



**Universidade Federal de Uberlândia  
Faculdade de Matemática**

**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**O ESPAÇO DE HAUSDORFF E A DIMENSÃO  
FRACTAL: ESTUDO E ABORDAGENS NO  
ENSINO FUNDAMENTAL**

**Aline Pereira Eleutério**

**Uberlândia-MG**

**2021**

**Aline Pereira Eleutério**

**O ESPAÇO DE HAUSDORFF E A DIMENSÃO  
FRACTAL: ESTUDO E ABORDAGENS NO  
ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Paula Tremura Galves

**Uberlândia-MG**

**2021**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

E39 Eleutério, Aline Pereira, 1988-  
2021 O espaço de Hausdorff e a dimensão fractal: [recurso eletrônico] : estudo e abordagens no Ensino Fundamental / Aline Pereira Eleutério. - 2021.

Orientadora: Ana Paula Tremura Galves.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.  
Modo de acesso: Internet.  
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.599>  
Inclui bibliografia.  
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Galves, Ana Paula Tremura, 1984-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado  
 Profissional em Rede Nacional  
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
 Telefone: (34) 3230-9452 - www.famat.ufu.br - profmat@famat.ufu.br



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 01, PROFMAT				
Data:	Vinte e sete de outubro de 2021	Hora de início:	08h00	Hora de encerramento:	09h40
Matrícula do Discente:	11912PFT004				
Nome do Discente:	Aline Pereira Eleutério				
Título do Trabalho:	O espaço de Hausdorff e a dimensão fractal: estudo e abordagens no Ensino Fundamental				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Geometria e Topologia				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há				

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Google Meet, pela Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), assim composta: Professores Doutores: Flávia Souza Machado da Silva - UNESP; Francielle Rodrigues de Castro Coelho - FAMAT/UFU e Ana Paula Tremura Galves - FAMAT/UFU, orientadora da candidata.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Dra. Ana Paula Tremura Galves, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença de todos os que estavam presentes e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente, bem como o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir a senhora presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando a candidata:

Aprovada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Flávia Souza Machado da Silva, Usuário Externo**, em 27/10/2021, às 10:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ana Paula Tremura Galves, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/10/2021, às 10:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francielle Rodrigues de Castro Coelho, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/10/2021, às 10:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3097800** e o código CRC **63755E17**.

# Agradecimentos

---

A Deus por me conceder a oportunidade de estudar, aprimorando meu pouco conhecimento nesta existência e por cuidar de cada passo meu neste trajeto de viagens e períodos de estudos.

Aos meus pais, irmãs, familiares e amigos pelo apoio em todo este processo de busca, dedicação, abdicção de atividades e momentos para realização deste sonho. Todos foram fundamentais para eu chegar até aqui.

Aos professores do PROFMAT-UFU pela atenção e exemplo de profissionalismo, auxiliando, de forma competente e humana, meu desenvolvimento desde o início do curso.

Agradecimento especial à minha orientadora, Prof<sup>a</sup> Ana Paula, pela atenção, paciência, carinho e exemplo profissional, contribuindo para meu conhecimento técnico em Matemática e humano, como profissional.

A todos vocês, meu sincero e humilde MUITO OBRIGADA!

*Tudo que é feito com amor floresce!*

*(Autor desconhecido)*

# Resumo

---

A Geometria Fractal consiste no estudo de formas estabelecidas por processos recursivos simples ou complexos que tomam alta complexidade para número suficientemente grande de iterações. Assim denominada no século XX pelo matemático Benoit Mandelbrot, apresenta propriedades peculiares, sendo a dimensão fractal sua principal característica. No caso dos fractais, sua dimensão assume valores não inteiros, diferente das dimensões euclidiana e topológica. Isso se deve pela irregularidade ocupada por um fractal no espaço métrico que está inserido. Para calcular a dimensão fractal lançamos mão de conceitos de topologia para caracterizar um espaço métrico completo e verificar sua validade para o Espaço de Hausdorff, no qual podemos calcular a dimensão de Hausdorff e utilizar o método Box-Counting. Por fim, buscamos apresentar de forma intuitiva tal conceito para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental através de sugestão de atividades que relacionem os fractais à habilidades de matemática de seu ciclo de estudo, estimulando atividades de medidas, construções com uso de material concreto, investigações e generalizações algébricas.

**Palavras-chave:** Fractais. Geometria Fractal. Distância de Hausdorff. Dimensão de Hausdorff. Método Box-Counting.



# Abstract

---

Fractal geometry consists in the study of shapes established by simple or complex recursive processes that take on high complexity for a sufficiently large number of iterations. So named in the 20th century by mathematician Benoit Mandelbrot, it presents peculiar properties, being the fractal dimension its main characteristic. In the case of fractals, their dimension assumes non-integer values, unlike the Euclidean and topological dimensions. This is due to the irregularity occupied by a fractal in the metric space where it is inserted. To calculate the fractal dimension, we use concepts of topology to characterize a complete metric space and verify its validity for the Hausdorff Space, in which we can calculate the Hausdorff dimension and use the Box-Counting method. Finally, we try to intuitively present this concept to students in the final years of elementary school through suggested activities that relate fractals to the mathematical skills of their study cycle, stimulating concrete measurement activities, constructions using concrete materials, investigations and algebraic generalizations.

**Keywords:** Fractals. Fractal geometry. Hausdorff distance. Hausdorff dimension. Box-Counting method.

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Fractais: conceitos iniciais</b>	<b>5</b>
1.1	Mas o que é um fractal? . . . . .	5
1.2	Classificação dos fractais . . . . .	8
1.3	Propriedades que caracterizam os fractais . . . . .	13
1.4	Fractais clássicos . . . . .	14
1.4.1	Poeira de Cantor . . . . .	14
1.4.2	Construção da Poeira de Cantor . . . . .	15
1.4.3	O Triângulo de Sierpinski . . . . .	17
1.4.4	Construção do Triângulo de Sierpinski . . . . .	17
1.4.5	O Tapete de Sierpinski e a Esponja de Menger . . . . .	19
1.4.6	A Curva de Koch e o Floco de Neve de Koch . . . . .	20
1.4.7	A construção da Curva de Koch . . . . .	21
1.4.8	O Floco de Neve de Koch . . . . .	22
1.4.9	A Curva de Peano . . . . .	24
1.4.10	Construção da Curva de Peano . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Tópicos de espaços métricos</b>	<b>27</b>
2.1	Espaços métricos . . . . .	27
2.1.1	Exemplos de espaços métricos . . . . .	28
2.2	Distância entre ponto e conjunto e distância entre conjuntos . . . . .	33
2.3	Bolas abertas . . . . .	36
2.3.1	Propriedades das bolas abertas . . . . .	38

---

2.4	Métricas equivalentes . . . . .	40
2.5	Sequências em espaços métricos . . . . .	42
2.6	A topologia dos espaços métricos . . . . .	45
2.7	Funções contínuas . . . . .	49
2.8	Conjunto compacto . . . . .	51
2.9	Espaço métrico completo . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Dimensão de Hausdorff ou dimensão fractal</b>	<b>58</b>
3.1	O que entendemos por dimensão? . . . . .	58
3.2	O Espaço de Hausdorff . . . . .	61
3.2.1	A métrica de Hausdorff . . . . .	61
3.3	A dimensão de Hausdorff . . . . .	66
3.4	Dimensão de Hausdorff $\times$ método Box-Counting . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Os fractais em sala de aula</b>	<b>77</b>
4.1	Os temas propostos . . . . .	78
4.1.1	Objetivos . . . . .	78
4.1.2	O público alvo da proposta . . . . .	78
4.1.3	Tempo previsto . . . . .	78
4.1.4	Recursos utilizados . . . . .	79
4.2	Desenvolvimento da proposta . . . . .	80
4.2.1	Oficina 1 - A representação do Meio Ambiente e as formas fractais clássicas . . . . .	80
4.2.2	Oficina 2 - Construindo um fractal aleatório . . . . .	87
4.2.3	Oficina 3 - Calculando a dimensão fractal . . . . .	92
4.2.4	A aplicação em sala de aula . . . . .	95
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>104</b>

# Introdução

---

Sabemos que a Matemática é uma ciência que possibilita a representação de fenômenos de toda espécie através de sua simbologia, estabelecendo uma grande linguagem universal.

Sua simbologia geométrica ficou, por mais de dois mil anos, apoiada nos Elementos de Euclides, possivelmente pela fundamentação de seus postulados e suas demonstrações, consideradas suficientes para o desenvolvimento de uma geometria lógico-dedutiva capaz de descrever objetos e transformações de alcance do homem. No entanto, a partir do século XVII, com o questionamento da demonstração do *Postulado das paralelas*, ganha espaço a discussão da representação de formas não explicadas nos Elementos, surgindo novas geometrias não euclidianas.

No século XX, com os estudos de objetos de complexidade infinita e o advento de programas computacionais, surge a *Geometria Fractal*, denominação utilizada pelo polonês Benoit Mandelbrot (1924-2010) para descrever formas que apresentam alguma fragmentação no espaço que ocupam. Mandelbrot não concordava com o processo de algebrização da geometria que via acontecer na Europa e buscava compreender como representar, de forma mais direta, o comportamento de formas naturais de diferentes espécies, desde os afluentes do rio Nilo na antiguidade ao comportamento de transações financeiras. O matemático afirma em sua obra "A Geometria Fractal da Natureza" que muitos padrões naturais são tão irregulares e fragmentados que exibem um nível de complexidade totalmente diferente das geometrias tradicionais. Sintetiza ainda: "nuvens não são esferas, montanhas não são cones, litorais não são círculos, a casca não é lisa, nem o raio viaja em linha reta". [9] A reunião de seus estudos deu origem à Geometria Fractal.

Observando irregularidades, deparamos com fractais em diversos setores do conheci-

mento, como na biologia, economia, física, geologia, música, artes plásticas, pois todos apresentam elementos que não são representados com exatidão pelos itens euclidianos. Como exemplo, tome a organização da ramificação dos alvéolos pulmonares humanos, que não são exatamente linhas retas ou círculos, mas apresentam similaridade se analisados em diferentes escalas de observação.

Os fractais são gerados por processos recursivos e possuem características de autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão, medida associada ao grau de irregularidade e rugosidade no espaço. Essa última, diferente da dimensão euclidiana e topológica, não é dada por um valor inteiro. Conhecer a dimensão de fractais nos permite estabelecer um parâmetro de comparação e investigar propriedades comuns entre dois ou mais objetos.

Sendo uma geometria recente, carece de definições formais, embora descreva com clareza a investigação de fenômenos diversos. Por essas razões pode ser apresentada aos estudantes do ensino básico, representando uma nova linha de pensamento que não descaracteriza os conhecimentos anteriores e possibilita o fortalecimento da aprendizagem de Matemática.

Neste trabalho apresentamos os fractais e três maneiras de calcular sua dimensão: uma intuitiva, a Dimensão de Hausdorff e o Método Box Counting. Buscamos relacionar tais conhecimentos à uma proposta de abordagem do tema junto aos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental de forma contextualizada e prática. Para tanto, estruturamo-no da seguinte forma:

No Capítulo 1 fazemos uma breve descrição dos tipos de fractais, suas propriedades e de alguns fractais clássicos que suscitaram o desenvolvimento desta geometria.

No Capítulo 2 retomamos conceitos matemáticos preliminares sobre Topologia para possibilitar a compreensão formal do conceito de Dimensão Fractal.

No Capítulo 3 apresentamos a Dimensão Fractal, bem como o algoritmo para o cálculo da Dimensão de Hausdorff e do Método Box Counting, confrontando os dois métodos para o caso de alguns fractais clássicos.

No Capítulo 4 fazemos a sugestão de uma proposta de apresentação do tema para alunos do Ensino Fundamental, oportunizando a reflexão contextualizada sobre o surgimento desta geometria, a construção de fractais clássicos com uso de materiais concretos, os raciocínios de generalização algébrica pela análise de suas regularidades e uma ideia do processo de cálculo de dimensão pelo Método Box Counting com caixas (malhas) de diferentes medidas.

Em todas as etapas das atividades buscou-se apresentar o tema como apoio ao desenvolvimento e retomada de habilidades desenvolvidas no Currículo proposto para este nível de ensino, sem descaracterizar um ou outro assunto, já que podem ser abordados em conjunto.

Desta forma, entendemos que uma nova geometria pode ser apresentada aos alunos da escola básica em etapas de atividades concretas, contribuindo para a aprendizagem de abstrações e fortalecendo o pensamento matemático.

# Fractais: conceitos iniciais

---

Muitas formas na natureza não podem ser representadas por elementos da Geometria Euclidiana com exatidão ou perfeição como, por exemplo, o contorno de vegetais. O matemático polonês Benoit Mandelbrot (1924 - 2010) afirma em sua obra “A Geometria Fractal da Natureza” que muitos padrões naturais são tão irregulares e fragmentados que exibem um nível de complexidade totalmente diferente das geometrias tradicionais. Sintetiza ainda: “nuvens não são esferas, montanhas não são cones, litorais não são círculos, a casca não é lisa, nem o raio viaja em linha reta”. [9]

Por alguns séculos objetos complexos que não eram descritos com precisão por elementos euclidianos foram deixados de lado em relação à sua exploração e estudo, sendo considerados “sem formas” ou até mesmo “monstros matemáticos”. Com o desenvolvimento de novas geometrias concluiu-se que várias dessas formas classificam-se como *fractais*.

## 1.1 Mas o que é um fractal?

O termo fractal apareceu através de Mandelbrot em 1975. Vem do adjetivo latim *fractare* e do verbo *frangere*, que significa “quebrar”. Ele buscava um caminho para representar matematicamente formas naturais não explicadas perfeitamente pelos elementos euclidianos. Dedicou-se ao estudo de questões de diversas ordens, naturais - como as enchentes do rio Nilo -, e não naturais - como regularidades em processos gráficos gerados por computador. Nesse processo, optou por estudar possibilidades de raciocínios diferentes daqueles

aprendidos nas escolas formais de matemática em que estudou e descobriu certas regularidades presentes no movimento irregular de muitos fenômenos naturais.

Professor na França, mudou-se para os Estados Unidos em 1948 para trabalhar no Instituto de Pesquisa Watson da IBM (International Business Machines Corporation), onde pode observar a relação de seus estudos e a parte técnica, retomando a carreira docente em algumas universidades norte-americanas após aposentar-se. [5]

Um dos problemas que estudou foi: “Quanto mede a costa litorânea da Grã-Bretanha?” Mandelbrot observou que essa medida variava para diferentes escalas de observação utilizadas, já que tomando-se uma unidade de medida, irregularidades territoriais de ordens menores deixariam de ser contabilizadas, mas diminuir muito a escala de observação, apesar de se obter maior precisão das irregularidades existentes, tornaria mais trabalhoso determinar uma medida precisa, já que o resultado final seria infinitamente grande.

Outra questão estudada por Mandelbrot foram ruídos que surgiam na rede telefônica durante o envio de informações de um computador a outro, interferindo na transmissão de dados. Engenheiros especialistas da IBM não conseguiam resolver o problema.

Em vez de procurar eliminá-los, realizou um caminho diferente: tomou-os como inerentes ao processo e verificou se apresentavam alguma regularidade. Percebeu que tais erros vinham sempre em blocos que, se ampliados, apresentavam outros blocos menores intercalados pelos dados de transmissão. Tratando-os com tal regularidade, conseguiu fazer com que os receptores diferenciassem a informação transmitida e o ruído desagradável. Mesmo não eliminando a presença dos ruídos, parte da interferência foi extinta e a comunicação tornou-se viável.

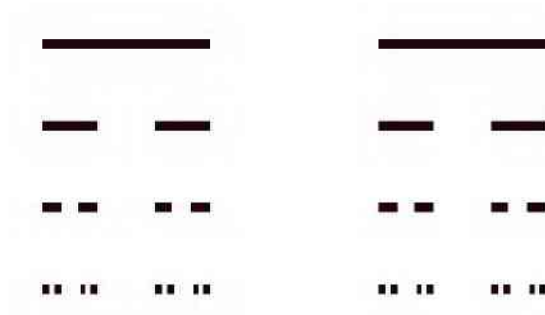
Mandelbrot reuniu seus trabalhos e elaborou o que hoje conhecemos como *Geometria Fractal*. Esse termo foi usado para nomear as formas que fazem parte dessa geometria, já que apresentam determinada *quebra* ou *fragmentação*, decorrentes de irregularidades. O termo *fractal* ilustra também a “ideia de partição ordenada através de escalas”. [5]

No entanto, o estudo de objetos hoje identificados como fractais teve início no século XVII com trabalhos de Newton e Leibniz que perceberam a existência de algumas funções descontínuas, sem retas tangentes em nenhum de seus pontos e outras com mudanças bruscas de direção, tornando a reta tangente sem significado nesses casos, conforme coloca [2]. Em 1872, Karl Weierstrass encontrou o exemplo de uma função contínua em seu domínio,



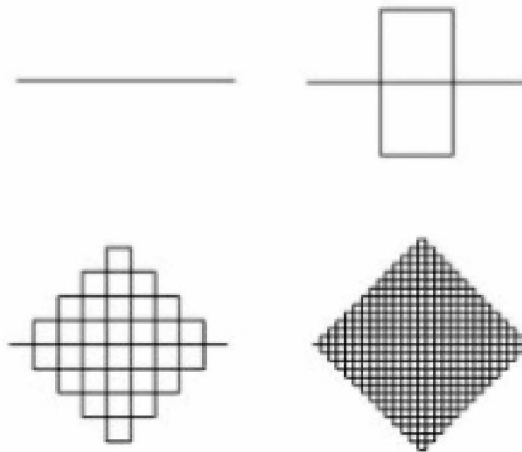
mas não diferenciável em nenhum ponto de sua imagem, que também representa uma característica fractal. Em [2] é comentado que no mesmo período de tempo Cantor desenvolveu o estudo do que ficou conhecido como Poeira de Cantor (ou Pente de Cantor) - ver Figura 1.1 - um processo iterativo para transformar um segmento de retas em infinitos pontos - e Peano construiu a primeira curva a cobrir todo o plano (Figura 1.2), todos exemplos de formas fractais.

Figura 1.1: Poeira de Cantor ou Pente de Cantor.



Fonte: Baseado em [2].

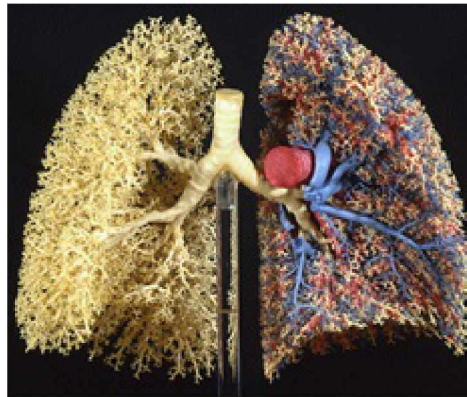
Figura 1.2: Curva de Peano.



Fonte: Retirado de [2].

De modo geral, podemos encontrar fractais na natureza, tais como em vegetais e fenômenos naturais, na anatomia humana (Figura 1.3), na representação de fenômenos geológicos, também em formações clássicas por iterações e em programas computacionais que geram fractais complexos.

Figura 1.3: Os alvéolos pulmonares humanos apresentam características fractais.



Fonte: Retirado de [2].

De acordo com [3], uma definição feita por Mandelbrot é “Um conjunto é dito Fractal se a dimensão Hausdorff-Besicovitch deste conjunto for maior do que sua dimensão topológica”.

Em [2] é comentado que o estudo dos fractais está relacionado à Teoria do Caos, “que busca padrões organizados de comportamentos e formas dentro de um sistema aparentemente aleatório” e ainda que “os fractais podem ser representados por estruturas geométricas com pequena infinidade de micro-estruturas”. Os autores de [1] definem que “Tecnicamente, um fractal é um objeto que apresenta invariância na sua forma à medida em que a escala, sob a qual o mesmo é analisado, é alterada, mantendo-se a sua estrutura idêntica à original”. Stewart apud [7] define fractal como “(...) formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores”. Já [7] sintetiza fractal como “objetos e fenômenos da natureza que possuem formas irregulares, mas se observadas em diferentes escalas não perdem sua definição inicial”.

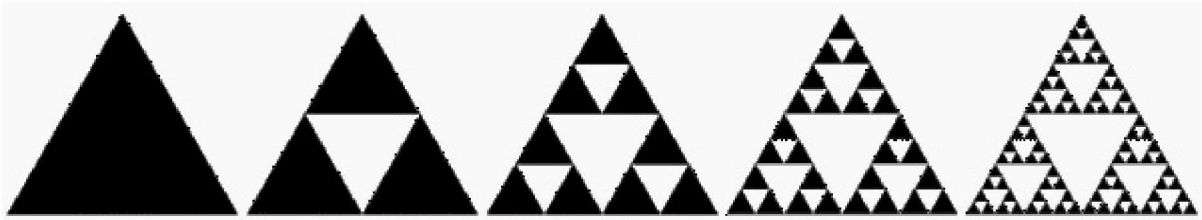
Notamos que não há uma definição única para o termo *fractal*. Entenderemos neste trabalho tais itens como sendo *formas* que preservam *determinada regularidade* de formação em relação à um recorte de si e seu todo e que apresentam características de *autossimilaridade*, *complexidade infinita*, *dimensão fracionária* e *constante* em qualquer escala. Esses aspectos formam a caracterização do que Mandelbrot chamou de Geometria Fractal em sua obra [2].

## 1.2 Classificação dos fractais

Podemos classificar a diversidade de fractais existentes em três grandes grupos:

- *Fractais determinísticos* ou *geométricos*: gerados por um processo iterativo constituído por substituições geométricas. É o caso dos fractais clássicos, como o Triângulo de Sierpinski (Figura 1.4), a Poeira de Cantor, a Curva de Peano, o Floco de Neve de Koch, a Esponja de Menger, entre outros.

Figura 1.4: O Triângulo de Sierpinski, fractal obtido por transformações em um triângulo equilátero.

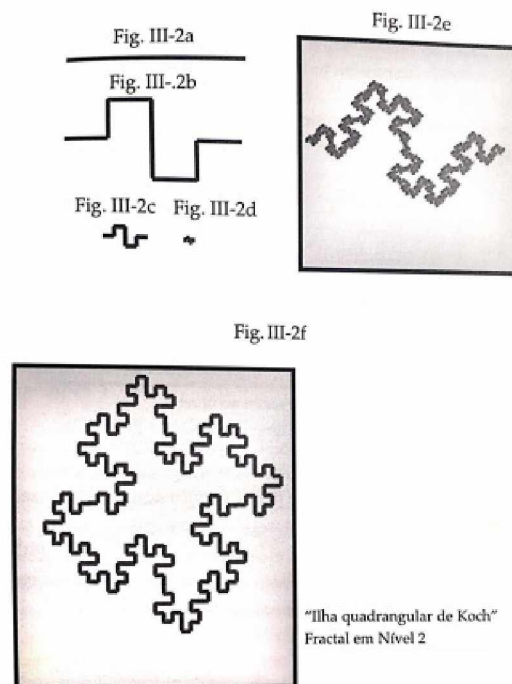


Fonte: Triângulo de Sierpinski Acesso em: 15 mai. 2021

Em relação aos fractais geométricos, [3] estabelece algumas classificações:

- *Fractais pela fronteira* (Figura 1.5): sua construção se dá por um processo recursivo aplicado na linha poligonal geradora da forma.

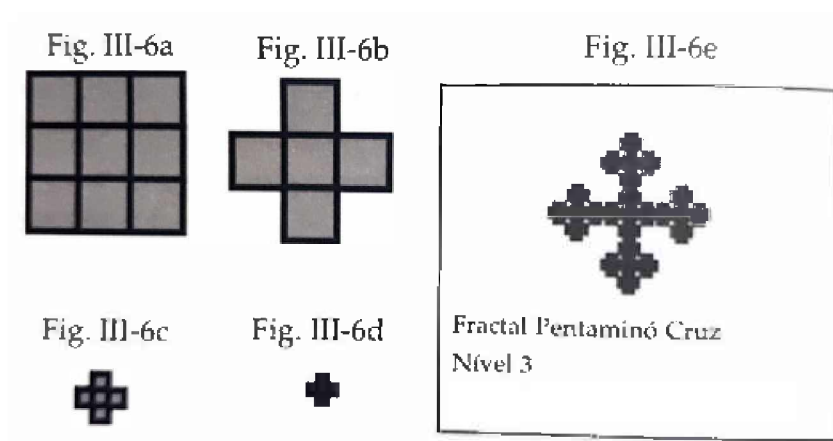
Figura 1.5: Fractal pela fronteira.



Fonte: Retirado de [3].

- *Fractais por remoção* (Figura 1.6): sua geração ocorre por iterações que acarretam a remoção de figuras semelhantes à inicial.

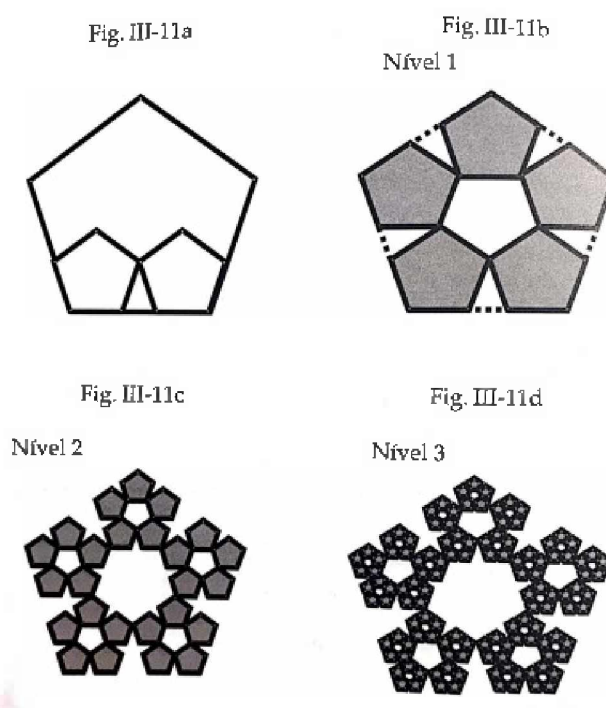
Figura 1.6: Fractal por remoção.



