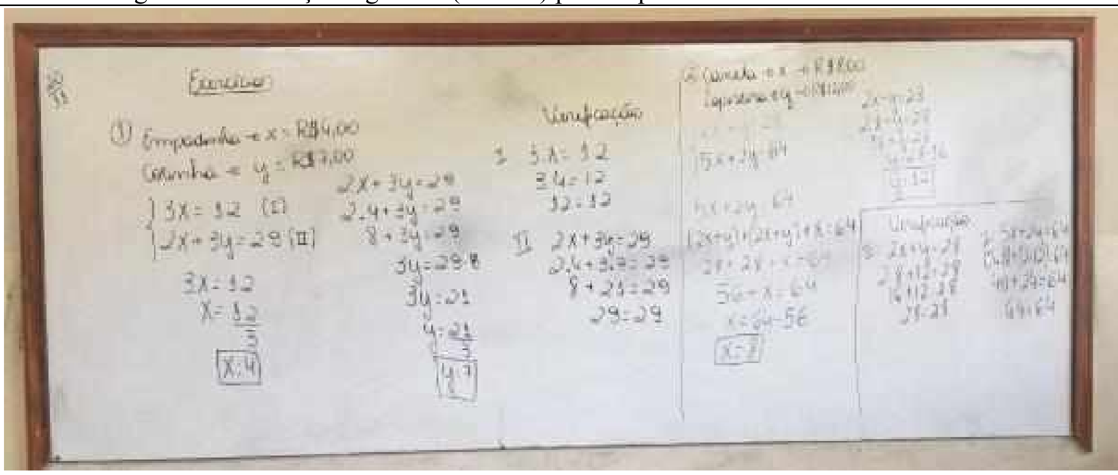
7) Num quintal há galinhas e coelhos, num total de 10 cabeças e 32 pés. Quantos são os coelhos e quantas são as galinhas?

Fonte: elaborada pelo pesquisador

Na pesquisa realizada, o professor solicita a leitura individual, de forma silenciosa; a seguir escolhe um aluno aleatoriamente e pede que leia o problema em voz alta e, por fim, o professor realiza uma leitura, pedindo a atenção de todos para a construção das equações em cada um dos problemas. Por exemplo, no problema 1, o professor faz a leitura de cada uma das informações que pode gerar uma equação - “Três empadinhas custam R$ 12,00” – questionando aos alunos como ficaria a equação. Dessa forma, busca-se uma ativa participação dos alunos, mesmo na exposição do professor.

Como pode ser observado na Figura 17 e, sempre envolvendo os alunos em todo o processo, o professor desenvolve as equações e, consequentemente, os sistemas e suas resoluções, realizando a validação dos resultados.

