



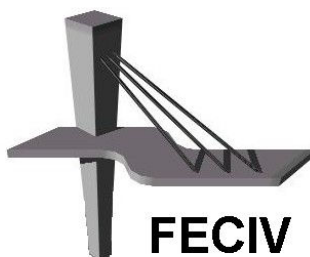
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**CONSIDERAÇÃO DO COMPORTAMENTO NÃO  
LINEAR DAS ALMOFADAS ELASTOMÉRICAS  
NO TOMBAMENTO DE VIGAS PRÉ-MOLDADAS**

**LETHICIA OLIVEIRA COSTA**

**UBERLÂNDIA, 25 DE AGOSTO DE 2021.**



**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**  
**Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**



Lethicia Oliveira Costa

## **CONSIDERAÇÃO DO COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DAS ALMOFADAS ELASTOMÉRICAS NO TOMBAMENTO DE VIGAS PRÉ-MOLDADAS**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Civil**.

**Orientadora: Profa. Dra. Maria Cristina Vidigal de Lima**

**Co-orientador: Dr. Pablo Augusto Krah**

Uberlândia, 25 de agosto de 2021.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

C837c  
2021      Costa, Lethicia Oliveira, 1995-  
            Consideração do comportamento não linear das almofadas  
            elastoméricas no tombamento de vigas pré-moldadas [recurso eletrônico]  
            / Lethicia Oliveira Costa. - 2021.

Orientador: Maria Cristina Vidigal de Lima.

Coorientador: Pablo Augusto Krahll.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.5585>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Engenharia civil. I. Lima, Maria Cristina Vidigal de, 1970-,  
(Orient.). II. Krahll, Pablo Augusto, 1988-, (Coorient.). III. Universidade  
Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.  
IV. Título.

---

CDU: 624

Glória Aparecida  
Bibliotecária - CRB-6/2047



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Civil				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 264, PPGE				
Data:	25 de agosto de 2021	Hora de início:	14:00 h	Hora de encerramento:	17:15 h
Matrícula do Discente:	11912ECV025				
Nome do Discente:	Lethicia Oliveira Costa				
Título do Trabalho:	Consideração do comportamento não linear das almofadas elastoméricas no tombamento de vigas pré-moldadas				
Área de concentração:	Estruturas e Construção civil				
Linha de pesquisa:	Estruturas				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Estudo analítico e numérico do comportamento de vigas pré-moldadas de concreto durante as fases transitórias considerando o efeito das imperfeições geométricas				

Reuniu-se, em sessão pública pela plataforma Conferência Web (MConf) provida pela Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, assim composta pelos Professores Doutores: Henrique Machado Kroetz – CEM/UFPR, Vanessa Cristina de Castilho – FECIV/UFU e Maria Cristina Vidigal de Lima – FECIV/UFU orientadora da candidata.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Maria Cristina Vidigal de Lima, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

#### Aprovada

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Maria Cristina Vidigal de Lima, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/08/2021, às 17:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Vanessa Cristina de Castilho, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/08/2021, às 17:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Henrique Machado Kroetz, Usuário Externo**, em 31/08/2021, às 02:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2936182** e o código CRC **6A23538D**.



Ao meu pai e à minha mãe, com amor e gratidão.

À minha avó Hilda, te levarei comigo  
em meu coração por onde eu for.

# Agradecimentos

---

Aos meus pais Ulcimar e Andréa, por tanto amor, por estarem presentes em todos os momentos da minha vida, por sonharem comigo e por todo o apoio físico e emocional. Meus exemplos de amor, persistência e força.

Ao meu irmão Arthur, pelo carinho e cuidado.

À Maria Cristina e ao Pablo, pela prestatividade e ajuda, por terem dividido comigo suas experiências e conhecimento, por terem tornado o mestrado mais leve, por se tornarem meus exemplos de profissionalismo e por me fazerem apaixonar ainda mais pela Engenharia Civil e pela carreira acadêmica. Minha eterna gratidão.

A todos aqueles que contribuíram de alguma forma com este trabalho.

À Deus, pela vida, por sempre estar ao meu lado e por todas as oportunidades que me permitiram chegar até aqui.

## Resumo

---

Com os avanços na tecnologia do concreto vigas pré-moldadas podem ser dimensionadas com vãos muito longos e seções cada vez mais esbeltas. Consequentemente, essas vigas apresentam baixa rigidez à flexão lateral, ficando propensas à instabilidade lateral na fase de montagem. Além disso, alguns fatores como excentricidade lateral inicial, rotação inicial, contraflecha devido a força de protensão e condições dos apoios tornam o problema de instabilidade lateral mais crítico. Com isso, este trabalho tem o intuito de avaliar a influência da não linearidade de contato entre viga e apoio na instabilidade lateral de vigas pré-moldadas apoiadas em almofadas elastoméricas, ainda em fase de montagem. Para isso, através de métodos energéticos, são definidas equações de equilíbrio que consideram, simultaneamente, a não linearidade geométrica das vigas e a não linearidade de contato entre viga e apoio, a partir das quais é possível determinar a carga limite e prever as condições de segurança das vigas quanto à instabilidade. Por meio das equações de equilíbrio são avaliadas as capacidades de carga de uma viga BT-54 e de uma viga de Concreto de Ultra Alto Desempenho (UHPC) de 91,4 m. Além disso, são realizadas simulações de Monte Carlo com o intuito de avaliar a influência de parâmetros como excentricidade lateral, resistência do concreto, força de protensão e rigidez à rotação do apoio. Ao comparar as soluções propostas neste trabalho com equações que consideram a rigidez linear da mola, verificou-se redução na carga limite de até 84%, devido à consideração da perda de contato entre viga e apoio (*lift-off*), evidenciando a importância da consideração da não linearidade de contato nas previsões de estabilidade. Em relação à viga de UHPC analisada, foi constatada alta sensibilidade para a instabilidade lateral, com razão entre a carga máxima e peso próprio de até 1,08, quando a recomendação técnica é superior a 4. Tal condição pode ser melhorada com a adoção de apoios que possam absorver tração na interação viga-apoio, como por exemplo, almofadas com aderência ou uso de chumbadores. Por fim, quanto às análises paramétricas, tem-se que o aumento da excentricidade lateral, a redução da resistência do concreto, o aumento da força de protensão e a redução da rigidez à rotação do apoio têm como consequência a redução da carga limite e o aumento da probabilidade de falha, sendo a resistência do concreto um parâmetro crítico quanto à instabilidade, apresentando probabilidade de falha igual a 0,37 quando a resistência é igual a 120 MPa, sendo o recomendado igual ou menor que  $10^{-4}$ .

**Palavras-chaves:** Vigas pré-moldadas; instabilidade lateral; almofadas elastoméricas; não linearidade de contato.

## Abstract

---

With advances in concrete technology, precast beams can be dimensioned with very long spans and increasingly slender sections. Consequently, these beams have low lateral bending stiffness, being prone to lateral instability in the assembly phase. In addition, some factors such as initial sweep, initial rotation, camber due to prestressing force and support conditions make the problem of lateral instability more critical. This work aims to evaluate the influence of the non-linearity of contact between beam and pad on the lateral instability of precast beams supported by elastomeric pads, still in the assembly phase. For this, through energy methods, equilibrium equations are defined that simultaneously consider the geometric nonlinearity of the beams and the nonlinearity of contact between beam and support, from which it is possible to determine the limit load and predict beam safety regarding lateral instability. Through the equilibrium equations, the load capacities of a BT-54 beam and a 91.4 m UHPC beam are evaluated. In addition, Monte Carlo simulations are carried out in order to evaluate the influence of parameters such as initial sweep, concrete strength, prestressing force and rotational stiffness of the support. When comparing the solutions proposed in this work with equations that consider the linear stiffness of the spring, there was a reduction in the limit load of up to 84%, due to the consideration of the loss of contact between beam and pad (lift-off), highlighting the importance of considering contact nonlinearity in stability predictions. Regarding the analyzed Ultra High Performance Concrete (UHPC) beam, high sensitivity was found for lateral instability, with a ratio between maximum load and self-weight of up to 1.08, when the technical recommendation is greater than 4. This condition can be improved with the adoption of pads that can absorb tensile stress in the beam-pad interaction, such as pads with adhesion or the use of anchor bolts. Finally, as for parametric analysis, the increase in the initial sweep, the reduction in concrete strength, the increase in prestressing force and the reduction in the rotational stiffness of the support leads to a reduction in the limit load and the increase in the probability of failure, with the concrete strength being a critical parameter for instability, with a probability of failure equal to 0.37% when the strength is equal to 120 MPa, the recommended being equal to or less than 10-4.

**Keywords:** Precast beams; lateral instability; elastomeric pads; non-linearity of contact.

## LISTA DE SÍMBOLOS

Esta lista corresponde aos capítulos 3, 4, 5 e 6 da dissertação correspondentes às equações propostas ou utilizadas nas análises do presente trabalho. Vale destacar que não foi elaborada lista de símbolos para o capítulo de revisão, pois foram mantidas as simbologias de cada autor, que não são uniformes.

$d_{0,CM}$ : distância entre o centro de massa e o centroide da seção da viga nos apoios;

$e_p$ : excentricidade da força de protensão;

$E$ : módulo de elasticidade do concreto;

$E_{pad}$ : módulo de compressão efetivo da almofada;

$f_{ck}$ : resistência à compressão do concreto;

$F$ : força de protensão;

$g$ : peso próprio da viga ( $g$ );

$G$ : módulo de cisalhamento do elastômero;

$h$ : rigidez do segundo trecho da curva bilinear ‘momento  $\times$  rotação’;

$h_e$ : espessura da camada externa da almofada de apoio;

$h_i$ : espessura da camada interna da almofada de apoio;

$H$ : altura da almofada de apoio;

$I_x$ : momento de inércia em relação ao eixo  $x$ ;

$I_y$ : momento de inércia em relação ao eixo  $y$ ;

$k_\varphi$ : coeficiente de rigidez ao giro do elastômero;

$\ell$ : comprimento da viga;

$L$ : maior dimensão horizontal da almofada de apoio, transversal à viga;

$M$ : é a função que descreve o momento aplicado na almofada de apoio;

$M_{crit}$ : momento crítico;

$n$ : representa o modo de flambagem;

$n_e$ : número camadas externas da almofada de apoio;

$n_i$ : número camadas internas da almofada de apoio;

$N_f$ : quantidade de falhas;

$N_t$ : quantidade total de simulações;

$P$ : carga referente ao peso próprio da viga, concentrada no centro de massa da mesma (exceto para a Equação 2.36 de Krah, Lima e Siqueira (2020) utilizada nos capítulos 3, 4, 5 e 6, em que  $P$  é a carga axial aplicada na almofada referente ao peso próprio da viga, ou seja, a reação de apoio referente ao peso próprio da viga);

$P_f$ : probabilidade de falha;

$q$ : carga limite, equivalente à carga máxima para soluções não lineares;

$q_{crit}$ : carga crítica para o problema linear (viga perfeitamente reta);

$S$ : fator de forma ponderado da almofada de apoio;

$S_e$ : fator de forma das camadas externas da almofada de apoio;

$S_i$ : fator de forma das camadas internas da almofada de apoio;

$u_{0,CM}$ : componentes horizontal de  $d_{0,CM}$ ;

$u_{1,R0}(x)$ : representa a projeção horizontal da contraflecha de protensão após a rotação de corpo rígido;

$u_{CM,0}$ : componente horizontal de  $v_{CM,0}$ ;

$u_{CM,1}$ : posição do centro de massa da viga no tombamento;

$U$ : energia de deformação;

$v_{CM,0}$ : representa a posição do centro de gravidade da viga antes da rotação;

$V$ : trabalho das forças externas;

$W$ : menor dimensão horizontal da almofada de apoio;

$y_b$ : altura do centro de gravidade;

$\alpha_1$ : graus de liberdade;

$\delta$ : deslocamento vertical do centro de massa;

$\delta_0$ : contraflecha devido à força de protensão;

$\delta_{0,CM}$ : componente vertical de  $d_{0,CM}$ ;

$\delta_1$ : a distância entre o centroide na seção do apoio e o centro de massa da viga na posição final;

$\delta_F$ : deslocamento vertical do centro de massa provocado pela flexão lateral durante a rotação;

$\delta_R$ : deslocamento vertical do centro de massa devido a rotação de corpo rígido da viga;

$\Delta_0$ : distância entre o centroide na seção do apoio e o centro de massa da viga na posição inicial;

$\Delta k_\varphi$ : variação do coeficiente de rigidez ao giro do elastômero;

$\Delta h$ : variação rigidez do segundo trecho da curva ‘momento  $\times$  rotação’ bilinear;

$\lambda_0$ : excentricidade inicial;

$\mu$ : valor médio na distribuição Gaussiana;

$\sigma$ : desvio padrão;

$\sigma_s$ : tensões de compressão da almofada de apoio sob carga de serviço;

$\varphi$ : ângulo de rotação;

$\varphi_0$ : ângulo de rotação inicial;

$\varphi_{crit}$ : ângulo crítico de rotação do apoio;

$\Pi$ : funcional de energia do sistema.

# Sumário

---

<b>Capítulo 1 - Introdução.....</b>	<b>14</b>
1.1    Considerações iniciais.....	14
1.2    Objetivos .....	15
1.3    Justificativa.....	15
1.4    Organização do trabalho .....	17
<b>Capítulo 2 - Estado da arte .....</b>	<b>18</b>
2.1    Considerações iniciais.....	18
2.2    Estabilidade lateral .....	18
2.3    Estudos analíticos.....	21
2.4    Estudos numéricos .....	33
2.5    Estudos experimentais .....	41
<b>Capítulo 3 - Metodologia.....</b>	<b>49</b>
3.1    Considerações iniciais.....	49
3.2    Método de Rayleigh Ritz aplicado à instabilidade lateral de vigas pré-moldadas apoiadas em elastômeros.....	49
3.3    Análises paramétricas.....	54
<b>Capítulo 4 - Propostas Analíticas.....</b>	<b>61</b>
4.1    Desenvolvimento das equações de equilíbrio com a consideração do <i>lift-off</i> .....	61
4.1.1    Viga perfeitamente reta .....	61
4.1.2    Viga com excentricidade inicial .....	63
4.1.3    Viga com excentricidade e rotação inicial .....	64
4.1.4    Viga com contraflecha de protensão sem excentricidade e sem rotação inicial .....	66
4.1.5    Viga imperfeita com contraflecha de protensão, excentricidade lateral e rotação inicial .....	67
<b>Capítulo 5 - Resultados e análises .....</b>	<b>70</b>
5.1    Considerações iniciais.....	70
5.2    Estudo de Caso 1 .....	70
5.2.1    Viga perfeitamente reta .....	71
5.2.2    Viga com excentricidade inicial .....	72



5.2.3 Viga com excentricidade e rotação inicial .....	75
5.2.4 Viga com contraflecha de protensão apenas .....	76
5.2.5 Viga imperfeita.....	77
5.3 Estudo de Caso 2 .....	78
5.3.1 Resultados da viga UHPC .....	80
5.3.2 Sugestões para melhorar a capacidade de carga da viga UHPC.....	85
<b>Capítulo 6 - Simulações Paramétricas .....</b>	<b>90</b>
6.1 Considerações iniciais.....	90
6.2 Resultado dos dados base .....	90
6.3 Excentricidade Inicial.....	96
6.4 Resistência do concreto .....	103
6.5 Força de protensão.....	111
6.6 Coeficientes $k_{\phi}$ e $h$ .....	117
<b>Capítulo 7 - Conclusões.....</b>	<b>126</b>
7.1 Conclusão.....	126
7.2 Recomendações para trabalhos futuros.....	129
<b>Referências .....</b>	<b>131</b>
<b>Anexo A .....</b>	<b>135</b>

# Capítulo 1

## Introdução

---

### 1.1 Considerações iniciais

A necessidade de agilidade e praticidade nas construções faz com que elementos pré-moldados sejam cada vez mais utilizados. No entanto, estes elementos merecem devida atenção tanto nas fases de produção, transporte e montagem, quanto nas considerações de projeto. Um dos motivos para tal atenção é o problema de instabilidade lateral em vigas, assunto central deste trabalho.

A instabilidade lateral está presente em três fases críticas, transporte, içamento e montagem. Durante a montagem, quando as vigas já foram posicionadas sobre os apoios elastoméricos e ainda não foram contraventadas, a viga não tem todos os seus movimentos restritos, interferindo na estabilidade da mesma, podendo apresentar falha por tombamento com giro de corpo rígido, com tensões e deformações críticas.

Alguns fatores podem tornar a situação de instabilidade mais crítica, como por exemplo, a esbeltez da peça, resistência do concreto, comprimento da viga, imperfeições geométricas, condições de transporte, como descrito por Mast (1993), de içamento, analisado por Lima (2002) e Krahel (2014), condições de apoio, como escuridade e rigidez, além de ações laterais. Além disso, cabe destacar que, o aumento da utilização de concretos UHPC na construção viabiliza projetos de vigas longas e delgadas, resultando em condições críticas quanto à instabilidade.

Um dos fatores que mais influencia a instabilidade das vigas pré-moldadas sobre almofadas elastoméricas é a rigidez rotacional do elastômero. Consolazio e Hamilton (2012) testaram experimentalmente almofadas sob compressão axial combinada com uma rotação imposta para simular o tombamento da viga. A partir deste experimento, eles chegaram à conclusão que a perda de contato entre viga e almofada acontece com pequenas rotações, tornando a relação momento-rotação não linear, daí a importância de análises mais detalhadas considerando este problema na instabilidade de vigas.

Dito isso, este trabalho tem o intuito de apresentar estudos analíticos de vigas pré-moldadas apoiadas sobre almofadas elastoméricas, sujeitas a instabilidade lateral. As análises tem como objetivo avançar nas previsões e recomendações de segurança, levando em consideração a não linearidade de contato entre viga e elastômero.

## 1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal, analisar a influência da consideração da não linearidade de contato entre viga e almofada elastomérica nas previsões de instabilidade lateral de vigas pré-moldadas longas e esbeltas, apoiadas, ainda em fase transitória de montagem. Os objetivos específicos podem ser listados como:

- Propor uma solução simplificada para a consideração da não linearidade de contato entre viga e almofada;
- Avaliar a influência da não linearidade de contato entre viga e almofada no desenvolvimento de soluções analíticas para a carga de tombamento de vigas pré-moldadas longas e esbeltas;
- Avaliar a influência de parâmetros como, excentricidade lateral inicial, módulo de elasticidade do concreto, valor da força de protensão e rigidez do aparelho de apoio, na instabilidade lateral de vigas pré-moldadas apoiadas em elastômeros, com a consideração do *lift-off*, por meio de simulações de Monte Carlo.

## 1.3 Justificativa

Acidentes ocorridos devido à instabilidade lateral em vigas pré-moldadas apoiadas em elastômeros vem sendo retratados com frequência na literatura. O colapso da ponte *Souvenir Boulevard*, que segundo Tremblay e Mitchell (2006) ocorreu devido às condições inadequadas de apoio; o colapso de nove vigas pré-moldadas e protendidas durante a construção da *Red Mountain Freeway* no Arizona, Estados Unidos (Figura 1.1), causado por uma combinação crítica de alguns fatores como, excentricidade lateral inicial, deformação devido a variação termal, inclinação dos apoios e presença de vento em uma das vigas, provocando um efeito dominó nas demais (Oesterle *et al*; 2007), entre outros, como o acidente que ocorreu no ano de 2014, próximo de Uberlândia (MG), em que três vigas já posicionadas, tombaram durante a colocação da quarta viga em um

viaduto. Todos foram utilizados como justificativas da importância em entender e estudar os problemas que a instabilidade lateral de vigas pré-moldadas apoiadas, em fase transitória, pode causar. Tais acidentes levaram autores como, Cardoso (2017), Reis (2018) e Oliveira (2019), a desenvolverem análises paramétricas, numéricas e analíticas em torno de tal problema.

Figura 1.1 – Colapso de vigas no Arizona  
(a) (b)



Fonte: Oesterle *et al.* (2007)

Oliveira (2019) indica em seu trabalho, modelos analíticos para vigas pré-moldadas apoiadas em almofadas elastoméricas em situação transitória, quando as mesmas ainda não possuem ligações finalizadas. As soluções analíticas desenvolvidas têm como objetivo determinar um valor de carga distribuída limite que, quando aplicada causa o tombamento da viga. A autora considera em sua pesquisa uma relação linear para o coeficiente de rigidez ao giro do elastômero, ou seja, considera comportamento do elastômero até o momento do início da perda de contato (*lift-off*) em suas formulações.

No entanto, deve-se admitir a necessidade de considerar o comportamento não linear das almofadas de apoio nas soluções analíticas de previsão de carga crítica, considerando os efeitos da perda de contato do aparelho de apoio. Visto que, em análises experimentais sobre a rigidez rotacional dos apoios elastoméricos, Consolazio e Hamilton (2012) testaram almofadas sob compressão axial combinada com uma rotação imposta simulando o tombamento da viga. Os autores concluíram que a descolagem entre viga e apoio ocorre em pequenas rotações, o que torna não linear a relação momento aplicado-rotação.

Sendo assim, ressalta-se a importância em avançar nas pesquisas já existentes, a fim de entender e promover maior segurança nas verificações de instabilidade de vigas pré-moldadas apoiadas em elastômeros, uma vez que, durante as fases transitórias de transporte e montagem, a instabilidade ao tombamento é muito recorrente e merece a devida atenção.

#### **1.4 Organização do trabalho**

Este trabalho será apresentado da seguinte maneira:

- No Capítulo 1 é apresentada a introdução do tema, com alguns aspectos e considerações iniciais, os objetivos e a justificativa do trabalho, que mostram a necessidade de avanços na área;
- O Capítulo 2 traz uma revisão bibliográfica detalhada das pesquisas mais relevantes em torno do problema de instabilidade lateral em vigas pré-moldadas, com foco nas situações transitórias de transporte e montagem, onde as vigas encontram-se apoiadas em almofadas elastoméricas;
- No Capítulo 3 foram descritas as metodologias utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho;
- No Capítulo 4 são apresentadas as soluções analíticas propostas para análise de instabilidade;
- O Capítulo 5 são apresentados os resultados de uma viga padrão PCI BT-54, os quais são comparados com resultados que consideram a rigidez ao giro do elastômero linear. Além disso, são apresentados os resultados para uma viga protendida de UHPC com 91,4 m, juntamente com propostas para melhorar a capacidade de carga desse tipo de viga;
- No Capítulo 6 é feita uma análise paramétrica com base nas soluções propostas no Capítulo 4, aplicadas para a viga UHPC do Capítulo 5;
- Por fim, o Capítulo 7 apresenta as conclusões do trabalho.

# Capítulo 2

## Estado da arte

---

### 2.1 Considerações iniciais

Neste capítulo são apresentados os trabalhos de alguns autores que analisaram numericamente, analiticamente e experimentalmente o problema de instabilidade lateral em vigas pré-moldadas apoiadas em almofadas elastoméricas. Algumas destas análises tem o foco no comportamento do elastômero, visto que este parâmetro é de grande importância quando o assunto é instabilidade lateral de vigas pré-moldadas.

De acordo com Oliveira (2019), dentre os parâmetros módulo de elasticidade, resistência do concreto, seção transversal da viga, rigidez a rotação do apoio, força de protensão, rotação inicial e excentricidade inicial, a rigidez a rotação do apoio assim como a seção transversal são os fatores de maior influência na carga crítica de tombamento.

Apoios com elastômero vem sendo bastante utilizado em pontes de concreto devido à sua durabilidade, facilidade de utilização e baixo custo. No entanto, ainda há uma carência de equações empíricas e análises numéricas que consigam descrever de forma confiável o comportamento não linear deste material, o que é essencial na verificação de segurança da estabilidade de tombamento de vigas pré-moldadas.

Fica evidente que os avanços tecnológicos, melhoria dos materiais, estruturas mais eficientes, vãos cada vez mais longos e seções transversais cada vez mais esbeltas devem ser acompanhados de atualização nas indicações de projeto. No caso das vigas pré-moldadas, ainda faltam indicações mais precisas referentes ao problema de instabilidade lateral.

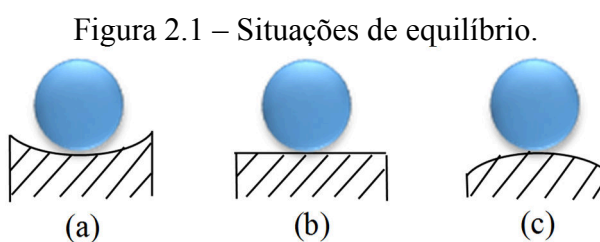
### 2.2 Estabilidade lateral

Em projetos de estruturas pré-moldadas é necessário considerar tanto as fases de serviço quanto as fases transitórias, sendo estas últimas, referentes a transporte, içamento e montagem.

Diferentemente das vigas de concreto moldado no local, as vigas pré-moldadas podem apresentar alguns problemas relacionados à estabilidade lateral. Estes elementos apresentam seções mais esbeltas, devido ao uso de concretos com resistências elevadas e de seções com maiores rendimentos mecânicos. Além disso, elementos pré-moldados estão sujeitos a passar pelas fases transitórias com vinculações provisórias que não são capazes de restringir a rotação dos elementos nos apoios.

Alguns dos fatores que podem influenciar a estabilidade das vigas pré-moldadas são: esbelteza da peça, resistência do concreto, comprimento da viga, imperfeições geométricas iniciais, condições de transporte, de içamento, condições de apoio, como esconsidade e rigidez, além das ações laterais, como por exemplo ações de vento. Sendo que, as imperfeições geradas na fase construtiva do elemento pré-moldado geralmente são provocadas pelo controle ineficaz do posicionamento das armaduras, pelos erros de posicionamento das fontes de calor na cura acelerada, pela retração diferenciada entre as faces laterais dos elementos, pela má execução da protensão, entre outros fatores.

A estabilidade pode ser definida com base no método de energia. Timoshenko e Gere (1988), apresenta análises de barras comprimidas a partir das quais é possível observar que, se a força de compressão aplicada centralmente for menor do que seu valor crítico, a barra comprimida permanece reta e esta forma reta de equilíbrio é estável. Mas caso a carga aumente ligeiramente acima de seu valor crítico, existem, teoricamente, duas formas possíveis de equilíbrio: a primeira possibilidade é que a barra permaneça reta; e a segunda é que ela se curve para o lado. Análises experimentais mostram que a forma reta é instável e que uma barra sempre se dobrará lateralmente sob a ação de uma carga maior que o valor crítico. As três situações apresentadas na Figura 2.1 são utilizadas, de forma metafórica, para entender as condições de estabilidade.



Fonte: Autor (2021)

Da Figura 2.1 (a), conclui-se que a bola na superfície esférica côncava está em equilíbrio estável, enquanto a bola no plano horizontal (Figura 2.1 (b)) está em equilíbrio neutro. Já

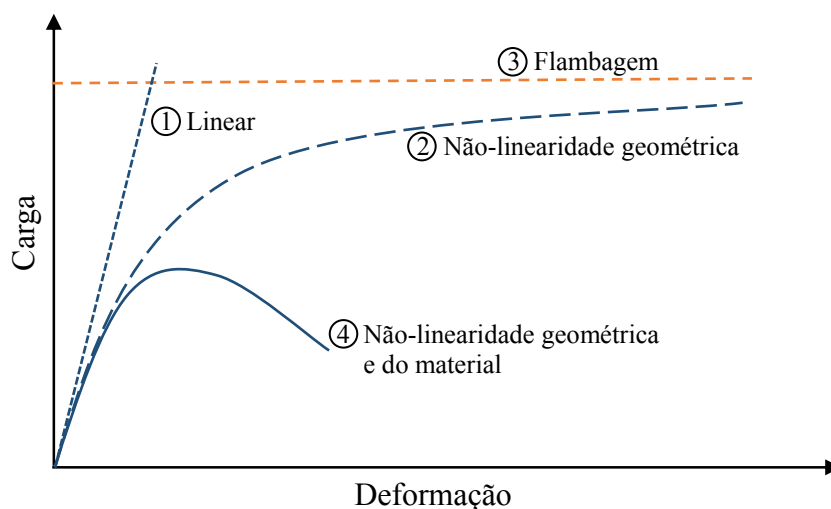
bola na superfície esférica convexa (Figura 2.1 (c)) está em equilíbrio instável. O tipo de equilíbrio pode ser verificado considerando a energia do sistema. Para a superfície côncava, qualquer deslocamento da bola de sua posição de equilíbrio elevará o centro de gravidade e uma certa quantidade de trabalho é necessária para produzir tal deslocamento, consequentemente, a energia potencial do sistema aumenta para qualquer pequeno deslocamento da posição de equilíbrio. Para a superfície plana, não há mudança na energia durante o deslocamento. Já para a superfície convexa, qualquer deslocamento da posição fora do equilíbrio abaixará o centro de gravidade da bola, reduzindo a energia potencial do sistema. Com isso, conclui-se que, no caso de equilíbrio estável, a energia do sistema é mínima e, no caso de equilíbrio instável, é máxima. Ressalta-se ainda que para cada um dos sistemas mostrados na Figura 2.1 a estabilidade depende apenas do formato da superfície de apoio, não dependendo do peso da bola.

Ao usar o método da energia, assume-se um pequeno deslocamento lateral do sistema, gerando um aumento da energia de deformação do sistema ( $\Delta U$ ). Ao mesmo tempo, uma carga  $P$  se moverá por uma pequena distância, o que resulta em uma quantidade de trabalho ( $\Delta T$ ). Em resumo, o sistema é estável em sua forma não defletida se  $\Delta U > \Delta T$  e é instável se  $\Delta U < \Delta T$ . Consequentemente, o valor crítico da carga  $P$  é encontrado a partir da igualdade  $\Delta U = \Delta T$  (TIMOSHENKO; GERE, 1988).

Quanto ao comportamento estrutural, o modelo elástico e linear consegue retratar de forma simples o comportamento de uma estrutura sob cargas estáticas. Assume-se que todas as deformações são proporcionais à magnitude da carga que atua na estrutura, de modo que a relação entre carga e deformação é linear, conforme a curva 1 da Figura 2.2. Para que este modelo linear seja válido, o próprio material deve ter uma relação linear entre tensão e deformação. Esse material é geralmente descrito como elástico. Além disso, para que o modelo linear seja válido, a própria estrutura também deve ter comportamento linear. Importante ressaltar que nenhuma estrutura é completamente linear, mas podem ser consideradas como lineares desde que as deflexões sejam pequenas. No entanto, o modelo linear elástico por si só não permite avaliar a resistência da estrutura. É necessário conhecer o comportamento não linear dos materiais e da estrutura para que se possa estimar o comportamento real da estrutura e sua capacidade de carga máxima (TRAHAIR, 1993).



Figura 2.2 – Comportamento estrutural



Fonte: Adaptado de Trahair (1993)

A curva 2 da Figura 2.2 ilustra como a não linearidade geométrica faz com que a relação carregamento-deformação da estrutura se torne não linear, mesmo quando o material permanece linear. As não linearidades estruturais geralmente estão associadas a momentos adicionais causados pelos produtos da carga com as deflexões transversais da estrutura, podendo ser descritas como geométricas ou de segunda ordem. Conforme descrito pela curva 2, a não linearidade geométrica pode fazer com que a relação carga-deformação tenha comportamento assintótico em direção a um limite. Sendo que, este limite (curva 3 da Figura 2.2) é a carga de flambagem elástica da estrutura. O comportamento real da estrutura, conforme a curva 4, se inicia com comportamento assintótico quando o material se tornar não linear, atinge uma capacidade de carga máxima (ponto limite), e após atingir o ponto limite apresenta uma redução da capacidade de carga. Depois que a carga de flambagem é alcançada, a curva carga-deformação pode permanecer constante, crescente ou decrescente. Isso ocorre devido às mudanças na rigidez do elemento que ocorrem durante a flambagem. Além disso, grandes deformações e rotações também podem afetar o comportamento pós-flambagem.

### 2.3 Estudos analíticos

Mast (1993) foi além dos estudos que já vinha desenvolvendo para instabilidade de vigas pré-moldadas longas e esbeltas em situação de içamento, iniciando análises para verificar as situações em que as vigas se encontram sobre apoios temporários e ainda sem travamentos laterais. A principal diferença entre as duas situações está na posição do eixo

de giro da viga, sendo que, em situação de içamento o eixo de giro encontra-se acima da viga e para vigas apoiadas o eixo de giro fica abaixo da mesma.

Mast (1993) considera os efeitos provocados por fissuras, rigidez ao giro dos veículos utilizados para o transporte das vigas e dos apoios transitórios, além do efeito de vento. O autor expressa coeficientes de segurança em função do braço do momento aplicado e do braço do momento resistente nas situações de fissuração e ruptura, considerando que a viga permanece sem fissuras até uma determinada inclinação e posteriormente começa a fissurar até atingir o momento de ruptura. A situação de equilíbrio entre os momentos aplicado e resistente segue conforme a Equação 2.1, sendo assim, o fator de segurança à fissuração no regime elástico pode ser calculado conforme a Equação 2.2. Sendo assim, o ângulo de equilíbrio calculado como indicado na Equação 2.3 e o deslocamento ( $\bar{z}_0$ ) calculado como na Equação 2.4. Já o fator de segurança à ruptura ( $FS'$ ) deve ser calculado de forma semelhante ao fator de segurança ao tombamento ( $FS$ ), com a diferença que neste caso deve-se utilizar o ângulo máximo ( $\theta'_{max}$ ) ao invés do ângulo de rotação do apoio para a situação de tombamento ( $\theta$ ). Os valores dos coeficientes de segurança não devem ser maiores que 1,0 e 1,5 para o  $FS$  e  $FS'$  respectivamente.

$$W (\bar{z}_0 \sin\theta \cos\theta + e_i + y \sin\theta) = K_\theta (\theta - \alpha) \quad (2.1)$$

$$FS = \frac{r (\theta - \alpha)}{\bar{z}_0 \theta + e_i + y \theta} \quad (2.2)$$

$$\theta = \frac{\alpha r + e_i}{r - y - \bar{z}_0} \quad (2.3)$$

$$\bar{z}_0 = \frac{w L^4}{120 E_c I_y} \quad (2.4)$$

Onde:  $W$  é o peso próprio da viga por unidade de comprimento;  $\bar{z}_0$  corresponde ao deslocamento teórico considerando todo o peso próprio da viga sendo aplicado lateralmente;  $\theta$  é o ângulo de rotação do apoio;  $e_i$  é a excentricidade inicial da viga;  $y$  é a distância entre o centro de gravidade da seção e o eixo de rotação;  $K_\theta$  é a constante de resistência elástica à rotação do apoio;  $\alpha$  é a superelevação do apoio;  $r$  é a relação entre  $K_\theta$  e  $W$ ;  $L$  é o comprimento total da viga;  $E_c$  é o módulo de elasticidade do concreto e  $I_y$  é o momento de inércia da viga em relação ao eixo vertical  $Y$ .

Burgoyne e Stratford (2001), propuseram uma equação para determinar o peso próprio das vigas longas e protendidas sobre apoios flexíveis, levando em consideração uma condição de equilíbrio semelhante à proposta por Mast (1993). Com a diferença que, Burgoyne e Stratford (2001) consideram a viga perfeitamente reta, sem excentricidade inicial e sem considerar a superelevação dos apoios. Sendo assim, utilizando a mesma notação de Mast (1993), os parâmetros excentricidade inicial da viga ( $e_i$ ) e superelevação do apoio ( $\alpha$ ) não foram considerados na condição de equilíbrio, resultando na Equação 2.5.

$$w L (\bar{z}_0 \sen\theta \cos\theta + y \sen\theta) = 2 \theta K_\theta \quad (2.5)$$

O peso próprio crítico da viga ( $(wL)_{cr}$ ), que causaria o tombamento da viga sem imperfeições iniciais, pode ser encontrado através da Equação 2.6. Além disso, a partir da razão entre o peso próprio crítico e o peso próprio real pode-se definir uma margem de segurança para o tombamento da viga.

$$(wL)_{cr}^2 \frac{L^3}{120 E_c I_y} + (wL)_{cr} y - 2 K_\theta = 0 \quad (2.6)$$

A consideração da imperfeição inicial da viga proposta por Burgoyne e Stratford (2001) consiste em utilizar a Equação 2.7 proposta por Southwell (1932) relacionando o deslocamento final da viga ( $u$ ) com a excentricidade inicial ( $e_i$ ), o peso próprio da viga ( $w$ ) e o peso crítico de tombamento ( $w_{cr}$ ).

$$u = \frac{e_i}{1 - \frac{w}{w_{cr}}} \quad (2.7)$$

Consolazio e Hamilton (2007) desenvolveram uma equação simplificada para estimar a capacidade de carga por flambagem de uma viga. Para isso, consideram como ponto de tombamento da viga a extremidade da almofada de apoio e determinam a força de vento crítico para tombamento por meio de uma equação de equilíbrio de momentos, sendo a carga de vento uniformemente distribuída ao longo da altura da viga.

Na análise realizada por Plaut e Moen (2014), os autores consideram que as vigas apoiadas sobre almofadas de apoio ainda não apresentam contraventamento ou ligações efetivas. Além disso, é considerada a presença de excentricidade inicial, efeito do peso próprio e do vento. De acordo com os autores, os esforços devido à ação do vento podem



As igualdades expressas nas Equações 2.8, 2.9, 2.10 e 2.11 são obtidas por meio de análise geométrica da Figura 2.3.

$$\frac{l}{R} = 2\zeta \quad (2.8)$$

$$\frac{a}{l} = \frac{\zeta - \gamma}{2\zeta} \quad (2.9)$$

$$\frac{\delta}{l} = \frac{1 - \cos \zeta}{2\zeta} \quad (2.10)$$

$$e_i = \frac{(\sin \zeta - \zeta \cdot \cos \gamma) \cdot l}{2\zeta^2} \quad (2.11)$$

Considerado que para ângulos pequenos  $\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \approx \theta$  e  $\cos(\theta) \approx 1$  e que as vigas apresentam pequenas curvaturas e balanços com comprimento  $a$ , de forma que  $l$  seja equivalente a  $l_1 + 2a$ , tem-se as Equações 2.12 e 2.13 da seguinte maneira:

$$\zeta \cong \frac{4\delta}{l} \quad (2.12)$$

$$\gamma \cong \frac{\zeta \cdot l_1}{l} \quad (2.13)$$

A alteração do valor de  $e$  representada na Equação 2.14 como  $e'$ , ocorre devido à deformação provocada pela atuação de parte do peso próprio no eixo de menor inércia e do vento, quando a viga gira em relação aos apoios, onde  $S_b$  é equivalente ao deslocamento lateral decorrente da atuação do peso próprio e do vento.

$$e' = e_i + \frac{1}{\zeta} \cdot \int_0^\zeta S_b \cdot \cos \xi \, d\xi \quad (2.14)$$

Tem-se que o momento aplicado em relação ao eixo de giro ( $M_a$ ) descrito na Equação 2.15 pode ser obtido através da Figura 2.3 e o momento resistente da almofada segue conforme a Equação 2.16.

$$M_a = (\sin \theta_v + \eta \cos \theta_v) \times y \times W + (\cos \theta_v - \eta \sin \theta_v) \times e' \times W \quad (2.15)$$

$$M_r = 2K_r \times (\theta_v - \alpha_e) \quad (2.16)$$

Sendo que  $W$  é o peso próprio da viga por unidade de comprimento,  $K_r$  é a rigidez ao giro da almofada e o ângulo de equilíbrio ( $\theta_v$ ) pode ser obtido através do equilíbrio entre  $M_a$  e  $M_r$ .

Considerando o vento na determinação do deslocamento lateral da viga, nomeado por Mast (1989) de  $\bar{z}_0$ , tem-se a Equação 2.17.

$$\bar{z}_0 = \frac{[w \cdot (\sin \theta_v + \eta \cdot \cos \theta_v)] \cdot (0,1 \cdot l_1^5 - a^2 \cdot l_1^3 + 3 \cdot a^4 \cdot l_1 + 1,2 \cdot a^5)}{12 \cdot E_c \cdot I_g \cdot l} \quad (2.17)$$

Igualando as Equações 2.15 e 2.16, fazendo as considerações para ângulos pequenos na Equação 2.15 e considerando que  $r = K\theta_v/w = 2K_r/W$ , obtém-se  $\theta_v$ , com a consideração de vento. Caso  $\eta$  seja zero, ou seja, uma situação onde não se considera o efeito de vento, o ângulo de equilíbrio ( $\theta_v$ ) segue conforme a Equação 2.18.

$$\theta_v = \frac{\alpha_e r + e_i}{r - y - \bar{z}_0} \quad (2.18)$$

Lee (2017) propõe um avanço nas análises de Burgoyne e Stratford (2001), levando em consideração a torção lateral da viga no equacionamento que determina a carga crítica de estabilidade lateral. Segundo o autor, a carga crítica considerando simplificações para ângulos pequenos pode ser calculada conforme a Equação 2.19.

$$(wL) \left[ y\theta + \frac{w\theta L^4}{120EI_y} + y\theta_t^{avg} \right] = 2\theta K_\theta \quad (2.19)$$

Sendo que,  $w$  é o peso da viga por unidade de comprimento,  $L$  é o comprimento da viga,  $y$  é a distância entre o eixo de rotação e o centro de gravidade da viga,  $\theta$  é o ângulo de giro da viga no apoio,  $E$  é o módulo de elasticidade da viga,  $I_y$  é o momento de inércia da viga,  $\theta_t^{avg}$  é o ângulo médio devido à torção da viga e  $K_\theta$  é a rigidez à torção do apoio elastomérico. Os ângulos de giro da viga no apoio e o ângulo médio devido à torção da viga devem ser inseridos na Equação 2.19 em radianos.

Lee (2017) leva em consideração o módulo de elasticidade da almofada de apoio ( $E_s$ ), a altura do elastômero ( $h_b$ ) e o momento de inércia do eixo paralelo ao eixo longitudinal da viga ( $I_b$ ), no cálculo da rigidez a torção do apoio, conforme indica a Equação 2.20.

$$K_\theta = \frac{E_s I_b}{h_b} \quad (2.20)$$

Já o ângulo médio devido à torção na viga pode ser calculado através da Equação 2.21, sendo que o ângulo de torção da viga ( $\theta_t$ ) pode ser indicado em função da sua posição ao longo do vão da viga (Equação 2.22) e do ângulo máximo devido à torção ( $\theta_t^{mid}$ ) com valor máximo no meio do vão.

$$\theta_t^{avg} = \left(\frac{1}{L}\right) \left(\int_0^L \theta_t(x) dx\right) = \frac{2 \theta_t^{mid}}{\pi} \quad (2.21)$$

$$\theta_t(x) = \theta_t^{mid} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (2.22)$$

O ângulo máximo no meio do vão pode ser obtido fazendo a diferença entre o ângulo medido no apoio e o ângulo total no meio do vão da viga, e segundo Lee (2017), tende a diminuir com o aumento da excentricidade lateral inicial, com o aumento da esbeltez da seção transversal da viga. Sendo assim, o autor propôs a Equação 2.23 para o cálculo do ângulo máximo no meio do vão. Para excentricidades iniciais até  $L/250$ , este ângulo é descrito como uma constante e passa a variar linearmente para excentricidades iniciais acima de  $L/250$ .

$$\theta_t^{mid} = \begin{cases} \left(2,4 \exp^{-0,1 \frac{h}{d_w}}\right) \theta_s^{cr}, & \delta_0 \leq L/250 \\ \left(2,4 \exp^{-0,1 \frac{h}{d_w}}\right) \theta_s^{cr} - \frac{3}{100} \left(\delta_0 - \frac{L}{250}\right) \theta_s^{cr}, & \delta_0 > L/250 \end{cases} \quad (2.23)$$

Sendo,  $h$  é a altura da seção transversal da viga,  $d_w$  é a espessura da alma da viga,  $\theta_s^{cr}$  é o ângulo de rotação crítico no apoio, também em radianos e  $\delta_0$  é a deformação lateral inicial da viga. Por fim, Lee (2017) propõe uma equação para o cálculo da carga crítica de estabilidade lateral para uma viga pré-moldada perfeitamente reta apoiada sobre elastômeros, indicando um fator de redução ( $C_r$ ), que deve ser multiplicado pela carga crítica ( $w_{cr}^0$ ) para a consideração dos efeitos de imperfeição inicial, conforme indicado nas Equações 2.24 e 2.25.

$$(w_{cr}^0 L) \left[ y + \frac{w_{cr}^0 L^4}{120 E I_y} + y \left(2,4 \exp^{-0,1 \frac{h}{d_w}}\right) \right] = 2 K_\theta \quad (2.24)$$

$$C_r = \exp\left(-150 \frac{\delta_0}{L}\right) \quad (2.25)$$

E para o deslocamento lateral crítico no meio do vão da viga ( $u_m^{cr}$ ), Lee (2017) propõe uma adaptação das indicações de Southwell (1993), conforme indica a Equação 2.26.

$$u_m^{cr} = \frac{\delta_0}{1 - \left(\frac{w_{cr}}{w_{\theta}^{cr}}\right)^{1,5}} \quad (2.26)$$

Krahl, Carrazedo e El Debs (2017) propuseram em suas análises uma adaptação do trabalho de Burgoyne e Stratford (2001). Sendo a Equação 2.27 a adaptação feita pelos autores para obter a carga crítica concentrada no meio do vão ( $P$ ), além da consideração do peso próprio da viga, que já vinha sendo realizada por Burgoyne e Stratford (2001). As três primeiras parcelas da Equação 2.27 são exatamente iguais à proposta de Burgoyne e Stratford (2001).

$$\frac{w^2 l^5}{120B} + wly_b - 2k_\theta + 7wl^4P + \frac{5l^3P^2}{240B} + Ph = 0 \quad (2.27)$$

Na Equação 2.27,  $h$  é a altura da viga,  $y_b$  é a distância do centro de gravidade até a flange inferior,  $B$  é a rigidez à flexão lateral contabilizando apenas a inércia da flange,  $w$  é o peso próprio da viga e  $l$  é o comprimento da viga.