Fonte: Retirado de [3].

- *Fractais tipo Dürer* (Figura 1.7): sua formação ocorre por processos iterativos constituídos de polígonos regulares do mesmo formato inicial nos vértices de cada forma resultante.

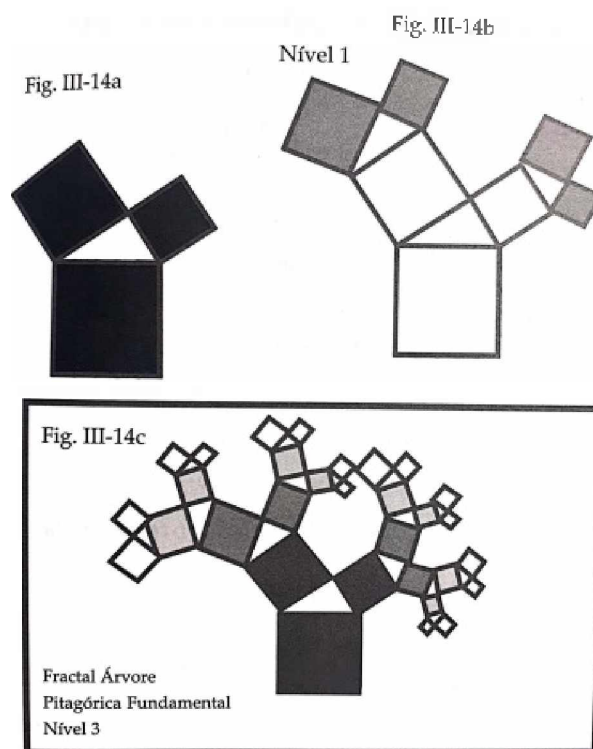
Figura 1.7: Fractal tipo Dürer.



Fonte: Retirado de [3].

- *Fractais tipo árvore* (Figura 1.8): sua formação resulta no acréscimo de formas semelhantes à inicial, resultando em outra que lembra uma árvore.

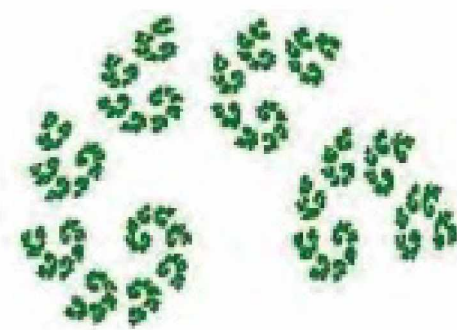
Figura 1.8: Fractal tipo árvore.



Fonte: Retirado de [3].

Além destas classificações, [2] comenta os *fractais por expansão* (Figura 1.9), formados pela expansão de polígonos para além da região inicial, resultando em um fractal com mais de um polígono.

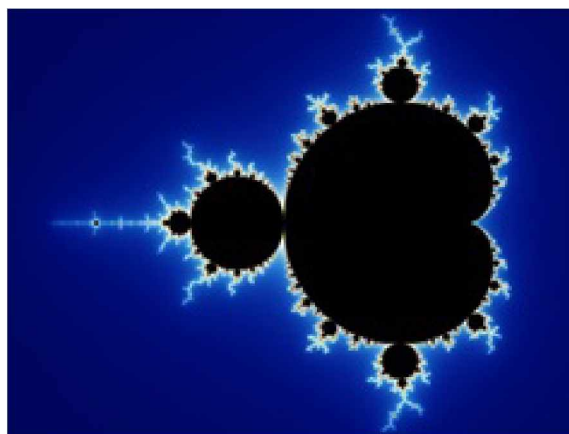
Figura 1.9: Fractal por expansão.



Fonte: Retirado de [2].

- *Fractais de fuga* ou *algébricos*: obtidos por relações algébricas não lineares e complexas, em processos computacionais. É o caso do Conjunto de Mandelbrot (Figura 1.10) e o Conjunto de Julia.

Figura 1.10: O Conjunto de Mandelbrot, um fractal complexo obtido por computador.



Fonte: Conjunto de Mandelbrot Acesso em: 15 ago. 2020

- *Fractais aleatórios* (Figura 1.11): são os fractais naturais, nos quais a formação do todo tem similaridade com partes menores de si, como ocorre nos relâmpagos e na representação dos galhos dos vegetais. Nesse caso a semelhança entre partes e o todo não é garantida por uma lei de recorrência ou por iterações determinadas.

Figura 1.11: Exemplo de fractal que descreve o crescimento de uma árvore.



Fonte: Retirado de [2].

## 1.3 Propriedades que caracterizam os fractais

Três principais propriedades caracterizam um *fractal*: a autossimilaridade, a complexidade infinita e sua dimensão.

A *autossimilaridade* é o fato de uma pequena região da forma ser idêntica ao todo, em escala menor. Essa propriedade pode ser encontrada em fractais de todos os tipos de forma exata ou aproximada, sendo por isso classificada em três tipos:

- *Autossimilaridade exata*: uma determinada região do fractal apresenta exatamente as mesmas formas da região total, em uma escala diferente. Matematicamente, essa propriedade pode ser definida como a invariância da estrutura de uma forma (que corresponde a um conjunto) após uma transformação isotrópica (que ocorre com a mesma intensidade em todas as suas coordenadas). Como exemplo, podemos citar fractais gerados por processos iterativos de remoção de partes, como o Triângulo de Sierpinski.
- *Quase autossimilaridade*: nesse caso, após processos iterativos, nota-se que o fractal apresenta semelhança com processos anteriores, mas não conserva as mesmas proporções de transformações em todas as suas dimensões ou coordenadas. Dessa forma, o fractal gerado é *aproximadamente* idêntico em uma escala diferente, mas não exatamente idêntico. Fractais gerados por computadores são exemplos desse caso.
- *Autossimilaridade estatística*: forma menos evidente e aparente de autossimilaridade, em que o fractal apresenta medidas ou estatísticas preservadas ao ocorrer da mudança de escala. É o caso dos fractais aleatórios.

A *complexidade infinita* se dá devido ao fato da geração de uma figura ocorrer por processo recursivo, resultando em formas que podem ter sua lei de formação simples mas, com um número suficientemente grande de iterações, originam outras de estruturas infinitamente complexas.

A *dimensão* é a principal característica de um fractal. Esse conceito está relacionado com a estrutura de ocupação do espaço e as irregularidades de uma forma e difere do conceito de dimensão euclidiana, dada por um número inteiro. Devido à sua complexidade,

um fractal pode ocupar espaços que sejam superiores a uma determinada dimensão inteira, mas inferiores ao próximo inteiro, como ocorre com a Curva de Koch. Desse modo, quanto maior for a dimensão fractal, mais irregular é a forma.

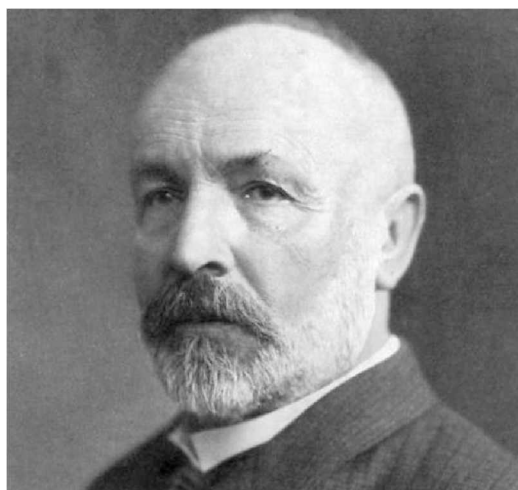
Conhecer a dimensão de um fractal nos permite tomá-lo como referência para comparar com outras formas e fenômenos naturais. Nos capítulos seguintes veremos maneiras de determinar essa grandeza.

## 1.4 Fractais clássicos

Vamos nesta seção fazer uma breve descrição de alguns dos principais fractais clássicos e como funciona sua construção, para posterior análise dos elementos que os caracterizam como fractal. São todos fractais determinísticos, dessa forma possuem autossimilaridade exata.

### 1.4.1 Poeira de Cantor

Figura 1.12: Georg Cantor (1845 - 1918)



Fonte: Georg Cantor Acesso em: 20 abr. 2021

O russo Georg Cantor (1845 - 1918) (Figura 1.12) foi estudioso de Teoria dos Números. Apresentou a noção de diferentes infinitos e de conjuntos enumeráveis. Em 1883, publicou seu trabalho conhecido como *Conjunto de Cantor* ou *Poeira de Cantor*, mencionado em quase todas as fontes de pesquisa sobre fractais.



### 1.4.2 Construção da Poeira de Cantor

A Poeira de Cantor ou Conjunto de Cantor é um fractal que descreve um número infinito de pontos em um intervalo unitário. Geometricamente sua construção pode ser obtida através dos seguintes passos:

1. Tome um segmento de medida  $1u$ ;
2. Divida o segmento em três partes iguais e retire o segmento central;
3. Divida cada segmento restante em três segmentos iguais e retire o segmento central de cada terna;
4. Repita o passo anterior um número razoavelmente grande de vezes.

Numericamente pode-se descrever a Poeira de Cantor da seguinte forma:

1. Tome um segmento de medida  $1u$  e o intervalo  $[0, 1]$ ;
2. Divida-o em três partes iguais (de comprimento  $\frac{1}{3}$ ) e retire o segmento central.

Teremos então a união de dois segmentos disjuntos de intervalos

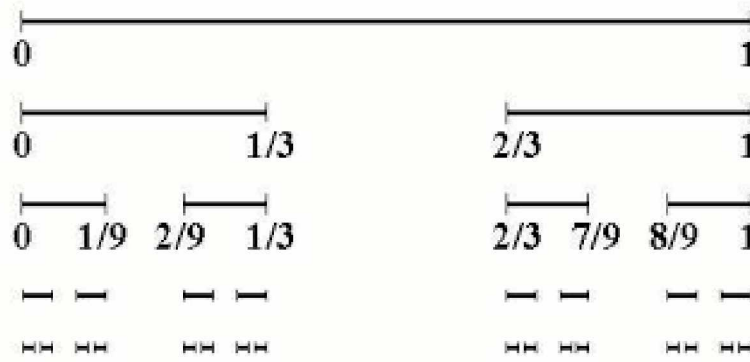
$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

3. Dividindo cada um destes segmentos em três partes iguais (de comprimento  $\frac{1}{9}$ ) e retirando-se o segmento central de cada um, teremos a união de quatro segmentos disjuntos de intervalos

$$\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Este processo continua infinitamente, aumentando-se a quantidade de segmentos, ao passo que diminui o comprimento de cada segmento e da linha em sua totalidade (Figura 1.13).

Figura 1.13: Poeira de Cantor.



Fonte: Elaborado pela autora.

Pode-se fazer uma interessante observação sobre os elementos da *Poeira*, tais como a quantidade de segmentos obtidos em cada iteração, o comprimento deles em cada etapa iterativa e a soma de suas medidas, afim de obtermos investigações de padrões e regularidades com alunos do Ensino Fundamental II e Médio. Observe a Tabela 1.1 que apresenta a relação entre os segmentos em cada etapa:

Tabela 1.1: Relação entre os elementos da Poeira de Cantor.

Iteração ( $I_n$ )	Número de Segmentos ( $N_n$ )	Comprimento dos segmentos ( $C_n$ )	Soma das medidas dos segmentos ( $S_n$ )
$I_0$	$N_0 = 1 = 2^0$	$C_0 = 1$	$S_0 = 1$
$I_1$	$N_1 = 2$	$C_1 = \frac{1}{3}$	$S_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
$I_2$	$N_2 = 2^2$	$C_2 = \frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{9}$	$S_2 = 2^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$
$I_3$	$N_3 = 2^3$	$C_3 = \frac{1}{9} : 3 = \frac{1}{27}$	$S_3 = 2^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$I_n$	$N_n = 2^n$	$C_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$S_n = N_n \cdot C_n = 2^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Fonte: Elaborada pela autora.

Pelo fato de  $C_n$  e de  $S_n$  serem dados por potências de bases menores que um, notamos que ambos tendem a zero conforme o valor de  $n$  aumenta.

### 1.4.3 O Triângulo de Sierpinski

Figura 1.14: Waclaw Sierpinski (1882 - 1969)



Fonte: Waclaw Sierpinski Acesso em: 20 abr 2021

O professor polonês Waclaw Sierpinski (1882 - 1969) (Figura 1.14) foi estudioso de Topologia e Teoria dos Conjuntos e um dos responsáveis pelo formato da escola matemática na Polônia durante sua reerguida após a Primeira Guerra Mundial. Seus estudos dedicaram-se a pontuar uma caracterização topológica para conjuntos contínuos (o conjunto  $\mathbb{R}$ ) e, nesse processo descobriu muitos espaços topológicos com propriedades inesperadas, dentre os quais o *Triângulo de Sierpinski* é o mais conhecido.

#### 1.4.4 Construção do Triângulo de Sierpinski

Para obter este fractal considere inicialmente um triângulo equilátero e os seguintes passos:

1. Tome os pontos médios de seus lados;
2. Trace os segmentos que unem estes pontos, obtendo quatro triângulos equiláteros internos ao inicial;
3. Remova o triângulo central;

4. Repita os passos 1–3 para cada um dos triângulos restantes um número razoavelmente grande de vezes. (Figura 1.15).

Figura 1.15: As primeiras iterações para o Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Triângulo de Sierpinski Acesso em: 15 mai. 2021

Neste processo recursivo podemos fazer uma análise simples da área e perímetro do triângulo para cada etapa. Tomando o triângulo inicial como  $T_0$ , considerando sua dimensão 1 e observando que os lados dos triângulos  $T_n$  a cada etapa  $n$  são dados pela multiplicação de  $l$  pelo fator  $\frac{1}{2}$ , podemos observar a regularidade para determinar a área da figura obtida conforme a Tabela 1.2.

Tabela 1.2: Relação entre a medida dos lados e área do Triângulo de Sierpinski.

Iteração ( $T_n$ )	Medida do lado ( $l_n$ )	Área ( $S_n$ )
$T_0$	$l_0 = 1$	$S_0 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$
$T_1$	$l_1 = \left(\frac{l_0}{2}\right)$	$S_1 = 3 \cdot \frac{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{l_0^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3}{4} \cdot S_0$
$T_2$	$l_2 = l_1 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{l_0}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{l_0}{2}\right)^2$	$S_2 = 9 \cdot \frac{\left(\frac{l_0}{4}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9l_0^2\sqrt{3}}{16} = \left(\frac{9}{16}\right) \left(\frac{l_0^2\sqrt{3}}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot S_0$
$T_3$	$l_3 = l_2 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{l_0}{2}\right)^3$	$S_3 = 27 \cdot \frac{\left(\frac{l_0}{8}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \left(\frac{27}{64}\right) \cdot \left(\frac{l_0^2\sqrt{3}}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot S_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_n$	$l_n = \left(\frac{l_0}{2}\right)^n$	$S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot S_0$

Fonte: Elaborada pela autora.

De forma análoga pode-se observar padrões e regularidades em relação ao perímetro do triângulo para  $n$  iterações, conforme apresenta a Tabela 1.3:

Tabela 1.3: Perímetro do Triângulo de Sierpinski.

Iteração ( $T_n$ )	Medida do lado ( $l_n$ )	Perímetro ( $P_n$ )
$T_0$	$l_0 = 1$	$P_0 = 3 \cdot l_0$
$T_1$	$l_1 = \left(\frac{l_0}{2}\right)$	$P_1 = 3 \cdot \left(3\frac{l_0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot (3 \cdot l_0) = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot P_0$
$T_2$	$l_2 = l_1 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{l_0}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{l_0}{2}\right)^2$	$P_2 = 9 \cdot 3 \left(\frac{l_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot (3 \cdot l_0) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot P_0$
$T_3$	$l_3 = l_2 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{l_0}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{l_0}{2}\right)^3$	$P_3 = 27 \cdot 3 \left(\frac{l_0}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot (3 \cdot l_0) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot P_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_n$	$l_n = \left(\frac{l_0}{2}\right)^n$	$P_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot (3 \cdot l_0) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot P_0$

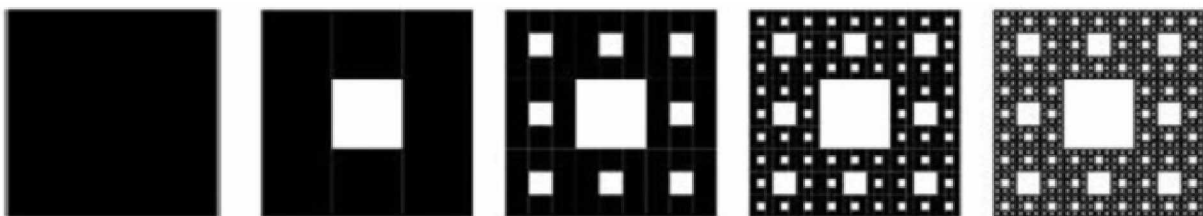
Fonte: Elaborada pela autora.

Como  $S_n$  é o produto de  $S_0$  por um fator menor do que um, notamos que a medida que  $n$  aumenta,  $S_n$  se aproxima de zero, ao passo que  $P_n$  tende a infinito para  $n$  grande, já que  $P_n$  é o produto de  $P_0$  por um fator maior do que um.

### 1.4.5 O Tapete de Sierpinski e a Esponja de Menger

Também atribuídos a Sierpinski, estes fractais são obtidos por um processo recursivo semelhante ao Triângulo, com a diferença que o Tapete (Figura 1.16) é obtido através de um quadrado que tem seus lados subdivididos em nove partes iguais, ligados de modo a formar quadrados congruentes e retirado o quadrado central. Esse processo se repete com os quadrados que restaram por diversas vezes.

Figura 1.16: Tapete de Sierpinski.

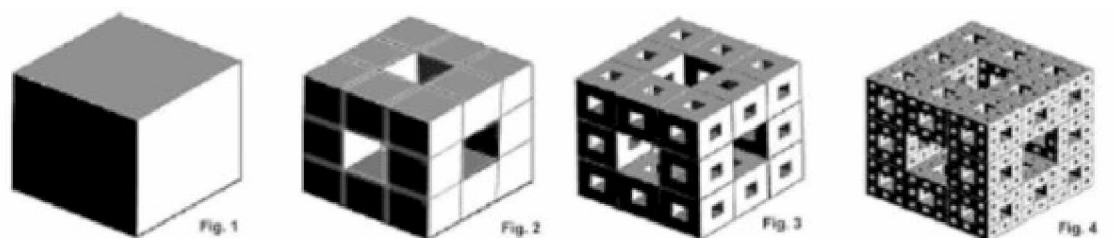


Fonte: What shape is your carpet? Acesso em: 20 ago. 2020

A Esponja de Menger (Figura 1.17) é um fractal obtido por um processo análogo ao Tapete de Sierpinski, porém em uma forma tridimensional, pois parte de um cubo. São

marcados os terços de cada aresta do cubo e subtraídos os cubos centrais de cada face, com arestas de dimensão  $\frac{1}{3}$ , repetindo esse processo para os cubos restantes.

Figura 1.17: Esponja de Menger.



Fonte: What shape is your carpet? Acesso em: 20 ago. 2020

### 1.4.6 A Curva de Koch e o Floco de Neve de Koch

Figura 1.18: Helge Von Koch (1870 - 1924)



Fonte: Von Koch Snowflake Acesso em: 10 jun. 2021

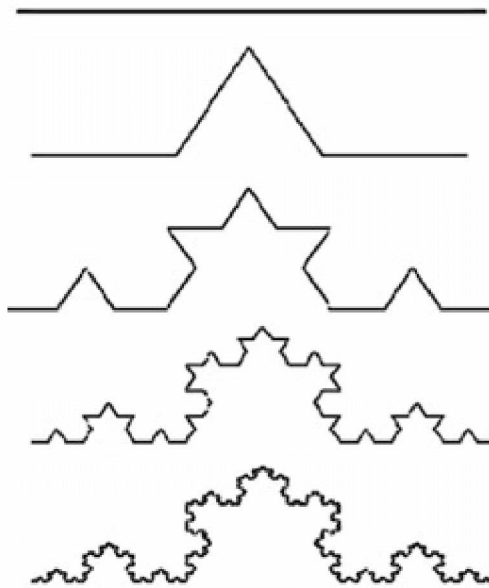
Helge V. Koch (1870 - 1924) (Figura 1.18) foi um matemático sueco que dedicou-se ao estudo de curvas não diferenciáveis e expôs uma curva contínua que não tem tangentes em nenhum de seus pontos. Em [2] é comentado que essa pode ter sido sua motivação para elaborar duas curvas que levam seu nome e têm características até então não vistas na época de divulgação de seus trabalhos, a Curva de Koch e o Floco de Neve de Koch.

### 1.4.7 A construção da Curva de Koch

Considere os seguintes processos:

1. Tome um segmento de reta de medida  $m$ .
2. Divida-o em três segmentos congruentes e retire o segmento central, substituindo-o por dois segmentos congruentes aos que restaram de modo a representar dois lados de um triângulo equilátero.
3. Repita a etapa anterior com cada um dos quatro segmentos resultantes diversas vezes (Figura 1.19):

Figura 1.19: A Curva de Koch.



Fonte: Von Koch Snowflake Acesso em: 20 ago. 2020

Podemos estabelecer algumas investigações a respeito da quantidade de segmentos ( $N_n$ ) em cada iteração ( $I_n$ ), o comprimento dos segmentos resultantes ( $C_n$ ) e o comprimento da curva ( $S_n$ ), que será a soma dos comprimentos obtidos após cada iteração. Observe a Tabela 1.4

Tabela 1.4: Padrões e regularidades na Curva de Koch.

Iteração ( $I_n$ )	Número de segmentos ( $N_n$ )	Comprimento do segmento ( $C_n$ )	Comprimento da Curva ( $S_n$ )
$I_0$	$N_0 = 1$	$C_0 = m$	$S_0 = m$
$I_1$	$N_1 = 4$	$C_1 = \frac{m}{3}$	$S_1 = 4 \cdot \left(\frac{m}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right) \cdot m$
$I_2$	$N_2 = 4 \cdot 4 = 4^2$	$C_2 = \frac{m}{9}$	$S_2 = 16 \cdot \left(\frac{m}{9}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot m$
$I_3$	$N_3 = 16 \cdot 4 = 4^3$	$C_3 = \frac{m}{27}$	$S_3 = 64 \cdot \left(\frac{m}{27}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot m$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$I_n$	$N_n = 4^n$	$C_n = \frac{m}{3^n}$	$S_n = 4^n \cdot \left(\frac{m}{3^n}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot m$

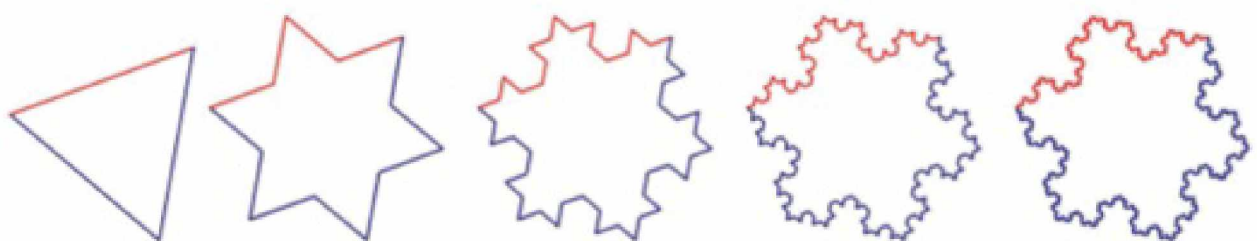
Fonte: Elaborada pela autora.

Podemos facilmente observar que para muitas iterações, o comprimento de cada segmento se aproxima de zero, mas o comprimento da curva aumenta. Dessa forma, Koch propôs a construção de uma curva que tem comprimento infinito, ainda que apresente segmentos de medidas que tendem a zero.

### 1.4.8 O Floco de Neve de Koch

A outra curva apresentada por Koch, o *Floco de Neve* ou *Ilha de Koch* (Figura 1.20) tem o mesmo processo iterativo anterior, com a diferença de que sua figura inicial é um triângulo equilátero. Sendo um fractal construído em um polígono convexo, as iterações resultam em um polígono que lembra, a cada iteração efetuada, um floco de neve:

Figura 1.20: O Floco de Neve de Koch.



Fonte: Retirado de [12]

Neste caso pode-se fazer uma investigação sobre a relação entre as medidas de cada segmento gerado, o perímetro e a área da figura em cada iteração. Para simplificar nossa



análise, vamos considerar um triângulo equilátero de lados com medida unitária e observar em cada etapa ( $I_n$ ) a quantidade de segmentos ( $N_n$ ), o comprimento ( $C_n$ ) de cada um dos segmentos e o perímetro ( $P_n$ ) do polígono resultante, conforme a Tabela 1.5

Tabela 1.5: Padrões e regularidades no perímetro do Floco de Neve de Koch.