Figura 17. Resolução algébrica (sistema) para os problemas 1 e 2 feita na lousa

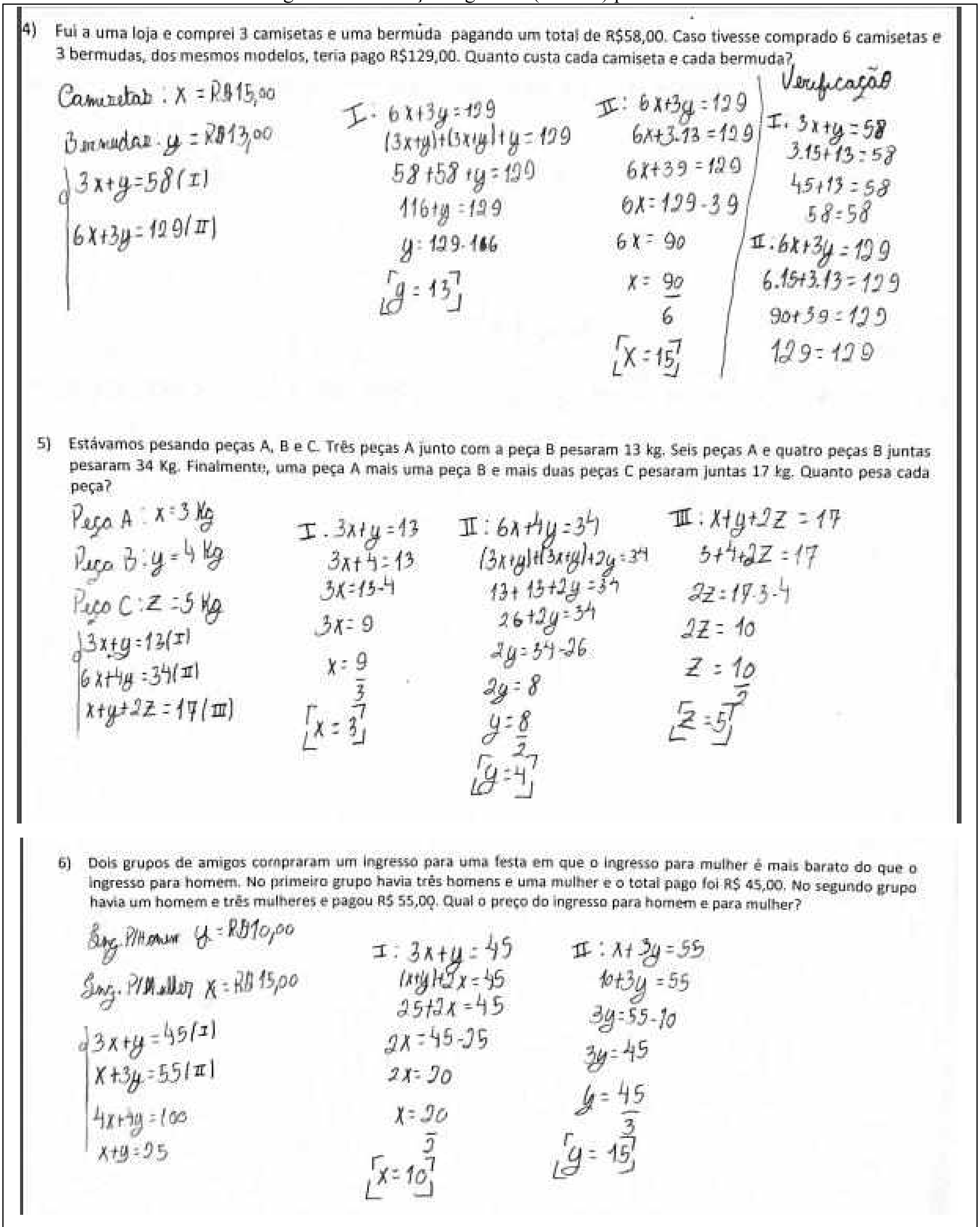


Fonte: elaborada pelo pesquisador

Na segunda etapa desta atividade, os alunos, já com a Folha 6 em mãos, é um momento importante para o professor reforçar a importância da leitura de cada um dos problemas, quantas vezes for necessário; a interpretação dos dados e do que estava sendo pedido em cada situação. Outro ponto importante foi que, na aplicação desta atividade, o professor enfatizou que os alunos deveriam ir “tirando as informações” por etapa, em cada um dos problemas e, assim, gerando as equações e, assim, montando o sistema e resolvê-los. Entende-se que essas ações foram relevantes para o resultado final.

Na Figura 18, é possível observar a resolução de um aluno, para os problemas 4, 5, e 6. Constata-se que, o aluno desenvolve corretamente todo o procedimento das estratégias apreendidas, mesmo que os problemas não possuíam imagens.

Figura 18. Resolução algébrica (sistema) para folha 6



4) Fui a uma loja e comprei 3 camisetas e uma bermuda pagando um total de R$58,00. Caso tivesse comprado 6 camisetas e 3 bermudas, dos mesmos modelos, teria pago R$129,00. Quanto custa cada camiseta e cada bermuda?