Oliveira (2019) propõe em seu trabalho modelos analíticos para vigas pré-moldadas apoiadas em almofadas elastoméricas, em situação transitória. As soluções analíticas desenvolvidas têm como objetivo determinar um valor de carga distribuída limite que, quando aplicada, causa o tombamento da viga.

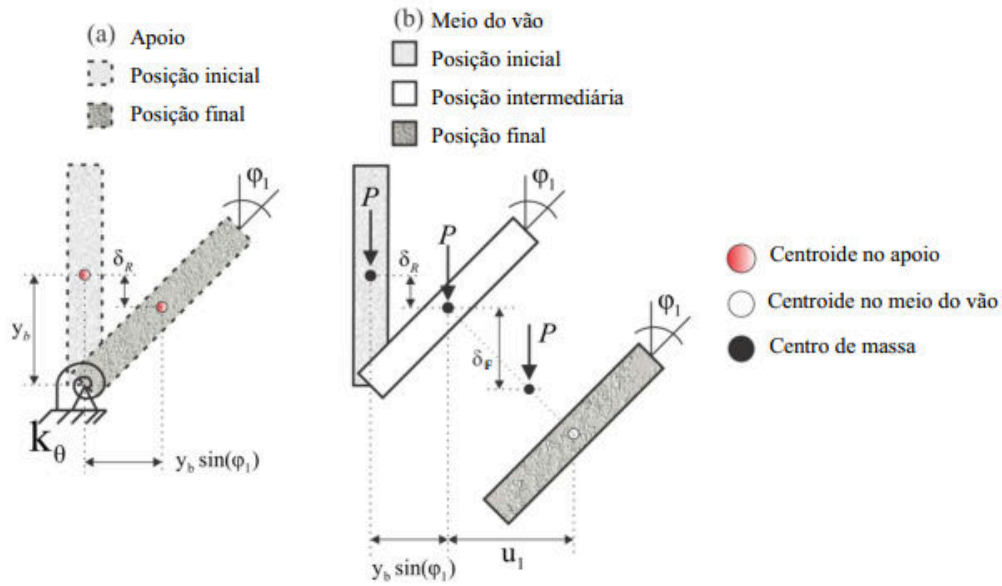
Através do método de Rayleigh-Ritz, Oliveira (2019) determinou o equacionamento de carga crítica para quatro situações, sendo elas, viga perfeitamente reta, viga com excentricidade inicial, viga com excentricidade e rotação inicial e viga com contraflecha devido à força de protensão. Além disso, também foram analisadas as situações de perda de contato entre viga e aparelho de apoio (*lift-off*) e início da fissuração da viga.

A viga perfeitamente reta, sujeita apenas ao peso próprio, apresenta na condição de instabilidade, deslocamento lateral e vertical devido a flexão, além de rotação de corpo rígido. A configuração deslocada da viga segundo Oliveira (2019), pode ser representada de acordo com a Figura 2.4, sendo que, a Figura 2.4 (a) representa a configuração no apoio e a Figura 2.4 (b) representa a configuração no meio do vão da viga. Tem-se que, a posição intermediária consiste na posição da viga após a rotação de corpo rígido e antes



que ocorra deformação por flexão lateral. Na Figura 2.4,  $\delta_R$  corresponde ao deslocamento vertical do centro de massa devido à rotação de corpo rígido da viga,  $\delta_F$  corresponde ao deslocamento vertical do centro de massa provocado pela flexão durante a rotação e  $y_b$  representa a distância entre o centróide da viga e o eixo de rotação localizado no aparelho de apoio.

Figura 2.4 – Trajetória da resultante do peso próprio durante o tombamento para viga perfeitamente reta



Fonte: Oliveira (2019)

Para a situação indicada na Figura 2.4, Oliveira (2019) propôs que a carga crítica de tombamento ( $q_{crit}$ ) para uma viga perfeitamente reta, pode ser calculada como o menor valor positivo obtido através da Equação 2.28. Onde  $EI_y$  é a rigidez a flexão lateral,  $l$  é o comprimento da viga e  $K_\theta$  é a rigidez a rotação do aparelho de apoio.

$$q_{crit} = \frac{-\pi^6 y_b EI_y \pm \sqrt{y_b^2 \pi^{12} (EI_y)^2 + 64 \pi^6 \ell^3 k_\theta EI_y}}{16 \ell^4} \quad (2.28)$$

Já para a viga com excentricidade inicial, Oliveira (2019) continua considerando o problema como uma combinação de rotação de corpo rígido e flexão lateral. No entanto, a configuração inicial com excentricidade, influencia na instabilidade da viga e consequentemente no equacionamento da carga crítica de tombamento. Tal deslocamento foi tomado como uma função senoidal descrito conforme a Equação 2.29. A equação de equilíbrio não linear, a partir da qual se obtém a carga crítica de tombamento deste caso, segue conforme a Equação 2.30.

$$u_0(x) = \lambda_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (2.29)$$

$$ql \left\{ 2y_b \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + \left[ \frac{8ql^4 \tan(\varphi_1)}{\pi^6 EI_y} + \frac{2\lambda_0}{\pi} \right] [1 + \tan^2(\varphi_1)] \right\} = 2\varphi_1 k_\theta \quad (2.30)$$

Onde,  $u_0(x)$  representa o deslocamento inicial, o valor de  $\lambda_0$  pode ser adotado entre os limites 1/300 e 1/1000,  $ql$  é a resultante da carga distribuída e  $\varphi_1$  corresponde a rotação de corpo rígido.

Seguindo a mesma metodologia, Oliveira (2019) aplica Rayleigh-Ritz para viga com excentricidade e rotação inicial, chegando na equação de equilíbrio indicada na Equação 2.31.

$$ql \left\{ 2y_b \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + \left[ \frac{8ql^4 \tan(\varphi_1 + \varphi_0)}{\pi^6 EI_y} + \frac{2\lambda_0}{\pi} \right] [1 + \tan^2(\varphi_1 + \varphi_0)] \right\} = 2\varphi_1 k_\theta \quad (2.31)$$

Para o desenvolvimento analítico da carga crítica de tombamento para viga com contraflecha de protensão, sem excentricidade lateral e sem rotação inicial, Oliveira (2019) leva em consideração o deslocamento do centro de massa provocado pela contraflecha no desenvolvimento do método da energia, a partir do qual, foi obtida a Equação 2.32 de equilíbrio final, que representa a relação não linear entre a carga aplicada  $q$  e a rotação da viga  $\varphi_1$  dependente da contraflecha de protensão.

$$ql \left\{ 2 \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \left( y_b + \frac{2\delta_0}{\pi} \right) + \frac{8ql^4}{\pi^6 EI_y} [\tan^3(\varphi_1) + \tan(\varphi_1)] \right\} = 2\varphi_1 k_\theta \quad (2.32)$$

Apesar de a protensão não exercer influência direta na instabilidade das vigas, as tensões causadas por ela devem ser consideradas na verificação da fissuração, um estado considerado limite para Mast (1989). Para isso, Oliveira (2019) considera que, quando a tensão supera a resistência à tração do concreto, tem-se o início da fissuração, sendo a tensão de tração crítica definida para cada ângulo de rotação na seção do meio do vão da viga.

Oliveira (2019) assume em suas análises que o estado limite de instabilidade da viga consiste no início do levantamento da viga em relação a almofada (*lift-off*), a partir de então, a relação momento-rotação no apoio torna-se não linear e segue conforme indicado por Krah, Lima e Siqueira (2020). Tem-se a situação de *lift-off* quando a mola menos comprimida não apresenta mais força de compressão.

Para a verificação do *lift-off*, Oliveira (2019) propõe que deve-se inicialmente calcular a rotação crítica conforme a Equação 2.33. Tal rotação deve ser assumida como sendo a rotação da viga, ou seja,  $\theta = \varphi_1$ . Em seguida, determina-se a carga crítica para a viga, substituindo o valor de  $\varphi_1$  na Equação 2.30 que leva em consideração a não linearidade geométrica e a carga encontrada será correspondente a carga necessária para que ocorra o *lift-off*. Por fim, ao comparar essa carga com o peso próprio, se  $q_{lift-off} > q_{pp}$  conclui-se que o aparelho de apoio suportará a viga analisada. Na Equação 2.33  $\theta$  é a rotação da almofada,  $M$  é o momento aplicado na almofada e  $L$  é a maior dimensão da almofada (transversal ao eixo da viga).

$$\theta = \frac{12M}{k_v L^2} \quad (2.33)$$

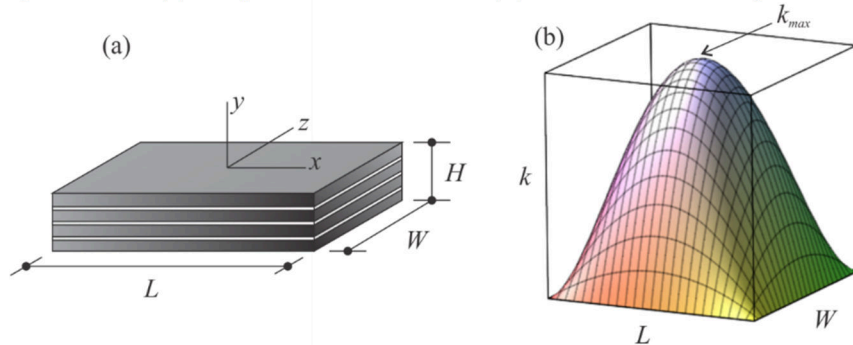
Krahl, Lima e Siqueira (2020) utilizaram o método energético para determinar uma equação não linear de forma fechada, a fim de avançar na previsão analítica da interação de contato entre viga pré-moldada e apoios. Os autores descrevem o comportamento não-linear da relação momento-rotação dos apoios elastoméricos reforçados com aço.

Segundo Harper e Consolazio (2013) (*apud* Krahl, Lima e Siqueira (2020)) a rigidez axial do apoio pode ser representada pela função tridimensional ilustrada na Equação 2.34.

$$k(x, z) = k_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{2x}{L} - 1 \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{2z}{W} - 1 \right)^2 \right] \quad (2.34)$$

Em que  $L$  é a maior dimensão horizontal da almofada, transversal ao eixo da viga,  $W$  é a menor dimensão horizontal e  $k_{\max}$  é a rigidez axial máxima da almofada, localizada no centro, conforme indica o esquema da almofada da Figura 2.5.

Figura 2.5 – (a) Esquema da almofada (b) distribuição da rigidez axial

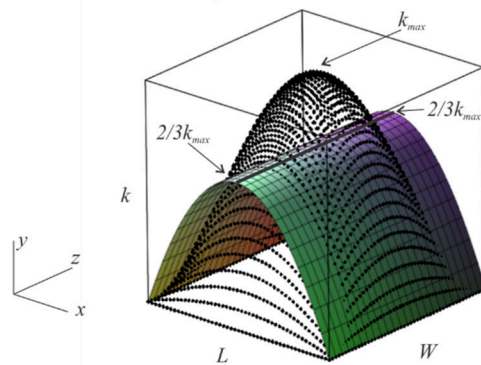


Fonte: Krahl, Lima e Siqueira (2020)

Durante a instabilidade lateral, a almofada funciona na flexão biaxial, ou seja, o plano horizontal da almofada gira em torno do eixo x e do eixo z ilustrados na Figura 2.5 (a). Entretanto, como a rotação em torno de z é significativamente maior, Krahl, Lima e Siqueira (2020) supõem que a rotação ocorra apenas em torno deste eixo, sendo assim, a interação viga/apoio pode ser considerada como uma viga rígida sobre molas elásticas e a função apresentada na Equação 2.34 e ilustrada na Figura 2.5 (b) pode ser simplificada para uma função que varie apenas na direção L, tornando o problema plano. Isso é feito integrando a função da Equação 2.34 na direção W e dividindo pela mesma quantidade, como mostra a Equação 2.35. Com isso, tem-se a nova distribuição ilustrada na Figura 2.6.

$$k(x) = \int_0^W \frac{k(x,z)}{W} dz = \frac{2k_{max}}{3} \left[ 1 - \frac{4\left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{L^2} \right] \quad (2.35)$$

Figura 2.6 – Distribuição da rigidez na direção do comprimento (L)



Fonte: Krahl, Lima e Siqueira (2020)

Outro ponto destacado por Krahl, Lima e Siqueira (2020) é em relação ao início da perda de contato (*lift-off*) entre viga e almofada. Este fenômeno pode ser tratado analiticamente, considerando que as molas não funcionem sob efeito de tração. A área de contato entre viga e almofada diminui à medida que a viga gira, porém a distribuição de tensão permanece em forma de bolha. Este é um problema analítico com tratamento complexo, devido ao comportamento do elastômero, pois com o aumento descolamento, o pico e a distribuição de tensão variam. Uma outra simplificação proposta por Krahl, Lima e Siqueira (2020) é considerar a distribuição inicial durante todo o processo de descolamento e subtrair a parte da função que corresponde à área após a descolagem.

A partir das simplificações adotadas inicialmente, Krahl, Lima e Siqueira (2020) aplicam o método de Rayleigh-Ritz e chegam à Equação 2.36 para o momento aplicado, que

considera a distribuição não uniforme de molas, onde,  $E_{pad}$  é o módulo de compressão do elastômero,  $x_0$  representa a perda de contato entre viga e almofada,  $H$  é a altura da almofada e  $P$  é a carga vertical.

$$M = \frac{E_{pad} W \theta (L^2 + 6Lx_0 + 3x_0^2)(L - x_0)^4 + 30PHL^2 x_0^2}{20HL^2 (L + 2x_0)} \quad (2.36)$$

Por fim, Krahl, Lima e Siqueira (2020) estabelecem uma relação linear entre momento e rotação, considerando  $x_0 = 0$  na Equação 2.36 e isolando  $M/\theta$ , como pode ser visto na Equação 2.37 que, quando comparada com a Equação 2.38 proposta por Yasdany *et al.* (2000) resulta em um valor 40% menor.

$$k_\theta = \frac{M}{\theta} = \frac{E_{pad} WL^3}{20H} \quad (2.37)$$

$$k_\theta = \frac{E_{pad} WL^3}{12H} \quad (2.38)$$

## 2.4 Estudos numéricos

Através do programa computacional ADINA, Consolazio e Hamilton (2007) avaliaram a influência de parâmetros como: seção transversal, comprimento do vão, presença de contraventamento ou ausência do mesmo, excentricidade lateral, esconsidade do apoio, curvatura vertical causada pela contraflecha de protensão e fluência das almofadas de apoio. Para isso, os autores analisaram vigas com seções transversais do tipo FBT 54, FBT 63, FBT 72, FBT 78; com vãos de 80 ft (24,38 m) a 200 ft (60,96 m); com travamentos de 0 kip/in (0 kN/m) a 10000 kip/in (175751300 kN/m); excentricidade lateral de 0,5 in (0,013 m), 1,5 in (0,038 m) e 2,5 in (0,064); com ângulos de esconsidade de 0°, 15°, 30°, 45° e 60° e ângulos de inclinação igual a 0,00 rad e 0,05 rad.

Inicialmente, Consolazio e Hamilton (2007) realizaram análises considerando apenas o peso próprio da viga e em uma segunda análise foi feita a consideração do vento, onde não foi considerada a fluência da almofada de apoio nem a rigidez do contraventamento lateral. Estes fatores apresentaram pouca influência na primeira análise quando comparados com os outros parâmetros.

Algumas das conclusões de Consolazio e Hamilton (2007) foram:

- A seção transversal e o comprimento do vão da viga influenciam muito a estabilidade lateral e sua capacidade resistente;
- A combinação de curvatura vertical e esconsidade do apoio reduz ainda mais a superfície de contato entre viga e almofada, o que gera uma situação desfavorável para estabilidade da viga;
- A esconsidade e a inclinação do apoio podem reduzir a capacidade de carga em até 30%;
- O aumento da excentricidade lateral pode gerar redução de até 25% na capacidade de carga;
- Observou-se redução de até 20% na capacidade de carga para as análises sem travamento lateral.

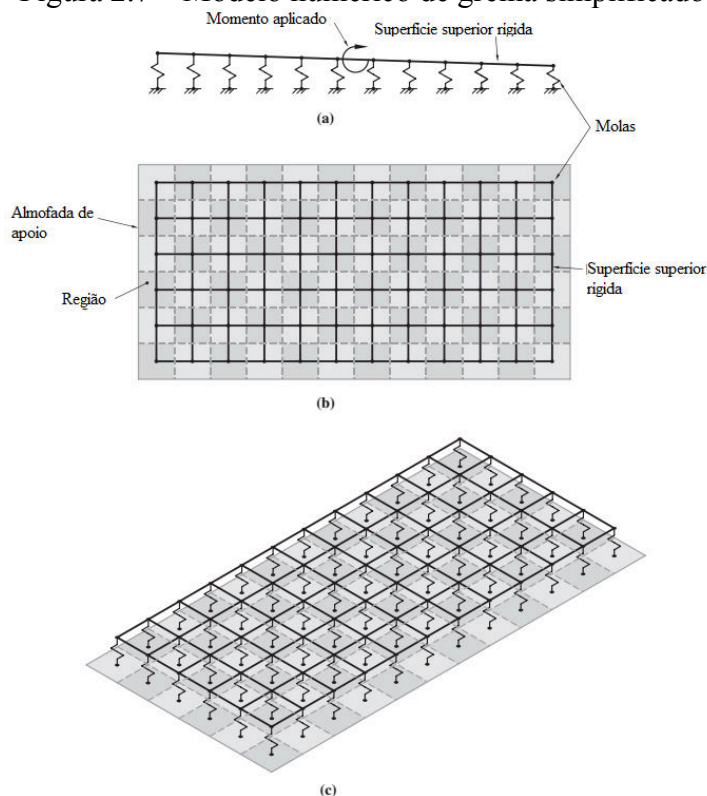
Com o intuito de estimar a rigidez à rotação de almofadas elastoméricas, Harper e Consolazio (2013) propuseram um modelo numérico considerando as almofadas de apoio como uma grelha simplificada, rígida, dividida em regiões retangulares, onde cada região retangular possui uma mola com capacidade de representar a sua rigidez, como ilustra a Figura 2.7. Para representar a perda de contato os autores adotaram molas de compressão.

Harper e Consolazio (2013) esclarecem que, ao atingir um certo nível de compressão a redução da espessura da almofada provoca o enrijecimento da mesma, fazendo com que o comportamento do elastômero se torne não linear. Outro ponto destacado pelos autores é que, a rigidez à compressão varia em função da posição relativa ao centro da almofada. Com isso, Harper e Consolazio (2013) propõem a Equação 2.39 para descrever o valor da rigidez da mola.

$$k_{mola}(x',z') = A_{região} \left( \frac{k_{almofada}}{A_{almofada}} \right) (1-(x')^2) (1-(z')^2) \quad (2.39)$$

Sendo que:  $K_{mola}(x',z')$  é o valor da rigidez da mola em função da sua posição relativa ao centro da almofada;  $A_{região}$  é a área da região de influência de uma mola;  $k_{almofada}$  é a rigidez à compressão axial da almofada;  $A_{almofada}$  é a área da almofada;  $x'$  e  $z'$  são as coordenadas normalizadas da almofada.

Figura 2.7 – Modelo numérico de grelha simplificado



Fonte: Adaptado de Harper e Consolazio (2013)

Krahl, Carrazedo e El Debs (2017) desenvolveram um estudo geométrico não linear e uma análise de autovalores usando método dos elementos finitos, calibrados com os modelos experimentais de Huff e Kahn (2012) e Consolazio (2012), que mostram a importância dos estudos referentes à fase de montagem, vista a criticidade desta fase em relação à fase permanente, no que diz respeito a instabilidade lateral.

A primeira análise foi realizada comparando os resultados experimentais de Huff e Kahn (2012) para a viga padrão AASHTO-PCI BT-54, uma viga protendida com altura de 1,37 m, 30,5 m de comprimento e sustentada por duas almofadas elastoméricas retangulares reforçadas com aço (0,36 m x 0,61 m). A consideração da protensão no modelo numérico realizada por Krahl, Carrazedo e El Debs (2017) foi feita admitindo um deslocamento vertical no meio do vão da viga de 110,7 mm. Além disso, a consideração da imperfeição inicial da viga foi feita adotando-se um deslocamento horizontal referente ao primeiro modo de flambagem da viga, consideradas as restrições a deslocamento vertical, horizontal e a rotação longitudinal nas extremidades. No experimento, a aplicação da carga é realizada através de um simulador de carga por gravidade, que permite que a carga seja mantida na vertical e acompanhe o deslocamento lateral da viga,

sem impor restrições aos movimentos laterais e torcionais. Um único ponto de carga foi aplicado no meio do vão da viga que, inicialmente foi sujeita apenas ao peso próprio e posteriormente, sujeita também a uma força gradativa.

O comportamento não linear na compressão da almofada foi representado por um modelo de grelha com molas não lineares fixadas nos nós. Este modelo descreve a perda de contato entre viga e almofada (*lift-off*) quando a viga atinge grande rotação, visto que, essas molas não suportam tensão tração. Para determinar a rigidez secante da almofada, Krahl, Carrazedo e El Debs (2017) aplicaram uma força de compressão no modelo da almofada isolada, relativo à metade do peso próprio da viga e posteriormente, foi registrado o comportamento não linear da relação momento-rotação através da aplicação gradativa de um momento. Também foi observada a resposta da rotação da almofada tomando ângulos de  $22,5^\circ$  e  $45^\circ$  com o eixo longitudinal da viga, a fim de representar os casos de possíveis descondições entre viga e almofada. Por fim, obtiveram a rigidez secante para a rotação de 0,02 rad, que corresponde à instabilidade da viga.

A diferença entre cargas de instabilidade numérica, considerando os efeitos geométricos não lineares de vigas apoiadas em elastômeros e a carga de instabilidade experimental testada por Hurff e Kahn (2012) foi de 8,7%.

Já na comparação feita com os valores experimentais de Consolazio *et al.* (2012), Krahl, Carrazedo e El Debs (2017) observaram uma diferença de 36,6% do valor experimental para a almofada alinhada e 22,8% de diferença do valor experimental para a almofada com descondição de  $45^\circ$ .

Em relação à análise paramétrica realizada por Krahl, Carrazedo e El Debs (2017) para a viga PCI BT-54, observou-se que:

- Como esperado, a carga crítica reduz com o aumento da excentricidade. Para a rotação considerada crítica, de 0,02 rad, foi encontrada a diferença de 19,1% entre a carga de instabilidade do caso de referência, com 43,5 mm de imperfeição inicial e o caso com 65 mm de imperfeição inicial. Além disso, ao comparar o caso de referência com o de 95 mm de imperfeição lateral, para a mesma rotação de 0,02 rad, a carga de instabilidade apresentou uma redução de 24,1 %;



- Em relação à influência do módulo de elasticidade na análise da viga PCI BT-54, notou-se que tal parâmetro é de pequena influência, tendo sido obtida uma diferença de 7,6% na carga crítica ao comparar os casos com módulo de elasticidade igual a 30,8 GPa e 50 GPa;
- Tendo como referência a carga de instabilidade da almofada alinhada, esta é 31% maior que a carga com almofada inclinada 22,5 graus e 46,7% maior que a carga da almofada com esconsidade de 45 graus, ou seja, para o parâmetro esconsidade observou-se que quanto maior a inclinação menor a carga crítica, como esperado.
- Outro parâmetro de grande influência na carga crítica foi a largura da mesa superior, sendo que a redução da largura implica em uma redução significativa no valor da carga crítica de estabilidade. Foi observada uma redução de 22,7% no valor da carga crítica ao comparar o caso de referência (106,7 cm) com o caso em que a mesa superior tem 62 cm, e uma redução de 44,1% ao comparar o caso de referência com o caso em que a mesa superior mede 15,2 cm.

Cardoso (2017) avaliou em seu trabalho a influência de algumas variáveis na instabilidade de vigas pré-moldadas apoiadas sobre almofadas elastoméricas. Dentre as variáveis estão: imperfeições iniciais, resistência característica do concreto, presença de vento e rigidez à compressão da almofada. Para a realização da análise numérica, a autora teve como base o trabalho de Harper e Consolazio (2013) para modelar as almofadas, validando o trabalho dos autores.

As análises de Cardoso (2017) foram feitas com a viga AASHTO Tipo IV protendida de aproximadamente 32 m, apoiadas sobre almofadas nomeadas de A e B com dimensões padronizadas. A autora obteve as seguintes conclusões:

- O aumento da resistência característica do concreto e da rigidez da viga resultou em menores deslocamentos e menores áreas de perda de contato na interface viga/almofada, na análise não linear geométrica;
- Na análise não linear geométrica e física foram obtidos deslocamentos superiores àqueles considerando somente análise não linear geométrica;
- O vento apresentou ser uma condição desfavorável para a perda de contato entre viga e almofada, quando comparado com a situação em que apenas o peso próprio atua no sistema;

- O aumento da excentricidade da viga faz com que a rigidez ao giro da almofada seja reduzida.

Lee *et al.* (2017) analisaram a instabilidade por tombamento de vigas pré-moldadas de seção I, observando numericamente a deformação lateral da viga e os ângulos de rotação no meio do vão e nos apoios. Para isso, os autores consideraram almofadas com módulo de elasticidade com comportamento bilinear e modelada com uma série de molas não lineares, trabalhando apenas quando solicitadas à compressão. Sendo que, para cada mola atribuiu-se uma rigidez específica em função da rigidez total da almofada e da localização da mola, e a rigidez vertical foi obtida em função do módulo de elasticidade, área e altura total da almofada.

Lee *et al.* (2017) analisam a força crítica do vento e o ângulo de rotação no apoio, os quais, segundo os autores são muito influenciados pelas propriedades da seção transversal da viga e pelo comprimento. Em relação aos parâmetros indicados, o aumento do vão gera uma redução da força crítica de vento e o aumento do ângulo de rotação no apoio; o aumento do peso próprio assim como da altura do centroide da viga na seção transversal também geram uma redução da força crítica de vento. Além disso, a carga crítica de vento aumenta à medida que a rigidez à rotação da almofada de apoio aumenta. O mesmo acontece de maneira mais gradual para a rigidez à flexão da viga em torno do eixo de menor inércia.

Lee (2017) realizou um estudo em vigas AASHTO *bulb-tees*, BT-54, BT-63 e BT-72 com 30 m de comprimento, considerando o concreto com módulo de elasticidade de 31000 MPa e resistência à compressão de 48 MPa, a fim de verificar a influência da excentricidade lateral na estabilidade destas vigas apoiadas em elastômeros. As almofadas utilizadas nas simulações tinham 50 cm de comprimento, 25 cm de largura, 6 cm de altura e a análise numérica foi realizada de forma semelhante a Lee *et al.* (2017).

Foram analisadas diferentes excentricidades iniciais, sendo elas  $L/1000$ ,  $L/500$ ,  $L/250$  e  $L/125$ , para as quais Lee (2017) relacionou o peso crítico da viga com as rotações nos apoios, no meio do vão e com os deslocamentos vertical e horizontal. Com isso, o autor concluiu que:

- O aumento da excentricidade lateral inicial reduz significativamente a carga crítica da viga;

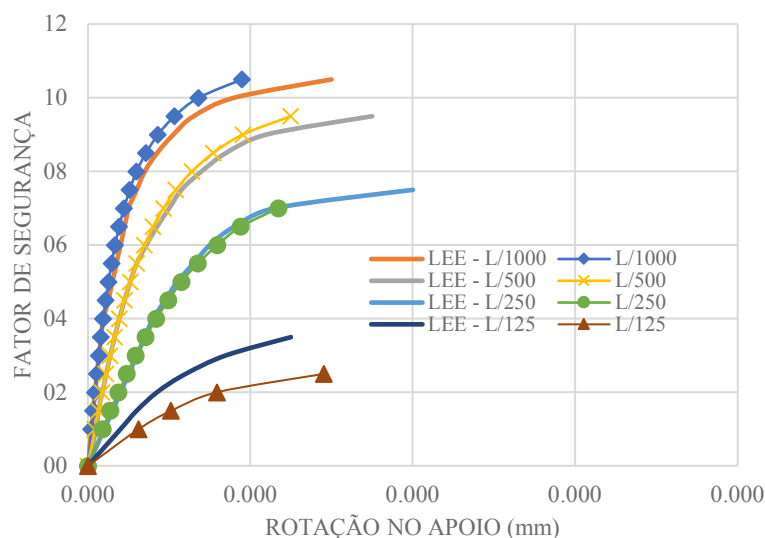
- Quanto maior a altura da viga, mantendo as demais dimensões constantes, menor a carga crítica;
- A inclinação da relação esbeltez da viga/carga crítica permanece praticamente a mesma para as diferentes deformações laterais iniciais analisadas;
- Ao analisar o parâmetro deslocamento vertical em relação ao peso da viga, foi observada uma variação linear independente da imperfeição lateral inicial da viga;
- Para as análises envolvendo deslocamento lateral, rotações nos apoios e no meio do vão da viga, o comportamento é praticamente linear na fase inicial, e por fim apresenta aumento excessivo dos deslocamentos e rotações, sem acréscimo de carga, o que resulta em uma relação com curvatura acentuada.

Oliveira (2019) analisa o comportamento de vigas pré-moldadas sobre almofadas elastoméricas por meio de análise numérica utilizando a plataforma *Workbench* no programa computacional ANSYS. Para a simulação, a viga foi modelada como um elemento sólido (SOLID), apoiada em elastômeros, os quais foram modelados como elementos sólidos rígidos apoiados em molas, elementos de contato do tipo *spring body ground*, conforme indicado também por Harper e Consolazio (2013).

Foi considerada uma rigidez a compressão constante e igual a 9583 N/mm em todas as molas. Além disso, para que fosse possível a validação das análises desenvolvidas, Oliveira (2019) utilizou os dados de vigas e almofadas do trabalho de Lee (2017). Então, utilizou-se a viga PCI BT-63, com 30 m de comprimento, apoiada em almofadas com dimensões 500 mm × 250 mm × 60 mm. A viga foi solicitada apenas pelo peso próprio e para a definição da carga limite foi feita através de incremento de carga, obtendo-se valores máximos de deslocamento e rotações para cada incremento.

Oliveira (2019) obteve resultados com boa aproximação, quando comparados com as análises de Lee (2017), conforme pode ser observado em uma das análises apresentada no gráfico da Figura 2.8, realizadas para verificar a resposta numérica da viga PCI BT-63 para rotação no apoio considerando as excentricidades  $L/1000$ ,  $L/500$ ,  $L/250$  e  $L/125$ . Os resultados foram apresentados em função da carga aplicada dividida pelo peso próprio da viga.

Figura 2.8 – Resposta numérica da viga PCI BT-65



Fonte: Oliveira (2019)

Reis, Krahel e Lima (2020) desenvolveram modelos numéricos de vigas pré-moldadas apoiadas em almofadas elastoméricas, a partir dos quais analisaram as cargas limites de instabilidade e a rigidez efetiva à rotação das almofadas. Para isto, foram simulados casos com várias combinações de vão, seção transversal e excentricidade lateral.

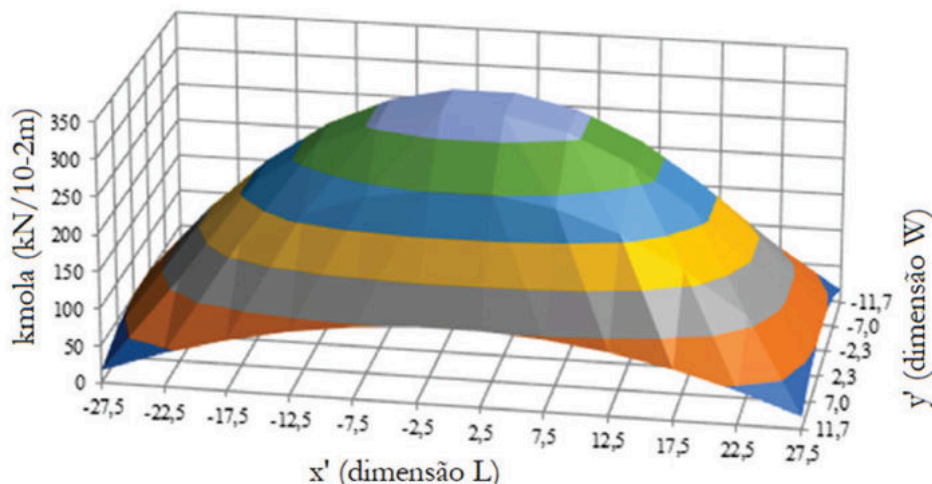
As vigas foram modeladas como elementos sólidos e as almofadas como elementos sólidos (SOLID186) apoiados em molas (COMBIN14) que trabalham apenas quando solicitadas a compressão. Tais modelos foram simulados no programa computacional ANSYS e validados por estudos experimentais presentes na literatura, que indicam a possibilidade de o tombamento das vigas ocorrerem antes da fissuração do concreto. Sendo assim, Reis, Krahel e Lima (2020) adotaram comportamento elástico linear para o concreto e consideraram a não linearidade geométrica para descrever os grandes deslocamentos e rotações, que geralmente ocorrem em elementos muito esbeltos.

Para a obtenção da carga limite, inicialmente foi aplicado o peso próprio da viga em 10 passos de carga, em seguida, para a realização da análise paramétrica, foi aplicada uma força concentrada no meio do vão, seguindo o critério de Consolazio e Hamilton (2012). Adotou-se como carga limite de tombamento o ponto onde a inclinação da tangente à curva força-deslocamento é 1/10 da rigidez inicial.

Uma maneira simplificada de representar numericamente o comportamento não-linear das almofadas de apoio é considerar a variação na rigidez e o comportamento das molas

trabalhando exclusivamente em situação de compressão (Reis, Krahel e Lima, 2020). Tem-se na Figura 2.9 como a rigidez da mola varia em função da sua posição na almofada.

Figura 2.9 – Distribuição da rigidez das molas em função da posição na almofada



Fonte: Reis, Krahel e Lima (2020)

De acordo com Reis, Krahel e Lima (2020), o critério da inclinação da reta tangente à curva força x deslocamento lateral no meio do vão é suficiente para determinar as forças limite de tombamento. Já em relação às análises paramétricas, os autores observaram que o aumento da excentricidade e do vão da viga geraram redução da força limite. Em relação à altura da viga, os autores concluíram que esta não interfere de forma significativa na instabilidade lateral, já que ela é a inércia lateral que rege a estabilidade lateral das vigas. Por fim, ao analisar as rigidezes efetivas do elastômero, foi observado que a rigidez à rotação diminui com o aumento da excentricidade. Outro ponto constatado nos estudos de Reis, Krahel e Lima (2020) foi a redução da rigidez à rotação na situação limite, quando comparada com a situação inicial em quase todos os casos analisados. Na maioria deles, o aumento do giro foi mais desfavorável que o aumento da compressão inicial provocado pelo aumento da força aplicada na almofada, pois o aumento do giro da almofada tende a reduzir a rigidez e o aumento da força no meio do vão provoca uma maior compressão na almofada.

## 2.5 Estudos experimentais

Mast (1993) realizou experimentos em escala real para verificar suas propostas analíticas, transportando vigas apoiadas em almofadas elastoméricas em caminhões. A partir dos ensaios o autor verificou que as vigas suportam ângulos superiores ao ângulo limite de

fissuração. Por meio das considerações analíticas indicadas por Mast (1993), ao atingir  $15^\circ$  de tombamento, a viga deveria começar a apresentar fissuras. No entanto, não foi possível verificar tal situação experimentalmente, pois ao atingir os  $15^\circ$  de rotação não foi observada fissuração na peça.

Outro ponto discutido por Mast (1993) em seu experimento, foi a pequena influência do contraventamento no deslocamento lateral da viga quando a mesma é submetida a uma rotação de  $15^\circ$ . O contraventamento nada mais é que cabos pré-tracionados parcialmente tensionados contra os apoios e também contra um sistema de travamento na parte central da viga. Observou-se que o contraventamento reduz em apenas 7% o deslocamento lateral da viga. De acordo com o autor, vigas de concreto protendido apresentam resistência lateral suficiente, até sem auxílio de contraventamento, sendo o contraventamento muito mais útil e eficaz para uma melhor resistência lateral do que para a rigidez.

Após romper a viga com um ângulo de tombamento de  $32^\circ$ , Mast (1993) observou que o deslocamento por torção foi de apenas 4% do deslocamento total da viga. O autor também ressalta a importância de se determinar a rigidez ao giro dos veículos utilizados no transporte das vigas, assim como a rigidez das almofadas elastoméricas utilizadas como apoios transitórios. É preciso tratar a atuação do vento com cuidado, pois este é capaz de gerar efeitos devido a momentos aplicados, que devem ser somados aos efeitos dos demais momentos, sendo necessário optar por apoios que restrinjam os deslocamentos laterais da viga ao ser posicionada na estrutura, visto que os efeitos do vento influenciam diretamente a estabilidade de vigas pré-moldadas.

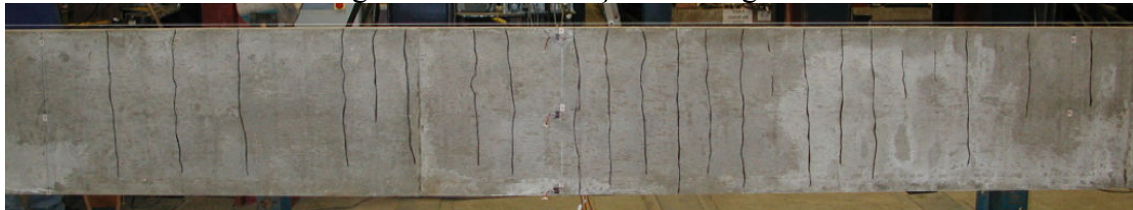
Lima (2002) ensaiou vigas submetidas a um tombamento lateral gradual, com objetivo de simular o comportamento de duas vigas longas e esbeltas de concreto armado (V1 e V2) sob flexão bilateral e torção, onde a única ação considerada é o peso próprio.

Durante a realização dos ensaios, Lima (2002) utilizou estações totais para aferição dos deslocamentos em pontos pré-definidos ao longo da viga, isso porque o caso analisado apresenta grandes deslocamentos e é um problema tridimensional, ou seja, os pontos de leitura mudam ao longo do ensaio tanto na coordenada x, quanto y e z, inviabilizando a utilização de transdutores de deslocamentos.

Lima (2002) observou que, as fissuras de flexão ao longo da viga ensaiada começaram a ficar visíveis a partir da quarta etapa de imposição de giros, ou seja, quando a viga

apresentava uma inclinação imposta nos apoios de  $19,80^\circ$ . A última etapa do ensaio foi a décima terceira, com inclinação imposta igual a  $63,5^\circ$ , para a qual a viga apresentou um estado crítico de fissuração por flexão bilateral. Na Figura 2.10 observam-se as fissuras ao longo da viga V1, onde o espaçamento médio entre fissuras foi de 13 cm, assim como para a outra viga analisada, nomeada de V2.

Figura 2.10 – Fissuração final viga V1



Fonte: Lima (2002)

No início do ensaio, ambas as vigas apresentavam imperfeições iniciais com flecha lateral igual a 1,4 cm e 0,9 cm para as vigas V1 e V2, respectivamente. Ao fim do ensaio, a viga V1 apresentou flecha lateral residual no meio do vão de 4,2 cm e na viga V2 a curvatura lateral residual foi de 3,4 cm.

Dois pontos importantes relatados por Lima (2002) são que: devido à baixa rigidez lateral, a flexão lateral governa a instabilidade lateral de vigas esbeltas, sendo a torção um fator irrisório em tal análise; e que até os  $15^\circ$  de inclinação nos apoios, os elementos de concreto tracionados ainda não atingem a resistência à tração.

Sobretudo, análises de vigas sob tombamento lateral gradual, realizadas por meio de imposição de giros nos apoios, permitem observar o comportamento global da viga levando-se em conta o aumento das deformações, desde a fissuração até o escoamento e a ruptura das armaduras (LIMA, 2002).

Além das análises numéricas, Consolazio e Hamilton (2007) também realizaram análises experimentais para verificar a estabilidade de vigas sobre almofadas elastoméricas. Os autores realizaram testes de compressão elástica a curto prazo e a longo prazo, em almofadas elastoméricas com dimensões padronizadas pelo *Florida Department of Transportation* (FDOT), a fim de determinar o efeito da fluência nas propriedades do elastômero, principalmente a rigidez. Por meio dos resultados experimentais foi elaborado um modelo matemático simplificado para representar o comportamento do elastômero numericamente.

Por meio da curva ‘tensão de compressão  $\times$  deslocamento vertical’, obtida experimentalmente, Consolazio e Hamilton (2007) ajustaram os coeficientes para o modelo numérico desenvolvido para a almofada tipo B do FDOT, fazendo com que ambos os modelos, numérico e experimental, se aproximassem com boa precisão. Assim, foram determinadas as rigidezes à compressão, ao cisalhamento e ao giro.

Com objetivo de avaliar a instabilidade de vigas pré-moldadas por tombamento, Hurff (2010) ensaiou uma viga pré-moldada protendida PCI BT-54 de 30,5 m, apoiada em almofadas elastoméricas cintadas (Figura 2.11). A viga foi ensaiada livre de qualquer restrição ao deslocamento lateral e rotação, e o carregamento foi aplicado no meio do vão em forma de carga concentrada. Hurff (2010) também ensaiou 6 vigas retangulares, de mesma seção transversal (0,102 m  $\times$  1,02 m) e mesmo comprimento (9,75 m), conforme a Figura 2.12, variando a força de proteção e a excentricidade dos cabos. Além disso, o autor realizou análises elásticas e não lineares considerando as vigas retangulares e uma viga PCI BT-72.

Figura 2.11 – Viga PCI BT-54 posicionada para experimento



Fonte: Hurff (2010)

Devido à falta de planicidade da superfície de contato entre a viga e o aparelho de apoio, a viga PCI BT-54 apresentou rotação excessiva em um dos apoios. Outro efeito notado por Hurff (2010) foi a contraflecha também no contato entre viga e aparelho elastomérico. Devido a tais contratempos, foram feitos ajustes com epóxi, reestabelecendo as superfícies planas. Ao comparar as duas situações, superfície irregular e plana, após regularização, o autor observou a importância em se garantir a planicidade na superfície de contato entre viga e almofada de apoio para a estabilidade ao tombamento, visto que

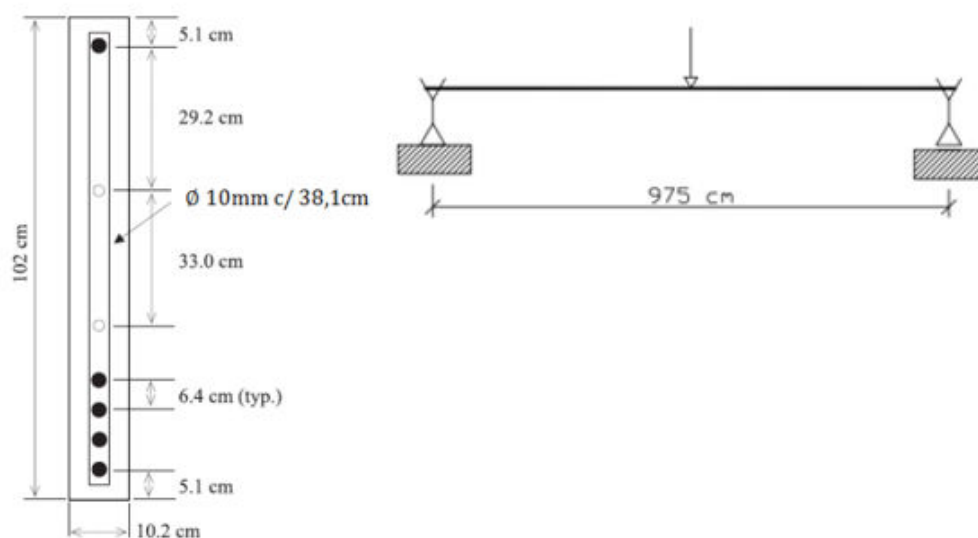


as cargas atingidas com superfície irregular e plana foram respectivamente 129 kN e 445 kN.

Hurff (2010) destaca que a viga PCI BT-54, ao ser ensaiada, sofre deformações por torção, sendo que mais da metade da rotação no centro ocorreu também na extremidade. Logo, pode-se dizer que esta parcela corresponde ao giro de corpo rígido e o restante refere-se à deformação elástica por torção.

Hurff (2010) também verificou o efeito que a radiação solar causa no deslocamento lateral da viga PCI BT-54. O autor posicionou a viga com pequenas imperfeições ao sol, na situação mais desfavorável, lado convexo da viga voltado ao leste, recebendo os raios solares de forma direta. Com isso, Hurff (2010) observou aumentos de 10 mm a 15 mm no deslocamento lateral da viga, e percebeu que o aumento devido à radiação solar era de 31% a 48% do valor máximo permitido pelo *PCI Bridge Design Manual* (2003), merecendo assim a devida atenção.

Figura 2.12 – Detalhamento vigas retangulares ensaiadas por Hurff (2010)



Fonte: adaptado de Hurff (2010)

Em relação ao efeito da protensão, os experimentos de Hurff (2010) mostram que, a flambagem lateral das vigas apoiadas sobre almofadas não foi restringida por este efeito. Já a respeito das imperfeições iniciais, o autor mostra que estas provocam uma redução da carga inelástica de flambagem lateral com torção devido a uma maior componente de flexão sobre o eixo de menor inércia, gerada por rotação do eixo neutro, tensões adicionais e rotação progressiva.