Iteração ( $I_n$ )	Número de segmentos ( $N_n$ )	Comprimento do segmento ( $C_n$ )	Perímetro do <i>Floco</i> ( $P_n$ )
$I_0$	$N_0 = 3$	$C_0 = 1$	$P_0 = 3$
$I_1$	$N_1 = 4 \cdot 3 = 12$	$C_1 = \frac{1}{3}$	$P_1 = 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$
$I_2$	$N_2 = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4^2 = 48$	$C_2 = \frac{1}{9}$	$P_2 = 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)$
$I_3$	$N_3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4^3 = 192$	$C_3 = \frac{1}{27}$	$P_3 = 3 \cdot 4^3 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$I_n$	$N_n = 3 \cdot 4^n$	$C_n = \frac{1}{3^n}$	$P_n = 3 \cdot 4^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right) = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$

Fonte: Elaborada pela autora.

Deste modo fica fácil observar que o perímetro  $P_n$  do Floco de Neve tende a infinito para um número  $n$  grande de iterações.

Já a área das figuras resultantes no *Floco* pode ser escrita como uma soma da área do triângulo inicial com a daqueles que surgem em cada iteração. Vamos tomar um triângulo inicial de medidas de lado unitário e representar a área  $S_n$  do Floco a cada iteração  $n$ , lembrando que cada triângulo gerado tem uma redução de  $\frac{1}{3}$  em seus lados, gerando uma área  $\frac{1}{9}$  vez menor que os triângulos anteriores. Assim, podemos observar que temos uma área  $S$  para cada etapa  $S_n$ .

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 S_1 &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 S_2 &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + 4 \cdot 3 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \\
&\vdots \\
S_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{3^{2i}}\right) \cdot 4^{i-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1}
\end{aligned}$$

Para  $n$  tendendo a infinito, o somatório da equação representa a soma dos termos de uma progressão geométrica (PG) infinita de razão  $q = \frac{4}{9}$  e assim  $\sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} = \frac{9}{5}$ , ficando com

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{9}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Desse modo, como  $S_n$  independe de  $n$ , temos um fractal de área finita e de perímetro infinito.

### 1.4.9 A Curva de Peano

Figura 1.21: Giuseppe Peano (1858 – 1932)



Fonte: Giuseppe Peano Acesso em: 20 jun. 2021.

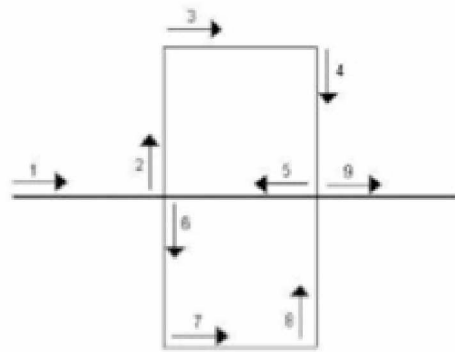
Peano (1858 – 1932) (Figura 1.21) foi um matemático que dedicou-se ao cálculo geométrico e à lógica simbólica e, em 1890, publicou sua famosa Curva de Peano. Elaborada também por um processo iterativo, ele afirma que o traço dessa curva cobriria todo o plano.

#### 1.4.10 Construção da Curva de Peano

Para sua construção pode-se tomar um esquema orientado por setas numeradas para compreender o movimento da curva no plano (Figura 1.22). Partindo-se de um segmento

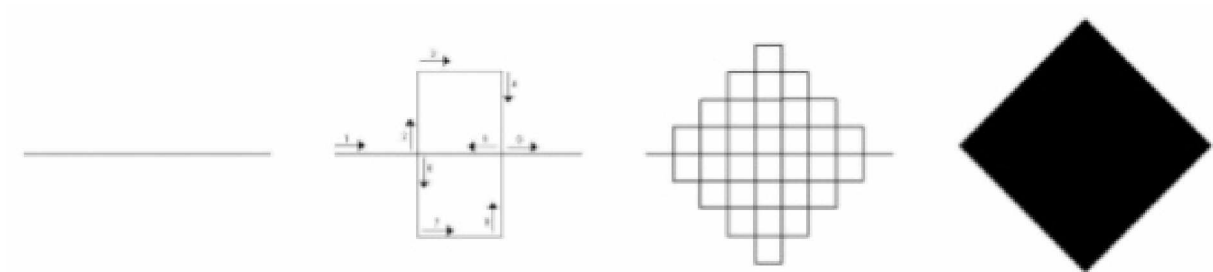
de medida  $m$ , constrói-se sobre ele 9 segmentos congruentes de medidas  $\frac{m}{3}$ , de tal modo que o terço médio do segmento inicial fique entre dois quadrados formados por seis desses segmentos orientados. E o processo se repete infinitas vezes, de tal forma que para um número  $n$  muito grande de iterações a curva passaria por todos os pontos do plano (Figura 1.23).

Figura 1.22: Figura geradora Curva de Peano.



Fonte: Retirado de [12].

Figura 1.23: Curva de Peano após várias iterações.



Fonte: Retirado de [12].

Neste caso podemos fazer uma simples investigação em relação à regularidade da quantidade ( $N_n$ ) de segmentos da Curva após cada etapa iterativa ( $I_n$ ), suas medidas ( $C_n$ ) e o comprimento total da Curva ( $S_n$ ) - Tabela 1.6. Para simplificar nossas observações, vamos tomar um segmento inicial de medida unitária para a construção da Curva.

Tabela 1.6: Padrões e regularidades na Curva de Peano.

Iteração ( $I_n$ )	Número de segmentos ( $N_n$ )	Comprimento do segmento ( $C_n$ )	Comprimento da Curva ( $S_n$ )
$I_0$	$N_0 = 1$	$C_0 = 1$	$S_0 = 1$
$I_1$	$N_1 = 9$	$C_1 = \frac{1}{3}$	$S_1 = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 3$
$I_2$	$N_2 = 9 \cdot 9 = 9^2$	$C_2 = \frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{3^2}$	$S_2 = 9^2 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right) = 3^2$
$I_3$	$N_3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$	$C_3 = \frac{1}{3^2} : 3 = \frac{1}{3^3}$	$S_3 = 9^3 \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right) = 3^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$I_n$	$N_n = 9^n$	$C_n = \frac{1}{3^n}$	$S_n = 9^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right) = 3^n$

Fonte: Elaborada pela autora.

Assim, para uma quantidade grande de iterações  $n$  o comprimento  $C_n$  tende a infinito e seu traço perpassaria por todos os pontos de uma superfície quadrada, a qual tende a ser um losango.

Nos próximos capítulos caracterizaremos, com rigor matemático, a dimensão fractal e a calcularemos para alguns destes fractais apresentados.

---

# Tópicos de espaços métricos

---

De acordo com o dicionário Oxford a palavra ‘métrica’ vem do grego *metriké* e em um contexto matemático é definida como “forma diferencial que define, em um espaço, a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos”. De forma intuitiva, falamos em métrica na Educação Básica ao referirmos à distância entre objetos, pessoas, lugares. Em [12] é comentado que abordamos essa ideia desde a infância, também em forma intuitiva, ao relacionar itens como ”perto, longe, distantes”.

Estudaremos agora a definição de métrica de maneira mais formal no campo matemático para compreendermos posteriormente o processo do cálculo da *dimensão fractal*. Para isso tomaremos como base as referências [6] e [8].

## 2.1 Espaços métricos

**Definição 2.1.1 (Métrica)** Dado um conjunto  $M \neq \emptyset$  seja  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função e indiquemos por  $d(x, y)$  a imagem de um par genérico  $(x, y) \in M \times M$  através de  $d$ . Dizemos que  $d$  é métrica sobre  $M$  se as seguintes condições se verificarem para quaisquer  $x, y, z \in M$ :

( $M_1$ )  $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (distância não negativa).

( $M_2$ )  $d(x, y) = d(y, x)$  (simetria).

( $M_3$ )  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (desigualdade triangular).

Cada imagem  $d(x, y)$  recebe o nome de *distância de  $x$  a  $y$* . Em todos os casos que encontrarmos um conjunto  $M$  e uma função  $d$  que seja uma métrica sobre  $M$  diremos que o par  $(M, d)$  é um *Espaço Métrico*.

No geral nos referimos a um espaço métrico cujo conjunto é  $M$  apenas como “espaço métrico  $M$ ” sobre a métrica referida. Cada elemento de um espaço métrico é designado por *ponto* desse espaço, seja o elemento um ponto, um número, um vetor, ou até mesmo uma função, situações que ocorrem comumente.

A partir destes conceitos podemos também ter subespaços, aos quais também são aplicáveis uma métrica  $d$ .

**Subespaços.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Dado  $S \subset M$  ( $S \neq \emptyset$ ), se considerarmos a restrição  $d_1 | S$ ,  $d_1$  é uma métrica sobre  $S$  e obtemos o espaço  $(S, d_1)$ . Dizemos que  $d_1$  é uma métrica induzida por  $d$  sobre  $S$  e indicaremos a métrica do subespaço do mesmo modo que a do espaço  $M$ , ou seja,  $d_1 = d$ .

### 2.1.1 Exemplos de espaços métricos

Para compreendermos um pouco melhor a definição de um espaço métrico, apresentaremos alguns exemplos a seguir.

**Métrica zero-um ou Métrica Discreta** : é o caso mais simples de métrica.

Seja  $M \neq \emptyset$  e uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$  definida da seguinte forma:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Podemos mostrar que  $(M, d)$  é um espaço métrico, pois verificam-se:

( $M_1$ ) Pela definição da função  $d$  temos de imediato.

( $M_2$ ) Pela definição da função  $d$  temos que, se  $x = y$ , então  $d(x, y) = d(y, x) = 0$  e, se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) = 1 = d(y, x)$ .

( $M_3$ ) Para mostrar essa condição, vamos considerar três casos possíveis:

1. Se  $x = y = z$  então  $d(x, y) = 0 \leq 0 = d(x, z) + d(z, y)$ ;
2. Se  $x = y$ ,  $x \neq z$  e  $y \neq z$  então  $d(x, y) = 0 \leq 1 + 1 = d(x, z) + d(z, y)$ ;

3. Se  $x \neq y$ ,  $x \neq z$  e  $y \neq z$  então  $d(x, y) = 1 \leq 1 + 1 = d(x, z) + d(z, y)$ .

**Métrica usual em  $\mathbb{R}$ :** Considerando o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais, a função  $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  dada por  $d(x, y) = |x - y|$  é uma métrica sobre  $\mathbb{R}$ .

De fato, podemos mostrar que  $d$  atende às condições anteriores:

$$(M_1) \quad d(x, y) = |x - y| \geq 0 \text{ e } d(x, y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$(M_2) \quad d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x);$$

$$(M_3) \quad d(x, y) = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| \leq d(x, z) + d(z, y).$$

**O espaço  $\mathbb{R}^n$ .** O conjunto  $\mathbb{R}^n$  é formado por todas as  $n$ -uplas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , onde cada  $x_i \in \mathbb{R}$ . Existem três métricas importantes sobre  $\mathbb{R}^n$  definidas da seguinte forma:

Sejam  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  pontos arbitrários do  $\mathbb{R}^n$ , as métricas são definidas da seguinte forma:

$$D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

$$D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$$

$$D_2(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}.$$

Mostraremos que as métricas em  $\mathbb{R}^n$  atendem as condições da definição de espaço métrico.

Em relação à métrica  $D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ :

$$(M_1) \quad D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \geq 0, \text{ para todo ponto } x \text{ e } y \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ e}$$

$$D(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 = 0$$

Como cada  $(x_i - y_i)^2 \geq 0$ , com  $1 \leq i \leq n$ , então

$$(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i = 0.$$

(M<sub>2</sub>) Mostremos que  $D(x, y) = D(y, x)$ .

$$\begin{aligned} D(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} \\ &= D(y, x). \end{aligned}$$

(M<sub>3</sub>) Em relação a essa condição a conclusão não é tão direta, mas pode ser justificada com o apoio da *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*: "Se  $x_1, \dots, x_n$  e  $y_1, \dots, y_n$  são números reais arbitrários, então

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n (y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}."$$

De fato, observe que para quaisquer  $r, s \in \mathbb{R}$ ,

$$2rs \leq r^2 + s^2, \text{ pois } (r - s)^2 = r^2 - 2rs + s^2 \geq 0.$$

Se  $r = \frac{|x_i|}{p}$  e  $s = \frac{|y_i|}{q}$ , com  $p = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$  e  $q = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$ , então:

$$2 \cdot \frac{|x_i|}{p} \cdot \frac{|y_i|}{q} \leq \frac{|x_i^2|}{p^2} + \frac{|y_i^2|}{q^2}, \text{ com } 1 \leq i \leq n.$$

Aplicando o somatório em relação ao índice  $i$ , segue que:

$$\frac{2}{pq} \cdot \sum_{i=1}^n (|x_i y_i|) \leq \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2})^2} + \frac{y_1^2 + \cdots + y_n^2}{(\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2})^2} = 1 + 1 = 2.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (|x_i y_i|) &\leq pq = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$



Com esta desigualdade podemos mostrar que a métrica  $D$  contempla a condição  $(M_3)$  da definição de espaço métrico da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 D^2(x, y) &= \left( \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \right)^2 \\
 &= (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2.
 \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que:

$$\begin{aligned}
 D^2(x, y) &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \\
 &= \left[ \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} \right]^2 \\
 &= [D(x, z) + D(z, y)]^2.
 \end{aligned}$$

Assim

$$D^2(x, y) \leq [D(x, z) + D(z, y)]^2 \Rightarrow D(x, y) \leq D(x, z) + D(z, y),$$

e deste modo,  $D(x, y)$  atende a condição  $(M_3)$ .

Podemos também mostrar que  $D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$  é uma métrica de acordo com a definição, já que atende às três condições. Vejamos:

$$\begin{aligned}
 (M_1) \quad D_1(x, y) &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \geq 0, \text{ para todo ponto } x \text{ e } y \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ e} \\
 D_1(x, y) &= 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = 0 \Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i, \text{ pois} \\
 &|x_i - y_i| \geq 0 \text{ com } 1 \leq i \leq n.
 \end{aligned}$$

$$(M_2) \quad D_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| = D_1(y, x).$$

$$(M_3) \quad D_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i| = \\ = D_1(x, z) + D_1(z, y).$$

Em relação à métrica  $D_2(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$  podemos também mostrar que forma um espaço métrico em  $\mathbb{R}^n$ , já que também atende a definição. Vejamos:

(M<sub>1</sub>) Para todo  $1 \leq i \leq n$ ,  $D_2(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} \geq 0$ , uma vez que  $|x_i - y_i| \geq 0$  e

$$D_2(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = 0 \Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i.$$

(M<sub>2</sub>) Como para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$  teremos

$$D_2(x, y) = \max \{|x_i - y_i|\} = \max \{|y_i - x_i|\} = D_2(y, x).$$

(M<sub>3</sub>) Mostremos a desigualdade triangular

$$\begin{aligned} D_2(x, y) &= \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} \\ &= \max \{|x_1 - z_1 + z_1 - y_1|, \dots, |x_n - z_n + z_n - y_n|\} \\ &\leq \max \{|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|, \dots, |x_n - z_n| + |z_n - y_n|\} \\ &= \max \{|x_1 - z_1|, \dots, |x_n - z_n|\} + \max \{|z_1 - y_1| + |z_n - y_n|\} \\ &= D_2(x, z) + D_2(z, y). \end{aligned}$$

Em  $\mathbb{R}^n$ , para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$  valem as relações:

$$D_2(x, y) \leq D(x, y) \leq D_1(x, y) \leq n \cdot D_2(x, y).$$

Demonstração. Tomando  $x, y \in \mathbb{R}^n$  temos para algum  $r$  tal que  $1 \leq r \leq n$ ,

$$D_2(x, y) = |x_r - y_r| = \sqrt{(x_r - y_r)^2} \leq D(x, y).$$

E ainda,

$$\begin{aligned} D(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &\leq \sqrt{[|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|]^2} \\ &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \\ &= D_1(x, y). \end{aligned}$$

Agora, supondo  $|x_r - y_r| = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$ , então

$$|x_1 - y_1| \leq |x_r - y_r|, \dots, |x_n - y_n| \leq |x_r - y_r|$$

e assim  $D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \leq n \cdot |x_r - y_r| = n \cdot D_2(x, y)$ . ■

## 2.2 Distância entre ponto e conjunto e distância entre conjuntos

Na geometria elementar temos que a distância de um ponto  $p$  a um plano  $\alpha$  é a medida do segmento  $pq$  contido na perpendicular ao plano  $\alpha$  pelo ponto  $p$ . Essa definição de usar o segmento perpendicular ao plano está englobada no contexto que veremos a seguir:

**Definição 2.2.1 (Distância ponto-conjunto)** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Dados  $p \in M$  e  $A \subset M$  ( $A \neq \emptyset$ ) chama-se distância de  $p$  ao conjunto  $A$ , e indica-se por  $d(p, A)$  o seguinte número real não negativo:*

$$d(p, A) = \inf \{d(p, x) \mid x \in A\}.$$

A existência de  $d(p, A)$  é garantida pelo fato de que o conjunto formado por  $d(p, x)$ , com  $x \in A$  é limitado inferiormente por zero.

**Exemplo 2.2.2** *Considerando a métrica usual sobre  $\mathbb{R}$ , se  $p = 0$  e  $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$  então  $d(p, A) = 0$ .*

*De fato dado  $\varepsilon > 0$ , sempre existe  $n \in \mathbb{N}$  de forma que*

$$d\left(0, \frac{1}{n}\right) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon. \text{ Logo,}$$

$$d(0, A) = \inf \left\{ d\left(0, \frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right), r \in \mathbb{N}^* \right\} = 0.$$

**Observação 2.2.3** No exemplo anterior ilustramos que é possível ter  $d(p, A) = 0$  e  $p \notin A$ .

Por outro lado, é claro que se  $p \in A$ , então  $d(p, A) = 0$  pelo fato que 0 pertence ao conjunto das  $d(p, x)$ ,  $x \in A$ .

**Proposição 2.2.4** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Se  $A \subset M$  com  $A \neq \emptyset$  e  $p, q \in M$ , então

$$|d(p, A) - d(q, A)| \leq d(p, q).$$

Demonstração. Temos que  $d(p, A) \leq d(p, x) \leq d(p, q) + d(q, x)$ , com  $p, q \in M$  e  $x \in A$ .

Dessa forma,  $d(p, A) - d(p, q) \leq d(q, x)$ .

Como a desigualdade é válida para todo  $x \in A$ , então a constante  $d(p, A) - d(p, q)$  é um limite inferior do conjunto dos elementos do tipo  $d(q, x)$ , com  $x \in A$ . Donde

$$d(p, A) - d(p, q) \leq d(q, A).$$

Como a desigualdade é válida de modo análogo, permutando-se  $p$  e  $q$ , então

$$|d(p, A) - d(q, A)| \leq d(p, q).$$

■

**Definição 2.2.5 (Distância entre conjuntos)** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Dados dois subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $M$ , ambos não vazios, chama-se distância de  $A$  à  $B$  e indica-se por  $d(A, B)$  o número real não negativo definido da seguinte maneira:

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Como o conjunto das distâncias  $d(x, y)$ , com  $x \in A$  e  $y \in B$  é limitado inferiormente pelo número 0, a existência de  $d(A, B)$  para quaisquer subconjuntos não vazios  $A, B \in M$

é garantida.

**Definição 2.2.6 (Conjunto limitado-supremo)** *Seja  $A$  um subconjunto não vazio de um espaço métrico  $(M, d)$ . Suponhamos que existe  $k \in \mathbb{R}$  de maneira que  $d(x, y) < k$ , para quaisquer  $x, y \in A$ . Nessas condições dizemos que  $A$  é um conjunto limitado e o supremo do conjunto  $\{d(x, y) | x, y \in A\}$  chama-se diâmetro do conjunto  $A$  e é denotado por  $d(A)$ . Assim*

$$d(A) = \sup \{d(x, y) | x, y \in A\}.$$

Se o conjunto  $A$  não é limitado, por definição, temos que  $d(A) = \infty$ .

**Exemplo 2.2.7** *Consideremos o  $\mathbb{R}^2$  dotado da métrica euclidiana (usual) e verifiquemos que o diâmetro de  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$  é igual a 2.*

*De fato, indiquemos por  $p = (0, 0)$  a origem e tomemos dois pontos arbitrários  $r, q \in A$ .*

*Então*

$$d(q, r) \leq d(q, p) + d(p, r) < 1 + 1 = 2,$$

*o que garante que 2 é um limite superior do conjunto  $\{d(q, r) | q, r \in \mathbb{R}^2\}$ .*

*Vamos mostrar que 2 é o menor destes limites superiores.*

*Seja  $L$  um limite superior e vamos supor, por absurdo, que  $L < 2$ . Vamos tomar um número natural  $n$  tal que  $\frac{L}{2-L} < n$ . Assim  $\left(\frac{n}{n+1}, 0\right)$  e  $\left(-\frac{n}{n+1}, 0\right)$  são pontos de  $A$  que têm distância*

$$\sqrt{\left(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2} = \frac{2n}{n+1}.$$

*Como  $\frac{L}{2-L} < n$ , então*

$$L < 2n - Ln \Rightarrow L + Ln < 2n \Rightarrow L < \frac{2n}{1+n},$$

*ou seja, haveriam 2 pontos de  $A$  cuja distância é maior do que  $L$ , um absurdo, pois  $L$  é um limite superior do conjunto destas distâncias.*

*Portanto,  $2 \leq L$  para todo limite superior  $L$  desse conjunto e então  $d(A) = 2$ .*

## 2.3 Bolas abertas

De posse das definições anteriores vamos seguir com outros conceitos topológicos que nos permitirão compreender elementos da dimensão de Hausdorff.

**Definição 2.3.1 (Bola aberta)** *Sejam  $p$  um ponto de um espaço métrico  $(M, d)$  e  $\varepsilon > 0$  um número real, a bola de centro  $p$  e raio  $\varepsilon$ , indicada por  $B(p, \varepsilon)$  é o seguinte subconjunto de  $M$*

$$B(p, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \varepsilon\}.$$

Alguns exemplos de bolas abertas.

**Bolas em um espaço cuja métrica é a "zero-um (discreta)".** Seja  $(M, d)$  um espaço discreto e consideremos  $p \in M$ . Há dois casos a considerar:

- $0 < \varepsilon \leq 1$ . Nesse caso  $B(p, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \varepsilon\} = \{p\}$ , porque o único ponto cuja distância a  $p$  é menor do que um é o próprio  $p$ .
- $1 < \varepsilon$ . Quando isso acontece,  $B(p, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \varepsilon\} = M$ , pois todos os pontos de  $M$  estão a uma distância de  $p$  igual a zero ou igual a um, e portanto, menor do que  $\varepsilon$ .

**Bolas no espaço  $\mathbb{R}$ .** Na reta real, a bola de centro  $p \in M$  e raio  $\varepsilon$  é o conjunto (Figura 2.1)

$$B(p, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - p| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid p - \varepsilon < x < p + \varepsilon\} = ]p - \varepsilon, p + \varepsilon[.$$

Figura 2.1: Bola no espaço  $\mathbb{R}$ .



Fonte: Elaborado pela autora.

**Bolas no espaço  $\mathbb{R}^2$ .** Lembremos que no espaço  $\mathbb{R}^2$  já foram definidas três métricas, a saber,

para quaisquer  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ :

$$D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

$$D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

$$D_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

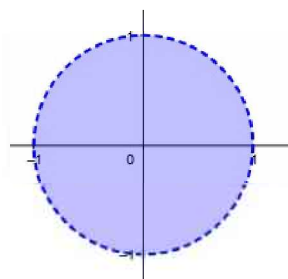
Seendo  $p = (a, b)$  um ponto fixo de  $\mathbb{R}^2$ , a bola de centro  $p$  e raio  $\varepsilon > 0$  segundo a métrica  $D$  é o conjunto

$$B(p, \varepsilon) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid (X - a)^2 + (Y - b)^2 < \varepsilon^2\},$$

cujo gráfico é um disco aberto.

**Exemplo 2.3.2** Tomando  $p = (0, 0)$  e  $\varepsilon = 1$  teremos a bola  $B(p, 1)$  conforme a Figura 2.2:

Figura 2.2: Bola aberta na métrica  $D$ .



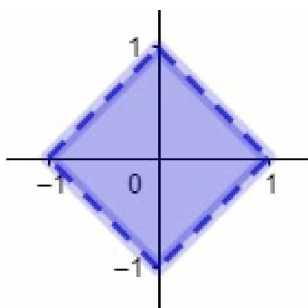
Fonte: Elaborado pela autora.

Quando a métrica for  $D_1$ , a bola de centro  $p$  e raio  $\varepsilon > 0$  é o conjunto

$$B(p, \varepsilon) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid |X - a| + |Y - b| < \varepsilon\}.$$

O gráfico da relação dada por  $|X - a| + |Y - b| < \varepsilon$  é o quadrado aberto (sem as fronteiras) de diagonais paralelas aos eixos coordenados e de medida igual a  $2\varepsilon$ , com centro em  $p = (a, b)$ .

**Exemplo 2.3.3** Tomando  $p = (0, 0)$  e  $\varepsilon = 1$  a bola será a região representada na Figura 2.5.

Figura 2.3: Bola aberta na métrica  $D_1$ .

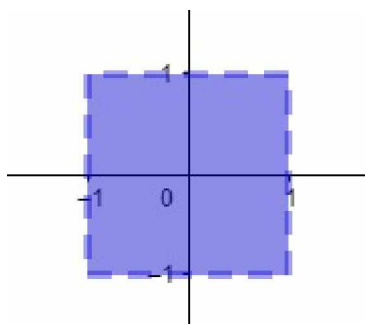
Fonte: Elaborado pela autora.

