

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

João Barbosa de Souza Neto

**Ferramenta Web de Código Aberto para Ensino  
de Cálculo Numérico**

**Uberlândia, Brasil**

**2021**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

João Barbosa de Souza Neto

**Ferramenta Web de Código Aberto para Ensino de  
Cálculo Numérico**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Computação da Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, como requisito exigido parcial à obtenção do grau de Bacharel em Sistemas de Informação.

Orientador: Prof. Dr. Jefferson Rodrigo de Souza

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Faculdade de Ciência da Computação

Bacharelado em Sistemas de Informação

Uberlândia, Brasil

2021


**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**

Faculdade de Computação

Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1A - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902

 Telefone: (34) 3239-4144 - <http://www.portal.facom.ufu.br/> [facom@ufu.br](mailto:facom@ufu.br)

**ATA DE DEFESA - GRADUAÇÃO**

Curso de Graduação em:	Sistemas de Informação				
Defesa de:	FACOM31802 - Trabalho de Conclusão de Curso II				
Data:	08/11/2021	Hora de início:	13:00	Hora de encerramento:	14:15
Matrícula do Discente:	11711BSI212				
Nome do Discente:	João Barbosa de Souza Neto				
Título do Trabalho:	Ferramenta Web de Código Aberto para Ensino de Cálculo Numérico				
A carga horária curricular foi cumprida integralmente?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim ( ) Não				

Reuniu-se virtualmente, por meio da plataforma Google Meeting, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Curso de Graduação em Sistemas de Informação, assim composta: Professores: **Prof. Dr. Rodrigo Sanches Miani**; **Prof. Dr. Wendel Alexandre Xavier de Melo** e **Prof. Dr. Jefferson Rodrigo de Souza** orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Dr. Jefferson Rodrigo de Souza, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra, para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do curso.

A seguir o(a) senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

(x) Aprovado Nota [90].

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Jefferson Rodrigo de Souza, Professor(a) do Magistério Superior**, em 08/11/2021, às 14:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wendel Alexandre Xavier de Melo, Professor(a) do Magistério Superior**, em 08/11/2021, às 14:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Sanches Miani, Professor(a) do Magistério Superior**, em 08/11/2021, às 14:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3154746** e o código CRC **96797D36**.

Referência: Processo nº 23117.074314/2021-70

SEI nº 3154746

# Resumo

Este trabalho auxilia o ensino de Cálculo Numérico fornecendo uma ferramenta simples, visual, interativa e dinâmica para facilitar o processo de ensino-aprendizagem de alunos e professores. O desenvolvimento foi dividido em levantamento de requisitos, estudo das tecnologias necessárias para implantação do sistema, criação de um protótipo, desenvolvimento do sistema e sua disponibilização para uso público. O projeto resultou em uma aplicação web de página única feita com JavaScript com auxílio das ferramentas MathJax, MathJS e Plot.ly, sendo um site para a resolução de problemas de zero de funções passo a passo. Desta maneira, o sistema gera gráficos e tabelas associadas às aproximações obtidas para melhor entendimento do assunto. A ferramenta poderá ser utilizada pelos professores para apresentar os procedimentos teóricos e práticos de cada um dos métodos numéricos que foram implementados nessa plataforma de ensino, além de auxiliar na aprendizagem dos mesmos pelos alunos. O sistema está disponível online gratuitamente no GitHub Pages e seu código é aberto para toda a comunidade também no GitHub.

**Palavras-chave:** Ferramenta Web, Código Aberto, Ensino, Cálculo Numérico, Zero de Funções.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$ no intervalo $[0, 3]$ . Fonte: próprio autor . . . . .	16
Figura 2 – Captura de tela do Symbolab . . . . .	22
Figura 3 – Captura de tela do Wolfram Alpha . . . . .	23
Figura 4 – Captura de tela do Software de Gurgel . . . . .	24
Figura 5 – Protótipo do sistema durante etapa 1 . . . . .	27
Figura 6 – Gráfico criado com a biblioteca Plot.ly . . . . .	28
Figura 7 – Protótipo do método de Newton . . . . .	28
Figura 8 – Protótipo do método da Bissecção . . . . .	29
Figura 9 – Design do sistema . . . . .	30
Figura 10 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$ no intervalo $[0, 3]$ . Fonte: próprio autor . . . . .	31
Figura 11 – $f(x) = \text{sen}(x^3)$ no intervalo $[3.3, 3.4]$ . Fonte: próprio autor . . . . .	32
Figura 12 – Parâmetros de entrada do Método da Bissecção no problema 1 . . . . .	32
Figura 13 – Tabela do Método da Bissecção no problema 1 . . . . .	33
Figura 14 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 1 na iteração 0 . . . . .	34
Figura 15 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 1 na iteração 1 . . . . .	34
Figura 16 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 1 na iteração 2 . . . . .	34
Figura 17 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 1 na iteração 3 . . . . .	35
Figura 18 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 1 na iteração 3 alterando o zoom . . . . .	35
Figura 19 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 1 na iteração 4 . . . . .	35
Figura 20 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 1 na iteração 5 . . . . .	36
Figura 21 – Parâmetros de entrada do Método da Bissecção no problema 2 . . . . .	36
Figura 22 – Tabela do Método da Bissecção no problema 2 . . . . .	37
Figura 23 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 2 na iteração 0 . . . . .	38
Figura 24 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 2 na iteração 1 . . . . .	38
Figura 25 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 2 na iteração 2 . . . . .	38
Figura 26 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 2 na iteração 3 . . . . .	39
Figura 27 – Parâmetros de entrada do Método de Newton no problema 1 . . . . .	39
Figura 28 – Tabela do Método de Newton no problema 1 . . . . .	40
Figura 29 – Gráfico do Método de Newton no problema 1 na iteração 0 . . . . .	40
Figura 30 – Gráfico do Método de Newton no problema 1 na iteração 1 . . . . .	40
Figura 31 – Gráfico do Método de Newton no problema 1 na iteração 2 . . . . .	41
Figura 32 – Gráfico do Método de Newton no problema 1 na iteração 2 alterando o zoom . . . . .	41

Figura 33 – Parâmetros de entrada do Método de Newton no problema 2 . . . . .	42
Figura 34 – Tabela do Método de Newton no problema 2 . . . . .	42
Figura 35 – Gráfico do Método de Newton no problema 2 na iteração 0 . . . . .	42
Figura 36 – Gráfico do Método de Newton no problema 2 na iteração 1 . . . . .	43
Figura 37 – Parâmetros de entrada do Método das Secantes no problema 1 . . . . .	43
Figura 38 – Tabela do Método das Secantes no problema 1 . . . . .	44
Figura 39 – Gráfico do Método das Secantes no problema 1 na iteração 0 . . . . .	44
Figura 40 – Gráfico do Método das Secantes no problema 1 na iteração 1 . . . . .	44
Figura 41 – Gráfico do Método das Secantes no problema 1 na iteração 2 . . . . .	45
Figura 42 – Gráfico do Método das Secantes no problema 1 na iteração 3 . . . . .	45
Figura 43 – Gráfico do Método das Secantes no problema 1 na iteração 3 alterando o zoom . . . . .	45
Figura 44 – Gráfico do Método das Secantes no problema 1 na iteração 4 . . . . .	46
Figura 45 – Parâmetros de entrada do Método das Secantes no problema 2 . . . . .	46
Figura 46 – Tabela do Método das Secantes no problema 2 . . . . .	47
Figura 47 – Gráfico do Método das Secantes no problema 2 na iteração 0 . . . . .	47
Figura 48 – Gráfico do Método das Secantes no problema 2 na iteração 1 . . . . .	48
Figura 49 – Gráfico do Método das Secantes no problema 2 na iteração 2 . . . . .	48
Figura 50 – Gráfico do Método das Secantes no problema 2 na iteração 3 . . . . .	48
Figura 51 – Gráfico do Método das Secantes no problema 2 na iteração 4 . . . . .	49
Figura 52 – Parâmetros de entrada do Método da Falsa Posição no problema 1 . . . . .	49
Figura 53 – Tabela do Método da Falsa Posição no problema 1 . . . . .	50
Figura 54 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 1 na iteração 0 . . . . .	50
Figura 55 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 1 na iteração 1 . . . . .	50
Figura 56 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 1 na iteração 2 . . . . .	51
Figura 57 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 1 na iteração 3 . . . . .	51
Figura 58 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 1 na iteração 3 alte- rando o zoom . . . . .	51
Figura 59 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 1 na iteração 4 . . . . .	52
Figura 60 – Parâmetros de entrada do Método da Falsa Posição no problema 2 . . . . .	52
Figura 61 – Tabela do Método da Falsa Posição no problema 2 . . . . .	53
Figura 62 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 2 na iteração 0 . . . . .	53
Figura 63 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 2 na iteração 1 . . . . .	54
Figura 64 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 2 na iteração 2 . . . . .	54
Figura 65 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 2 na iteração 3 . . . . .	54

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Exemplo da execução do Método da Bissecção. . . . .	17
Tabela 2 – Exemplo da execução do Método das Secantes . . . . .	20
Tabela 3 – Exemplo da execução do Método da Falsa Posição . . . . .	21

# Lista de abreviaturas e siglas

UFU	Universidade Federal de Uberlândia
FACOM	Faculdade de Computação
FAMAT	Faculdade de Matemática
HTML	Hyper Text Markup Language
CSS	Cascading Style Sheets
JS	JavaScript

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>12</b>
1.1.1	Objetivos Específicos	13
<b>1.2</b>	<b>Metodologia</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>14</b>
<b>2.1</b>	<b>Métodos de Resolução Numérica</b>	<b>14</b>
2.1.1	Método da Bissecção	15
2.1.2	Método de Newton	17
2.1.3	Método das Secantes	19
2.1.4	Método da Falsa Posição	20
<b>2.2</b>	<b>Trabalhos Correlatos</b>	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>DESENVOLVIMENTO</b>	<b>25</b>
<b>3.1</b>	<b>Levantamento de Requisitos</b>	<b>25</b>
3.1.1	Requisitos Funcionais	25
3.1.2	Requisitos Não Funcionais	26
<b>3.2</b>	<b>Tecnologias necessárias para implementação do sistema</b>	<b>27</b>
<b>3.3</b>	<b>Protótipo do Sistema</b>	<b>28</b>
<b>3.4</b>	<b>Definição do layout do sistema</b>	<b>29</b>
<b>3.5</b>	<b>Disponibilização para uso público</b>	<b>30</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>31</b>
<b>4.1</b>	<b>Método da Bissecção</b>	<b>32</b>
4.1.1	Problema 1	32
4.1.2	Problema 2	36
<b>4.2</b>	<b>Método de Newton</b>	<b>39</b>
4.2.1	Problema 1	39
4.2.2	Problema 2	42
<b>4.3</b>	<b>Método das Secantes</b>	<b>43</b>
4.3.1	Problema 1	43
4.3.2	Problema 2	46
<b>4.4</b>	<b>Método da Falsa Posição</b>	<b>49</b>
4.4.1	Problema 1	49
4.4.2	Problema 2	52

<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>5.1</b>	<b>Trabalhos Futuros</b> . . . . .	<b>56</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>57</b>

# 1 Introdução

A modelagem matemática é o processo de representação de problemas reais por meio de expressões matemáticas, permitindo o estudo analítico e computacional (via simulações numéricas), por exemplo, de fenômenos físicos, químicos e biológicos, entre outros (ALMEIDA, 2015).

As aplicações de técnicas para obtenção de soluções analíticas para a grande maioria dos modelos são bastante limitadas devido a vários fatores de ordem matemática presentes nos mesmos. Por exemplo, as chamadas Equações Diferenciais Parciais modelam uma enorme gama de problemas ligados ao campo tecnológico, cujos efeitos se fazem sentir nas indústrias aeronáutica, química e petrolífera. Tais equações, na grande maioria dos casos, só tem solução viável através da aplicação de técnicas numéricas. Isso se deve, por exemplo, à presença de termos não lineares, condições iniciais e/ou de fronteira complexas, assim como domínios espaciais definidos em regiões com geometrias de difícil tratamento (SANTANA, 2007).

Devido a isso, a utilização de técnicas numéricas, por meio da implementação computacional, é a saída mais empregada para obtenção de soluções aproximadas (BUFFONI, 2002). Portanto, a criação, o desenvolvimento, o aprimoramento e o estudo de métodos numéricos têm grande relevância no desenvolvimento tecnológico e social.

Métodos numéricos podem lidar com muitos problemas impossíveis de serem solucionados analiticamente, como por exemplo um número enorme de equações, não linearidades e geometrias complexas comuns na prática da engenharia. Nesse contexto, Chapra e Canale (2016) definem métodos numéricos como um conjunto de métodos e procedimentos pelos quais problemas matemáticos são definidos de forma a serem solucionados através de operações aritméticas.

Exemplos de problemas matemáticos solucionáveis por métodos numéricos incluem: raízes de equações, sistemas de equações algébricas lineares, otimização, ajuste de curvas, integração, equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais parciais, dentre outros (CHAPRA; CANALE, 2016). Logo, percebemos sua vasta gama de aplicações na engenharia e áreas afins.

Dito isto, existem diversos softwares de fácil uso voltados ao ensino de matemática, que em suas versões pagas mostram a resolução dos problemas passo a passo para facilitar o entendimento da solução, tais como Symbolab e Wolfram Alpha (SYMBOLAB, 2021; WOLFRAM ALPHA, 2021).

No que tange a métodos numéricos, temos disponíveis softwares como Matlab,

Excel, Maple e Mathematica. Entretanto, estes são em sua maioria pagos e de difícil entendimento para leigos, especialmente aqueles que não são da área de computação (DJAMILA, 2017).

Além destes, Caraballo e Tenorio (2015) analisaram a utilização do software GeoGebra para resolver equações não lineares e constataram a eficácia do software no ensino por permitir aos estudantes visualizar o comportamento dos gráficos e o processo dos métodos numéricos interativamente.

Assim, para permitir aos alunos e professores resolverem problemas de cálculo numérico de forma simplificada, o presente trabalho busca o desenvolvimento de uma ferramenta visual, interativa e dinâmica para facilitar o processo de ensino-aprendizagem e acelerar o aprendizado dos conteúdos associados ao tema. Em especial, espera-se apresentar resoluções passo a passo com auxílio de gráficos e tabelas associadas às aproximações obtidas nos métodos numéricos. Este sistema será mais acessível em relação aos outros softwares por ser gratuito e disponível em português. Ressalta-se ainda uma vantagem, que o código do sistema é aberto, tornando possível futuras melhorias dele pela comunidade.

O trabalho será apresentado nos seguintes capítulos: introdução, fundamentação teórica, desenvolvimento, resultados e conclusão. Na introdução, são apresentados os objetivos gerais e específicos do trabalho, bem como sua metodologia. Por sua vez, na fundamentação teórica, são descritos os métodos de resolução numérica implementados no trabalho bem como apresentados os trabalhos correlatos. Em seguida, no capítulo de desenvolvimento, apresenta-se o levantamento de requisitos, as tecnologias necessárias para implementação do sistema, o protótipo do sistema, a definição do layout assim como sua disponibilização para uso público. Posteriormente, no capítulo dos resultados é apresentada a resolução de dois problemas de exemplo por meio de tabelas e gráficos geradas pelo sistema em cada um dos métodos implementados. Por fim, apresenta-se a conclusão do trabalho bem como sugestão de trabalhos futuros.

Este projeto tem potencial de beneficiar ampla gama de cursos na Universidade Federal de Uberlândia (UFU), tais como Matemática, Engenharia Civil, Física de Materiais, dentre outros, bem como um significativo número de alunos interessados em desenvolver seus conhecimentos na área de cálculo numérico; na UFU ou em outras instituições. A ferramenta poderá ser utilizada pelos professores para apresentar os procedimentos teóricos e práticos de cada um dos métodos numéricos que serão implementados nessa plataforma de ensino, além de auxiliar na aprendizagem dos mesmos pelos alunos.

## 1.1 Objetivos

Este trabalho apresenta um sistema para auxiliar o ensino de Cálculo Numérico ao fornecer uma ferramenta simples, visual, interativa e dinâmica para alunos e professores:

um site para resolução de problemas de cálculo numérico, com auxílio de gráficos e tabelas associadas às aproximações obtidas para melhor entendimento do assunto.

### 1.1.1 Objetivos Específicos

- Criar uma aplicação web que facilite o ensino e aprendizado de Cálculo Numérico;
- Exibir cada etapa do processo de resolução numérica com gráficos relacionados;
- Apresentar tabelas das aproximações para análises de resultados;
- Disponibilizar a ferramenta online de forma gratuita;
- Disponibilizar o código da ferramenta para a comunidade.