Camisetas: x = R$15,00
Bermudas: y = R$13,00

$\begin{cases} 3x+y=58 \ (I) \\ 6x+3y=129 \ (II) \end{cases}$

I: 6x+3y=129
(3x+y)+(3x+y)+y=129
58+58+y=129
116+y=129
y=129-116
[y=13]

II: 6x+3y=129
6x+3.13=129
6x+39=129
6x=129-39
6x=90
x=90/6
[x=15]

Verificação
I. 3x+y=58
3.15+13=58
45+13=58
58=58
II. 6x+3y=129
6.15+3.13=129
90+39=129
129=129

5) Estávamos pesando peças A, B e C. Três peças A junto com a peça B pesaram 13 kg. Seis peças A e quatro peças B juntas pesaram 34 Kg. Finalmente, uma peça A mais uma peça B e mais duas peças C pesaram juntas 17 kg. Quanto pesa cada peça?

Peça A: x=3 Kg
Peça B: y=4 Kg
Peça C: z=5 Kg

$\begin{cases} 3x+y=13 \ (I) \\ 6x+4y=34 \ (II) \\ x+y+2z=17 \ (III) \end{cases}$

I. 3x+y=13
3x+4=13
3x=13-4
3x=9
x=9/3
[x=3]

II: 6x+4y=34
(3x+y)+(3x+y)+2y=34
13+13+2y=34
26+2y=34
2y=34-26
2y=8
y=8/2
[y=4]

III: x+y+2z=17
3+4+2z=17
2z=17-3-4
2z=10
z=10/2
[z=5]

6) Dois grupos de amigos compraram um ingresso para uma festa em que o ingresso para mulher é mais barato do que o ingresso para homem. No primeiro grupo havia três homens e uma mulher e o total pago foi R$ 45,00. No segundo grupo havia um homem e três mulheres e pagou R$ 55,00. Qual o preço do ingresso para homem e para mulher?

Ing. P/homem y=R$10,00
Ing. P/mulher x=R$15,00

$\begin{cases} 3x+y=45 \ (I) \\ x+3y=55 \ (II) \end{cases}$
4x+4y=100
x+y=25

I: 3x+y=45
(x+y)+2x=45
25+2x=45
2x=45-25
2x=20
x=20/2
[x=10]

II: x+3y=55
10+3y=55
3y=55-10
3y=45
y=45/3
[y=15]

Fonte: elaborada pelo pesquisador

São mostrados a seguir alguns resultados obtidos com a aplicação dessa sequência na ocasião da pesquisa. A Tabela 1 mostra os acertos e erros nos problemas constantes da sequência didática e que foram resolvidos pelos alunos.

Tabela 1. Distribuição dos alunos por acertos e erros nos problemas

Atividade	Problema	Acertaram	Erraram/em branco	Total
1ª Atividade	Problema 1	17	6	23
Desafio I de Problemas	Problema 2	10	13	23
	Problema 3	5	18	23
	Problema 4	3	20	23
3ª Atividade	Problema 5	16	4	20
Desafio II de Problemas e	Problema 6	15	5	20
estratégia aritmética	Problema 7	12	8	20
	Problema 8	10	10	20
	Problema 5	21	4	24
5ª Atividade	Problema 6	19	5	24
Desafio II de Problemas e	Problema 7	19	5	24
Sistema	Problema 8	14	10	24
	Problema 3	21	3	24
6ª Atividade – 2ª Etapa -	Problema 4	20	4	24
Desafio III de Problemas sem	Problema 5	15	9	24
imagens	Problema 6	18	6	24
	Problema 7	18	6	24

Fonte: elaborada pelo pesquisador

De uma forma geral, os dados constantes na tabela demonstram a evolução dos alunos a cada atividade realizada, isto é, pode-se associar aos resultados, o planejamento, a condução, o envolvimento dos alunos e, especialmente, a potencialidade do material.

Da primeira atividade, para a terceira, que tratavam de cálculos aritméticos, é nítido a queda na quantidade dos erros, o que leva a entender que os novos conhecimentos foram bem assimilados pelos alunos, já que na segunda atividade, o professor apresentou aos alunos a estratégia do agrupamento.

Na quarta atividade, o professor apresenta, pela primeira vez, Sistema de Equações, associado à estratégia do agrupamento, o que pode ser entendido como bem-sucedido, já que a quantidade de erros na quinta atividade, foi de aproximadamente 19%, nos problemas 5, 6 e 7. O problema 8, que teve 58% de acerto, necessitava de uma estratégia inicial, diferente dos demais, o que não foi bem compreendida por uma parte dos alunos. De toda forma, o resultado não pode ser tratado como ruim.

