

Ítalo Augusto Magalhães de Ávila

**Modelagem matemática e computacional de
interação fluido-estrutura com elementos de
casca curvilíneos tridimensionais**

Uberlândia

2021

Ítalo Augusto Magalhães de Ávila

**Modelagem matemática e computacional de interação
fluido-estrutura com elementos de casca curvilíneos
tridimensionais**

Universidade Federal de Uberlândia–UFU

Faculdade de Engenharia Mecânica

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Uberlândia

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

A958m Ávila, Ítalo Augusto Magalhães de, 1996-
2021 Modelagem matemática e computacional de interação fluido-estrutura
com elementos de casca curvilíneos tridimensionais [recurso eletrônico] /
Ítalo Augusto Magalhães de Ávila. - 2021.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.5563>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Engenharia mecânica. I. Silveira Neto, Aristeu da, 1955-, (Orient.).
II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Glória Aparecida
Bibliotecária - CRB-6/2047


UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
 Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br


ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 593, COPEM				
Data:	30/07/2021	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:30
Matrícula do Discente:	11922EMC005				
Nome do Discente:	Ítalo Augusto Magalhães de Ávila				
Título do Trabalho:	Modelagem Matemática e Computacional de Interação Fluido-Estrutura com Elementos de Casca Curvilíneos Tridimensionais				
Área de concentração:	Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos				
Linha de pesquisa:	Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por meio de webconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Aldemir Aparecido Cavalini Júnior - FEMEC/UFU; João Marcelo Vedovoto - FEMEC/UFU; André Valdetaro Gomes Cavalieri - ITA/SP; e Aristeu da Silveira Neto - FEMEC/UFU, orientador do candidato. Ressalta-se que os Profs. Aldemir Aparecido Cavalini Júnior, João Marcelo Vedovoto, Aristeu da Silveira Neto e o Discente participaram da defesa por meio de webconferência desde a cidade de Uberlândia/MG, e Prof. André Valdetaro Gomes Cavalieri desde a cidade de São José dos Campos/SP em atendimento a Portaria nº 36, de 19 de março de 2020, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Aristeu da Silveira Neto, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aristeu da Silveira Neto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 30/07/2021, às 16:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 30/07/2021, às 16:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Marcelo Vedovotto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 30/07/2021, às 16:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **André Valdetaro Gomes Cavaliere, Usuário Externo**, em 02/08/2021, às 08:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2925514** e o código CRC **5BFB5C15**.

“For the less, even as for the greater, there is some deed that he may accomplish but once only; and in that deed his heart shall rest.”

(J.R.R. Tolkien)

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que incessantemente me sustenta e conduz.

Aos meus avós, Paulo e Eny, que fizeram mais do que pensei ser possível para que meus sonhos se realizassem. Por seus sacrifícios e pelo amor incondicional, sou eternamente grato.

Aos meus tios, Adriana e Wagner, pela confiança que em mim depositaram. Sem seu apoio esta empreitada certamente não seria possível.

À minha mãe, Ana Paula, e à minha irmã, Geovanna, por todo cuidado e carinho.

À meu pai, Rogério, minha madrasta, Carol, e minha irmã, Izabela, pelo apoio ao longo desta trajetória.

À Aliny, pelo companheirismo, cuidado e suporte em todos os momentos.

Ao Eng. Gabriel Machado dos Santos, pela amizade e pelo companheirismo no desenvolvimento deste e de outros trabalhos.

Ao Me. Hélio Ribeiro Neto, pela orientação e companheirismo desde o meu ingresso no laboratório.

Ao Dr. Pedro Ricardo Corrêa Souza, pelo auxílio nos desenvolvimentos e implementações.

Aos demais familiares e amigos que fizeram parte de minha história.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto, pela paciência, dedicação e pelo auxílio no desenvolvimento deste trabalho e no meu crescimento profissional.

Aos professores Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Dr. André Valdetaro Gomes Cavalieri e Dr. João Marcelo Vedovoto, pela disponibilidade em participar desta banca.

Aos técnicos do laboratório, Luismar Lopes, Bruno Louzada e Ana Luisa, pelo apoio e pelos serviços prestados ao longo de todo o período.

Aos colegas do laboratório pela troca de conhecimento e colaboração.

À Universidade Federal de Uberlândia e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pela oportunidade de realizar esta dissertação.

Às instituições Petrobras, Capes e Fapemig pelo apoio financeiro e material.

Resumo

Problemas de interação fluido-estrutura são aqueles em que a dinâmica de ambos, fluido e estrutura, está acoplada. Estes problemas são caracterizados pelas condições do escoamento e pelas propriedades físicas e geométricas estruturais. Numerosos são os fenômenos e processos naturais e industriais que envolvem interações fluido-estruturais e, dependendo das aplicações, seus efeitos devem ser explorados ou minimizados. Avanços tecnológicos nos ramos da engenharia civil, mecânica, naval, aeronáutica, aeroespacial e nuclear requerem a confecção de estruturas cada vez mais leves e esbeltas, mais suscetíveis aos efeitos do meio fluido com o qual interagem. Consequentemente, crescente é o interesse em ferramentas de estudo e análise nessa temática. A modelagem teórico-computacional dessa classe de problemas se faz possível através da junção da mecânica dos fluidos e da mecânica dos sólidos e estruturas. No presente trabalho, apresenta-se a implementação da modelagem matemática-computacional de elementos de casca curvilíneos tridimensionais ao MFSim, código desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). No referido código as equações com as quais se modelam as transformações e transferências de energia do subsistema fluido são resolvidas em um domínio tridimensional euleriano fixo com o Método dos Volumes Finitos. As equações para a modelagem dos deslocamentos e das velocidades das estruturas são resolvidas em um domínio lagrangeano com o Método dos Elementos Finitos. Emprega-se a Metodologia da Fronteira Imersa, que permite tratar os domínios de formas distintas. As soluções são acopladas de acordo com a metodologia de acoplamento particionado. Simulações são conduzidas com o fim de validar o modelo computacional desenvolvido e os resultados obtidos estão em concordância com aqueles encontrados na literatura.

Palavras-chave: Mecânica dos Fluidos Computacional, Interação Fluido-Estrutura, Elementos de Casca Curvilíneos Tridimensionais.