## 1.2 Metodologia

Este trabalho utilizou a linguagem de programação Javascript, juntamente com as tecnologias HTML5, CSS3 e as bibliotecas Bootstrap 4, Math.JS, MathJax e Plot.ly a fim de realizar a implementação do site e o GitHub para implantação do sistema e disponibilização ao público. O desenvolvimento técnico desta aplicação seguiu as etapas:

1. Revisão bibliográfica, estudo dos métodos de resolução numérica;
2. Levantamento de requisitos funcionais e não funcionais do sistema;
3. Estudo das tecnologias necessárias para implementação do sistema;
4. Criação de um protótipo do sistema;
5. Desenvolvimento do sistema final;
6. Implantação do sistema e disponibilização para uso público.

## 2 Fundamentação Teórica

Para a fundamentação teórica do presente trabalho é necessário abordar dois tópicos importantes: os métodos numéricos que foram implementados, bem como uma revisão de alguns trabalhos correlatos realizados na área de ensino e/ou cálculo numérico.

### 2.1 Métodos de Resolução Numérica

Dos tópicos presentes na ementa da disciplina Cálculo Numérico usada nos cursos da UFU, o presente trabalho pretende focar nos métodos trabalhados no tópico Zero de Funções, que aborda técnicas de resolução numérica para equações do tipo  $f(x) = 0$  (MATEMÁTICA, 2021).

Deste tema, os métodos de resolução numérica que serão discutidos serão o Método da Bissecção, Newton, Falsa Posição e Secantes. Para entendermos estes métodos, é necessário apresentar alguns conceitos e procedimentos. São eles:

- **Zero de Funções:** Em diversos problemas de Ciências e Engenharia é necessário encontrar um número  $r$  tal que  $f(r) = 0$ . Este  $r$  é a raiz da equação  $f(x) = 0$ , também conhecido como zero de  $f$  (ALMEIDA, 2015).
- **Métodos Iterativos:** São processos que, a partir de alguns dados iniciais, repetem uma determinada operação diversas vezes com objetivo de alcançar um resultado melhor (mais preciso) a cada iteração. Devido a limitações de tempo, como este processo poderia continuar infinitamente, é necessário estabelecer um critério de parada para alcançar uma solução aproximada (COSTA; SILVA, 2009).
- **Critérios de parada:** Para que um método numérico não continue infinitamente, é necessário utilizar um critério de parada. Este critério depende do problema a ser resolvido e da precisão que precisamos obter na solução. Exemplos de critérios de parada incluem número máximo de iterações ou que o resultado obtido esteja dentro de uma determinada margem de erro, satisfaça um nível de precisão (COSTA; SILVA, 2009).
- **Isolamento das Raízes:** Para cada raiz que queremos encontrar em uma equação utilizando métodos iterativos, é necessário isolarmos um intervalo  $[a, b]$  que contenha somente uma raiz da equação  $f(x) = 0$ . Esse isolamento pode ser realizado de diversas formas, sendo a análise do gráfico da função a forma comum (ALMEIDA, 2015).

- **Teorema de Bolzano:** Dada uma função  $f$ , contínua num intervalo  $[a, b]$ , existe pelo menos uma raiz neste intervalo se  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (COSTA; SILVA, 2009; ALMEIDA, 2015).

### 2.1.1 Método da Bissecção

Dada  $f(x)$  contínua num intervalo  $[a, b]$  e que  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , podemos afirmar pelo teorema de Bolzano que existe pelo menos uma raiz neste intervalo. O Método da Bissecção consiste em dividir este intervalo pela metade repetidamente, gerando intervalos menores e continuando a próxima iteração no intervalo que continua satisfazendo o teorema de Bolzano até atingir o critério de parada, que geralmente é uma tolerância de erro  $\varepsilon$  que deve ser maior que a diferença entre os extremos do intervalo encontrado para alcançarmos a solução aproximada (COSTA; SILVA, 2009).

Tendo como critério de parada uma tolerância de erro  $\varepsilon > 0$ , podemos descrever o algoritmo do Método da Bissecção da seguinte forma (COSTA; SILVA, 2009):

1. Defina  $c = (a + b)/2$
2. Se  $(b - c) < \varepsilon$ , aceitamos  $c$  como raiz e paramos as iterações.
3. Se  $f(b) \cdot f(c) < 0$ , faça  $a = c$ . Caso contrário, faça  $b = c$ .
4. Volte ao passo 1

A cada iteração o intervalo é dividido pela metade, eventualmente chegando tão próximo da solução que satisfaz o critério de parada. É possível calcular quantas iterações  $k$  serão necessárias para alcançar o resultado do Método da Bissecção utilizando a seguinte fórmula (COSTA; SILVA, 2009):

$$k > \frac{\log(b - a) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

Para entender melhor o método, faremos um exemplo. Considere a função  $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$  no intervalo  $[0, 3]$ , ilustrada na Figura 1.

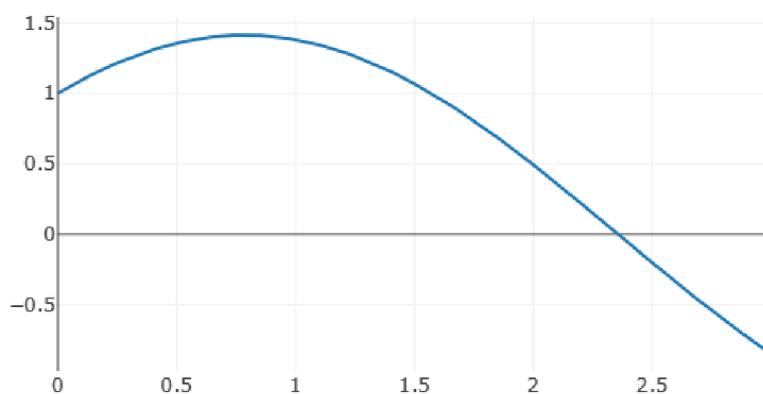


Figura 1 – Gráfico da função  $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$  no intervalo  $[0, 3]$ . Fonte: próprio autor

A partir do gráfico, podemos ver que a função passa o eixo x entre 2 e 2.5, então usaremos esse intervalo para procurar esta raiz. Considerando como critério de parada uma tolerância de erro de  $10^{-6}$ , e usando uma precisão de 6 casas decimais para os cálculos, podemos seguir o método de acordo com a Tabela 1.

Iteração	a	b	c	b-c	f(c)
1	2	2.5	2.25	0.25	0.1499
2	2.25	2.5	2.375	0.125	-0.026593
3	2.25	2.375	2.3125	0.0625	0.061774
4	2.3125	2.375	2.34375	0.03125	0.017599
5	2.34375	2.375	2.359375	0.015625	-0.004498
6	2.34375	2.359375	2.351563	0.007812	0.00655
7	2.351563	2.359375	2.355469	0.003906	0.001026
8	2.355469	2.359375	2.357422	0.001953	-0.001736
9	2.355469	2.357422	2.356446	0.000976	-0.000356
10	2.355469	2.356446	2.355957	0.000489	0.000336
11	2.355957	2.356446	2.356202	0.000244	-0.000011
12	2.355957	2.356202	2.35608	0.000122	0.000162
13	2.35608	2.356202	2.356141	0.000061	0.000076
14	2.356141	2.356202	2.356172	0.00003	0.000032
15	2.356172	2.356202	2.356187	0.000015	0.000011
16	2.356187	2.356202	2.356195	0.000007	-0.000001
17	2.356187	2.356195	2.356191	0.000004	0.000005
18	2.356191	2.356195	2.356193	0.000002	0.000002
19	2.356193	2.356195	2.356194	0.000001	0.000001
20	2.356194	2.356195	2.356195	0	-0.000001

Tabela 1 – Exemplo da execução do Método da Bissecção.

Após 20 iterações, obtemos 2.356195 como aproximação da raiz de  $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$  no intervalo de  $[0, 3]$  com tolerância de erro de  $10^{-6}$ . As principais vantagens do Método da Bissecção são que as iterações envolvem cálculos simples, sempre converge e o erro diminui pela metade a cada iteração. Já a desvantagem é que sempre precisará de mais iterações que outros métodos se  $f$  possui derivadas contínuas e estes métodos convergirem (COSTA; SILVA, 2009).

## 2.1.2 Método de Newton

O Método de Newton consiste em, a partir de uma aproximação inicial, calcular a equação da reta tangente da função nesse ponto por meio da derivada e usar a raiz dessa reta para encontrar uma aproximação para a raiz da função. Repetindo este processo, encontramos uma melhor aproximação para a raiz iterativamente até alcançar o critério de parada. Para aplicar este método, utiliza-se o esquema iterativo (ALMEIDA, 2015; COSTA; SILVA, 2009):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

A partir de uma aproximação inicial  $x_0$ , o Método de Newton segue o esquema iterativo descrito acima até que o critério de parada seja alcançado. Podemos usar como

critério de parada um número máximo de iterações e/ou uma tolerância de erro  $\varepsilon > 0$ , encerrando as iterações se  $|f(x_k)| < \varepsilon$  ou se  $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$  (COSTA; SILVA, 2009).

A partir de uma equação  $f(x)$ , sua derivada  $f'(x)$ , uma aproximação inicial  $x_0$ , uma tolerância de erro de  $\varepsilon$  como critério de parada e iteração  $k$ , podemos descrever o algoritmo do Método de Newton da seguinte forma (ALMEIDA, 2015):

1. Faça

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

2. Se  $|f(x_1)| < \varepsilon$  ou se  $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ , então aceitamos  $x_1$  como raiz e paramos as iterações.

3. Faça  $x_0 = x_1$ .

4. Volte ao passo 1.

Uma das vantagens do Método de Newton é que converge quadraticamente. É um método rápido, desde que obedecidas certas condições. Por outro lado, é necessário conhecer a derivada da função e é necessário escolher uma aproximação inicial  $x_0$  próxima da raiz para que o método convirja. Método de Newton exige que (COSTA; SILVA, 2009):

- A solução da equação  $f(x) = 0$  seja isolada em um intervalo  $[a, b]$ ;
- $f(x)$  e  $f'(x)$  sejam contínuas no intervalo  $[a, b]$ ;
- $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ ;
- A aproximação inicial  $x_0$  pertença ao intervalo  $(a, b)$ .

Para entender melhor o método, faremos um exemplo. Considere a função  $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$  no intervalo  $[0, 3]$ , ilustrada na Figura 1. A partir do gráfico, podemos ver que a função passa o eixo x entre 2 e 2.5, então usaremos um ponto desse intervalo como aproximação inicial da raiz,  $x_0 = 2.3$ . Sabendo que a derivada de  $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$  é  $f'(x) = \text{cos}(x) - \text{sen}(x)$ , considerando como critério de parada uma tolerância de erro de  $10^{-8}$  e usando uma precisão de 8 casas decimais para os cálculos, podemos seguir o método da seguinte forma:

- 1ª Iteração (k=1):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.3 - \frac{f(2.3)}{f'(2.3)} = 2.3 - \frac{0.07942919}{-1.41198123} = 2.35625372$$

$$|f(x_1)| = |f(2.35625372)| = 0.00008376$$

$$|x_1 - x_0| = |2.35625372 - 2.3| = 0.05625372$$

- 2ª Iteração (k=2):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.3562537 - \frac{-0.00008376}{-1.41421356} = 2.35619449$$

$$|f(x_1)| = |f(2.35619449)| = 0$$

$$|x_1 - x_0| = |2.35619449 - 2.35625372| = 0.00005923$$

Após duas iterações, obtemos 2.35619449 como aproximação da raiz de  $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$  no intervalo  $[0, 3]$  com tolerância de erro de  $10^{-8}$ . Podemos ver que o Método de Newton solucionou o exemplo da seção anterior só em duas iterações, menos que o Método da Bissecção.

### 2.1.3 Método das Secantes

Uma desvantagem do Método de Newton é a exigência do cálculo da derivada da função em seu esquema iterativo. Para evitar este cálculo, o Método das Secantes toma por base o método supracitado, substituindo a derivada presente nesse método por uma aproximação baseada em diferenças finitas, envolvendo dessa forma apenas valores da função associada à equação  $f(x) = 0$ . Uma das formas mais simples de aproximação para a derivada é dada por (FRANCO, 2006):

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \quad (2.1)$$

Substituindo a aproximação na fórmula que define o Método de Newton,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

na equação (2.1) segue que:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} \Rightarrow x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Assim sendo, o esquema iterativo

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

define o chamado Método das Secantes.

Na interpretação geométrica do Método das Secantes, utilizamos duas aproximações da raiz da função,  $x_0$  e  $x_1$ , para traçar uma reta que passa por dois pontos  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$ , que é chamada reta secante. A partir dela, podemos calcular uma aproximação da raiz da função  $f(x) = 0$  pela interseção de retas secantes ao gráfico da função com o eixo  $x$  (COSTA; SILVA, 2009).

A partir de uma equação  $f(x)$ , aproximações iniciais  $x_0$  e  $x_1$ , uma tolerância de erro de  $\varepsilon$  como critério de parada e iteração  $k$ . Desta maneira, podemos descrever o algoritmo do Método das Secantes da seguinte forma:

1. Faça

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

2. Se  $\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} < \varepsilon$ , então aceitamos  $x_2$  como raiz e paramos as iterações.

3. Faça  $x_0 = x_1$ .

4. Faça  $x_1 = x_2$ .

5. Volte ao passo 1.

Para entender melhor o método, faremos o mesmo exemplo das seções anteriores. Considere a função  $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$  no intervalo  $[0, 3]$ , ilustrada na Figura 1. A partir do gráfico, podemos ver que a função passa o eixo x entre 2 e 2.5, então usaremos um ponto desse intervalo como aproximação inicial da raiz. Considerando como critério de parada uma tolerância de erro de  $10^{-6}$  e usando uma precisão de 6 casas decimais para os cálculos, podemos seguir o método de acordo com a Tabela 2.

Iteração	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\frac{ x_2 - x_1 }{ x_2 }$
0	2	2.5	2.354365	0.493151	-0.202671	0.002587	0.061857
1	2.5	2.354365	2.356201	-0.202671	0.002587	-0.000009	0.000779
2	2.354365	2.356201	2.356194	0.002587	-0.000009	0.000001	0.000003
3	2.356201	2.356194	2.356194	-0.000009	0.000001	0.000001	0

Tabela 2 – Exemplo da execução do Método das Secantes

Após 4 iterações, obtemos 2.356194 como aproximação da raiz de  $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$  no intervalo de  $[0, 3]$  com tolerância de erro de  $10^{-6}$ . Neste caso podemos ver que o Método das Secantes solucionou nosso exemplo em quatro iterações, bem menos que o Método da Bissecção porém pouco mais que o Método de Newton.

### 2.1.4 Método da Falsa Posição

O Método da Falsa Posição, semelhante ao Método da Bissecção, procura a raiz da função  $f(x)$  em um intervalo  $[a, b]$  com  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . A diferença do Método da Falsa Posição é que, ao invés de realizar uma média simples, uma nova aproximação é feita utilizando o Método das Secantes, ou seja (FRANCO, 2006; COSTA; SILVA, 2009):

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

A partir disso, com uma equação  $f(x)$ , intervalo inicial  $[a, b]$  e tolerância de erro  $\varepsilon$  como critério de parada, podemos definir o algoritmo do Método da Falsa Posição como:

1. Faça

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

2. Se  $\frac{c-a}{c} < \varepsilon$  ou  $\frac{c-b}{c} < \varepsilon$ , aceitamos  $c$  como raiz e paramos as iterações.

3. Se  $f(b) \cdot f(c) < 0$ , faça  $a = c$ . Caso contrário, faça  $b = c$ .

4. Volte ao passo 1

Para entender melhor o método, faremos o mesmo exemplo das seções anteriores. Considere a função  $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$  no intervalo  $[0, 3]$ , ilustrada na Figura 1. A partir do gráfico, podemos ver que a função passa o eixo x entre 2 e 2.5, então usaremos um ponto desse intervalo como aproximação inicial da raiz. Considerando como critério de parada uma tolerância de erro de  $10^{-6}$  e usando uma precisão de 6 casas decimais para os cálculos, podemos seguir o método de acordo com a Tabela 3.