Por fim, quando tratamos da métrica  $D_2$  temos

$$B(p, \varepsilon) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|X - a|, |Y - b|\} < \varepsilon\}.$$

E o gráfico da relação  $\max\{|X - a|, |Y - b|\} < \varepsilon$ , que representa no plano a bola  $B(p, \varepsilon)$ , é o interior de um quadrado de centro  $p = (a, b)$ , cujos lados são paralelos aos eixos coordenados e tem medida igual a  $2\varepsilon$ .

**Exemplo 2.3.4** De forma análoga as anteriores, tomando o ponto  $p = (0, 0)$  e o raio  $\varepsilon = 1$  teremos a bola conforme a Figura 2.4.

Figura 2.4: Bola aberta na métrica  $D_2$ .

Fonte: Elaborado pela autora.

### 2.3.1 Propriedades das bolas abertas

Seja  $B(p, \varepsilon)$  a bola de um espaço métrico arbitrário  $(M, d)$ .

( $P_1$ ) Dadas  $B(p, \varepsilon)$  e  $B(p, \delta)$ , se  $\varepsilon < \delta$ , então  $B(p, \varepsilon) \subset B(p, \delta)$ .



Demonstração. Se  $x \in B(p, \varepsilon)$ , então  $d(x, p) < \varepsilon$ . Sendo  $\varepsilon < \delta$ , concluímos que  $d(x, p) < \delta$  e então  $x \in B(p, \delta)$ . ■

(P<sub>2</sub>) Dado  $q \in B(p, \varepsilon)$ , então existe  $\delta > 0$  de maneira que  $B(q, \delta) \subset B(p, \varepsilon)$ .

Demonstração. Se tomarmos um  $\delta < \varepsilon - d(p, q)$  teremos intuitivamente que  $B(q, \delta) \subset B(p, \varepsilon)$ .

Tomando  $x \in B(q, \delta)$ , sabemos que  $d(x, q) \leq \delta = \varepsilon - d(p, q)$ . Podemos retomar da desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} d(x, p) &\leq d(x, q) + d(q, p) \\ &\leq \varepsilon - d(p, q) + d(p, q) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso garante então que  $x \in B(p, \varepsilon)$ . ■

(P<sub>3</sub>) Sejam  $B(p, \varepsilon)$  e  $B(q, \delta)$  bolas não disjuntas. Se  $t \in B(p, \varepsilon) \cap B(q, \delta)$ , então existe  $\lambda > 0$  tal que  $B(t, \lambda) \subset B(p, \varepsilon) \cap B(q, \delta)$ .

Demonstração. Decorre de P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub>. ■

(P<sub>4</sub>) Sejam  $p$  e  $q$  dois pontos distintos entre si de um espaço  $M$ . Se  $d(p, q) = \varepsilon$ , então

$$B\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(q, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \emptyset.$$

Demonstração. Se houvesse  $x \in B\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(q, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ , teríamos então  $x \in B\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right)$  e  $x \in B\left(q, \frac{\varepsilon}{2}\right)$  e portanto  $d(x, p) < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $d(x, q) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Mas considerando a desigualdade triangular ficaríamos com

$$\varepsilon = d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

o que é um absurdo. ■

(P<sub>5</sub>) Dadas as bolas  $B(p, \varepsilon)$  e  $B(q, \delta)$ , se  $\varepsilon + \delta \leq d(p, q)$  então  $B(p, \varepsilon) \cap B(q, \delta) = \emptyset$ .

Demonstração. Se houvesse  $x \in B(p, \varepsilon) \cap B(q, \delta)$  então

$$x \in B(p, \varepsilon) \Rightarrow d(x, p) < \varepsilon$$

e  $x \in B(q, \delta) \Rightarrow d(x, q) < \delta$ .

Da desigualdade triangular teríamos  $d(p, q) \leq d(x, p) + d(x, q) < \varepsilon + \delta$ , o que é um absurdo. ■

(P<sub>6</sub>) O diâmetro de uma bola  $B(p, \varepsilon)$  é menor do que ou igual a  $2\varepsilon$ , isto é,  $d(B(p, \varepsilon)) \leq 2\varepsilon$ .

Demonstração. Sendo  $x, y \in B(p, \varepsilon)$  teremos  $d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ . ■

## 2.4 Métricas equivalentes

Para este item consideraremos duas métricas  $d$  e  $d^*$ , não necessariamente iguais, sobre um mesmo conjunto  $M$ . Indicaremos por  $B_d(p, \varepsilon)$  uma bola de centro  $p$  e raio  $\varepsilon$ , segundo a métrica  $d$  e,  $B_{d^*}(p, \varepsilon)$  a bola de centro  $p$  e raio  $\varepsilon$  quando se tratar da métrica  $d^*$ .

**Definição 2.4.1 (Métricas equivalentes)** *Sejam  $d$  e  $d^*$  métricas sobre o mesmo conjunto  $M$ . Diz-se que  $d$  e  $d^*$  são métricas equivalentes se, para cada  $p \in M$ , qualquer que seja a bola  $B_d(p, \varepsilon)$ , existe  $\lambda > 0$  de maneira que  $B_{d^*}(p, \lambda) \subset B_d(p, \varepsilon)$  e vice-versa, dada uma bola qualquer  $B_{d^*}(p, \varepsilon)$ , existe  $\lambda > 0$  de forma que  $B_d(p, \lambda) \subset B_{d^*}(p, \varepsilon)$ .*

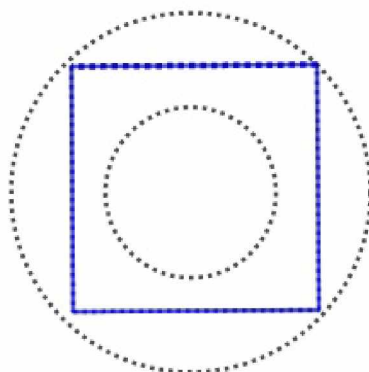
Indicaremos métricas equivalentes pela notação  $d \sim d^*$ .

**Exemplo 2.4.2** *As métricas  $D$  e  $D_2$  do espaço  $\mathbb{R}^2$ , definidas por*

$$\begin{aligned} D(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ D_2(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \end{aligned}$$

para quaisquer  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  são equivalentes visto que, todo disco aberto do plano contém um quadrado aberto, de mesmo centro, com os lados paralelos aos eixos e que todo quadrado nessas condições contém um disco aberto de mesmo centro, conforme pode ser visualizado na Figura 2.5.

Figura 2.5: Métricas equivalentes.



Fonte: Elaborado pela autora.

**Proposição 2.4.3** *Sejam  $d$  e  $d^*$  métricas sobre um conjunto  $M$ . Se existem números reais  $r, s > 0$  tais que*

$$r \cdot d(x, y) \leq d^*(x, y) \leq s \cdot d(x, y)$$

para quaisquer  $x, y \in M$ , então  $d \sim d^*$ .

Demonstração. Sejam  $p$  um ponto de  $M$  e a bola  $B_d(p, \varepsilon)$ .

Vamos mostrar que  $B_{d^*}(p, r\varepsilon) \subset B_d(p, \varepsilon)$ .

Sabemos que  $x \in B_{d^*}(p, r\varepsilon)$  implica que  $d^*(x, p) < r\varepsilon$ .

Como  $rd(x, p) \leq d^*(x, p)$ , obteremos que  $rd(x, p) < r\varepsilon$  e então  $x \in B_d(p, \varepsilon)$ .

Consideremos agora a bola  $B_{d^*}(p, \varepsilon)$  vamos mostrar que  $B_d\left(p, \frac{\varepsilon}{s}\right) \subset B_{d^*}(p, \varepsilon)$ .

Dado  $x \in B_d\left(p, \frac{\varepsilon}{s}\right)$  implica que  $d(x, p) < \frac{\varepsilon}{s}$  e assim  $s \cdot d(x, p) < \varepsilon$ .

Porém  $d^*(x, p) \leq s \cdot d(x, p)$  e, portanto,

$$d^*(x, p) \leq \varepsilon \Rightarrow x \in B_{d^*}(p, \varepsilon)$$

■

**Exemplo 2.4.4** *São equivalentes as métricas  $D$ ,  $D_1$  e  $D_2$  do  $\mathbb{R}^n$  definidas por*

$$D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

$$D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$$

$$D_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

conforme visto anteriormente.

## 2.5 Sequências em espaços métricos

**Definição 2.5.1** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Toda aplicação  $n \rightarrow x_n$ , de  $\mathbb{N}^*$  em  $M$  é chamada sequência de elementos de  $M$ . Usaremos a notação  $(x_n)$  para indicar uma sequência em  $M$ .*

Temos uma *subsequência* de uma sequência  $(x_r)$  em  $M$ , em toda aplicação dada por  $r_i \rightarrow x_{r_i}$  de elementos  $x_{r_1}, x_{r_2}, \dots$  de  $(x_r)$  de modo que,  $\{r_1, r_2, \dots\} \subset \mathbb{N}^*$  e  $r_1 < r_2 < \dots$ .

**Exemplo 2.5.2** *Se tomarmos a sequência dos números ímpares em  $\mathbb{R}$   $(1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots)$  podemos ter uma subsequência dos números que ocupam posições pares em  $(x_n)$ , tais como  $(3, 7, 11, \dots)$ .*

Fica simples observar que uma subsequência é também uma sequência.

**Definição 2.5.3 (Limite)** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Dizemos que um ponto  $p \in M$  é limite de uma sequência  $(x_n)$  de pontos de  $M$  se, para toda bola  $B(p, \varepsilon)$  existe um índice  $r \in \mathbb{N}^*$  tal que*

$$n \geq r \Rightarrow x_n \in B(p, \varepsilon).$$

Para indicar que  $p$  é limite de uma sequência  $(x_n)$  usa-se a notação  $\lim x_n = p$ , ou ainda,  $x_n \rightarrow p$ . Dizemos que  $(x_n)$  é uma *sequência convergente* ou que  $(x_n)$  *converge* para  $p$ .

**Proposição 2.5.4** *Uma sequência  $(x_n)$  de elementos de  $M$  converge para  $p \in M$  se, e somente se, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um índice  $r$  de maneira que*

$$n \geq r \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon.$$

Demonstração. Pela definição de bola aberta, é fácil ver que  $d(x_n, p) < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in B(p, \varepsilon)$ . ■

Toda subsequência de uma sequência convergente, converge para o mesmo limite da sequência. Isso fica claro pela própria definição de sequência, já que uma subsequência  $(x_r, x_{r+1}, \dots) \subset (x_1, x_2, \dots)$ .

**Exemplo 2.5.5** Consideremos  $\mathbb{R}$  dotado da métrica usual. A sequência  $(x_1, x_2, \dots)$  onde  $x_n = \frac{n}{n+3}$  converge para o ponto 1.

De fato, dado  $\varepsilon > 0$  e tomando  $r \in \mathbb{N}^*$  de maneira que  $\frac{3}{r+3} < \varepsilon$ , temos

$$\begin{aligned} d(x_n, 1) &= \left| \frac{n}{n+3} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{n}{n+3} - \frac{n+3}{n+3} \right| \\ &= \left| \frac{3}{n+3} \right| < \varepsilon \Rightarrow (x_n) \in B(1, \varepsilon). \end{aligned}$$

**Exemplo 2.5.6** Seja em um espaço métrico  $M$  uma sequência estacionária, isto é, uma sequência  $(x_n)$  de pontos de  $M$  tal que  $x_n = p$ , a partir de um certo índice.

Assim  $(x_n) = (x_1, \dots, x_r, p, p, \dots)$ .

Tais sequências são convergentes para o termo que se repete, ou seja,  $(x_1, \dots, x_r, p, \dots, p) \rightarrow p$ , uma vez que  $x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = p$ . Então, para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$n \geq r + 1 \Rightarrow d(x_n, p) = d(p, p) = 0 < \varepsilon.$$

**Proposição 2.5.7** Seja  $(x_n)$  uma sequência convergente de um espaço métrico  $(M, d)$ . Então é único o limite dessa sequência.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que  $\lim x_n = p$  e  $\lim x_n = q$ .

Se  $p \neq q$ , então  $\varepsilon = \frac{d(p, q)}{2} > 0$  e assim existem índices  $r, s$  de maneira que

$$n \geq r \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon$$

$$n \geq s \Rightarrow d(x_n, q) < \varepsilon.$$

Tomando  $t = \max \{r, s\}$ , para

$$n \geq t \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon \text{ e } d(x_n, q) < \varepsilon.$$

Então, para todo  $n \geq t$

$$d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(p, q),$$

o que é uma contradição. ■

**Proposição 2.5.8** *Se uma sequência  $(x_n)$  de pontos de um espaço métrico  $(M, d)$  converge para  $p \in M$ , então toda subsequência de  $(x_n)$  também converge para  $p$ .*

Demonstração. Seja  $(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots)$  uma subsequência de uma sequência  $(x_n)$  dada e tomemos  $\varepsilon > 0$ . Como  $(x_n) \rightarrow p$ , teremos que  $\lim x_n = p$  o que decorre que existe um valor  $k \in \mathbb{N}^*$  tal que

$$n \geq k \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon.$$

Como cada  $r_i \in \mathbb{N}^*$  e  $r_1 < r_2 < \dots$ , então existe  $r_t > k$  e portanto, para todo  $r_i \geq r_t$  teremos  $d(x_{r_i}, p) < \varepsilon$ , o que mostra que  $\lim x_{r_i} = p$ . ■

**Observação 2.5.9** *A recíproca do resultado anterior não é válida. A sequência  $(p, q, p, q, \dots)$  com  $p \neq q$  não converge, porém as subsequências  $(p, p, \dots)$  e  $(q, q, \dots)$  são convergentes.*

**Definição 2.5.10 (Sequência limitada)** *Uma sequência  $(x_n)$  de pontos de um espaço métrico  $(M, d)$  se diz limitada se o conjunto  $\{x_n \mid n = 1, 2, \dots\}$  dos termos dessa sequência é limitado, isto é, existe  $k > 0$  tal que  $d(x_r, x_s) < k$  para quaisquer termos  $x_r$  e  $x_s$  da sequência dada.*

**Proposição 2.5.11** *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja  $x_n \rightarrow p$  uma sequência em  $M$ . Dada a bola  $B(p, 1)$ , existe então um índice  $r$  tal que para  $n \geq r$ ,  $x_n \in B(p, 1)$ .

Sendo  $k > \max \{d(x_i, p) \mid i = 1, \dots, r-1\}$  e tomando uma bola  $B(p, \varepsilon)$ , onde  $\varepsilon = \max \{1, k\}$  teremos que todos os pontos do conjunto  $\{x_n \mid n = 1, 2, \dots\}$  estão contidos nessa bola e assim, para quaisquer termos  $x_i$  e  $x_j$  da sequência

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, p) + d(p, x_j) < 2\varepsilon,$$

o que prova que a sequência é limitada. ■

**Observação 2.5.12** *Nem toda sequência limitada é convergente.*

*Tome como exemplo a sequência  $(1, 2, 1, 2, \dots)$ . Em  $\mathbb{R}$  tal sequência é obviamente limitada mas não convergente.*

## 2.6 A topologia dos espaços métricos

**Definição 2.6.1 (Conjunto aberto)** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Um subconjunto  $A \subset M$  se diz aberto se, para todo  $p \in A$ , existe um número real  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(p, \varepsilon) \subset A$ .*

É imediato, a partir da definição, que se  $A \neq \emptyset$  é um conjunto aberto, então  $A$  é união de bolas abertas. E ademais, se  $A$  é uma união de bolas abertas,  $A$  é um conjunto aberto.

**Exemplo 2.6.2** *Toda bola aberta  $B(p, \varepsilon)$  num espaço métrico  $(M, d)$  é um conjunto aberto. Isso é garantido pela propriedade  $(P_2)$  das bolas abertas, a qual nos diz que, para todo  $q \in B(p, \varepsilon)$ , existe  $\delta > 0$  de maneira que  $B(q, \delta) \subset B(p, \varepsilon)$ .*

**Proposição 2.6.3** *Seja  $\mathbb{A}$  a coleção dos abertos de um espaço métrico  $(M, d)$ . Então:*

- (i)  $\emptyset, M \in \mathbb{A}$ .
- (ii)  $A, B \in \mathbb{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathbb{A}$ .
- (iii) *Se  $(A_i)$  é uma família de conjuntos abertos de  $M$ , ou seja, se cada  $A_i \in \mathbb{A}$ , então  $\cup A_i \in \mathbb{A}$ .*

Demonstração.

(i)  $\emptyset$  é aberto por não conter pontos, não contrariando a definição. Em  $M$ , toda bola de centro num ponto  $p \in M$  é um subconjunto de  $M$ , por definição.

(ii) Seja  $p \in A \cap B$ . Então existem  $\varepsilon > 0$  e  $\lambda > 0$  tais que  $B(p, \varepsilon) \subset A$  e  $B(p, \lambda) \subset B$ .

Supondo que  $\varepsilon \leq \lambda$  a propriedade  $(P_1)$  das bolas abertas garante que  $B(p, \varepsilon) \subset B(p, \lambda)$ , donde  $B(p, \varepsilon) \subset A \cap B$ .

(iii) Seja  $p \in \cup A_i$ . Então existe um índice  $t$  tal que  $p \in A_t$  e, como  $A_t$  é aberto, para um certo  $\varepsilon > 0$  vale a relação  $B(p, \varepsilon) \subset A_t$ . Então  $B(p, \varepsilon) \subset \cup A_i$ . ■

**Definição 2.6.4 (Conjunto fechado)** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Um subconjunto  $F \subset M$  se diz fechado se, e somente se,  $F^c$  é aberto.*

**Exemplo 2.6.5** *Na reta real são fechados todos os intervalos do tipo  $[a, b]$ ,  $[a, +\infty[$ , ou  $] - \infty, a]$ .*

*De fato,  $[a, b]^c = ] - \infty, a[ \cup ] b, +\infty[$  e cada um desses intervalos é aberto.*

*$[a, +\infty[^c = ] - \infty, a[$  é aberto.*

*$] - \infty, a]^c = ] a, +\infty[$  é aberto.*

**Proposição 2.6.6** *Seja  $\mathbb{F}$  a coleção dos conjuntos fechados de uma espaço métrico  $(M, d)$ . Então:*

(i)  $\emptyset, M \in \mathbb{F}$ .

(ii)  $H, F \in \mathbb{F} \Rightarrow H \cup F \in \mathbb{F}$ .

(iii) *Se  $(F_i)$  é uma família de conjuntos fechados de  $M$ , então  $\cap F_i \in \mathbb{F}$ .*

Demonstração.

(i)  $\emptyset$  e  $M$  pertencem a  $\mathbb{F}$ , porque  $\emptyset^c = M$  e  $M^c = \emptyset$  pertencem a  $\mathbb{A}$  - coleção dos abertos de  $M$ .

(ii) Sendo  $H$  e  $F$  conjuntos fechados em  $M$ , por definição temos  $H^c$  e  $F^c$  abertos. Dessa forma,  $H^c \cap F^c = (H \cup F)^c$  é aberto e  $H \cup F$  é fechado.

(iii) Como cada  $(F_i)$  é fechado, então cada  $F_i^c$  é aberto e, portanto,  $\cup F_i^c = (\cap F_i)^c$  é aberto. Consequentemente  $\cap F_i$  é fechado. ■

**Observação 2.6.7** *Se  $F_1, F_2, \dots, F_n (n \geq 1)$  são conjuntos fechados do espaço  $M$ , então  $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$  também é fechado em  $M$ . Mas uma união infinita de fechados pode não ser um conjunto fechado.*

*De fato, em  $\mathbb{R}$  cada subconjunto unitário é fechado, mas em  $\mathbb{I} = ]a, b[ = \cup \{p\}$  não é fechado.*



**Definição 2.6.8 (Ponto aderente)** *Seja  $A$  um subconjunto de um espaço métrico  $(M, d)$ . Um ponto  $p \in M$  se diz ponto aderente ao conjunto  $A$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , vale a relação*

$$B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

*O conjunto dos pontos aderentes ao subconjunto  $A$  chama-se fêcho de  $A$  e é indicado por  $\overline{A}$ . É imediato que  $A \subset \overline{A}$ .*

**Exemplo 2.6.9** *Na reta real temos a igualdade  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .*

*De fato, dado  $p \in \mathbb{R}$ , todo intervalo  $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$  contém números racionais. Daí,*

$$]p - \varepsilon, p + \varepsilon[ \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

*e portanto  $p \in \overline{\mathbb{Q}}$ .*

**Proposição 2.6.10** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Se  $p \in M$  e  $A \subset M$ , então  $d(p, A) = 0$  se, e somente se,  $p \in \overline{A}$ .*

Demonstração. ( $\Rightarrow$ ) Dado  $\varepsilon > 0$ , como

$$d(p, A) = \inf \{d(p, x) \mid x \in A\} = 0,$$

então  $0 \leq d(p, A) < \varepsilon$ , pois como  $d(p, A) = 0$  a distância  $d$  não será maior que  $\varepsilon$ . Desse modo  $A \in B(p, \varepsilon)$  e portanto,  $B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ , o que significa que  $p \in \overline{A}$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos  $d(p, a) = \varepsilon > 0$ . Como hipótese  $B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ , então existe  $a \in A$  tal que  $d(a, p) < \varepsilon$ . Como porém  $\varepsilon = d(p, A) \leq d(p, a) < \varepsilon$  temos aí um absurdo que encerra a demonstração. ■

**Definição 2.6.11 (Ponto interior)** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Se  $A \subset M$ , um ponto  $p \in A$  é chamado ponto interior ao conjunto  $A$  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(p, \varepsilon) \subset A$ . O conjunto dos pontos interiores a  $A$  é chamado interior de  $A$  e é indicado por  $\overset{\circ}{A}$ . É claro que  $\overset{\circ}{A} \subset A$ .*

**Proposição 2.6.12** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Então para todo  $A \subset M$ , vale a relação  $(\overline{A})^c = \overset{o}{\widehat{A}^c}$  (isto é, o complementar do fecho de  $A$  é igual ao interior do complementar de  $A$ ).*

Demonstração. Observe que,

$$x \in (\overline{A})^c \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0; B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists \varepsilon; B(x, \varepsilon) \subset A^c \Leftrightarrow x \in \overset{o}{\widehat{A}^c}$$

$$\text{Portanto, } (\overline{A})^c = \left( \overset{o}{\widehat{A}^c} \right).$$

**Corolário 2.6.13**  *$F \subset M$  é fechado se, e somente se,  $\overline{F} = F$ .*

Demonstração.

$$\begin{aligned} F \subset M \text{ é fechado} &\Leftrightarrow F^c \text{ é aberto} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in F^c, \exists \varepsilon > 0 \mid B(x, \varepsilon) \subset F^c \\ &\Leftrightarrow F^c = \overset{o}{\widehat{F^c}} = (\overline{F})^c \\ &\Leftrightarrow F = \overline{F}. \end{aligned}$$

**Definição 2.6.14 (Conjunto denso)** *Dado um espaço métrico  $(M, d)$ , um subconjunto  $A \subset M$  se diz denso em  $M$  se  $\overline{A} = M$ .*

**Proposição 2.6.15** *Seja  $M$  um espaço métrico. Se  $A \subset M$  é denso em  $M$ , então  $G \cap A \neq \emptyset$ , para todo aberto  $G \neq \emptyset$  desse espaço.*

Demonstração. Sendo  $G$  aberto, para  $p \in G$  existe uma bola  $B(p, \varepsilon) \subset G$ . Como  $\overline{A} = M$ , então existe  $a \in A$  tal que  $d(p, a) < \varepsilon$ , ou seja, vale a relação  $a \in B(p, \varepsilon)$ . Daí  $a \in G$  e portanto,  $G \cap A \neq \emptyset$ .

**Definição 2.6.16 (Ponto de Acumulação)** *Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico e  $A$  um subconjunto de  $M$ . Diz-se que um ponto  $p \in M$  é ponto de acumulação de  $A$  se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$ , a interseção*

$$(B(p, \varepsilon) - p) \cap A$$

é um conjunto infinito. Quer dizer, toda bola de centro  $p$  deve conter infinitos pontos de  $A$ , distintos do ponto  $P$ .

O conjunto dos pontos de acumulação de  $A$  é chamado conjunto derivado de  $A$  e se indica por  $A'$ . E também:  $A \subset B \subset M \Rightarrow A' \subset B'$ .

**Exemplo 2.6.17** No espaço  $\mathbb{R}$  usual o único ponto de acumulação de  $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$  é o ponto 0.

De fato, uma bola  $B(0, \varepsilon) = ]-\varepsilon, \varepsilon[$  contém todos os elementos  $\frac{1}{r} \in A$  tais que

$$\frac{1}{r} < \varepsilon \left( \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < r \right).$$

**Proposição 2.6.18** Seja  $M$  um espaço métrico. Então  $F \subset M$  é fechado se, e somente se,  $F' \subset F$ .

Demonstração. ( $\Rightarrow$ ) Suponha que exista  $p \in F'$  tal que  $p \notin F$ . Então  $p \in F^C$ , que é aberto e existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(p, \varepsilon) \subset F^C$ , isto é,  $B(p, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ . Mas como  $p \in F'$ , então  $(B(p, \varepsilon) - p) \cap F$  é infinito, do que decorre que  $B(p, \varepsilon) \cap F$  também é infinito e portanto não vazio. Por este absurdo, esta implicação é válida.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $p \in F^C$ . Como  $F' \subset F$  então  $F^C \subset (F')^C$  e daí  $p \in (F')^C$ . Donde existe  $\varepsilon > 0$  de forma que

$$(B(p, \varepsilon) - p) \cap F = \emptyset.$$

Mas  $p \notin F$  e teremos também a igualdade  $B(p, \varepsilon) \cap F = \emptyset$  que equivale a  $B(p, \varepsilon) \subset F^C$  o que garante que todos os pontos de  $F^C$  são interiores, ou seja, que  $F^C$  é aberto. Então  $F$  é fechado. ■

## 2.7 Funções contínuas

**Definição 2.7.1 (Função contínua)** Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos (cujas métricas, por comodidade serão indicadas pelo mesmo símbolo  $d$ ). Uma função  $f : M \rightarrow N$  se diz contínua no ponto  $p \in M$  se, para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  de maneira que

$$d(x, p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Dizer que  $f$  é contínua significa que  $f$  é contínua em todos os pontos de  $M$ .