Hurff e Kahn (2012) chegam a algumas conclusões acerca dos experimentos de Hurff (2010). Segundo os autores, quanto maiores as imperfeições iniciais em vigas pré-moldadas, maior é a possibilidade de tombamentos. Deslocamentos laterais iniciais e rotações nos apoios foram considerados fatores de grande influência na instabilidade ao tombamento. Os autores também destacam a importância da definição das propriedades das almofadas elastoméricas e recomendam para este fim a realização de ensaios experimentais voltados para a definição da rigidez à rotação real das almofadas quando solicitadas ao peso próprio da viga.

Também em relação ao elastômero, Hurff e Kahn (2012) recomendam almofadas de apoio com dimensões as mais próximas possíveis da dimensão transversal da mesa inferior, para maior estabilidade do sistema viga-elastômero. Além disso, o aumento da largura da mesa inferior da viga é de grande contribuição para estabilidade ao tombamento. Isto ocorre devido a dois fatores. O primeiro é que o aumento da largura da mesa inferior contribui diretamente com o aumento da inércia lateral, parâmetro de grande influência na instabilidade lateral, e o segundo é porque o aumento da mesa inferior permite a utilização de elastômeros de maior dimensão que, como já citado, contribuem para a maior estabilidade do sistema.

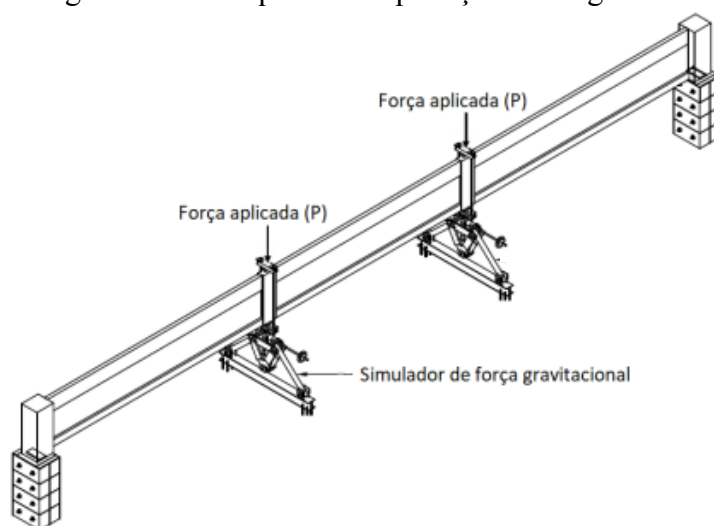
Por fim, uma das medidas apontadas por Hurff e Kahn (2012) como auxiliar e muito importante na prevenção de instabilidade por tombamento de vigas pré-moldadas apoiadas em almofadas elastoméricas é a inserção de travamento lateral nos apoios das vigas, assim que posicionadas após o içamento.

Consolazio e Hamilton (2012) ensaiaram três tipos de almofadas da AASHTO, sendo elas: almofada A com dimensões  $279,4 \text{ mm} \times 609,6 \text{ mm} \times 48,4 \text{ mm}$ , com três chapas de aço; almofada B com dimensões  $355,6 \text{ mm} \times 609,6 \text{ mm} \times 65,0 \text{ mm}$ , com quatro chapas de aço e almofada C com dimensões  $304,8 \text{ mm} \times 584,2 \text{ mm} \times 65,0 \text{ mm}$ , com quatro chapas de aço. O objetivo dos autores era avaliar o comportamento das almofadas e determinar as rigidezes à rotação de cada uma. Por meio do ensaio, os autores determinaram as relações força  $\times$  deslocamento lateral e momento  $\times$  rotação. Por meio da relação momento  $\times$  rotação foi avaliada a presença ou não de esconsidade, adotando zero de esconsidade para almofada alinhada e presença de esconsidade com  $45^\circ$  de angulação. Também foi analisada a influência do ângulo vertical, avaliando a almofada sem ângulo vertical, com  $0,02 \text{ rad}$  e  $0,04 \text{ rad}$ . Para o ensaio, a viga foi posicionada sobre almofadas e

foram aplicados sobre o modelo, o peso próprio da viga e outras duas forças concentradas nos terços médios do vão, como ilustra a Figura 2.13.

De acordo com os autores, a presença conjunta de esconsidade e ângulo vertical reduz significativamente a rigidez à rotação da almofada. Já em relação aos fatores analisados isoladamente, obtiveram-se conclusões concisas apenas para o efeito da presença de esconsidade, que é capaz de provocar uma redução considerável da rigidez ao giro. Importante ressaltar que a perda de contato entre viga e elastômero em uma das extremidades faz com que a relação momento-rotação deixe de ser linear e passe a ter um comportamento não-linear (CONSOLAZIO; HAMILTON, 2012).

Figura 2.13 – Esquema de aplicação de cargas



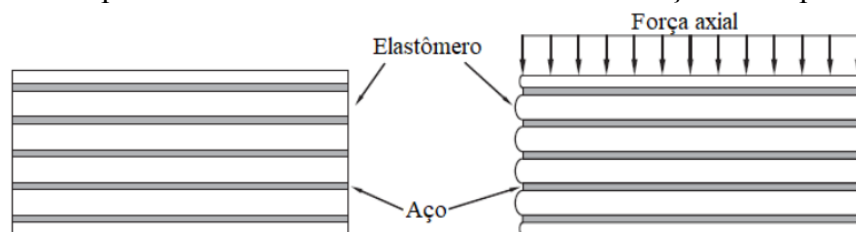
Fonte: Adaptado de Consolazio e Hamilton (2012)

Consolazio e Hamilton (2012) estudaram a estabilidade lateral de vigas protendidas apoiadas em almofadas de apoio, através de experimentos que buscavam determinar a rigidez ao giro dos elastômeros. Para isso, realizaram ensaios com vigas apoiadas em almofadas com e sem esconsidade. Foram obtidas as rigidezes à rotação do elastômero em função do seu ângulo de inclinação e de esconsidade. Segundo os autores, almofadas com inclinações e esconsidades apresentam menor rigidez à rotação. Isso faz com que a viga apresente menor capacidade de suportar a flambagem ao ser submetidas à ação do vento e gravidade.

Harper e Consolazio (2013) investigam o comportamento de almofadas elastoméricas, onde através de análises experimentais e numéricas esclarecem que as almofadas são elementos quase incompressíveis, com tendência a expansão lateral ao serem submetidas

a forças de compressão, preservando seu volume. Nas almofadas fretadas, as camadas de elastômero tendem a se expandir nas extremidades da almofada quando sujeitas à compressão (Figura 2.14), uma vez que as chapas de aço têm rigidez suficiente para restringir o movimento do elastômero na interface com a chapa de aço. Com isso, a resistência à compressão do aparelho de apoio fretado é maior que a do simples.

Figura 2.14 – Comportamento dos elastômeros fretados sob força de compressão axial



Fonte: Adaptado de Harper e Consolazio (2013)

Por meio dos resultados experimentais, Harper e Consolazio (2013) elaboraram um modelo numérico capaz de indicar a distribuição das reações de apoio na almofada, o que facilita a visualização do efeito de confinamento que acontece nos elastômeros fretados submetidos a compressão axial. Foi observado que quanto mais próximo do centro da almofada maior a rigidez à compressão. Isso ocorre porque quanto mais próximo do centro, maior é a quantidade de material a ser deslocado lateralmente, e quanto mais distante do centro, menos o material estará confinado.

# Capítulo 3

## Metodologia

---

### 3.1 Considerações iniciais

Neste trabalho é realizado o desenvolvimento de soluções analíticas para a carga distribuída limite que causa o tombamento de vigas pré-moldadas sobre almofadas elastoméricas, considerando a não linearidade de contato entre viga e elastômero. São analisadas as seguintes situações: viga perfeitamente reta; viga com excentricidade lateral inicial; viga com excentricidade e rotação inicial; viga com contraflecha devido a força de protensão; e viga imperfeita (com excentricidade lateral inicial, rotação inicial e contraflecha).

Para o desenvolvimento das expressões analíticas foi utilizado o método de Rayleigh-Ritz, baseado no princípio da energia potencial estacionária. As equações de equilíbrio fornecem a carga máxima das relações carregamento  $\times$  ângulo de rotação, denominada carga crítica ( $q_{crit}$ ) para o problema linear (viga perfeitamente reta) e carga limite ( $q$ ) para as soluções não lineares.

Já as análises paramétricas foram realizadas utilizando simulação de Monte Carlo para verificar o comportamento das soluções analíticas para as cargas limites, considerando a não linearidade de contato.

Este capítulo apresenta a base teórica para o desenvolvimento das expressões analíticas, assim como, para as análises paramétricas realizadas neste trabalho.

### 3.2 Método de Rayleigh Ritz aplicado à instabilidade lateral de vigas pré-moldadas apoiadas em elastômeros

O método de Rayleigh-Ritz é baseado no princípio da energia potencial estacionária, o qual é utilizado para encontrar soluções aproximadas de problemas estruturais onde a solução exata é difícil de ser obtida sendo aplicável tanto para estruturas lineares quando para as não lineares, estaticamente determinadas ou não.

Ao aplicar o método da energia potencial, a energia de deformação ( $U$ ) deve ser expressa em função dos deslocamentos nodais dos elementos estruturais, assim como o trabalho das forças externas ( $V$ ), que consiste no produto do carregamento atuante pelo deslocamento que este provoca (TIMOSHENKO; GERE, 1984).

Em casos com poucos deslocamentos nodais desconhecidos, as expressões de energia de deformação são obtidas de forma mais simples quando comparadas com problemas que apresentam muitos graus de liberdade, em que o cálculo da energia potencial é feito aproximando-se sua forma por meio de uma função com parâmetros de deslocamentos desconhecidos. Sendo assim, utilizando derivadas parciais da energia potencial em relação a cada um dos parâmetros de deslocamento e igualando cada derivada a zero, obtém-se uma quantidade de equações igual ao número de incógnitas. Com isso, as equações podem ser resolvidas para os respectivos deslocamentos, resultando na relação entre força aplicada à estrutura pelos deslocamentos resultantes, ou seja, equações de equilíbrio.

Sabe-se que, geralmente os resultados encontrados pelo método de Rayleigh-Ritz são aproximações dos deslocamentos reais. Portanto, para obtenção de resultados mais precisos, a função escolhida deve ser a mais próxima possível da verdadeira forma, isso é feito definindo um maior número de parâmetros para a aproximação, ou escolhendo uma função que já atenda às condições de contorno. As funções trigonométricas são interessantes para problemas de barra como vigas e pilares, pois dependendo da escolha, já atendem a forma deformada dos elementos na instabilidade.

Este método pode ser utilizado para se desenvolver as formulações de elementos finitos, onde a estrutura é dividida em inúmeros elementos nos quais os deslocamentos são aproximados localmente por funções de forma. Nos problemas de flambagem as análises são feitas de forma similar, recaindo em um problema de auto valor.

Este trabalho apresenta soluções analíticas de vigas pré-moldadas apoiadas em elastômeros, considerando a não linearidade de contato entre viga e apoio, desenvolvidas por meio da metodologia de Rayleigh-Ritz. Isto foi feito considerando as situações analisados por Oliveira (2019) e Krah *et al.* (2019), empregando a mesma metodologia, alterando a consideração do comportamento das almofadas, uma vez que Oliveira (2019) e Krah *et al.* (2019) consideram a rigidez a rotação do elastômero linear, conforme a

formulação de Yazdani *et al.* (2000). Neste trabalho serão aplicadas as considerações de Krah, Lima e Siqueira (2020) para a relação momento-rotação da almofada não linear, considerando a perda de contato entre viga e apoio, a fim de avaliar a interferência de tal comportamento nas equações de equilíbrio e, conseqüentemente, na instabilidade de vigas pré-moldadas apoiadas em elastômeros.

Inicialmente deve ser determinada a função para representar a geometria do elemento na instabilidade, que seja em função dos graus de liberdade ( $\alpha_i$ ). O funcional de energia do sistema ( $\Pi$ ) consiste na soma da energia cinética com a energia potencial. Sendo que, a energia cinética está relacionada ao movimento do corpo e a energia potencial, relacionada ao armazenamento gravitacional ou elástico. No caso analisado, a energia total do problema será composta pelas energias de deformação internas e pelo trabalho das forças externas atuantes no sistema.

A configuração de equilíbrio pode ser determinada a partir do princípio da energia potencial total estacionária, conforme a Equação 3.1, resultando em um conjunto de equações (Equação 3.2).

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = 0; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

$$a_{ij}\alpha_j = 0; i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

Para soluções com linearização do problema, para pequenos deslocamentos, que apresentam mais de uma raiz, a carga crítica deve ser definida como sendo a menor raiz positiva obtida no sistema de equações. Já para sistemas não linearizados, a solução consiste na relação não linear entre carga e ângulo de rotação.

Oliveira (2019) considera a energia interna total do sistema conforme apresentado na Equação 3.3, incluindo a energia de rotação dos aparelhos de apoio como linear. A autora desconsidera as deformações de torção, devido a experimentos presentes na literatura que comprovam que a instabilidade lateral de vigas pré-moldadas ocorre principalmente devido a combinação de deslocamentos laterais de flexão e rotação de corpo rígido. Logo, as parcelas correspondentes à torção de St. Venant ( $GJ$ ) e devido ao empenamento ( $EI_w$ ) podem ser anuladas no funcional de energia do sistema. Sendo  $EI_y$  a parcela correspondente à rigidez a flexão lateral.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \{EI_y u''^2 + GJ \varphi'^2 + EI_w \varphi''^2\} dx + k_{\theta} \varphi^2 \quad (3.3)$$

Neste trabalho, a energia interna total do sistema viga-almofada é considerada conforme a Equação 3.4 em que  $M$  é a função que descreve o momento aplicado na almofada, que segundo Krahll, Lima e Siqueira (2020), tem comportamento não linear e pode ser descrito conforme a Equação 2.36.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \{EI_y u''^2 + GJ \varphi'^2 + EI_w \varphi''^2\} dx + 2 \int_0^{\varphi} M d\varphi \quad (3.4)$$

No entanto, a Equação 2.36 dificulta a obtenção das equações de equilíbrio de forma fechada. Sendo assim, neste trabalho admite-se uma simplificação bilinear (Equações 3.5 e 3.6) aproximada para a relação momento-rotação, que se aproxime da Equação 2.36. A obtenção e a validação da função bilinear são apresentadas em detalhes no Anexo A, por meio do estudo de um pilar simplificado de 10 m, considerado infinitamente rígido.

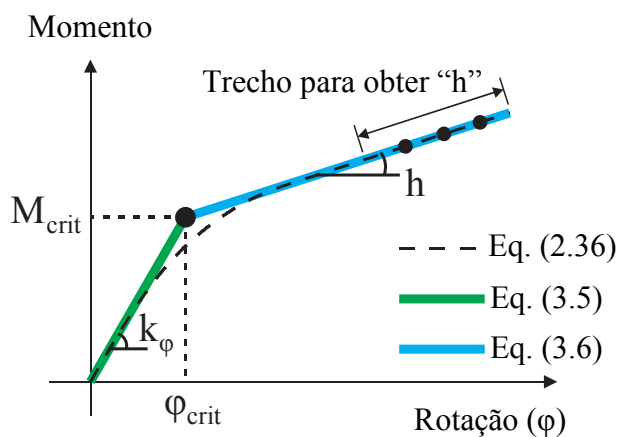
$$M(\varphi) = k_{\varphi} \times \varphi, \quad \text{para } \varphi < \varphi_{crit} \quad (3.5)$$

$$M(\varphi) = \frac{k_{\varphi} \times h \times \varphi}{k_{\varphi} + h} + \frac{k_{\varphi}^2 \times \varphi_{crit}}{k_{\varphi} + h}, \quad \text{para } \varphi \geq \varphi_{crit} \quad (3.6)$$

Onde,  $k_{\varphi}$  é a rigidez, calculada conforme a Equação 2.37;  $h$  é a rigidez do segundo trecho da curva bilinear, obtido da aproximação da curva não linear para grandes valores de rotação provenientes da Equação 2.36, considerando os últimos três pontos da curva momento-rotação não linear (Figura 3.1);  $\varphi_{crit}$  é o ângulo crítico para o momento crítico ( $M_{crit}$ ) de rotação do apoio. O ponto de intersecção entre as duas retas da curva bilinear, de rigidezes  $k_{\varphi}$  e  $h$  é equivalente ao ponto  $(\varphi_{crit}, M_{crit})$ , marcando a mudança de rigidez linear para a não linearidade de contato.



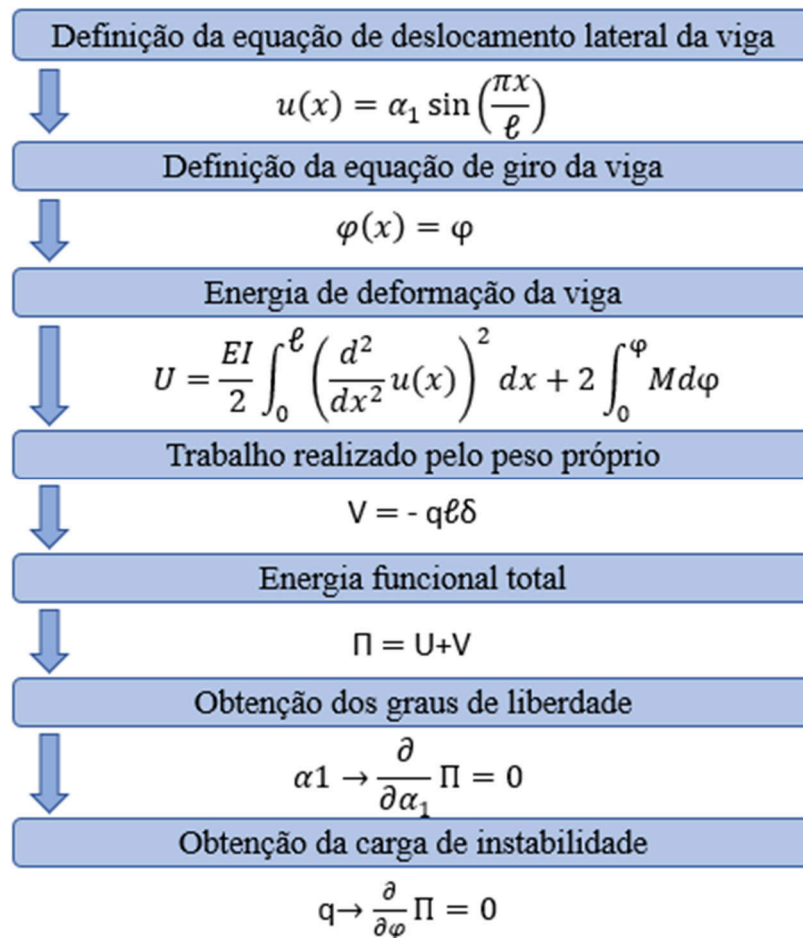
Figura 3.1 - Obtenção da função bilinear



Fonte: Autor (2021)

Os desenvolvimentos analíticos apresentados neste trabalho foram realizados com o auxílio do programa computacional *Maple versão 18*. A metodologia de Rayleigh-Ritz que foi empregada para o desenvolvimento das equações de carga crítica das vigas apoiadas em elastômeros irá seguir o fluxograma da Figura 3.2, que considera a não linearidade de contato na formulação da energia total do sistema.

Figura 3.2 - Fluxograma de desenvolvimento das equações de carga crítica não linear considerando a não linearidade do elastômero



Fonte: Autor (2021)

### 3.3 Análises paramétricas

As análises paramétricas são realizadas utilizando simulação de Monte Carlo para verificar o comportamento das soluções analíticas para as cargas limites, considerando a não linearidade de contato.

Conhecido também como método de Monte Carlo, a simulação de Monte Carlo é uma série de cálculos de probabilidade que estimam a chance de um evento futuro acontecer. Uma das primeiras aplicações deste método foi para calcular integrais, onde a ideia era escrever a integral que se desejava calcular como um valor esperado.

Para avaliar a variabilidade de parâmetros associados ao modelo analisado em relação às respostas mecânicas do mesmo é utilizada uma grande quantidade de amostras. A fim de estimar a probabilidade de falha da estrutura. Tal procedimento será realizado neste trabalho por meio de programação computacional utilizando linguagem *Python*.

Para cada análise são realizadas 100 mil simulações (valor estabelecido conforme a capacidade computacional), onde são atribuídos valores aleatórios, seguindo uma distribuição normal, para as variáveis: excentricidade lateral inicial, módulo de elasticidade do concreto, valor da força de protensão e rigidez do elastômero.

A probabilidade de falha ( $P_f$ ) é calculada conforme a Equação 3.7, onde  $N_f$  é a quantidade de falhas e  $N_t$  é a quantidade total de simulações. É assumida como falha a simulação em que a carga limite é menor do que o peso próprio da viga.

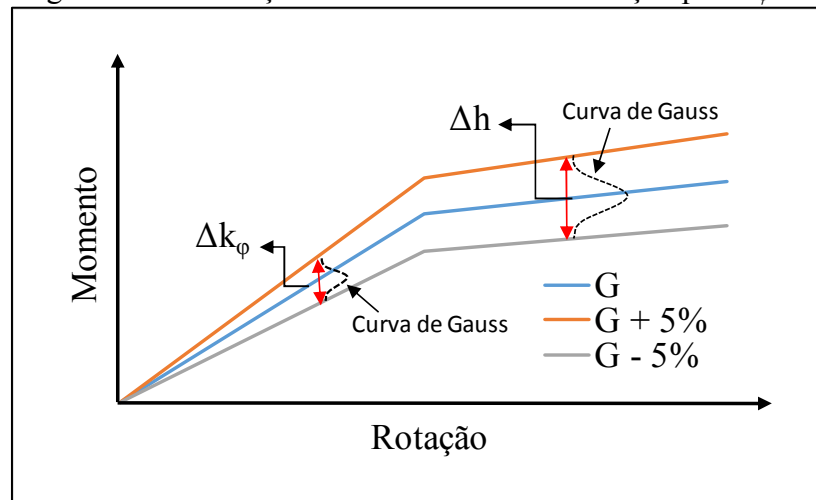
$$P_f = \frac{N_f}{N_t} \quad (3.7)$$

Os valores aleatórios são obtidos de acordo com uma distribuição normal considerando que a média seja o valor de entrada padrão. Para cada parâmetro variável é considerado um coeficiente de variação: para o módulo de elasticidade o coeficiente de variação é considerado igual a 0,15, conforme JCSS (2000); para a excentricidade lateral inicial o valor adotado é 0,61 (Cojocar, 2012); com relação à força de protensão, é considerada uma perda média de 25% e um coeficiente de variação de distribuição normal de 0,05 (Hurff, 2010); já em relação à variação da rigidez do elastômero, são consideradas variações de 0,05 para o coeficiente  $k_\phi$  e 0,08 para  $h$ . O módulo de elasticidade ( $E$ ) é calculado conforme a Equação 3.8, adaptada de Graybeal (2014), onde  $f_{ck}$  é a resistência à compressão do concreto em MPa e o coeficiente 6,8947 é utilizado para converter as unidades de ksi, como utilizado por Graybeal (2014), para MPa.

$$E = 6,8947 \times 1550 \sqrt{\frac{f_{ck}}{6,8947}} \quad (MPa) \quad (3.8)$$

Como a consideração da não linearidade de contato através de uma função bilinear é uma proposta inédita, os coeficientes de variação para as rigidezes  $k_\phi$  e  $h$  foram obtidos admitindo que a variação do módulo de cisalhamento do elastômero ( $G$ ) é  $\pm 5\%$ , conforme Muscarella e Yura (1995). Considerando o valor base do módulo de cisalhamento, e os limites superior ( $G + 5\%$ ) e inferior ( $G - 5\%$ ), foram determinadas as curvas momento-rotação bilinear e consequentemente os coeficientes 0,05 e 0,08 para  $k_\phi$  e  $h$ , respectivamente, conforme ilustra a Figura 3.3.

Figura 3.3 – Obtenção dos coeficientes de variação para  $k_\varphi$  e  $h$



Fonte: Autor (2021)

A estrutura do algoritmo consiste basicamente em: definir as funções para obtenção da carga limite; definir os dados base; definir as variáveis aleatórias; estrutura de repetição; e por fim, a extração dos resultados.

Como neste trabalho foi utilizada uma função bilinear para a representação da não linearidade de contato entre viga e apoio, a condição de equilíbrio das vigas será composta por duas equações, uma para  $\varphi < \varphi_{crit}$  e outra para  $\varphi > \varphi_{crit}$ . Sendo assim, cada função é inserida na estrutura do algoritmo indicando estes intervalos. Além disso, cada função tem como dado de entrada um vetor com 400 ângulos de rotação a serem analisados, para os quais serão calculadas as respectivas cargas e retornará um vetor com os resultados de carga calculada para cada ângulo. Com isso, tem-se a curva carga  $\times$  rotação, com 400 pontos, a partir da qual obtém-se a carga limite.

Após a definição das funções, foram inseridos os dados de entrada. Definida a viga analisada, foram inseridos no algoritmo os seguintes dados: momento de inércia em relação ao eixo y ( $I_y$ ); momento de inércia em relação ao eixo x ( $I_x$ ); comprimento da viga ( $\ell$ ); altura do centro de gravidade ( $y_b$ ); módulo de elasticidade (E); força de protensão (F); ângulo de rotação inicial ( $\varphi_0$ ); coeficientes de rigidez ( $k_\varphi$  e  $h$ ); peso próprio da viga (g); e excentricidade da força de protensão ( $e_p$ ). Além destas, são calculadas as seguintes variáveis: excentricidade inicial ( $\lambda_0$ ), calculada como  $\ell/350$ ,  $\ell/750$ , e  $\ell/1000$ , dependendo da análise; e contraflecha devido à força de protensão ( $\delta_0$ ), calculada conforme a Equação 3.9.

$$\delta_0 = \frac{F e_p \ell^2}{8EI_x} \quad (3.9)$$

Após inserir os dados base, é feita a definição das variáveis aleatórias e dos respectivos coeficientes de variação, sendo elas: módulo de elasticidade com coeficiente de variação igual a 0,15; excentricidade lateral inicial com coeficiente de variação igual a 0,61; força de protensão com coeficiente de variação igual a 0,05; rigidez do elastômero com coeficiente de variação igual a 0,05 para  $k_\varphi$  e 0,08 para  $h$ .

A estrutura de repetição do algoritmo consiste em calcular as curvas para as 100 mil simulações e definir os respectivos pontos de máximo de cada curva. Inicialmente é definido um vetor de ângulos para a análise, em seguida são atribuídos valores aleatórios para as variáveis ( $E$ ,  $\lambda_0$ ,  $F$ ,  $k_\varphi$  e  $h$ ). Então, é calculada a contraflecha ( $\delta_0$ ) devido à força  $F$  e, posteriormente, são obtidos os valores máximos das funções definidas inicialmente para o vetor de ângulos e finaliza a estrutura de repetição.

Por fim, são calculados e apresentados os resultados finais da análise, onde é possível extrair as médias de cargas limites e ângulos para cada um dos casos analisados. Além disso, os gráficos com resultados de carga limite por ângulo e carga limite por número de simulações são apresentados.

O fluxograma do algoritmo pode ser definido da seguinte forma:

**1ª Etapa:** definição das funções para obtenção das cargas limites:

- **Viga perfeitamente reta**
  - Dado de entrada na função: Vetor com os valores dos ângulos de rotação a serem analisados;
  - Cálculo: Cargas da viga perfeitamente reta conforme as equações de equilíbrio para  $\varphi < \varphi_{crit}$  e para  $\varphi > \varphi_{crit}$ ;
  - Retorno: Vetor com o resultado de carga calculada para cada ângulo do vetor de entrada.
- **Viga com excentricidade inicial**
  - Dado de entrada na função: Vetor com os valores dos ângulos de rotação a serem analisados;

- Cálculo: Cargas da viga com excentricidade inicial conforme as equações de equilíbrio para  $\varphi < \varphi_{crit}$  e para  $\varphi > \varphi_{crit}$ ;
  - Retorno: Vetor com o resultado de carga calculada para cada ângulo do vetor de entrada.
- Viga com excentricidade e rotação inicial
- Dado de entrada na função: Vetor com os valores dos ângulos de rotação a serem analisados;
  - Cálculo: Cargas da viga com excentricidade e rotação inicial conforme as equações de equilíbrio para  $\varphi < \varphi_{crit}$  e para  $\varphi > \varphi_{crit}$ ;
  - Retorno: Vetor com o resultado de carga calculada para cada ângulo do vetor de entrada.
- Viga com contraflecha devido à força de protensão
- Dado de entrada na função: Vetor com os valores dos ângulos de rotação a serem analisados;
  - Cálculo: Cargas da viga com contraflecha conforme as equações de equilíbrio para  $\varphi < \varphi_{crit}$  e para  $\varphi > \varphi_{crit}$ ;
  - Retorno: Vetor com o resultado de carga calculada para cada ângulo do vetor de entrada.
- Viga imperfeita
- Dado de entrada na função: Vetor com os valores dos ângulos de rotação a serem analisados;
  - Cálculo: Cargas da viga imperfeita conforme as equações de equilíbrio para  $\varphi < \varphi_{crit}$  e para  $\varphi > \varphi_{crit}$ ;
  - Retorno: Vetor com o resultado de carga calculada para cada ângulo do vetor de entrada.

**2ª Etapa:** definição e cálculo das variáveis relacionadas a viga e a almofada:

- Momento de Inércia em relação ao eixo x ( $I_x$ );
- Momento de Inércia em relação ao eixo y ( $I_y$ );
- Comprimento da viga ( $\ell$ );
- Altura do centro de gravidade ( $y_b$ );
- Módulo de elasticidade ( $E$ );

- Força de protensão ( $F$ );
- Ângulo de rotação inicial ( $\varphi_0$ );
- Coeficientes de rigidez ( $k_\varphi$  e  $h$ );
- Peso próprio da viga ( $g$ );
- Excentricidade da força de protensão ( $e_p$ ).

Além disso, são calculadas as seguintes variáveis:

- Excentricidade inicial ( $\lambda_0$ ):  $l/350$ ,  $l/750$  e  $l/1000$ ;
- Contraflecha devido à força de protensão ( $\delta_0$ ).

**3ª Etapa:** definição das variáveis aleatórias e dos respectivos coeficientes de variação:

- Módulo de elasticidade
  - Gera um vetor com 100 mil valores aleatórios de Módulos de Elasticidade.
    - Média: Valor definido na 2ª Etapa
    - Distribuição normal
    - Coeficiente de variação: 0,15
- Excentricidade lateral inicial
  - Gera um vetor com 100 mil valores aleatórios de excentricidade lateral inicial.
    - Média: Valor definido na 2ª Etapa
    - Distribuição normal
    - Coeficiente de variação: 0,61
- Força de protensão
  - Gera um vetor com 100 mil valores aleatórios de força de protensão.
    - Média: 75% do valor definido na 2ª Etapa
    - Distribuição normal
    - Coeficiente de variação: 0,05
- Rigidez do elastômero
  - Gera um vetor com 100 mil valores aleatórios de  $k_\varphi$  e  $h$ .
    - Média: valores definidos na 2ª Etapa
    - Distribuição normal
    - Coeficiente de variação: 0,05  $k_\varphi$  e 0,08 para  $h$

**4ª Etapa:** estrutura de repetição que calculará as curvas das funções definidas na 1ª Etapa para os 100 mil valores aleatórios e definirá as cargas limites com os respectivos ângulos em que estas cargas ocorrem:

- Define um vetor com os ângulos para a análise;
- Inicia a estrutura de repetição: 100 mil vezes;
- Atribui os valores aleatórios de  $E$ ,  $\lambda_0$ ,  $F$ ,  $k_\phi$  e  $h$ ;
- Calcula a contraflecha devido à força de protensão;
- Calcula a carga limite para cada função definida na 1ª Etapa;
- Finaliza a estrutura de repetição.

**5ª Etapa:** cálculo e armazenamento dos resultados finais da análise:

- Calcula as médias para cada uma das situações de cargas limites e ângulos;
- Cria arquivo com todos os dados e valores armazenados;
- Cria os gráficos com os resultados de carga  $\times$  ângulo e carga  $\times$  número de simulações;
- Fim do algoritmo.



# Capítulo 4

## Propostas Analíticas

---

### 4.1 Desenvolvimento das equações de equilíbrio com a consideração do *lift-off*

A proposta deste trabalho é avançar nas soluções analíticas de instabilidade de vigas pré-moldadas em fase de montagem ao considerar a não linearidade de contato entre viga e apoio no desenvolvimento analítico das equações de equilíbrio para cinco situações: viga perfeitamente reta; viga com excentricidade lateral inicial; viga com excentricidade lateral inicial e rotação inicial; viga com contraflecha de protensão apenas; e viga imperfeita (com contraflecha, excentricidade e rotação inicial).

Importante ressaltar que, como a não linearidade de contato irá interferir apenas na parcela da energia interna referente às molas nos apoios (Equação 3.4), as considerações para o trabalho realizado pelo peso próprio seguem como feito por Krahel *et al.* (2019).

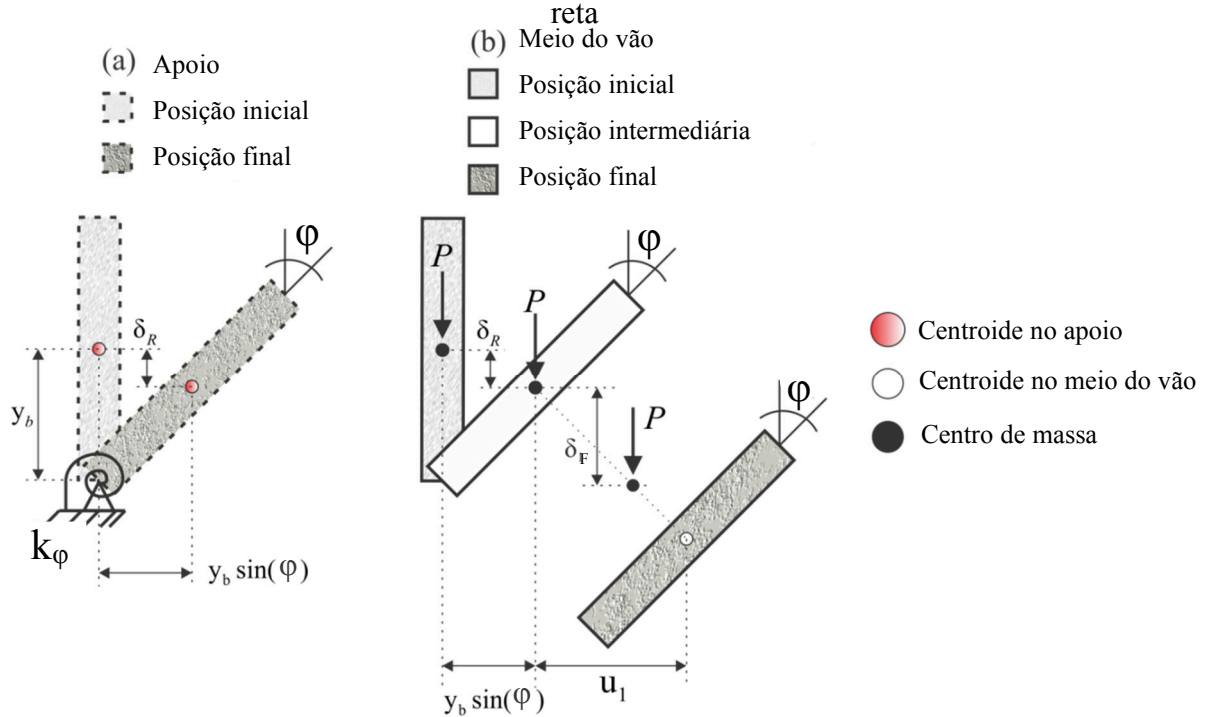
#### 4.1.1 Viga perfeitamente reta

A viga sem imperfeições iniciais, sujeita apenas ao peso próprio, apresenta na condição de instabilidade deslocamento lateral e vertical devido a flexão, além de rotação de corpo rígido. A configuração deslocada da viga está ilustrada na Figura 4.1, assim como feito por Krahel *et al.* (2019), na qual  $\delta_R$  é o deslocamento vertical do centro de massa devido a rotação de corpo rígido da viga,  $\delta_F$  o deslocamento vertical do centro de massa provocado pela flexão lateral durante a rotação,  $y_b$  representa a distância entre o centroide da viga e o eixo de rotação localizado no aparelho de apoio,  $\varphi$  é o ângulo de rotação da viga,  $k_\varphi$  corresponde à rigidez linear e  $P$  representa o peso próprio da viga como uma carga concentrada.

Admite-se a função aproximadora indicada na Equação 4.1, que atende as condições de contorno, como já indicado por Timoshenko e Gere (1988) e Pi e Trahair (1992), sendo  $\alpha_l$  o deslocamento no meio do vão,  $\ell$  o comprimento da viga e  $n$  representa o modo de flambagem, que para instabilidade de tombamento é 1.

$$u(x) = \alpha_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad (4.1)$$

Figura 4.1 – Trajetória do peso próprio durante o tombamento da viga perfeitamente



Fonte: Adaptado de Krahel *et al.* (2019)

Para a aplicação do método de Rayleigh-Ritz, faz-se necessário determinar a energia potencial devido à atuação do peso próprio ( $V$ ) e a energia interna ( $U$ ). A energia potencial é calculada conforme a Equação 4.2, sendo,  $\delta_R$  e  $\delta_F$  obtidos geometricamente a partir da Figura 4.1, Equações 4.3 e 4.4 respectivamente.

$$V = -P(\delta_R + \delta_F) \quad (4.2)$$

$$\delta_R = 2y_b \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (4.3)$$

$$\delta_F = \frac{\tan(\varphi)}{\ell} \int_0^\ell u(x) dx \quad (4.4)$$

Para a energia interna, considera-se a relação bilinear proposta (Equações 3.5 e 3.6) na parcela de energia referente às molas nos apoios dada pela Equação 3.4. Com a minimização do funcional de energia total do sistema ( $\Pi$ ) para a viga perfeitamente reta, obtêm-se as Equações 4.5 e 4.6 para  $\varphi < \varphi_{\text{crit}}$  e  $\varphi > \varphi_{\text{crit}}$ , respectivamente, que representam a condição de equilíbrio não linear geométrica de vigas perfeitamente retas sobre almofadas elastoméricas, considerando a não linearidade de contato.

$$q\ell \left\{ 2y_b \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{8q\ell^4}{\pi^6 EI_y} [\tan^3(\varphi) + \tan(\varphi)] \right\} = 2\varphi k_\varphi \quad (4.5)$$

$$q\ell \left\{ 2y_b \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{8q\ell^4}{\pi^6 EI_y} [\tan^3(\varphi) + \tan(\varphi)] \right\} = \frac{2k_\varphi h\varphi}{k_\varphi + h} + \frac{2k_\varphi^2 \varphi_{crit}}{k_\varphi + h} \quad (4.6)$$

Onde  $q\ell$  é a resultante da carga distribuída aplicada no centroide e o resultado da solução quadrática é a raiz positiva das Equações 4.5 e 4.6.

A Equação 4.5 é equivalente às propostas de Krahel *et al.* (2019) e Oliveira (2019) para a viga sem imperfeições, ou seja, antes de alcançar o ângulo crítico ( $\varphi_{crit}$ ), a solução não linear considera que a face inferior da viga está totalmente em contato com o aparelho de apoio, ou seja, a interação viga-apoio é linear, mas após  $\varphi_{crit}$  a resposta não linear da viga é influenciada pela perda de rigidez do apoio devido ao *lift-off*.

#### 4.1.2 Viga com excentricidade inicial

A condição de equilíbrio para a viga com excentricidade inicial pode ser representada conforme a Figura 4.2. Esta situação de análise conta com a excentricidade lateral inicial  $u_0$ , já na posição inicial da viga, determinada por meio da Equação 4.7 como uma senoide com valor máximo  $\lambda_0$  no meio do vão.

$$u_0(x) = \lambda_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (4.7)$$

Logo, o deslocamento vertical causado pela carga  $P$ , obtido geometricamente por meio da Figura 4.2, segue conforme a Equação 4.8. Como o deslocamento devido ao giro de corpo rígido também pode ser obtido com a Equação 4.3, o trabalho realizado pelo peso próprio é dado pela Equação 4.9.

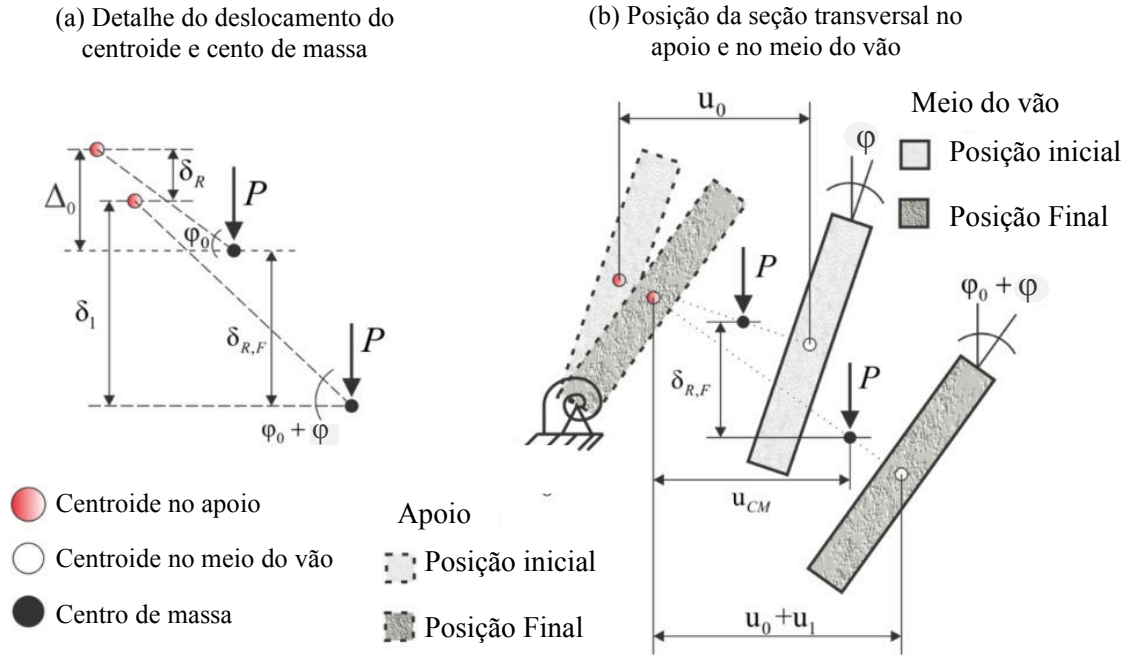
$$\delta_1 = \frac{\tan(\varphi)}{\ell} \int_0^\ell (u_0 + u_1) dx \quad (4.8)$$

$$V = -P(\delta_1 + \delta_R) \quad (4.9)$$



seção do apoio e o centro de massa da viga na posição inicial (Equação 4.12), e  $\delta_1$  a distância entre o centroide na seção do apoio e o centro de massa da viga na posição final (Equação 4.13). Com isso, o trabalho realizado pelo peso próprio é dado pela Equação 4.14.

Figura 4.3 – Trajetória do peso próprio durante o tombamento da viga com excentricidade e rotação inicial



Fonte: Adaptado de Krahel *et al.* (2019)

$$\Delta_0 = \frac{\tan(\varphi_0)}{\ell} \int_0^\ell u_0 dx \quad (4.12)$$

$$\delta_1 = \frac{\tan(\varphi_0 + \varphi)}{\ell} \int_0^\ell (u_0 + u_1) dx \quad (4.13)$$

$$V = -P(\delta_1 + \delta_R - \Delta_0) \quad (4.14)$$

Com a minimização da energia mecânica total do sistema, obtêm-se as Equações 4.15 e 4.16 para  $\varphi < \varphi_{crit}$  e  $\varphi > \varphi_{crit}$ , respectivamente, representando a condição de equilíbrio não linear geométrico de vigas com excentricidade e rotação inicial, considerando a não linearidade de contato entre viga e almofadas de apoio.