Iteração	a	c	b	$\frac{c-a}{c}$	$\frac{c-b}{c}$	$f(c)$
0	2	2.354365	2.5	0.150514	0.061857	0.002587
1	2.354365	2.356201	2.5	0.000779	0.06103	-0.000009
2	2.354365	2.356194	2.356201	0.000776	0.000003	0.000001
3	2.356194	2.356194	2.356201	0	0.000003	0.000001

Tabela 3 – Exemplo da execução do Método da Falsa Posição

Após 4 iterações, obtemos 2.356194 como aproximação da raiz de  $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$  no intervalo de  $[0, 3]$  com tolerância de erro de  $10^{-6}$ . Neste caso podemos ver que o Método da Falsa Posição solucionou nosso exemplo em quatro iterações, então o mesmo número de iterações que o Método das Secantes.

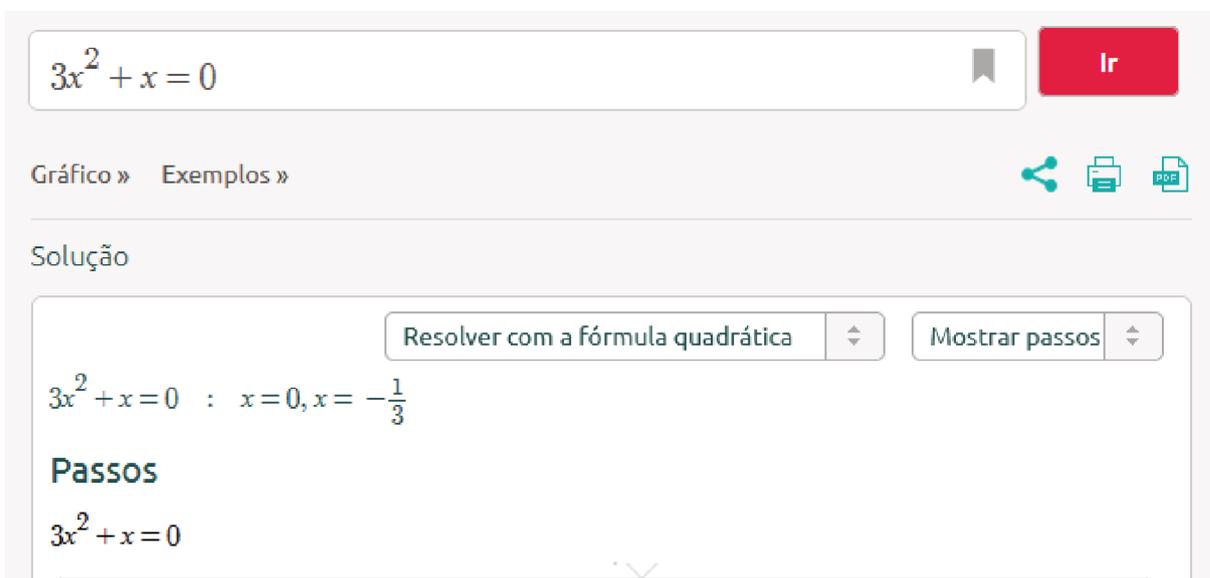
## 2.2 Trabalhos Correlatos

Existem diversos trabalhos que exemplificam a utilização de softwares para o ensino. Em relação a cálculo numérico, percebe-se que os trabalhos utilizam uma abordagem visual para facilitar o entendimento do procedimento dos métodos pelos alunos.

Caraballo e Tenorio (2015) tem como objetivo mostrar que o GeoGebra pode ser usado para que alunos experimentem vários métodos numéricos para solucionar equações não lineares. Para isso, sua metodologia foca na interpretação geométrica e visualização do comportamento e procedimento dos métodos numéricos usando o software. O trabalho apresenta alguns applets criados no GeoGebra que lidam com equações não lineares através de métodos numéricos e como podem ser utilizados para o ensino.

Em contrapartida, Djamila (2017) propõe o uso de planilhas do Excel para o ensino de métodos numéricos. Para isto, sua metodologia consiste em apresentar resoluções em múltiplos métodos para uma mesma equação e observar as diferenças entre eles. O artigo conclui que esta estratégia auxilia os professores a perceberem a evolução da forma que os alunos pensam ao usar métodos numéricos, e apresenta um exemplo ilustrativo usando quatro métodos numéricos para encontrar raízes.

Além destes, temos softwares voltados ao ensino da matemática em geral, como o Symbolab (2021) que é um site de soluções matemáticas. Ele oferece resoluções passo a passo desde exercícios mais básicos do ensino médio até tópicos mais complexos a nível de graduação, abrangendo tópicos como álgebra, trigonometria e cálculo. Contudo, além de utilizar código proprietário, sua versão gratuita é limitada e ele não cobre métodos de cálculo numérico.



A captura de tela do Symbolab mostra a interface de usuário para resolver a equação  $3x^2 + x = 0$ . No topo, há um campo de entrada com a equação e um botão vermelho "Ir". Abaixo, há opções de "Gráfico »" e "Exemplos »", além de ícones para compartilhar, imprimir e salvar em PDF. A seção "Solução" contém um menu suspenso selecionado "Resolver com a fórmula quadrática" e um botão "Mostrar passos". A solução apresentada é  $3x^2 + x = 0 : x = 0, x = -\frac{1}{3}$ . Abaixo, a seção "Passos" mostra o início da resolução com a equação  $3x^2 + x = 0$ .

Figura 2 – Captura de tela do Symbolab

De forma similar, Wolfram Alpha (2021) é uma plataforma proprietária que oferece aplicações para solução de diversos problemas, chegando a ir além da matemática. Contudo, sua versão gratuita também é limitada e o site suporta somente o idioma inglês.

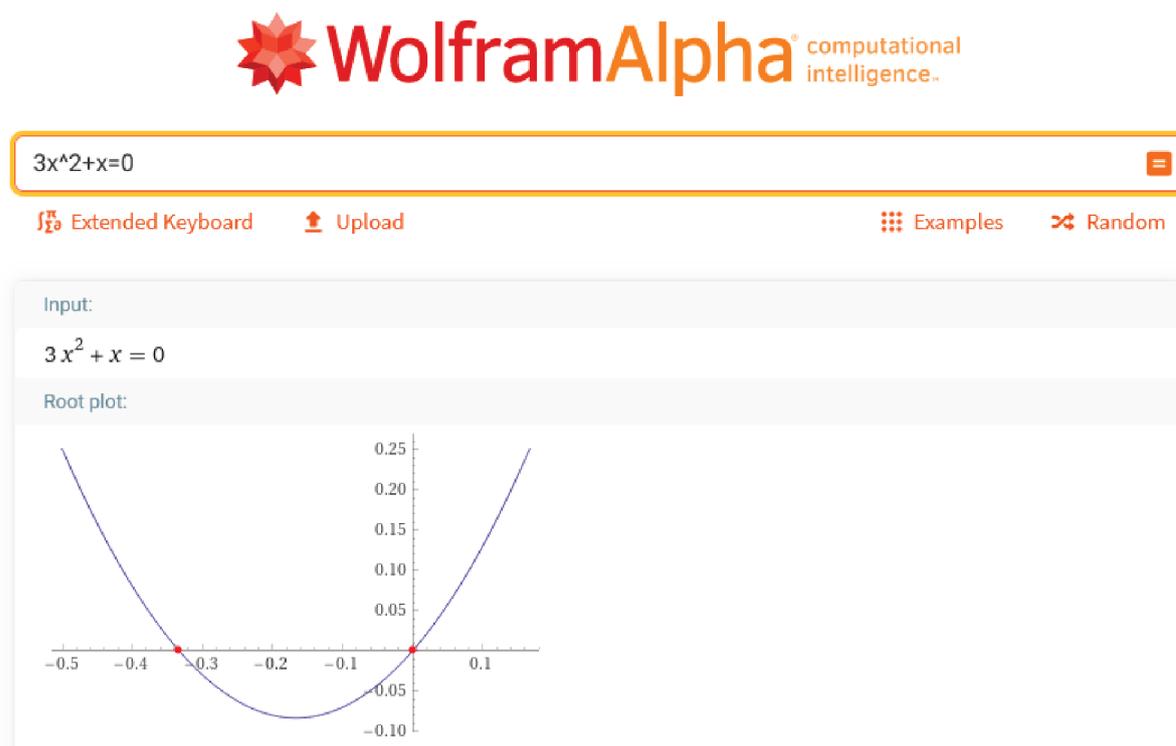


Figura 3 – Captura de tela do Wolfram Alpha

Em contrapartida, [Gurgel et al. \(2018\)](#) propõe desenvolver um site aberto e disponível gratuitamente focado em facilitar o ensino do método de resolução gráfica de problemas de programação linear com duas variáveis de decisão na disciplina de Pesquisa Operacional. Para alcançar este objetivo, sua metodologia foi dividida em etapas: definir os requisitos do sistema, criar um protótipo e fluxograma, estudar tecnologias e desenvolvimento, e por fim avaliação. Como resultado, obteve uma aplicação web de código aberto que resolve problemas de minimização ou maximização da programação linear com duas variáveis de decisão, com auxílio visual de gráficos para procurar possíveis soluções ótimas.

Ressalta-se que este software se assemelha ao desenvolvido no presente projeto por desenvolver um site disponível gratuitamente com código aberto focado no ensino, porém este é focado na área de Pesquisa Operacional, em problemas de minimização e maximização da programação linear com duas variáveis de decisão, enquanto o presente é da área de Cálculo Numérico, em problemas de Zero de Funções. Além disso, observa-se uma diferença nas tecnologias empregadas, pois Gurgel utiliza uma função fixa enquanto o presente trabalho permite a utilização de fórmulas matemáticas para análise de diversas funções.



Figura 4 – Captura de tela do Software de Gurgel

## 3 Desenvolvimento

Este capítulo apresenta as etapas executadas para a realização deste trabalho, divididas em levantamento de requisitos, estudo das tecnologias necessárias para implementação do sistema, protótipo e definição do layout do sistema.

### 3.1 Levantamento de Requisitos

Levantamento de requisitos é uma das primeiras etapas do desenvolvimento do software, onde coletamos as necessidades do cliente e as descrevemos em duas categorias: requisitos funcionais, que são funções que o sistema deve desempenhar, e requisitos não funcionais, que são características esperados do projeto mas não são relacionadas a uma função específica, mas ao sistema como um todo (HASSAN, 2009).

Para o desenvolvimento do projeto, foram listados os requisitos funcionais e não funcionais deste sistema através de reuniões com um professor da FAMAT, tendo em base a ficha de componente curricular da disciplina de Cálculo Numérico da UFU (MATEMÁTICA, 2021) e os livros Cálculo Numérico (FRANCO, 2006) e Análise Numérica (BURDEN; FAIRES, 2005).

#### 3.1.1 Requisitos Funcionais

##### **RF-1** Possibilitar análise do gráfico de funções

A análise de gráficos é fundamental para o estudo de métodos numéricos, portanto é necessário que o sistema desenvolvido receba uma função  $f(x)$  do usuário e gere o gráfico da mesma, em um dado intervalo  $[a, b]$  também determinado pelo usuário.

##### **RF-2** Implementar o Método da Bissecção

Para implementar o método da bissecção, o sistema deve receber uma função  $f(x)$ , um intervalo inicial  $[a, b]$ , uma tolerância de erro  $\varepsilon$  e a precisão dos cálculos (em casas decimais) e então gerar uma tabela mostrando cada iteração do método com os valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , os sinais da função  $f(x)$  em  $f(a)$ ,  $f(b)$  e  $f(c)$ , o valor do critério de parada  $b - c$  e o valor da função no ponto  $c$ ,  $f(c)$  em cada iteração. Além disso, o sistema também deve possibilitar a visualização dos pontos  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$  e  $(c, f(c))$  no gráfico da função  $f(x)$  a cada iteração do método.

##### **RF-3** Implementar o Método de Newton

Para implementar o método de Newton, o sistema deve receber uma função  $f(x)$ , uma aproximação inicial  $x_0$ , uma tolerância de erro  $\varepsilon$  e a precisão dos cálculos (em casas

decimais) e então calcular e mostrar ao usuário a derivada  $f'(x)$  de  $f(x)$  e gerar uma tabela mostrando cada iteração do método com os valores de  $x_0$ ,  $x_1$ , o valor dos critérios de parada  $|f(x_1)|$  e  $|x_1 - x_0|$ , o valor da função no ponto  $x_1$ ,  $f(x_1)$  e o valor da derivada de  $f(x)$ ,  $f'$ , no ponto  $x_0$ ,  $f'(x_0)$  em cada iteração. Além disso, o sistema também deve possibilitar a visualização dos pontos  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$  e a reta tangente de  $x_0$  no gráfico da função  $f(x)$  a cada iteração do método.

#### **RF-4** Implementar o Método das Secantes

Para implementar o método das Secantes, o sistema deve receber uma função  $f(x)$ , duas aproximações iniciais  $x_0$  e  $x_1$ , uma tolerância de erro  $\varepsilon$  e a precisão dos cálculos (em casas decimais) e então gerar uma tabela mostrando cada iteração do método com os valores de  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , o valor do critério de parada  $\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|}$  e o valor da função nos pontos  $f(x_0)$ ,  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$ . Além disso, o sistema também deve possibilitar a visualização dos pontos  $(x_0, f(x_0))$ ,  $(x_1, f(x_1))$  e  $(x_2, f(x_2))$  e a reta secante que passa por  $x_0$  e  $x_1$  no gráfico da função  $f(x)$  a cada iteração do método.

#### **RF-5** Implementar o Método da Falsa Posição

Para implementar o método da Falsa Posição, o sistema deve receber uma função  $f(x)$ , um intervalo inicial  $[a, b]$ , uma tolerância de erro  $\varepsilon$  e a precisão dos cálculos (em casas decimais) e então gerar uma tabela mostrando cada iteração do método com os valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , os sinais da função  $f(x)$  em  $f(a)$ ,  $f(b)$  e  $f(c)$ , o valor dos critérios de parada  $\frac{c-a}{c}$  e  $\frac{c-b}{c}$  e o valor da função no ponto  $c$ ,  $f(c)$  em cada iteração. O sistema também deve possibilitar a visualização dos pontos  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$  e  $(c, f(c))$  no gráfico da função  $f(x)$  a cada iteração do método, assim como a reta secante que passa por  $a$  e  $b$ .

### 3.1.2 Requisitos Não Funcionais

#### **RNF-1** Plataforma Web

Para evitar dependência de um sistema operacional específico e possibilitar o alcance do sistema ao maior número de usuários possíveis, foi definido que o sistema deverá ser feito em plataforma web.

#### **RNF-2** Aplicação de Página Única

Para evitar perda de dados durante o processamento dos cálculos, após o carregamento inicial da página o sistema deve continuar funcionando normalmente mesmo que o cliente fique sem internet. Para isso, o sistema deve efetuar todo o processamento no próprio navegador, sem depender de um servidor remoto.

#### **RNF-3** Software Gratuito

Para incentivar o ensino e aprendizado de cálculo numérico sem barreiras, foi definido que o sistema deve ser totalmente gratuito.

### RNF-4 Código Aberto

Para possibilitar que a comunidade desenvolva ainda mais aplicações voltadas ao ensino e/ou cálculo numérico, e também que colaboradores ao redor do mundo contribuam para este trabalho e futuros trabalhos possam ser desenvolvidos em cima deste, foi definido que o mesmo deve ter código aberto para toda a comunidade.

## 3.2 Tecnologias necessárias para implementação do sistema

Como parte das aplicações web modernas, foram utilizadas as tecnologias HTML5, CSS3 e JavaScript como base para criação do sistema. Além destas, também foi usado Bootstrap 4, um dos mais famosos *frameworks* para web criado para facilitar o desenvolvimento de uma interface responsiva e amigável para o usuário (BOOTSTRAP, 2021).

A partir disso, nesta etapa foram estudadas tecnologias para trabalhar com equações, exibir símbolos matemáticos para o usuário e para a criação de gráficos. Assim, é necessário interpretar a entrada do usuário (um conjunto de caracteres), como uma função matemática  $f(x)$  e habilidade de obter resultados da função a partir de determinado  $x$ . Além disso, é necessário mostrar símbolos e fórmulas matemáticas ao usuário de maneira clara, assim como fazemos em  $\text{\LaTeX}$ . A partir disso, escolheu-se a biblioteca Math.js para atender as necessidades do projeto pelo diferencial de interpretar símbolos matemáticos diretamente no navegador, sem necessidade de expor um servidor a riscos de interpretação de input do usuário (MATH.JS, 2021).

Contudo, a biblioteca supracitada necessita de outra ferramenta para exibir texto em  $\text{\LaTeX}$  corretamente. Portanto, utilizou-se a biblioteca MathJax, usada extensivamente pela comunidade científica e suportada pela Sociedade Americana de Matemática e a IEEE, para transformar o texto em imagens (MATHJAX, 2021).