**Proposição 2.7.2** *Uma função  $f : M \rightarrow N$  é contínua no ponto  $p \in M$  se, e somente se, dada uma bola  $B(f(p), \varepsilon)$  existe uma bola  $B(p, \delta)$  tal que*

$$f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \varepsilon)$$

Demonstração. ( $\Rightarrow$ ) Tendo a bola  $B(f(p), \varepsilon)$ , como  $f$  é contínua, então existe  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Considerando uma bola  $B(p, \delta)$  vamos mostrar que  $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \varepsilon)$ .

Sendo  $y \in f(B(p, \delta))$  então  $y = f(x)$ , com  $x \in B(p, \delta)$ . Como  $d(x, p) < \delta$ , então  $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$  (por hipótese) e assim  $y = f(x) \in B(f(p), \varepsilon)$ .

( $\Leftarrow$ ) Sendo  $x \in B(p, \delta)$ , então  $d(x, p) < \delta$  e  $f(x) \in B(f(p), \varepsilon) \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon$ . Desse modo  $f : M \rightarrow N$  é contínua. ■

**Proposição 2.7.3** *Uma função  $f : M \rightarrow N$  é contínua num ponto  $p \in M$  se, e somente se, o fato de uma sequência  $(x_n)$  de pontos de  $M$  convergir para  $p$  acarretar que  $(f(x_n))$  converge para  $f(p)$ , ou seja se, e somente se,  $x_n \rightarrow p$  acarretar que  $f(x_n) \rightarrow f(p)$ .*

Demonstração. ( $\Rightarrow$ ) Como  $f$  é contínua, existe um  $\delta > 0$  de modo que  $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \varepsilon)$ . Mas como  $x_n \rightarrow p$ , existe um índice  $n$ ,  $x_n \in B(p, \delta)$ . Daí,  $f(x_n) \in f(B(p, \delta))$  e, portanto,  $f(x_n) \in B(f(p), \varepsilon)$  para todo  $n$ , o que prova que  $f(x_n) \rightarrow f(p)$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $f$  não fosse contínua em  $p$ , existiria  $\varepsilon > 0$  tal que

$$f(B(p, \delta)) \not\subset B(f(p), \varepsilon), \quad \forall \delta > 0$$

e assim,

$$\begin{aligned} f(B(p, 1)) &\not\subseteq B(f(p), \varepsilon) \\ f\left(B\left(p, \frac{1}{2}\right)\right) &\not\subseteq B(f(p), \varepsilon) \\ f\left(B\left(p, \frac{1}{3}\right)\right) &\not\subseteq B(f(p), \varepsilon) \\ &\vdots \end{aligned}$$

e portanto para cada  $n \geq 1$  existe  $x_n \in M$  tal que  $x_n \in B\left(p, \frac{1}{n}\right)$  e  $f(x_n) \notin B(f(p), \varepsilon)$ .

Então a sequência  $x_n \rightarrow p$  ao passo que  $f(x_n) \not\rightarrow f(p)$ , o que contradiz a hipótese. ■

## 2.8 Conjunto compacto

**Definição 2.8.1 (Conjunto compacto)** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Dizemos que um subconjunto  $K \subset M$  é compacto se, para toda sequência  $(x_n)$  de pontos de  $K$  existe uma subsequência  $(x_{n_j})$  que converge para um ponto  $p \in K$ . Um espaço métrico  $(M, d)$  se diz compacto se o conjunto  $M$  é compacto.*

**Exemplo 2.8.2** *Todo conjunto finito é compacto.*

*De fato, se  $K$  é finito e  $(x_1, x_2, \dots)$  é uma sequência de pontos de  $K$ , então existe um termo  $x_r$  tal que  $(x_r, x_r, \dots)$  é uma subsequência da sequência dada. Como  $(x_r, x_r, \dots) \rightarrow x_r$ , então  $K$  é compacto.*

**Exemplo 2.8.3** *Na reta real todo intervalo  $[a, b]$  é compacto.*

*De fato, seja  $(x_1, x_2, \dots)$  uma sequência de pontos de  $[a, b]$  e consideremos a sequência  $(s_1, s_2, \dots)$ , onde*

$$s_n = \inf \{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

*Desta forma, por estar contido em um intervalo fechado, tem-se que*

$$a \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq b$$

*e portanto, se  $s = \sup \{s_n\}$ , então  $s = \lim s_n$ .*

*Deste modo, tomando  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , existe um índice  $n_1$  tal que  $|s_n - s| < \frac{1}{2}$ , para todo  $n \geq n_1$ ,*

como  $s_m = \inf \{x_m, x_{m+1}, \dots\}$ , existe um índice  $i_1 \geq m$  de modo que  $|x_{i_1} - s_m| < \frac{1}{2}$ . Daí então

$$|x_{i_1} - s| \leq |x_{i_1} - s_m| + |s_m - s| < 1.$$

Analogamente, para  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  será possível encontrar um índice  $n_2$  tal que  $|s_n - s| < \frac{1}{4}$ , para  $n \geq n_2$ . Tomando um índice  $m$  tal que  $m > n_2$  e  $m > i_1$ , sendo  $s_m = \inf \{x_m, x_{m+1}, \dots\}$ , existe um índice  $i_2 \geq m$  de maneira que

$$|x_{i_2} - s| \leq |x_{i_2} - s_m| + |s_m - s| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Desta forma obtemos uma sequência  $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots)$  que é subsequência de  $(x_1, x_2, \dots)$  e tal que

$$|x_{i_r} - s| < \frac{1}{2^{r-1}} \quad (r = 1, 2, 3, \dots).$$

Como  $\lim \frac{1}{2^{r-1}} = 0$  e portanto,  $\lim x_{i_r} = s$ .

**Proposição 2.8.4** *Seja  $M$  um espaço métrico. Se  $F$  e  $K$  são subconjuntos de  $M$  tais que  $F$  é fechado,  $K$  é compacto e  $F \subset K$ , então  $F$  também é compacto.*

Demonstração. Se  $(x_1, x_2, \dots)$  é uma sequência de  $F$ , é também de  $K$ , e como  $K$  é compacto, existe uma subsequência  $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots)$  de  $(x_i)$  tal que  $\lim x_{i_j} = p \in K$ . Seja  $A$  o conjunto das imagens dessa subsequência. Temos duas possibilidades:

1.  $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots\}$  é finito.

Então existem subsequências de  $(x_{i_j})$  que são constantes, convergindo cada uma delas para  $p$  e assim,  $p \in F$ .

2.  $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots\}$  é infinito.

Como  $p = \lim x_{i_j}$ , então para cada  $\varepsilon > 0$  a bola aberta  $B = B(p, \varepsilon)$  contém infinitos termos de  $(x_{i_j})$  e portanto, é infinita a interseção  $(B - \{p\}) \cap A$ . Donde  $p \in A'$  e daí  $p \in F'$ , uma vez que  $A \subset F$ . Como porém  $F' \subset F$  (pois  $F$  é fechado), então  $p \in F$ . ■

**Proposição 2.8.5** *Todo subconjunto compacto  $K$  de um espaço métrico  $M$  é fechado.*

Demonstração. Se  $p \in \overline{K}$ , então para todo  $n \in \mathbb{N}^*$  vale a desigualdade

$$B\left(p, \frac{1}{n}\right) \cap K \neq \emptyset.$$

Tomando em cada uma destas intersecções apenas um elemento, obtemos uma sequência de pontos de  $K$  que converge para  $p$ , o que ocorre também com todas as suas subsequências. Como  $K$  é compacto, ao menos uma dessas subsequências converge para algum ponto de  $K$  e então  $p \in K$ . ■

**Proposição 2.8.6** *Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos e seja  $f : M \rightarrow N$  uma função contínua. Se  $K \subset M$  é compacto, então  $f(K)$  também é compacto.*

Demonstração. Seja  $(y_1, y_2, \dots)$  uma sequência de pontos de  $f(K)$ . Assim sendo, existe, para cada índice  $i$ , um elemento  $x_j \in K$  tal que  $f(x_j) = y_i$ . Como  $(x_j) \subset K$ , que é um conjunto compacto, existe uma subsequência  $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots)$  de  $(x_j)$  tal que  $\lim x_{i_r} = p \in K$ .

Sendo  $f$  contínua, então  $\lim f(x_{i_r}) = f(p)$  e portanto, a subsequência  $(f(x_{i_r}))$  de  $(y_i)$  converge para  $f(p) \in f(K)$ . ■

**Proposição 2.8.7** *Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos e consideremos sobre  $M \times N$  qualquer uma das métricas equivalentes  $D$ ,  $D_1$  ou  $D_2$ . Se  $K$  e  $L$  são subconjuntos de  $M$  e  $N$ , respectivamente, então  $M \times N$  é compacto se, e somente se,  $K$  e  $L$  são compactos.*

Demonstração. ( $\Rightarrow$ ) Sendo  $K \times L$  compacto, como as projeções  $p_1 : M \times N \rightarrow M$  e  $p_2 : M \times N \rightarrow N$  são contínuas, então  $p_1(K \times L) = K$  e  $p_2(K \times L) = L$  também são compactos.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $(z_n) = (x_n, y_n)$  uma sequência de pontos de  $K \times L$ . Então  $(x_n)$  é uma sequência de pontos de  $K$  e  $(y_n)$  é uma sequência de pontos de  $L$ . Como  $K$  é compacto segue que existe uma subsequência  $(x_{n_i})$  de  $(x_n)$  tal que  $(x_{n_i}) \rightarrow p \in K$ .

Considere  $(z_{n_i}) = (x_{n_i}, y_{n_i})$  e temos que  $(y_{n_i})$  é uma sequência em  $L$ . Como  $L$  é compacto então existe uma subsequência  $(y_{n_{i_k}})$  que converge para  $q \in L$ .

Tome  $(z_{n_{i_k}}) = (x_{n_{i_k}}, y_{n_{i_k}})$  e obtemos que  $(z_{n_{i_k}}) \rightarrow (p, q) \in K \times L$ . Logo,  $K \times L$  é compacto. ■

**Proposição 2.8.8** *Um subconjunto  $A$  do espaço  $\mathbb{R}^n$  é compacto se, e somente se,  $A$  é fechado e limitado.*

Demonstração. ( $\Rightarrow$ ) Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  é compacto, então para toda sequência  $(x_n)$  existe uma subsequência  $x_{n_i} \rightarrow p \in A$ , daí  $A$  é limitado. Também, como para  $\varepsilon > 0$ ,  $(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap A$  é um conjunto infinito, assim  $A' \subset A$  e  $A$  é fechado.

( $\Leftarrow$ ) Se  $A$  é fechado, então  $A' \subset A$  e há infinitos pontos na intersecção  $(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap A$ , com  $\varepsilon > 0$  e  $p \in A$ . Assim há subsequências  $(x_{n_i})$  em  $A$  tais que  $x_{n_i} \rightarrow A$  e  $A$  é limitado e compacto. ■

**Definição 2.8.9 (Sequência de Cauchy)** *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Uma sequência  $(x_n)$  de pontos de  $M$  é chamada sequência de Cauchy se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um índice  $r \in \mathbb{N}^*$  tal que*

$$m, n \geq r \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

**Proposição 2.8.10** *Toda sequência convergente de um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja  $(M, d)$  um espaço métrico e  $(x_n)$  uma sequência de  $M$  que converge para um ponto  $p \in M$ . Dessa forma, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tal que para todo

$$n \geq m \Rightarrow x_n \in B\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Assim, para todo  $n, t \geq m$  sabe-se que sua distância pode ser dada por

$$d(x_n, x_t) \leq d(x_n, p) + d(p, x_t) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

**Observação 2.8.11** *A recíproca do resultado anterior não é válida, ou seja, uma sequência de Cauchy de um espaço métrico  $(M, d)$ , pode não convergir em  $M$ .*

**Proposição 2.8.12** *Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy num espaço métrico  $(M, d)$ . Se existe uma subsequência de  $(x_n)$  que converge para  $p \in M$ , então  $\lim x_n = p$ .*



Demonstração. Seja  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$  uma subsequência da sequência  $(x_n)$  de Cauchy.

Desse modo, para todo  $\varepsilon > 0$  existe um índice  $n_k$  tal que

$$n_i \geq n_k \Rightarrow d(x_{n_i}, p) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Na sequência  $(x_n)$  existe um índice  $s$  tal que

$$m, n \geq s \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fazendo  $t = \max\{n_k, s\}$ , considerando um índice  $n_j > t$ , que sempre existe, temos então que

$$n \geq t \Rightarrow d(x_n, p) \leq d(x_n, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, p) < \varepsilon$$

o que garante a convergência de  $(x_n)$  para o ponto  $p$ . ■

**Corolário 2.8.13** *Se uma sequência de pontos de um espaço métrico contém duas subsequências que convergem para pontos diferentes desse espaço, então a sequência não é de Cauchy.*

## 2.9 Espaço métrico completo

**Proposição 2.9.1** *Toda sequência de Cauchy  $(x_n)$  em  $\mathbb{R}$  converge para um ponto  $p \in \mathbb{R}$ .*

Demonstração. Em uma sequência de Cauchy podemos tomar um índice  $r$  tal que para  $m > r$  podemos tomar uma outra sequência  $(y_n)$  dada por

$$y_n = \inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\}.$$

Sendo  $(y_n)$  uma subsequência de  $(x_n)$  sabemos que

$$(y_n) \rightarrow p = \sup\{y_n \mid n = 1, 2, \dots\},$$

que é um ponto de  $\mathbb{R}$ .

Vamos mostrar que  $\lim x_n = p$ .

Tomando  $\varepsilon > 0$ , podemos tomar índices  $r$  e  $s$  de modo que:

$$n > r \Rightarrow |y_n - p| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$m, n > s \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Fazendo  $t = \max\{r, s\}$  podemos tomar uma sequência  $y_t = \inf\{x_t, x_{t+1}, \dots\}$  em que para  $j \leq t$  teremos  $y_t \leq x_j < y_t + \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x_j - y_t| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

E então, para índices  $n > t$ ,

$$|x_m - p| \leq |x_n - x_j| + |x_j - y_t| + |y_t - p| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Portanto,  $\lim x_n = p$ . ■

**Definição 2.9.2 (Espaço métrico completo)** *Um espaço métrico  $(M, d)$  é chamado completo se toda sequência de Cauchy desse espaço converge para um ponto de  $M$ .*

**Proposição 2.9.3** *Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos. Então o espaço  $M \times N$  é completo se, e somente se,  $M$  e  $N$  são completos.*

Demonstração. ( $\Rightarrow$ ) Uma sequência  $(x_n)$  em  $M$  é de Cauchy, então para cada  $y \in M$ , então, para cada  $y \in N$ ,  $((x_1, y), (x_2, y), \dots)$  é uma sequência de Cauchy no espaço  $M \times N$ .

De fato, dado  $\varepsilon > 0$  existe um índice  $r$  tal que

$$m, n \geq r \Rightarrow d((x_m, y), (x_n, y)) = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y - y)^2} = |x_m - x_n| < \varepsilon,$$

Portanto  $(x_n, y)$  converge para  $(x, y) \in M \times N$  e daí  $(x_n)$  converge para um ponto  $x \in M$ . De modo análogo mostra-se que  $N$  é completo.

( $\Leftarrow$ ) Se  $(x_n, y_n)$  é uma sequência de Cauchy no espaço  $M \times N$ , então  $(x_n)$  e  $(y_n)$  são sequências de Cauchy em  $M$  e  $N$ , respectivamente, e sendo completos estes espaços, existem  $p \in M$  e  $q \in N$  de modo que  $\lim(x_n) = p$  e  $\lim(y_n) = q$ .

Portanto  $\lim(x_n, y_n) = (p, q) \in M \times N$  e então  $M \times N$  é completo. ■

**Observação 2.9.4** *De forma natural o enunciado se refere a qualquer uma das métricas usuais de  $M \times N$ .*

Como podemos generalizar esta proposição para um produto  $M = M_1 \times \cdots \times M_n$  o seguinte corolário é válido.

**Corolário 2.9.5** *O espaço  $\mathbb{R}^n$  é completo.*

**Proposição 2.9.6** *Todo espaço métrico compacto é completo.*

Demonstração. Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy em um espaço métrico compacto  $M$ .

Por ser compacto, existe em  $M$  uma subsequência  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots) \rightarrow p \in M$ .

Mas se uma subsequência converge, então a sequência em que ela está contida converge para o mesmo ponto.

Logo  $x_n \rightarrow p$  e dessa forma  $M$  é completo. ■

**Observação 2.9.7** *Não vale a recíproca da proposição acima.*

*O espaço  $\mathbb{R}$  (considerando a métrica usual) é completo, mas não é compacto, pois podemos encontrar sequências em números reais como  $(2, 4, 6, \dots)$  que não admitem subsequências convergentes em  $\mathbb{R}$ .*

---

# Dimensão de Hausdorff ou dimensão fractal

---

Estudaremos neste capítulo a dimensão de Hausdorff ou dimensão fractal. Para isso, vamos retomar o que entendemos por dimensão e expandir o conceito para medidas não inteiras, dadas pela dimensão fractal.

## 3.1 O que entendemos por dimensão?

Em Geometria Euclidiana sabemos que a dimensão de um conjunto consiste no menor número de coordenadas para determinar posições de seus elementos. Assim encontramos unidades com dimensões inteiras  $0, 1, 2, 3, \dots, n$ , que podem ser exemplificadas com elementos como o ponto, a reta, o plano e o espaço. Usualmente esta dimensão está associada à eixos perpendiculares, podendo ser ampliada, por indução, para  $n$  dimensões, ainda que percebamos visualmente apenas até  $n = 3$ .

Porém, alguns conjuntos não podem ser descritos por um número inteiro de coordenadas como, por exemplo, a Curva de Koch: ela não ocupa o mesmo espaço de uma linha (dimensão 1) e nem de uma faixa definida por comprimento e altura (dimensão 2). Desse modo notamos que a Curva tem dimensão entre 1 e 2, um valor não inteiro. Já comentamos que os fractais apresentam dimensões não inteiras, denominadas *Dimensão Fractal*.

Vejamos como podemos explorar de forma intuitiva a medida da dimensão fractal, chamada também de Dimensão de Hausdorff, através de subdivisões de alguns objetos.

Dividindo um segmento de reta em cinco outros de mesma medida, ficaremos com uma quantidade  $N = 5$  de segmentos.

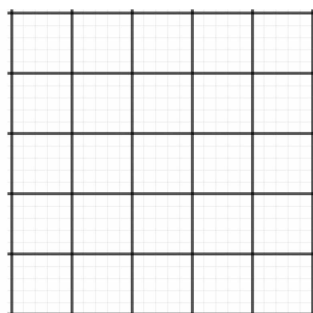
Figura 3.1: Secção de um segmento em um fator  $r = 1/5$ .



Fonte: Elaborado pela autora.

Tomando um quadrado e dividindo seus lados em cinco partes iguais, obtemos um total de  $N = 5^2$  novos quadrados.

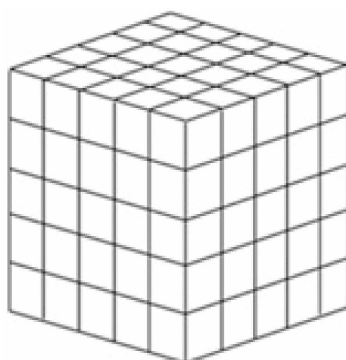
Figura 3.2: Secção dos lados de um quadrado no fator  $r = 1/5$ .



Fonte: Elaborado pela autora.

Procedendo de forma análoga para um cubo, ou seja, dividindo suas arestas em cinco partes iguais, obteremos  $N = 5^3$  novos cubos.

Figura 3.3: Secção das arestas de um cubo no fator  $r = 1/5$ .



Fonte: Elaborado pela autora.

Podemos variar o coeficiente de redução para qualquer outro valor, variando assim o número de partes em que o objeto é dividido. Em todos os casos, tomando como  $N$  a

quantidade de partes obtidas após a divisão e  $r$  o fator de redução, podemos obter o valor  $D$  da dimensão como o expoente que relaciona  $N$  e  $r$ . Observe:

- Dimensão 1 - o caso do segmento de reta

$$5 = \frac{1}{\frac{1}{5^1}}$$

- Dimensão 2 - o caso do quadrado

$$25 = \frac{1}{\frac{1}{5^2}}$$

- Dimensão 3 - o caso do cubo

$$125 = \frac{1}{\frac{1}{5^3}}$$

Desta forma, tomando  $N$  como o número de partes obtidas,  $r$  o fator de redução e  $D$  a dimensão dos segmentos, a relação

$$N = \frac{1}{r^D}$$

pode ser escrita como

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^D.$$

Aplicando-se a função logaritmo aos membros da igualdade anterior, podemos calcular a dimensão  $D$  de um objeto pela relação

$$\ln N = \ln \left(\frac{1}{r}\right)^D \Rightarrow \ln N = D \cdot \ln \left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow D = \frac{\ln N}{\ln \left(\frac{1}{r}\right)}.$$

Deste modo, conseguimos calcular a dimensão para objetos autossimilares. Observe que no caso do segmento de reta, do quadrado e do plano essas dimensões são valores inteiros, conforme já sabemos da Geometria Euclidiana.

No entanto, no caso dos fractais estas dimensões podem ser não inteiras. A ideia da *dimensão fractal* é quantificar a densidade de um fractal no espaço em que está inserido, podendo ser usada para comparar fractais.

É possível calcular a dimensão fractal de objetos da natureza em determinadas escalas, como nuvens, e comparar com outros valores obtidos por meio de experimentos.

Estudaremos, neste capítulo, o processo de construção da ideia do cálculo desta dimensão fractal apoiada em conceitos de espaços métricos, comentados no primeiro capítulo. O uso de subconjuntos compactos de um espaço métrico permite maior aproximação com um modelo a ser comparado com relativa facilidade.

## 3.2 O Espaço de Hausdorff

Nesta seção iremos definir o Espaço de Hausdorff, também conhecido como o "espaço dos fractais", e uma métrica a ele envolvida. Nosso estudo está baseado nas colocações de [4] e [11].

**Definição 3.2.1** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo. Denotaremos por  $\mathcal{H}(X)$  o espaço formado por todos os subconjuntos não vazios compactos de  $X$ , ou seja,*

$$\mathcal{H}(X) = \{K \subset X \mid K \text{ é compacto e } K \neq \emptyset\}.$$

Vamos considerar que nossos conjuntos podem ser compactos e que nosso espaço subjacente será algum  $\mathbb{R}^n$ . Nesse caso, um conjunto ser compacto significa que ele é fechado e limitado.

Para trabalharmos com um espaço métrico é importante que tenhamos uma métrica bem definida e para isso, definiremos a distância de um elemento do espaço métrico  $X$  a um elemento de  $\mathcal{H}(X)$ . Tal métrica será apresentada na seção a seguir e é conhecida como *distância de Hausdorff*.

**Observação 3.2.2** *Cada ponto do espaço  $\mathcal{H}(X)$  é um conjunto. Desse modo, distância entre pontos de  $\mathcal{H}(X)$  será a distância entre conjuntos de pontos do espaço.*

### 3.2.1 A métrica de Hausdorff

Apresentaremos a seguir, o passo a passo para a definição da distância de Hausdorff.

**Definição 3.2.3** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo,  $x \in X$  e  $B \in \mathcal{H}(X)$ . Definimos*

a distância do ponto  $x$  ao conjunto  $B$  como

$$\text{dist}(x, B) = \min \{d(x, y) \mid y \in B\}.$$

O fato de  $B \in \mathcal{H}(X)$  ser compacto e não vazio nos garante a existência de um valor mínimo para o conjunto. Note que, tomamos o mínimo no lugar do ínfimo, pois  $B$  é compacto.

**Definição 3.2.4** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ . A distância do conjunto  $A$  ao conjunto  $B$  é definida como*

$$\text{dist}(A, B) = \max \{\text{dist}(x, B) \mid x \in A\}.$$

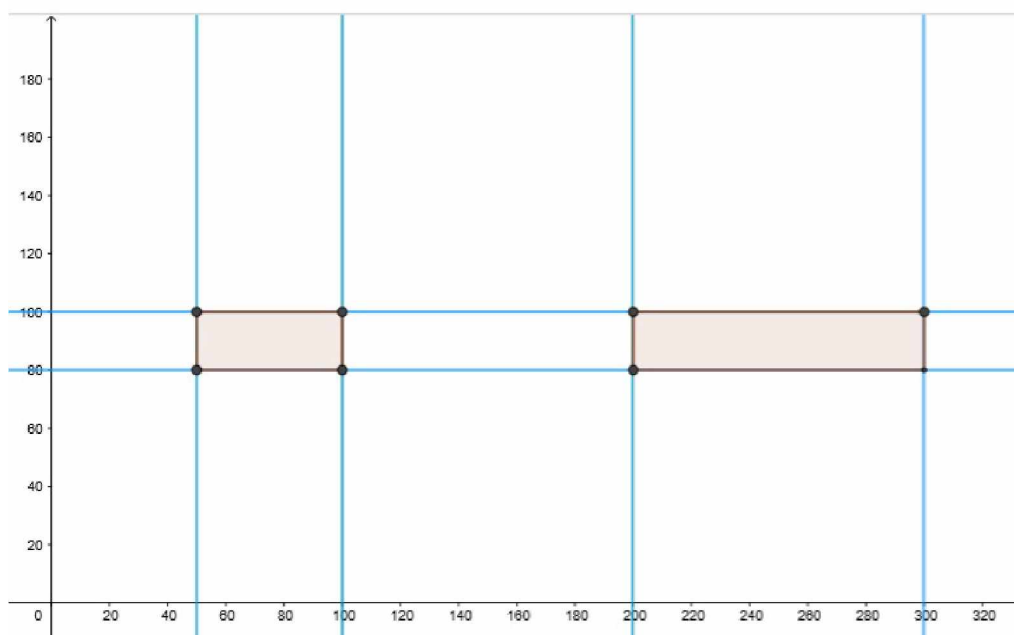
Podemos garantir a existência de um valor máximo para este conjunto, definindo a função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \text{dist}(x, B)$ , para todo  $x$  pertencente ao conjunto  $A$ . A função  $f$  é contínua e, como  $A$  é um conjunto compacto,  $f(A)$  também é compacto e, portanto, limitado.