Já na atividade seis, onde os problemas se apresentavam sem imagens, é possível verificar que os alunos se saíram bem, demonstrando mais uma vez, a aquisição e compreensão dos novos conhecimentos, já que demonstraram o desenvolvimento dos procedimentos de forma satisfatória. Considerando os cinco problemas, verificaram-se 77% de acerto, variando um pouco para baixo, ou para cima, de acordo com cada problema. O problema 5, onde se nota um percentual menor de acerto (62,5%), possuía três informações, o que levou um número maior de alunos a se confundir com os cálculos e, consequentemente, foram levados ao erro.

Sugere-se que o professor faça uma avaliação observando os itens aqui analisados para verificar se ocorreu a aprendizagem da estratégia de agrupamento para resolução de sistemas do primeiro grau.

Evidentemente, essa estratégia não se aplica a todos os sistemas. Assim, os métodos da substituição e da adição devem ser ensinados na sequência, conforme o programa adotado nas escolas.

5. CONSIDERAÇÕES

Inicialmente, devemos refletir que, para o desenvolvimento de todo o processo desta pesquisa, foi necessário um planejamento para a aplicação da sequência didática e isso exige do professor uma organização e um estudo do material e do conteúdo a ser trabalhado; requer também certo conhecimento acerca do comportamento dos alunos.

O trabalho é amparado na teoria de Ausubel (2003) que nos fala sobre o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa; para isso, o autor indica duas condições: 1 – que o material a ser trabalhado seja potencialmente significativo; 2 - que o indivíduo busque relacionar as novas ideias com algo presente em sua estrutura cognitiva. Para a primeira condição, as atividades desta pesquisa foram planejadas e organizadas de forma lógica, com objetivos interligados e não apenas sobrepostos. Já para promover a segunda condição, esta pesquisa buscou na aritmética o apoio necessário para introduzir a álgebra, pois se entende que as estratégias aritméticas são algo já formado e conhecido dos alunos, facilitando assim, o entendimento do sistema de equações. Esta articulação da aritmética com a álgebra, é sugerida por diversos autores, entre eles, Lins e Gimenez (2001), Blanton e Kaput (2005), Arcavi (2006) e Walle (2009).

Reflexões baseadas em Ausubel (2003), Coll e Valls (1998) e Pozo (2008) foram facilitadoras para estruturar essa sequência de atividades, de forma a favorecer a aprendizagem significativa de procedimentos relativos ao objeto do conhecimento: Sistema de Equações do 1º Grau.

Para a aplicação desta sequência didática, é importante reforçar a importância da aplicação Piloto, já que foi o momento de revisão do material, contribuindo para o resultado.

As atividades aqui expostas pareceram ter contribuído para o desenvolvimento, de forma significativa, do pensamento algébrico nos alunos, conforme se observou nas dimensões anunciadas por Usiskin (1995) e nas atividades geracionais e transformacionais de Kieran (2004,2007).

Obviamente, a sequência didática aqui apresentada e descrita foi elaborada para atender a uma turma específica de alunos, porém, pode ser aplicada por outros professores de matemática, ficando a cargo de cada um que a utilizar, adequá-la à sua realidade, organizando o planejamento, recorrendo a outros materiais e acrescentando atividades complementares.

Dessa forma, os leitores desse produto são convidados a fazerem uma minuciosa leitura da dissertação que deu origem a esse produto: nela é apresentada essa proposta de ensino, assistida de estudos realizados com base em conhecimentos teóricos e em uma revisão bibliográfica que podem amparar as decisões do professor no ambiente de sala de aula.

6. REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. El desarrolo y el uso del sentido de los símbolos. In: VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. **Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática. Lisboa, p. 29-48, 2006.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos:** Uma Perspectiva Cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal For Research in Mathematics Education,** V. 36, N.5, 412-446, 2005. Disponível em: https://mathed.byu.edu/kleatham/Classes/Fall2010/MthEd590Library.enlp/MthEd590Library.Data/PDF/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning-1974150144/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning.pdf. Acesso em: 03 set. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 02 set. 2020.