### Matemática com math.js e LaTeX com MathJax.

<b>F(X)=</b>	<input type="text" value="sin(x)+cos(x)"/>
<b>Função</b>	$\sin(x) + \cos(x)$
<b>Derivada</b>	$\cos(x) - \sin(x)$

Figura 5 – Protótipo do sistema durante esta etapa. Fonte: próprio autor

Finalmente, para transformar os dados obtidos pelos métodos em gráficos foi utilizada a biblioteca Plot.ly no projeto, um módulo JavaScript que permite criar gráficos diretamente no navegador do usuário. Esta biblioteca possui diversos recursos úteis tais como controle de zoom, download da imagem do gráfico em formato PNG, destaque de dados ao passar o mouse pelo gráfico, entre outros. (PLOT.LY, 2021).

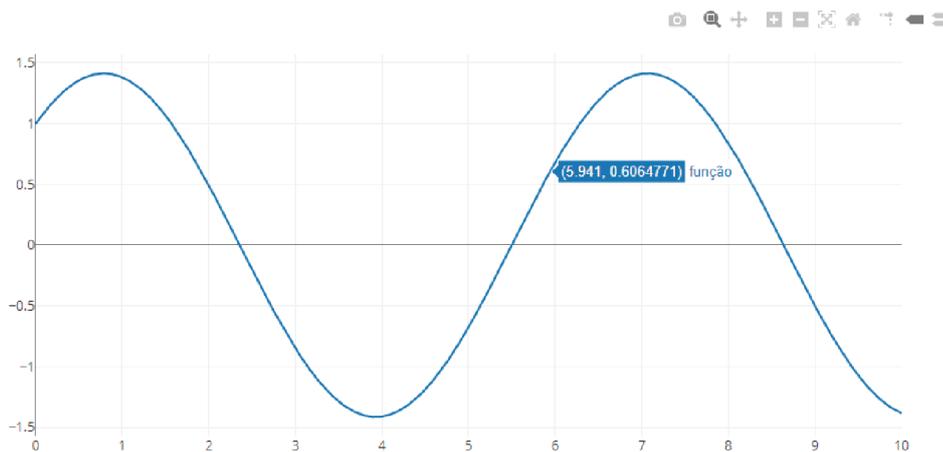


Figura 6 – Gráfico criado com a biblioteca Plot.ly. Fonte: próprio autor

### 3.3 Protótipo do Sistema

Nesta etapa foram implementados os métodos da Bissecção e Newton, e as aproximações geradas pela execução destes métodos foram exibidas na forma de tabelas. Tais tabelas têm por finalidade apresentar não só as aproximações em si, mas também os valores que as funções assumem em cada iteração dos métodos, assim como a visualização dos critérios de parada ao longo da execução até que a precisão solicitada seja atingida.

#### Zero de Funções - Método de Newton

<b>Aproximação Inicial</b>	<input type="text" value="2,3"/>						
<b>Precisão</b>	<input type="text" value="6"/> casas decimais						
<b>Calcular</b>	<input type="button" value="Calcular"/>						
<b>Tabela</b>	Iteração	x1	x0	f(x1)	x1-x0	f(x)	f'(x)
	1	2.356254	2.3	0.000084	0.056254	0.079429	-1.411981
	2	2.356194	2.356254	0.000001	0.000006	-0.000084	-1.414214

Figura 7 – Protótipo do método de Newton. Fonte: próprio autor

## Zero de Funções - Método da Bissecção

<b>Intervalo</b>	[ <input type="text" value="2,345"/> , <input type="text" value="2,361"/> ]					
<b>Precisão</b>	<input type="text" value="6"/> casas decimais					
<b>Calcular</b>	<input type="button" value="Calcular"/>					
<b>Tabela</b>	Iteração	a	b	c	b-c	f(c)
	1	2.345	2.361	2.353	0.008	0.004518
	2	2.353	2.361	2.357	0.004	-0.001139
	3	2.353	2.357	2.355	0.002	0.001689
	4	2.355	2.357	2.356	0.001	0.000275
	5	2.356	2.357	2.3565	0.0005	-0.000432
	6	2.356	2.3565	2.35625	0.00025	-0.000079
	7	2.356	2.35625	2.356125	0.000125	0.000098
	8	2.356125	2.35625	2.356188	0.000062	0.000009
	9	2.356188	2.35625	2.356219	0.000031	-0.000035
	10	2.356188	2.356219	2.356204	0.000015	-0.000013
	11	2.356188	2.356204	2.356196	0.000008	-0.000002
	12	2.356188	2.356196	2.356192	0.000004	0.000004
	13	2.356192	2.356196	2.356194	0.000002	0.000001
	14	2.356194	2.356196	2.356195	0.000001	-0.000001
15	2.356194	2.356195	2.356195	0	-0.000001	

Figura 8 – Protótipo do método da Bissecção. Fonte: próprio autor

### 3.4 Definição do layout do sistema

Nesta etapa foi especificado um layout geral para o sistema, tendo em mente um design minimalista, com cores neutras, e que permita acessar qualquer função do sistema em poucos cliques. Dessa forma, o layout da aplicação foi definido como a seguir:

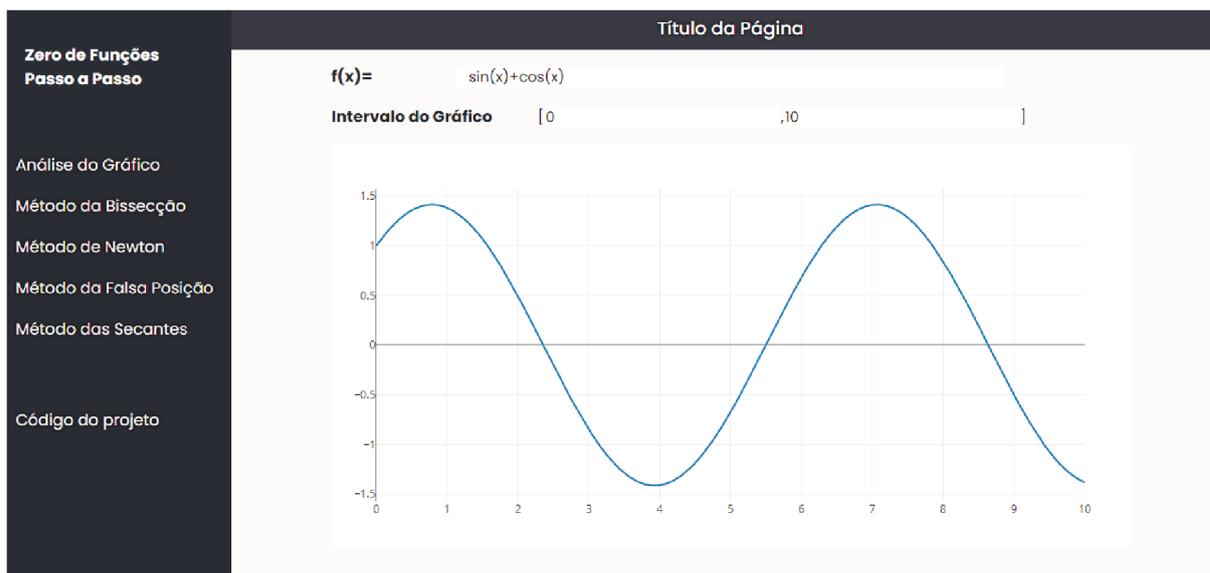


Figura 9 – Design inicial do sistema. Fonte: próprio autor

### 3.5 Disponibilização para uso público

Para cumprir os objetivos do trabalho de facilitar o trabalho de professores, a pesquisa de estudantes e ampliar o acesso ao conhecimento, a aplicação foi disponibilizada gratuitamente de forma online através do endereço:

<https://jhonnybn.github.io/calculonumericopassoapasso/>

Além disso, para possibilitar que a comunidade desenvolva ainda mais aplicações voltadas ao ensino em geral ou especificamente ao cálculo numérico, e também que colaboradores ao redor do mundo contribuam para este projeto e futuros trabalhos possam ser desenvolvidos em cima deste, o código da aplicação foi disponibilizado no endereço:

<https://github.com/JhonnyBn/calculonumericopassoapasso>

## 4 Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados do desenvolvimento do software através de capturas de tela do mesmo durante a solução de problemas. Para tanto, a seguir serão apresentados dois problemas de testes para ilustrar as capacidades do código implementado. Para o primeiro exemplo, vamos usar o mesmo problema apresentado na Fundamentação Teórica deste trabalho.

Problema 1: A partir da função  $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$  no intervalo  $[0, 3]$ , determine o zero da função. Utilize 6 casas decimais de precisão para os cálculos e tome  $10^{-6}$  como tolerância de erro.

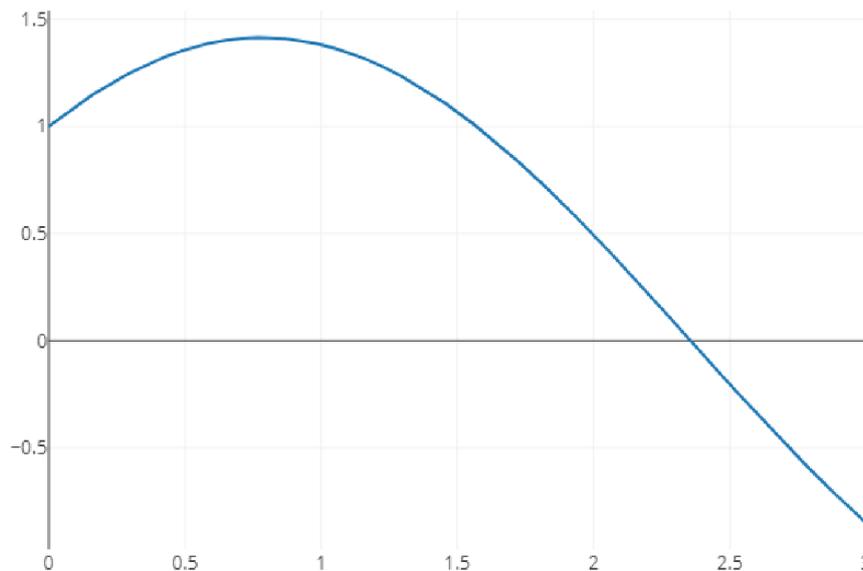


Figura 10 – Gráfico da função  $f(x) = \text{sen}(x) + \text{cos}(x)$  no intervalo  $[0, 3]$ . Fonte: próprio autor

Problema 2: Determine o zero da função  $f(x) = \text{sen}(x^3)$  no intervalo  $[3.3, 3.4]$ . Use 10 casas decimais de precisão para os cálculos e tome  $10^{-8}$  como tolerância de erro.

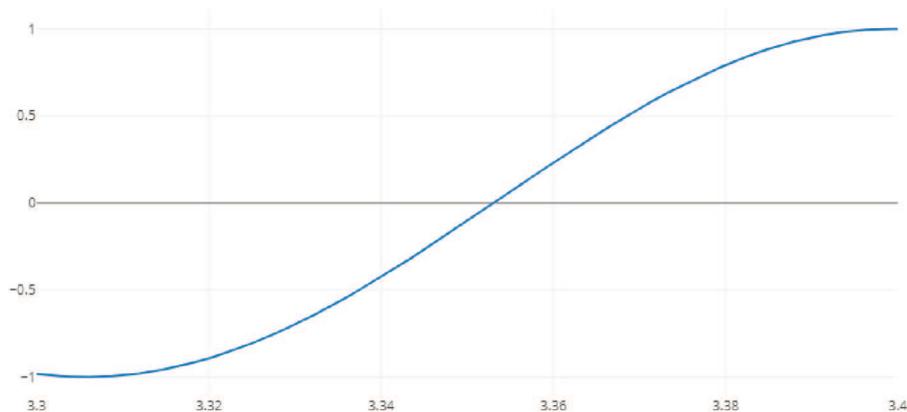


Figura 11 –  $f(x) = \text{sen}(x^3)$  no intervalo  $[3.3, 3.4]$ . Fonte: próprio autor

## 4.1 Método da Bissecção

### 4.1.1 Problema 1



Figura 12 – Parâmetros de entrada do Método da Bissecção no problema 1

Iteração	$a$	$c$	$b$	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	$b - c$	$f(c)$	Opções
0	0	1.5	3	+	+	-	1.5	1.068232	Mostrar Gráfico
1	1.5	2.25	3	+	+	-	0.75	0.1499	Mostrar Gráfico
2	2.25	2.625	3	+	-	-	0.375	-0.375587	Mostrar Gráfico
3	2.25	2.4375	2.625	+	-	-	0.1875	-0.114857	Mostrar Gráfico
4	2.25	2.34375	2.4375	+	+	-	0.09375	0.017599	Mostrar Gráfico
5	2.34375	2.390625	2.4375	+	-	-	0.046875	-0.048682	Mostrar Gráfico
6	2.34375	2.367188	2.390625	+	-	-	0.023437	-0.015547	Mostrar Gráfico
7	2.34375	2.355469	2.367188	+	+	-	0.011719	0.001026	Mostrar Gráfico
8	2.355469	2.361329	2.367188	+	-	-	0.005859	-0.007261	Mostrar Gráfico
9	2.355469	2.358399	2.361329	+	-	-	0.00293	-0.003118	Mostrar Gráfico
10	2.355469	2.356934	2.358399	+	-	-	0.001465	-0.001046	Mostrar Gráfico
11	2.355469	2.356202	2.356934	+	-	-	0.000732	-0.000011	Mostrar Gráfico
12	2.355469	2.355836	2.356202	+	+	-	0.000366	0.000507	Mostrar Gráfico
13	2.355836	2.356019	2.356202	+	+	-	0.000183	0.000248	Mostrar Gráfico
14	2.356019	2.35611	2.356202	+	+	-	0.000092	0.000119	Mostrar Gráfico
15	2.35611	2.356156	2.356202	+	+	-	0.000046	0.000054	Mostrar Gráfico
16	2.356156	2.356179	2.356202	+	+	-	0.000023	0.000022	Mostrar Gráfico
17	2.356179	2.356191	2.356202	+	+	-	0.000011	0.000005	Mostrar Gráfico
18	2.356191	2.356197	2.356202	+	-	-	0.000005	-0.000004	Mostrar Gráfico
19	2.356191	2.356194	2.356197	+	+	-	0.000003	0.000001	Mostrar Gráfico
20	2.356194	2.356196	2.356197	+	-	-	0.000001	-0.000002	Mostrar Gráfico