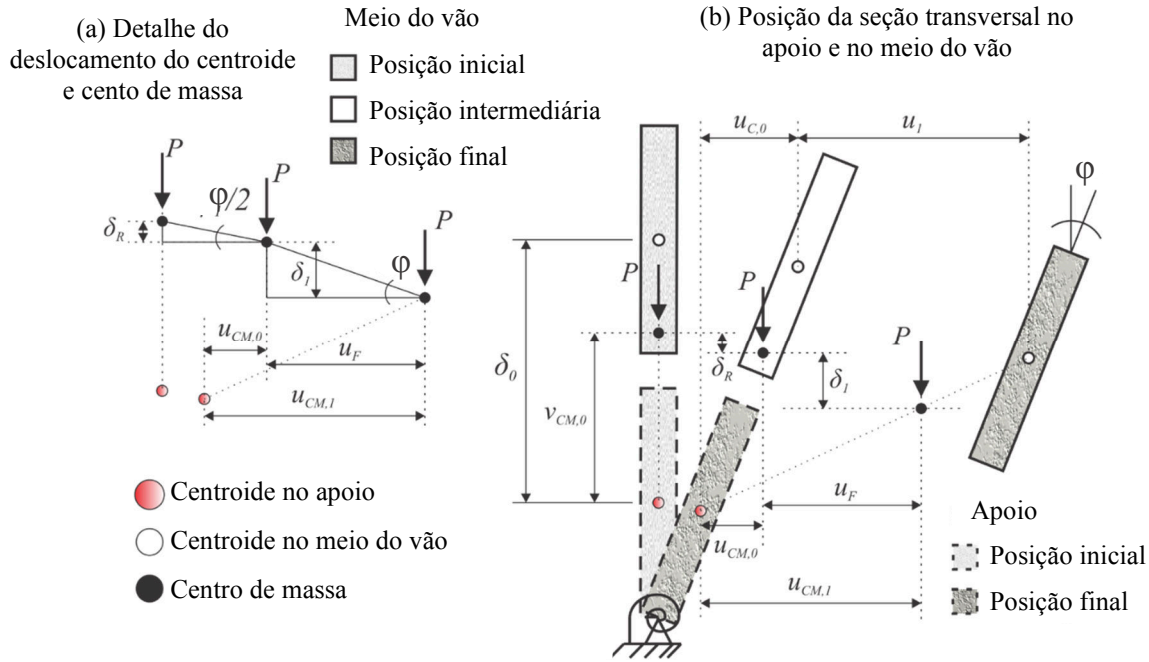
$$q\ell \left\{ 2y_b \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \left[ \frac{8q\ell^4 \tan(\varphi + \varphi_0)}{\pi^6 EI_y} + \frac{2\lambda_0}{\pi} \right] [1 + \tan^2(\varphi + \varphi_0)] \right\} = 2\varphi k_\varphi \quad (4.15)$$

$$q\ell \left\{ 2y_b \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \left[ \frac{8q\ell^4 \tan(\varphi + \varphi_0)}{\pi^6 EI_y} + \frac{2\lambda_0}{\pi} \right] [1 + \tan^2(\varphi + \varphi_0)] \right\} = \frac{2k_\varphi h\varphi}{k_\varphi + h} + \frac{2k_\varphi^2 \varphi_{crit}}{k_\varphi + h} \quad (4.16)$$

#### 4.1.4 Viga com contraflecha de protensão sem excentricidade e sem rotação inicial

Vigas protendidas usualmente apresentam contraflecha devido à força de protensão. Consequentemente, o centro de massa da viga se desloca para cima e o braço do momento de tombamento aumenta para qualquer pequena rotação, tornando o problema mais crítico quando comparado com a viga perfeitamente reta. A condição de equilíbrio para a viga com contraflecha devido à força de protensão pode ser representada conforme a Figura 4.4.

Figura 4.4 – Trajetória do peso próprio durante o tombamento da viga com contraflecha



Fonte: Adaptado de Krahel *et al.* (2019)

A consideração do efeito de contraflecha é feita por meio de uma função senoidal, com máximo valor no meio do vão  $\delta_0$  (Equação 4.17).

$$\delta(x) = \delta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (4.17)$$

O deslocamento  $\delta_R$  devido ao giro de corpo rígido para a viga com contraflecha de protensão passa a ser conforme a Equação 4.18, onde  $v_{CM,0}$  representa a posição do centro

de gravidade da viga antes da rotação (Equação 4.19), com componente horizontal  $u_{CM,0}$  obtida por  $v_{CM,0}\sin(\varphi)$ .

$$\delta_R = 2(y_b + v_{CM,0})\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (4.18)$$

$$v_{CM0} = \frac{\int_0^\ell \delta(x)dx}{\ell} \quad (4.19)$$

Após a flexão lateral, a posição do centro de massa da viga no tombamento é dada pela Equação 4.20, onde  $u_{1,R0}(x)$  representa a projeção horizontal da contraflecha de protensão após a rotação de corpo rígido e é dada por  $\delta(x)\sin(\varphi)$ .

$$u_{CM1} = \int_0^\ell \frac{[u_1(x) + u_{1,R0}(x)]}{\ell} dx \quad (4.20)$$

Com isso, o deslocamento  $\delta_I$  é calculado conforme a Equação 4.21, para  $u_F$  dado como sendo a diferença entre  $u_{CM,1}$  e  $u_{CM,0}$ , e o trabalho realizado pela carga  $P$  é calculado como indicado na Equação 4.22.

$$\delta_1 = u_F \tan(\varphi) \quad (4.21)$$

$$V = -P(\delta_R + \delta_1) \quad (4.22)$$

Sendo assim, para as vigas com contraflecha de protensão, sem excentricidade e sem rotação inicial, tem-se as Equações 4.23 e 4.24, que representam a condição de equilíbrio não linear geométrica para  $\varphi < \varphi_{crit}$  e  $\varphi > \varphi_{crit}$ , respectivamente.

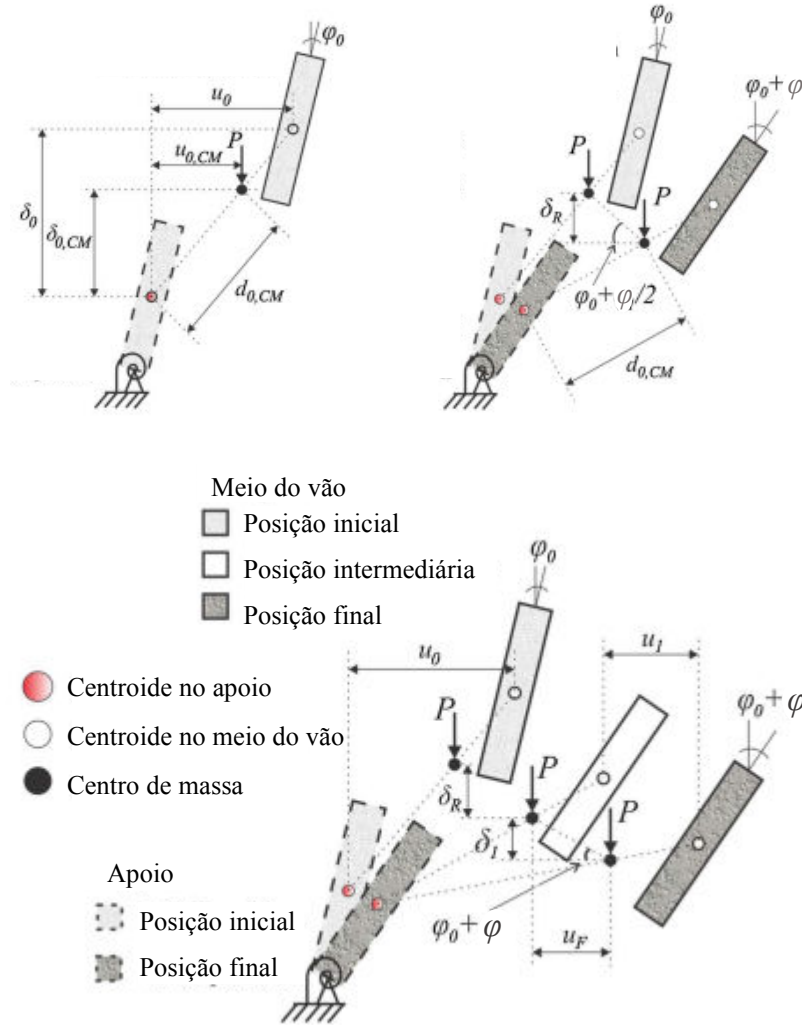
$$q\ell \left\{ 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left(y_b + \frac{2\delta_0}{\pi}\right) + \frac{8q\ell^4}{\pi^6 EI_y} [\tan^3(\varphi) + \tan(\varphi)] \right\} = 2\varphi k_\varphi \quad (4.23)$$

$$q\ell \left\{ 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left(y_b + \frac{2\delta_0}{\pi}\right) + \frac{8q\ell^4}{\pi^6 EI_y} [\tan^3(\varphi) + \tan(\varphi)] \right\} = \frac{2k_\varphi h\varphi}{k_\varphi + h} + \frac{2k_\varphi^2 \varphi_{crit}}{k_\varphi + h} \quad (4.24)$$

#### 4.1.5 Viga imperfeita com contraflecha de protensão, excentricidade lateral e rotação inicial

A trajetória da resultante  $P$  pode ser descrita conforme a Figura 4.5. Como a não linearidade de contato interfere apenas na parcela da energia interna referente às molas nos apoios (Equação 3.4), para o trabalho da resultante  $P$  são consideradas as indicações de Krahel *et al.* (2019).

Figura 4.5 – Trajetória do peso próprio durante o tombamento da viga imperfeita



Fonte: Adaptado de Krahel *et al.* (2019)

A distância entre o centro de massa e o centroide da seção da viga nos apoios ( $d_{0,CM}$ ) é obtido geometricamente na Figura 4.5 e é dado pela Equação 4.25, com componentes horizontal ( $u_{0,CM}$ ) e vertical ( $\delta_{0,CM}$ ) conforme as Equações 4.26 e 4.27, respectivamente.

$$d_{0,CM} = \sqrt{u_{0,CM}^2 + \delta_{0,CM}^2} \quad (4.25)$$

$$u_{0,CM} = \int_0^\ell \frac{u_0(x)}{\ell} dx \quad (4.26)$$

$$\delta_{0,CM} = \int_0^\ell \frac{\delta_0(x)}{\ell} dx \quad (4.27)$$



O deslocamento vertical do centro de massa devido ao giro de corpo rígido ( $\delta_R$ ) é determinado pela Equação 4.28, o deslocamento causado pela flexão lateral pela Equação 4.29 e o trabalho realizado pela carga P também pode ser calculado conforme a Equação 4.22.

$$\delta_R = (d_{0,CM} + y_b) \sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} + \varphi_0 \right) \quad (4.28)$$

$$\delta_1 = u_F \tan(\varphi + \varphi_0) \quad (4.29)$$

Com a minimização da energia mecânica total do sistema, obtêm-se as Equações 4.30 e 4.31 para  $\varphi < \varphi_{crit}$  e  $\varphi > \varphi_{crit}$ , respectivamente, que representam a condição de equilíbrio não linear geométrico de vigas imperfeitas, considerando a não linearidade de contato entre viga e almofadas de apoio.

$$q\ell \left\{ \sin(2\varphi_0 + \varphi) \left( y_b + \frac{2}{\pi} \sqrt{\delta_0^2 + \lambda_0^2} \right) + \frac{8q\ell^4}{\pi^6 EI_y} [\tan(\varphi + \varphi_0) + \tan^3(\varphi + \varphi_0)] \right\} = 2\varphi k_\varphi \quad (4.30)$$

$$q\ell \left\{ \sin(2\varphi_0 + \varphi) \left( y_b + \frac{2}{\pi} \sqrt{\delta_0^2 + \lambda_0^2} \right) + \frac{8q\ell^4}{\pi^6 EI_y} [\tan(\varphi + \varphi_0) + \tan^3(\varphi + \varphi_0)] \right\} = \frac{2k_\varphi h\varphi}{k_\varphi + h} + \frac{2k_\varphi^2 \varphi_{crit}}{k_\varphi + h} \quad (4.31)$$

# Capítulo 5

## Resultados e análises

---

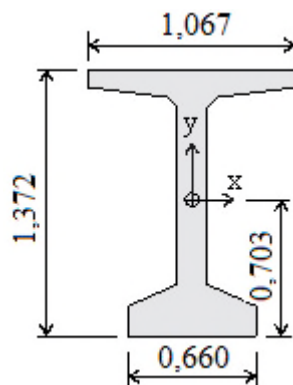
### 5.1 Considerações iniciais

Neste capítulo são apresentados os resultados de uma viga padrão PCI BT-54 com 30,0 m de comprimento, considerando a não linearidade de contato entre viga e apoio, conforme as equações apresentadas no Capítulo 4. Os resultados são comparados com resultados que consideram a rigidez ao giro do elastômero linear, conforme Krahel *et al.* (2019) e Oliveira (2019). Além disso, também são apresentados os resultados de uma viga protendida de UHPC com 91,4 m, juntamente com propostas para melhorar a capacidade de carga desse tipo de viga.

### 5.2 Estudo de Caso 1

A fim de avaliar as soluções propostas no Capítulo 4, levando-se em conta o coeficiente de rigidez ao giro linear e o efeito do *lift-off*, são analisadas as cinco situações de equilíbrio para a viga padrão PCI BT-54 da Figura 5.1, com propriedades dos materiais estabelecidas por Hurff (2010), sendo: comprimento da viga ( $\ell$ ) igual a 30 m; altura do centro de gravidade ( $y_b$ ) igual a 0,702 m; momento de inércia em relação ao eixo y ( $I_y$ ) igual a 0,0155 m<sup>4</sup>; momento de inércia em relação ao eixo x ( $I_x$ ) igual a 0,1116 m<sup>4</sup>; e módulo de elasticidade (E) de 30,820 GPa.

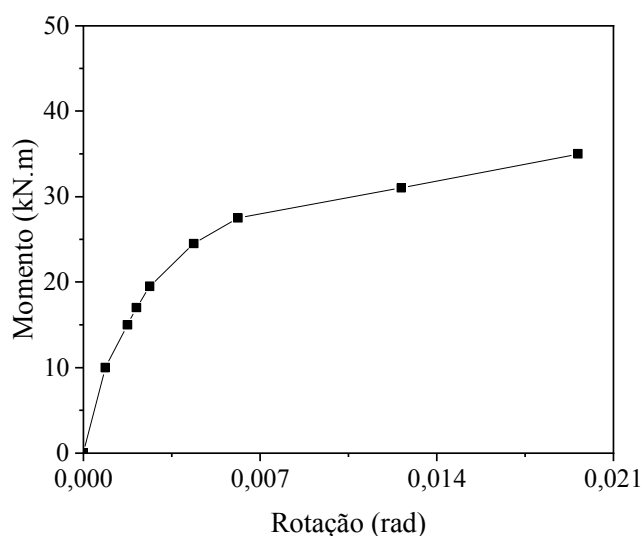
Figura 5.1 – Seção transversal da viga PCI BT-54 (unidades em m)



Fonte: Autor (2021)

O aparelho de apoio utilizado tem dimensões  $L = 609,6$  mm,  $W = 279,4$  mm e  $H = 48,4$  mm, com 3 camadas internas ( $n_i = 3$ ), sendo a espessura da camada interna  $h_i = 12,7$  mm e da camada externa  $h_e = 6,35$  mm ( $n_e = 2$ ), o módulo de cisalhamento do elastômero ( $G$ ) de 0,7 MPa e o fator de forma ponderado da almofada ( $S$ ) igual a 10,03. Por meio da Equação 2.36 obtêm-se a relação não linear de contato entre a viga e apoio (Figura 5.2) e os parâmetros  $k_\phi$ ,  $h$  e  $\phi_{crit}$  iguais a 11428,6 kNm/rad, 555,985 kNm/rad e 0,00211 rad, respectivamente, que caracterizam a curva bilinear (Equações 3.5 e 3.6).

Figura 5.2 – Relação momento-rotação da almofada elastomérica para as vigas BT-54

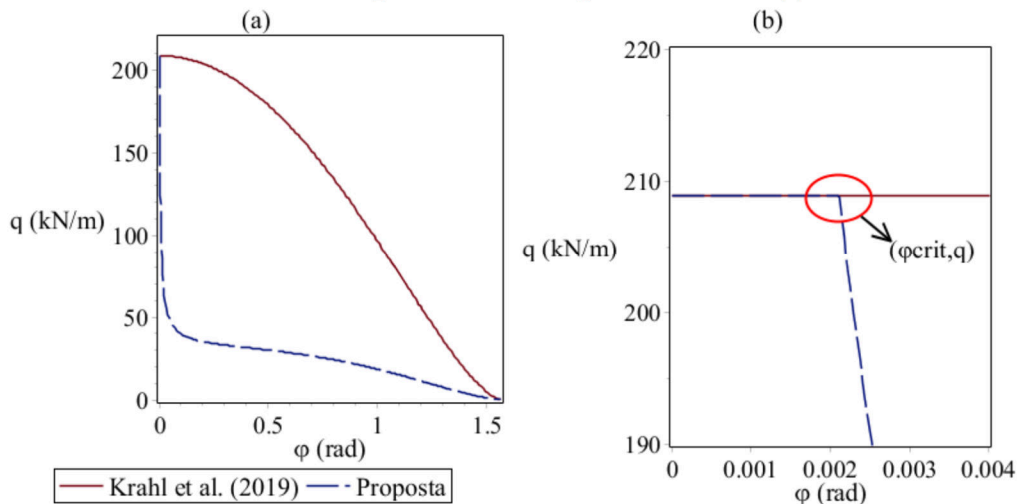


Fonte: Autor (2021)

### 5.2.1 Viga perfeitamente reta

A solução para a viga BT-54 perfeitamente reta (Equações 4.5 e 4.6) é apresentada na Figura 5.3, onde é possível observar que a carga limite, para ângulo crítico igual a 0,00211 rad, é equivalente ao calculado considerando a rigidez a rotação do apoio linear. Porém, a redução da rigidez após o ângulo crítico faz com que a carga tenha uma redução brusca com o aumento adicional de rotação. A diminuição na carga, acompanhada de grandes deslocamentos laterais e rotações após a carga crítica, evidencia que nestes problemas o comportamento pós flambagem é instável, conforme Dym (2002).

Figura 5.3 – (a) Resposta analítica para a viga padrão BT-54 perfeitamente reta; (b) Detalhe da resposta analítica apresentada em (a)



Fonte: Autor (2021)

Devido ao *lift-off* promover a diminuição da rigidez dos apoios para pequenas rotações, há uma perda significativa de capacidade após a rotação de corpo rígido da viga, ao atingir o valor crítico de rotação do apoio, o que evidencia que a perda de contato governa o equilíbrio destes elementos.

Para este caso, a carga crítica ( $q_{crit}$ ), calculada conforme a Equação 2.28, é igual a 208,83 kN/m. Lebelle (1959) estabelece que para a avaliação da segurança quanto a estabilidade a razão entre  $q_{crit}$  e o peso próprio da viga ( $g$ ) deve ser superior a 4, a fim de levar em conta as incertezas envolvidas no problema. Apesar de ser uma recomendação antiga e que precisa ser atualizada, ela foi utilizada neste trabalho como referência na análise dos casos investigados. Sendo assim, como o peso próprio da viga é 10,67 kN/m, a razão entre a carga crítica e o peso próprio da viga resulta em 19,57, evidenciando, que mesmo sem considerar a variabilidade dos parâmetros, esta viga tem elevado nível de segurança quando não há imperfeição. No entanto, as imperfeições sempre ocorrem (Cojocar, 2012) e, por esta razão, também são analisadas a seguir.

### 5.2.2 Viga com excentricidade inicial

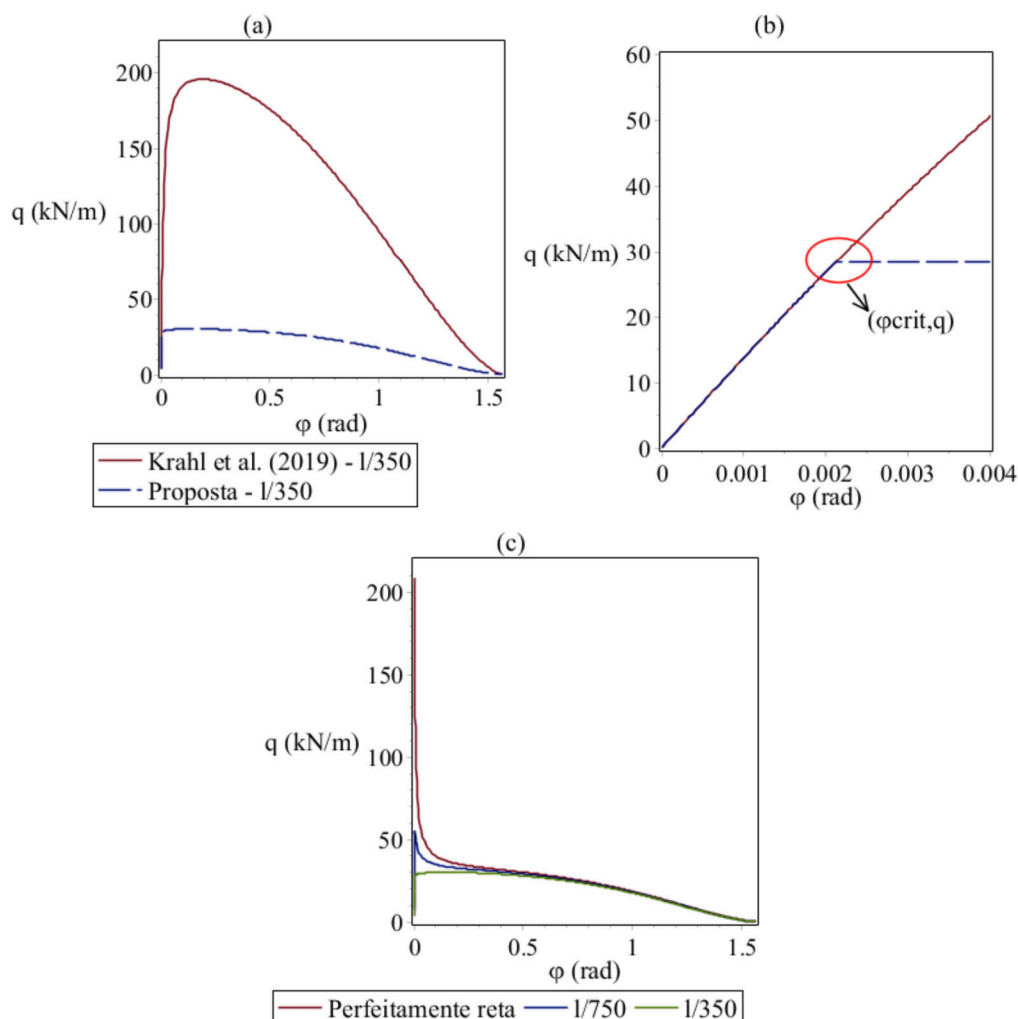
A Figura 5.4 (a) apresenta as curvas da viga com excentricidade inicial igual a  $\ell/350$ , comparando a formulação de Oliveira (2019) e Krahl *et al.* (2019), que consideram a mola linear, com as equações propostas (Equações 4.10 e 4.11). O detalhe do ponto em que

ocorre a mudança de rigidez do apoio, estabelecida pela função bilinear, é ilustrado na Figura 5.4 (b).

A resposta gerada com a adoção de uma função bilinear causa uma mudança do comportamento gráfico da curva quando é estabelecida a redução brusca de rigidez da relação momento-rotação. Observa-se nas Figuras 5.4 (a) e (b) uma redução de 84% na carga limite para a viga com excentricidade lateral inicial igual a  $\ell/350$ , ao considerar a não linearidade de contato. Isto mostra que a consideração da mola linear no problema de instabilidade lateral pode levar a resultados inseguros.

A Figura 5.4 (c) mostra a resposta analítica para viga com excentricidade igual a  $\ell/350$  (limite normativo da *fib Model Code*, 2010) e  $\ell/750$  (tolerância indicada pela norma espanhola EHE-08) em comparação com a viga perfeitamente reta, que confirmam que quanto maior a excentricidade lateral, menor a capacidade à flambagem das vigas, como já evidenciado por Oliveira (2019) e Krahel *et al.* (2019). Como constatado por Krahel *et al.* (2019), com a consideração da excentricidade inicial, o problema de bifurcação torna-se um problema de ponto limite, em que a viga se desvia da trajetória fundamental desde o início do carregamento, ou seja, passa a apresentar rotações desde o início do carregamento, com aumento simultâneo da carga e da rotação até o ponto limite (carga limite). Como o ângulo crítico para o *lift-off* é menor que o ângulo referente à carga limite, a resistência ao tombamento sofre uma redução considerável, o que não acontece com a viga perfeitamente reta, revelando sensibilidade às imperfeições.

Figura 5.4 (a) Resposta analítica para a viga padrão BT-54 com excentricidade inicial igual  $\ell/350$ ; (b) Detalhe da resposta analítica em (a); (c) Resposta analítica para diferentes valores de excentricidade inicial



Fonte: Autor (2021)

Em comparação com a viga perfeitamente reta, as cargas limites foram reduzidas em 74% e 85% ao considerar as excentricidades de  $\ell/750$  e  $\ell/350$ , respectivamente (Figura 5.4 (c)). A carga limite para a viga com excentricidade lateral igual  $\ell/750$  é 55,16 kN/m e para excentricidade igual a  $\ell/350$  é 30,18 kN/m. Como o peso próprio da viga é 10,67 kN/m, a razão entre a carga limite e o peso próprio é 5,16 para viga com excentricidade de  $\ell/750$  e 2,82 para excentricidade igual a  $\ell/350$ , quando o recomendado é superior 4. Isso evidencia a importância do controle de qualidade e a verificação das tolerâncias para tomada de decisões com relação à segurança estrutural destes elementos, uma vez que a carga limite reduziu significativamente com o aumento da excentricidade lateral inicial.

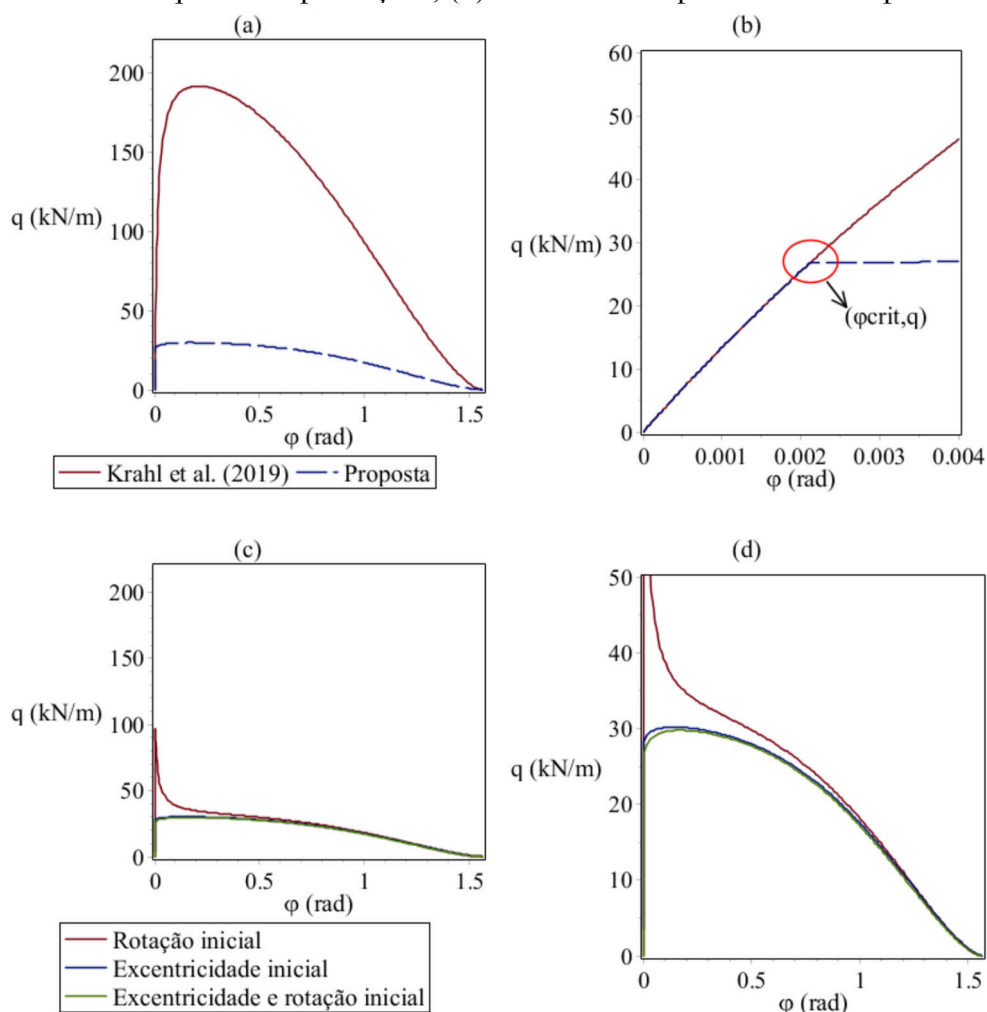
Considerando o comportamento linear da almofada, como desenvolvido por Krahel *et al.* (2019), a redução da carga limite para a excentricidade de  $\ell/350$  comparada à ausência de excentricidade é de 6%. Entretanto, a redução é de 85% quando se considera a função bilinear para a não-linearidade de contato. Observa-se, dessa análise, o impacto da consideração do *lift-off* nas previsões analíticas de instabilidade.

### 5.2.3 Viga com excentricidade e rotação inicial

Mantendo-se o valor de excentricidade inicial igual a  $\ell/350$  e considerando-se uma rotação inicial de 0,008727 rad, admitida de acordo com o estudo de caso de Oliveira (2019), tem-se redução de 84% da carga limite ao considerar o *lift-off* na análise de instabilidade (Figuras 5.5 (a) e (b)). Por se tratar de um problema de ponto limite, em que a viga desvia da trajetória fundamental desde o início do carregamento, e somado ao ângulo crítico menor que o ângulo referente a carga de pico, a carga de pico sofre uma redução significativa.

As Figuras 5.5 (c) e (d) mostram as soluções para os casos de viga com excentricidade inicial, viga com rotação inicial e viga com excentricidade e rotação inicial. Para a curva que apresenta apenas rotação inicial como imperfeição, é atribuindo valor nulo à parcela da excentricidade lateral inicial nas Equações 4.15 e 4.16. Observa-se que a situação que combina a rotação inicial com a excentricidade é mais crítica, mostrando que a rotação inicial torna o problema mais sensível à instabilidade lateral, conforme Hurff e Kahn (2012). Foram analisados valores específicos de imperfeições e a rotação apresentou ser menos crítica ao ser comparada com o limite de excentricidade inicial estabelecido pela *fib Model Code* (2010) ( $\lambda_0 = \ell/350$ ).

Figura 5.5 - (a) Resposta analítica para a viga BT-54 com excentricidade e rotação inicial; (b) Detalhe da resposta analítica (a); (c) Comparação da resposta analítica para diferentes tipos de imperfeições; (d) Detalhe da resposta analítica apresentada em (c)



Fonte: Autor (2021)

A carga limite para a viga que apresenta apenas rotação inicial como imperfeição inicial é 96,99 kN/m, para a viga que apresenta apenas excentricidade inicial é de 30,18 kN/m e para a viga com excentricidade e rotação inicial é 29,76 kN/m. Assim, a razão  $q/g$  para viga apenas com giro inicial foi de 9,07 e para a viga com excentricidade e rotação inicial, a situação mais crítica, foi de 2,78.

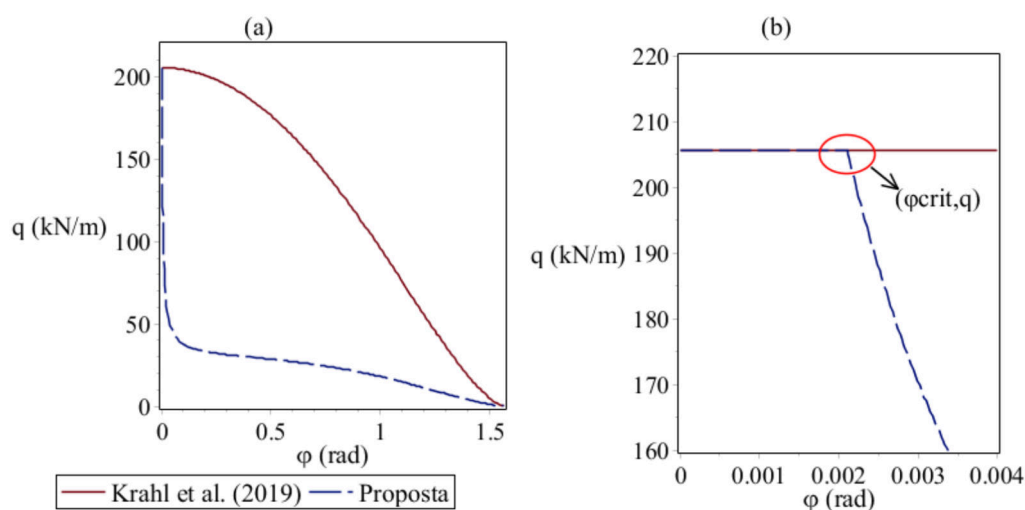
## 5.2.4 Viga com contraflecha de protensão apenas

Admitindo que a viga BT-54 analisada tem uma força de protensão ( $F$ ) igual a 7818,8 kN aplicada em cabos retos, com excentricidade ( $e$ ) em relação ao centroide da seção igual a 0,6323 m, provocando uma contraflecha de 0,1617 m, tem-se as curvas da Figura 5.6.



No caso de contraflecha provocada pela aplicação da força excêntrica ao centro de gravidade da viga, observa-se o efeito indesejável na instabilidade lateral, como já previsto por Oliveira (2019), Krahel *et al.* (2019) e Peart, Rhomberg e James (1992). Para ambas as propostas, tanto a deste trabalho, considerando a não linearidade das almofadas elastoméricas, quanto as de Oliveira (2019) e Krahel *et al.* (2019), o efeito da contraflecha de protensão, que desloca o centro de massa da viga, reduziu a carga limite em 1,55%. Observa-se também, que para ângulo crítico (0,00211 rad) a carga limite é equivalente à calculada considerando a rigidez a rotação da almofada linear.

Figura 5.6 - (a) Resposta analítica para a viga BT-54 com contraflecha de protensão sem excentricidade e sem rotação inicial; (b) detalhe da resposta analítica

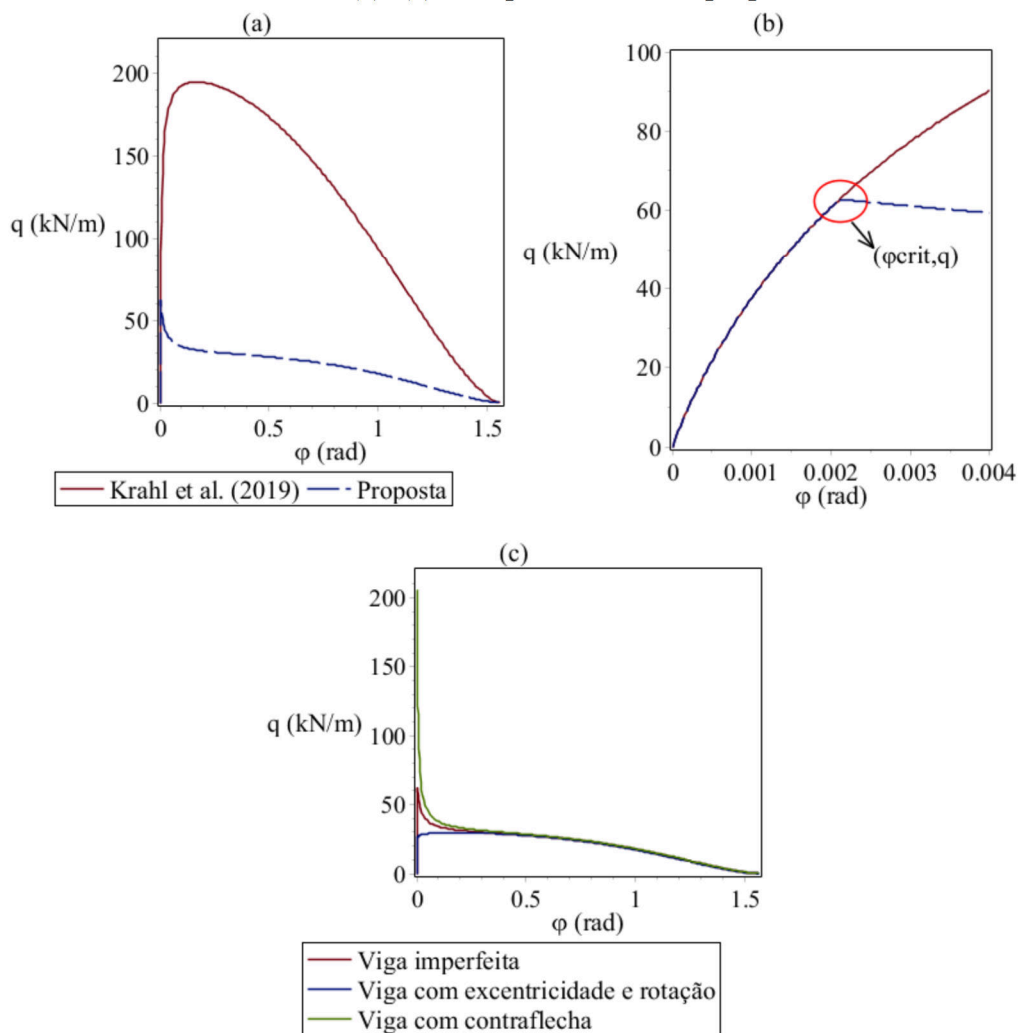


Fonte: Autor (2021)

### 5.2.5 Viga imperfeita

Por fim, é analisada a situação em que todas as imperfeições são consideradas (Equações 4.30 e 4.31), contraflecha devido a força de protensão ( $\delta_0 = 0,1617$  m), excentricidade lateral inicial ( $\lambda_0 = \ell/350$ ) e rotação inicial ( $\varphi_0 = 0,008727$  rad). A carga calculada considerando a rigidez do elastômero linear é 194,74 kN/m e considerando a não linearidade de contato é 61,92 kN/m, o que mostra que a consideração do *lift-off* causa uma redução de 68,20% da carga limite (Figuras 5.7 (a) e (b)). Além disso, a razão entre a carga limite e o peso próprio da viga ( $q/g$ ), neste caso é 5,80, não sendo a situação mais crítica entre os casos analisados (Figura 5.7 (c)). Isso será discutido com mais detalhes no Capítulo 6, em que é feita uma análise paramétrica com base nas soluções propostas.

Figura 5.7 - (a) Resposta analítica para a viga BT-54 imperfeita; (b) Detalhe da resposta analítica de (a). (c) Comparação de três propostas



Fonte: Autor (2021)

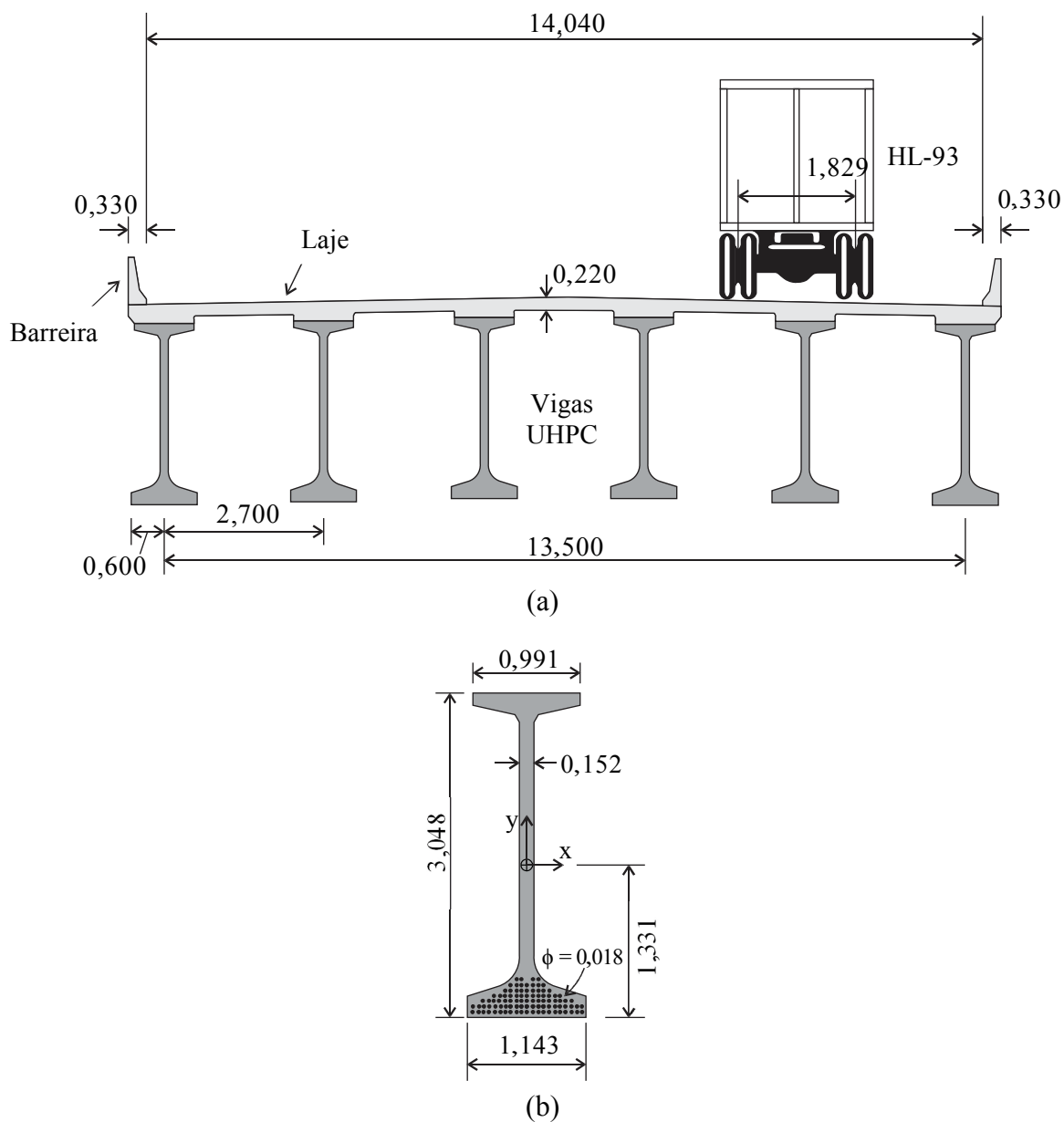
### 5.3 Estudo de Caso 2

São analisadas as propostas analíticas apresentadas no Capítulo 4, considerando uma viga de UHPC com resistência à compressão igual a 150 MPa e comprimento de 91,4 m, cujo projeto em fase final foi desenvolvido por Helou e Graybeal (2019).

Para isso, é considerada uma viga de interior de uma ponte de vão único, composta por 6 vigas I UHPC pré-tensionadas, espaçadas a 2,70 m de centro a centro, ao longo de uma laje de 0,22 m de espessura e 14,70 m de largura, feita com concreto convencional moldado *in loco*. Foram consideradas barreiras de 0,33 m de largura e 0,82 m de altura dos dois lados da pista. Para a análise da ponte é considerado o veículo HL-93, de acordo com a AASHTO (2012). As Figuras 5.8 (a) e (b) apresentam a seção transversal da ponte

e a seção da viga analisada, cujas reações de apoio foram obtidas através do *software PGSuper* e são indicadas na Tabela 5.1.

Figura 5.8 - (a) Seção transversal da ponte; (b) Seção transversal da viga (unidades em m)



Fonte: Autor (2021)

A viga ilustrada na Figura 5.8 (b) tem altura do centro de gravidade ( $y_b$ ) igual a 1,331 m, momento de inércia em relação ao eixo y ( $I_y$ ) igual a 0,044 m<sup>4</sup>, momento de inércia em relação ao eixo x ( $I_x$ ) igual a 1,172 m<sup>4</sup> e módulo de elasticidade (E) de 50,125 GPa.

Tabela 5.1 – Reações de apoio da viga (unidades em kN)

<b>Peso próprio</b>	1010,32
<b>Laje</b>	730,31
<b>Barreira</b>	61,68
<b>Veículo HL-93</b>	456,31
<b>Total</b>	<b>2258,62</b>

Fonte: Autor (2021)

A almofada utilizada tem dimensões  $L = 670$  mm,  $W = 395$  mm e  $H = 73$  mm, com 3 camadas internas ( $n_i = 3$ ), sendo a espessura da camada interna  $h_i = 15$  mm e da camada externa  $h_e = 7,5$  mm ( $n_e = 2$ ), módulo de cisalhamento do elastômero ( $G$ ) de 0,85 MPa, fator de forma das camadas internas ( $S_i$ ) igual a 8,28 (Equação 5.1), fator de forma das camadas externas ( $S_e$ ) igual a 16,57 (Equação 5.2), fator de forma ponderado da almofada ( $S$ ) igual a 10,35 (Equação 5.3) e módulo de compressão efetivo da almofada ( $E_{pad}$ ) igual a 546,75 MPa (Equação 5.4). A almofada foi verificada quanto às tensões de compressão sob carga de serviço, para garantir a sua aplicabilidade. De acordo com a AASHTO (2012), as tensões de compressão aplicadas em aparelho de apoio cintado devem atender às verificações da Equação 5.5.

$$S_i = \frac{LW}{2h_i(L+W)} \quad (5.1)$$

$$S_e = \frac{LW}{2h_e(L+W)} \quad (5.2)$$

$$S = \frac{n_i h_i S_i + n_e h_e S_e}{n_i h_i + n_e h_e} \quad (5.3)$$

$$E_{pad} = 6GS^2 \quad (5.4)$$

$$\sigma_s \leq 1,25GS_i \quad (5.5)$$

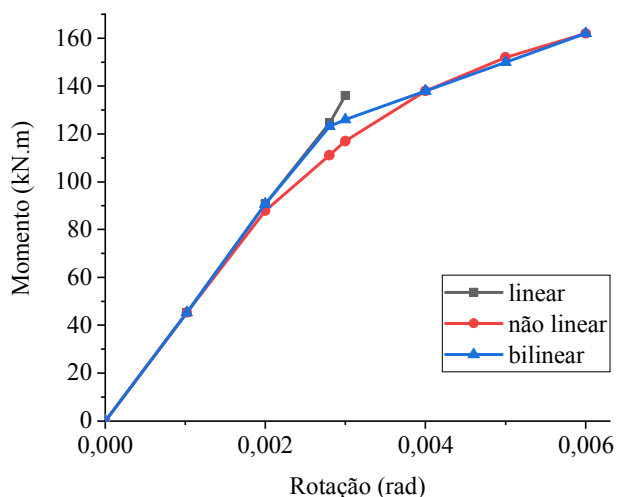
$$\sigma_s \leq 8,62 \text{ MPa}$$

### 5.3.1 Resultados da viga UHPC

Inicialmente, é determinada a relação momento-rotação não linear apresentada da Figura 5.9. Para isso, utiliza-se a Equação 2.36 conforme proposto por Krah, Lima e Siqueira (2020), considerando que  $P$  é a carga axial aplicada na almofada referente ao peso próprio da viga. Então, a relação não linear é aproximada para a curva

bilinear apresentada (Equações 3.5 e 3.6), com ângulo crítico ( $\varphi_{crit}$ ) igual a 0,0028 rad, momento crítico ( $M_{crit}$ ) igual a 123,25 kN.m e coeficientes de rigidez  $k_\varphi$  e  $h$  iguais a 44476,84 kN.m/rad e 12000 kN.m/rad, respectivamente (Figura 5.9).