BRITO, M. R. F. **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas: Alínea, 2006.

COLL, C.; VALLS, E. Aprendizagem e o Ensino de Procedimentos. In: COLL, C.; POZO, J. I; SARABIA, B.; VALLS, E. **Os Conteúdos na Reforma. Ensino e Aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes**. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médica, p.70-118, 1998.

KIERAN, C. Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? **The Mathematics Educator**, Vol. 8, No. 1, 139-151, 2004. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it. Acesso em: 11 out. 2020.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 2001. Disponível em: https://docplayer.com.br/123326665-Romulo-campos-lins-joaquim-gimenez.html. Acesso em: 23 set. 2020.

MAYER, R. A capacidade para a matemática. In: STERNBERG, R. **As capacidades intelectuais humanas**. Porto Alegre: Artmed, 1992, cap. 6, p.114-168.

MINAS GERAIS. Secretária Estadual de Educação. Currículo Referência de Minas Gerais. 2019. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br. Acesso em: 25 set. 2020.

POZO, J. I. Aprendizes e mestres: a nova cultura da aprendizagem. Tradução Ernani Rosa. Porto Alegre: Artes Médicas, 2008.

USISKIN, Z. As ideias da álgebra. Tradução Hygino H. Domingues. Atual Editora. São Paulo, 1995.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. 4. ed. New York: Longman, 2001.

ZABALA, A. **A prática educativa.** Tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

APÊNDICE

APÊNDICE A: Folha 1 – Desafio de Problemas I

FOLHA 1

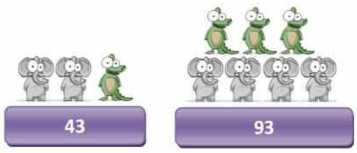
DESAFIO DE PROBLEMAS I

Em cada um dos problemas, os números indicam preços. Determine o preço de cada bichinho em cada problema.

Problema 1:

Resposta:

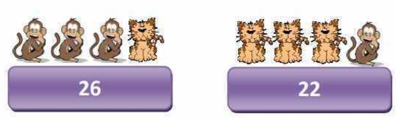
Problema 2:



Resposta:

Problema 3:

Problema 4:



Resposta:

APÊNDICE B: Folha 2 – Desafio de Problemas I

DESAFIO DE PROBLEMAS I

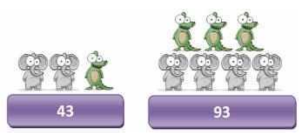
FOLHA 2

Vamos acompanhar uma forma de resolver os problemas:

Problema 1:

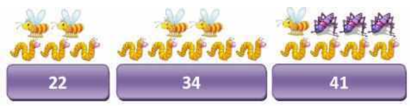
Resposta:

Problema 2:



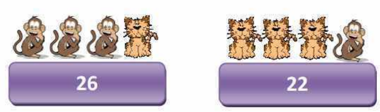
Resposta:

Problema 3:



Resposta:

Problema 4:



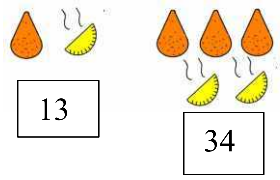
APÊNDICE C: Folha 3 – Desafio de Problemas II

DESAFIO DE PROBLEMAS II

FOLHA 3

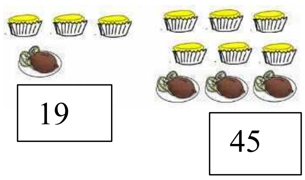
De acordo com o entendimento da atividade anterior. Determine o preço de cada salgado/doce.