Figura 13 – Tabela do Método da Bissecção no problema 1

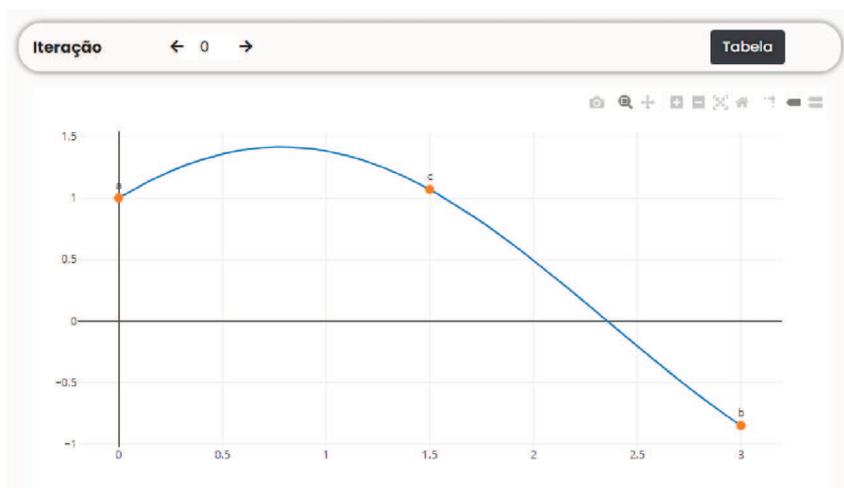


Figura 14 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 1 na iteração 0

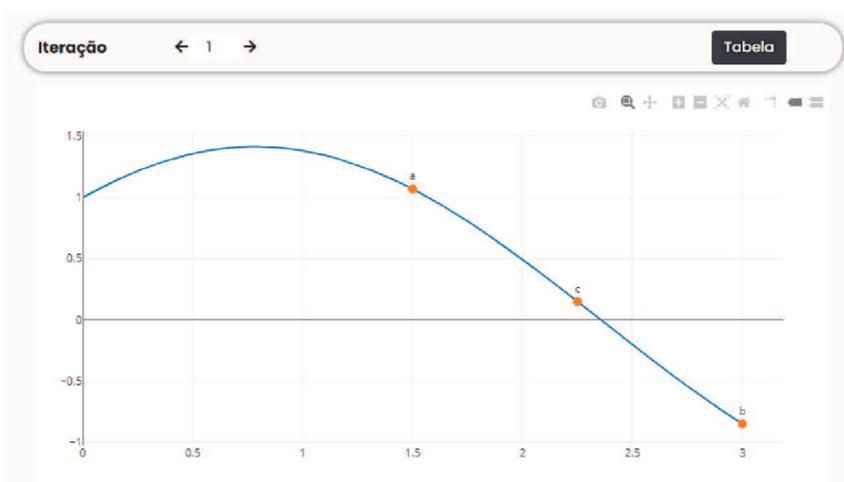


Figura 15 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 1 na iteração 1

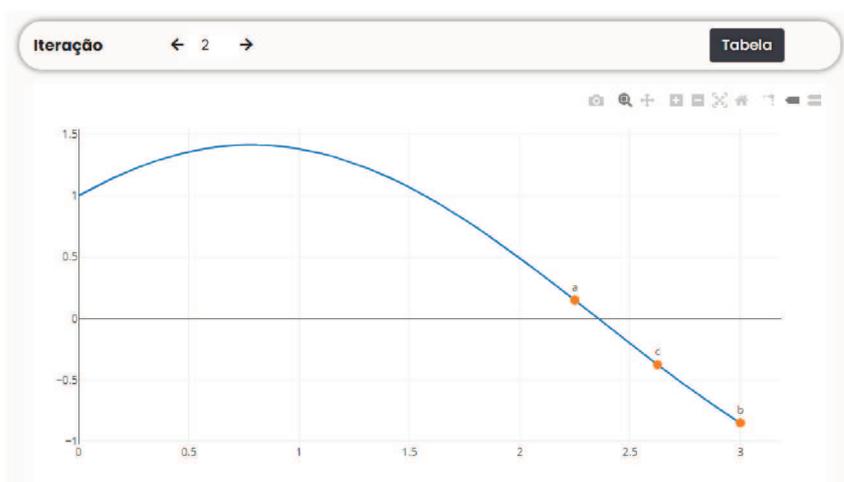


Figura 16 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 1 na iteração 2

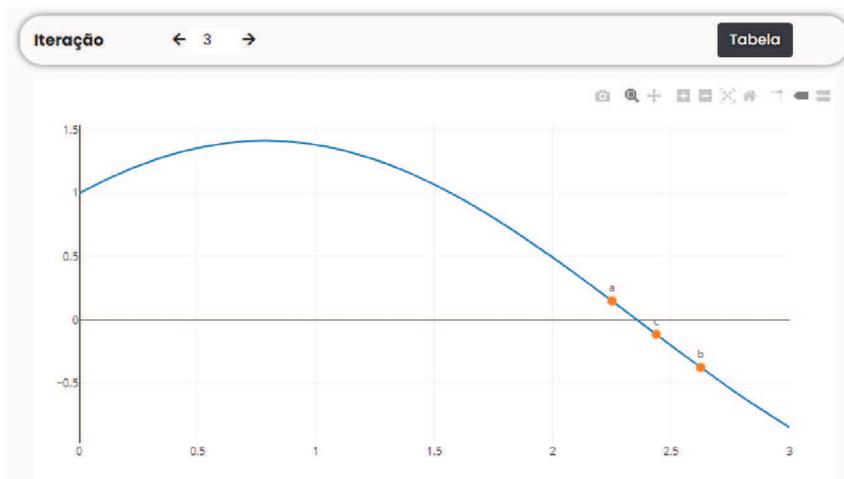


Figura 17 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 1 na iteração 3

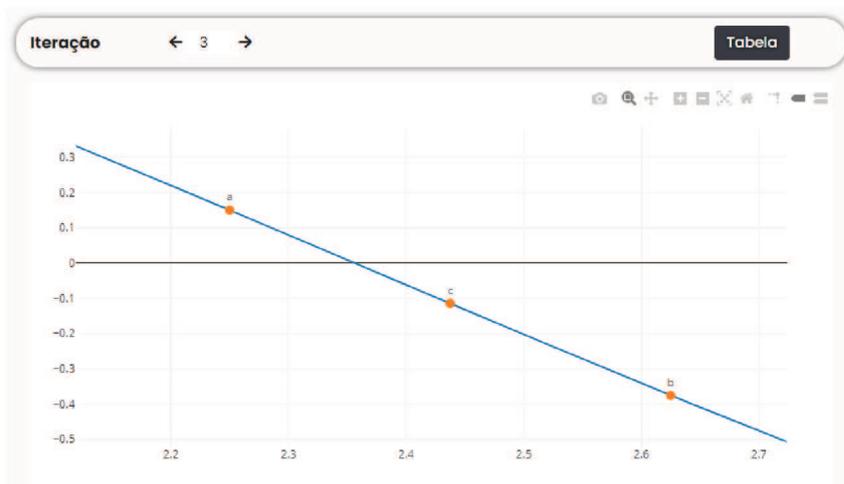


Figura 18 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 1 na iteração 3 alterando o zoom

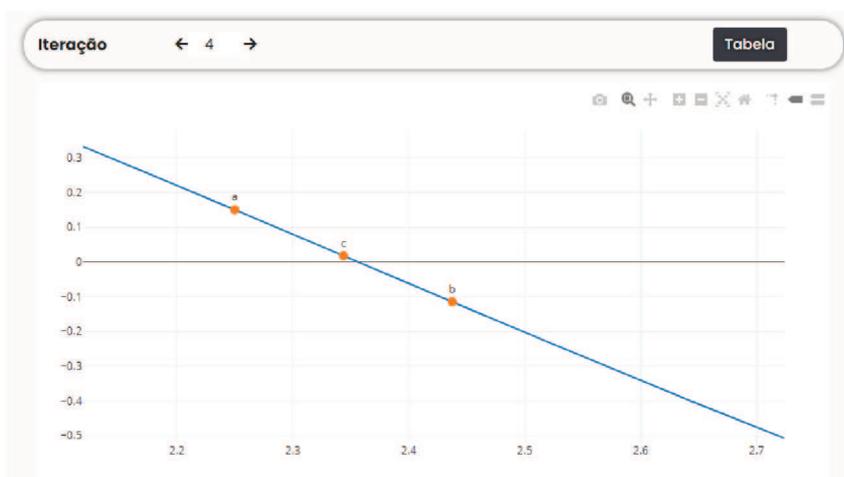


Figura 19 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 1 na iteração 4

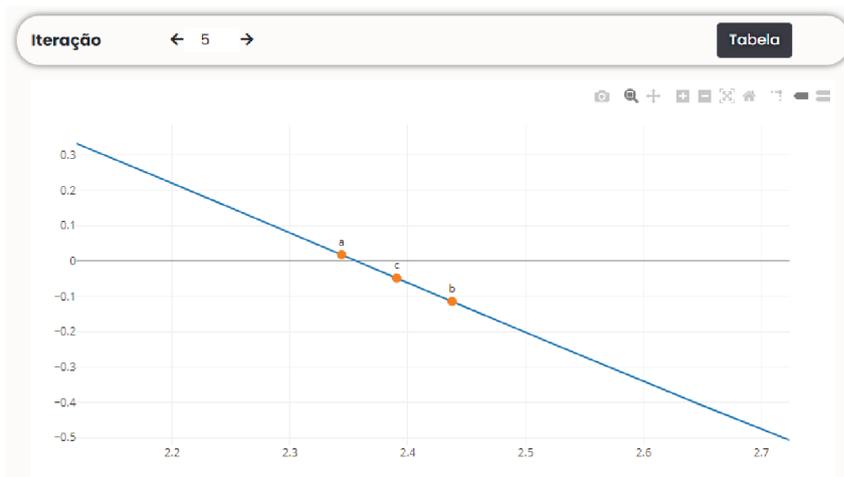


Figura 20 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 1 na iteração 5

### 4.1.2 Problema 2



Figura 21 – Parâmetros de entrada do Método da Bissecção no problema 2

Iteração	$a$	$c$	$b$	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	$b - c$	$f(c)$	Opções
0	3.3	3.35	3.4	-	-	+	0.05	-0.1035508854	Mostrar Gráfico
1	3.35	3.375	3.4	-	+	+	0.025	0.6774184884	Mostrar Gráfico
2	3.35	3.3625	3.375	-	+	+	0.0125	0.3133125104	Mostrar Gráfico
3	3.35	3.35625	3.3625	-	+	+	0.00625	0.1068733516	Mostrar Gráfico
4	3.35	3.353125	3.35625	-	+	+	0.003125	0.0015722688	Mostrar Gráfico
5	3.35	3.3515625	3.353125	-	-	+	0.0015625	-0.0510845896	Mostrar Gráfico
6	3.3515625	3.35234375	3.353125	-	-	+	0.00078125	-0.0247708869	Mostrar Gráfico
7	3.35234375	3.352734375	3.353125	-	-	+	0.000390625	-0.0116018501	Mostrar Gráfico
8	3.352734375	3.3529296875	3.353125	-	-	+	0.0001953125	-0.0050152832	Mostrar Gráfico
9	3.3529296875	3.3530273438	3.353125	-	-	+	0.0000976562	-0.0017216108	Mostrar Gráfico
10	3.3530273438	3.3530761719	3.353125	-	-	+	0.0000488281	-0.000074695	Mostrar Gráfico
11	3.3530761719	3.353100586	3.353125	-	+	+	0.000024414	0.0007487828	Mostrar Gráfico
12	3.3530761719	3.353088379	3.353100586	-	+	+	0.000012207	0.0003370441	Mostrar Gráfico
13	3.3530761719	3.3530822755	3.353088379	-	+	+	0.0000061035	0.0001311758	Mostrar Gráfico
14	3.3530761719	3.3530792237	3.3530822755	-	+	+	0.0000030518	0.0000282403	Mostrar Gráfico
15	3.3530761719	3.3530776978	3.3530792237	-	-	+	0.0000015259	-0.0000232274	Mostrar Gráfico
16	3.3530776978	3.3530784608	3.3530792237	-	+	+	7.629e-7	0.0000025081	Mostrar Gráfico

Figura 22 – Tabela do Método da Bissecção no problema 2

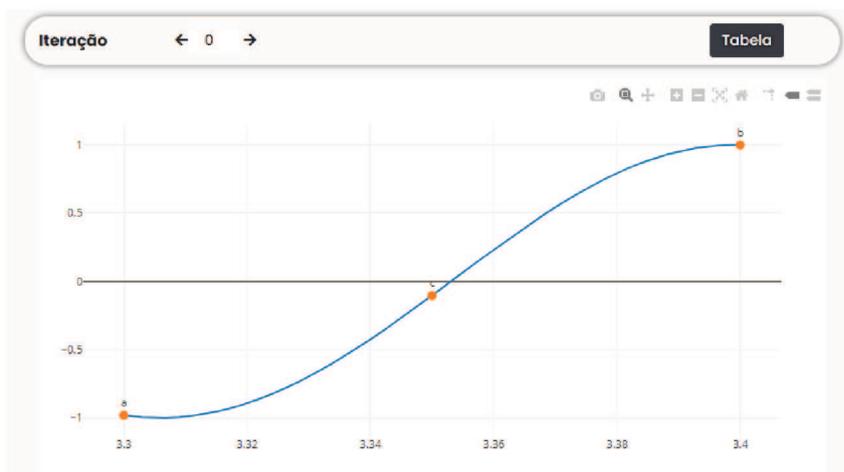


Figura 23 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 2 na iteração 0

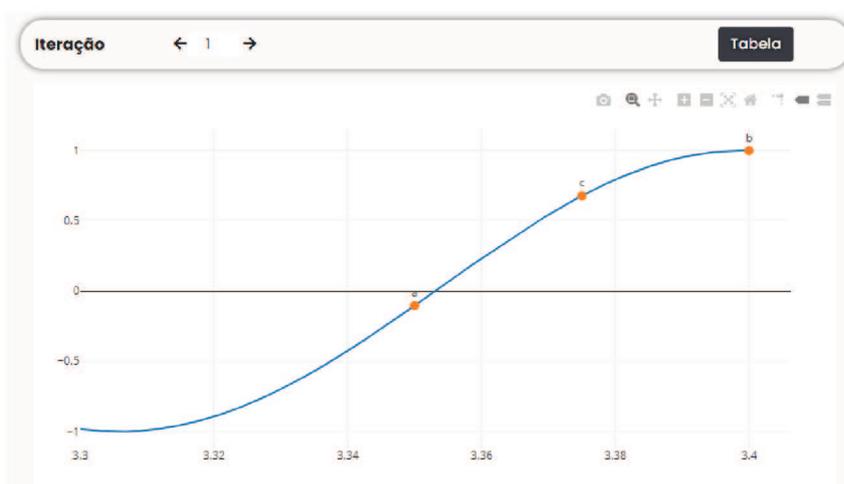


Figura 24 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 2 na iteração 1

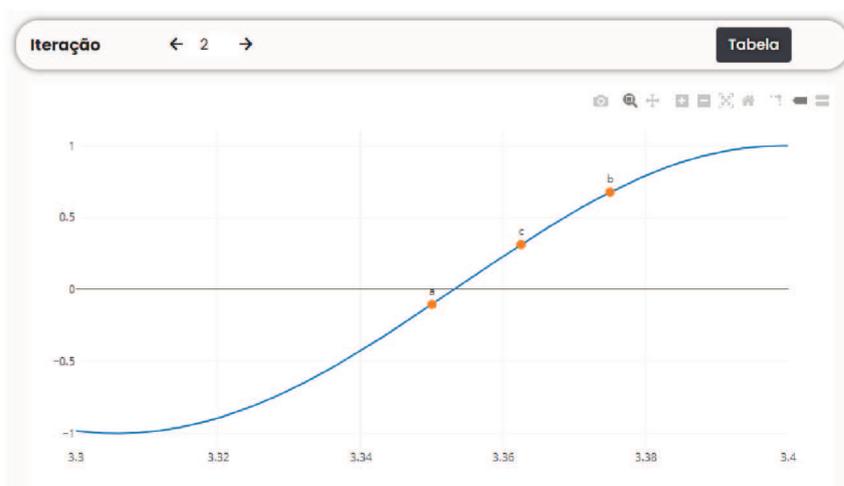


Figura 25 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 2 na iteração 2

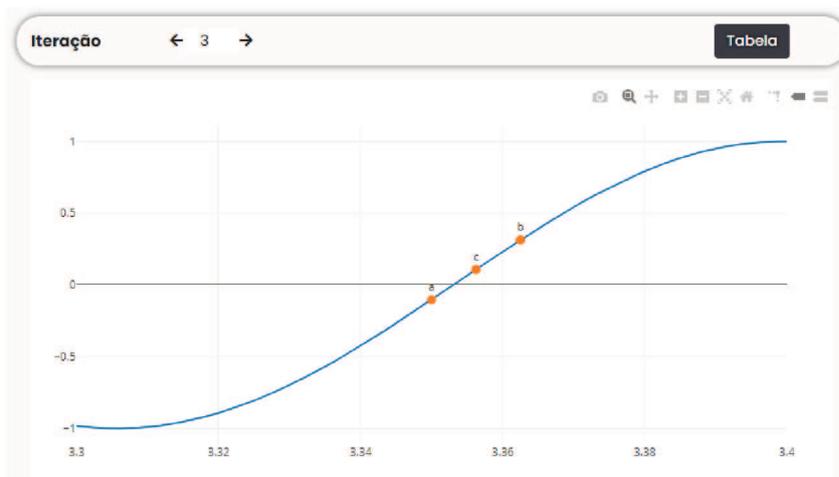


Figura 26 – Gráfico do Método da Bissecção no problema 2 na iteração 3

## 4.2 Método de Newton

### 4.2.1 Problema 1

Figura 27 – Parâmetros de entrada do Método de Newton no problema 1

Iteração	$x_0$	$x_1$	$ f(x_1) $	$ x_1 - x_0 $	$f(x_1)$	$f'(x_0)$	Opções
0	1.5	2.652655	0.413144	1.152655	-0.413144	-0.926758	Mostrar Gráfico
1	2.652655	2.347193	0.01273	0.305462	0.01273	-1.352521	Mostrar Gráfico
2	2.347193	2.356195	0.000001	0.009002	-0.000001	-1.414156	Mostrar Gráfico