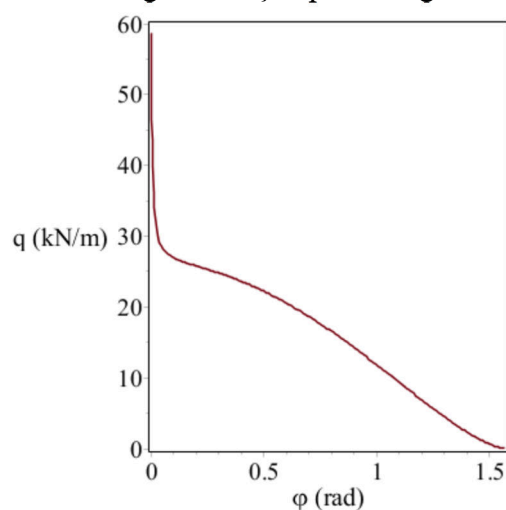
Figura 5.9 – Relação momento-rotação da almofada



Fonte: Autor (2021)

Considerando que a viga não apresenta imperfeições iniciais (Equações 4.5 e 4.6), tem-se a curva apresentada na Figura 5.10 e carga crítica ( $q_{crit}$ ) igual a 58,58 kN/m. Como o peso próprio da viga é igual a 22,11 kN/m, a razão entre a carga crítica e o peso próprio ( $g$ ) é igual a 2,65, menor do que o recomendado ( $q_{crit}/g > 4$ ). A alta resistência do concreto permite que as vigas UHPC tenham vãos significativamente maiores, no entanto, o aumento do vão somado à baixa rigidez lateral, torna a viga UHPC analisada neste trabalho significativamente mais sensível à instabilidade lateral do que a viga BT-54 analisada no item 5.1.

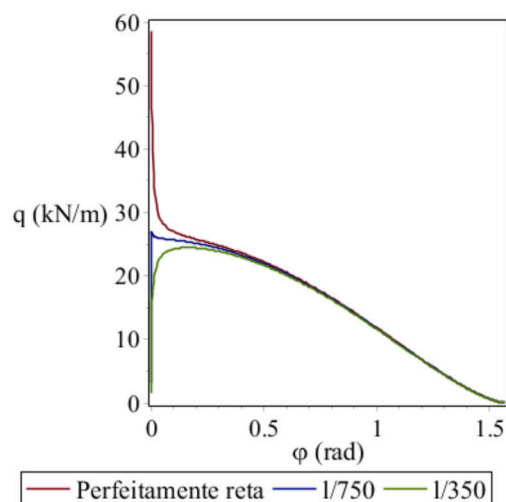
Figura 5.10 – Resposta analítica carga  $\times$  rotação para a viga UHPC perfeitamente reta



Fonte: Autor (2021)

Foram considerados dois valores de excentricidade lateral inicial ( $\ell/350$  e  $\ell/750$ ), para avaliar a sensibilidade da viga de UHPC quanto à influência da excentricidade inicial na instabilidade lateral (Figura 5.11), sendo  $\ell/350$  o limite normativo da *fib Model Code* (2010) e  $\ell/750$  a tolerância indicada pela norma espanhola EHE-08.

Figura 5.11 – Resposta analítica para a viga UHPC com excentricidade inicial



Fonte: Autor (2021)

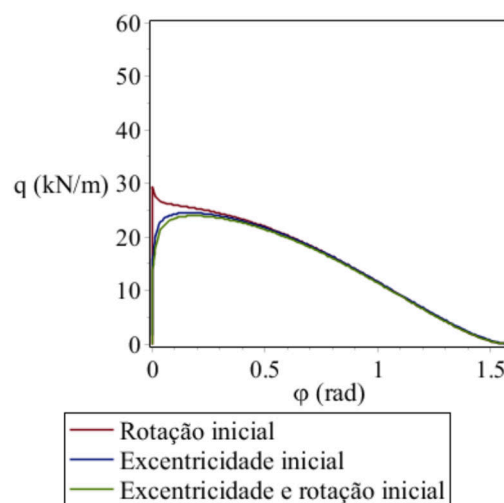
As vigas com excentricidade inicial em comparação com a viga sem imperfeições, considerado o comportamento bilinear de contato para ambos os casos, apresentaram redução de 53,9% do valor da carga limite ( $q = 26,97$  kN/m) para excentricidade de  $\ell/750$  e de 58,2% para  $\ell/350$  ( $q = 24,47$  kN/m). Em relação à razão  $q/g$ , é igual a 1,22 para excentricidade  $\ell/750$  e 1,11 para  $\ell/350$ , sendo  $g = 22,11$  kN/m. Estes resultados

evidenciam, portanto, a sensibilidade das vigas longas e esbeltas quanto às imperfeições iniciais.

Além disso, observa-se que para a viga UHPC é necessário considerar alternativas de aparelhos de apoio que sejam capazes de absorver tensões de tração, já que os apoios em que ocorre *lift-off* se mostraram ineficientes para vigas desse porte, uma vez que a não linearidade de contato começa com a descompressão da almofada para pequenas rotações, correspondentes ao  $\varphi_{crit}$ .

Para avaliar o efeito da rotação na instabilidade lateral da viga de UHPC é considerada rotação inicial igual a 0,008727 rad e excentricidade inicial  $e/350$  para três situações: viga apenas com rotação inicial; viga apenas com excentricidade inicial; e viga com excentricidade inicial e rotação inicial simultaneamente (Figura 5.12). Ressalta-se que, no caso de viga apenas com rotação inicial, são admitidas nulas as parcelas referentes à excentricidade inicial nas Equações 4.15 e 4.16.

Figura 5.12 – Influência da rotação inicial



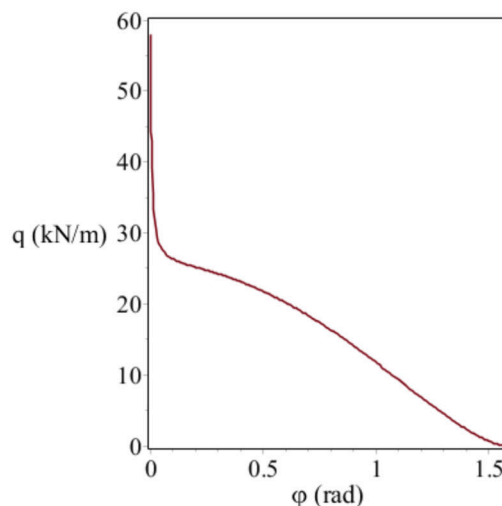
Fonte: Autor (2021)

A carga limite para a viga com rotação inicial é 29,39 kN/m; para a viga exclusivamente com excentricidade inicial é de 24,47 kN/m; e para a viga com excentricidade e rotação inicial é 23,92 kN/m. Em termos de carga limite, considerando os valores utilizados para as imperfeições, a influência da excentricidade lateral é mais crítica do que a rotação inicial. A razão entre a carga limite e o peso próprio para viga apenas com giro inicial é de 1,33, 20% superior ao obtido para viga com excentricidade inicial.

A situação mais crítica é a que combina excentricidade e rotação inicial, cuja relação entre a carga limite e o peso próprio é igual a 1,08, mostrando que a rotação inicial torna o problema ainda mais sensível à instabilidade lateral, conforme evidenciado por Hurff e Kahn (2012).

Observa-se na Figura 5.13 a resposta analítica para a viga com contraflecha de protensão. Admitindo que a força de protensão ( $F$ ) é igual a 26160 kN, conforme o projeto de Helou e Graybeal (2019) e que a contraflecha é 0,59 m, tem-se que a carga limite é igual a 57,89 kN/m ( $q/g = 2,62$ ), bem próxima ao da viga perfeitamente reta ( $q/g = 2,65$ ), mostrando que esta variável não é significativa para a viga de UHPC, conforme já evidenciado por Krahel *et al.* (2019).

Figura 5.13 – Resposta analítica para a viga UHPC com contraflecha

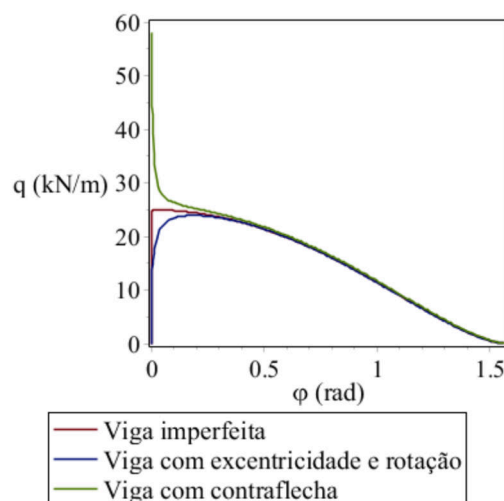


Fonte: Autor (2021)

Por fim, é analisada a situação em que todas as imperfeições são consideradas (Equações 4.30 e 4.31), contraflecha devido a força de protensão ( $\delta_0 = 0,59$  m), excentricidade lateral inicial ( $\lambda_0 = \ell/350$ ) e rotação inicial ( $\phi_0 = 0,008727$  rad). A carga calculada considerando a não linearidade de contato é 24,93 kN/m e a razão entre a carga limite e o peso próprio da viga ( $q/g$ ), neste caso é 1,13, não sendo a situação mais crítica entre os casos analisados (Figura 5.14), o que será discutido com mais detalhes no Capítulo 6.



Figura 5.14 - Resposta analítica para a viga UHPC imperfeita



Fonte: Autor (2021)

A Tabela 5.2 apresenta um resumo das cargas limites obtidas para a viga de UHPC com as respectivas razões  $q/g$  de cada situação.

Tabela 5.2 – Cargas limites para a viga de UHPC

Situação	Carga limite (kN/m)	$q/g$
Viga perfeitamente reta	58,58	2,65
Viga com excentricidade inicial ( $\lambda_0 = \ell/750$ )	26,97	1,22
Viga com excentricidade inicial ( $\lambda_0 = \ell/350$ )	24,47	1,11
Viga com rotação inicial apenas	29,39	1,33
Viga com excentricidade ( $\ell/350$ ) e rotação inicial	23,92	1,08
Viga com contraflecha apenas	57,89	2,62
Viga imperfeita	24,93	1,13

Fonte: Autor (2021)

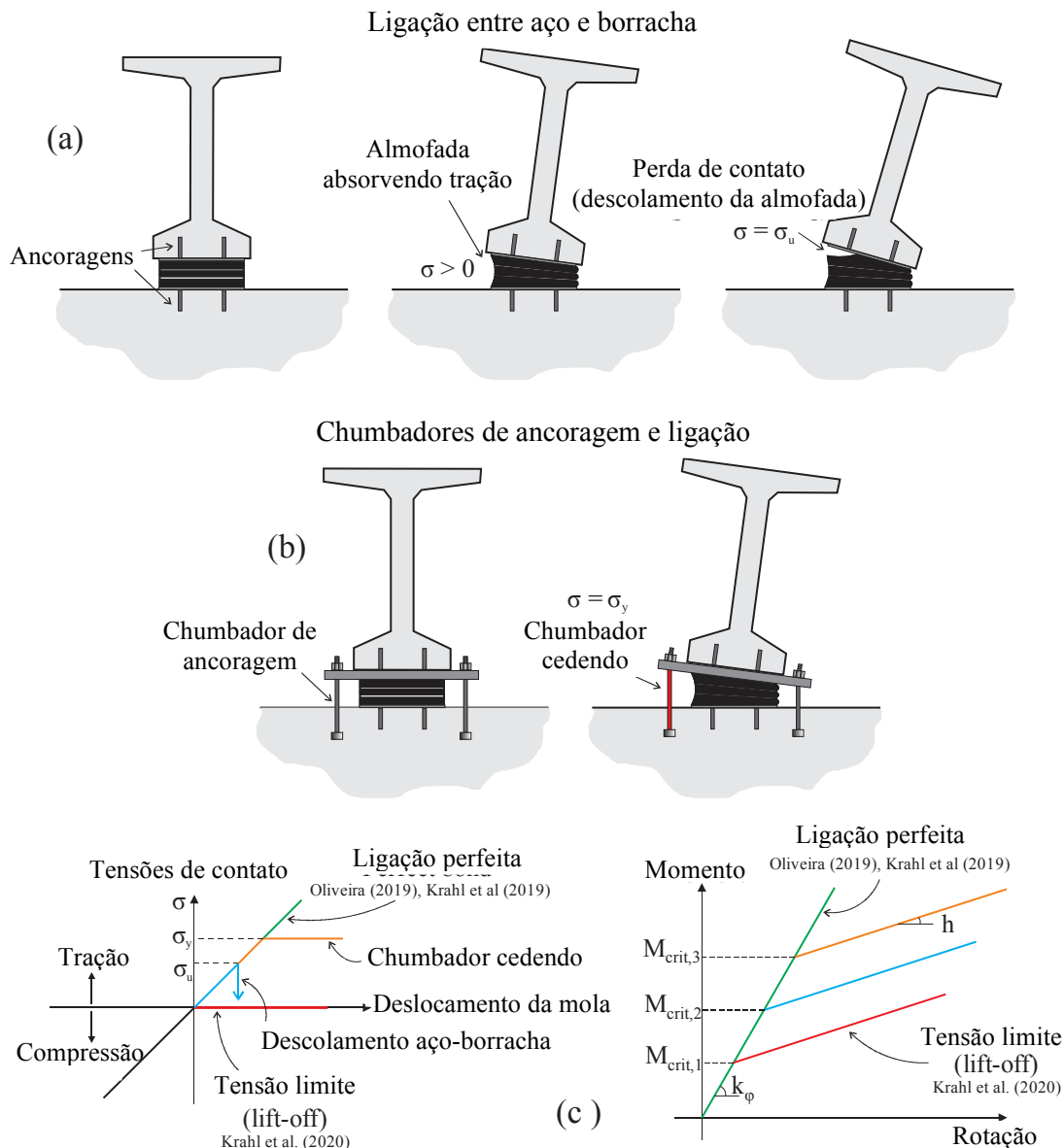
### 5.3.2 Sugestões para melhorar a capacidade de carga da viga UHPC

A consideração do *lift-off* é muito significativa para vigas muito esbeltas, como a viga UHPC de 91,4 m de Helou e Graybeal (2019). Portanto, para execução segura destes elementos, é necessário considerar aparelhos de apoio que possam suportar tensões de tração. Quando a mola é considerada elástica e linear para compressão, assim como para tração, como feito em Oliveira (2019) e Krahel *et al.* (2019), a capacidade à instabilidade

é elevada. No entanto, existem soluções intermediárias, como casos em que há aderência entre aparelho de apoio e viga (Steelman *et al.*, 2014), Figura 5.15 (a), ou a utilização de chumbadores (Braga, 1986), Figura 5.15 (b). Estas alternativas geram comportamento intermediários à mola elástica ideal e o caso sem aderência (*lift-off*), como mostra a Figura 5.15 (c).

Este trabalho tem como foco investigar a influência da consideração do *lift-off* nas respostas analíticas de instabilidade de vigas pré-moldadas sobre almofadas elastoméricas. No entanto, em caráter preliminar, é verificada a influência de apoios que possam absorver tração na interação sobre a carga de instabilidade, como mostrado na Figura 5.15 (c). Isto será feito considerando o aumento do valor do momento crítico para as Equações 3.5 e 3.6, a partir do caso que não há aderência (*lift-off*) na interação, uma vez que, os apoios em que ocorre *lift-off* se mostraram ineficientes para vigas do porte da UHPC de 91,4 m, já que a não linearidade de contato começa com a descompressão do apoio para pequenas rotações, correspondentes ao  $\varphi_{crit}$ .

Figura 5.15 - Soluções para os aparelhos de apoio



Fonte: Autor (2021)

Aparelhos de apoio que absorvem tração terão maior  $M_{crit}$ . Sendo assim, são testados dois casos de  $M_{crit}$  maiores que o obtido para o aparelho que não absorve tração (*lift-off*), sendo um o dobro e outro o quádruplo.

Para a viga com excentricidade inicial apenas, a imperfeição de  $\ell/350$  é considerada e as razões  $q/g$  para cada teste são apresentadas na Tabela 5.3. A Figura 5.16 apresenta os dois limites deste problema, sendo o mais crítico quando não existe aderência entre apoio e viga (*lower bound*) e a situação mais favorável com perfeita aderência (*upper bound*). A figura também mostra as curvas para os momentos críticos testados (246,51 kN.m e

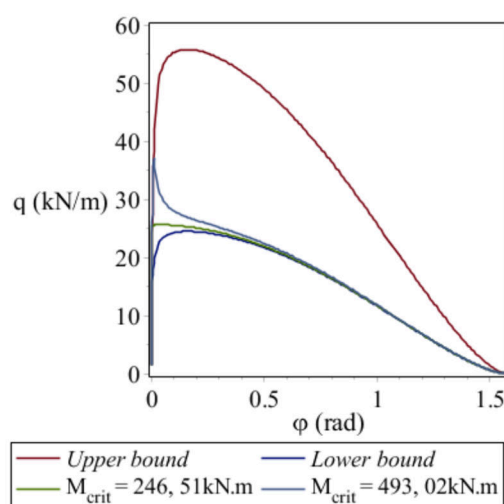
493,02 kN.m), que podem ser obtidos através da utilização de almofadas com aderência (Steelman *et al.*, 2014), Figura 5.15 (a), ou de chumbadores (Braga, 1986), Figura 5.15 (b). Destaca-se aqui a necessidade de ensaios experimentais e pesquisas destas configurações para o aparelho sob rotação combinada à compressão inicial devido ao peso próprio, como realizado por Consolazio e Hamilton (2012) para apoios sem aderência.

Tabela 5.3 – Testes de  $M_{crit}$  para a viga UHPC com excentricidade inicial

$M_{crit}$ (kN.m)	$\phi_{crit}$ (rad)	$q$ (kN/m)	$q/g$
123,25	0,0028	24,47	1,11
246,51	0,0055	25,61	1,16
493,02	0,0111	36,97	1,67

Fonte: Autor (2021)

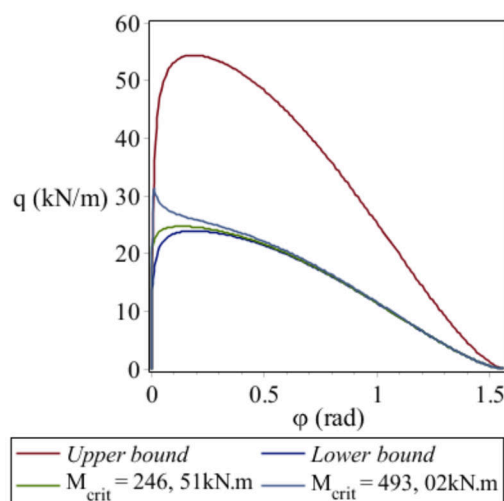
Figura 5.16 – Limites da resposta analítica para viga com excentricidade inicial ( $e/350$ )



Fonte: Autor (2021)

A Figura 5.17 mostra os limites do problema (*upper bound e lower bound*) para a viga UHPC com excentricidade e rotação inicial e os testes para o dobro e o quádruplo do  $M_{crit}$  obtido para o aparelho que não absorve tração, resultando em cargas limites iguais a 24,69 kN/m ( $q/g = 1,12$ ) para  $M_{crit}$  igual a 246,51 kN.m; e 31,29 kN/m ( $q/g = 1,42$ ) para  $M_{crit}$  igual a 493,02 kN.m. Observa-se, de forma preliminar, a influência que os apoios que absorvem tração na interação viga-apoio podem exercer sobre a carga de instabilidade, já que a obtenção dos momentos testados pode ser feita com a utilização de almofadas com aderência ou de chumbadores.

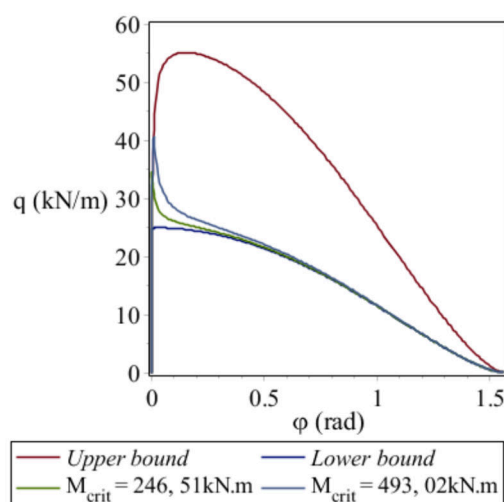
Figura 5.17 – Limites da resposta analítica para a viga UHPC com excentricidade e rotação inicial



Fonte: Autor (2021)

Por fim, a Figura 5.18 mostra os limites do problema (*upper bound e lower bound*) para a viga UHPC imperfeita e os testes para o dobro e o quadruplo do  $M_{crit}$ , resultando em cargas limites iguais a 34,46 kN/m ( $q/g = 1,56$ ) para  $2 \times M_{crit} = 246,51$  kN.m; e 40,66 kN/m ( $q/g = 2,02$ ) para  $4 \times M_{crit} = 493,02$  kN.m. Observa-se novamente, a influência que os apoios que absorvem tração na interação viga-apoio podem exercer sobre a carga de instabilidade.

Figura 5.18 – Limites da resposta analítica para a viga UHPC imperfeita



Fonte: Autor (2021)

# Capítulo 6

## Simulações Paramétricas

---

### 6.1 Considerações iniciais

Neste capítulo são apresentados os resultados da análise paramétrica conforme a metodologia apresentada no Capítulo 3. Considerando as soluções analíticas desenvolvidas no Capítulo 4, são analisadas a influência da excentricidade lateral inicial, da resistência do concreto, da força de protensão e dos coeficientes  $k_\phi$  e  $h$  (relacionados à não linearidade de contato).

As simulações paramétricas são feitas considerando, inicialmente, os dados base da viga UHPC de 91,4 m apresentada no Capítulo 5. Em seguida, são considerados alguns valores de entrada diferentes para os parâmetros analisados. Os resultados das 100 mil simulações, considerando os coeficientes de variação para cada parâmetro (Capítulo 3), são apresentados em gráficos de nuvem de pontos, onde cada ponto representa o resultado de uma simulação. Também são apresentados histogramas para caracterizar a quantidade de simulações em intervalos de carga pré-definidos. Em cada histograma também é apresentada a respectiva distribuição gaussiana, a fim de representar estatisticamente cada problema.

### 6.2 Resultado dos dados base

Nesta seção são apresentados os resultados considerando a metodologia apresentada no Capítulo 3 e os dados base da viga UHPC de 91,4 m comprimento, a qual foi estudada no Capítulo 5. As propriedades da viga são resumidas na Tabela 6.1.

A almofada utilizada tem dimensões  $L = 670$  mm,  $W = 395$  mm e  $H = 73$  mm, com 3 camadas internas ( $n_i = 3$ ), sendo a espessura da camada interna  $h_i = 15$  mm e da camada externa  $h_e = 7,5$  mm ( $n_e = 2$ ), módulo de cisalhamento do elastômero ( $G$ ) de 0,85 MPa, fator de forma das camadas internas ( $S_i$ ) igual a 8,28 (Equação 5.1), fator de forma das camadas externas ( $S_e$ ) igual a 16,57 (Equação 5.2), fator de forma ponderado da almofada ( $S$ ) igual a 10,35 (Equação 5.3) e módulo de compressão da almofada ( $E_{pad}$ ) igual a 546,75 MPa (Equação 5.4). Com isso, o ângulo crítico ( $\phi_{crit}$ ) é igual a 0,0028 rad,

momento crítico ( $M_{crit}$ ) é igual a 123,25 kN.m e coeficientes de rigidez  $k_\varphi$  e  $h$  são iguais a 44476,84 kN.m/rad e 12000 kN.m/rad, respectivamente.

Tabela 6.1 – Propriedades da viga UHPC

<b>Comprimento da viga (<math>\ell</math>)</b>	91,40 m
<b>Módulo de elasticidade (E)</b>	50,125 GPa
<b>Peso próprio da viga (g)</b>	22,110 kN/m
<b>Altura do centro de gravidade (<math>y_b</math>)</b>	1,331 m
<b>Momento de inércia em relação ao eixo x (<math>I_x</math>)</b>	1,172 m <sup>4</sup>
<b>Momento de inércia em relação ao eixo y (<math>I_y</math>)</b>	0,044 m <sup>4</sup>
<b>Força de protensão (F)</b>	26160 kN

Fonte: Autor (2021)

Como imperfeições iniciais tem-se: a contraflecha devida à força de protensão igual 0,59 m; a excentricidade lateral inicial da viga igual a  $\ell/350$ ; e a rotação inicial igual a 0,008727 rad.

Considerando os valores sem variações, são obtidos os valores de carga limite e ângulo para a respectiva carga apresentados na Tabela 6.2. Observa-se que, tendo como base a viga perfeitamente reta, a carga limite é reduzida em 1,16% ao considerar apenas a contraflecha de protensão, ao considerar a excentricidade lateral inicial essa redução é de 58,22%, enquanto com a consideração da excentricidade e rotação a redução é de 59,16% e para a viga imperfeita, com todos os efeitos simultaneamente, é de 57,43%.

Tabela 6.2 – Cargas limites para os dados base da viga UHPC

<b>Análise</b>	<b>Carga limite</b>	<b>Ângulo</b>
Viga perfeitamente reta	58,57 kN/m	0,0028 rad
Viga com contraflecha de protensão	57,89 kN/m	0,0028 rad
Viga com excentricidade inicial	24,47 kN/m	0,1624 rad
Viga com excentricidade e rotação inicial	23,92 kN/m	0,1884 rad
Viga imperfeita	24,93 kN/m	0,0361 rad

Fonte: Autor (2021)

Considerando os coeficientes de variação para o módulo de elasticidade igual a 0,15, para excentricidade lateral inicial igual a 0,61, para força de protensão igual a 0,05, e para as

rigidezes do elastômero  $k_\phi$  e  $h$  iguais a 0,05 e 0,08, respectivamente, e variando os cinco parâmetros mutuamente, obtém-se os valores médios para as 100 mil simulações, conforme a Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Resultados médios das 100 mil simulações

<b>Análise</b>	<b>Carga limite</b>	<b>Ângulo</b>
Viga perfeitamente reta	58,34 kN/m	-
Viga com contraflecha de protensão	57,82 kN/m	-
Viga com excentricidade inicial	25,53 kN/m	0,1353rad
Viga com excentricidade e rotação inicial	24,83 kN/m	0,1706 rad
Viga imperfeita	25,36 kN/m	0,0316 rad

Fonte: Autor (2021)

Observa-se que a carga limite média das 100 mil simulações (Tabela 6.3) são bem próximas às obtidas com os dados base sem variação (Tabela 6.2), chegando a diferenças de no máximo 4% entre as situações comparadas. Os valores da Tabela 6.3 se aproximariam mais aos da Tabela 6.2 para uma quantidade maior de simulações. Sendo que, a quantidade ideal de simulações pode ser estimada como  $10^{n+2}$  para uma probabilidade de falha igual a  $10^{-n}$ . Conforme a *JCSS Probabilistic Model Code* (2001) a probabilidade de falha das simulações neste caso deve ser inferior  $10^{-4}$ , o que resulta em  $10^6$  simulações.

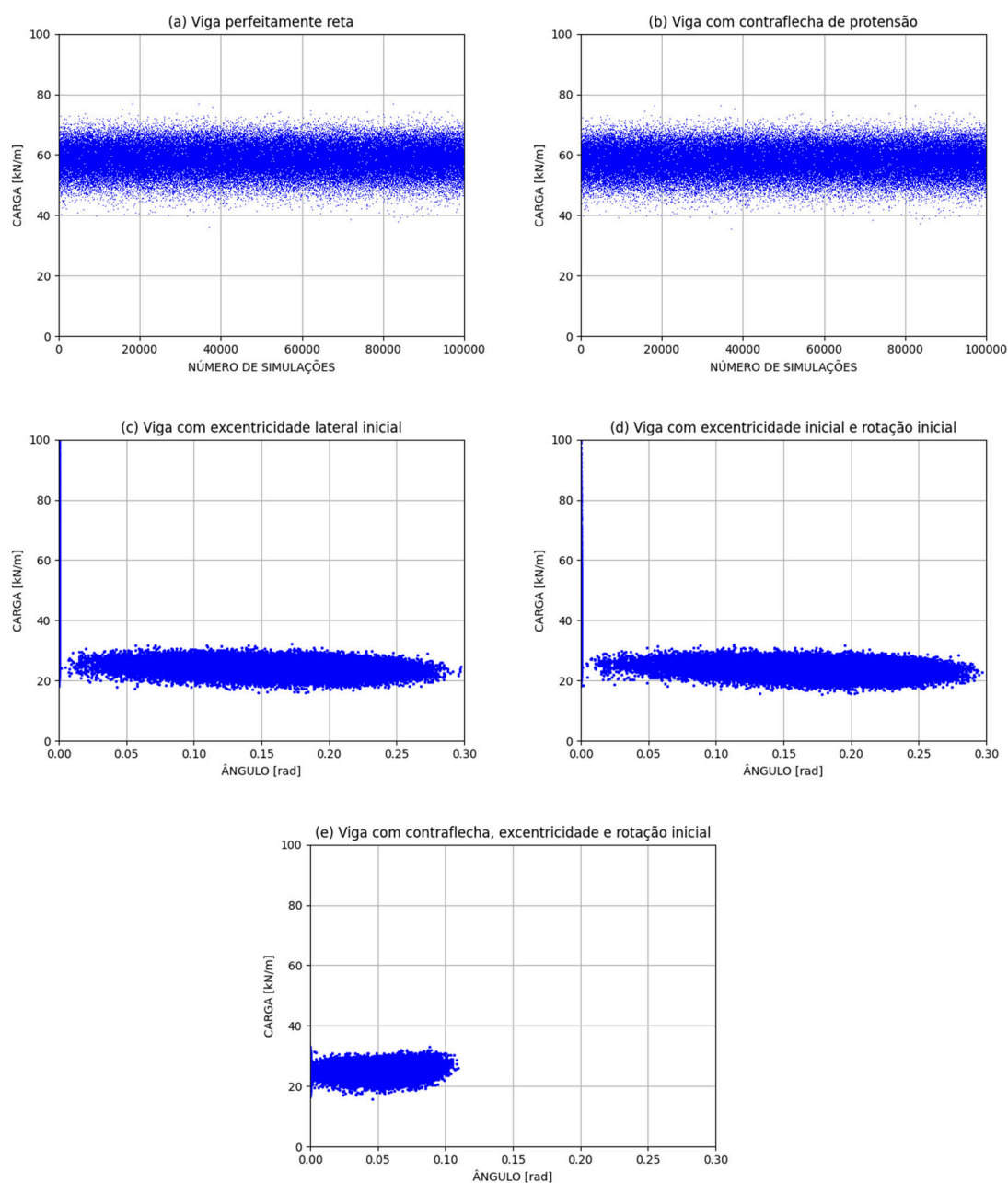
Para o valor médio das 100 mil simulações, tendo como base a viga perfeitamente reta, a carga limite reduz 0,89% ao considerar apenas a contraflecha de protensão, ao considerar a excentricidade lateral inicial essa redução é de 56,24%, enquanto com a consideração da excentricidade e rotação simultaneamente a redução é de 57,44% e para a viga imperfeita é de 56,53%.

A Figura 6.1 ilustra em nuvem de pontos a carga máxima obtida para as 100 mil simulações. São considerados os cinco parâmetros analisados variando simultaneamente, com seus respectivos coeficientes de variação. As Figuras 6.1 (a) e (b), para viga perfeitamente reta e viga com contraflecha de protensão, respectivamente, as cargas limites são indicadas em função de cada simulação. Já nas Figuras 6.1 (c), (d) e (e), são ilustradas as demais situações, viga com excentricidade lateral inicial, viga com excentricidade e rotação inicial e viga imperfeita (com contraflecha de protensão, excentricidade lateral e rotação inicial). Nos casos das Figuras 6.1 (c), (d) e (e), as cargas limites são indicadas em função dos seus respectivos ângulos de tombamento.



Para a viga perfeitamente reta (Figura 6.1 (a)) são consideradas as Equações 4.5 e 4.6 nas 100 mil simulações, para a viga com contraflecha apenas (Figura 6.1 (b)) são consideradas as Equações 4.23 e 4.24, para a viga com excentricidade lateral inicial (Figura 6.1 (c)) são consideradas as Equações 4.10 e 4.11, para a viga com excentricidade e rotação inicial (Figura 6.1 (d)) são consideradas as Equações 4.15 e 4.16, e por fim, para a viga imperfeita (Figura 6.1 (e)) são consideradas as Equações 4.30 e 4.31.

Figura 6.1 – Respostas das 100 mil simulações



Fonte: Autor (2021)

Observa-se, ao analisar as Figuras 6.1 (c), (d) e (e), que a magnitude de variação do ângulo é bem maior para a viga com excentricidade apenas (Figura 6.1 (c)) e para a viga com excentricidade e rotação inicial (Figura 6.1 (d)), do que para a viga imperfeita (Figura 6.1 (e)). Quando todas as imperfeições são consideradas, os valores dos ângulos referentes às cargas limites das 100 mil simulações estão concentrados em valores até 0,11 rad, enquanto para os outros casos a nuvem de pontos se espalha até valores próximos a 0,30 rad.

O histograma da Figura 6.2 (a) considera os resultados apresentados na Figura 6.1 (e), colocados de forma a representar a quantidade de simulações que apresentam o valor de carga limite em um determinado intervalo. No eixo x são representados os valores de carga limite e no eixo y a frequência de cada intervalo de carga. Os intervalos de carga são definidos considerando 40 intervalos, de mesmo tamanho, distribuídos da carga mínima até a carga máxima.

Figura 6.2 – (a) Histograma de carga limite da viga imperfeita por quantidade de simulações (b) Distribuição de Gauss

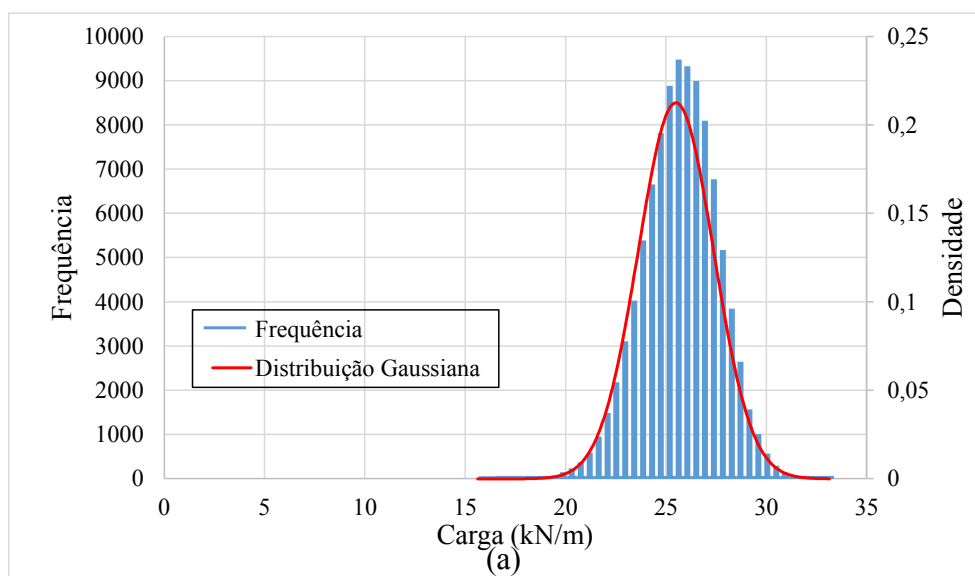
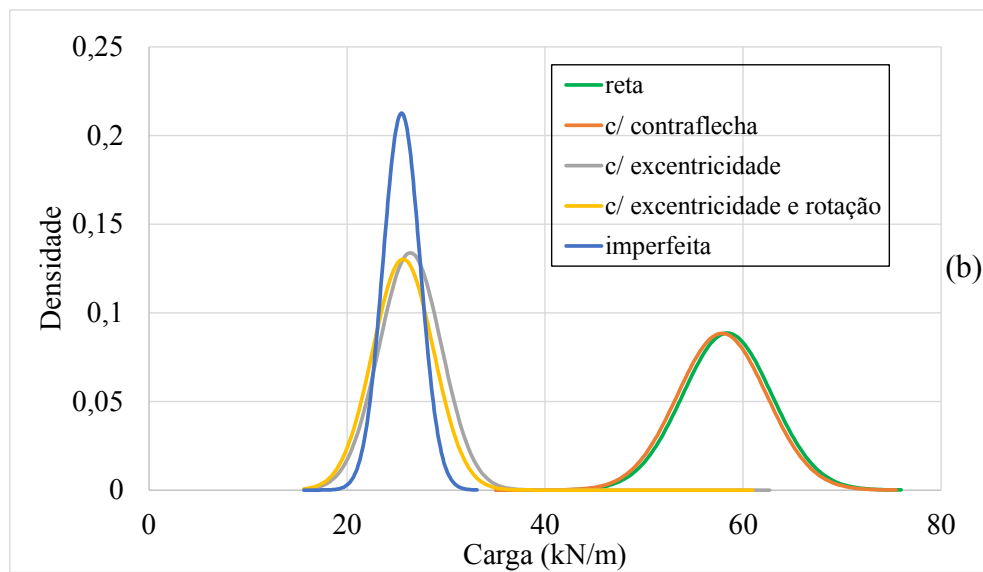


Figura 6.2 – (a) Histograma de carga limite da viga imperfeita por quantidade de simulações (b) Distribuição de Gauss



Fonte: Autor (2021)

A Figura 6.2 (a) também apresenta a distribuição Gaussiana assumida para a viga imperfeita conforme a Equação 6.1, a qual tem valor médio ( $\mu$ ) igual a 25,36 kN/m e desvio padrão ( $\sigma$ ) igual a 1,88. A Figura 6.2 (b) apresenta as distribuições de Gauss para todas as situações analisadas neste trabalho, viga perfeitamente reta, viga com excentricidade inicial, viga com excentricidade e rotação inicial, viga com contraflecha devido a força de protensão e, novamente, viga imperfeita, a fim de comparação. Dos resultados apresentados na Figura 6.2 (b) tem-se que: a viga perfeitamente reta tem valor médio igual a 58,34 kN/m e desvio padrão igual a 4,51; a viga com excentricidade inicial tem valor médio igual a 25,53 kN/m e desvio padrão igual a 3,16; a viga com excentricidade e rotação inicial tem valor médio igual a 24,83 kN/m e desvio padrão igual a 3,07; e a viga com contraflecha devido a força de protensão tem valor médio igual a 57,82 kN/m e desvio padrão igual a 4,51. Observa-se então que o desvio padrão para as vigas reta e com contraflecha ( $\sigma = 4,51$ ) são significativamente maiores quando comparados com a viga imperfeita ( $\sigma = 1,88$ ), sendo que, quanto menor o desvio padrão, maior é o controle das variáveis analisadas.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (6.1)$$

Além disso, é assumida como falha a situação em que a carga limite é menor do que o peso próprio da viga (22,11 kN/m). A partir da quantidade de falhas, calcula-se a probabilidade de falha diante das simulações, que neste caso foi igual a 0,18. Como a probabilidade máxima de falha conforme o JCSS *Probabilistic Model Code* (2001) é  $10^{-4}$ , percebe-se aqui uma probabilidade além do recomendado, verificando novamente a alta sensibilidade de vigas longas e delgadas, como as vigas UHPC, quanto à instabilidade lateral.

### 6.3 Excentricidade Inicial

Para avaliar a influência da excentricidade lateral inicial, são avaliados nesta seção três valores médios ( $\ell/1000$ ,  $\ell/750$  e  $\ell/350$ ). Sendo analisadas as três situações com este parâmetro: viga com excentricidade lateral inicial; viga com excentricidade e rotação inicial; e viga imperfeita (com excentricidade lateral inicial, rotação inicial e contraflecha devido a força de protensão). Para isso são mantidos todos os dados base do item 6.2, alterando apenas o valor da excentricidade em cada análise.

A Figura 6.3 (a) ilustra os resultados das 100 mil simulações para a viga com excentricidade inicial igual a  $\ell/1000$ , a Figura 6.3 (b) tem como diferença o valor da excentricidade inicial, igual a  $\ell/750$  e a Figura 6.3 (c) a excentricidade inicial é igual a  $\ell/350$ . Observa-se que quanto maior o valor da excentricidade, maior a dispersão da nuvem de pontos.

Figura 6.3 – Análises viga com excentricidade inicial

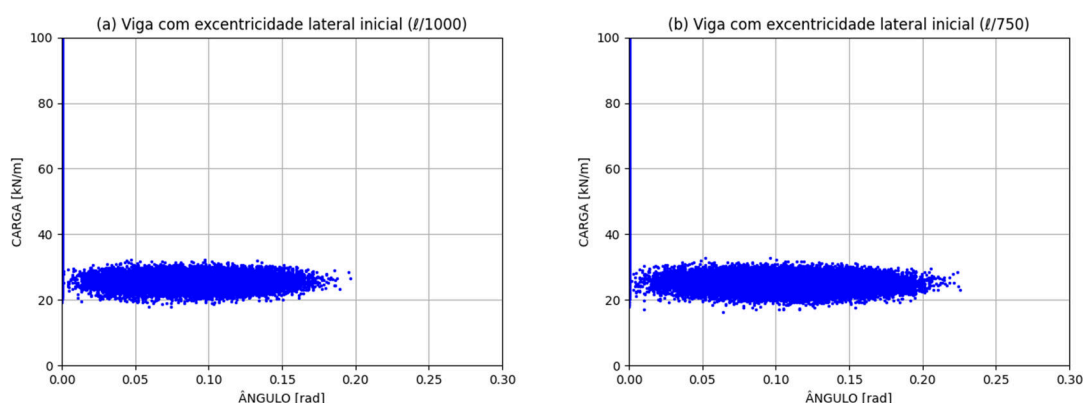
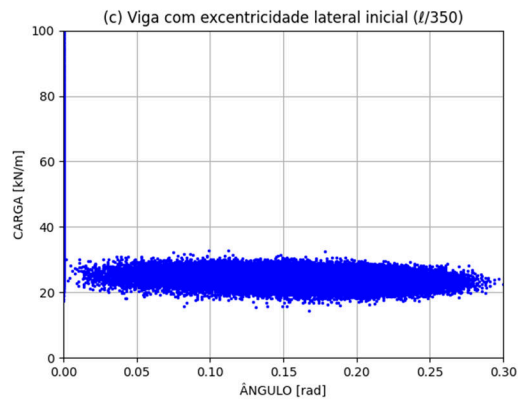


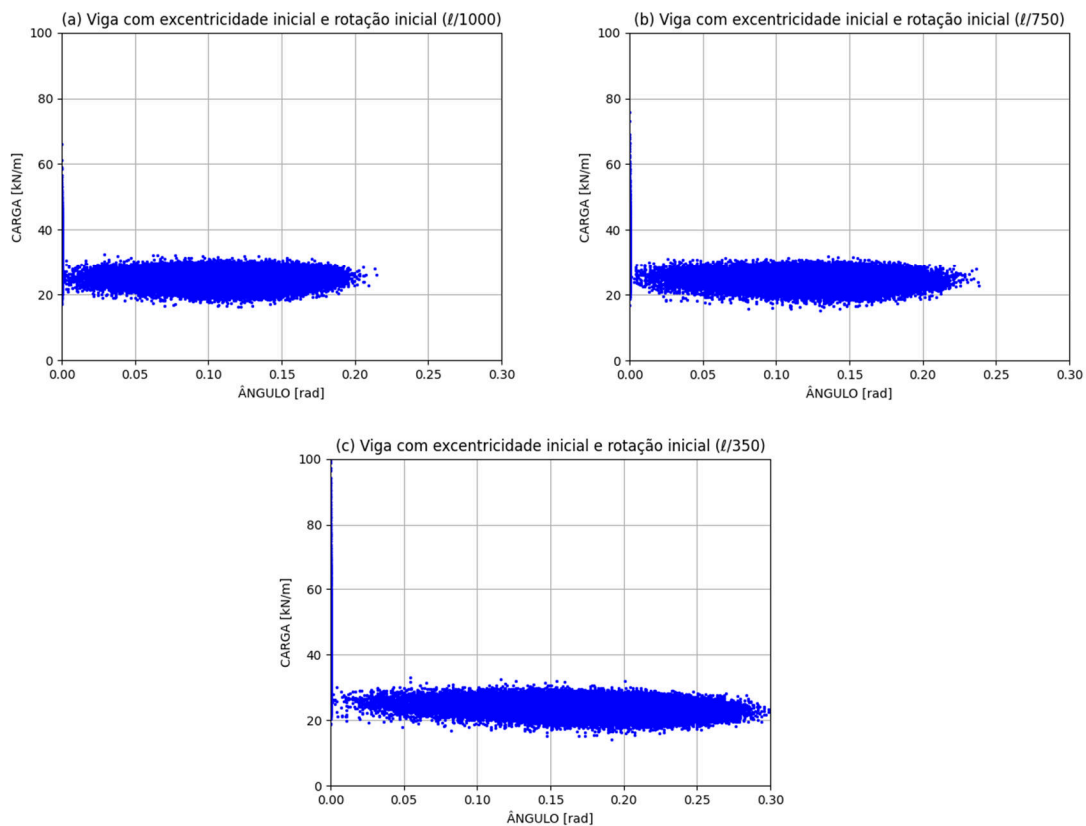
Figura 6.3 – Análises viga com excentricidade inicial



Fonte: Autor (2021)

A Figura 6.4 (a) ilustra os resultados das 100 mil simulações para a viga com excentricidade e rotação inicial, sendo a excentricidade igual a  $l/1000$ , a Figura 6.4 (b) tem excentricidade inicial igual a  $l/750$  e a Figura 6.4 (c) igual a  $l/350$ . Observa-se maior dispersão da nuvem de pontos para a maior excentricidade ( $l/350$ )

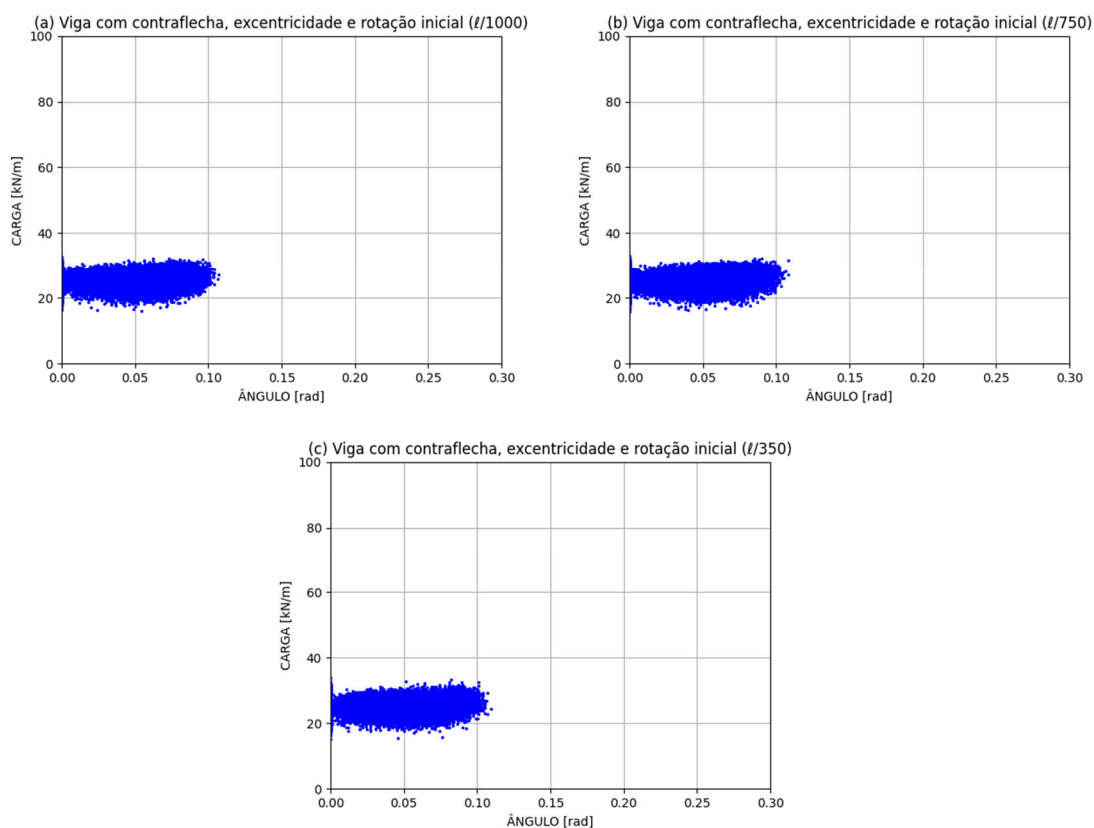
Figura 6.4 – Análises viga com excentricidade e rotação inicial



Fonte: Autor (2021)

A Figura 6.5 (a) ilustra os resultados das 100 mil simulações para a viga imperfeita, sendo a excentricidade igual a  $\ell/1000$ , a Figura 6.5 (b) tem excentricidade inicial igual a  $\ell/750$  e a Figura 6.5 (c) igual a  $\ell/350$ . Neste caso, as nuvens de pontos estão concentradas para cargas com ângulos abaixo de 0,11 rad.