Abstract

Fluid-structure interaction problems are those in which the dynamics of both, fluid and structure, are coupled. These problems are characterized by the flow conditions and by the structure's physical and geometrical properties. There are numerous natural and industrial phenomena and processes that involve fluid-structure interactions and, depending on the applications, its effects must be explored or minimized. Technological and technical breakthroughs in the fields of civil, mechanical, naval, aeronautic and nuclear engineering require the construction of increasingly lighter and slender structures, more susceptible to the effects of the fluid medium with which they interact. Consequently, there is a growing interest in tools for studying and analysing problems of this nature. The present work presents the implementation of the mathematical-computational modeling of three-dimensional curved shell elements in MFSim, a software developed by the Fluid Mechanics Laboratory (MFLab) of the Federal University of Uberlândia (UFU). In this software, the equations used to model the dynamics of the fluid subsystem are solved in a fixed three-dimensional Eulerian domain with the Finite Volume Method. The equations used to model the dynamics of solid structures are solved in a Lagrangian domain with the Finite Element Method. The Immersed Boundary Methodology, which allows the use of different mathematical methods for fluid and solid subsystems, is also used. The solutions are coupled using the partitioned coupling methodology. Simulations are conducted in order to validate the developed computational model and the results are in accordance with those available in the literature.

Keywords: Computational Fluid Dynamics, Fluid-Structure Interaction, Degenerated Shell Elements, Curved Shell Elements.

Lista de figuras

Figura 1 – Exemplos de modelagens fluido-estruturais com cascas: (a) aparelho cardíaco, (b) válvula cardíaca mecânica de folheto aórtico, (c) aeronave e (d) válvula industrial.	15
Figura 2 – Especificações geométricas das placas quadradas.	25
Figura 3 – Especificações geométricas das placas circulares com orifício.	26
Figura 4 – Especificações geométricas da casca cilíndrica.	27
Figura 5 – Especificações geométrica das placas retangulares.	28
Figura 6 – Especificações geométricas dos domínios.	29
Figura 7 – Placa imersa em água e ar.	30
Figura 8 – Domínio para o escoamento sobre um cilindro.	31
Figura 9 – Trecho de tubulação da Unidade de Craqueamento Fluido Catalítico.	33
Figura 10 – Vista em corte da válvula.	34
Figura 11 – Vista em corte da válvula no trecho do disco.	34
Figura 12 – Subdomínio fluido para o escoamento no interior da tubulação UFCC.	35
Figura 13 – Teorema do transporte de Reynolds aplicado a um elemento volumétrico diferencial.	39
Figura 14 – Gradiente de pressão sobre um elemento volumétrico diferencial.	41
Figura 15 – Tensões viscosas sobre um elemento volumétrico diferencial.	42
Figura 16 – Comparação entre elementos estruturais para a teoria de cascas.	48
Figura 17 – Sistemas de coordenadas local e curvilíneo.	49
Figura 18 – Malha refinada localmente devido a presença de um sólido.	53
Figura 19 – Vista em corte do campo de vorticidade para o escoamento sobre um cilindro deformável.	54
Figura 20 – Malha refinada dinamicamente em resposta ao campo de vorticidade.	54
Figura 21 – Comparação entre as malhas compostas por elementos planos, em linha contínua, e por elementos curvilíneos, em linha tracejada.	61
Figura 22 – Representação gráfica da malha numérico-computacional curvilínea.	61
Figura 23 – Base local estabelecida pelo sistema isoparamétrico bilinear.	64
Figura 24 – Definição geométrica de um elemento sólido a partir de um elemento de superfície.	65
Figura 25 – Vetores de deslocamento para um ponto genérico.	65
Figura 26 – Malhas numéricas.	74
Figura 27 – Modos de vibrar da placa quadrada apoiada em todas as arestas.	76
Figura 28 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa quadrada apoiada em todas as arestas.	77

Figura 29 – Modos de vibrar da placa quadrada engastada em duas arestas opostas e apoiada nas demais.	78
Figura 30 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa quadrada engastada em duas arestas opostas e apoiada nas demais.	79
Figura 31 – Modos de vibrar da placa quadrada engastada em uma de suas arestas e apoiada nas demais.	80
Figura 32 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa quadrada engastada em uma de suas arestas e apoiada nas demais.	81
Figura 33 – Modos de vibrar da placa quadrada apoiada em três arestas.	82
Figura 34 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa quadrada apoiada em três arestas.	83
Figura 35 – Modos de vibrar da placa circular com orifício apoiada nas fronteiras interna e externa.	85
Figura 36 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa circular com orifício apoiada nas fronteiras interna e externa.	86
Figura 37 – Modos de vibrar da placa circular com orifício engastada nas fronteiras interna e externa.	87
Figura 38 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa circular com orifício engastada nas fronteiras interna e externa.	88
Figura 39 – Modos de vibrar da placa circular com orifício engastada na fronteira externa.	89
Figura 40 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa circular com orifício engastada na fronteira externa.	90
Figura 41 – Modos de vibrar da placa circular com orifício engastada na fronteira interna.	91
Figura 42 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa circular com orifício engastada na fronteira interna.	92
Figura 43 – Modos de vibrar do cilindro bi-engastado.	94
Figura 44 – Convergência do primeiro conjunto de frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma casca cilíndrica bi-engastada.	95

Figura 45 – Convergência do segundo conjunto de frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma casca cilíndrica bi-engastada.	96
Figura 46 – Frequências excitadas por uma força pontual e discreta no tempo.	97
Figura 47 – Modos de vibrar da placa Lind-11.	98
Figura 48 – Frequências mais excitadas em uma sonda estrutural posicionada sobre a placa Lind-6.	99
Figura 49 – Modos de vibrar das placas retangulares imersas em água.	100
Figura 50 – Malha numérica inicial para a modelagem da vibração de placas próximas à interface líquido-gás.	101
Figura 51 – Vibração da placa imersa a uma distância de 10 <i>mm</i> da interface líquido-gás.	102
Figura 52 – Modos de vibrar das placas retangulares imersas em água.	103
Figura 53 – Campo de vorticidade no plano $x = 1,839\text{ m}$ em $t = 2,5\text{ s}$	104
Figura 54 – Campo de vorticidade no plano $x = 1,839\text{ m}$ em $t = 5,0\text{ s}$	105
Figura 55 – Campo de vorticidade no plano $x = 1,839\text{ m}$ em $t = 7,5\text{ s}$	105
Figura 56 – Campo de vorticidade no plano $x = 1,839\text{ m}$ em $t = 10,0\text{ s}$	106
Figura 57 – Iso-superfícies para o critério $Q = 100$ colorido com o campo de pressão em $t = 10\text{ s}$	107
Figura 58 – Coeficiente de arrasto obtido com o modelo de cascas curvilíneas.	108
Figura 59 – Coeficiente de sustentação obtido com o modelo de cascas curvilíneas.	108
Figura 60 – Coeficiente de arrasto obtido com o modelo de Reissner-Mindlin.	108
Figura 61 – Coeficiente de sustentação obtido com o modelo de Reissner-Mindlin.	109
Figura 62 – Movimento da seção transversal intermediária do cilindro bi-engastado em relação a sua posição inicial.	109
Figura 63 – Comparação do tempo de processamento para o escoamento sobre o cilindro bi-engastado com os modelos de cascas curvilíneas e de Reissner-Mindlin.	110
Figura 64 – Vista em corte das malhas lagrangeanas e euleriana.	111
Figura 65 – Primeiro conjunto dos modos de vibrar da tubulação de UFCC.	113
Figura 66 – Segundo conjunto dos modos de vibrar da tubulação de UFCC.	114
Figura 67 – Sondas de pressão.	115
Figura 68 – Campo de pressão para ao escoamento no interior da tubulação de UFCC em $t = 10\text{ s}$	116
Figura 69 – Campo de velocidade para ao escoamento no interior da tubulação de UFCC em $t = 10\text{ s}$	117
Figura 70 – Campos de deslocamento para o momento de maior amplitude global no intervalo $t \in [0, 10]\text{ s}$ obtidos com o modelo de cascas curvilíneas.	118
Figura 71 – Deslocamentos globais de maior amplitude.	119