Problema 5: coxinhas e pastéis



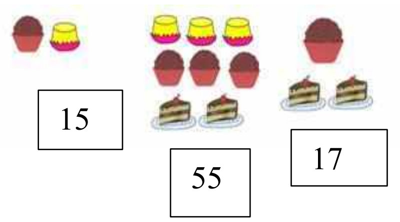
Resposta:

Problema 6: empadas e quibes



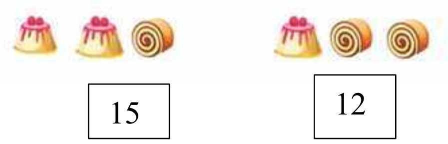
Resposta:

Problema 7: brigadeiros, bolos e quindins



Resposta:

Problema 8: pudins, rocamboles



Resposta:

APÊNDICE D: Folha 4 – Desafio de Problemas I e Sistema

DESAFIO DE PROBLEMAS I E SISTEMA

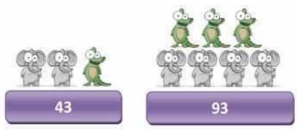
FOLHA 4

Agora vamos resolver os problemas utilizando sistemas de equações do primeiro grau.

Problema 1:

Resposta:

Problema 2:

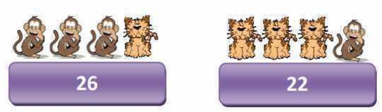


Resposta:

Problema 3:

Resposta:

Problema 4:



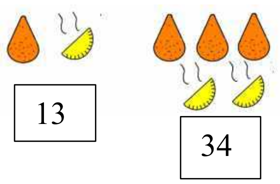
APÊNDICE E: Folha 5 – Desafio de Problemas II e Sistema

FOLHA 5

DESAFIO DE PROBLEMAS II E SISTEMA

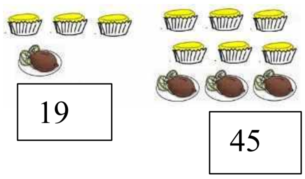
Utilizando a ideia de sistemas de equações apresentada na atividade anterior. Determine o preço de cada salgado/doce.

Problema 5: coxinhas e pastéis



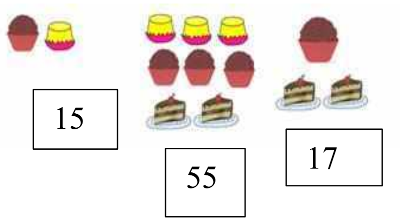
Resposta:

Problema 6: empadas e quibes



Resposta:

Problema 7: brigadeiros, bolos e quindins



Resposta:

Problema 8: pudins, rocamboles

Resposta:

APÊNDICE F: Folha 6 – Exercícios sem Imagem

Exercícios

Resolver os seguintes problemas utilizando sistemas:

FOLHA 6

1-Três empadinhas custam R$ 12,00. Sabe-se que 2 empadinhas e 3 coxinhas custam R$ 29,00. Quanto custa cada empadinha e cada coxinha?

2-Comprei 2 canetas e uma lapiseira por R$ 28,00. Se tivesse comprado 5 canetas e duas lapiseiras (iguais às anteriores) teria pago R$64,00. Quanto custa cada uma?

3-Quatro livros custam R$48,00. Sabe-se que 3 desses mesmos livros e 2 revistas em quadrinhos custam R$50,00. Quanto custa cada livro e cada revista em quadrinho?

4-Fui a uma loja e comprei 3 camisetas e uma bermuda pagando um total de R$58,00. Caso tivesse comprado 6 camisetas e 3 bermudas, dos mesmos modelos, teria pago R$129,00. Quanto custa cada camiseta e cada bermuda?

5-Estávamos pesando peças A, B e C. Três peças A junto com a peça B pesaram 13 kg. Seis peças A e quatro peças B juntas pesaram 34 Kg. Finalmente, uma peça A mais uma peça B e mais duas peças C pesaram juntas 17 kg. Quanto pesa cada peça?

6-Dois grupos de amigos compraram um ingresso para uma festa em que o ingresso para mulher é mais barato do que o ingresso para homem. No primeiro grupo havia três homens e uma mulher e o total pago foi R$ 45,00. No segundo grupo havia um homem e três mulheres e pagou R$ 55,00. Qual o preço do ingresso para homem e para mulher?

7-Num quintal há galinhas e coelhos, num total de 10 cabeças e 32 pés. Quantos são os coelhos e quantas são as galinhas?