Desta forma, concluímos que a distância entre dois conjuntos no espaço  $\mathcal{H}(X)$  é a maior entre as menores distâncias de um ponto de  $A$  a um ponto de  $B$ .

Para compreender melhor a definição anterior, vamos apresentar o exemplo a seguir:

**Exemplo 3.2.5** *Dados os conjuntos  $A = [50, 100] \times [80, 100]$  e  $B = [200, 300] \times [80, 100]$ , calculemos a distância do conjunto  $A$  ao conjunto  $B$ .*



Figura 3.4: Representação dos conjuntos  $A$  e  $B$ .

Fonte: Elaborado pela autora.

Primeiramente, calcularemos as distâncias de cada ponto  $x \in A$  ao conjunto  $B$ . Assim,

$$x = (50, 80) \Rightarrow \text{dist}(x, B) = 150.$$

$$x = (50, 100) \Rightarrow \text{dist}(x, B) = 150.$$

$$x = (100, 80) \Rightarrow \text{dist}(x, B) = 100.$$

$$x = (100, 100) \Rightarrow \text{dist}(x, B) = 100.$$

Como qualquer ponto deve estar entre os limites do ponto  $x$  que já calculamos, basta analisar o máximo entre eles.

$$\text{Logo, } \text{dist}(A, B) = \max \{ \text{dist}(x, B) \mid x \in A \} = 150.$$

O processo para calcular a distância  $\text{dist}(B, A)$  será análogo, somente considerando sentido inverso para o cálculo das distâncias.

Calculando as distâncias de cada ponto  $y \in B$  ao conjunto  $A$ , tem-se

$$y = (200, 80) \Rightarrow \text{dist}(y, A) = 100.$$

$$y = (200, 100) \Rightarrow \text{dist}(y, A) = 100.$$

$$y = (300, 80) \Rightarrow \text{dist}(y, A) = 200.$$

$$y = (300, 100) \Rightarrow \text{dist}(y, A) = 200.$$

Logo,  $\text{dist}(B, A) = \max \{ \text{dist}(y, A) \mid y \in B \} = 200$ .

**Observação 3.2.6** Como no exemplo anterior,  $\text{dist}(A, B) \neq \text{dist}(B, A)$ . Desse modo, a definição de distância entre conjuntos não pode ser uma métrica.

Assim, a distância de Hausdorff será definida como a maior entre as distâncias  $\text{dist}(A, B)$  e  $\text{dist}(B, A)$ .

**Definição 3.2.7 (Distância de Hausdorff)** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo. A distância de Hausdorff entre os pontos  $A$  e  $B$  de  $\mathcal{H}(X)$  é definida por

$$h(A, B) = \max \{ \text{dist}(A, B), \text{dist}(B, A) \}.$$

**Proposição 3.2.8** A aplicação  $h$  é uma métrica no espaço  $\mathcal{H}(X)$ .

Demonstração. Mostraremos que  $h$  satisfaz as três condições da definição de métrica. Para isso, vamos considerar  $A, B$  e  $C \in \mathcal{H}(X)$ .

( $M_1$ ) Para todo  $A \in \mathcal{H}(X)$

$$\begin{aligned} h(A, A) &= \max \{ \text{dist}(A, A), \text{dist}(A, A) \} \\ &= \text{dist}(A, A) \\ &= \max \{ \text{dist}(x, A) \mid x \in A \} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, para todo  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ , tem-se  $h(A, B) > 0$ .

De fato, como  $A$  e  $B$  são compactos e não vazios, então existem  $a \in A$  e  $b \in B$  tais que  $\text{dist}(A, B) = d(a, b)$ . Sendo  $d$  uma métrica em  $X$ , então  $d(a, b) \geq 0$  e portanto  $h(A, B) \geq 0$ . Se  $A \neq B$  então existe  $a \in A$  tal que  $a \notin B$ , donde  $\text{dist}(A, B) > 0$ , uma vez que  $A$  e  $B$  são fechados. Portanto,  $h(A, B) > 0$ .

( $M_2$ ) Mostremos que  $h(A, B) = h(B, A)$ .

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max\{dist(A, B), dist(B, A)\} \\ &= \max\{dist(B, A), dist(A, B)\} \\ &= h(B, A). \end{aligned}$$

( $M_3$ ) Para verificar que  $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$ , vamos primeiro mostrar que  $dist(A, B) \leq dist(A, C) + dist(C, B)$ .

De fato, para algum  $a \in A$

$$\begin{aligned} dist(a, B) &= \min \{d(a, b) \mid b \in B\} \\ &\leq \min \{d(a, c) + d(c, b) \mid b \in B\}, \forall c \in C \\ &= d(a, c) + \min \{d(c, b) \mid b \in B\}, \forall c \in C. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} dist(a, B) &\leq \min \{d(a, c) \mid c \in C\} + \max \{\min \{d(c, b) \mid b \in B\} \mid c \in C\} \\ &= dist(a, C) + dist(C, B). \end{aligned}$$

Logo,  $dist(A, B) \leq dist(A, C) + dist(C, B)$ .

De forma análoga,  $dist(B, A) \leq dist(B, C) + dist(C, A)$ .

Então,

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max\{dist(A, B), dist(B, A)\} \\ &\leq \max\{(dist(A, C) + dist(C, B)), (dist(B, C) + dist(C, A))\} \\ &\leq \max\{dist(A, C), dist(C, A)\} + \max\{dist(C, B), dist(B, C)\} \\ &\leq h(A, C) + h(C, B). \end{aligned}$$

Desta forma,  $h$  é uma métrica no espaço  $\mathcal{H}(X)$ . ■

O espaço  $\mathcal{H}(X)$  com a métrica  $h$  é denominado *Espaço de Hausdorff*.

### 3.3 A dimensão de Hausdorff

Embora exista uma grande variedade de definições de dimensões (fractais), vamos concentrar-nos na dimensão de Hausdorff e no método Box-Counting que são as mais comuns e mais relevantes. Para tal, precisaremos das definições a seguir:

**Definição 3.3.1 (Número de bolas fechadas para cobrir um conjunto)** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo,  $A \in \mathcal{H}(X)$  e  $\varepsilon > 0$ . Defina  $\mathcal{N}(A, \varepsilon)$  como sendo o menor número de bolas fechadas de raio  $\varepsilon$  necessárias para cobrir o conjunto  $A$ . Isto é,  $\mathcal{N}(A, \varepsilon)$  é o menor inteiro positivo  $M$  tal que  $A \subset \bigcup_{n=1}^M B(x_n, \varepsilon)$ , para algum conjunto de pontos distintos  $\{x_n \mid n = 1, 2, \dots, M\} \subset X$ .*

A ideia intuitiva por trás da *dimensão fractal* é a de que um conjunto  $A$  tem dimensão fractal  $D$  se

$$\mathcal{N}(A, \varepsilon) = C\varepsilon^{-D},$$

para alguma constante  $C > 0$ .

Desenvolvendo a equação acima teremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A, \varepsilon) &= C\varepsilon^{-D} \\ \frac{\mathcal{N}(A, \varepsilon)}{C} &= \left(\frac{1}{\varepsilon^D}\right) \\ \left(\frac{\mathcal{N}(A, \varepsilon)}{C}\right) &= \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^D \\ \ln\left(\frac{\mathcal{N}(A, \varepsilon)}{C}\right) &= D \cdot \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon)) - \ln C}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} &= D. \end{aligned}$$

Variando os valores de  $\varepsilon$  e fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  teremos, na equação acima que o termo  $\frac{\ln C}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$  se aproxima de zero. Isso nos leva a seguinte definição:

**Definição 3.3.2 (Dimensão de Hausdorff)** *Seja  $A \in \mathcal{H}(X)$ , onde  $(X, d)$  é um espaço mé-*

trico. Se

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon))}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right\}$$

existe, então  $D$  é chamada dimensão de Hausdorff ou dimensão fractal de  $A$ . Também pode ser usada a notação  $D = D(A)$ .

**Exemplo 3.3.3** Considere  $X$  o espaço métrico  $\mathbb{R}^2$  com a métrica euclidiana. Sejam  $a \in X$  e  $A = \{a\}$ . Assim, para cada  $\varepsilon > 0$ , temos que  $\mathcal{N}(A, \varepsilon) = 1$ . Então,

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right\} = 0.$$

Logo,  $D(A) = 0$ .

Os próximos teoremas simplificam o processo de cálculo da dimensão fractal. Eles permitem a substituição de uma variável contínua  $\varepsilon$  por uma variável discreta.

**Teorema 3.3.4** Seja  $A \in \mathcal{H}(X)$ , onde  $(X, d)$  é um espaço métrico. Considere  $\varepsilon_n = Cr^n$ , para  $r$  e  $C$  números reais, tais que  $0 < r < 1$  e  $C > 0$ , e inteiros  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Se

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_n))}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)} \right\},$$

então  $A$  tem dimensão fractal  $D$ .

Demonstração. Sejam  $r$  e  $C$  números reais e  $E = \{\varepsilon_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  uma sequência como definida na hipótese do teorema. Defina  $f(\varepsilon) = \max\{\varepsilon_n \in E \mid \varepsilon_n \leq \varepsilon\}$ . Assuma que  $\varepsilon \leq r$ .

Então,

$$f(\varepsilon) \leq \varepsilon \leq \frac{f(\varepsilon)}{r} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(A, f(\varepsilon)) \geq \mathcal{N}(A, \varepsilon) \geq \mathcal{N}\left(A, \frac{f(\varepsilon)}{r}\right).$$

Sendo  $\ln(x)$  uma função positiva e crescente, para  $x \geq 1$ , teremos

$$\left\{ \frac{\ln\left(\mathcal{N}\left(A, \frac{f(\varepsilon)}{r}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{f(\varepsilon)}\right)} \right\} \leq \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon))}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right\} \leq \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\varepsilon)))}{\ln\left(\frac{r}{f(\varepsilon)}\right)} \right\}.$$

Assumindo que  $\mathcal{N}(A, \varepsilon) \rightarrow \infty$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  teremos no lado direito da desigualdade:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\varepsilon)))}{\ln\left(\frac{r}{f(\varepsilon)}\right)} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_n))}{\ln\left(\frac{r}{\varepsilon_n}\right)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_n))}{\ln\left(r \cdot \frac{1}{\varepsilon_n}\right)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_n))}{\ln(r) + \ln\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_n))}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)} \right\}. \end{aligned}$$

Agora  $\frac{f(\varepsilon)}{r} = \frac{\varepsilon_n}{r} = \frac{C \cdot r^n}{r} = C \cdot r^{n-1} = \varepsilon_{n-1}$ . Dessa forma, podemos considerar no lado esquerdo da desigualdade:

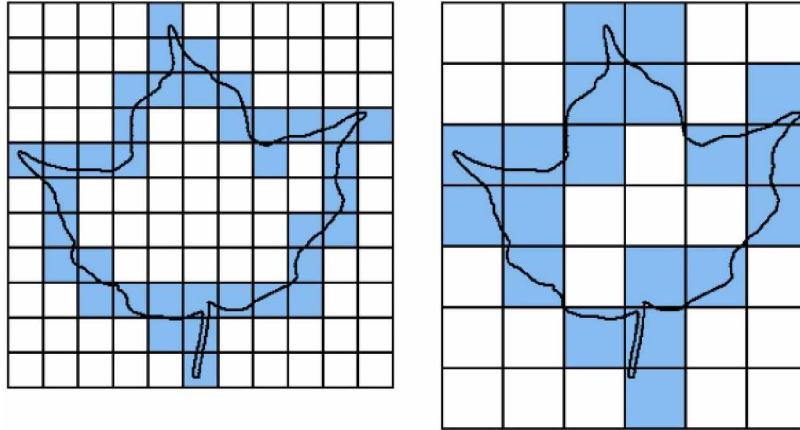
$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln\left(\mathcal{N}\left(A, \frac{f(\varepsilon)}{r}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{f(\varepsilon)}\right)} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_{n-1}))}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_{n-1}))}{\ln\left(\frac{1}{r \cdot \varepsilon_{n-1}}\right)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_{n-1}))}{\ln\left(\frac{1}{r}\right) + \ln\left(\frac{1}{\varepsilon_{n-1}}\right)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \varepsilon_n))}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)} \right\}. \end{aligned}$$

Observe que a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tanto o lado esquerdo quanto o direito da desigualdade aproximam-se do mesmo valor afirmado no teorema. Assim, pelo Teorema do Confronto, o limite do termo central da desigualdade quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  existe e é o mesmo valor dos limites dos extremos. ■

Uma outra maneira de calcular a dimensão fractal é utilizando o *Método Box Counting*.

Tal método consiste em relacionar a medida dos lados de uma figura com a quantidade de *caixas* quadradas de lados medindo  $\left(\frac{1}{r}\right)^n$  que a sobrepõem (ver Figura 3.5). Vale salientar que com dimensões cada vez menores, o número de caixas para cobrir a figura aumenta, resultando em um olhar mais detalhado sobre as características do item em análise.

Figura 3.5: Exemplificação do método Box-Counting para cálculo da dimensão fractal.



Fonte: Exemplo Box Counting Acesso em: 25 jun. 2021.

**Teorema 3.3.5 (Box-Counting)** *Seja  $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ , com a métrica euclidiana. Cubra  $\mathbb{R}^m$  por caixas quadradas fechadas com lados de comprimento  $\frac{1}{2^n}$  que apenas se tocam. Seja  $\mathcal{N}_n(A)$  o número de caixas com lados  $\frac{1}{2^n}$  que intersectam  $A$ . Se*

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_n(A))}{\ln(2^n)} \right\},$$

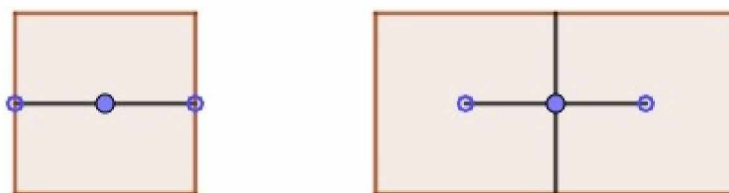
*então  $A$  tem dimensão fractal  $D$ .*

Demonstração. Para  $m = 1, 2, 3, \dots$  temos que

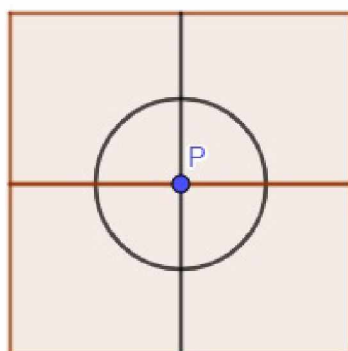
$$2^{-m} \cdot \mathcal{N}_{n-1} \leq \mathcal{N}\left(A, \frac{1}{2^n}\right) \leq \mathcal{N}_{k(n)}, \quad \text{para todo } n = 1, 2, 3, \dots,$$

onde  $k(n)$  é o menor inteiro  $k$  que satisfaz  $k \geq n - 1 + \frac{1}{2} \cdot \log_2 m$ .

Observe que a quantidade de bolas de raio  $\varepsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  que intersectam caixas quadradas de lados de medida  $s = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  em  $\mathbb{R}$  e em  $\mathbb{R}^2$  nas Figuras 3.6 e 3.7.

Figura 3.6: Bolas intersectando caixas em  $\mathbb{R}$ 

Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3.7: Bolas intersectando caixas  $\mathbb{R}^2$ 

Fonte: Elaborado pela autora.

Notamos que uma bola de raio  $\frac{1}{2^n}$  toca no máximo  $2^m$  bolas de raio  $\frac{1}{2^{n-1}}$ , e com isto a primeira desigualdade é válida.

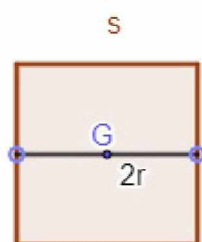
Para a segunda desigualdade observamos que:

$$m \geq 3 \Rightarrow k(n) \geq n \Rightarrow \mathcal{N}_{k(n)} \geq \mathcal{N}\left(A, \frac{1}{2^n}\right)$$

em que  $\mathcal{N}_{k(n)}$  refere-se ao número de caixas de lados  $\frac{1}{2^{k(n)}}$ .

Geometricamente, observa-se pelo Teorema de Pitágoras (Figura 3.8):



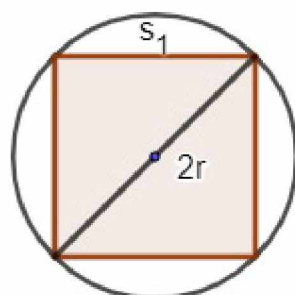
Figura 3.8: Caixas intersectando bolas em  $\mathbb{R}$ 

Fonte: Elaborado pela autora.

Então,

$$(s \leq 2r)^2 \Rightarrow \left(\frac{s}{2}\right)^2 \leq r^2 \Rightarrow r^2 \geq \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

Em  $\mathbb{R}^2$  (Figura 3.9) temos:

Figura 3.9: Caixas intersectando bolas em  $\mathbb{R}^2$ 

Fonte: Elaborado pela autora

Relacionando as medidas do diâmetro da bola ( $2r$ ) e do lado  $s$  da caixa teremos, pelo Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (2r)^2 &\geq s^2 + s^2 \\ r^2 &\geq \left(\frac{s^2}{4}\right) + \left(\frac{s^2}{4}\right) \\ &\geq \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = m \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Pode-se generalizar a desigualdade  $r^2 \geq m \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^2$  para todo  $m$  e assim, comparando-a com  $k \geq n - 1 + \frac{1}{2} \cdot \log_2 m$  temos que a segunda desigualdade é válida. Então podemos mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_n)}{\ln(2^n)} \right\}$  existe.

Como  $\frac{k(n)}{n} \rightarrow 1$  quando  $n \rightarrow \infty$ , temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)})}{\ln(2^n)} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)})}{\ln(2^n)} \cdot \frac{\ln(2^{k(n)})}{\ln(2^{k(n)})} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(2^{k(n)})}{\ln(2^n)} \cdot \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)})}{\ln(2^{k(n)})} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{k(n) \cdot \ln(2)}{n \cdot \ln(2)} \cdot \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)})}{\ln(2^{k(n)})} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)})}{\ln(2^{k(n)})} \right\} \\
&= D.
\end{aligned}$$

E também, da primeira desigualdade, temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(2^{-m} \mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^n)} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(2^{-m}) + \ln(\mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^n)} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(2^{-m})}{\ln(2^n)} \right\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^n)} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{-m \cdot \ln(2)}{n \cdot \ln(2)} \right\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^n)} \right\} \\
&= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(2^{n-1})}{\ln(2^{n-1})} \cdot \frac{\ln(\mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^n)} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(n-1) \ln(2)}{(n) \ln(2)} \cdot \frac{\ln(\mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^{n-1})} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^{n-1})} \right\} \\
&= D.
\end{aligned}$$

Assim a demonstração segue do Teorema 3.3.4 com  $r = \frac{1}{2}$ . ■

No Teorema 3.3.5, usamos caixa de lado  $\frac{1}{2^n}$ . Porém, de modo análogo, podemos usar caixas de lado  $Cr^n$ , onde  $C > 0$  e  $0 < r < 1$  são números reais fixos.

**Exemplo 3.3.6** Considere  $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ . Cobrindo  $Q$  por caixas de dimensão  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$  teremos quantidades de caixas  $N_1(Q) = 9$ ,  $N_2(Q) = 81$ ,

$N_3(Q) = 729, \dots, N_n(Q) = 9^n$ , para  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Então,

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_n(Q))}{\ln(3^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(9^n)}{\ln(3^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(3^{2n})}{\ln(3^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2 \cdot \ln(3^n)}{\ln(3^n)} \right\} = 2.$$

### 3.4 Dimensão de Hausdorff $\times$ método Box-Counting

Diante do estudo anterior podemos nos perguntar: qual dimensão torna-se mais correta para obter um dado acerca de um fractal?

Embora ambas sejam válidas podemos afirmar que o uso de caixas (boxes) simplifica o cálculo da dimensão fractal, já que permite a comparação, sob determinada escala, de um objeto ou imagem que pode inclusive estar inserido na natureza, como uma costa marítima, com uma representação plana.

Para confrontar estas medidas, tomemos um exemplo: vamos calcular a dimensão do conjunto de Cantor confrontando a dimensão de Hausdorff e a dimensão dada pelo método Box-Counting.

Precisamos retomar que, de acordo com as definições vistas anteriormente, o conjunto de Cantor ( $C$ ) é formado pela união de  $2^n$  conjuntos fechados para cada iteração  $n$ . Sendo uma quantidade finita de intervalos fechados, o conjunto é também fechado e limitado, já que existe  $r \leq 0$  tal que  $d(x, y) \leq r, \forall x, y \in C$ . Consequentemente,  $C$  é *compacto*.

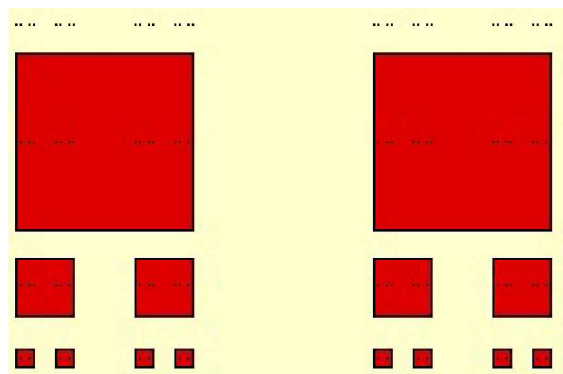
Como já foi visto no capítulo anterior, para uma quantidade infinita de iterações teremos uma quantidade  $2^n$  de segmentos de medidas  $\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^{-n}$ . Desse modo, pela *dimensão de Hausdorff*

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(2^n)}{\ln\left(\frac{1}{3^{-n}}\right)} \right\} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0,6309 \dots$$

Por outro lado, cobrindo-se o conjunto por caixas de comprimento  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$  serão necessárias, a cada  $n = 1, 2, 3, \dots$ , quantidades  $\mathcal{N}_1(C) = 2, \mathcal{N}_2(C) = 4, \mathcal{N}_3(C) = 8, \dots, \mathcal{N}_n(C) = 2^n$ , para cobrir os elementos do conjunto. Então, pelo *método Box-Counting* - Figura 3.10, teremos

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_n(C))}{\ln(3^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(2^n)}{\ln(3^n)} \right\} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0,6309 \dots$$

Figura 3.10: Método Box-Counting para o conjunto de Cantor.



Fonte: Que tamanho tem um fractal? Acesso em: 15 mai. 2021.

Vamos proceder de modo análogo para comparar a dimensão do *triângulo de Sierpinski*.

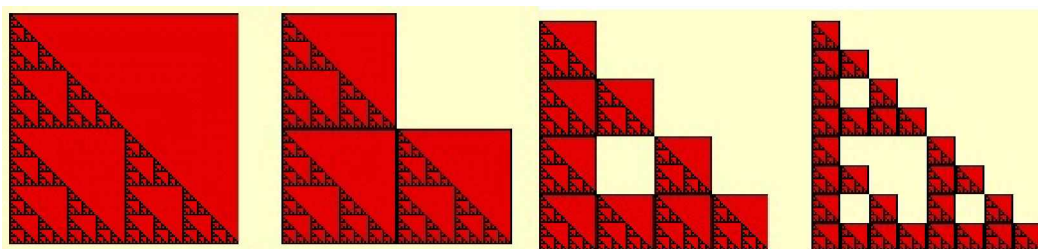
Vamos considerá-lo como um subconjunto compacto  $T$  do espaço  $\mathbb{R}^2$  com a métrica usual. De acordo com o que foi apresentado no capítulo anterior, teremos em um nível  $n$  um número  $3^n$  de triângulos medindo  $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{-n}$  dos lados do triângulo inicial. Então, pela *dimensão de Hausdorff*

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(3^n)}{\ln\left(\frac{1}{2^{-n}}\right)} \right\} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 1,58 \dots$$

Agora vamos cobrir  $\mathbb{R}^2$  com caixas de lado  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Desse modo, a cada  $n = 1, 2, 3, \dots$ , tem-se as quantidades  $\mathcal{N}_1(T) = 3$ ,  $\mathcal{N}_2(T) = 9$ ,  $\mathcal{N}_3(T) = 27$ ,  $\dots$   $\mathcal{N}_n(T) = 3^n$ , que interceptam o conjunto  $T$ . Então, pelo *método Box-Counting* - Figura 3.11, temos

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_n(T))}{\ln(2^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(3^n)}{\ln(2^n)} \right\} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 1,58 \dots$$

Figura 3.11: Método Box-Counting para o triângulo de Sierpinski.