Figura 72 – Frequências mais excitadas para cada ângulo de abertura da válvula.	119
Figura 73 – Comparação do tempo de processamento para o escoamento no interior da tubulação de UFCC com os modelos de cascas curvilíneas e de Reissner-Mindlin.	120

Lista de tabelas

Tabela 1 – Propriedades físicas das placas quadradas.	25
Tabela 2 – Propriedades físicas das placas circulares com orifício.	26
Tabela 3 – Propriedades físicas da casca cilíndrica.	27
Tabela 4 – Dimensões das placas retangulares em milímetros.	28
Tabela 5 – Propriedades físicas das placas retangulares.	29
Tabela 6 – Dimensões características do subdomínio fluido.	29
Tabela 7 – Propriedades físicas do fluido.	29
Tabela 8 – Profundidade da placa em relação a interface ar-água.	30
Tabela 9 – Propriedades físicas dos fluidos.	30
Tabela 10 – Dimensões características do domínio para o escoamento sobre um cilindro.	31
Tabela 11 – Composição química dos gases.	32
Tabela 12 – Propriedades físicas da mistura.	32
Tabela 13 – Propriedades físicas equivalentes para a tubulação UFCC.	35
Tabela 14 – Condições de escoamento para a tubulação UFCC.	36
Tabela 15 – Constantes para diferentes esquemas temporais pela metodologia implícita-explicita.	57
Tabela 16 – Frequências naturais da placa quadrada apoiada em todas as arestas.	76
Tabela 17 – Frequências naturais da placa quadrada engastada em duas arestas opostas e apoiada nas demais.	78
Tabela 18 – Frequências naturais da placa quadrada engastada em uma de suas arestas e apoiada nas demais.	82
Tabela 19 – Frequências naturais da placa quadrada apoiada em três arestas.	84
Tabela 20 – Frequências naturais da placa circular com orifício apoiada nas fronteiras interna e externa.	85
Tabela 21 – Frequências naturais da placa circular com orifício engastada nas fronteiras interna e externa.	87
Tabela 22 – Frequências naturais da placa circular com orifício engastada na fronteira externa.	89
Tabela 23 – Frequências naturais da placa circular com orifício engastada na fronteira interna.	93
Tabela 24 – Frequências naturais da casca cilíndrica bi-engastada.	94
Tabela 25 – Comparação das frequências naturais da tubulação de UFCC [Hz].	112

Sumário

	Sumário	xi
1	INTRODUÇÃO	13
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
2.1	Elementos de casca	16
2.2	Interação fluido estrutura	17
2.3	Acoplamento	18
2.4	Modelagens computacionais	19
3	MODELO FÍSICO	22
3.1	Escoamentos monofásicos	22
3.2	Escoamentos multifásicos	22
3.3	Turbulência	22
3.4	Dinâmica de estruturas sólidas	24
3.5	Domínios e condições de contorno	24
3.5.1	Vibração de placas quadradas	24
3.5.2	Vibração de placas circulares com orifício	25
3.5.3	Vibração de cascas cilíndricas	26
3.5.4	Vibração de placas retangulares imersas	27
3.5.5	Vibração de placas retangulares próximas à interface líquido-gás	29
3.5.6	Escoamento turbulento sobre uma casca cilíndrica	31
3.5.7	Vibração de uma tubulação de UFCC	32
3.6	Caracterização dinâmica de escoamentos	36
4	MODELO MATEMÁTICO DIFERENCIAL	38
4.1	Introdução	38
4.2	Subdomínio fluido	38
4.2.1	Teorema do Transporte de Reynolds	38
4.2.2	Equação diferencial do balanço de massa	39
4.2.3	Equação diferencial da quantidade de movimento linear	40
4.2.4	Escoamentos monofásicos incompressíveis	43
4.2.5	Escoamentos bifásicos incompressíveis	43
4.2.6	Escoamentos monofásicos incompressíveis e turbulentos	44
4.3	Subdomínio estrutural	48
4.3.1	Sistemas de coordenadas	48

4.3.2	Relações de deformação	50
5	MODELO NUMÉRICO	52
5.1	Subdomínio fluido	52
5.1.1	Malha computacional	52
5.1.2	Discretização das equações de balanço	53
5.1.2.1	Equação diferencial da quantidade de movimento linear	55
5.1.2.2	Método da Fronteira Imersa	57
5.1.2.3	Acoplamento pressão-velocidade	59
5.2	Subdomínio estrutural	61
5.2.1	Malha numérica	61
5.2.2	Discretização das relações de deformação	62
5.2.2.1	Sistema cartesiano local	62
5.2.2.2	Funções de forma	63
5.2.2.3	Definição geométrica	64
5.2.2.4	Campo de deslocamento	64
5.2.2.5	Relações de deformação	66
5.2.2.6	Relações constitutivas	69
5.2.2.7	Matrizes globais	70
5.2.2.8	Transformação modal	71
5.2.3	Modelagem numérica transiente	72
5.3	Acoplamento	73
5.3.1	Comunicação entre malhas numéricas	73
5.3.2	Transferência de informações entre subdomínios	74
6	RESULTADOS	75
6.1	Vibração de placas quadradas	75
6.1.1	Condição de apoio simples para todas as arestas	75
6.1.2	Duas arestas engastadas e duas arestas apoiadas	78
6.1.3	Uma aresta engastada e as demais apoiadas	80
6.1.4	Três arestas apoiadas e uma livre	82
6.2	Vibração de placas circulares com orifício	84
6.2.1	Apoio nas fronteiras interna e externa	84
6.2.2	Engaste nas fronteiras interna e externa	87
6.2.3	Engaste na fronteira externa	89
6.2.4	Engaste na fronteira interna	91
6.3	Vibração de cascas cilíndricas	93
6.4	Vibração de placas retangulares imersas	97
6.5	Vibração de placas retangulares próximas à interface líquido-gás	100
6.6	Escoamento turbulento sobre uma casca cilíndrica	104