Figura 28 – Tabela do Método de Newton no problema 1

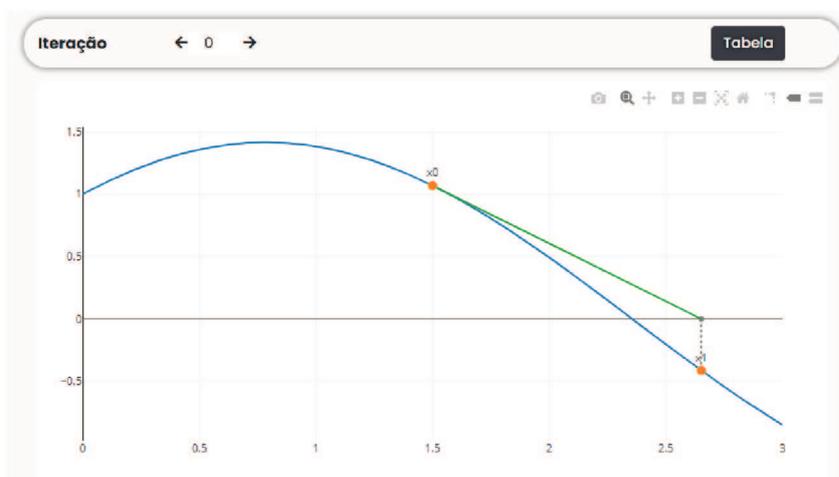


Figura 29 – Gráfico do Método de Newton no problema 1 na iteração 0

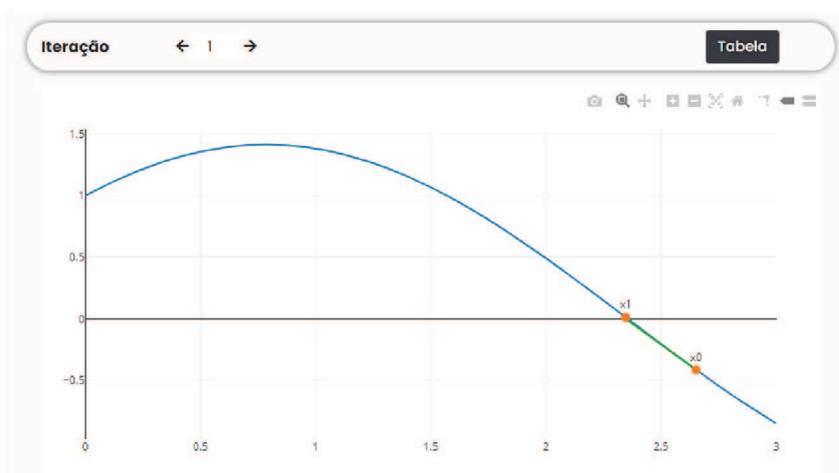


Figura 30 – Gráfico do Método de Newton no problema 1 na iteração 1

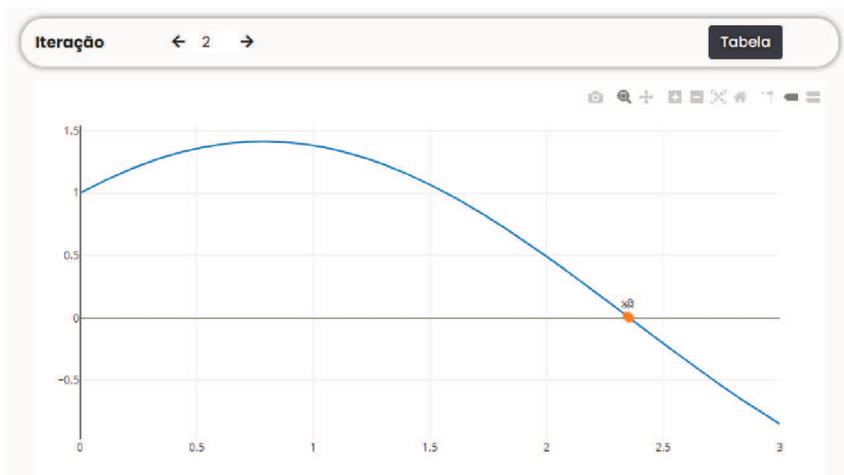


Figura 31 – Gráfico do Método de Newton no problema 1 na iteração 2

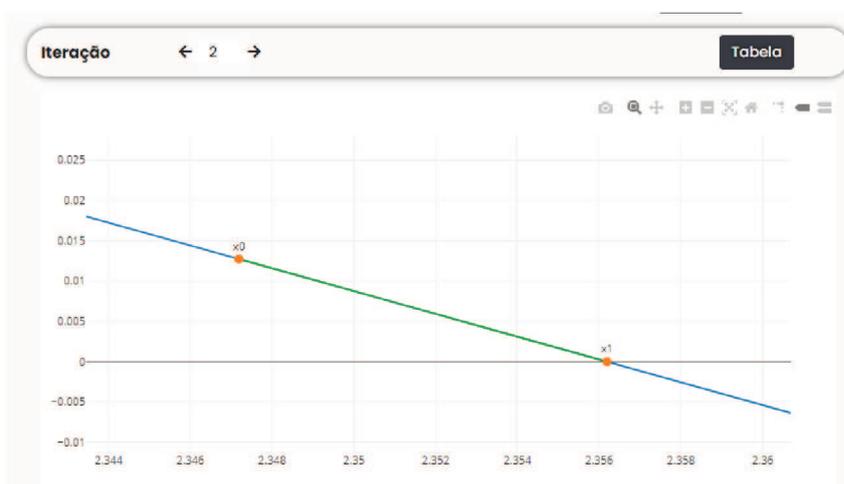


Figura 32 – Gráfico do Método de Newton no problema 1 na iteração 2 alterando o zoom

### 4.2.2 Problema 2



Figura 33 – Parâmetros de entrada do Método de Newton no problema 2

Iteração	$x_0$	$x_1$	$ f(x_1) $	$ x_1 - x_0 $	$f(x_1)$	$f'(x_0)$	Opções
0	3,35	3,3530923165	0,0004698546	0,0030923165	0,0004698546	33,4865088134	Mostrar Gráfico
1	3,3530923165	3,3530783865	2e-9	0,00001393	2e-9	33,7296805258	Mostrar Gráfico

Figura 34 – Tabela do Método de Newton no problema 2

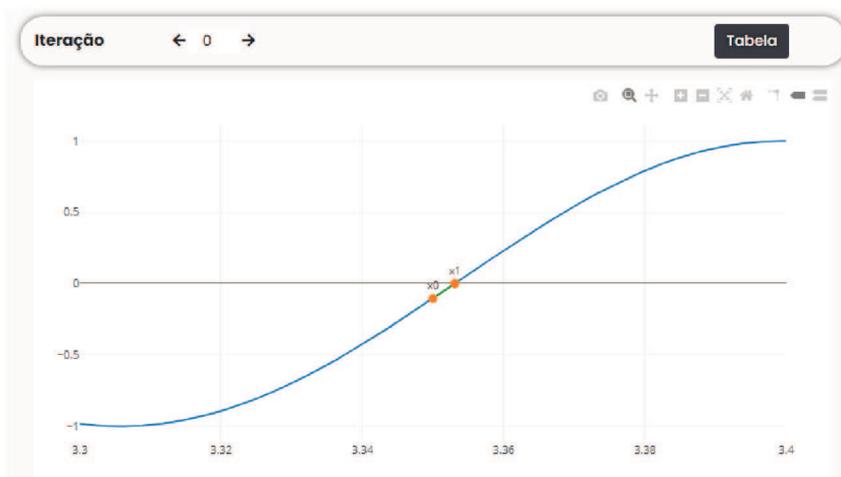


Figura 35 – Gráfico do Método de Newton no problema 2 na iteração 0

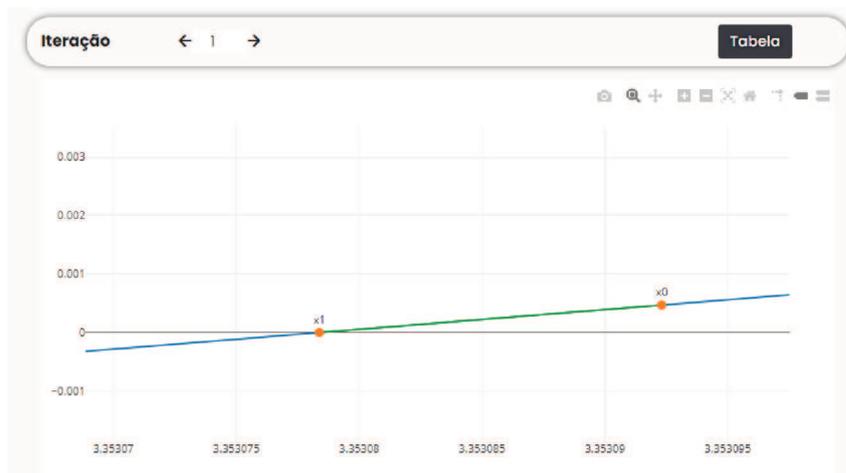


Figura 36 – Gráfico do Método de Newton no problema 2 na iteração 1

### 4.3 Método das Secantes

#### 4.3.1 Problema 1



Figura 37 – Parâmetros de entrada do Método das Secantes no problema 1

Iteração	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\frac{x_2 - x_1}{x_2}$	Opções
0	0	3	1.622611	1	-0.848872	0.946866	0.848872	Mostrar Gráfico
1	3	1.622611	2.348888	-0.848872	0.946866	0.010333	0.3092	Mostrar Gráfico
2	1.622611	2.348888	2.356901	0.946866	0.010333	-0.000999	0.0034	Mostrar Gráfico
3	2.348888	2.356901	2.356194	0.010333	-0.000999	0.000001	0.0003	Mostrar Gráfico
4	2.356901	2.356194	2.356194	-0.000999	0.000001	0.000001	0	Mostrar Gráfico

Figura 38 – Tabela do Método das Secantes no problema 1

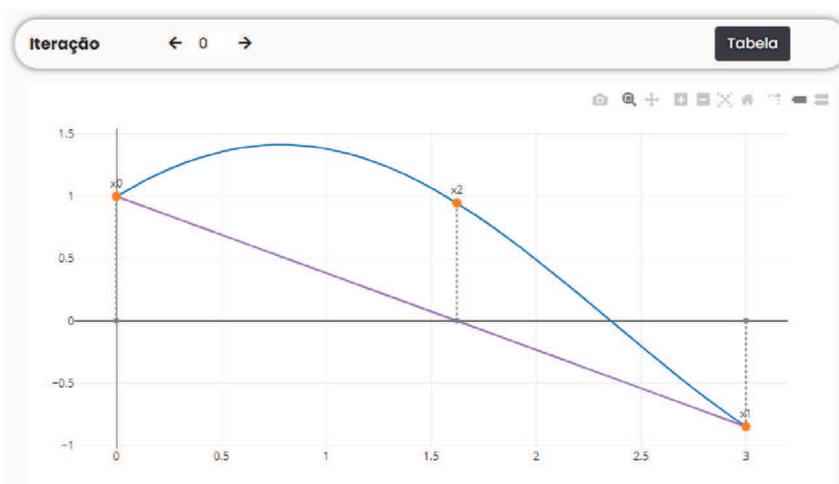


Figura 39 – Gráfico do Método das Secantes no problema 1 na iteração 0

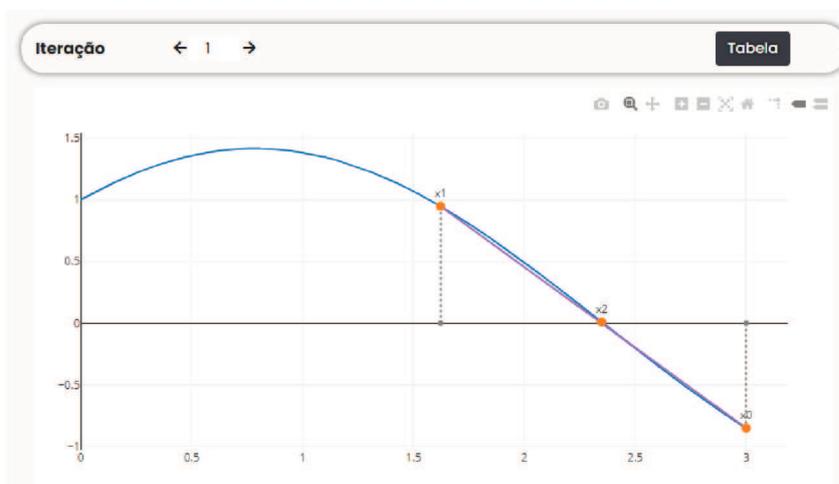


Figura 40 – Gráfico do Método das Secantes no problema 1 na iteração 1

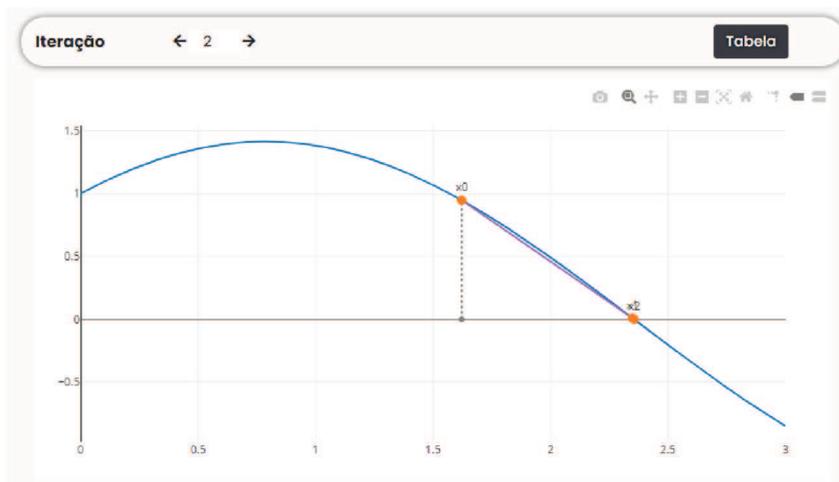


Figura 41 – Gráfico do Método das Secantes no problema 1 na iteração 2

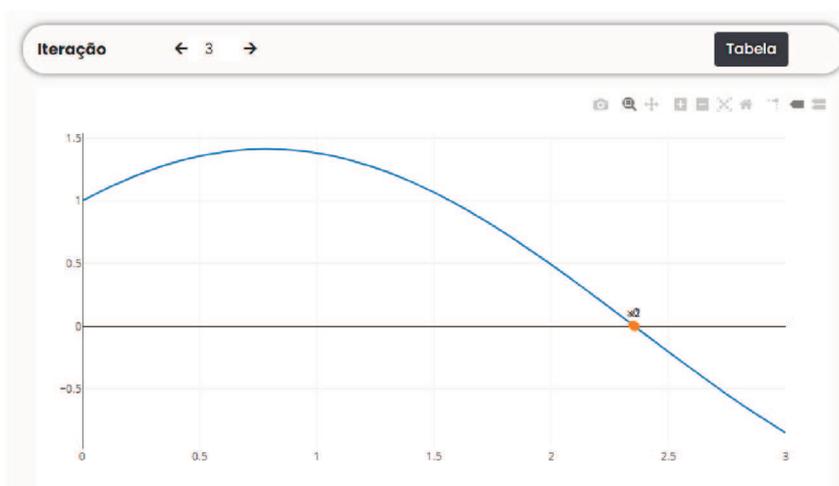


Figura 42 – Gráfico do Método das Secantes no problema 1 na iteração 3

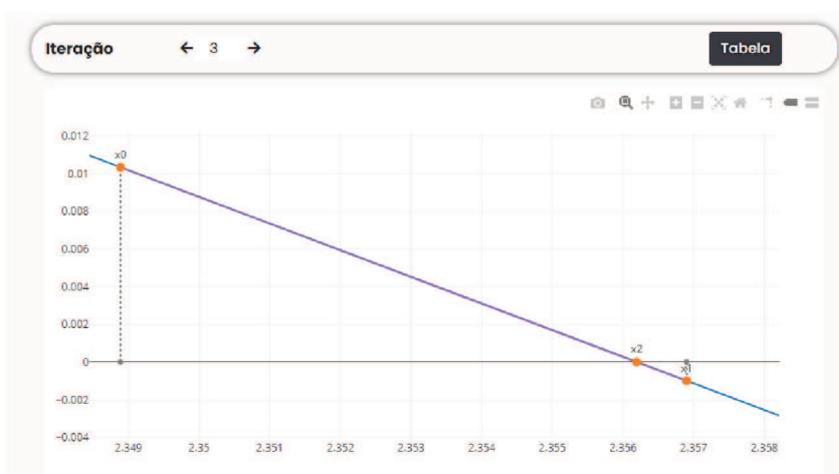


Figura 43 – Gráfico do Método das Secantes no problema 1 na iteração 3 alterando o zoom