Fonte: Que tamanho tem um fractal? Acesso em 15 mai. 2021.

Por fim, vamos proceder de forma análoga para a calcular a dimensão da *curva de Koch*.

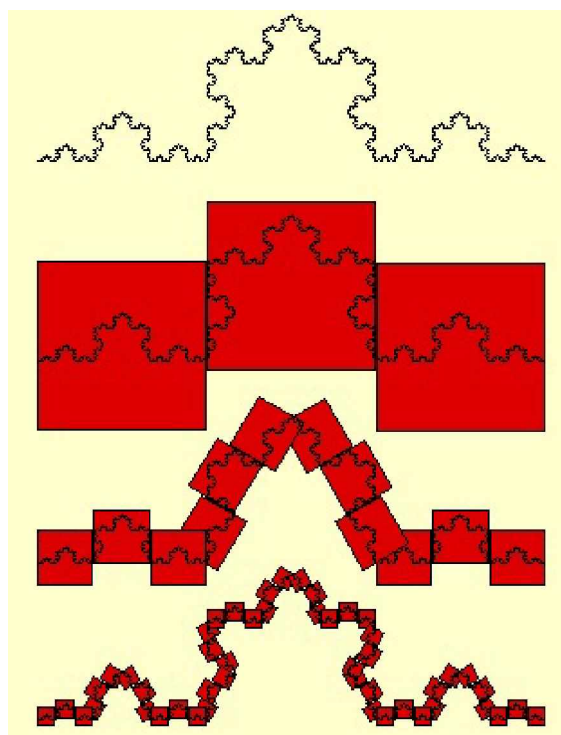
No capítulo anterior, vimos que a cada iteração  $n$  da curva são formados  $N = 4^n$  segmentos de comprimento  $\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^{-n}$  do segmento inicial. Pela *dimensão de Hausdorff*

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(4^n)}{\ln\left(\frac{1}{3^{-n}}\right)} \right\} = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1,2618 \dots$$

Considerando também a curva como um subconjunto compacto  $K$  de  $\mathbb{R}^2$  com a métrica usual e cobrindo-a com caixas de lados  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$  teremos o número de caixas  $\mathcal{N}_1(K) = 3$ ,  $\mathcal{N}_2(K) = 12$ ,  $\mathcal{N}_3(K) = 48 \dots$ ,  $\mathcal{N}_n(K) = 3 \cdot 4^{n-1}$ , para cada  $n = 1, 2, 3, \dots$  interceptando o conjunto  $K$ . Então, pelo *método Box-Counting* - Figura 3.12,

$$\begin{aligned} D &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_n(K))}{\ln(3^n)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(3 \cdot 4^{n-1})}{\ln(3^n)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln\left(3 \cdot \frac{4^n}{4}\right)}{\ln(3^n)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln(4^n)}{\ln(3^n)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{\ln(3^n)} + \frac{\ln(4^n)}{\ln(3^n)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \cdot \frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{\ln(3)} + \frac{n}{n} \cdot \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \right\} \\ &= \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \\ &\approx 1,2618 \dots \end{aligned}$$

Figura 3.12: Método Box-Counting para a curva de Koch.



Fonte: Que tamanho tem um fractal? Acesso 18 mai. 2021.

## Os fractais em sala de aula

---

Neste capítulo veremos algumas sugestões de abordagem da Geometria Fractal para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. O estudo sistematizado dos fractais não é parte integrante da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), entretanto já é citado nas Diretrizes Curriculares Estaduais do estado do Paraná (2008-2019) como forma de apresentação de geometrias não euclidianas aos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Sabemos também que podem ser aplicados em determinados momentos com intencionalidade dirigida ilustrando e contribuindo com o desenvolvimento regular do Currículo de Matemática. Em [3] é comentado que a Geometria Fractal costuma aparecer em atividades através de explorações investigativas para resultar em generalizações algébricas - tal como fizemos no capítulo de apresentação dos fractais clássicos -, para manuseio de softwares de geometria dinâmica e em propostas de atividades que convidem o estudante a refletir sobre a harmonia estética e complexa de obras artísticas, fazendo interlocução com o trabalho do professor de Artes.

Concordando com o autor sobre as tradicionais aplicações do tema para os níveis de ensino em questão, faremos algumas adaptações para sugerir três propostas de atividades no formato de *oficinas*, buscando despertar reflexões teóricas e lúdicas sobre o mesmo. Devemos salientar nossa preocupação em apresentar os objetos de conhecimento fazendo uso de recursos concretos e algébricos, privilegiando momentos de interação entre os estudantes, incentivando a inclusão de alunos com dificuldades de aprendizagem por atividades senso-

riais e de construção, e também oportunizando momentos de abstração algébrica através da condução das mediações docentes.

## 4.1 Os temas propostos

As oficinas foram pensadas para inserir de forma contextualizada a Geometria Fractal no pensamento matemático do estudante. Desse modo, perpassam os seguintes temas:

- *Oficina 1*: a representação do meio ambiente e as formas fractais clássicas;
- *Oficina 2*: construção de fractais aleatórios;
- *Oficina 3*: a dimensão fractal - método das caixas.

### 4.1.1 Objetivos

Esta proposta de atividade tem por objetivo geral apresentar, de forma contextualizada, a Geometria Fractal como recurso complementar à Geometria Euclidiana para representação plana e espacial do ambiente em que vivemos.

São objetivos específicos:

- promover raciocínios aritméticos e geométricos na manipulação de materiais concretos para representação de fractais clássicos.
- proporcionar momentos de investigações e generalizações algébricas.
- incentivar a criatividade e relacionar produções artísticas com características fractais em ferramentas digitais.

### 4.1.2 O público alvo da proposta

Alunos de oitavos e nonos anos do Ensino Fundamental.

### 4.1.3 Tempo previsto

O tempo de aplicação da proposta pode variar de acordo com a abordagem, recursos e quantidade de alunos participantes. De modo geral, sugere-se a aplicação em etapas graduais, pensadas da seguinte maneira:



- *Oficina 1*: três encontros de 30 minutos;
- *Oficina 2*: dois encontros de 30 minutos;
- *Oficina 3*: dois encontros de 30 minutos.

#### 4.1.4 Recursos utilizados

Para o desenvolvimento da proposta cada participante deve ter em mãos:

- lápis e borracha;
- tesoura de papel;
- régua escolar;
- cola escolar;
- kit contendo: novelo de lã, palitos de picolé, tampas de garrafa pet, palitos de churrasco; cilindro, cubos de papelão ou materiais para reciclagem; formas geométrica planas em E.V.A (triângulos, quadrados, retângulos e hexágonos)
- 1 folha impressa com o Roteiro de Perguntas e espaço suficiente para redigir suas respostas;
- 1 folha pequena para redigir suas reflexões finais sobre a *Oficina 1*
- computador ou aplicativo de desenho livre para manuseio no celular;
- 1 folha pequena para redigir suas reflexões finais sobre a *Oficina 2*;
- 2 imagens impressas nas dimensões de 10 cm x 10 cm;
- 5 quadrados de 10 cm de lado de folha vegetal;
- 1 folha impressa com o Roteiro de Perguntas e espaço suficiente para redigir suas respostas;
- 1 folha pequena para redigir suas reflexões finais sobre a *Oficina 3*.

## 4.2 Desenvolvimento da proposta

Para o cumprimento dos objetivos, sugere-se a realização da atividade por meio de três oficinas com duração anteriormente apontadas.

Ciente de que cada realidade estudantil acarreta particularidades durante o aprofundamento da temática, faremos a seguir algumas elucidações em relação ao desenvolvimento geral dos objetivos em cada etapa das Oficinas.

### 4.2.1 Oficina 1 - A representação do Meio Ambiente e as formas fractais clássicas

Esta oficina tem por objetivo central levar o estudante a refletir que apenas os elementos euclidianos não representam fielmente o ambiente em que vivemos e analisar a complexidade de alguns fractais clássicos através da construção com materiais concretos.

Para tal, propõe-se uma reflexão iniciada por questões apresentadas oralmente aos alunos e a representação concreta de alguns objetos de modo a concluir a presença de fractais no ambiente. Vamos fracionar estas etapas de acordo com os encontros previstos:

- *Encontro I*

Iniciamos comentando com os alunos que faremos uma reflexão sobre a matemática e o ambiente em que vivemos. Propomos o seguinte questionamento coletivo:

- *Quais formas geométricas você conhece?*
- *É possível representar o meio ambiente em que vivemos com as formas geométricas que você apontou? Cite exemplos.*
- *Esta representação é perfeita para ilustrar o objeto que pensamos? Por que?*

Etapa prática: representação de elementos do ambiente como o corpo humano, árvores e casas usando formas geométricas recortadas em EVA, palitos, lã, garrafas plásticas, caixas de papelão, cilindros ou outros materiais para reciclagem que estejam disponíveis no *kit* disponibilizado aos alunos.

Questionamentos após a representação elaborada pelos alunos:

- *Qual das formas construídas ficou mais próxima à realidade? Por que?*
- *Qual das formas construídas ficou mais diferente da realidade? Por que?*
- *O que seria necessário para melhorar esta representação e deixá-la mais parecida com a realidade?*
- *Você consegue apontar um objeto que não pode ser representado por recursos geométricos tradicionais? Qual? Por que ele não pode ser representado com estes recursos?*

A reflexão acima deve colaborar para o seguinte fechamento: o ambiente em que vivemos não consegue ser representado com precisão pelos elementos tradicionais da geometria, pois estes não cobrem toda a complexidade existente na natureza, sendo necessários então outras formas para melhor descrevê-la.

Este encontro pode ser finalizado com o convite para o próximo momento, em que serão abordados o que eram chamados de *monstros matemáticos*.

- *Encontro II*

Iniciamos retomando o Encontro anterior, fazendo perguntas gerais ou dirigidas aos participantes sobre o que se recordam das etapas realizadas e a conclusão elaborada. Pode-se perguntar se ficaram curiosos sobre o que seriam os *monstros matemáticos*, o que imaginam ser e o porquê acreditam terem recebido esse nome, destinando um tempo deste encontro para que expressem sua criatividade sobre o tema.

Em seguida pode-se contextualizar esta etapa com citações históricas sobre os objetos sem forma que eram desprezados pela geometria euclidiana, cabendo a frase de Mandelbrot “Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, o som do latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta”.

Neste momento deve-se incluir também formas autossimilares ilustrando a questão de formas aparentemente simples, mas de grande complexidade, que buscavam ser estudadas por matemáticos da época e suas características de formação por iteratividade, fazendo alusão ao termo *fractal* e seu significado em latim, associando às imagens apresentadas. Pode-se comentar que tais formas são elaboradas com certa facilidade em um primeiro momento e que este será o objetivo deste encontro, passando a realização da atividade

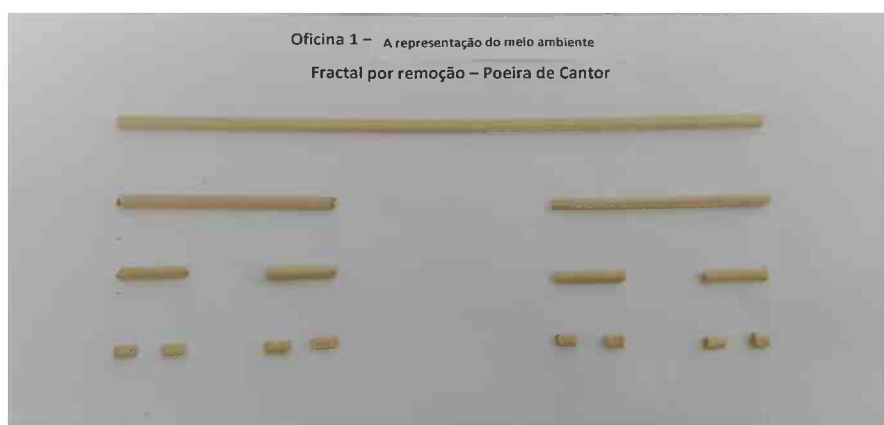
prática de elaboração do fractal por *remoção* chamado *Conjunto de Cantor* ou *Poeira de Cantor* realizando os seguintes passos:

1. remover a extremidade pontiaguda do palito de churrasco, medir o comprimento restante e colá-lo na folha A4 oferecida - esse será o segmento gerador;
2. dividir a medida determinada por 3 (três), marcar segmentos com essa medida em outro palito e dividi-lo com a tesoura, fazendo a remoção de um dos segmentos e colando as extremidades restantes na folha, abaixo da colagem anterior;
3. tomar o segmento não colado na folha, dividir sua medida por 3 (três) e, em outro palito promover a divisão de segmentos com tal valor, representando a próxima iteração e colando embaixo da sequência iniciada;
4. repetir os processos 2 e 3 por mais duas vezes.

**Observação 4.2.1** *Sabemos que a divisão ideal do segmento gerador é obtida através da manipulação de régua e compasso. No entanto, devido ao pouco tempo e a intenção de retomar o uso de instrumentos de medidas e operações com números racionais, optamos pela medição com uso de régua graduada.*

O professor deve acompanhar o processo de execução, observando e orientando o cálculo processual realizado pelos estudantes, a estética de organização dos elementos do Conjunto e buscar conduzir inferências sobre as etapas seguintes em relação à medida dos segmentos. O resultado obtido será próximo a imagem da Figura 4.1.

Figura 4.1: Conjunto de Cantor com palitos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Após o processo de colagem, pode-se discutir com o grupo:

- *O que aconteceu com as medidas dos palitos com o desenvolvimento das iterações?*
- *Seria possível seguir infinitamente com esta atividade utilizando os palitos oferecidos? Por que?*
- *Seria possível seguir infinitamente com esta atividade utilizando pontos no plano? Por que?*
- *Como ficariam as medidas de cada segmento dos elementos que formam o Conjunto em cada etapa iterativa da atividade utilizando pontos no plano? Em algum momento estes segmentos teriam medida zero?*
- *Qual era a medida total do Conjunto no início do processo? E nas etapas seguintes? O que você observou com relação à estas medidas? O comprimento total do Conjunto será zero em algum momento?*

O professor poderá comentar que esta é a complexidade do Conjunto de Cantor: produzir segmentos que *tendem* a zero, sem nunca chegar em zero, assim como ocorre com o comprimento total do segmento para uma grande quantidade de iterações.

Na sequência poderá ser discutido em conjunto os elementos da tabela sugerida no Anexo I para generalização algébrica da quantidade de segmentos, comprimento do segmento e do Conjunto, tal como realizado neste trabalho. O professor deverá enfatizar o que representa a variável  $n$  na tabela, trazendo significado ao estudante que apresenta incertezas sobre o mesmo.

Este encontro pode ser finalizado com a retomada de seu percurso e seu objetivo de análise de uma figura de formação iterativa com complexidade infinita e o convite para o próximo momento, em que serão elaboradas novas representações de elementos como este, com outros recursos.

- *Encontro III*

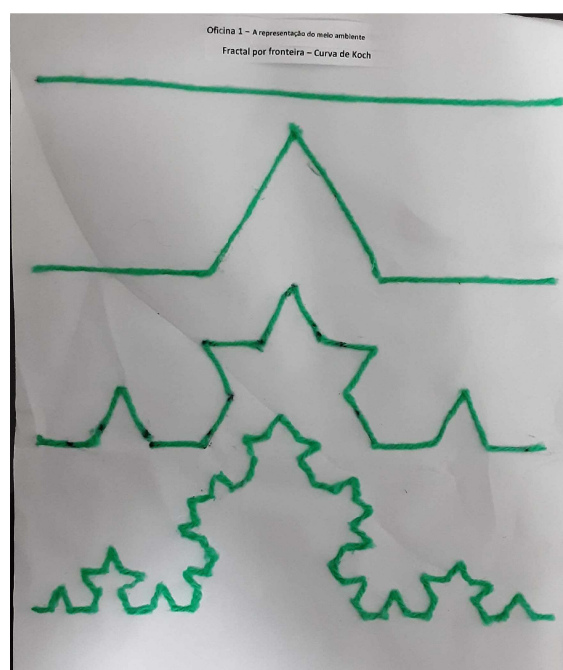
Iniciamos retomando o processo do Encontro anterior, fazendo perguntas gerais ou dirigidas aos alunos sobre o que se recordam das etapas realizadas e a conclusão elaborada

até o momento. Pode-se comentar que nesta etapa desenvolverão uma sequência de atividades denominada *fractal por fronteira*, chamada de *Curva de Koch* e realizar o processo utilizando o novelo de lã, da seguinte maneira:

1. medir com régua um segmento de 27 centímetros da lã e colar em uma folha disponibilizada - essa será a figura geradora;
2. tomar  $\frac{1}{3}$  da medida anterior (que deve ser calculada mentalmente ou no papel) para a realização da etapa seguinte, colada na folha embaixo da figura geradora;
3. tomar  $\frac{1}{3}$  da medida de cada segmento anterior para a realização da etapa seguinte, colada na folha embaixo da figura geradora;
4. repetir a etapa 3 mais algumas vezes.

O professor deve acompanhar o processo de execução, observando e orientando o cálculo processual realizado pelos estudantes, a estética de organização dos elementos da Curva e buscar conduzir inferências sobre as etapas seguintes em relação à medida dos segmentos. O resultado obtido será algo próximo da Figura 4.2.

Figura 4.2: Curva de Koch com lã.



Fonte: Elaborado pela autora.

Após o processo de colagem, pode-se discutir com o grupo:

- *O que aconteceu com a quantidade de segmentos desta Curva à medida que iam se desenvolvendo as iterações?*
- *O que acontecia com a medida de cada segmento à medida que iam se desenvolvendo as iterações?*
- *É possível prever a medida de cada segmento da próxima etapa iterativa da Curva? Como?*
- *Como fica a medida do comprimento total da Curva em cada iteração?*
- *Como fica a medida do comprimento total da Curva para um número muito grande de iterações?*

O professor poderá comentar que esta é a complexidade da Curva de Koch: produzir segmentos que se tornam cada vez menores, porém ampliam o comprimento total da Curva, devido ao número de novos elementos em cada iteração.

Na sequência deve-se discutir em conjunto os elementos da tabela sugerida no Anexo I para generalização algébrica da quantidade de segmentos, comprimento do segmento e da Curva, tal como realizado neste trabalho. Nesse caso, o professor deverá novamente enfatizar o que representa a variável  $n$  na tabela, trazendo significado ao estudante que apresenta incertezas sobre o mesmo.

Após estas discussões, o professor deve convidar os alunos para construir um *fractal geométrico espacial*, agora por dobraduras e cortes.

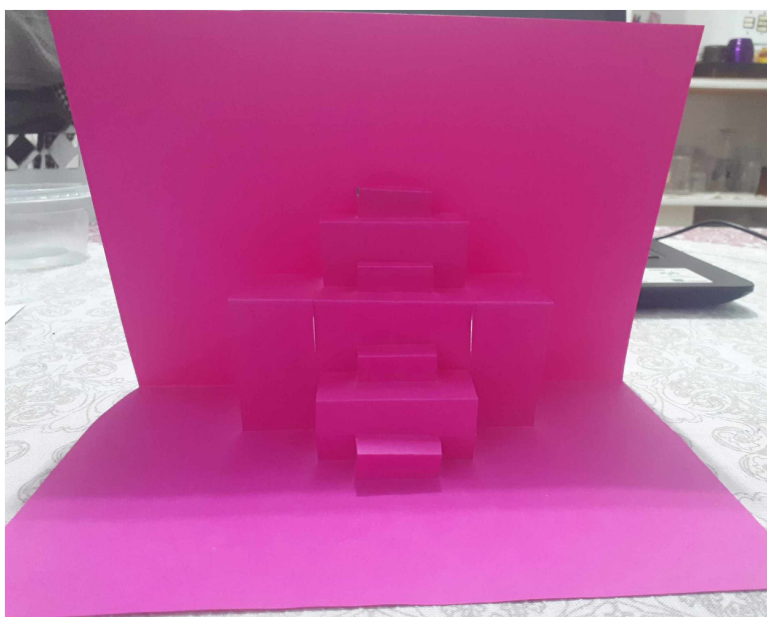
O professor deve entregar aos alunos uma folha tamanho A4 e coordenar os seguintes procedimentos para realização da atividade, que denominaremos como *Escada*:

1. tomar a folha no sentido de que sua altura  $x$  seja menor que o comprimento da base  $y$  e dobrá-la ao meio;
2. dividir a altura em 4 partes iguais, por meio da determinação de pontos médios;
3. determinar, na altura, pontos de distância  $\frac{x}{4}$  das extremidades da folha e construir segmentos de comprimento  $\frac{x}{4}$ , perpendiculares a  $x$  e passando pelos pontos marcados;

4. cortar estes segmentos construídos e fazer a dobradura na parte superior, levando o segmento de medidas  $\frac{x}{2}$  para o lado de dentro, no sentido da extremidade da folha;
5. abrir a folha, em que teremos o paralelepípedo inicial, gerador do fractal;
6. voltar à folha dobrada e repetir o procedimento anterior para o agora segmento de medida  $\frac{x}{2}$ , obtendo uma sobreposição ao abrir a figura;
7. repetir as etapas 1-6 por mais duas vezes.

O professor deve acompanhar o processo de execução, observando o cálculo processual realizado pelos estudantes, a estética de organização dos elementos da dobradura e buscar conduzir inferências sobre as etapas seguintes em relação à medida das arestas. O resultado obtido será algo próximo da Figura 4.3.

Figura 4.3: Fractal por dobradura - Escada.



Fonte: Elaborado pela autora.

Após o processo de colagem, pode-se discutir com o grupo:

- *O que aconteceu com a medida das arestas à medida que iam se desenvolvendo as iterações?*
- *É possível prever a medida de cada aresta da próxima etapa iterativa da escada? Como?*



- *Como fica a medida do volume total da escada em cada iteração?*
- *Como fica a medida do volume dos novos degraus da escada para um número muito grande de iterações?*

Este encontro pode ser finalizado retomando a existência dos fractais como formas que preservam certa regularidade ao serem formados por *processos recursivos*. Deve-se lembrar também o fato de terem uma porção de si semelhante ao todo, característica denominada *autossimilaridade* e a *complexidade infinita*, resultante do processo recursivo para uma quantidade muito grande de iterações.

Ao final desta *Oficina* pode-se formar um grande mural com a síntese das reflexões dos alunos, confrontando suas colocações e conclusões realizadas.

Os participantes devem ser convidados para a próxima Oficina, que abordará uma outra maneira de representar fractais, agora com uso de ferramentas de desenho em recursos digitais. O professor pode sugerir algum *aplicativo* para que instalem com antecedência em seus smartphones ou organizar a Sala de Informática para uso do programa *Paint*, disponibilizado no *Microsoft Windows*.

#### **4.2.2 Oficina 2 - Construindo um fractal aleatório**

Esta oficina possibilitará a reflexão sobre características fractais em forma diferente da anterior, já que será utilizada a criatividade para construir formas aleatórias em recurso tecnológico. Para tal, serão usados recursos digitais como o *Paint*, disponível em computadores com sistema operacional *Microsoft Windows* ou outro recurso de desenho livre, podendo ser aplicativos instalados em celulares. A atividade pode ser realizada da seguinte maneira:

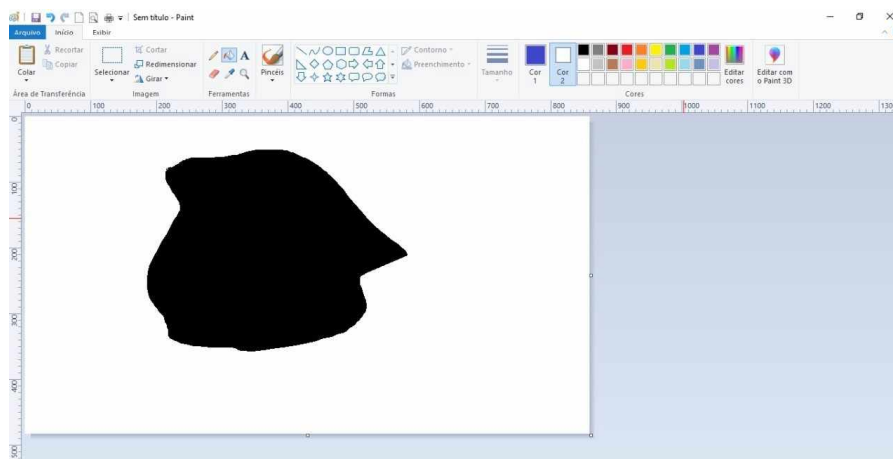
- *Encontro I*

O docente poderá iniciar retomando o surgimento da Geometria Fractal, suas propriedades e o processo realizado na proposta anterior, estabelecendo perguntas gerais ou dirigidas sobre o que entenderam por *fractal* e anotando em um quadro as colocações apresentadas para complementação quando necessário. Deverá afirmar que agora construirão um novo tipo de fractal, com uma propriedade chamada de *similaridade estatística* e que ao final

farão um confronto deste fractal com aqueles estudados inicialmente. Após a organização do grupo de modo que todos tenham acesso ao recurso digital proposto, deverá apresentar e conduzir a realização das seguintes comandas:

1. Construa um desenho livre e insira uma cor de sua preferência - Figura 4.4.

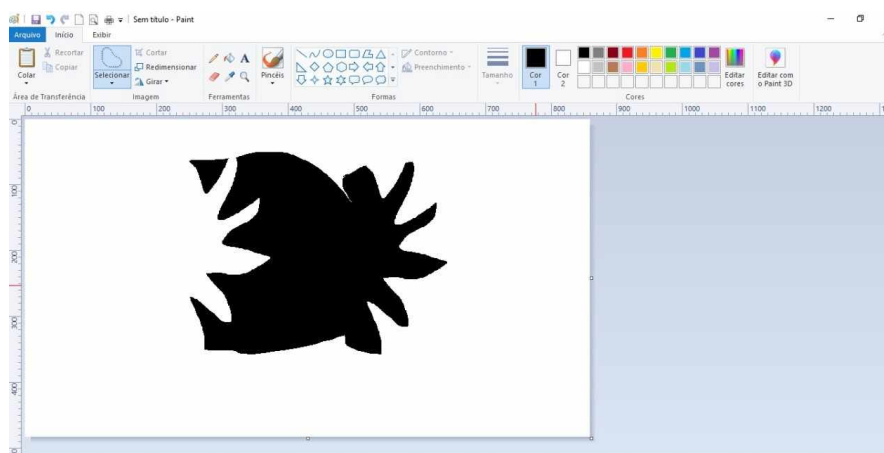
Figura 4.4: Passo 1.