6.7	Vibração de uma tubulação de UFCC	111
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	121
	REFERÊNCIAS	123

1 Introdução

Problemas de interação fluido-estrutura são aqueles em que a dinâmica de ambos, fluido e estrutura, está acoplada. Estes problemas são caracterizados pelas condições do escoamento e pelas características físicas e geométricas estruturais. Numerosos são os fenômenos e processos naturais e industriais que envolvem interações fluido-estruturais e, dependendo das aplicações, seus efeitos devem ser explorados ou minimizados. Avanços tecnológicos nos ramos da engenharia civil, mecânica, naval, aeronáutica, aeroespacial e nuclear requerem o projeto de estruturas cada vez mais leves e esbeltas, mais suscetíveis aos efeitos do meio fluido com o qual interagem. Conseqüentemente, crescente é o interesse em ferramentas de estudo e análise nessa temática. Sua modelagem teórica e computacional se faz possível através da junção da mecânica dos fluidos e da mecânica dos sólidos e estruturas. Essa combinação de diferentes ramos da mecânica caracteriza um problema multifísico. A metodologia aplicada nessa e em numerosas outras classes de problemas é fundamentada em duas vertentes, a teoria e a experimentação material.

No caso da teoria, modelos físico e matemático são desenvolvidos a fim de descrever as dinâmicas do problema físico através de uma abordagem integro-diferencial. Escoamentos de fluidos são regidos pelas leis da mecânica e podem ser descritos pelos balanços de massa e de quantidade de movimento linear, extensamente trabalhados no meio teórico. O comportamento de estruturas pode ser modelado por relações constitutivas e pela resistência dos materiais. O método experimental, por sua vez, baseia-se na reprodução material dos problemas através da montagem de bancadas de experimentação, na sua devida instrumentação e no tratamento estatístico das informações obtidas.

Alguns problemas tratam de fenômenos que podem apresentar um grande número de graus de liberdade e até mesmo um caráter estocástico intrínseco, características que inviabilizam a solução matemática analítica do problema. Nesses casos, pode-se utilizar de métodos empíricos, que estão usualmente associados a um grande consumo de recursos financeiros e materiais e de tempo. Uma alternativa ao seu emprego é a aplicação de métodos numéricos ao modelo diferencial e a implementação de rotinas computacionais. O modelo matemático-computacional, se devidamente implementado, é capaz de fornecer soluções aproximadas de problemas complexos, permitindo a análise da resposta de um sistema em função de um dado conjunto de parâmetros.

A simulação computacional é uma ferramenta de emprego crescente, que não se limita ao domínio da engenharia, sendo ampliada para aplicações em diversos setores da ciência contemporânea. Já é possível conduzir simulações para campos aerodinâmicos, biológicos, meteorológicos e até financeiros. Tal recurso é extremamente útil para a com-

preensão de fenômenos complexos, de variadas amplitudes no domínio temporal e para a economia de recursos. Apesar da sua flexibilidade em relação às condições físicas e aplicações, vale lembrar que a metodologia computacional não substitui a experimental, mas a complementa.

Raríssimos são os exemplos de problemas industriais e naturais que não apresentam interações fluido-estruturais. Em função da significativa complexidade associada à problemas multifísicos, simplificações podem ser aplicadas ocasionalmente para um dos subsistemas. Em certas classes de problemas, contudo, tais simplificações podem ser catastróficas, especialmente em estruturas sujeitas à esforços cíclicos ou oscilatórios, suscetíveis à fadiga, ou estruturas dinâmicas, como vasos sanguíneos.

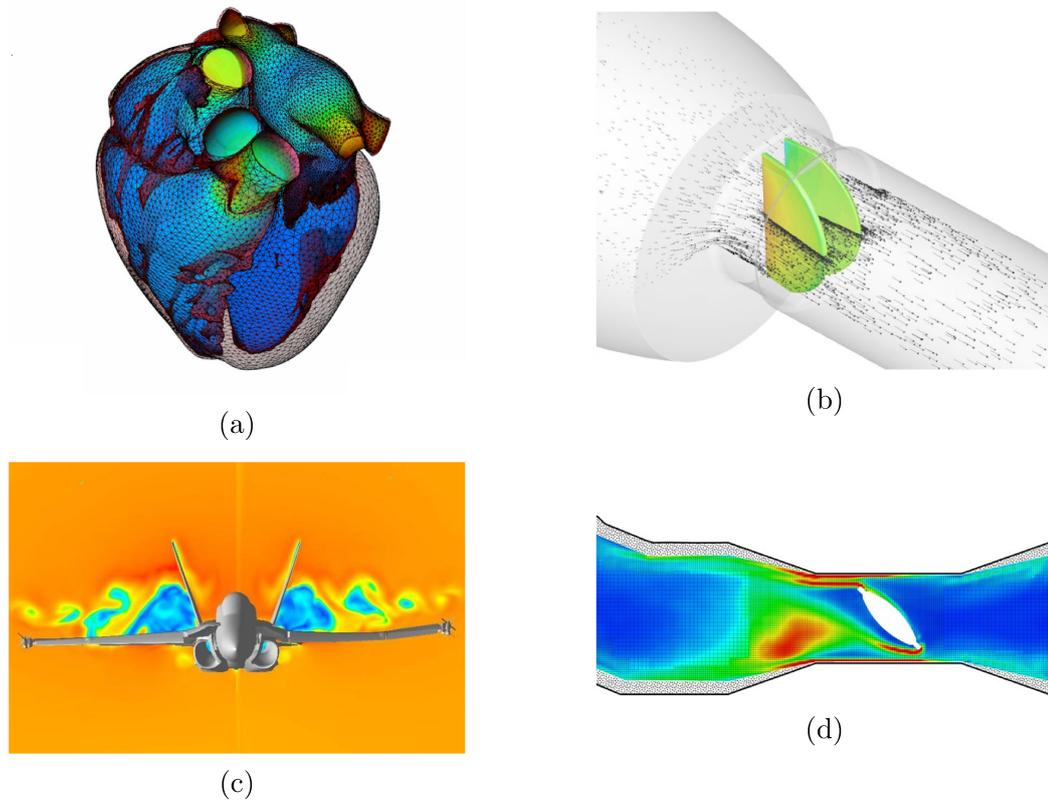
Assim, a interação fluido-estrutura, associada à metodologia matemática-computacional, é empregada no estudo de temas relacionados a aeronaves, plataformas *offshore*, plantas nucleares, prédios, pontes, turbinas, tubulações, válvulas, dentre outros. Ainda, é relevante no estudo de uma série de fenômenos naturais, como escoamentos no interior de artérias, veias e coração, ou mesmo escoamentos sobre diferentes tipos de vegetação em canais abertos. Sua modelagem computacional trata-se de uma atividade multidisciplinar, uma vez que envolve a mecânica dos fluidos, mecânica dos sólidos, resistência dos materiais, matemática pura e aplicada, engenharia de software, ciência da computação e outros.