Figura 6.5 – Análises viga imperfeita



Fonte: Autor (2021)

A Tabela 6.4 apresenta um resumo das cargas limite obtidas para as cinco situações analisadas, considerando as três diferentes excentricidades laterais ( $\ell/1000$ ,  $\ell/750$  e  $\ell/350$ ), sem considerar a variação paramétrica. Observa-se aqui que para a menor excentricidade ( $\ell/1000$ ) a viga imperfeita é a situação mais crítica. No entanto, para as demais situações isso não acontece, para a excentricidade igual a  $\ell/750$  a situação mais crítica é a viga com excentricidade e rotação inicial, com carga limite 0,84% abaixo da carga limite da viga imperfeita. Para a viga com excentricidade inicial igual a  $\ell/350$ , a viga com excentricidade e rotação inicial é mais crítica que a viga imperfeita, com carga limite 4,05% inferior à da viga imperfeita.

Tabela 6.4 – Cargas limites para diferentes excentricidades

Excentricidade	Análise	Carga limite	Ângulo
$\ell/1000$	Viga perfeitamente reta	58,57 kN/m	0,0028 rad
	Viga com contraflecha de protensão	57,89 kN/m	0,0028 rad
	Viga com excentricidade inicial	36,84 kN/m	0,1121 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	25,01 kN/m	0,1132 rad
	Viga imperfeita	24,98 kN/m	0,0341 rad
$\ell/750$	Viga perfeitamente reta	58,57 kN/m	0,0028 rad
	Viga com contraflecha de protensão	57,89 kN/m	0,0028 rad
	Viga com excentricidade inicial	27,65 kN/m	0,1422 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	24,77 kN/m	0,1333 rad
	Viga imperfeita	24,98 kN/m	0,0341 rad
$\ell/350$	Viga perfeitamente reta	58,57 kN/m	0,0028 rad
	Viga com contraflecha de protensão	57,89 kN/m	0,0028 rad
	Viga com excentricidade inicial	24,47 kN/m	0,1624 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	23,92 kN/m	0,1884 rad
	Viga imperfeita	24,93 kN/m	0,0361 rad

Fonte: Autor (2021)

A Tabela 6.5 apresenta o resultado médio das 100 mil simulações de cada caso. Além disso, é assumida como falha a situação em que a carga limite é menor do que o peso próprio da viga (22,11 kN/m), diante disso, calcula-se a probabilidade de falha para as simulações, que foi igual a 0,08 quando a excentricidade lateral é igual a  $\ell/1000$  e 0,09 quando a excentricidade é  $\ell/750$ . Observa-se aqui, que a redução da excentricidade lateral inicial reduz a probabilidade de falha, mas ainda assim, a viga UHPC, nas condições analisadas, apresenta probabilidade de falha superior ao indicado pelo JCSS *Probabilistic Model Code* (2001).

Tabela 6.5 – Resultado médio das 100 mil simulações para diferentes excentricidades

Excentricidade	Análise	Carga limite	Ângulo
$\ell/1000$	Viga perfeitamente reta	58,57 kN/m	-
	Viga com contraflecha de protensão	57,89 kN/m	-
	Viga com excentricidade inicial	26,93 kN/m	0,0223 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	25,66 kN/m	0,0269 rad
	Viga imperfeita	25,49 kN/m	0,0301 rad
$\ell/750$	Viga perfeitamente reta	58,57 kN/m	-
	Viga com contraflecha de protensão	57,89 kN/m	-
	Viga com excentricidade inicial	26,34 kN/m	0,0503 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	25,41 kN/m	0,0304 rad
	Viga imperfeita	25,48 kN/m	0,0304 rad
$\ell/350$	Viga perfeitamente reta	58,34 kN/m	-
	Viga com contraflecha de protensão	57,82 kN/m	-
	Viga com excentricidade inicial	25,53 kN/m	0,1353 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	24,83 kN/m	0,1706 rad
	Viga imperfeita	25,36 kN/m	0,0316 rad

Fonte: Autor (2021)

Diante dos resultados apresentados na Tabela 6.5, observa-se que, para a viga com excentricidade inicial, utilizando como base a excentricidade  $e/1000$ , a carga limite média reduz 2,19% quando a excentricidade passa para  $e/750$  e quando a excentricidade passa para  $e/350$  a carga reduz 5,20%. Fazendo a mesma comparação para a viga com excentricidade e rotação inicial, as reduções são respectivamente, 0,97% e 3,23 %, enquanto para a viga imperfeita a carga limite média reduz 0,039% de  $e/1000$  para  $e/750$  e 0,51% de  $e/1000$  para  $e/350$ . Observa-se que as reduções, em percentual, são menores para a viga imperfeita em comparação com os outros dois casos, e como consequência a viga imperfeita deixa de ser o caso mais crítico para imperfeições maiores que  $e/1000$ .

As Figuras 6.6 (a) e (b) apresentam os histogramas considerando os resultados apresentados nas Figura 6.5 (a) e (b), para viga imperfeita, considerando a excentricidade lateral inicial igual a  $e/1000$  e  $e/750$ , respectivamente. Os resultados são colocados de forma a representar a quantidade de simulações que apresentam o valor de carga limite em um determinado intervalo de carga. No eixo x são representados os valores de carga limite e no eixo y a frequência de cada intervalo de carga. As figuras também apresentam as distribuições Gaussianas assumidas para cada análise, conforme a Equação 6.1, sendo que para excentricidade  $e/1000$  o valor médio ( $\mu$ ) é igual a 25,49 kN/m e desvio padrão ( $\sigma$ ) igual a 1,89 e para excentricidade  $e/750$  o valor médio ( $\mu$ ) é igual a 25,48 kN/m e desvio padrão ( $\sigma$ ) igual a 1,89.

As Figura 6.6 (c) (d) apresentam as distribuições de Gauss para as situações que com excentricidade lateral inicial: viga com excentricidade inicial; viga com excentricidade e rotação inicial; e viga imperfeita, a fim de comparação.



Figura 6.6 – Histogramas de carga limite da viga imperfeita por quantidade de simulações (a) Para  $\ell/1000$  (b) Para  $\ell/750$  (c) Distribuições de Gauss para  $\ell/1000$  (d) Distribuições de Gauss para  $\ell/750$

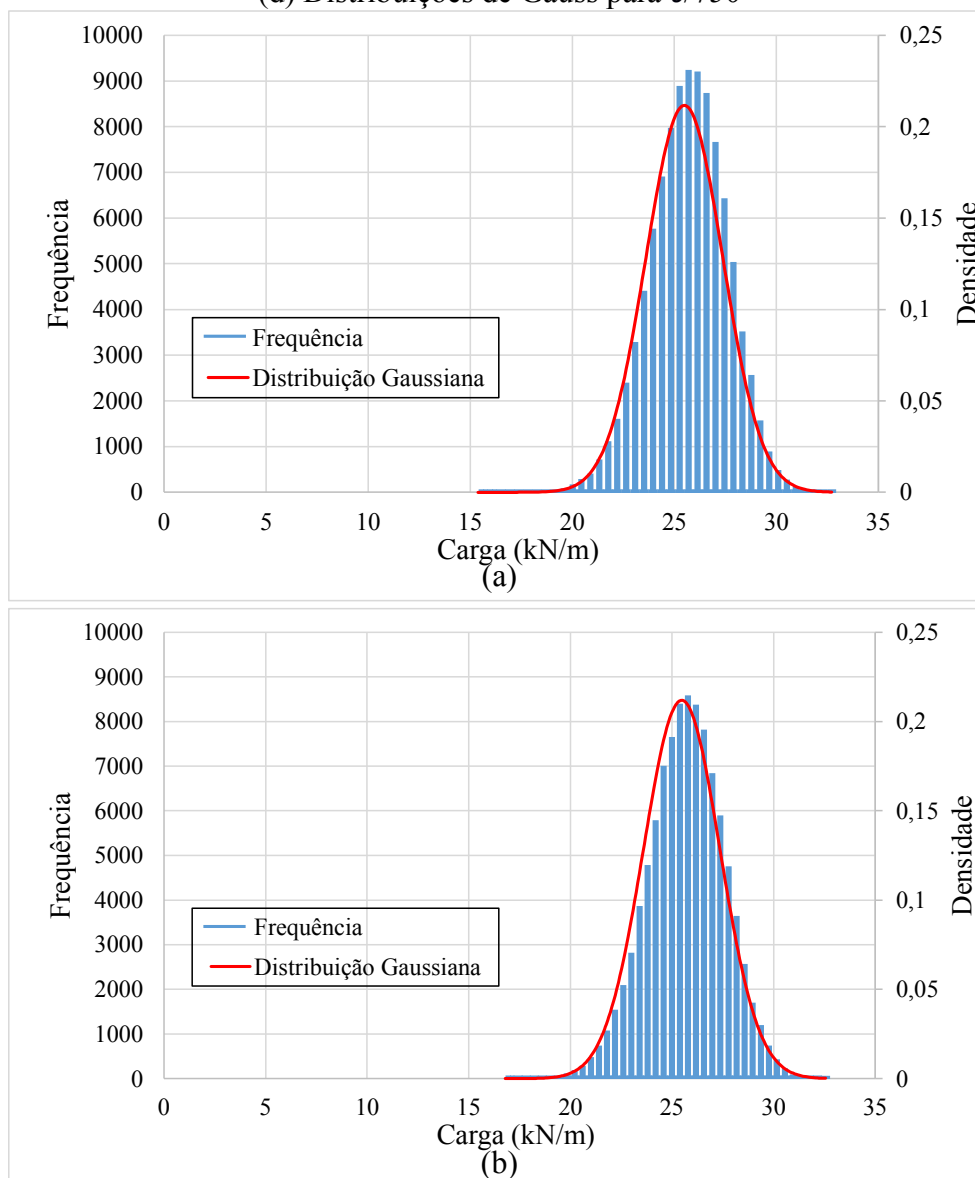
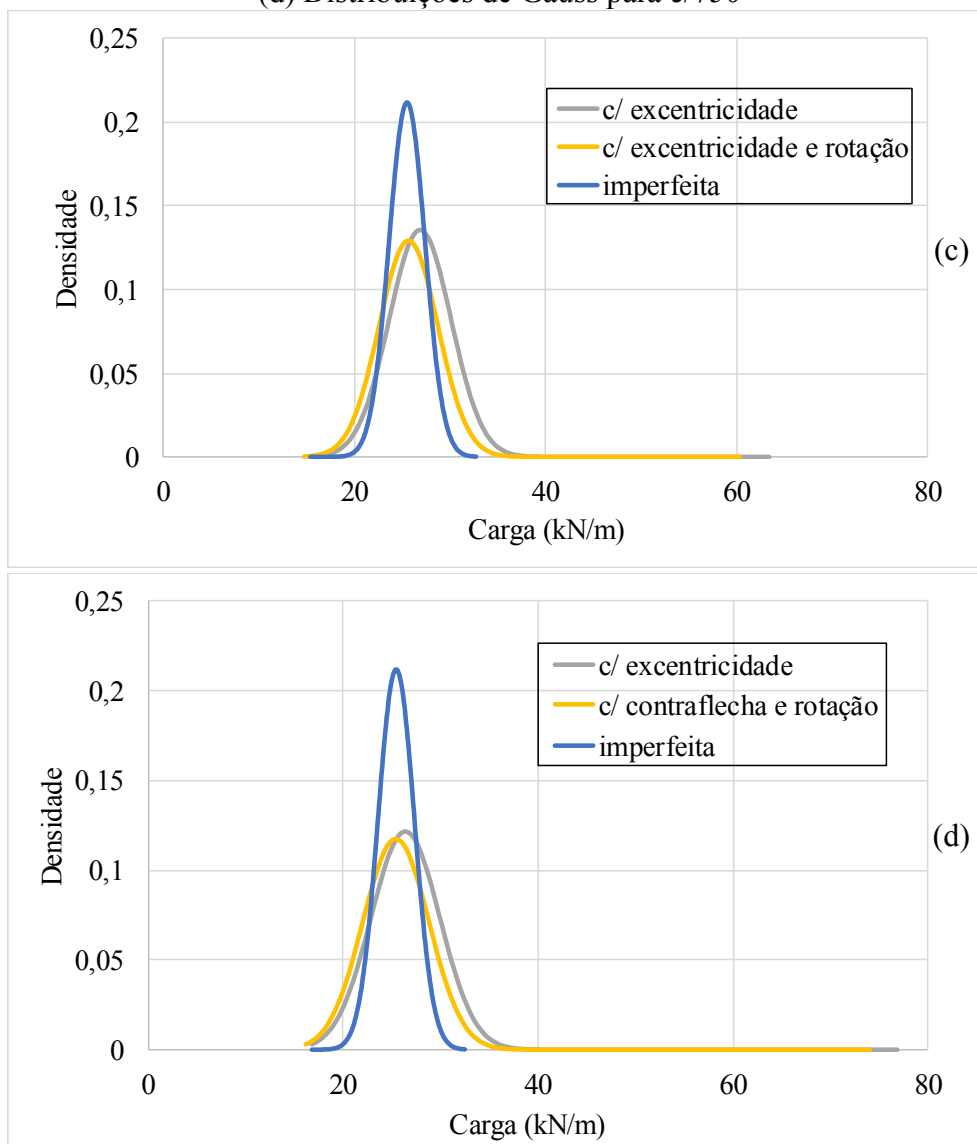


Figura 6.6 – Histogramas de carga limite da viga imperfeita por quantidade de simulações (a) Para  $\ell/1000$  (b) Para  $\ell/750$  (c) Distribuições de Gauss para  $\ell/1000$  (d) Distribuições de Gauss para  $\ell/750$



Fonte: Autor (2021)

Dos resultados apresentados na Figura 6.6 (c), considerando excentricidade inicial igual a  $\ell/1000$ , tem-se que: a viga com excentricidade inicial tem valor médio igual a 26,93 kN/m e desvio padrão igual a 3,19; e a viga com excentricidade e rotação inicial tem valor médio igual a 25,66 kN/m e desvio padrão igual a 3,08. Já na Figura 6.6 (d), considerando excentricidade inicial igual a  $\ell/750$ , tem-se que: a viga com excentricidade inicial tem valor médio igual a 26,34 kN/m e desvio padrão igual a 3,51; e a viga com excentricidade e rotação inicial tem valor médio igual a 25,41 kN/m e desvio padrão igual a 3,40. Observa-se então, a influência da excentricidade lateral na instabilidade de vigas pré-moldada, sabe-se que o peso próprio da viga UHPC analisada é 22,11 kN/m, com o

aumento da excentricidade lateral inicial as cargas limites médias, nas situações analisadas, se aproximam mais deste valor e tornam as vigas mais propensas à instabilidade.

#### 6.4 Resistência do concreto

Para avaliar a influência da resistência do concreto, são considerados três valores médios de resistência a compressão média do concreto ( $f_{cm}$ ), 120 MPa ( $E = 44584,10$  MPa), 150 MPa ( $E = 50125,46$  MPa) e 200 MPa ( $E = 57557,83$  MPa), que estão dentro dos limites de classificação para concreto UHPC. Sendo analisadas as cinco situações: viga perfeitamente reta, viga com contraflecha de protensão; viga com excentricidade lateral inicial; viga com excentricidade e rotação inicial; e viga imperfeita (com excentricidade lateral inicial, rotação inicial e contraflecha devido a força de protensão). Para isso, são mantidos todos os dados base do item 6.2, sendo alterado apenas o valor do módulo de elasticidade ( $E$ ).

A Figura 6.7 (a) ilustra os resultados das 100 mil simulações para a viga perfeitamente reta com  $f_{ck} = 120$  MPa, a Figura 6.7 (b) com  $f_{ck} = 150$  MPa e a Figura 6.7 (c) com  $f_{ck} = 200$  MPa.

Figura 6.7 – Análises da viga perfeitamente reta

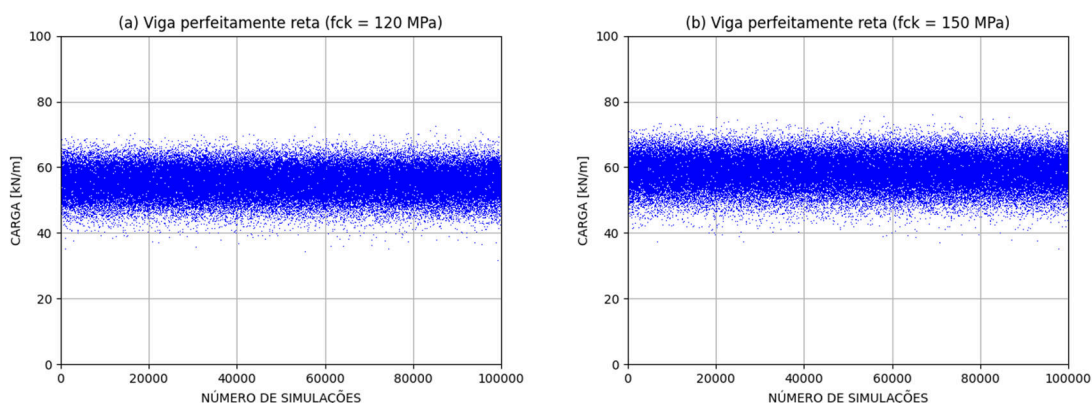
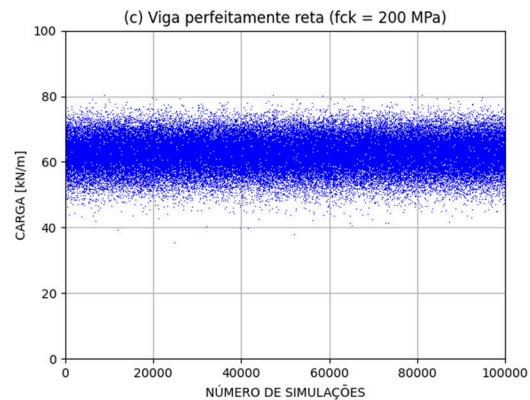


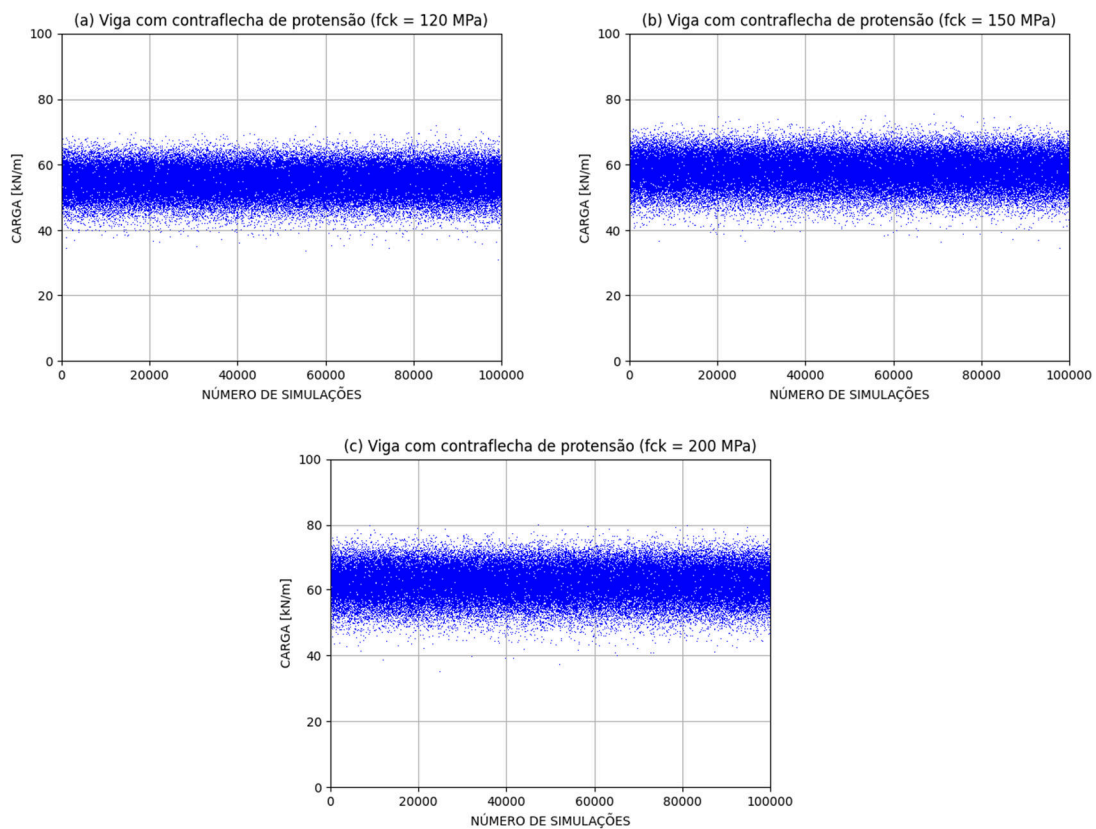
Figura 6.7 – Análises da viga perfeitamente reta



Fonte: Autor (2021)

A Figura 6.8 (a) ilustra os resultados das 100 mil simulações para a viga com contraflecha devido a força de protensão com  $f_{ck} = 120$  MPa, a Figura 6.8 (b) com  $f_{ck} = 150$  MPa e a Figura 6.8 (c) com  $f_{ck} = 200$  MPa.

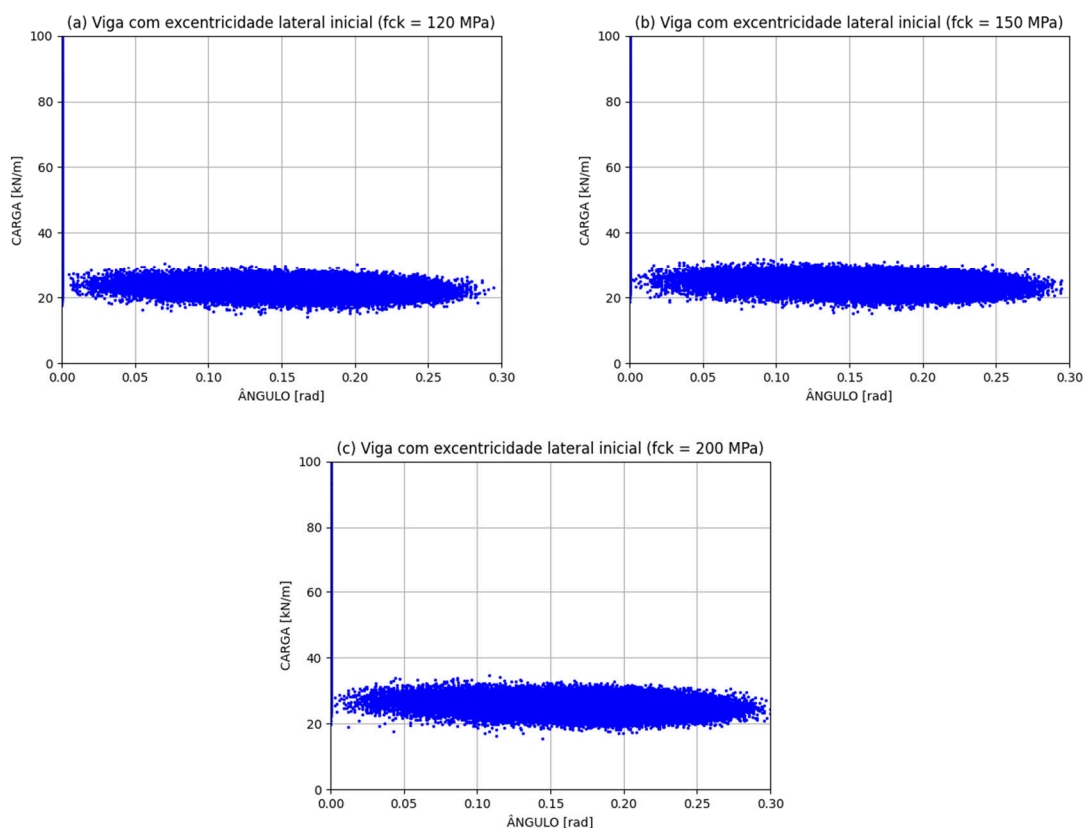
Figura 6.8– Análises da viga com contraflecha devido a força de protensão



Fonte: Autor (2021)

A Figura 6.9 (a) ilustra os resultados das 100 mil simulações para a viga com excentricidade lateral inicial com  $f_{ck} = 120$  MPa, a Figura 6.9 (b) com  $f_{ck} = 150$  MPa e a Figura 6.9 (c) com  $f_{ck} = 200$  MPa.

Figura 6.9 – Análises da viga com excentricidade lateral inicial



Fonte: Autor (2021)

A Figura 6.10 (a) ilustra os resultados das 100 mil simulações para a viga com excentricidade e rotação inicial com  $f_{ck} = 120$  MPa, a Figura 6.10 (b) com  $f_{ck} = 150$  MPa e a Figura 6.10 (c) com  $f_{ck} = 200$  MPa.

Figura 6.10 – Análises da viga com excentricidade e rotação inicial

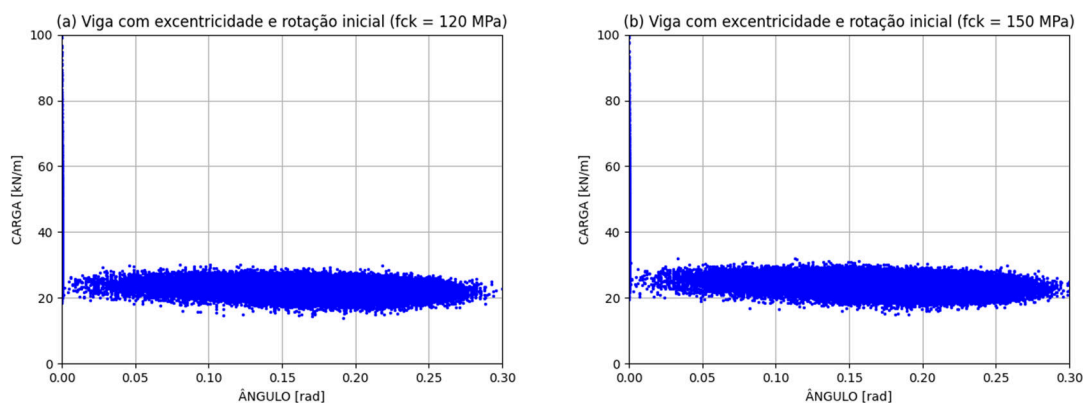
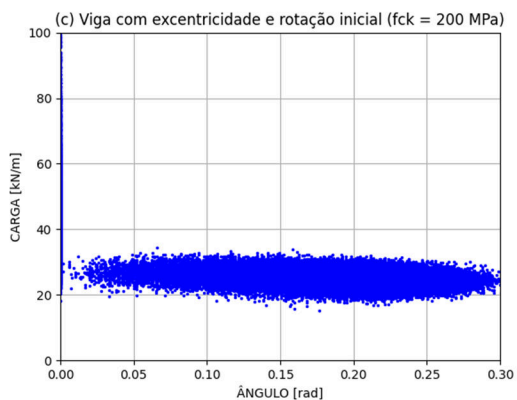


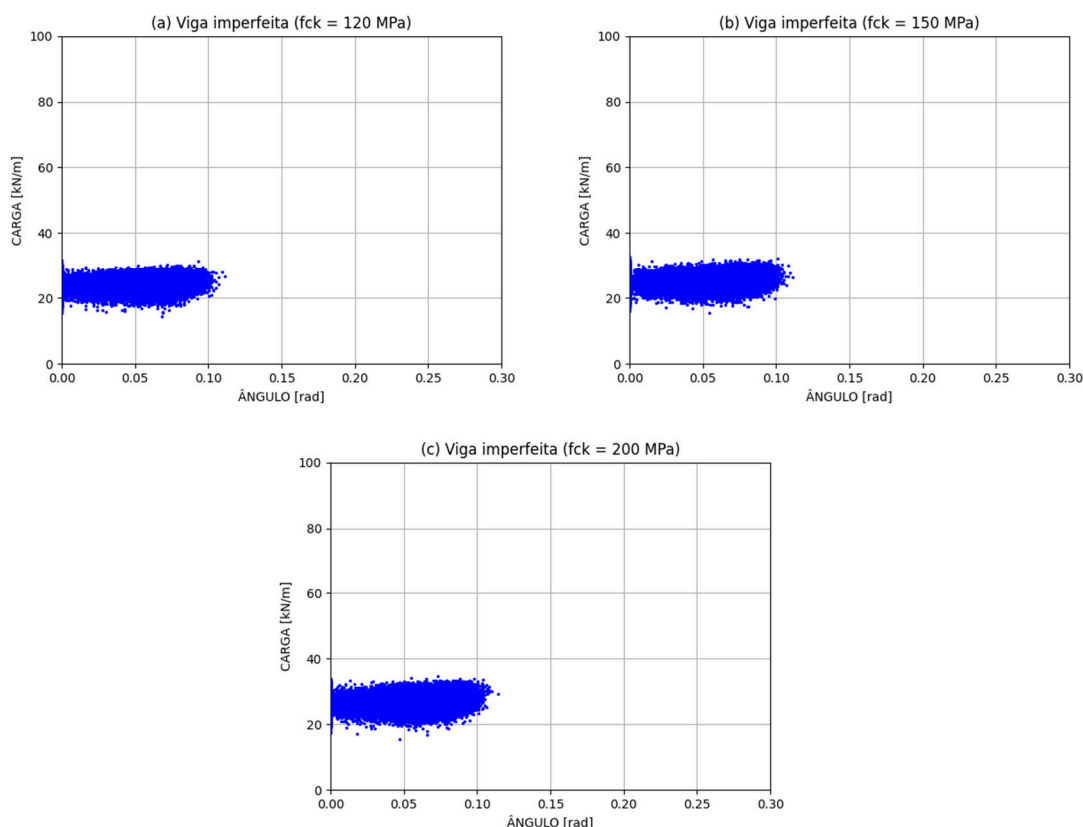
Figura 6.10 – Análises da viga com excentricidade e rotação inicial



Fonte: Autor (2021)

A Figura 6.11 (a) ilustra os resultados das 100 mil simulações para a viga imperfeita com  $f_{ck} = 120$  MPa, a Figura 6.11 (b) com  $f_{ck} = 150$  MPa e a Figura 6.11 (c) com  $f_{ck} = 200$  MPa.

Figura 6.11 – Análises da viga imperfeita



Fonte: Autor (2021)

A Tabela 6.6 apresenta um resumo das cargas limite obtidas para as cinco situações analisadas, considerando os três valores de resistência a compressão do concreto (120 MPa, 150 MPa e 200 MPa), sem considerar as variações paramétricas.

Tabela 6.6 – Cargas limites para diferentes resistências do concreto

$f_{ck}$	Análise	Carga limite	Ângulo
<b>120 MPa</b>	Viga perfeitamente reta	55,37 kN/m	0,0028 rad
	Viga com contraflecha de protensão	54,76 kN/m	0,0028 rad
	Viga com excentricidade inicial	23,28 kN/m	0,1554 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	22,74 kN/m	0,1845 rad
	Viga imperfeita	23,69 kN/m	0,0271 rad
<b>150 MPa</b>	Viga perfeitamente reta	58,57 kN/m	0,0028 rad
	Viga com contraflecha de protensão	57,89 kN/m	0,0028 rad
	Viga com excentricidade inicial	24,47 kN/m	0,1624 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	23,92 kN/m	0,1884 rad
	Viga imperfeita	24,93 kN/m	0,0361 rad
<b>200 MPa</b>	Viga perfeitamente reta	62,58 kN/m	0,0028 rad
	Viga com contraflecha de protensão	61,80 kN/m	0,0028 rad
	Viga com excentricidade inicial	25,94 kN/m	0,1694 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	25,38 kN/m	0,1935 rad
	Viga imperfeita	26,45 kN/m	0,0441 rad

Fonte: Autor (2021)

A Tabela 6.7 apresenta o resultado médio das 100 mil simulações de cada caso. Além disso, a probabilidade de falha para as simulações foi igual a 0,37 quando a resistência do concreto é 120 MPa e 0,06 quando a resistência é 200 MPa. Observa-se, que considerando também as simulações com os dados base, em que a resistência do concreto é 150 MPa, a probabilidade de falha é 0,18. Logo, observa-se que o aumento da resistência do concreto tem resultados positivos quanto à instabilidade, mas ainda assim a probabilidade de falha é superior a  $10^{-4}$  para todos os valores de resistência analisados. Ressalta-se aqui, a importância em investigar soluções para vigas UHPC quanto a instabilidade lateral, como por exemplo, os apoios que possam absorver tração na interação viga-apoio sugeridos no Capítulo 5.

Tabela 6.7 – Resultado médio das 100 mil simulações para diferentes  $f_{ck}$ 

$f_{ck}$	Análise	Carga limite	Ângulo
<b>120 MPa</b>	Viga perfeitamente reta	55,18 kN/m	-
	Viga com contraflecha de protensão	54,66 kN/m	-
	Viga com excentricidade inicial	24,13 kN/m	0,1319 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	23,55 kN/m	0,1668 rad
	Viga imperfeita	24,08 kN/m	0,0298 rad
<b>150 MPa</b>	Viga perfeitamente reta	58,34 kN/m	-
	Viga com contraflecha de protensão	57,82 kN/m	-
	Viga com excentricidade inicial	25,53 kN/m	0,1353 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	24,83 kN/m	0,1706 rad
	Viga imperfeita	25,36 kN/m	0,0316 rad
<b>200 MPa</b>	Viga perfeitamente reta	62,36 kN/m	-
	Viga com contraflecha de protensão	61,84 kN/m	-
	Viga com excentricidade inicial	27,23 kN/m	0,1391 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	26,43 kN/m	0,1756 rad
	Viga imperfeita	26,97 kN/m	0,0343 rad

Fonte: Autor (2021)

Diante das médias de carga limite apresentadas na Tabela 6.7 e utilizando como base para comparação a resistência de 120 MPa, observa-se que: para a viga perfeitamente reta, a carga limite média aumenta 5,73% quando a resistência passa para 150 MPa e quando a resistência passa para 200 MPa a carga média aumenta 13,01%; para a viga com contraflecha, os aumentos são respectivamente 5,78% e 13,14%; para a viga com excentricidade inicial a carga limite média aumenta 5,8% de 120 MPa para 150 MPa e 12,84% de 120 MPa para 200 MPa; para a viga com excentricidade e rotação inicial a carga limite média aumenta 5,44% de 120 MPa para 150 MPa e 12,23% de 120 MPa para 200 MPa; e para a viga imperfeita a carga média aumenta 5,32% de 120 MPa para 150 MPa e 12% de 120 MPa para 200 MPa. Observa-se assim um aumento na estabilidade do sistema com o aumento da resistência do concreto, isso porque o aumento da resistência, indiretamente aumenta a resistência à flexão lateral. Vale ressaltar que a resistência do concreto é avaliada aqui indiretamente, por meio do módulo de elasticidade, já que o parâmetro de entrada nas equações de equilíbrio é o módulo de elasticidade, que é diretamente relacionado à resistência à compressão do concreto.

As Figuras 6.12 (a) e (b) apresentam os histogramas considerando os resultados apresentados nas Figura 6.11 (a) e (c), para viga imperfeita, considerando a resistência a compressão do concreto igual a 120 MPa e 200 MPa, respectivamente. Os resultados são colocados de forma a representar a quantidade de simulações para um determinado



intervalo de carga limite. No eixo x são representados os valores de carga limite e no eixo y a frequência de cada intervalo de carga. As figuras também apresentam as distribuições Gaussianas assumidas para cada análise, conforme a Equação 6.1, sendo que para resistência à compressão do concreto igual a 120 MPa o valor médio ( $\mu$ ) é igual a 24,08 kN/m e desvio padrão ( $\sigma$ ) igual a 1,76 e para resistência igual a 200 MPa o valor médio é igual a 26,97 kN/m e desvio padrão igual a 1,96.

Figura 6.12 – Histogramas de carga limite da viga imperfeita por quantidade de simulações (a) Para  $f_{ck} = 120$  MPa (b) Para  $f_{ck} = 200$  MPa (c) Distribuições de Gauss para  $f_{ck} = 120$  MPa (d) Distribuições de Gauss para  $f_{ck} = 200$  MPa

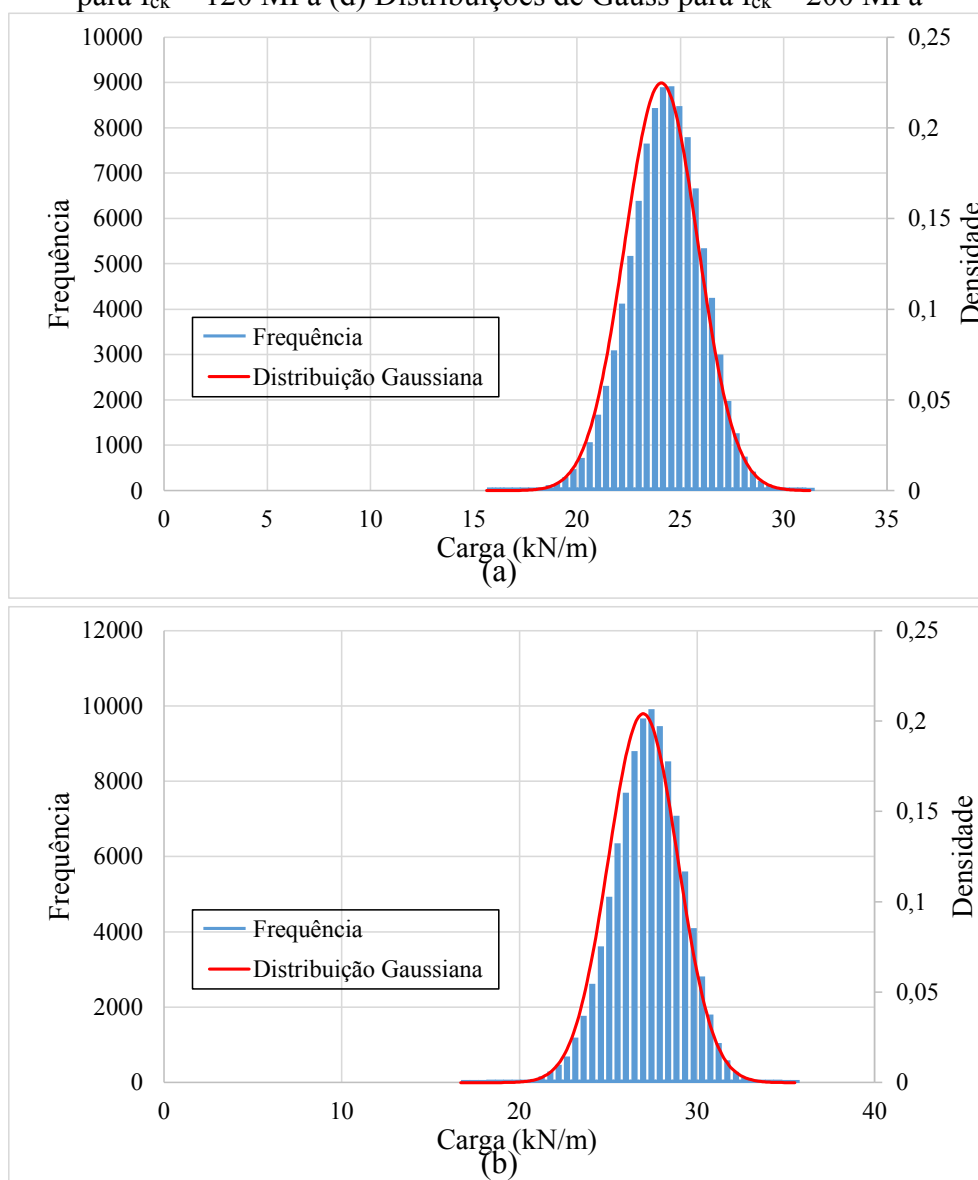
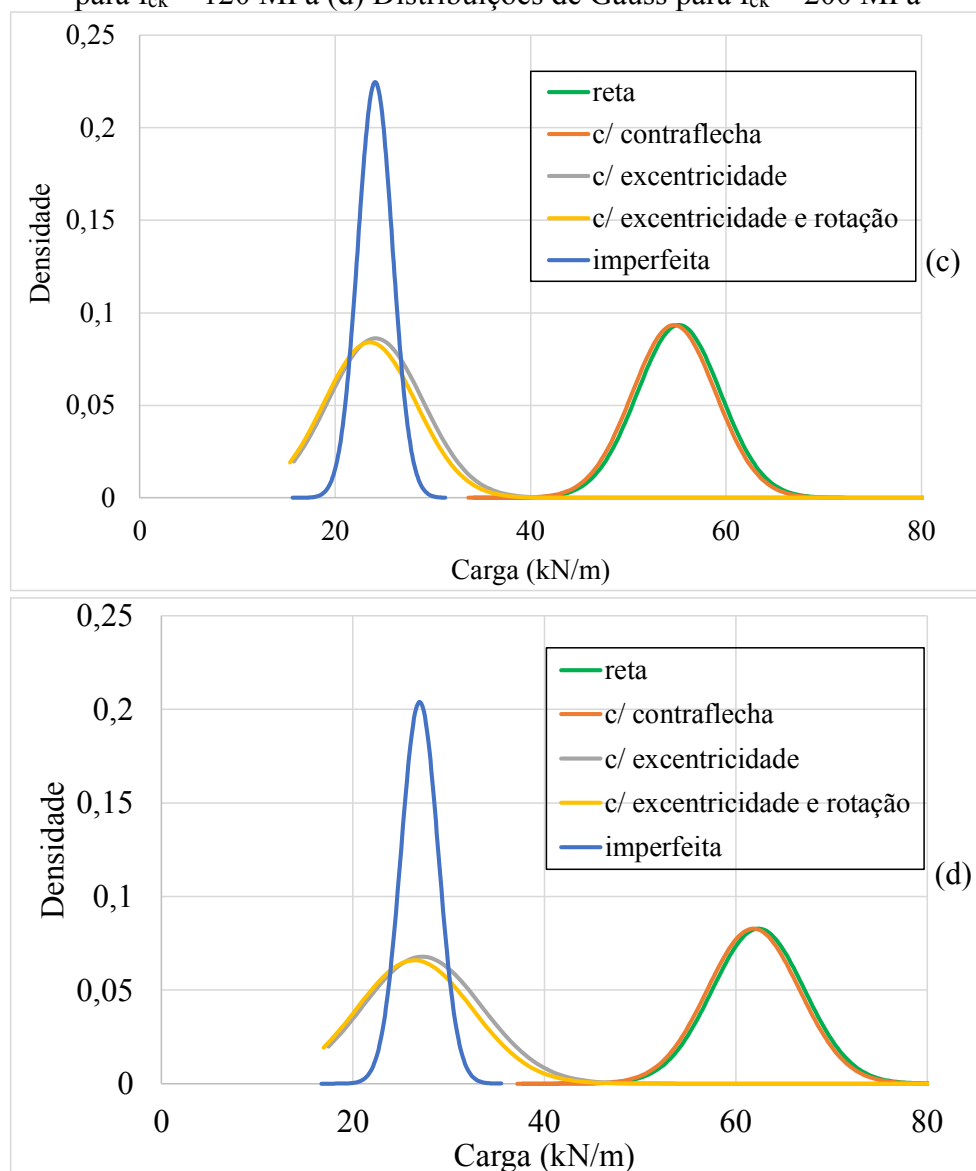


Figura 6.12 – Histogramas de carga limite da viga imperfeita por quantidade de simulações (a) Para  $f_{ck} = 120$  MPa (b) Para  $f_{ck} = 200$  MPa (c) Distribuições de Gauss para  $f_{ck} = 120$  MPa (d) Distribuições de Gauss para  $f_{ck} = 200$  MPa



Fonte: Autor (2021)

As Figura 6.12 (c) (d) apresentam as distribuições de Gauss para todas as situações analisadas neste trabalho. Dos resultados apresentados na Figura 6.12 (c), para resistência a compressão do concreto igual a 120 MPa, tem-se que: a viga perfeitamente reta tem valor médio igual a 55,18 kN/m e desvio padrão igual a 4,27; a viga com excentricidade inicial tem valor médio igual a 24,13 kN/m e desvio padrão igual a 4,86; a viga com excentricidade e rotação inicial tem valor médio igual a 23,55 kN/m e desvio padrão igual a 4,75; e a viga com contraflecha devido a força de protensão tem valor médio igual a 54,66 kN/m e desvio padrão igual a 4,27. Já a Figura 6.12 (d), para resistência a compressão do concreto igual a 200 MPa, tem-se que: a viga perfeitamente reta tem valor

médio igual a 62,36 kN/m e desvio padrão igual a 4,82; a viga com excentricidade inicial tem valor médio igual a 27,23 kN/m e desvio padrão igual a 6,15; a viga com excentricidade e rotação inicial tem valor médio igual a 26,43 kN/m e desvio padrão igual a 6,07; e a viga com contraflecha devido a força de protensão tem valor médio igual a 61,84 kN/m e desvio padrão igual a 4,82. Observa-se então, que o aumento da resistência do concreto melhora a capacidade de carga da viga UHPC analisada. Tendo como base de comparação a situação mais crítica, viga com excentricidade e rotação inicial com resistência a compressão do concreto de 120MPa, a carga limite média aumenta 5,16% quando a resistência passa para 150 MPa e 10,89% quando passa para 200 MPa.