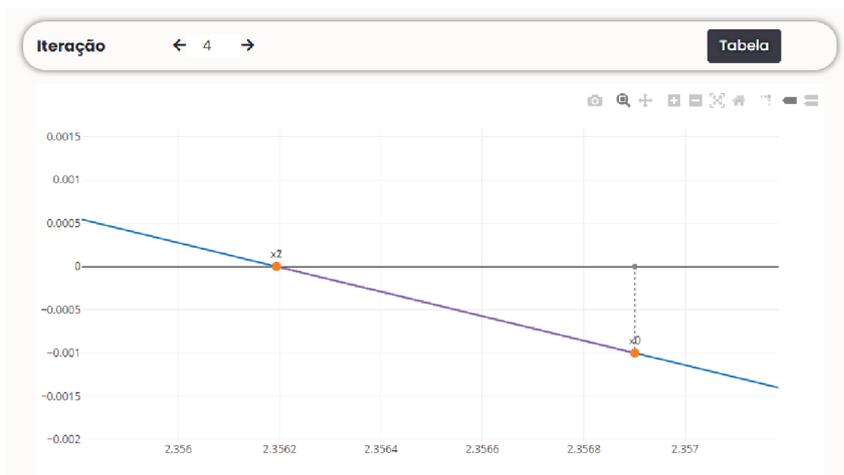


Figura 44 – Gráfico do Método das Secantes no problema 1 na iteração 4

### 4.3.2 Problema 2



Figura 45 – Parâmetros de entrada do Método das Secantes no problema 2

Iteração	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\frac{x_2 - x_1}{x_2}$
0	3.3	3.4	3.3495542039	-0.9817549385	0.9994189298	-0.1184648338	0.0150604507
1	3.4	3.3495542039	3.3549000664	0.9994189298	-0.1184648338	0.0614388488	0.0015934491
2	3.3495542039	3.3549000664	3.3530744026	-0.1184648338	0.0614388488	-0.0001343724	0.0005444746
3	3.3549000664	3.3530744026	3.3530783868	0.0614388488	-0.0001343724	1.22e-8	0.0000011882
4	3.3530744026	3.3530783868	3.3530783864	-0.0001343724	1.22e-8	-1.3e-9	1e-10

Figura 46 – Tabela do Método das Secantes no problema 2

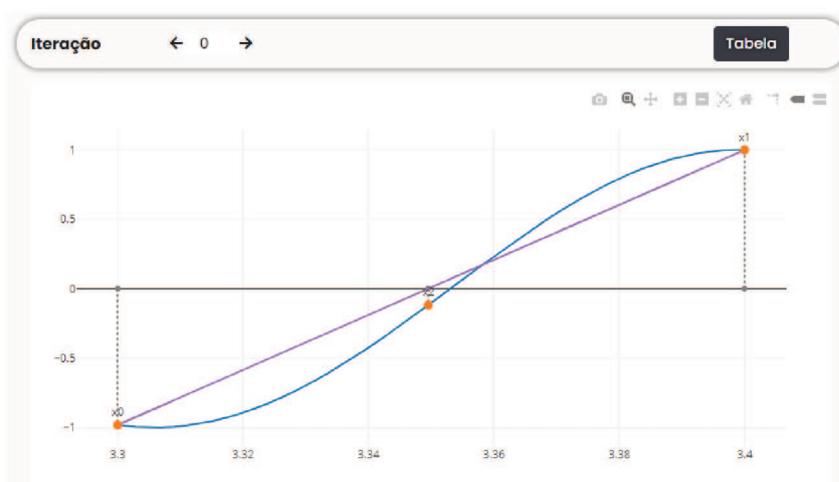


Figura 47 – Gráfico do Método das Secantes no problema 2 na iteração 0

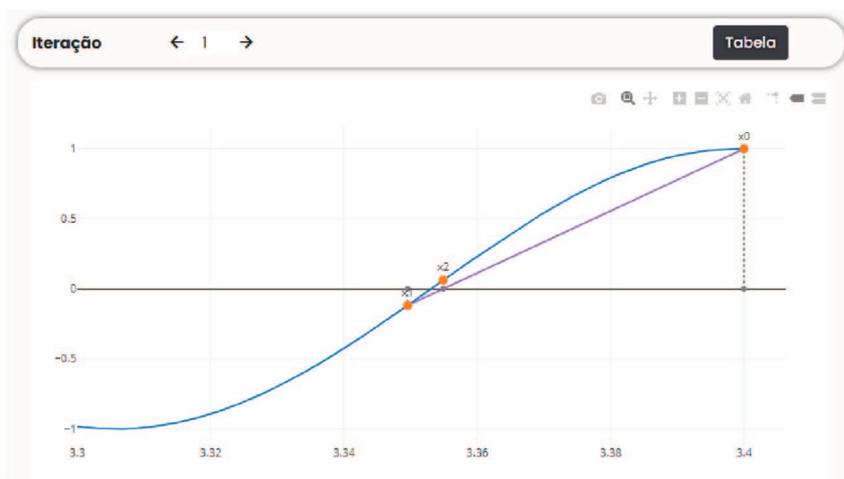


Figura 48 – Gráfico do Método das Secantes no problema 2 na iteração 1

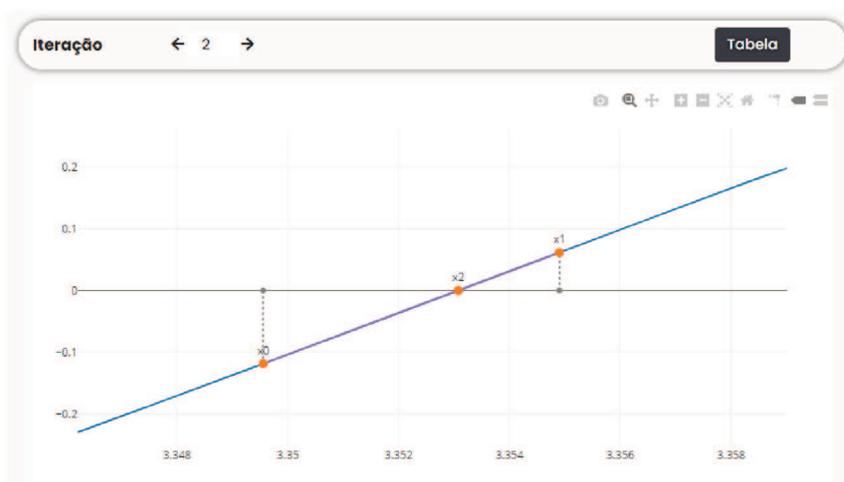


Figura 49 – Gráfico do Método das Secantes no problema 2 na iteração 2

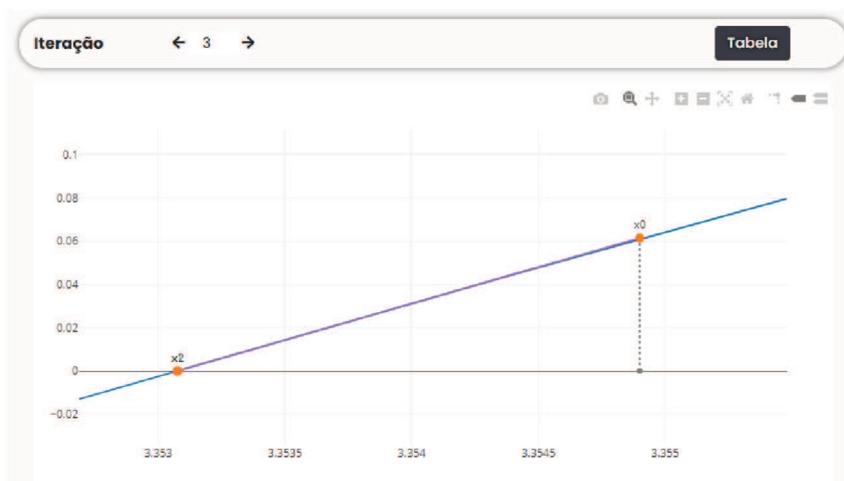


Figura 50 – Gráfico do Método das Secantes no problema 2 na iteração 3

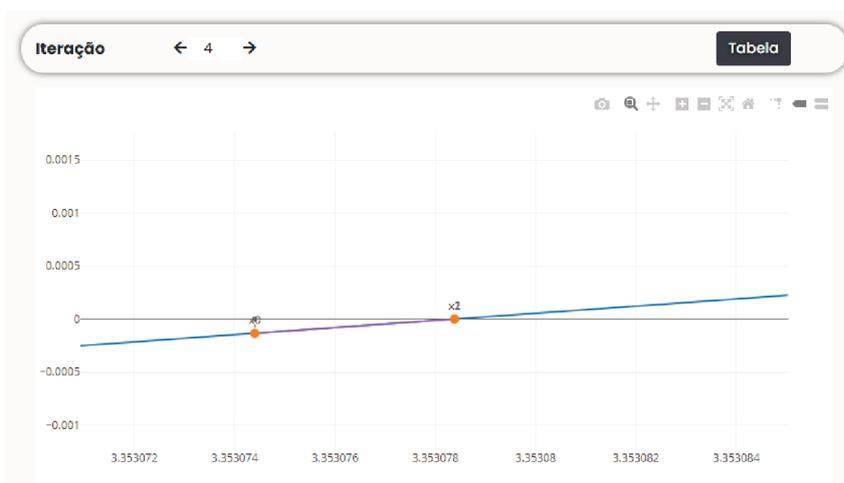


Figura 51 – Gráfico do Método das Secantes no problema 2 na iteração 4

## 4.4 Método da Falsa Posição

### 4.4.1 Problema 1



Figura 52 – Parâmetros de entrada do Método da Falsa Posição no problema 1

Iteração	$a$	$c$	$b$	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	$\frac{c-a}{c}$	$\frac{c-b}{c}$	$f(c)$	Opções
0	0	1.622611	3	+	+	-	1	0.848872	0.946866	Mostrar Gráfico
1	1.622611	2.348888	3	+	+	-	0.3092	0.2772	0.010333	Mostrar Gráfico
2	2.348888	2.356718	3	+	-	-	0.003322	0.272957	-0.00074	Mostrar Gráfico
3	2.348888	2.356194	2.356718	+	+	-	0.003101	0.000222	0.000001	Mostrar Gráfico
4	2.356194	2.356194	2.356718	+	+	-	0	0.000222	0.000001	Mostrar Gráfico

Figura 53 – Tabela do Método da Falsa Posição no problema 1

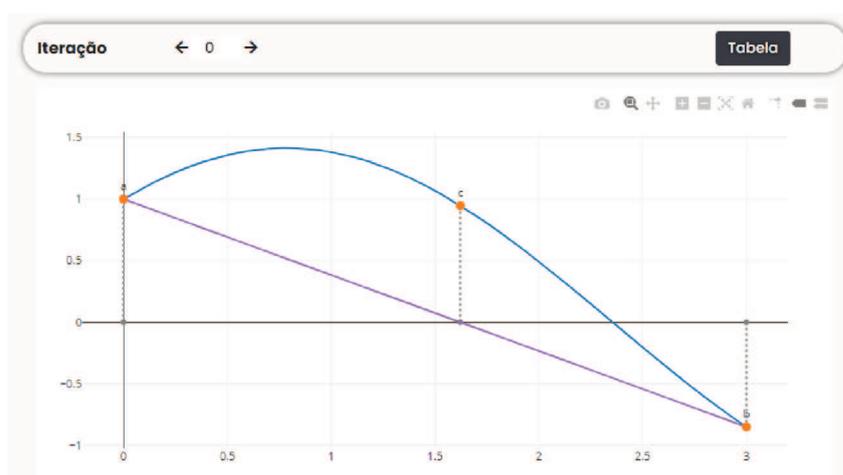


Figura 54 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 1 na iteração 0

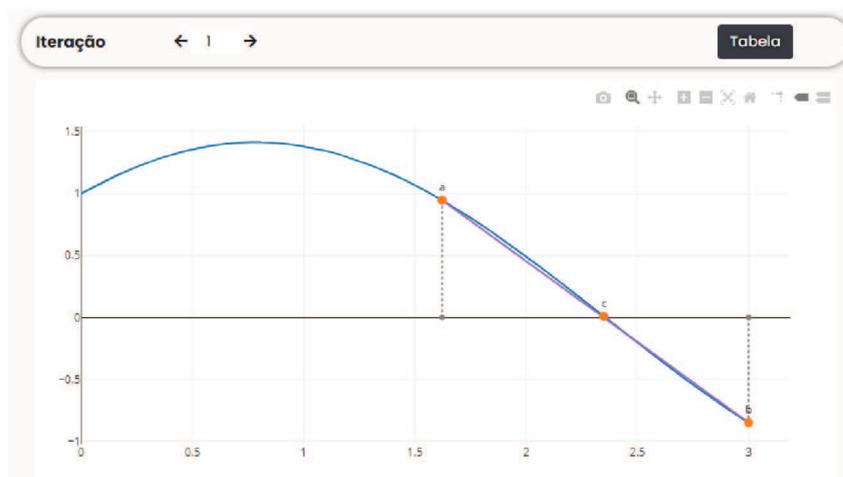


Figura 55 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 1 na iteração 1

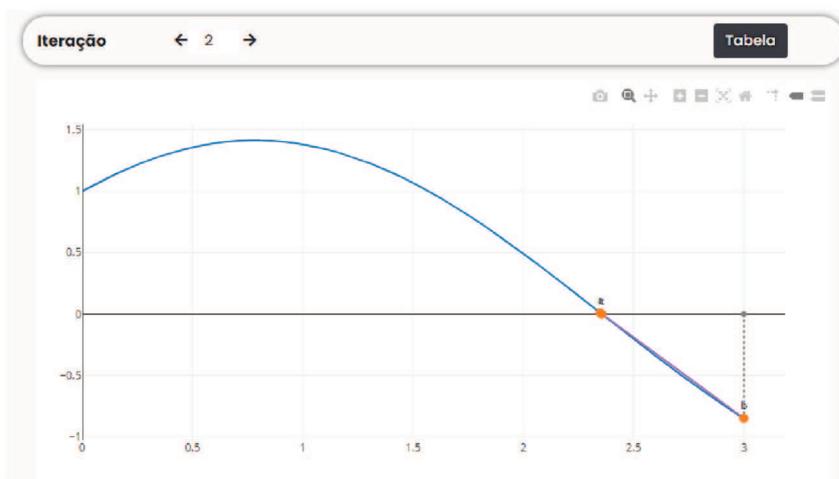


Figura 56 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 1 na iteração 2

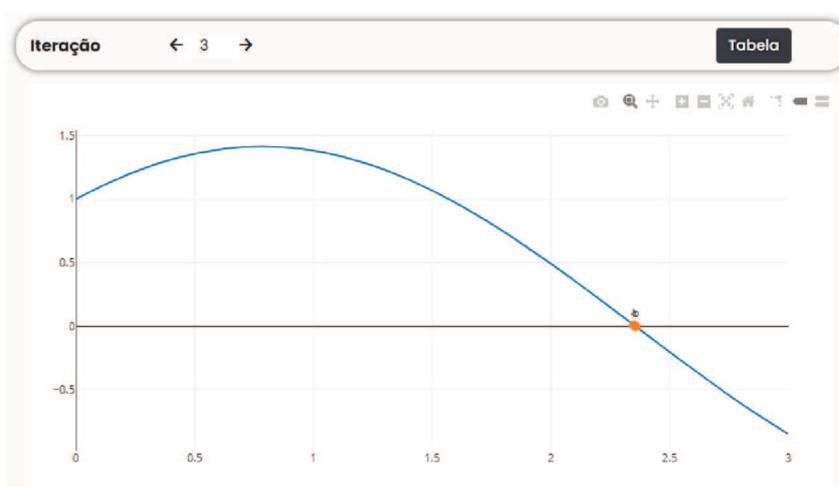


Figura 57 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 1 na iteração 3

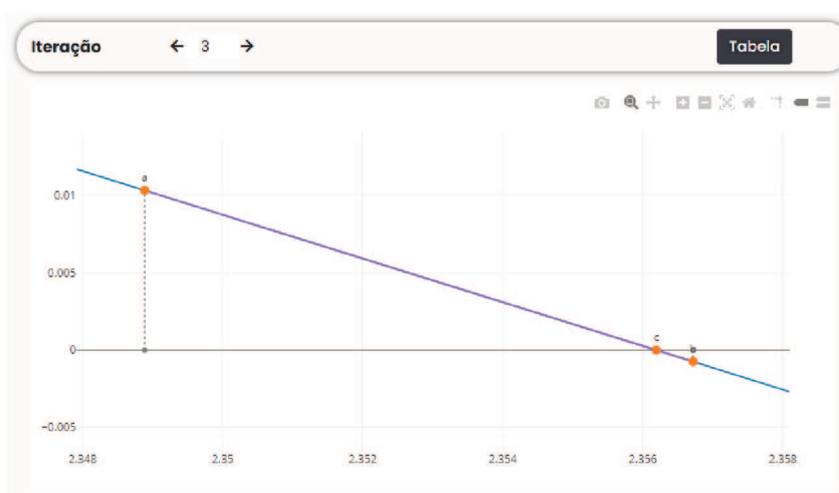


Figura 58 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 1 na iteração 3 alterando o zoom

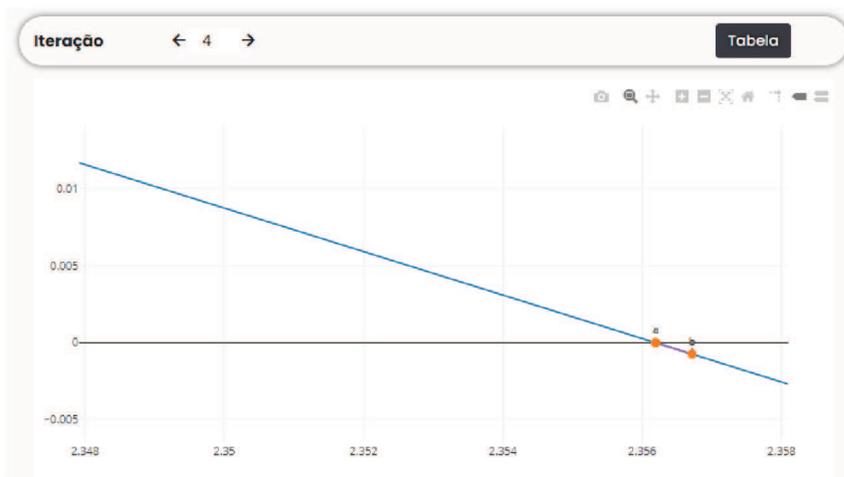


Figura 59 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 1 na iteração 4

### 4.4.2 Problema 2

**Zero de Funções**  
Passo a Passo

Análise do Gráfico

Método da Bissecção

Método de Newton

**Método da Falsa Posição**

Método das Secantes

[GitHub do projeto](#)

☰
Método da Falsa Posição
?