Elementos estruturais podem ser modelados pelas teorias de vigas, placas, cascas e sólidos. Tais, devem ser cuidadosamente selecionadas em função do problema avaliado. A teoria de vigas apresenta um menor custo computacional mas é insuficiente para boa parte dos problemas industriais. A teoria de sólidos, em contrapartida, apresenta grande robustez e um elevado custo computacional. As teorias de placas e de cascas, reservadas à elementos com uma de suas dimensões significativamente menor do que as demais, é capaz de modelar boa parte dos exemplos supracitados com um custo computacional intermediário.

Superfícies de formas arbitrárias podem ser aproximadas por elementos planos, de acordo com as teorias de Kirchhoff-Love (LOVE, 1888) e Reissner-Mindlin (REISSNER, 1945; MINDLIN, 1951). Uma alternativa à aproximação por elementos planos é o uso de elementos de casca curvilíneos tridimensionais. Sua formulação é conveniente pois deve ser capaz de fornecer, com um menor custo computacional, resultados semelhantes ou até melhores do que aqueles obtidos por elementos planos. Tais elementos podem ser obtidos através da degeneração de um elemento tridimensional (AHMAD; IRONS; ZIENKIEWICZ, 1970).

A solução de problemas multifísicos se dá pelo acoplamento das soluções dos subsistemas segundo as metodologias de acoplamento monolítico ou particionado. Na primeira, os sistemas de equações que modelam o movimento do fluido e da estrutura são resolvidos de forma conjunta e simultânea. Tal metodologia apresenta grande robustez numérica mas

Figura 1 – Exemplos de modelagens fluido-estruturais com cascas: (a) aparelho cardíaco, (b) válvula cardíaca mecânica de folheto aórtico, (c) aeronave e (d) válvula industrial.



Fontes: (a) Soganci (2016), (b) Annerel et al. (2012), (c) Guillaume et al. (2010) e (d) Souza (2020).

está associada a um elevado custo computacional. Já no método particionado, os sistemas de equações são resolvidos separadamente. Esta metodologia, por sua vez, apresenta menores robustez e custo computacional.

Objetiva-se no presente trabalho a implementação da modelagem matemática e computacional de elementos de casca curvilíneos tridimensionais no MFSim, código desenvolvido pelo Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). No referido código as equações que modelam as transformações e transferências de energia do subsistema fluido são resolvidas em um domínio tridimensional euleriano fixo pelo Método dos Volumes Finitos. As equações que modelam os deslocamentos e velocidades das estruturas são resolvidas em um domínio lagrangeano pelo Método dos Elementos Finitos. Emprega-se a Metodologia da Fronteira Imersa (PESKIN, 1972), que permite tratar os domínios de formas distintas. Por fim, a combinação das soluções dos subsistemas se dá pela metodologia de acoplamento forte.

2 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo, apresenta-se a revisão da literatura acerca da temática e da metodologia adotada para o presente trabalho. Os temas abordados tratam da modelagem matemática e computacional de estruturas de casca e de interação fluido-estrutura.

2.1 Elementos de casca

Estruturas de casca suportam carregamentos externos por meio de efeitos fletivos e axiais, de forma análoga àquela de arcos e armações, enquanto vigas e placas resistem à carregamentos externos por meio de efeitos fletivos apenas. Devido a esta ação acoplada de distribuições axiais e fletivas, estruturas de cascas apresentam uma considerável resistência mecânica, fato que justifica sua extensa faixa de aplicação como componente estrutural. Estruturas de casca podem ser classificadas como prismáticas, axissimétricas e arbitrárias, em função da geometria tomada de referência no modelo matemático estrutural.

Considerável é a produção literária relacionada à teoria generalizada de cascas (BUDIANSKY; SANDERS, 1963; WEMPNER, 1981; CALLADINE, 1983; BISCHOFF et al., 2004; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005; ONATE, 2012). Como consequência da simplicidade associada à teoria de placas, cascas são geralmente modeladas como uma extensão dessa teoria para superfícies não planares. A junção de elementos de placa com angulações introduz esforços axiais, o que confere ao elemento um comportamento característico de membranas. As teorias clássicas para elementos de placa são as teorias de Kirchhoff-Love (LOVE, 1888), na qual os efeitos de cisalhamento na seção transversal são ignorados, e de Reissner-Mindlin (REISSNER, 1945; MINDLIN, 1951), na qual a influência de tais efeitos sobre o deslocamento é modelada.

Uma variedade de elementos de placa podem ser empregados em associação às teorias clássicas supracitadas. Se devidamente implementado, o método numérico-computacional resultante deve reproduzir de forma satisfatória o comportamento de estruturas de casca de formas arbitrárias, como evidenciado pelos trabalhos de Marguerre (1938), Batoz e Tahar (1982), Belytschko et al. (1985a), Belytschko et al. (1985b), Belytschko (1986), Onate (2012) e Zienkiewicz e Taylor (2005).