Fonte: Elaborado pela autora.

2. Com a ferramenta de *seleção livre*, selecione um trecho da figura de forma aleatória e translade-o para um lado qualquer da figura inicial, *soltando-o* conforme sua preferência -Figura 4.5.

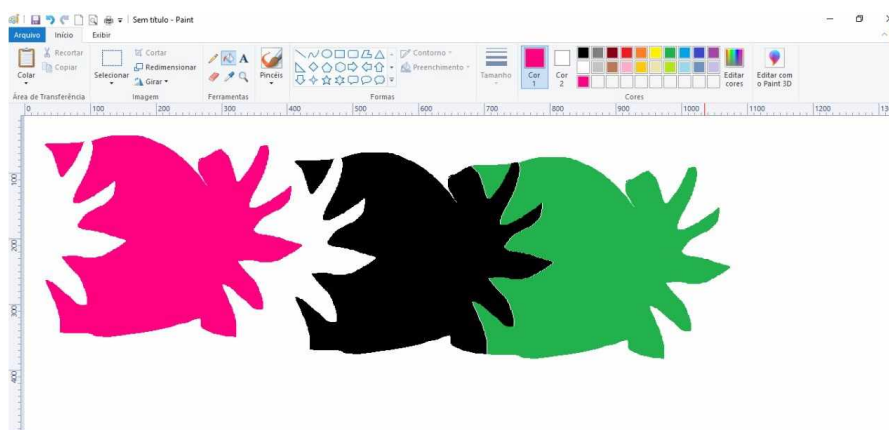
Figura 4.5: Passo 2.



Fonte: Elaborado pela autora.

3. Utilizando novamente a ferramenta de *seleção livre*, selecione toda a figura formada até o momento e estabeleça uma cópia na mesma janela do desenho inicial.
4. Altere a cor da figura colada por último.
5. Mova esta cópia de modo que encaixe em algum lado da figura inicial - Figura 4.6.

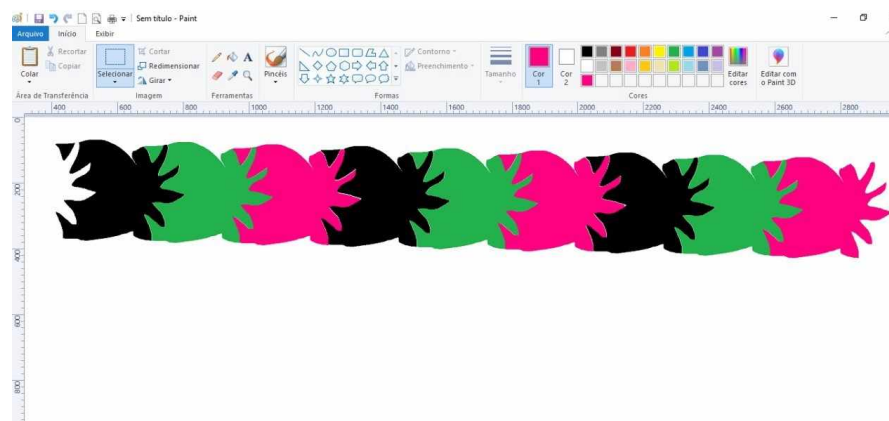
Figura 4.6: Passo Passos 3 - 4 - 5.



Fonte: Elaborado pela autora.

6. Tome outra cópia da figura do passo 3 e realize os passos 4 e 5 novamente por algumas vezes.
7. Promova o passo 3 e seu encaixe à figura anterior por quantas vezes considerar interessante - Figura 4.7.

Figura 4.7: Fractal aleatório.



Fonte: Elaborado pela autora.

Ao acompanhar o desenvolvimento da atividade, o docente deverá incentivar e valorizar a criatividade dos participantes para o aproveitamento da ideia e do espaço da tela, estimulando percepções e comentários sobre regularidades no processo iterativo. Deverá também organizar uma forma de reunir todas as atividades elaboradas consigo ou até mesmo orientar o processo de salvamento e arquivamento das mesmas nas máquinas utilizadas pelos estudantes.

Ao final deste Encontro o mediador poderá realizar questões de reflexão pessoal para estimular os participantes a construir novas figuras para o próximo momento, tais como:

- *Você sentiu alguma dificuldade em realizar a atividade? Se sim, qual?*
- *Há alguma regularidade ou padronização na figura construída por você?*
- *Há alguma relação direta entre a imagem final e a Matemática? Se sim, qual?*
- *É possível construir outras imagens seguindo este procedimento. Para a próxima reunião, traga mais uma com aspecto diferente em formatos ou cores destas construídas hoje. Desafie sua criatividade!*
- *Encontro II*

Iniciamos retomando o processo do Encontro anterior, fazendo perguntas gerais ou dirigidas aos alunos sobre o que se recordam das etapas realizadas e os resultados obtidos, bem como a apresentação de novas imagens construídas após as orientações. Pode-se comentar que agora farão uma relação entre as construções e um fractal. Para tanto, deverá retomar suas características através de questionamentos gerais, que podem ser:

- *O que você entende por forma fractal?*
- *Qual das características fractais mais lhe chamou atenção? Por que?*
- *Nesta atividade digital utilizamos algum procedimento parecido com os fractais construídos anteriormente? Se sim, qual?*

Deste modo o docente terá informações para averiguar se a atividade digital foi compreendida como um fractal pelos estudantes e, caso não tenham se apropriado disso, poderá

estabelecer associações no processo de construção dessa com a proposta da Oficina I, tais como o uso de iterações, complexidade e similaridade.

Em seguida o docente poderá tomar as construções anteriores e apresentar em projeção em *datashow* ou até mesmo impressão em tamanho grande para discutir com os estudantes os processos recursivos realizados em cada uma e a visão de um recorte em confronto com cada uma delas em sua totalidade. Alguns questionamentos para conduzir a discussão podem ser:

- *Tome um recorte desta imagem. Podemos afirmar que está exatamente igual à imagem total? Por que?*
- *Qual foi o procedimento de transformação geométrica ocorrida na construção desta figura: translação, rotação ou reflexão?*
- *Você identifica algum tipo de similaridade entre um recorte da imagem e o todo? Se sim, você a classifica como exata ou aproximada? Por que?*

O mediador deverá ouvir as reflexões produzidas e poderá registrar no quadro os aspectos destacados para realizar o fechamento da Oficina, comentando que devido ao recurso da colagem aleatória a similaridade do recorte com a imagem produzida é *aproximada*, caso que ocorre com fractais aleatórios (pode apresentar uma imagem impressa ou projetada para exemplificar). Deverá retomar também que o processo de transformação utilizado foi a *translação*, retomando o que se trata a mesma e que poderiam ser realizados aqui outras transformações, que não modificaria o aspecto *fractal* da imagem produzida, já que foi construída por processos que a caracterizam como tal: iterações e autossimilaridade. Poderá comentar também que estas imagens têm uma propriedade muito importante que as caracterizam como tal, a *dimensão fractal*, pois apresentam uma forma irregular de ocupar o espaço em que estão inseridas e essa dimensão apresenta um cálculo que será apresentado em outro momento.

Para finalizar, deverá retomar seus objetivos e os procedimentos realizados. Pode-se pedir que os alunos escrevam o que compreenderam do processo no local disponibilizado e formar um grande mural com a síntese destas reflexões.

Os alunos devem ser convidados para a próxima Oficina, que abordará uma outra característica fractal que o difere dos elementos da geometria tradicional e influencia na representação matemática dos recursos naturais, a *dimensão fractal*.

### 4.2.3 Oficina 3 - Calculando a dimensão fractal

Esta oficina tem por objetivo central apresentar ao estudante o que consiste o Método *Box-Counting* para calcular a dimensão de um fractal, estabelecendo generalizações sobre a relação entre a medida do lado de cada *Box* com o número deles para interceptar os contornos de uma imagem.

Para tal, sugere-se uma questão problematizadora proposta por Mandelbrot “Qual é a medida da costa litorânea da Grã-Bretanha?” e o estabelecimento da cobertura de uma imagem do país pelo “encaixotamento”na malha quadriculada com lados de diferentes dimensões.

- *Encontro I*

Pode-se iniciar este Encontro apresentando uma imagem impressa de Mandelbrot e comentando aspectos de sua biografia e algumas questões desafiadoras que nortearam seus estudos.

Em relação à questão problematizadora anterior, pode-se discutir de forma geral ou dirigida:

- *Qual seria a melhor maneira de medir a costa litorânea de um país?*
- *Qual seria o instrumento de medida mais adequado para tal medição? Por que?*
- *Tomando-se os instrumentos sugeridos, quais elementos poderiam passar despercebidos na medição?*
- *Diante deste problema, como realizar a medida correta? Qual seria o melhor instrumento? Quais seriam as principais vantagens e desvantagens ao utilizá-lo?*

O questionamento pode ser fechado comentando que tais dificuldades em determinar um instrumento de medida para a questão ocorre devido a dimensão de uma costa litorânea, que apresenta diversas irregularidades na ocupação do espaço em que está inserida. Elementos

como estes apresentam dimensão não inteira, caracterizada como *dimensão fractal* e que nestes encontros conheceremos um método para determinar esta medida, chamado *Box-Counting* devido ao processo de *contagem de caixas* utilizadas para cobrir uma figura, representada graficamente.

Pode-se distribuir aos alunos uma imagem da costa litorânea impressa em um quadrado de dimensão sugerida 10 centímetros e os 4 quadrados de mesma dimensão recortados em folha vegetal. Concomitante ao processo de investigação pode-se preencher a tabela que relaciona a medida das dimensões de cada *Box* com o número de elementos necessários para perpassar o contorno da figura.

Tomando um quadrado da folha vegetal e a medida de seus lados como unitária e construindo nas demais folhas quadriculados de medidas na proporção de metade do anterior teremos folhas com 1, 4, 16 e 64 quadrados, respectivamente - Figura 4.8.

Figura 4.8: Malhas para o Box Counting.



Fonte: Elaborado pela autora.

Faremos agora a sobreposição destas folhas translúcidas na imagem entregue e o preenchimento da tabela que relaciona as medidas dos lados de cada box em relação a unidade e o número de quadrados necessários para cobrir o contorno da imagem em cada caso.

Alguns questionamentos que podem ser levantados pelo docente:

- *Há alguma relação entre as medidas dos lados dos Boxes em cada etapa? Qual?*
- *Há alguma relação entre as quantidades de Boxes para as coberturas de cada etapa? Qual?*
- *Há alguma relação de proporcionalidade entre as dimensões dos Boxes e o número de caixas para coberturas? Qual?*
- *Podia-se construir caixas menores para fazer a cobertura da imagem? Seria possível calcular o número de caixas para cobertura em função da medida de seus lados?*

Na sequência o docente pode contextualizar o procedimento para o cálculo da dimensão fractal pelo Método Box Counting, comentando a ideia de logaritmo para computar o expoente da relação proporcional identificada.

Para alunos do Ensino Fundamental - Anos Finais, que ainda não conhecem a ideia de *logaritmo*, pode-se contextualizar sua representação com aspectos históricos das tábuas multiplicativas e da representação de expoentes positivos simples, finalizando com o uso de calculadora para calcular os logaritmos identificados, apresentado, inclusive estes botões na máquina.

Junto aos alunos do Ensino Médio que já estudaram o conteúdo, é possível explorar as propriedades tradicionais de mudança de base, finalizando com o uso de calculadora e alusão à uma aplicação prática do conteúdo.

Este Encontro pode ser finalizado com a retomada de seus objetivos e o percurso realizado, convidando os estudantes para trazerem, no próximo encontro, uma imagem de seu interesse que apresente características irregulares para cálculo de sua dimensão pelo método apresentado nesta etapa.

- *Encontro II*

Pode-se iniciar este encontro retomando os objetivos gerais da Oficina e o percurso realizado no momento anterior, perguntando os processos que se recordam e dúvidas que tenham surgido para retomadas gerais do conceito.

Após este momento o docente comentará novamente as características dos fractais e alguns alunos poderão expor o porquê escolheram suas imagens para esta atividade.



Na sequência os estudantes retomarão as malhas utilizadas na aula anterior para realizar o enquadramento de suas imagens junto a elas, elencando em tabela as regularidades observadas. O docente deverá dar a comanda e acompanhar a realização individual da tarefa, respondendo dúvidas que surgirem e socializar os resultados ao final do processo.

Ao final, o docente deverá retomar os objetivos desta oficina, o percurso realizado e pedir aos alunos que anotem na folha o que compreenderam desta etapa para elaboração de um mural e confronto das colocações feitas pelos estudantes.

#### **4.2.4 A aplicação em sala de aula**

Esta proposta foi aplicada para doze alunos dos anos finais do Ensino Fundamental em uma Escola Estadual de Ensino Integral de Franca (SP). Devido ao fato de estarmos retornando às aulas presenciais neste ano de 2021 com diversas defasagens de aprendizagens por conta da pandemia, devido ao Coronavírus (Covid-19) e aos intensos programas institucionais de recuperação implantados nas escolas, as Oficinas foram desenvolvidas em momentos específicos de abordagem da professora com este grupo de alunos, fora do tempo regular de aulas de Matemática. Procuramos seguir os roteiros de perguntas apresentados e observar se os mesmos oportunizariam, de fato, o objetivo de aprendizagem de cada oficina. Observamos ainda a interação dos estudantes com o conteúdo e os objetivos de cada proposta.

Durante as primeiras atividades, notamos a discussão de que as formas geométricas tradicionais se aproximam das formas naturais, como uma representação “parecida”(segundo palavras dos participantes), mas não idêntica, já que a natureza não segue “as mesmas linhas e formas”. A representação do homem e da árvore com cilindros e lâ foram predominantes e o uso dos palitos para representar a casa foi quase unânime entre os alunos, que associaram a questão dos ângulos retos entre paredes como fatores que aproximam as formas geométricas de formas reais.

Para a construção do Conjunto de Cantor, fizemos opção pelo uso de canudos em substituição aos palitos devido ao menor tempo para corte dos materiais. Foi possível observar que nessa atividade e no fractal Escada os estudantes iniciaram sem muita segurança a respeito do desenvolvimento da proposta e na segunda iteração passaram a inferir a quantidade de segmentos da próxima etapa e até mesmo a mecanizar o processo de construção, o que

evidencia a questão do processo recursivo. Alunos menos participativos em aula passaram a externar seus comentários e quando visualizaram a estética de cada fractal, passaram a organizá-los melhor em sua folha de atividade.

No entanto, apesar do maior envolvimento na construção dos fractais propostos, foi observada dificuldade em abstração para o processo algébrico no preenchimento da tabela, fato mais evidente com relação às medidas dos segmentos geradores serem tomados como unitárias na folha, já que ao iniciarem a construção usaram régua graduada e obtiveram uma medida, em centímetros, diferente de um.

Ainda assim, para a abstração da quantidade de segmentos nas iterações seguintes - fato mais explorado durante a construção das figuras - foi observado maior facilidade e interação dos alunos, mostrando que o processo concreto foi positivo para o desenvolvimento desta habilidade, além de oportunizar maior contato do discente com ferramentas de medidas e operações com números racionais.

Notamos ainda que os alunos dos oitavos anos, que estavam estudando o tema “Volumes” com o professor da aula regular de Matemática, associou mais rapidamente a ideia de volume da Escada e fez inferências sobre relação entre os volumes durante as etapas desenvolvidas.

A proposta da Oficina II foi realizada parcialmente, já que os estudantes não conhecem ainda as transformações no plano e não conseguiram associar o processo de construção com as translações. Desse modo, foi apresentado o processo de construção e apresentadas apenas algumas perguntas do roteiro elaborado, visando constatar se o grupo compreenderia o processo iterativo do fractal aleatório construído e a autossimilaridade estatística, o que foi contemplado satisfatoriamente. Um estudante fez um comentário de que nessa atividade a “semelhança não ocorria nas miniaturas, assim como na Escada, mas em formas de mesmo tamanho que a anterior”.

Do mesmo modo que na primeira proposta, os participantes a iniciaram com certa insegurança e em seguida fortaleceram sua postura de elaboradores, buscando, comentando e comparando as diferentes formas construídas em cada momento.

Tendo em vista as dificuldades de abstração algébrica com as primeiras atividades, a Oficina sobre a Dimensão Fractal foi comentada com os estudantes, os quais disseram ser uma trena ou o *Google Maps* instrumentos de medida ideais para medir a Costa Litorânea.

---

Apesar de comentarem a irregularidade das formas da Costa Marítima, não foi possível internalizar a ideia de dimensão fractal, já que perguntaram se formas conhecidas não sendo planas já não seriam definidas como tridimensionais, evidenciando sua visão euclidiana de dimensão.

Para o desenvolvimento desta proposta é necessário maior tempo de intervenção junto ao conceito de dimensão e apropriação algébrica para estabelecer relações na tabela. Outro fator que dificultou o entendimento do cálculo da dimensão fractal neste nível de ensino é o fato de não conhecerem funções logarítmicas.

# Considerações Finais

---

A Geometria Fractal surgiu recentemente como uma possibilidade de descrever objetos e fenômenos não explicados com precisão por elementos euclidianos. O matemático que a descreveu com esta terminologia, Benoit Mandelbrot, lançou mão de trajetórias de estudos diferentes daqueles tradicionalmente ensinados nas escolas europeias para representar formas da natureza e comportamentos funcionais em diferentes contextos e, usando estudos iniciados por Hausdorff, apresentou uma forma de caracterizar formas irregulares que apresentam determinada regularidade quando observadas com profundidade em sua complexidade. Com isso, observou que um fractal pode ser descrito de forma inicialmente simples, gerando formas extremamente complexas para muitas iterações, sendo esta uma de suas propriedades fundamentais.

Este trabalho teve como objetivo estudar a principal característica de um fractal: sua dimensão. Apesar de representar uma das grandezas para descrever um elemento deste tipo, o cálculo dimensional consiste em uma ferramenta de caracterização de um fractal, correspondendo a uma quantia não inteira, representando a irregularidade da forma e sua rugosidade no espaço em que está inserida.

Para o cálculo da Dimensão Fractal utilizamos inicialmente o estudo de conceitos básicos de topologia, como as bolas abertas e suas propriedades, espaços métricos compactos e completos. Tais definições foram importantes para a compreensão do Espaço de Hausdorff como um espaço métrico, adequadamente definido e demonstrado no Capítulo 3. Desse modo pudemos compreender o processo do cálculo da Dimensão de Hausdorff e o Método Box Counting, estabelecendo generalizações algébricas que possibilitaram sua mecanização para aplicação em fractais clássicos, confrontando os percursos teóricos e seus resultados.

Neste caminho, tratamos de duas maneiras equivalentes de calcular a Dimensão Fractal, podendo ser aplicadas para quaisquer elementos desta natureza. O Método Box Counting representa um algoritmo de rápida aplicação para esta finalidade, sendo largamente utilizado em programação computacional para identificar imagens e descrever fenômenos de propriedades fractais, como a evolução de células cancerígenas, por exemplo.

Em relação ao campo da Educação Básica, procuramos refletir e sugerir caminhos teóricos e práticos para a inserção dos elementos da Geometria Fractal no ensino de Matemática, com a finalidade de fortalecer conhecimentos matemáticos no campo da generalização e abstração algébrica e também de apresentar novas possibilidades de fortalecimento do pensamento matemático, presente em todas as instâncias da vida humana e pouco discutido para além dos elementos da geometria tradicional, apoiada nos saberes euclidianos.

Entendemos que há diversas possibilidades de estudo e abordagem sobre o tema junto à alunos do Ensino Fundamental, que podem ser aprofundadas através do incentivo curricular para inserção desta temática nas escolas, incentivando a criatividade e aplicação destas propriedades em atividades dirigidas e bem sistematizadas, gerando ganhos de aprendizagem no campo das novas geometrias.

# Anexo I

---

Caro aluno,

esta é uma atividade integrante da Oficina *A representação do Meio Ambiente*. Será utilizada para orientar parte de nosso estudo e possibilitar reflexões de aprendizagem feitas por você. Fique a vontade para fazer anotações e registros que considerar interessantes! Estamos muito felizes com sua presença! Bons estudos!

- Encontro I

O que eu aprendi?

- Encontro II

Preencha a tabela de acordo com as observações realizadas durante a construção da Poeira de Cantor:

Iteração ( $I_n$ )	Número de Segmentos ( $N_n$ )	Comprimento dos segmentos ( $C_n$ )	Soma dos segmentos ( $S_n$ )
$I_0$	1	1	1
$I_1$			
$I_2$			
$I_3$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$I_n$			

O que eu aprendi?

- Encontro III

Complete a tabela de acordo com as observações realizadas durante a construção da Curva de Koch:

Iteração ( $I_n$ )	Número de Segmentos ( $N_n$ )	Comprimento dos segmentos ( $C_n$ )	Comprimento da Curva ( $S_n$ )
$I_0$	1	1	1
$I_1$			
$I_2$			
$I_3$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$I_n$			

Preencha a tabela de acordo com as observações realizadas com os degraus da Escada:

Iteração ( $I_n$ )	Número de novos degraus ( $N_n$ )	Medida da aresta da base dos novos degraus ( $B_n$ )	Medida da altura dos novos degraus ( $H_n$ )	Volume dos novos degraus ( $V_n$ )
$I_0$	1	1	2	2
$I_1$				
$I_2$				
$I_3$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$I_n$				

O que eu aprendi?

# Anexo II

---

Caro aluno,

esta é uma atividade integrante da Oficina *Calculando a dimensão fractal*. Será utilizada para orientar parte de nosso estudo e possibilitar reflexões de aprendizagem feitas por você. Fique a vontade para fazer anotações e registros que considerar interessantes! Estamos muito felizes com sua presença! Bons estudos!

- Encontro I

Preencha a tabela com as observações realizadas através da contagem de *Boxes* na imagem, conforme orientação do docente:

Tabela 4.1: A dimensão da costa litorânea

Medida do lado do Box ( $l_n$ )	Número de Boxes para cobrir a imagem ( $N_n$ )
⋮	⋮

1. Há alguma relação entre as medidas dos lados dos Boxes em cada etapa? Qual?



2. Há alguma relação entre as quantidades de Boxes para as coberturas cada etapa? Qual?
3. Há alguma relação de proporcionalidade entre as dimensões dos Boxes e o número de caixas para coberturas? Qual?
4. Poderia construir caixas menores para fazer a cobertura da imagem? Seria possível calcular o número de caixas para cobertura em função da medida de seus lados?
5. Cálculo da dimensão fractal com os dados obtidos:

O que eu aprendi?

- Encontro II

Após retomar o processo de cálculo da dimensão fractal pelo *Método Box Counting*, use uma imagem de sua presença e as malhas construídas no Encontro anterior para preencher a tabela e calcular a dimensão do objeto de sua figura:

Tabela 4.2: A dimensão da forma ilustrada

Medida do lado do Box ( $l_n$ )	Número de Boxes para cobrir a imagem ( $N_n$ )
⋮	⋮

Cálculo da dimensão fractal com os dados obtidos:

O que eu aprendi?

# Referências Bibliográficas

---

- [1] ASSIS, T. A. et al. **Geometria Fractal: propriedades e características de fractais ideais**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 30, n. 02, 2008.
- [2] BALDOVINOTTI, N. J. **Um Estudo de Fractais Geométricos na Formação de Professores de Matemática**. 2011. 204 p. Dissertação - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2011.
- [3] BARBOSA, R. M. **Descobrimo a geometria fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- [4] BARNSLEY, M. **Fractals Everywhere**. San Diego: Academic Press, 1988.
- [5] CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal: perspectivas e possibilidades para o ensino de Matemática**. 2005. 108 p. Dissertação - Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.
- [6] DOMINGUES, H. H. **Espaços métricos e introdução à topologia**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1982.
- [7] FERNANDES, J. A. **Fractais: uma nova visão da Matemática**. 2007. 45 p. Trabalho de Conclusão de Curso - Centro Universitário de Lavras, Lavras, 2007.
- [8] LIMA, E. L. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2009.
- [9] MANDELBROT, B.B. **The Fractal Geometry of Nature**. New York: W.H. Freeman and Company, 1988.

- 
- [10] MARTINS, L. A. **Espaços métricos e os fractais SFI**. 2019. 75 p. Trabalho de Conclusão de Curso - Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019.
- [11] MURCHERONI, L. F. **Dimensão de Hausdorff e Algumas Aplicações**. 2017. 63 p. Dissertação - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2017.
- [12] NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. 2006. 78 p. Dissertação - Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2006.
- [13] SILVA, P. M. **Medidas Fractais Aplicadas à Classificação de Texturas**. 2019. 118 p. Tese - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2019.