**f(x)=**  ?

**Intervalo do Gráfico** [  ,  ]

**Função**

**Intervalo Inicial do Método** [  ,  ]

**Tolerância de Erro**

**Precisão**  casas decimais **Calcular**

Figura 60 – Parâmetros de entrada do Método da Falsa Posição no problema 2

Iteração	$a$	$c$	$b$	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	$\frac{c-a}{c}$	$\frac{c-b}{c}$	$f(c)$
0	3.3	3.3495542039	3.4	-	-	+	0.0147942684	0.0150604507	-0.1184648338
1	3.3495542039	3.3549000664	3.4	-	+	+	0.0015934491	0.0134430036	0.0614388488
2	3.3495542039	3.3530744026	3.3549000664	-	-	+	0.0010498421	0.0005444746	-0.0001343724
3	3.3530744026	3.3530783868	3.3549000664	-	+	+	0.0000011882	0.0005432857	1.22e-8
4	3.3530744026	3.3530783864	3.3530783868	-	-	+	0.0000011881	1e-10	-1.3e-9

Figura 61 – Tabela do Método da Falsa Posição no problema 2

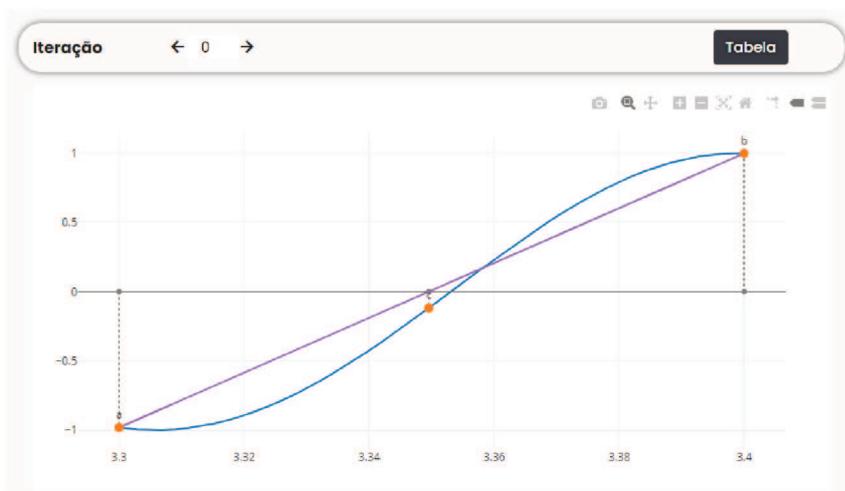


Figura 62 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 2 na iteração 0

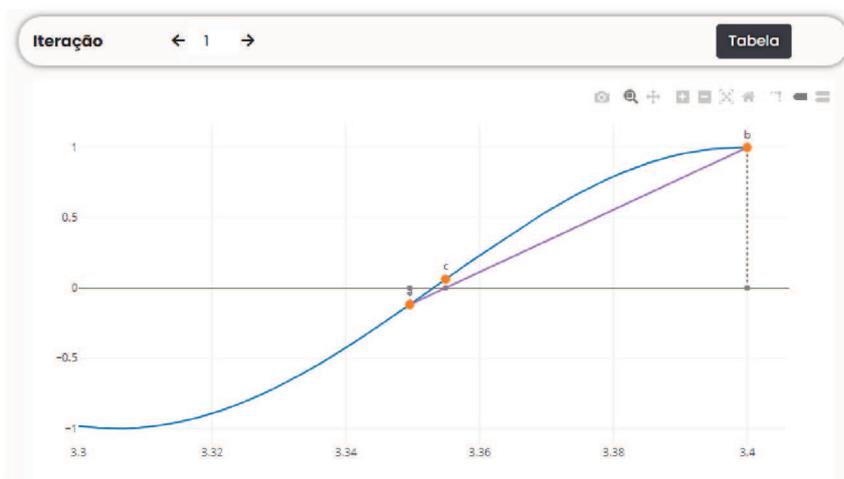


Figura 63 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 2 na iteração 1

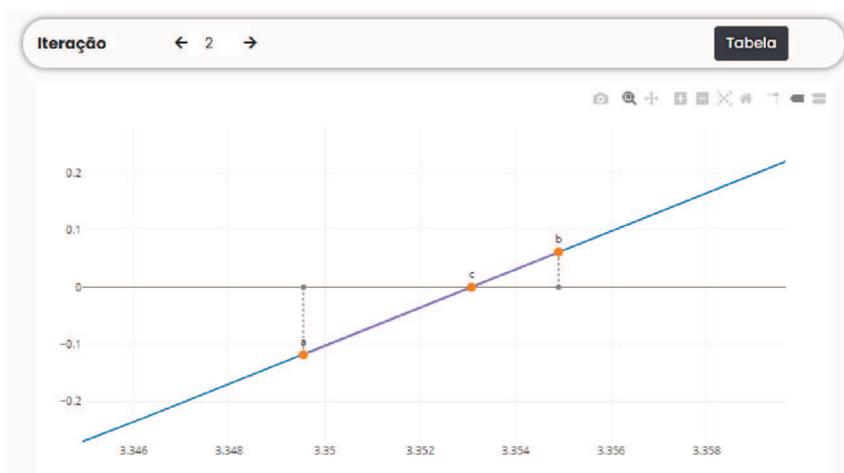


Figura 64 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 2 na iteração 2

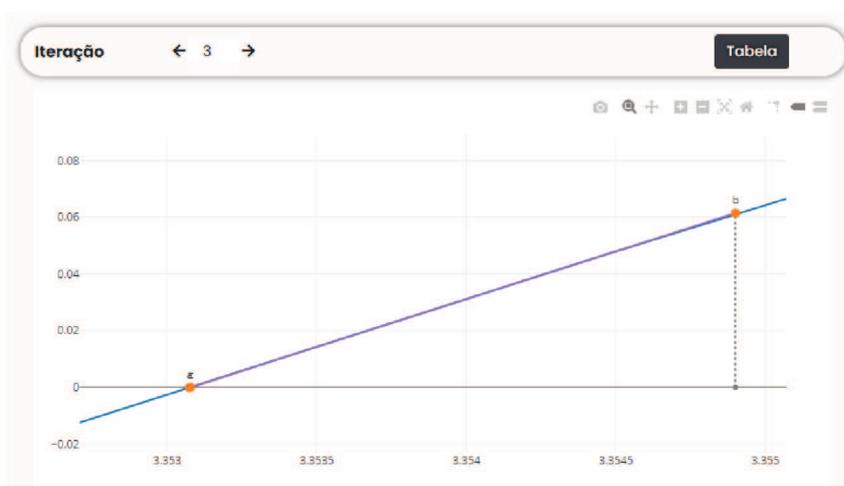


Figura 65 – Gráfico do Método da Falsa Posição no problema 2 na iteração 3

## 5 Conclusão

Os avanços dos recursos tecnológicos presentes hoje em dia possibilitaram a criação de meios educacionais no que tange ao processo de ensino e aprendizagem em várias áreas, sendo a área tecnológica uma das principais. Este Trabalho de Conclusão de Curso teve como objetivo o desenvolvimento de um sistema visando auxiliar o ensino de Cálculo Numérico ao fornecer uma ferramenta simples, visual, interativa e dinâmica para alunos e professores.

Para isto, foi criada uma aplicação web por meio da utilização das ferramentas HTML5, CSS3, JavaScript, Bootstrap4, MathJS e Plot.ly. Inicialmente foi realizado o levantamento de requisitos do sistema e a partir disso, foram selecionados alguns métodos de resolução numérica a serem implementados, a saber, Método da Bissecção, Método de Newton, Método das Secantes e Método da Falsa Posição. Ao implementar cada método, foram criadas ferramentas para apresentar as aproximações dos resultados de cada etapa dos métodos em formatos de tabela e gráficos.

Sendo a geometria um elemento crucial no processo de ensino-aprendizagem de cálculo diferencial e integral, o fato do programa implementado permitir o acompanhamento gráfico das aproximações geradas pelos métodos é bastante relevante para o cálculo numérico no que tange ao estudo do comportamento das funções. Ressalta-se que a elaboração de gráficos para cada etapa dos métodos de resolução numérica implementados representa um diferencial do presente trabalho em relação aos demais softwares.

Os resultados do desenvolvimento do software foram apresentados por meio de capturas de tela do mesmo durante a solução de problemas. Dois problemas de teste foram utilizados para ilustrar as capacidades do código implementado (ver Figuras 10 e 11). Em cada um dos métodos, foram apresentados os parâmetros de entrada de cada um dos problemas assim como as tabelas com aproximações dos resultados gerados pelos métodos e os gráficos gerados em cada iteração.

O software fornece uma interface amigável ao usuário, permitindo que o mesmo coloque qualquer função que considere interessante ao estudo e analise suas características em cada um dos métodos implementados. Além disso, o detalhamento fornecido por meio dos gráficos e tabelas contribui para a compreensão do conteúdo; bem como das particularidades de cada um dos métodos.

Ademais, o fato desta aplicação web ser disponibilizada gratuitamente de forma online não apenas facilita o trabalho de professores e estudantes, mas amplia o acesso ao conhecimento. Apesar de estarem disponíveis no mercado softwares como Excel, Maple e Mathematica, estes são em sua maioria pagos e de difícil entendimento, principalmente

quando usados por não especialistas na área de computação (DJAMILA, 2017).

Ao final, o código da aplicação foi disponibilizado para a comunidade, permitindo que sejam desenvolvidas outras aplicações voltadas ao ensino em geral ou especificamente ao cálculo numérico, e também que colaboradores ao redor do mundo contribuam para este projeto e futuros trabalhos possam ser desenvolvidos em cima deste.

O processo de elaboração do software foi desafiador em alguns momentos. Além da dificuldade de implementar todo o sistema em uma única página que não dependa de um servidor, enfrentou-se também o desafio de gerar os dados necessários para a elaboração dos gráficos. Apesar desses desafios, o software desenvolvido no presente trabalho, no que tange ao cálculo numérico e, em específico, ao estudo de métodos de resolução numérica para busca de zero de funções, apresenta o potencial de auxiliar os estudantes da área matemática e tecnológica no entendimento dos aspectos teóricos e práticos das técnicas numéricas estudadas e implementados no desenvolvimento deste trabalho.

## 5.1 Trabalhos Futuros

Ainda há espaço para melhorias no software, o que poderia ser o foco de trabalhos futuros. Estes poderiam trabalhar temas diversos, como: melhorar o sistema atual ao adicionar mais opções de critério de parada para os métodos implementados e permitir ao usuário escolher quais deles usar durante a execução dos métodos; implementar mais métodos numéricos de zero de funções; desenvolver uma forma de comparar os métodos implementados; e abordar outros tópicos de cálculo numérico. Acrescenta-se que, além de melhorias no software, também há espaço para avaliar a efetividade da adoção da ferramenta em cursos de cálculo numérico.

# Referências

- ALMEIDA, C. G. d. Cálculo numérico. UFU, p. iv, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 11, 14, 15, 17 e 18.
- BOOTSTRAP. *About Bootstrap*. 2021. Disponível em: <<https://getbootstrap.com/docs/5.1/about/overview/>>. Acesso em: 11 jun. 2021. Citado na página 27.
- BUFFONI, S. S. d. O. Apostila de introdução aos métodos numéricos - parte i. *Universidade Federal Fluminense*, 2002. Citado na página 11.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical analysis 8th ed.* [S.l.: s.n.], 2005. Citado na página 25.
- CARABALLO, A.; TENORIO, A. Teaching numerical methods for non-linear equations with geogebra-based activities. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, v. 10, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia-7ª Edição*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2016. 3-7 p. Citado na página 11.
- COSTA, P. T.; SILVA, L. S. Métodos numéricos para zeros de funções. 2009. Citado 6 vezes nas páginas 14, 15, 17, 18, 19 e 20.
- DJAMILA, H. Excel spreadsheet in teaching numerical methods. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 890, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 12, 22 e 56.
- FRANCO, N. B. *Cálculo numérico*. [S.l.]: Pearson, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 19, 20 e 25.
- GURGEL, F. A. A. et al. Aplicação web para ensino de resolução gráfica em disciplinas de pesquisa operacional. Universidade Federal de Uberlândia, 2018. Citado na página 23.
- HASSAN, A. E. *Non Functional Requirements (NFR) and Quality Attributes*. 2009. Disponível em: <[https://research.cs.queensu.ca/home/ahmed/home/teaching/CISC322/F18/slides/CISC322\\_02\\_Requirements.pdf](https://research.cs.queensu.ca/home/ahmed/home/teaching/CISC322/F18/slides/CISC322_02_Requirements.pdf)>. Acesso em: 11 jun. 2021. Citado na página 25.
- MATEMÁTICA, F. de. *Ficha de Componente Curricular - Cálculo Numérico*. 2021. Disponível em: <[http://www.famat.ufu.br/system/files/conteudo/ma\\_fd\\_mat12.pdf](http://www.famat.ufu.br/system/files/conteudo/ma_fd_mat12.pdf)>. Acesso em: 11 jun. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 25.
- MATHJAX. *MathJax | Beautiful and accessible math in all browsers*. 2021. Disponível em: <<https://www.mathjax.org/#about>>. Acesso em: 11 jun. 2021. Citado na página 27.
- MATH.JS. *math.js | an extensive math library for JavaScript and Node.js*. 2021. Disponível em: <<https://mathjs.org/>>. Acesso em: 11 jun. 2021. Citado na página 27.

PLOT.LY. *Plotly JavaScript Graphing Library*. 2021. Disponível em: <<https://plotly.com/javascript/>>. Acesso em: 11 jun. 2021. Citado na página 28.

SANTANA, A. A. *Identificação de parâmetros em problemas de advecção-difusão combinando a técnica do operador adjunto e métodos de volumes finitos de alta ordem*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2007. Citado na página 11.

SYMBOLAB. *What we do*. 2021. Disponível em: <<https://pt.symbolab.com/about>>. Acesso em: 11 jun. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 22.

WOLFRAM ALPHA. *Step-by-Step Solutions*. 2021. Disponível em: <<https://www.wolframalpha.com/tour/>>. Acesso em: 11 jun. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 22.