Numerosas teorias de casca com elementos curvilíneos também são encontradas na literatura, sendo alguns exemplos os modelos apresentados por Koiter (1960), Budiansky e Sanders (1963), Vasov (1964), Kraus (1967), Naghdi (1972) e Simo e Fox (1989). Estas teorias apresentam consideráveis divergências entre si, elevada complexidade em suas

formulações e boa parte é limitada à pequenas curvaturas e espessuras. Consequentemente, ainda atualmente algum esforço é dedicado ao desenvolvimento de uma formulação geral e eficiente para cascas. Os modelos mais modernos, como aquele desenvolvido por Valle, Albanesi e Fachinotti (2019), apresentam métodos mais aprimorados para análise dinâmica linear de cascas finas e moderadamente espessas, desenvolvidos em coordenadas curvilíneas gerais. Tais modelos trabalham com equações constitutivas exatas, incluindo relações de deformação de ordens elevadas, o que confere ao modelo a capacidade de modelar com razoável exatidão as deformações de estruturas de casca mesmo com malhas mais grosseiras. Entretanto, uma série de parâmetros intrínsecos devem ser determinados explicitamente para a correta definição da superfície de referência bem como das relações constitutivas.

A modelagem de estruturas de casca com elementos tridimensionais de pequenas espessuras também é possível, mas introduz sérias complicações de discretização e condicionamento, além de um aumento significativo no custo computacional. Uma alternativa ao emprego dos elementos clássicos de placa, casca e sólido é o desenvolvimento de um elemento de casca por degeneração de um elemento tridimensional, proposto por Ahmad, Irons e Zienkiewicz (1970). Com este elemento, curvilíneo e tridimensional, modela-se os efeitos fletivos e de membrana em geometrias curvas e complexas com um baixo custo computacional.

Elementos de casca curvilíneos tridimensionais por degeneração de um elemento sólido podem ser considerados como uma generalização da teoria de placas de Reissner-Mindlin para superfícies curvas. Assim, sofrem efeitos de *shear locking*, que podem ser minimizados ou mesmo eliminados através de integração numérica seletiva (COOK et al., 2001; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005; ONATE, 2012). O emprego de elementos de casca por degeneração é crescente, como observado pelos trabalhos de Ahmad (1969), Batoz e Dhatt (1990), Chao e Reddy (1984), Fezans e Verschery (1982), Gallagher (1975a), Gallagher (1975b), Zienkiewicz e Taylor (2005) e Onate (2012). No entanto, não foram encontradas referências de modelagens de problemas de interação fluido-estrutura via abordagem euleriana-lagrangeana com elementos de casca degenerados.

2.2 Interação fluido estrutura

Interações fluido-estruturais envolvem a movimentação, deformação e vibração de elementos sólidos e, conseqüentemente, variações nas interfaces entre os subdomínios. Essa dinamicidade das interfaces introduz, em formulações lagrangeanas e fundamentadas na metodologia dos Elementos Finitos para ambos subdomínios, um aumento significativo do custo computacional em função de remalhagens entre avanços temporais pelo método

numérico. Tal metodologia é empregada nos trabalhos de Tezduyar et al. (2005), Lee, Noguchi e Koshizuka (2007) e Fernandes (2016).

Uma abordagem euleriana-lagrangeana, aplicada à mesma classe de problemas, apresenta a vantagem de tratar os subdomínios separadamente. Assim, a dinâmica do meio fluido pode ser resolvida, de acordo com a hipótese da continuidade, em uma malha euleriana, enquanto a dinâmica da estrutura é resolvida em uma malha lagrangeana. Neste contexto, a Metodologia da Fronteira Imersa é particularmente adequada, por admitir a separação entre meio fluido e geometria imersa.

No presente trabalho, o subdomínio fluido é resolvido em uma malha euleriana cartesiana bloco-estruturada (BERGER; OLIGER, 1984) com refinamento adaptativo dinâmico com o Método dos Volumes Finitos. O refinamento é dado pela união de malhas retangulares orientadas com espaçamentos sequencialmente menores. Informações ou condições associadas à geometrias complexas podem assim ser impostas ou calculadas em níveis mais refinados, enquanto regiões de menor interesse são resolvidas com malhas mais grosseiras. O refinamento pode ser associado à presença de geometrias imersas ou interfaces e à gradientes, como concentração e vorticidade. É importante ressaltar que o erro da solução numérica de níveis mais grossos são carregados para a solução dos níveis mais refinados (VILLAR, 2007) e, portanto, a ordem do erro numérico é aquela associada às maiores células eulerianas. Emprega-se a Metodologia da Fronteira Imersa e multi forçagem direta para o cálculo dos esforços e condições nas interfaces fluido-sólido.

A dinâmica de estruturas, por sua vez, é resolvida para malhas irregulares arbitrárias com o Método dos Elementos Finitos. Elementos de casca por degeneração estão geralmente associados à elementos tridimensionais, definidos por oito, dezesseis ou mesmo vinte nós (ONATE, 2009; ONATE, 2012). A partir do elemento sólido, cálculos são efetuados para definição da superfície de referência e dos vetores direcionais locais para cada elemento. No código desenvolvido, no entanto, admite-se elementos de lâmina compostos por quatro nós. Alterações nas definições dos vetores direcionais, propostas no presente trabalho, permitem a definição precisa de um elemento de lâmina curvilíneo tridimensional, coincidente à superfície média da estrutura de casca, a partir de elementos quadráticos de placa.

2.3 Acoplamento

As diferentes metodologias e malhas empregadas para os subdomínios requer o acoplamento, ou a junção das soluções. Essa junção pode ser feita de acordo com as metodologias de acoplamento monolítico e particionado (BARTH et al., 2006; SOTIROPOULOS; YANG, 2014). O acoplamento monolítico, empregado nos trabalhos de Blom

(1998), Hubner, Walhorn e Dinlker (2004) e Hron e Madlik (2007), consiste na solução conjunta dos sistemas de equações relativos à dinâmica de ambos subdomínios. Tal metodologia apresenta significativa robustez numérica mas está associada à um elevado custo computacional.

O acoplamento particionado, em contrapartida, consiste na solução individual dos sistemas. Assim, a solução de um subdomínio deve alimentar o outro entre os avanços temporais pelo método numérico. Os métodos de acoplamento particionado podem ainda ser separados em acoplamentos do tipo fraco e do tipo forte. O método particionado com acoplamento fraco admite que a solução de um subsistema deve alimentar diretamente o outro subsistema a cada passo de tempo. O método particionado com acoplamento forte prevê a solução dos campos de deslocamento e de velocidade através de iterações entre avanços temporais. Dessa forma, as soluções dos subsistemas devem convergir assintoticamente à solução monolítica. As metodologias de acoplamento fraco e forte e suas particularidades são apresentadas e exploradas nos trabalhos de Piperno (1997), Felippa, Park e Farhat (2001), Matthies, Niekamp e Steindorf (2006) e Pontaza e Menon (2010). No presente trabalho, a combinação das soluções se dá pela metodologia de acoplamento forte, como apresentado no trabalho de Ribeiro-Neto (2016).