### 6.5 Força de protensão

Para a análise da força de protensão são considerados três valores força, 26160 kN, 31160 kN e 36160 kN, com as respectivas contraflechas, 0,59 m, 0,70 m e 0,82 m. Além disso, nas análises é considerada perda de protensão de 25%. A contraflecha de protensão interfere nos resultados da viga com contraflecha (Equações 4.26 e 4.24) e da viga imperfeita (Equações 4.30 e 4.31). Para as análises são mantidos todos os dados base do item 6.2, alterando-se apenas o valor da força de protensão ( $F$ ), e consequentemente da contraflecha.

A Figura 6.13 (a) ilustra os resultados das 100 mil simulações para a viga com contraflecha, considerando  $F = 26160$  kN, a Figura 6.13 (b) considerando  $F = 31160$  kN e a Figura 6.13 (c)  $F = 36160$  kN.

Figura 6.13 – Análises da viga com contraflecha

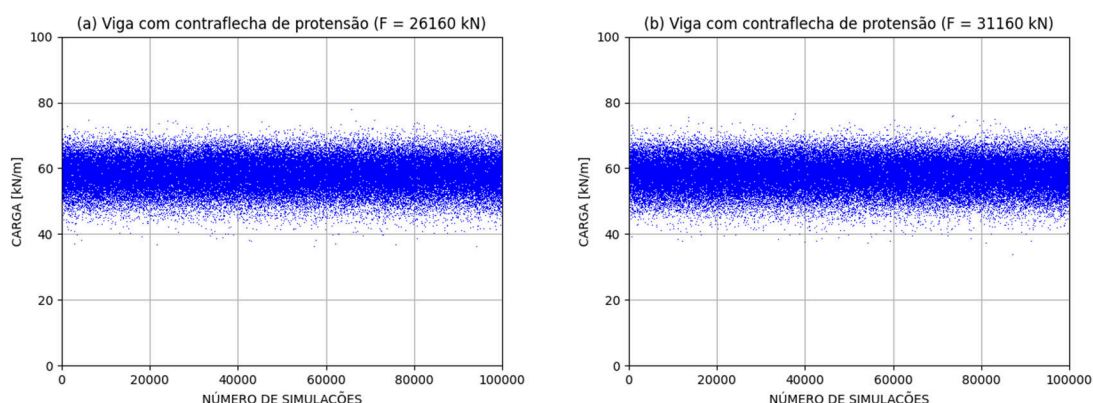
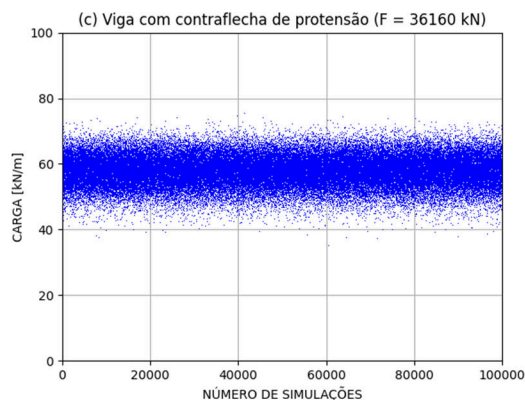


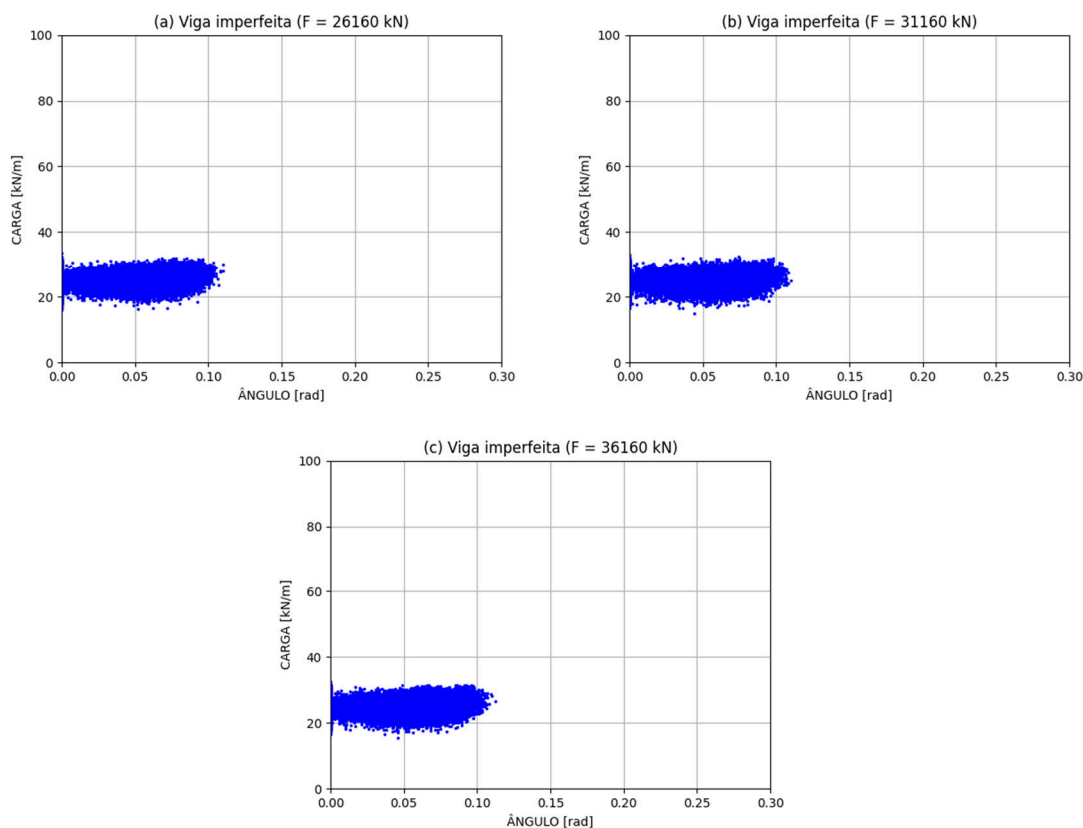
Figura 6.13 – Análises da viga com contraflecha



Fonte: Autor (2021)

A Figura 6.14 (a) ilustra os resultados das 100 mil simulações para a viga imperfeita, considerando  $F = 26160$  kN, a Figura 6.14 (b) considerando  $F = 31160$  kN e a Figura 6.14 (c)  $F = 36160$  kN.

Figura 6.14 – Análises da viga imperfeita



Fonte: Autor (2021)

A Tabela 6.8 apresenta um resumo das cargas limite obtidas para as cinco situações analisadas, considerando os três valores de força de protensão (26160 kN, 31160 kN e 36160 kN), sem considerar as variações paramétricas.

Tabela 6.8 – Cargas limites para diferentes forças de protensão

<b>F</b>	<b>Análise</b>	<b>Carga limite</b>	<b>Ângulo</b>
<b>26160 kN</b>	Viga perfeitamente reta	58,57 kN/m	0,0028 rad
	Viga com contraflecha de protensão	57,89 kN/m	0,0028 rad
	Viga com excentricidade inicial	24,47 kN/m	0,1624 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	23,92 kN/m	0,1884 rad
	Viga imperfeita	24,93 kN/m	0,0361 rad
<b>31160 kN</b>	Viga perfeitamente reta	58,57 kN/m	0,0028 rad
	Viga com contraflecha de protensão	57,76 kN/m	0,0028 rad
	Viga com excentricidade inicial	24,47 kN/m	0,1624 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	23,92 kN/m	0,1884 rad
	Viga imperfeita	24,80 kN/m	0,0411 rad
<b>36160 kN</b>	Viga perfeitamente reta	58,57 kN/m	0,0028 rad
	Viga com contraflecha de protensão	57,62 kN/m	0,0028 rad
	Viga com excentricidade inicial	24,47 kN/m	0,1624 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	23,92 kN/m	0,1884 rad
	Viga imperfeita	24,66 kN/m	0,0451 rad

Fonte: Autor (2021)

A Tabela 6.9 apresenta o resultado médio das 100 mil simulações de cada caso. Além disso, a probabilidade de falha para as simulações, que foi igual a 0,17 quando a força de protensão é 31160 kN e 0,18 quando força de protensão é 36160 kN. Observa-se que ambos os casos apresentam probabilidades de falha altas.

Tabela 6.9 – Resultado médio das 100 mil simulações para diferentes F

<b>F</b>	<b>Análise</b>	<b>Carga limite</b>	<b>Ângulo</b>
<b>26160 kN</b>	Viga perfeitamente reta	58,34 kN/m	-
	Viga com contraflecha de protensão	57,82 kN/m	-
	Viga com excentricidade inicial	25,53 kN/m	0,1353 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	24,83 kN/m	0,1706 rad
	Viga imperfeita	25,36 kN/m	0,0316 rad
<b>31160 kN</b>	Viga perfeitamente reta	58,34 kN/m	-
	Viga com contraflecha de protensão	57,79 kN/m	-
	Viga com excentricidade inicial	25,53 kN/m	0,1353 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	24,83 kN/m	0,1706 rad
	Viga imperfeita	25,27 kN/m	0,0332 rad
<b>36160 kN</b>	Viga perfeitamente reta	58,34 kN/m	-
	Viga com contraflecha de protensão	57,57 kN/m	-
	Viga com excentricidade inicial	25,53 kN/m	0,1353 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	24,83 kN/m	0,1706 rad
	Viga imperfeita	25,15 kN/m	0,0345 rad

Fonte: Autor (2021)

Para os valores absolutos, sem considerar a variação dos parâmetros (Tabela 6.8) e utilizando como base para comparação a força de protensão igual a 26169 kN, observa-

se que: para a viga com contraflecha, a carga limite reduz 0,22% quando a força passa para 31160 kN e quando passa para 36160 kN a carga reduz 0,47%, e para a viga imperfeita a carga limite reduz 0,52% de 26169 kN para 31160 kN e 1,08% de 26169 kN para 36160 kN. Enquanto para os valores médios de carga limite observa-se que: para a viga com contraflecha, a carga limite reduz 0,05% quando a força passa para 31160 kN e quando passa para 36160 kN a carga reduz 0,43%, e para a viga imperfeita a carga limite reduz 0,35% de 26169 kN para 31160 kN e 0,83% de 26169 kN para 36160. Observa-se que o aumento da contraflecha, em consequência do aumento da força de protensão, reduz a capacidade de carga das vigas quanto a instabilidade lateral, mas estas reduções são pouco significativas, em percentual, quando comparado com os demais parâmetros analisados neste trabalho.

As Figuras 6.15 (a) e (b) apresentam os histogramas considera os resultados apresentados nas Figura 6.14 (b) e (c), para viga imperfeita, considerando a força de protensão igual a 31160 kN e 36160 kN, respectivamente. Os resultados são colocados de forma a representar a quantidade de simulações para um determinado intervalo de carga limite. As figuras também apresentam as distribuições Gaussianas assumidas para cada análise, conforme a Equação 6.1, sendo que para força de protensão igual a 31160 kN o valor médio ( $\mu$ ) é igual a 25,27 kN/m e desvio padrão ( $\sigma$ ) igual a 1,86 e para força de protensão igual a 36160 kN o valor médio ( $\mu$ ) é igual a 25,15 kN/m e o desvio padrão ( $\sigma$ ) igual a 1,87.

Figura 6.15 – Histogramas de carga limite da viga imperfeita por quantidade de simulações (a) Para  $F = 31160$  kN (b) Para  $F = 36160$  kN (c) Distribuições de Gauss para  $F = 31160$  kN (d) Distribuições de Gauss para  $F = 36160$  kN

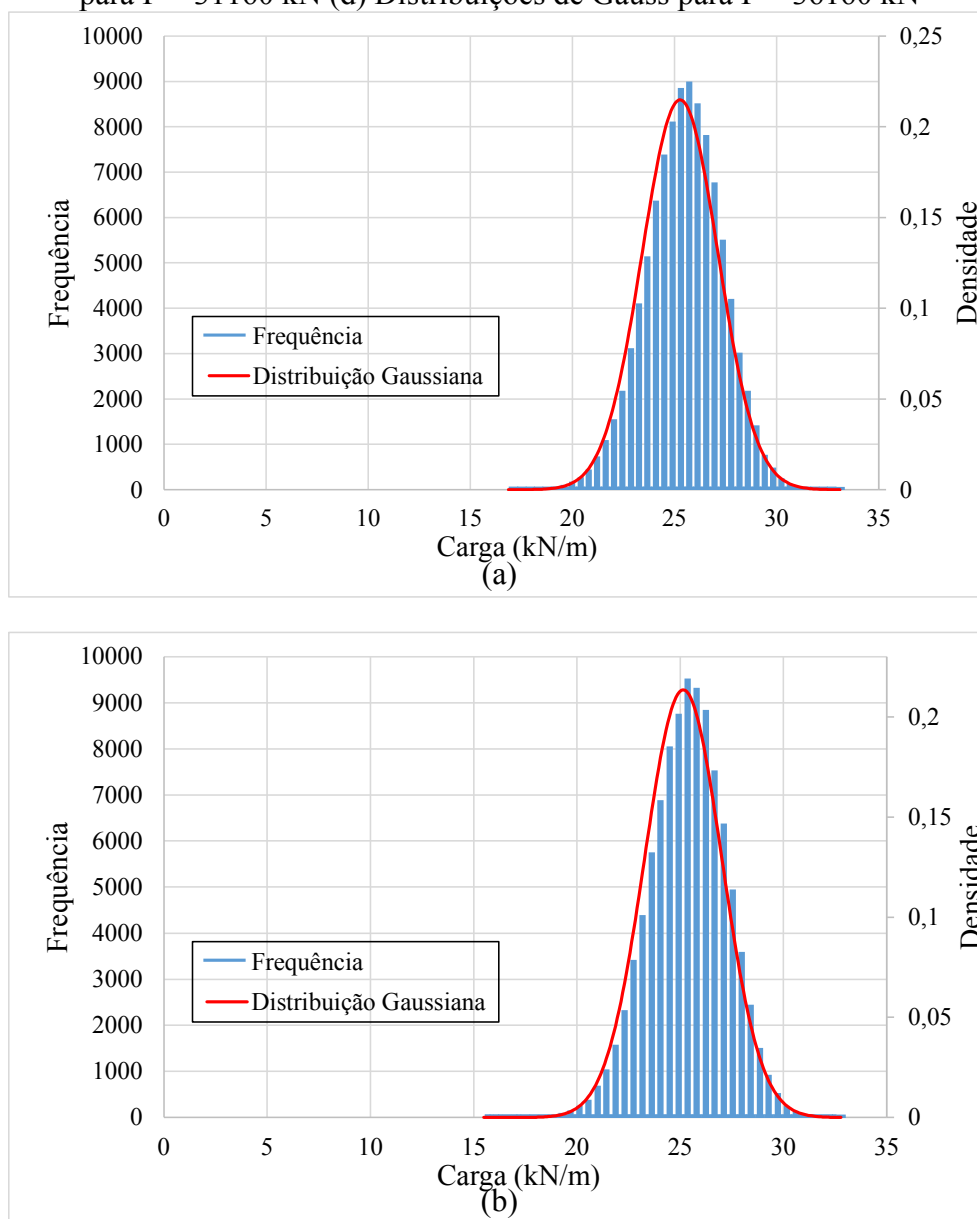
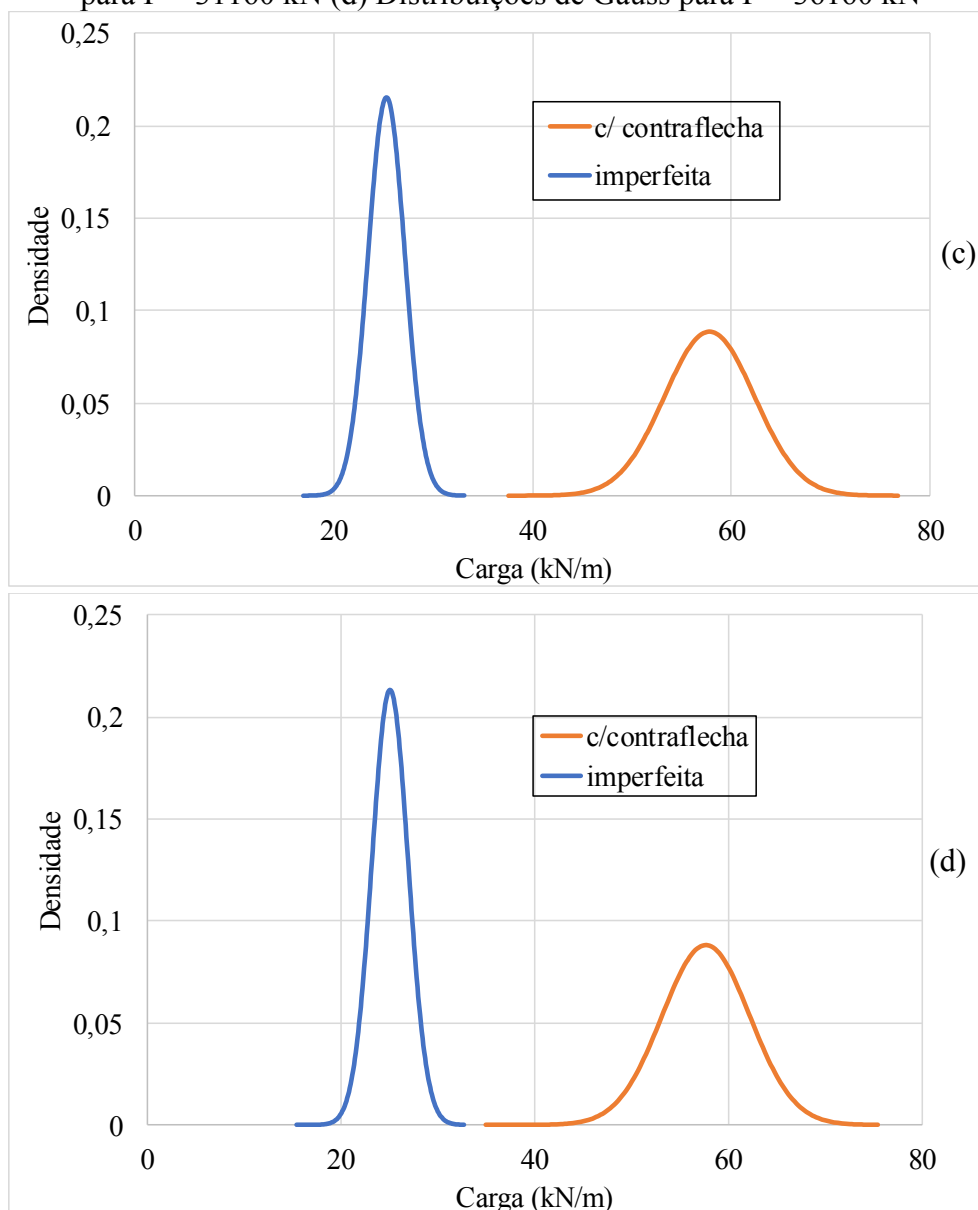


Figura 6.15 – Histogramas de carga limite da viga imperfeita por quantidade de simulações (a) Para  $F = 31160$  kN (b) Para  $F = 36160$  kN (c) Distribuições de Gauss para  $F = 31160$  kN (d) Distribuições de Gauss para  $F = 36160$  kN



Fonte: Autor (2021)

As Figura 6.15 (c) (d) apresentam as distribuições de Gauss para as situações que apresentam contraflecha devido a força de protensão: viga com contraflecha; e viga imperfeita, a fim de comparação. Dos resultados apresentados na Figura 6.15 (c), considerando força de protensão igual a 31160 kN, tem-se que a viga com contraflecha tem valor médio igual a 57,79 kN/m e desvio padrão igual a 4,51. Já na Figura 6.15 (d), considerando força de protensão igual a 36160 kN, tem-se que: a viga com contraflecha tem valor médio igual a 57,57 kN/m e desvio padrão igual a 4,52. Observa-se aqui, que



dentre os parâmetros já analisados, a contraflecha devido a força de protensão foi a que menos influenciou nos valores de cargas limite médias.

## 6.6 Coeficientes $k_\phi$ e $h$

Para avaliar a influência dos coeficientes  $k_\phi$  e  $h$ , que caracterizam a função bilinear utilizada para representar a não linearidade de contato entre viga e apoio, são considerados três casos, nomeados de A, B e C, os quais foram obtidos considerando a variação do módulo de cisalhamento do elastômero (G). O caso A se refere ao caso base apresentado no item 6.2, o seja,  $k_\phi = 44476,84$  kNm/rad e  $h = 12000$  kNm/rad. O caso B tem como diferença os valores de  $k_\phi$  e  $h$ , que agora passam a valer  $46714,38$  kNm/rad e  $13000$  kNm/rad, respectivamente. Por fim, o caso C, com coeficientes  $k_\phi$  e  $h$  iguais a  $48951,92$  kNm/rad e  $14000$  kNm/rad, respectivamente. Para cada caso são analisadas as cinco situações: viga perfeitamente reta, viga com contraflecha de protensão; viga com excentricidade lateral inicial; viga com excentricidade e rotação inicial; e viga imperfeita. Vale ressaltar que são mantidos todos os dados base do item 6.2, alterando apenas os valores de  $k_\phi$  e  $h$  para cada caso.

A Figura 6.16 (a) ilustra os resultados das 100 mil simulações da viga perfeitamente reta para o caso A, a Figura 6.16 (b) para o caso B e a Figura 6.16 (c) para o caso C.

Figura 6.16 – Análises da viga perfeitamente reta

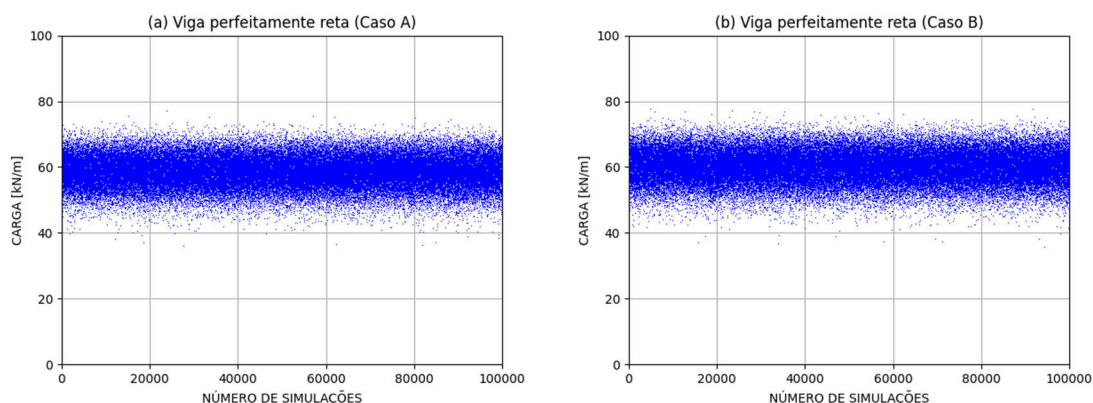
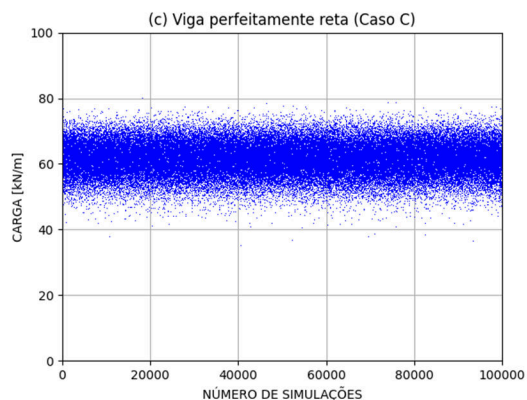


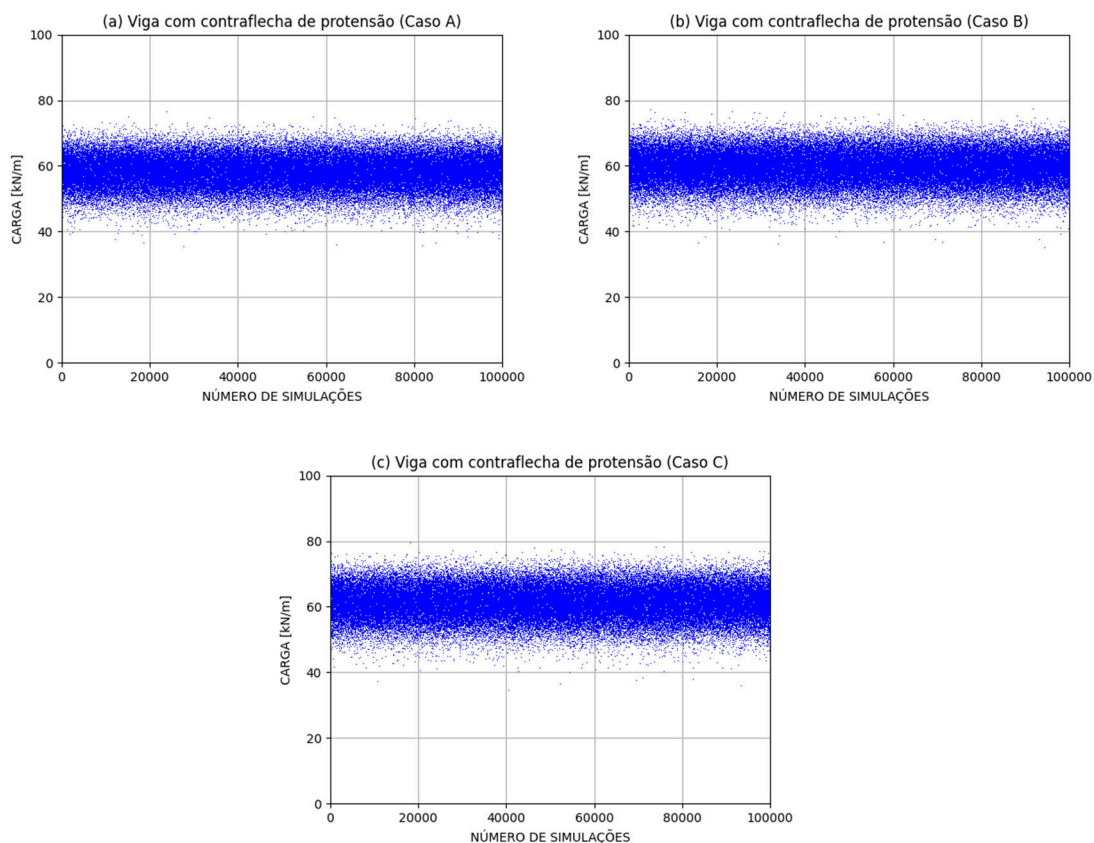
Figura 6.16 – Análises da viga perfeitamente reta



Fonte: Autor (2021)

A Figura 6.17 (a) ilustra os resultados das 100 mil simulações da viga com contraflecha para o caso A, a Figura 6.17 (b) para o caso B e a Figura 6.17 (c) para o caso C.

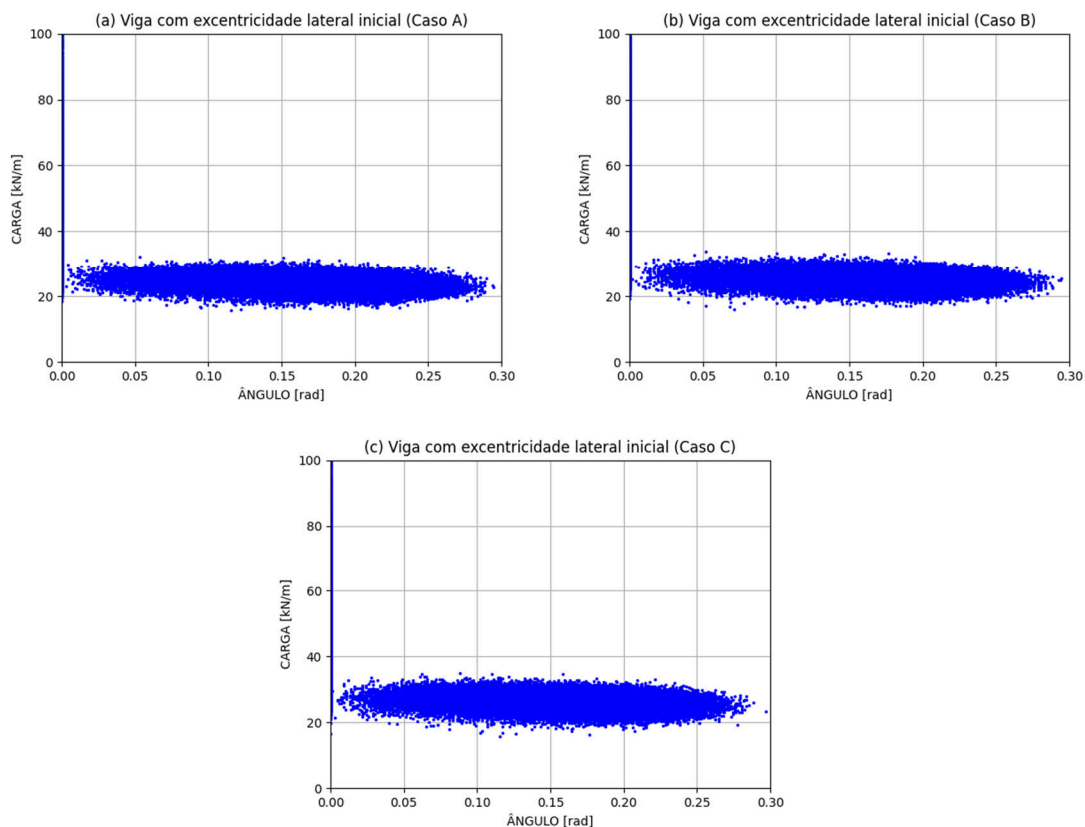
Figura 6.17– Análises da viga com contraflecha devido a força de protensão



Fonte: Autor (2021)

A Figura 6.18 (a) ilustra os resultados das 100 mil simulações da viga com excentricidade lateral inicial para o caso A, a Figura 6.18 (b) para o caso B e a Figura 6.18 (c) para o caso C.

Figura 6.18 – Análises da viga com excentricidade lateral inicial



Fonte: Autor (2021)

A Figura 6.19 (a) ilustra os resultados das 100 mil simulações para a viga com excentricidade e rotação inicial para o caso A, a Figura 6.19 (b) para o caso B e a Figura 6.19 (c) para o caso C.

Figura 6.19 – Análises da viga com excentricidade e rotação inicial

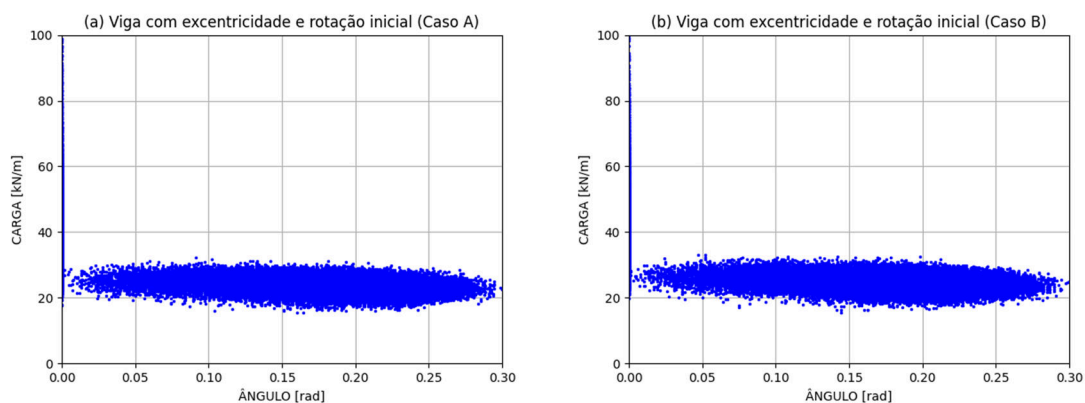
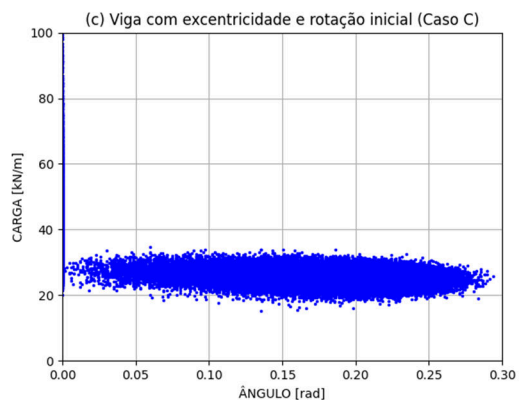


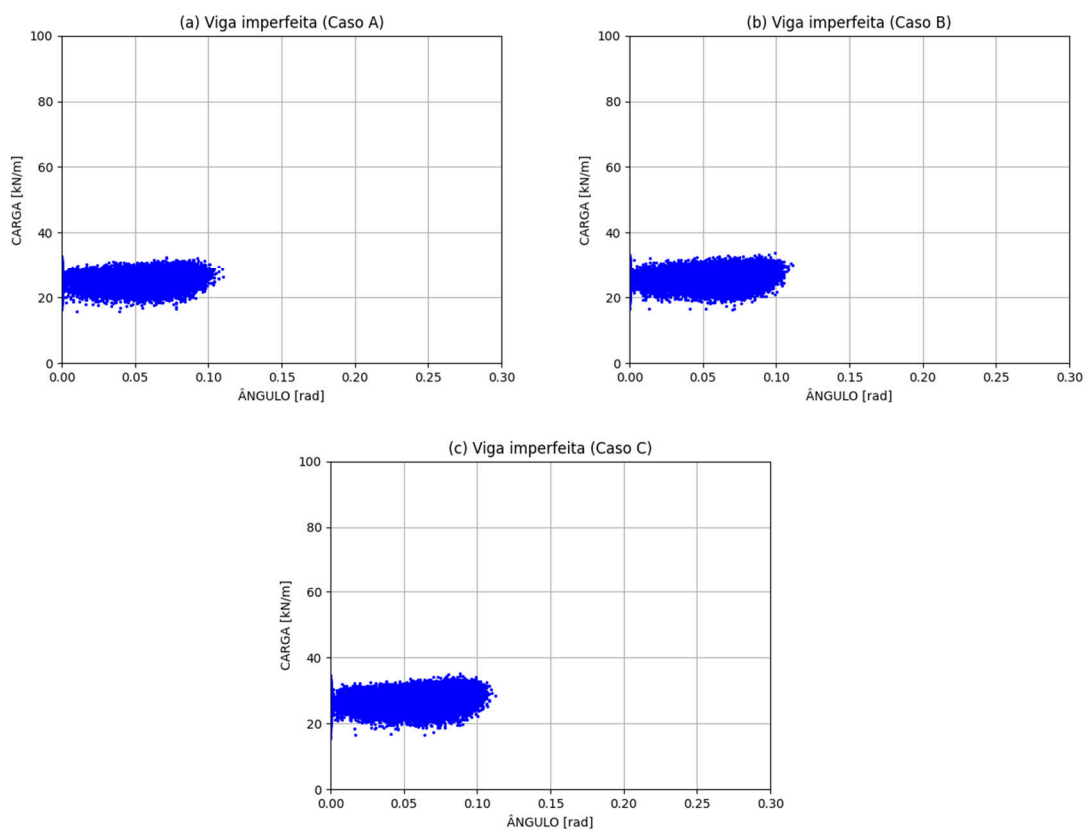
Figura 6.19 – Análises da viga com excentricidade e rotação inicial



Fonte: Autor (2021)

A Figura 6.20 (a) ilustra os resultados das 100 mil simulações da viga imperfeita para o caso A, a Figura 6.20 (b) para o caso B e a Figura 6.20 (c) para o caso C.

Figura 6.20 – Análises da viga imperfeita



Fonte: Autor (2021)

A Tabela 6.10 apresenta um resumo das cargas limite obtidas para as cinco situações analisadas, considerando os três casos apresentados neste item (A, B e C) sem considerar as variações paramétricas.

Tabela 6.10 – Cargas limites para diferentes coeficientes  $k_\phi$  e  $h$ 

<b>Caso</b>	<b>Análise</b>	<b>Carga limite</b>	<b>Ângulo</b>
<b>A</b>	Viga perfeitamente reta	58,57 kN/m	0,0028 rad
	Viga com contraflecha de protensão	57,89 kN/m	0,0028 rad
	Viga com excentricidade inicial	24,47 kN/m	0,1624 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	23,92 kN/m	0,1884 rad
	Viga imperfeita	24,93 kN/m	0,0361 rad
<b>B</b>	Viga perfeitamente reta	60,09 kN/m	0,0028 rad
	Viga com contraflecha de protensão	59,40 kN/m	0,0028 rad
	Viga com excentricidade inicial	25,50 kN/m	0,1594 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	24,92 kN/m	0,1875 rad
	Viga imperfeita	25,90 kN/m	0,0511 rad
<b>C</b>	Viga perfeitamente reta	61,57 kN/m	0,0028 rad
	Viga com contraflecha de protensão	60,88 kN/m	0,0028 rad
	Viga com excentricidade inicial	26,49 kN/m	0,1574 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	25,88 kN/m	0,1855 rad
	Viga imperfeita	26,85 kN/m	0,0592 rad

Fonte: Autor (2021)

Diante dos valores de carga limite apresentadas na Tabela 6.10 e utilizando como base para comparação o caso A ( $k_\phi = 44476,84$  kNm/rad e  $h = 12000$  kNm/rad), observa-se que: para a viga perfeitamente reta, a carga limite aumenta 2,60% no caso B ( $k_\phi = 46714,38$  kNm/rad e  $h = 13000$  kNm/rad) e 5,12% no caso C ( $k_\phi = 48951,92$  kNm/rad e  $h = 14000$  kNm/rad); para a viga com contraflecha, os aumentos são respectivamente, 2,61% e 5,16%; para a viga com excentricidade inicial a carga limite aumenta 4,21% do caso A para o caso B e 8,26% do caso A para o C; para a viga com excentricidade e rotação inicial a carga limite aumenta 4,18% de A para B e 8,19% de A para C; e para a viga imperfeita a carga aumenta 3,89% e 7,70% nos casos B e C, respectivamente. Observa-se aqui, o aumento da capacidade de carga das vigas quando a rigidez do apoio aumenta, outro ponto importante é que, para a viga com excentricidade e viga com excentricidade e rotação inicial, o ângulo reduz, ao contrário da viga imperfeita, onde o aumento da rigidez melhora a capacidade de carga e reduz o ângulo referente à carga limite.

A Tabela 6.11 apresenta o resultado médio das 100 mil simulações de cada caso. Além disso, a probabilidade de falha para as simulações, que foi igual a 0,086 para o caso B e 0,039 para o caso C. Isso mostra que, o aumento dos coeficientes  $k_\phi$  e  $h$ , que indiretamente geram o aumento do momento crítico da almofada de apoio, tem como consequência a redução da probabilidade de falha. Esta observação contribui com a ideia de que a

consideração de apoios que possam absorver tração na interação viga-apoio possa exercer uma influência positiva sobre a carga de instabilidade, já que almofadas com aderência ou o uso de chumbadores apresentam momentos críticos maiores.

Tabela 6.11 – Resultado médio das 100 mil simulações para diferentes rigidezes ( $k_\phi$  e  $h$ )

<b>Caso</b>	<b>Análise</b>	<b>Carga limite</b>	<b>Ângulo</b>
<b>A</b>	Viga perfeitamente reta	58,34 kN/m	-
	Viga com contraflecha de protensão	57,82 kN/m	-
	Viga com excentricidade inicial	25,53 kN/m	0,1353 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	24,83 kN/m	0,1706 rad
	Viga imperfeita	25,36 kN/m	0,0316 rad
<b>B</b>	Viga perfeitamente reta	59,87 kN/m	-
	Viga com contraflecha de protensão	59,35 kN/m	-
	Viga com excentricidade inicial	26,52 kN/m	0,1348 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	25,79 kN/m	0,1700 rad
	Viga imperfeita	26,23 kN/m	0,0399 rad
<b>C</b>	Viga perfeitamente reta	61,37 kN/m	-
	Viga com contraflecha de protensão	60,85 kN/m	-
	Viga com excentricidade inicial	27,48 kN/m	0,1340 rad
	Viga com excentricidade e rotação inicial	26,72 kN/m	0,1690 rad
	Viga imperfeita	27,10 kN/m	0,0469 rad

Fonte: Autor (2021)

Considerando os valores de carga limite média apresentados na Tabela 6.11 e utilizando como base para comparação o caso A, observa-se que: para a viga perfeitamente reta, a carga limite média aumenta 2,62% no caso B e 5,19% no caso C; para a viga com contraflecha, os aumentos são respectivamente, 2,65% e 5,24%; para a viga com excentricidade inicial a carga limite média aumenta 3,88% do caso A para o caso B e 7,64% do caso A para o C; para a viga com excentricidade e rotação inicial a carga limite média aumenta 3,87% de A para B e 7,61% de A para C; e para a viga imperfeita a carga média aumenta 3,43% e 6,86% nos casos B e C, respectivamente.

As Figuras 6.21 (a) e (b) apresentam os histogramas considera os resultados apresentados nas Figura 6.20 (b) e (c), viga imperfeita para os casos B e C, respectivamente. Os resultados são apresentados de forma a representar a quantidade de simulações para um determinado intervalo de carga limite. No eixo x são representados os valores de carga limite e no eixo y a frequência de cada intervalo de carga. As figuras também apresentam as distribuições Gaussianas de cada análise, conforme a Equação 6.1, sendo que, para o caso B o valor médio ( $\mu$ ) é igual a 26,23 kN/m e desvio padrão ( $\sigma$ ) igual a 1,94 e para o caso C o valor médio é igual a 27,10 kN/m e o desvio padrão igual a 2,01.