Investigações numéricas, apresentadas nos trabalhos de Foster, Wall e Ramm (2006) e Brummelen (2009), revelam que o acoplamento fraco pode ser instável numericamente em função das propriedades do fluido e do sólido e das condições de contorno. Análises de custo computacional e viabilidade dos métodos de acoplamento apresentados nesta seção podem ser encontradas no material de Barth et al. (2006).

2.4 Modelagens computacionais

Nessa seção são apresentados trabalhos canônicos de modelagens matemáticas e computacionais pertinentes à proposta do presente trabalho e condizentes com as seções anteriores. Apresenta-se também exemplos de aplicações em problemas práticos de engenharia.

As teorias clássicas de placa, associadas à metodologia de Elementos Finitos, permitem a solução do campo de deformação para estruturas de placa em um plano (CLOUGH; TOCHER, 1966). Este é um problema canônico da modelagem computacional de estruturas e, em função de sua simplicidade, numerosos são os trabalhos que o utilizam como referência para validação (GREIMANN; LYNN, 1970; PANG et al., 2018). Soluções analíticas para placas retangulares sob diversas condições de contorno são apresentadas por Mitchel e Hazell (1986) e Wang e Wang (2014). Modelos mais complexos, que admitem os efeitos térmicos e de superposição de camadas laminadas, também são encontrados na

literatura (CRUZ; CARILLO; ALMEIDA, 2016).

Modelos para geometrias cilíndricas e esféricas, como tubos, domos e arcos, são apresentados nos trabalhos de Chung (1980), Belytschko et al. (1985a), Belytschko (1986) e Han et al. (2020). Modelagens para geometrias arbitrárias, segundo diversas teorias e elementos de casca, são desenvolvidas nos trabalhos de Ahmad (1969), Olson e Lindberg (1971), Bathe (1986), Saetta e Vitaliani (1990), Basu e Ghosh (1993), e Bischoff et al. (2004). Tais modelagens, além de úteis à validação, apresentam robustez suficiente para a simulação de uma série de problemas estruturais práticos.

Modelagens de estruturas de casca com elementos degenerados, em função de sua robustez e eficiência, vêm recebendo crescente atenção nas últimas décadas. Análises modais e estáticas, apresentadas nos estudos de Bucalem e Bathe (1997), revelam uma significativa economia de recursos computacionais associados à metodologia, visto que a interpolação isoparamétrica de vetores direcionais para captura de curvaturas permite que o modelo apresente soluções próximas às exatas com malhas mais grosseiras do que aquelas exigidas por outras metodologias. Alguns exemplos de simulações numérico-computacionais estruturais com elementos degenerados são encontrados nos trabalhos de Kant, Kumar e Singh (1994), Lee e Han (2001), Marinkovic, Koppe e Gabbert (2008) e Liu et al. (2019).

Problemas de fluídoelasticidade para geometrias simples, como placas e cilindros, são exemplos canônicos de modelagens numérico-computacionais de interação fluído-estrutura. Considerando o elevado grau de complexidade inerente à sistemas multifísicos, estes são os de caráter mais elementar dessa classe de problemas. Assim, são frequentemente usados para a comparação de modelos, como observado nos trabalhos de Wiggert e Tijsseling (2001), Hengstler e Dual (2011), Fernandes (2016) e Hessenthaler et al. (2016).

Na construção civil, o Método dos Elementos Finitos é empregado na avaliação de componentes estruturais sujeitos às influências gravitacional e atmosférica (carregamentos estáticos e dinâmicos) e à vibrações transmitidas pelo solo. O aumento no número de edifícios, bem como de suas dimensões, implica em conjuntos arquitetônicos de menores frequências naturais, de forma que uma maior atenção deve ser dedicada às respostas devido a influência do escoamento atmosférico e de tremores (DOOMS et al., 2006; HUANG; LI; LI, 2012; TAGAWA et al., 2015). Ainda, simulações podem ser empregadas no desenvolvimento de estruturas sujeitas à escoamentos mais críticos, como pontes e barragens (KHOSRONEJAD; KANG; SOTIROPOULOS, 2012; GOLDGRUBER; SHAHRIARI; ZENZ, 2013).

No ramo da engenharia nuclear, vibrações induzidas por escoamentos podem causar problemas de fadiga, corrosão sob tensão, modos de falha e desgaste por contato. Os trabalhos de Fujita (1990) e Hofstede (2015) apresentam a modelagem de componentes estruturais em plantas nucleares e componentes internos de reatores, como bicos instrumentais e tubos guias. Modelagens semelhantes são estendidas para problemas industri-

ais envolvendo a extração e o processamento de petróleo (PONTAZA; MENON, 2010; RIBEIRO-NETO et al., 2019).

A modelagem computacional de interações fluido-estruturais é também empregada recorrentemente no estudo da fluidelasticidade em componentes de navios e aeronaves para análise de respostas dinâmicas, determinação dos modos e frequências de vibração, dimensionamento e otimização de sistemas. No domínio marítimo, tal ferramenta é aplicada no estudo de componentes estruturais e de cascos de diferentes embarcações visando a otimização de tais quanto ao seu peso e sua resistência à impactos e fadiga (BAE et al., 2016; PRABOWO; PUTRANO; SOHN, 2019). No meio aerodinâmico, novos materiais, como a fibra de carbono e plásticos reforçados, devem ser empregados em proporções crescentes em estruturas de aeronaves e automóveis. Essa otimização dos sistemas quanto a suas atribuições estruturais, aerodinâmicas e peso são também foco de uma série de produções, como aquelas apresentadas por Farhat, Lesoinne e LeTallec (1998), Guillaume et al. (2010) e Stickan, Dillinger e Schewe (2014).

Na biomedicina, simulações podem ser empregadas no estudo do escoamento por veias, artérias e coração sob diferentes condições. Enquanto garante-se a viabilidade de modelar o comportamento estrutural do sistema circulatório, a interação fluido-estrutura ainda apresenta uma série de desafios. Destes, destaca-se a geração de malhas e o custo computacional, decorrentes da complexidade das geometrias, especificações adequadas para as condições de contorno, no caso de circulação extracardíaca, e as grandes deformações associadas aos movimentos de sístole e diástole do aparelho cardíaco. Apesar destas dificuldades, a aplicação de simulações à hemodinâmica cardíaca avançou substancialmente nos últimos anos e, inclusive, vem sendo aplicada na tomada de decisão clínica (MAO et al., 2017; BUKAC et al., 2019; HIRSCHHORN et al., 2020). Ferramentas computacionais ainda vêm recebendo grande atenção no estudo e na redução de custos no design de próteses cardíacas e ortopédicas (CRISCO; WOLFE, 2017; GAHORIAN; ABDULLAH, 2017).