Figura 6.21 – Histogramas de carga limite da viga imperfeita por quantidade de simulações (a) Caso B (b) Caso C (c) Distribuições de Gauss para o caso B (d) Distribuições de Gauss para o caso C

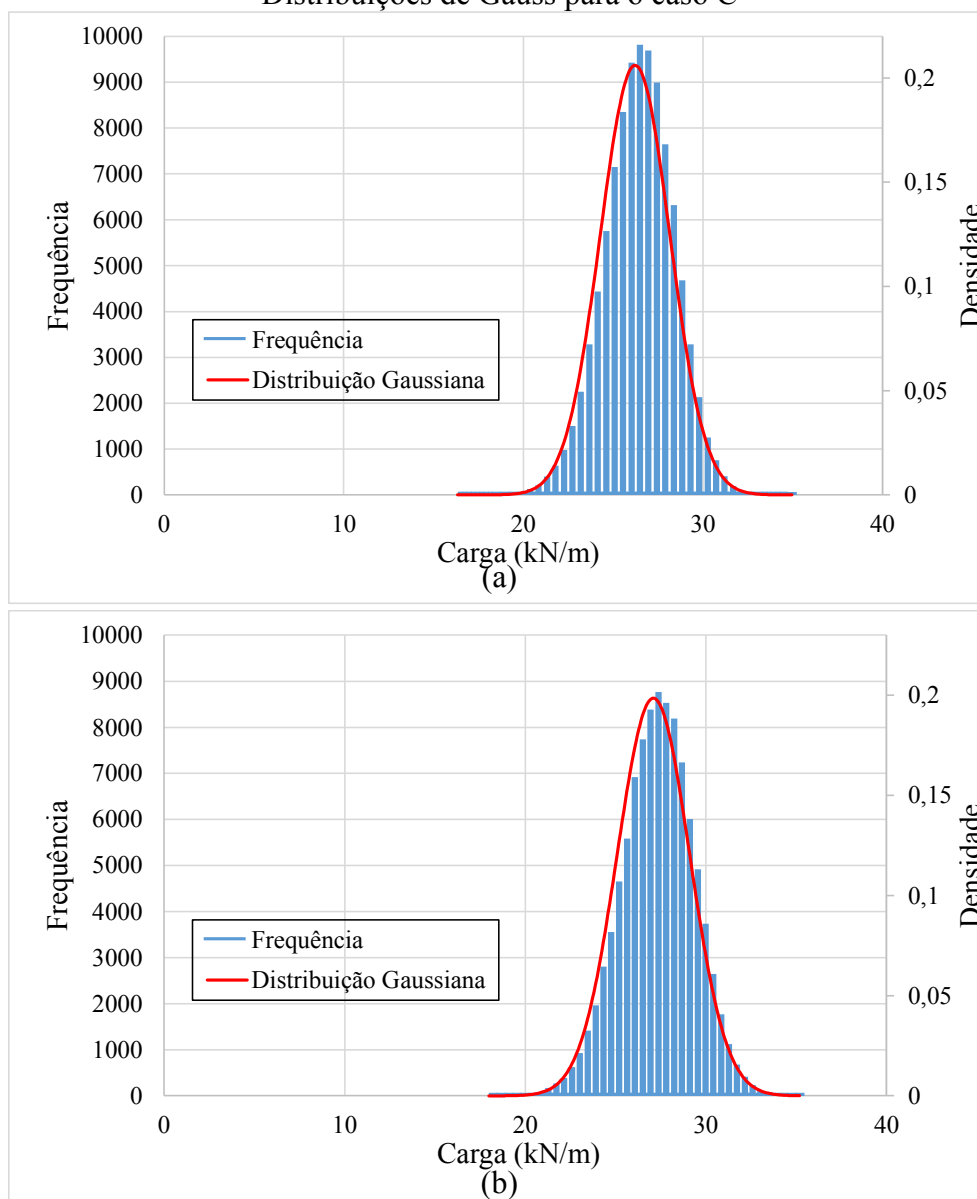
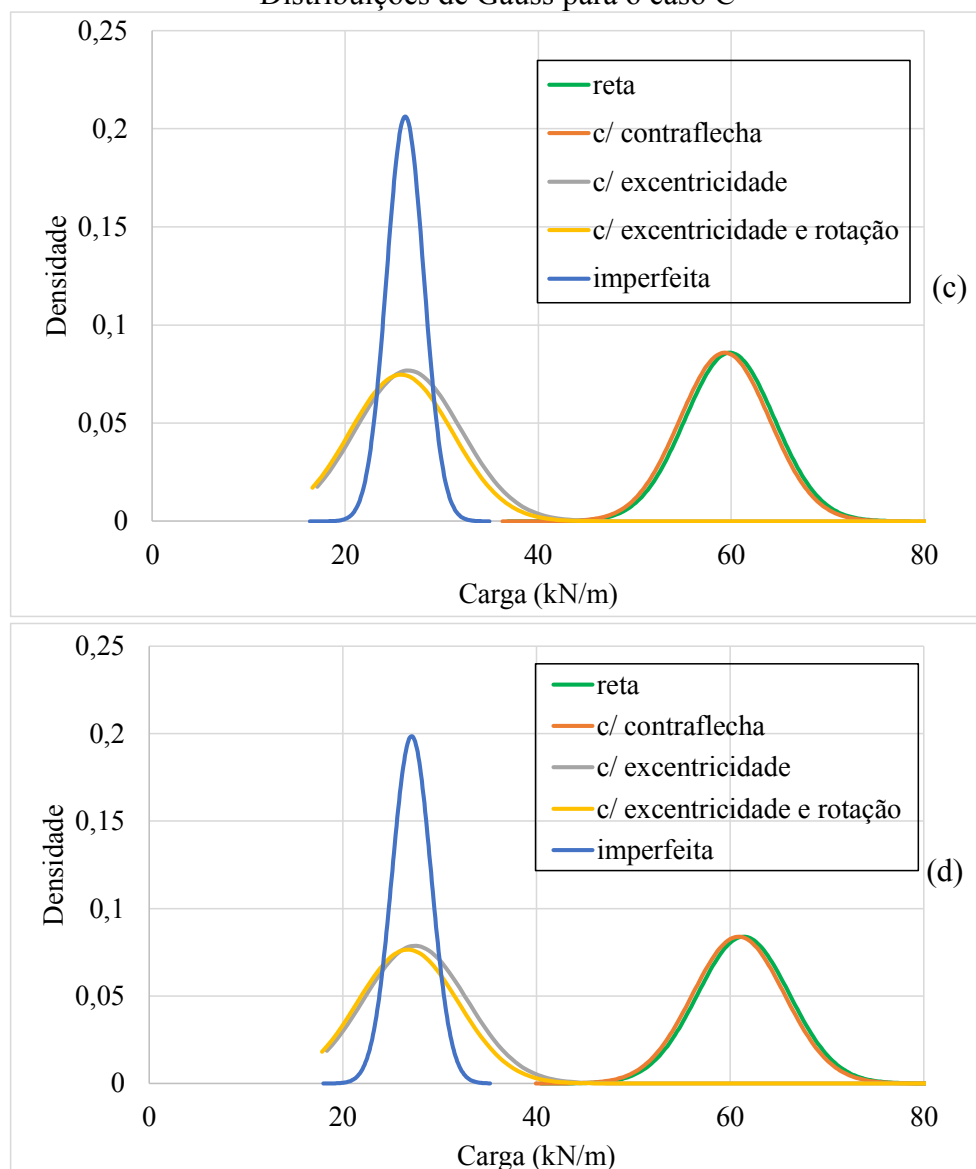


Figura 6.21 – Histogramas de carga limite da viga imperfeita por quantidade de simulações (a) Caso B (b) Caso C (c) Distribuições de Gauss para o caso B (d) Distribuições de Gauss para o caso C



Fonte: Autor (2021)

As Figura 6.21 (c) (d) apresentam as distribuições de Gauss para todas as situações analisadas neste trabalho: viga perfeitamente reta; viga com contraflecha devido a força de protensão; viga com excentricidade inicial; viga com excentricidade e rotação inicial; e viga imperfeita. Dos resultados apresentados na Figura 6.21 (c), para o caso B, tem-se que: a viga perfeitamente reta tem valor médio igual a 59,87 kN/m e desvio padrão igual a 4,65; a viga com excentricidade inicial tem valor médio igual a 26,52 kN/m e desvio padrão igual a 5,46; a viga com excentricidade e rotação inicial tem valor médio igual a 25,79 kN/m e desvio padrão igual a 5,34; e a viga com contraflecha devido a força de protensão tem valor médio igual a 59,35 kN/m e desvio padrão igual a 4,65. Já a Figura



6.21 (d), para o caso C, tem-se que: a viga perfeitamente reta tem valor médio igual a 61,37 kN/m e desvio padrão igual a 4,76; a viga com excentricidade inicial tem valor médio igual a 27,48 kN/m e desvio padrão igual a 5,33; a viga com excentricidade e rotação inicial tem valor médio igual a 26,72 kN/m e desvio padrão igual a 5,21; e a viga com contraflecha devido a força de protensão tem valor médio igual a 60,85 kN/m e desvio padrão igual a 4,76. O aumento da rigidez do apoio tem como consequência o aumento da capacidade de carga da viga UHPC analisada, considerando que o peso próprio da viga é 22,11 kN/m, na situação mais crítica (viga com excentricidade e rotação inicial), no caso C, com a melhor condição de apoio dentre as analisadas, a carga limite média é 20,85% maior do que o peso próprio.

# Capítulo 7

## Conclusões

---

### 7.1 Conclusão

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de analisar a influência da consideração da não linearidade de contato entre viga e almofada elastomérica nas previsões de instabilidade lateral de vigas pré-moldadas longas e esbeltas, apoiadas, ainda em fase transitória de montagem.

Entre os motivos que justificam esta pesquisa estão os inúmeros acidentes registrados na literatura, que evidenciam a necessidade de investigar e, principalmente, prever as situações de tombamento e colapso das vigas por meio de verificações mais precisas. Além disso, o descolamento entre viga e apoio ocorre em pequenas rotações, o que torna não linear, a relação entre momento aplicado  $\times$  rotação. Neste sentido, com o intuito de avançar nas propostas analíticas, acoplando a não linearidade geométrica das vigas com a não linearidade de contato entre viga e apoio foi desenvolvido este trabalho.

Os resultados mostram que a consideração da não linearidade de contato entre viga e apoio impactaram principalmente na capacidade das vigas com presença de excentricidade inicial e rotação inicial. Nestes casos, as diferenças entre as cargas limites com a rigidez ao giro da almofada linear e com a não linearidade de contato chegaram a 84% para a viga BT-54. Em ambos os casos, com e sem consideração da não linearidade, tem-se o problema de ponto limite para vigas com excentricidade e rotação inicial. Porém, a consideração do *lift-off* somada ao problema de ponto limite, com o aumento simultâneo da carga e da rotação até o ponto limite, tem como consequência a redução da carga limite. Observa-se que, como o ângulo crítico é menor que o ângulo referente a carga de limite sem a consideração da não linearidade, a carga limite com a consideração da não linearidade de contato tem uma redução significativa. Como na prática as vigas apresentam imperfeições iniciais, como rotação e excentricidade lateral, nota-se a importância em considerar a não linearidade de contato entre viga e elastômero nas previsões de instabilidade.

Das respostas analíticas das vigas BT-54 e UHPC desenvolvidas neste trabalho, tem-se as seguintes conclusões:

- Considerando as vigas perfeitamente retas nas análises de instabilidade lateral, a viga UHPC de 91,4 m se mostrou significativamente mais crítica em comparação com a viga BT-54 de 30,0 m. A razão entre a carga máxima e o peso próprio é igual 19,57 para a viga BT-54 e igual a 2,65 para a viga UHPC. A menor capacidade de carga da viga UHPC é justificada pela baixa rigidez lateral e aumento significativo do vão proporcionado pela alta resistência do concreto desse tipo de viga;
- Nas análises da viga BT-54, tendo como base a viga sem imperfeições, a consideração da excentricidade de  $e/750$  provocou uma redução de 74% na carga limite e da excentricidade de  $e/350$  reduziu a carga em 85%, enquanto para a viga UHPC essas reduções foram de 53,9% e 58,2%, respectivamente. Isso mostra que a viga BT-54 é a mais sensível às imperfeições iniciais. Contudo, a viga UHPC continua em situação mais crítica para a instabilidade lateral. A viga BT-54 tem razão entre a carga máxima e o peso próprio igual a 5,16 para excentricidade  $e/750$  e 2,82 com excentricidade igual a  $e/350$ , enquanto na viga UHPC esses valores chegam a 1,22 e 1,08 para excentricidade igual a  $e/750$  e  $e/350$ , respectivamente. Diante de coeficientes próximos a 1, fica evidente a necessidade de levantar uma base de dados para as tolerâncias e imperfeições de vigas UHPC, e também, verificar de forma mais detalhada a influência de apoios que possam absorver tração na interação viga-apoio sobre a carga de instabilidade, como por exemplo, almofadas com aderência ou uso de chumbadores;
- A situação mais crítica para ambas as vigas, BT-54 e UHPC, foi a situação viga com excentricidade e rotação inicial. A razão entre a carga limite e o peso próprio para a viga BT-54 foi 2,78 e para a viga UHPC foi 1,08, ambas críticas, já que o recomendado é superior a 4;
- Em comparação com a viga reta, a carga limite da BT-54 foi reduzida em 1,55% com a consideração da contraflecha, enquanto na viga UHPC a redução foi de apenas 1%, mostrando que a viga UHPC, apesar de mais crítica quanto a instabilidade, se mostrou menos sensível à consideração da contraflecha;

- Para verificar a influência de apoios que absorvem tração na interação viga-apoio sobre a carga de instabilidade, foi considerado o aumento do valor do momento crítico para as Equações 3.5 e 3.6, a partir do caso que não há aderência (*lift-off*) na interação (*lower bound*). A carga limite no caso com excentricidade inicial ( $\ell/350$ ) passou de 24,24 kN/m ( $q/g = 1,11$ ) para 25,61 kN/m ( $q/g = 1,16$ ) ao dobrar o momento crítico e para 36,97 kN/m ( $q/g = 1,67$ ), ao quadruplicar. Para a viga com excentricidade ( $\ell/350$ ) e rotação inicial passou de 23,92 kN/m ( $q/g = 1,08$ ) para 24,69 kN/m ( $q/g = 1,12$ ) ao dobrar o momento crítico e para 31,29 kN/m ( $q/g = 1,42$ ), ao quadruplicar. Por fim, para a viga imperfeita, a carga limite passou de 24,93 kN/m ( $q/g = 1,13$ ) para 34,46 kN/m ( $q/g = 1,56$ ) ao dobrar e para 40,66 kN/m ( $q/g = 2,02$ ), ao quadruplicar o momento crítico. Verifica-se, portanto, a necessidade de investigar soluções intermediárias (entre a mola elástica ideal e o caso sem aderência (*lift-off*)) em pesquisas futuras, como casos em que há aderência entre aparelho de apoio e viga, ou por meio da utilização de chumbadores. O aumento do momento crítico favorece a razão  $q/g$ , aumentando a segurança do elemento quanto à instabilidade lateral.

Diante das simulações de Monte Carlo fica evidente que a capacidade de carga da viga UHPC aumenta com:

- Redução da excentricidade lateral inicial da viga;
- Aumento da resistência do concreto;
- Redução da força de protensão;
- Aumento das rigidezes  $k_\phi$  e  $h$  do apoio.

Observa-se que, considerando as cinco situações analisadas, a viga imperfeita, apesar de apresentar excentricidade, rotação e contraflecha, não foi a situação mais crítica na maioria das análises. Considerando as três diferentes excentricidades laterais ( $\ell/1000$ ,  $\ell/750$  e  $\ell/350$ ), sem considerar a variação paramétrica, observa-se que para a menor excentricidade ( $\ell/1000$ ) a viga imperfeita é a situação mais crítica, o que não acontece para as demais excentricidades analisadas. Considerando os resultados médios das 100 mil simulações, observa-se que, para a viga com excentricidade inicial, utilizando como base a excentricidade  $\ell/1000$ , a carga limite média reduz 2,19% quando a excentricidade passa para  $\ell/750$  e quando a excentricidade passa para  $\ell/350$  a carga reduz 5,20%.

Fazendo a mesma comparação para a viga com excentricidade e rotação inicial, as reduções são respectivamente, 0,97% e 3,23 %, enquanto para a viga imperfeita a carga limite média reduz 0,039% de  $\ell/1000$  para  $\ell/750$  e 0,51% de  $\ell/1000$  para  $\ell/350$ . Observa-se que as reduções, em percentual, são menores para a viga imperfeita em comparação com os outros dois casos e, como consequência, a viga imperfeita deixa de ser o caso mais crítico para imperfeições maiores que  $\ell/1000$ .

Quanto à probabilidade de falha, nota-se a criticidade da viga UHPC para a instabilidade lateral, visto que, conforme o JCSS *Probabilistic Model Code* (2001) o recomendado é menor ou igual a  $10^{-4}$ . Considerando os dados base, a probabilidade chega a 0,18. A redução da excentricidade diminui a probabilidade de falha para 0,08 quando a excentricidade lateral é igual a  $\ell/1000$ ; e para 0,09 quando a excentricidade é  $\ell/750$ . A resistência a compressão do concreto também se mostrou um fator significativo quanto a falha, ao reduzir a resistência para 120 MPa, a probabilidade de falha aumenta para 0,37, enquanto a mesma reduz para 0,06 quando a resistência aumenta para 200 MPa. Em relação à protensão, não foram observadas mudanças significativas, a probabilidade de falha variou entre 0,18 e 0,17. A redução mais significativa para a probabilidade de falha foi obtida para as análises das rigidezes  $k_\phi$  e  $h$  do apoio, chegando a probabilidades de 0,086 e 0,039 para o caso B e para o caso C, respectivamente. Isto evidencia que as condições dos aparelhos de apoio são de extrema importância na estabilidade de vigas pré-moldadas longas e esbeltas.

Finalmente, fica evidente a importância da consideração do *lift-off* nos problemas de instabilidade lateral de vigas pré-moldadas apoiadas em elastômeros, em fase de montagem. Além disso, ressalta-se a necessidade de investigações mais detalhadas da instabilidade lateral em vigas UHPC, assim como a necessidade de se levantar uma base de dados para as tolerâncias e imperfeições dessas vigas.

## 7.2 Recomendações para trabalhos futuros

Neste trabalho foi verificada a importância da consideração da não linearidade de contato entre viga e apoio, e observou-se que as vigas de UHPC estão em situação crítica quanto a instabilidade, com fatores de segurança extremamente baixos. Com isso, ressalta-se a necessidade de verificar, de forma mais detalhada, a influência de apoios que possam

absorver tração na interação viga-apoio sobre a carga de instabilidade, como por exemplo, almofadas com aderência ou uso de chumbadores. Além disso, ressalta-se a necessidade de levantar uma base de dados para as tolerâncias e imperfeições de vigas UHPC, uma vez que este material está começando a ser aplicado em campo e seu comportamento é muito diferente do concreto convencional.

# Referências

---

AASHTO-LRFD **Bridge Design Specifications**. "American Association of State Highway and Transportation Officials." Washington, DC (2012).

BAIRÁN, J. M.; CLADERA, A. Collapse of a precast concrete beam for a light roof. Importance of elastomeric bearing pads in the element's stability. *Engineering Failure Analysis*, v. 39, p. 188-199, Apr. 2014. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2014.02.001>

BRAGA, W. A. *Aparelhos de apoio das estruturas*. São Paulo, Edgard Brücher. 1986.

BURGOYNE, C. J; and STRATFORD, T. J. Lateral instability of long-span prestressed concrete beams on flexible bearings. **The Structural Engineer**, v. 79, n. 6, p. 23-26, Mar. 2001.

CARDOSO, M. T. S. A. **Instabilidade lateral de vigas pré-moldadas sobre apoios elastoméricos considerando o efeito das imperfeições geométricas**. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, FECIV, Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia. 2017. <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2017.271>

COJOCARU, R. **Lifting Analysis of Precast Prestressed Concrete Beams**. Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, VA, p. 86. 2012.

CONSOLAZIO, G. R; and HAMILTON, H. R. **Lateral bracing of long-span Florida bulb-tee girders**. University of Florida, Department of Civil & Coastal Engineering. Florida, p. 91. 2007.

CONSOLAZIO, G. R; and HAMILTON, H. R. **Experimental validation of bracing recommendations for long-span concrete girders**. University of Florida, Civil and Coastal Engineering. Flórida. 2012.

GRAYBEAL, B., **Design and Construction of Field-Cast UHPC Connections**, FHWA-HRT-14-084, Federal Highway Administration, Washington, D.C., 2014.

HARPER, Z. S; and CONSOLAZIO, G. R. Calculation method for quantifying axial and roll stiffnesses of rectangular steel-reinforced elastomeric bridge bearing pads. **Journal of the Transportation Research Board**, n. 2331, p. 3-13, 2013. <https://doi.org/10.3141/2331-01>

HELOU, R. E; and GRAYBEAL, B. A. **The Ultra Girder: A Design Concept for a 300-foot Single Span Prestressed UHPC Bridge Girder**. jun. 2019. <https://doi.org/10.21838/uhpc.9707>

HURFF, J. B. **Stability of precast prestressed concrete bridge girders considering imperfections and thermal effects**. Georgia Institute of Technology. Georgia, EUA, p. 446. 2010. (Tese).

HURFF, J. B; and KAHN, L. F. Rollover stability of precast, prestressed concrete bridge girders with flexible bearings. **PCI Journal**, v. 57, n. 4, p. 96-107, 2012. <https://doi.org/10.15554/pcij.09012012.96.107>

JCSS, Joint Committee on Structural Safety. **Probabilistic Model Code** – Part 1. 2001.

KRAHL, P. A. **Instabilidade Lateral de Vigas Pré-moldadas em Situações Transitórias**. 208 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

KRAHL, P. A; OLIVEIRA, M. F. A; SIQUEIRA, G. H; LIMA, M. C. V. Analytical Nonlinear Rollover Behavior of Cambered Precast Concrete Beams on Flexible Supports. **Journal of Structural Engineering**, [S.L.], v. 146, n. 2, p. 04019200, fev. 2019. American Society of Civil Engineers (ASCE). [http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)st.1943-541x.0002503](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)st.1943-541x.0002503).

KRAHL, P. A; CARRAZEDO, R; EL DEBS, M. K. Rollover stability of precast concrete beams supported by elastomeric bearing pads. **IBRACON de Estruturas e Materiais**, São Paulo, v. 20, n. 6, p. 1192-1204, Novembro 2017. <https://doi.org/10.1590/S1983-41952017000600005>

KRAHL, P. A; LIMA, M. C. V; SIQUEIRA, G. H. Simplified Analytical Nonlinear Model for Contact Problem between Precast Concrete Beams and Elastomeric Bearing Pads. **Journal of Structural Engineering**, [S.L.], v. 146, n. 11, p. 04020251-9, nov. 2020. American Society of Civil Engineers (ASCE). [http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)st.1943-541x.0002822](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)st.1943-541x.0002822).

LEBELLE, P. **Stabilité élastique des poutres en béton précontraint a l'égard de déversement latéral**. Ann. Batiment et des Travaux Publics, 141, 780-830. 1959.

LEE, J. H. Evaluation of the lateral stability of precast beams on an elastic bearing support with a consideration of the inicial sweep. **Engineering Structures**, v. 143, n. 1, p. 101-112, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.04.006>

LEE, J. H. *et al.* Rollover instability of precast girders subjected to wind load. **Magazine of Concrete Research**, v. 69, n. 2, p. 68-83, 2017. <https://doi.org/10.1680/jmacr.16.00187>

LIMA, M. C. V. **Contribuição ao estudo da instabilidade lateral de vigas pré-moldadas**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos. 2002.

MAST, R. F. Lateral stability of long prestressed concrete beams - Part 1. **PCI Journal**, v. 34, n. 1, jan.-feb. 1989. <https://doi.org/10.15554/pcij.01011989.34.53>

MAST, R. F. Lateral stability of long prestressed concrete beams - Part 2. **PCI Journal**, v. 38, n. 1, jan.-feb. 1993. <https://doi.org/10.15554/pcij.01011993.70.88>

MUSCARELLA, J.V; and YURA, J.A. **An experimental study of elastomeric bridge bearings with design recommendations**. Texas Department of Transportation. Austin, Texas, p.194. oct. 1995.



OESTERLE, R. G. *et al.* **Investigation of red mountain freeway bridge girder collapse.** Arizona Department of Transportation, Bridge Group. Skokie, Illinois, p. 67. nov. 2007. (CTL Group Project No. 262291).

OLIVEIRA, M. F. A. **Estudo analítico do tombamento de vigas pré-moldadas sobre almofadas de apoio.** 2019. 136 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2019.21>

PCI - PRECAST/PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE. **PCI Bridge Design Manual.** Chicago, USA. 2003.

PEART, W. L; RHOMBERG, E. J; JAMES, R. W. **Buckling of Suspended Cambered Girders.** *Journal Of Structural Engineering*, [S.L.], v. 118, n. 2, p. 505-528, fev. 1992. American Society of Civil Engineers (ASCE). [http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(1992\)118:2\(505\)](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(1992)118:2(505)).

PI, Yong Lin; and TRAHAIR, N. S.. Prebuckling Deflections and Lateral Buckling. I: theory. *Journal Of Structural Engineering*, [S.L.], v. 118, n. 11, p. 2949-2966, nov. 1992. American Society of Civil Engineers (ASCE). [http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(1992\)118:11\(2949\)](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(1992)118:11(2949)).

PLAUT, R. H; and MOEN, C. D. Stability of unbraced concrete beams on bearing pads including wind loading. *Journal of Structural Engineering*, v. 69, p. 246-254, jun. 2014. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.03.024>

REIS, L. C. **Estudo do comportamento de almofadas elastoméricas sob vigas pré-moldadas e análise da estabilidade lateral após a montagem.** 2018. 140 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018. <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.1220>

REIS, L. C.; KRAHL, P. A.; LIMA, M. C. V. Numerical analysis of the effective stiffness of elastomeric bearing pads under precast beams for the limit load of lateral instability. *Revista Ibracon de Estruturas e Materiais*, [S.L.], v. 13, n. 1, p. 95-119, fev. 2020. Fap UNIFESP (SciELO). <https://doi.org/10.1590/S1983-41952020000100008>

SOUTHWELL, R. V. On the analysis of experimental observations in problems of elastic stability. *Proc. Roy. Soc.*, London, v. 135, p. 601-616, 1932. <https://doi.org/10.1098/rspa.1932.0055>

STEELMAN, J. S; FILIPOV, E. T; FAHNESTOCK, L. A; REVELL, J. R; LAFAVE, J. M; HAJJAR, J. F; FOUTCH, D. A. 2014. Experimental behavior of steel fixed bearings and implications for seismic bridge response. *Journal of Bridge Engineering*, 19(8), A4014007.

TIMOSHENKO, S. P; and GERE, J. E. **Mecânica dos Sólidos.** Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., v. 1 e 2, 1984.

TIMOSHENKO, S. P; and GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability.** New York: McGraw-Hill. 1988.

TRAHAIR, N. S. **Flexural-Torsional Buckling of Structures.** London. 1993. <https://doi.org/10.1201/9781482271218>

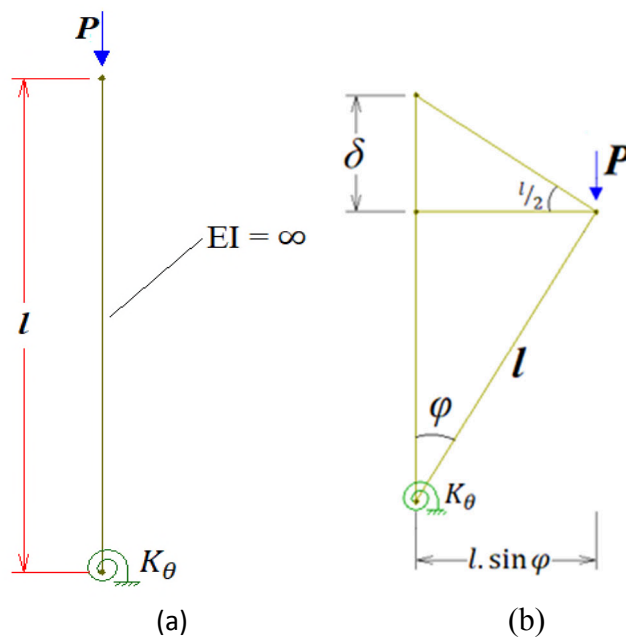
TREMBLAY, R; and MITCHELL, D. Collapse during Construction of a Precast Girder Bridge. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 20, n. 2, p. 113-125, may. 2006. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0887-3828\(2006\)20:2\(113\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0887-3828(2006)20:2(113))

YAZDANI, N.; EDDY, S.; CAI, C. S. Effect of bearing pads on precast prestressed concrete bridges. **Journal of Bridge Engineering**, v. 5, p. 224-232, 2000. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0702\(2000\)5:3\(224\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0702(2000)5:3(224))

## Anexo A

A fim de apresentar e validar a função bilinear utilizada para representar a não linearidade de contato entre apoio e viga de forma simplificada, foi utilizado um pilar rígido, conforme ilustrado na Figura A.1.

Figura A.1 – (a) Ilustração pilar simplificado (b) Configuração deslocada do pilar



Fonte: Autor (2021)

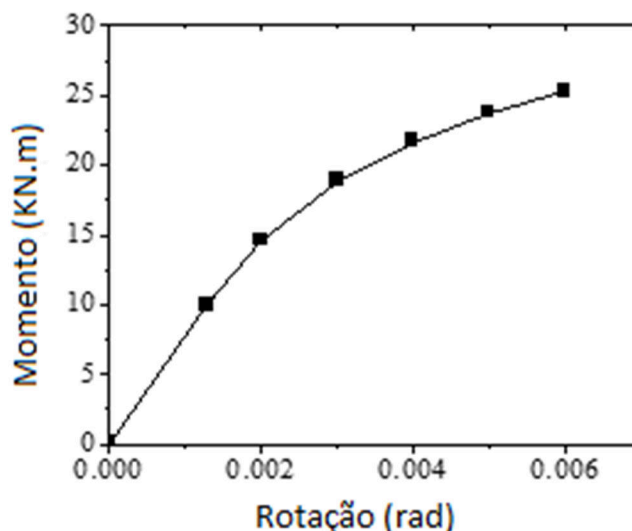
De acordo com estudos desenvolvidos por Krahel, Lima e Siqueira (2020) a relação não linear momento-rotação nos apoios pode ser descrita através da Equação A.1, tal relação descreve a perda de contato entre as peças (apoio e viga ou apoio e pilar). Por ser em função de duas variáveis ( $\varphi$  e  $x_0$ ), a Equação A.1 dificulta a obtenção das equações de equilíbrio apresentadas neste trabalho de forma fechada, por isso, a simplificação para uma curva bilinear.

$$M = \frac{E_{pad} W \varphi (L^2 + 6Lx_0 + 3x_0^2)(L - x_0)^4 + 30PHL^2 x_0^2}{20HL^3(L + 2x_0)} \quad (A.1)$$

Onde:  $L$  é a dimensão horizontal maior da almofada, transversal ao eixo da viga;  $W$  é a dimensão menor no plano horizontal;  $H$  é a altura da almofada;  $x_0$  representa a perda de contato na direção do comprimento  $L$ ;  $P$  é a carga vertical aplicada na almofada; e  $E_{pad}$  é o módulo de elasticidade da almofada.

Tendo como base os resultados apresentados na Figura A.2, adaptada de Krah, Lima e Siqueira (2020) para a relação momento-rotação descrita na Equação A.1, foi desenvolvida a função bilinear apresentada neste anexo.

Figura A.2 – Relação momento-rotação



Fonte: Adaptado de Krah, Lima e Siqueira (2020)

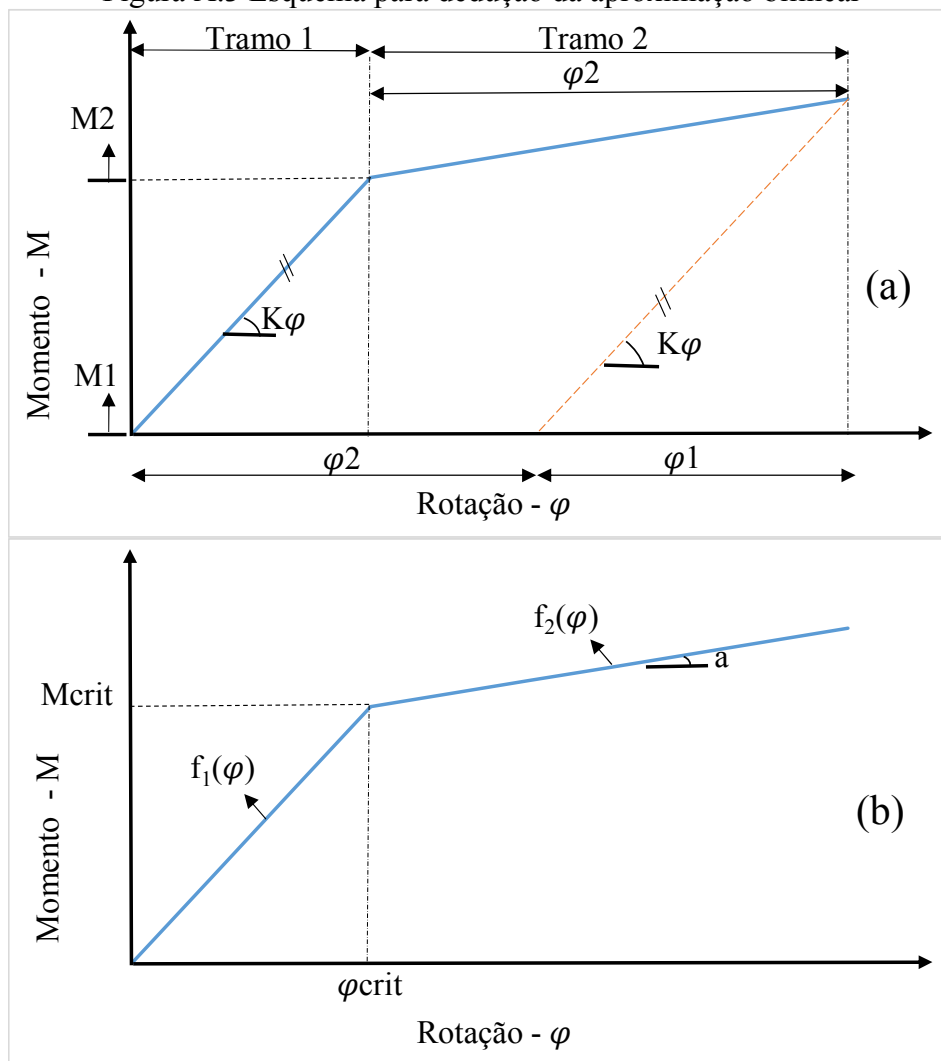
Para a função bilinear foram consideradas duas funções lineares que representassem a curva momento  $\times$  rotação, de forma que se aproximassem da relação ilustrada na Figura A.2. O primeiro tramo é considerado com coeficiente de rigidez  $K_\varphi$  e o segundo com coeficiente  $h$ . A partir da Figura A.3 (a) e (b) foram realizadas as deduções para encontrar as funções de momento que representam cada tramo.

Tem-se que, para o tramo 1 ilustrado na Figura A.3 (a), o somatório de energia é dado pela Equação A.2, em que a primeira parcela corresponde à energia interna, e a solução analítica de carga crítica é dada pela derivada parcial da energia em relação ao ângulo de giro, conforme a Equação A.3. Propositamente, a Equação A.3 equivale à solução com consideração da rigidez linear.

$$\Pi = \frac{K_\varphi \varphi^2}{2} - PL \sin(\varphi) \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (A.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \Pi = 0 \rightarrow P_{cr}(\varphi) = \frac{2K_\varphi \varphi}{L \left( \sin(\varphi) \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 2 \cos \varphi \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin(\varphi) \right)} \quad (A.3)$$

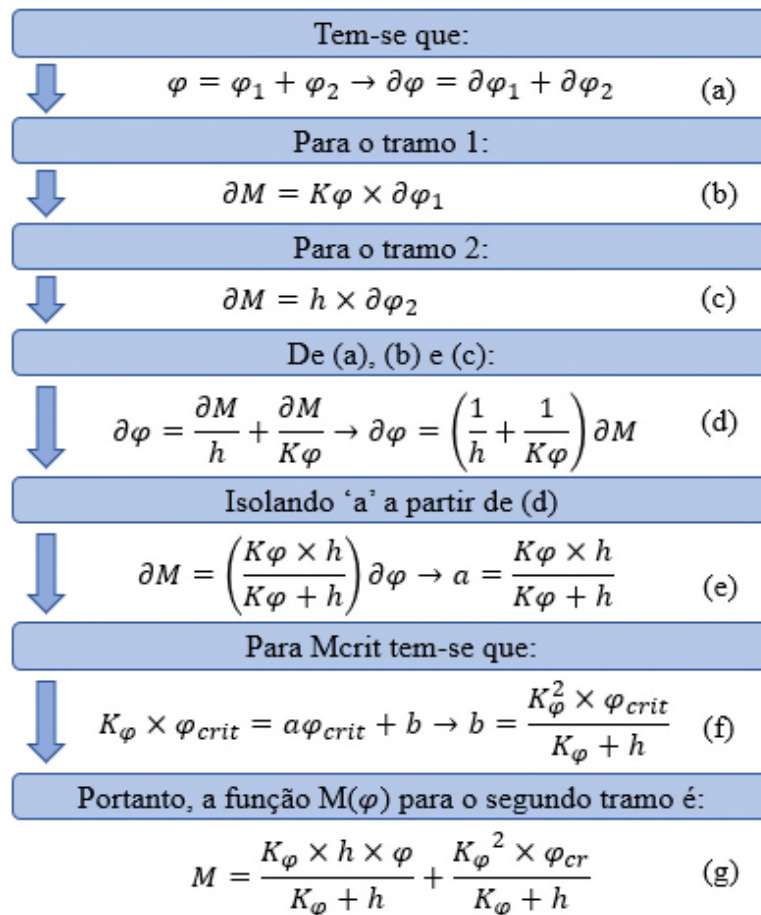
Figura A.3 Esquema para dedução da aproximação bilinear



Fonte: Autora (2021)

Através da Figura A.3, pode-se deduzir analiticamente a função correspondente ao segundo tramo da curva bilinear, conforme o esquema da Figura A.4.

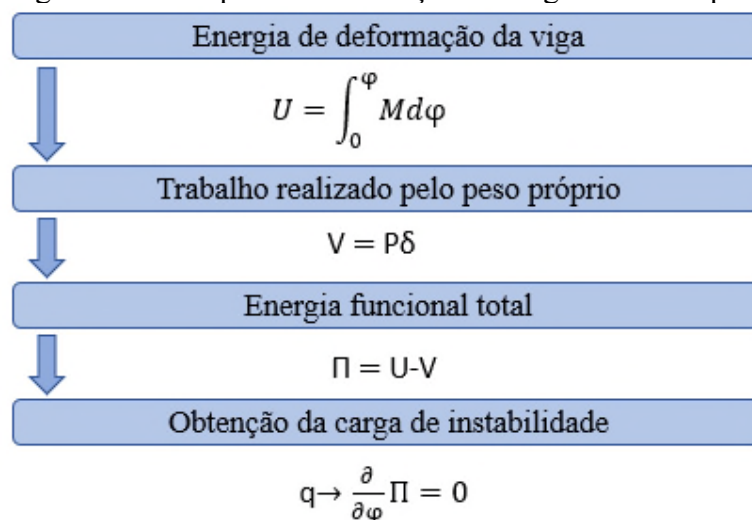
Figura A.4 – Esquema de dedução da função bilinear



Fonte: Autor (2021)

Aplicando o esquema da Figura A.5, para a função de momento do segundo tramo deduzida na Figura A.4 e considerando que o deslocamento vertical ( $\delta$ ) segue conforme a Equação A.4 obteve-se a Equação A.5 para carga crítica.

Figura A.5 – Esquema de obtenção da carga crítica do pilar



Fonte: Autor (2021)

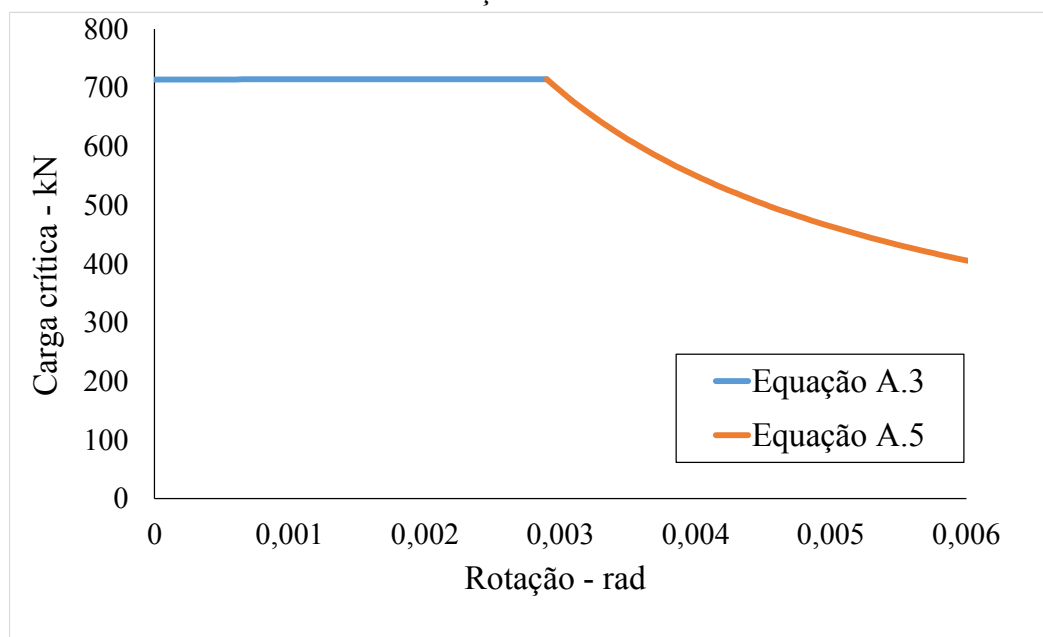
$$\delta = l \sin(\varphi) \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (\text{A. 4})$$

$$P_{cr}(\varphi) = \frac{2K_{\varphi}(h\varphi + K_{\varphi}\varphi_{crit})}{L\left((h + K_{\varphi})\left(\tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin(\varphi) + 2\cos(\varphi)\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin(\varphi)\right)\right)} \quad (\text{A. 5})$$

Considerando que  $h$  é a rigidez do segundo trecho da curva bilinear, obtido da aproximação da curva não linear para grandes valores de rotação provenientes da Equação (A.1), considerando os últimos três pontos da curva momento-rotação não linear (Figura (A.2)) e que o valor de  $k_{\varphi}$  é a rigidez linear. Tem-se que, o ponto de intersecção das duas retas de rigidez  $k_{\varphi}$  e  $h$  determina o ângulo crítico ( $\varphi_{crit}$ ) para o momento crítico ( $M_{crit}$ ), que marcam a mudança de rigidez linear para não-linearidade de contato.

Para o pilar utilizado como exemplo, de 10 m de altura, com coeficiente  $K_{\varphi}$  e  $h$ , iguais a 7142,86 kNm/rad e 1400 kNm/rad, respectivamente, o ângulo crítico ( $\varphi_{crit}$ ) é igual a 0,0029 rad. A partir destes dados, elaborou-se o gráfico da Figura A.6. Sabe-se que, a rigidez da curva para a análise bilinear muda ao atingir o ângulo crítico. Neste caso, observou-se a mudança de rigidez para a rotação igual a 0,0029 radianos, como previsto, e carga crítica igual a 714,28 kN.

Figura A.6 – Carga crítica do pilar simplificado para não linearidade de contato como função bilinear



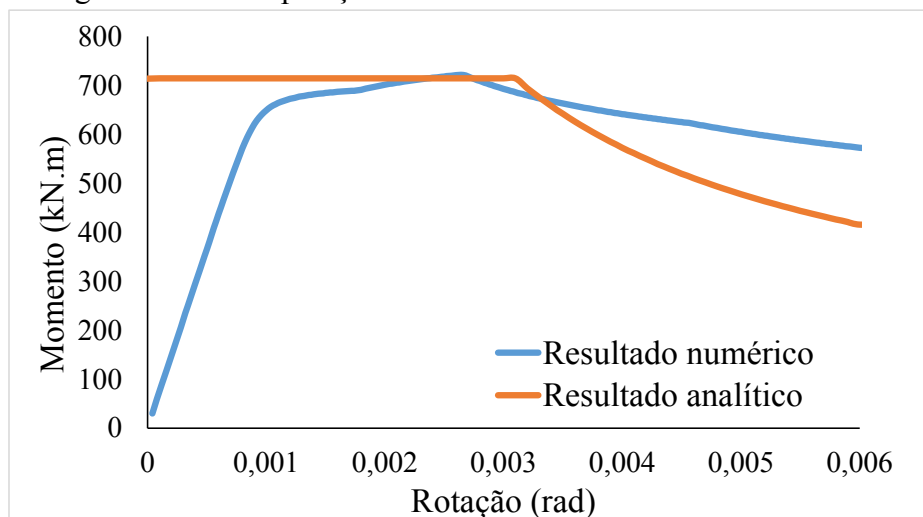
Fonte: Autor (2021)

## VALIDAÇÃO NUMÉRICA

Com o objetivo de validar a proposta da função bilinear, foi simulado numericamente o pilar analisado neste anexo. Foi elaborado um modelo numérico no programa computacional ANSYS na plataforma *Workbench* versão 2020 R2. Trata-se de um pilar modelado com elemento BEAM188, com 10 m de altura, seção transversal circular 2,5 m de raio, com módulo de elasticidade igual a  $3 \times 10^{10}$  kPa, para a consideração de rigidez infinita, e coeficiente de Poisson igual a 0,2. O pilar é apoiado em almofada de apoio representada por meio de uma *Joint* do tipo *revolute* sujeita a rotação, com comportamento não linear. O comportamento não linear do elastômero no modelo numérico foi considerado conforme a curva da Figura A.2.

Inicialmente foi realizada uma análise estática linear, aplicando uma carga de 1 kN no topo do pilar, seguida de uma análise de flambagem por meio da qual obteve-se a carga crítica de 714,26 kN, para o primeiro modo de flambagem. Por fim, foi considerado um fator multiplicador de 0,0005 no deslocamento do primeiro modo de flambagem e imposto um deslocamento vertical de 0,0005 m no topo do pilar, para a geração dos resultados indicados no gráfico da Figura A.7, por meio de uma análise estática não linear.

Figura A.7 – Comparação entre os resultados analítico e numérico



Fonte: Autor (2021)