3 Modelo Físico

A primeira etapa do desenvolvimento do trabalho consiste na análise do problema físico, a fim de se determinar as variáveis de interesse e propor suposições e hipóteses simplificadoras que viabilizem sua modelagem matemática. Para os fins do presente trabalho, é possível modelar os fluidos como newtonianos e os escoamentos como incompressíveis. As propriedades físicas da fase sólida, que será considerada deformável, são modeladas como homogêneas e isotrópicas.

3.1 Escoamentos monofásicos

Em escoamentos monofásicos, consideram-se forças devidas à pressão, efeitos viscosos, campo gravitacional e efeitos térmicos. Gradientes térmicos proporcionam alterações sobre propriedades físicas como massa específica, capacidade térmica e viscosidade. A variação de tais propriedades pode trazer significativas mudanças à dinâmica do sistema. No presente trabalho, entretanto, admite-se que os gradientes térmicos são sutis e podem ser desprezados sem muito prejuízo à modelagem.

3.2 Escoamentos multifásicos

Em escoamentos multifásicos, além das forças apresentadas anteriormente, deve-se considerar uma força interfacial, relativa à atividade molecular na interface de fluidos imiscíveis. Propriedades como massa específica, capacidade térmica e viscosidade dinâmica continuam sob influência do campo de temperatura. No entanto, a presença de diferentes fases introduz variações mais significativas e bruscas do que aquelas observadas em escoamentos monofásicos não isotérmicos. Para os fins deste trabalho, estende-se à escoamentos multifásicos a hipótese de equilíbrio térmico, proposta à escoamentos monofásicos. No entanto, nenhuma das propriedades citadas pode ser considerada constante pelo domínio, ainda que essa hipótese possa ser aplicada para cada fase separadamente, mas devem ser modeladas como funções dos domínios espacial e temporal.

3.3 Turbulência

A turbulência é um fenômeno físico associado a sistemas dinâmicos com um elevado

número de graus de liberdade. Na mecânica dos fluidos, estima-se o regime do escoamento, que pode ser laminar, transicional ou turbulento, através do adimensional de Reynolds, que representa a razão entre os mecanismos de transporte advectivos e difusivos. Regimes turbulentos estão presentes em uma série de aplicações de engenharia e sua modelagem matemática é especialmente complexa em consequência de seu caráter altamente estocástico. Dada a natureza do presente trabalho e a complexidade associada à turbulência, apresenta-se apenas uma caracterização simplificada do fenômeno. Caracterizações mais completas podem ser encontradas nos trabalhos de Mansur, Rio e Silveira-Neto (2010) e Silveira-Neto (2020).

Escoamentos em regime turbulento são caracterizados por sua instabilidade e imprevisibilidade. Os valores assumidos pelas variáveis que caracterizam o sistema estão sujeitos a flutuações nos domínios espacial e temporal e são de difícil previsão determinística, uma vez que pequenas variações nas condições iniciais ou de contorno são propagadas e amplificadas por todo o escoamento. Em modelos computacionais, observa-se ainda instabilidades de natureza numérica, relacionadas ao processo de discretização dos domínios e das equações que modelam a dinâmica dos fluidos. Instabilidades numéricas podem introduzir severas oscilações ou atenuações nos campos de pressão e velocidade através de mecanismos dispersivos e difusivos (AVILA et al., 2018). Assim, a escolha das metodologias e a correta interpretação associadas à modelagens computacionais de escoamentos turbulentos requerem, além do domínio dos modelos físico e matemático diferencial, o domínio e análise dos modelos e esquemas numéricos utilizados.

Outra importante característica de regimes turbulentos é a multiplicidade de grandezas características, ou a coexistência de estruturas turbilhonares de múltiplas grandezas nos domínios espacial e temporal. Como consequência, observa-se em escoamentos turbulentos um espectro contínuo de estruturas turbilhonares. Estruturas de diferentes ordens de grandeza interagem simultaneamente entre si num processo fortemente não-linear. Essa não-linearidade confere uma eficiência significativamente maior ao transporte turbulento em relação ao transporte em regime laminar.

A transferência simultânea de energia entre as diversas estruturas é outra característica importante da turbulência. A energia cinética turbulenta, transferida para as menores estruturas turbilhonares, é transformada em energia interna através de efeitos viscosos. Assim, energia deve ser constantemente fornecida às grandes estruturas para a manutenção de um espectro contínuo e largo de estruturas turbilhonares, alimentando o processo de transformação viscosa nas menores estruturas, também conhecidas como estruturas de Kolmogorov.

3.4 Dinâmica de estruturas sólidas

Para o subsistema sólido, as propriedades elásticas dos materiais serão consideradas homogêneas, ou uniformes pelo domínio, e isotrópicas, independentes da direção. As propriedades do sólido, de forma semelhante àquela dos fluidos, também estão sujeitas à variações em função do campo de temperatura. Além disso, gradientes térmicos promovem uma distribuição de tensão e, conseqüentemente, um campo de deformação. Para os casos apresentados no presente trabalho, entretanto, os efeitos térmicos podem ser desprezados sem prejuízos significativos à modelagem. Aplica-se a hipótese de que a estrutura sofre deformações de caráter estritamente elástico, com pequenos deslocamentos.

3.5 Domínios e condições de contorno

No presente trabalho serão desenvolvidas e apresentadas as modelagens de alguns dos problemas canônicos citados no capítulo anterior, de casos de validação e de aplicação de engenharia. Nesta seção, explora-se os domínios computacionais e as condições de contorno para cada caso.

Para a validação do modelo estrutural, compara-se a solução do modelo matemático computacional com a solução matemática contínua. Simulações são conduzidas para geometrias retangulares, anelares e cilíndricas sujeitas à diversas combinações de condições de contorno. Conduz-se ainda uma análise de convergência da solução numérica. Os resultados são confrontados com aqueles obtidos com elementos de placa de Mindlin (SOUZA, 2020).

Para a validação do acoplamento das soluções e da modelagem de interações fluido-estruturais, reproduz-se uma série de experimentos materiais apresentados por Lindholm (1965) através da abordagem matemática-computacional empregando o modelo estrutural desenvolvido no presente trabalho. A comparação é complementada com resultados de outras modelagens matemáticas e computacionais encontradas na literatura.

3.5.1 Vibração de placas quadradas

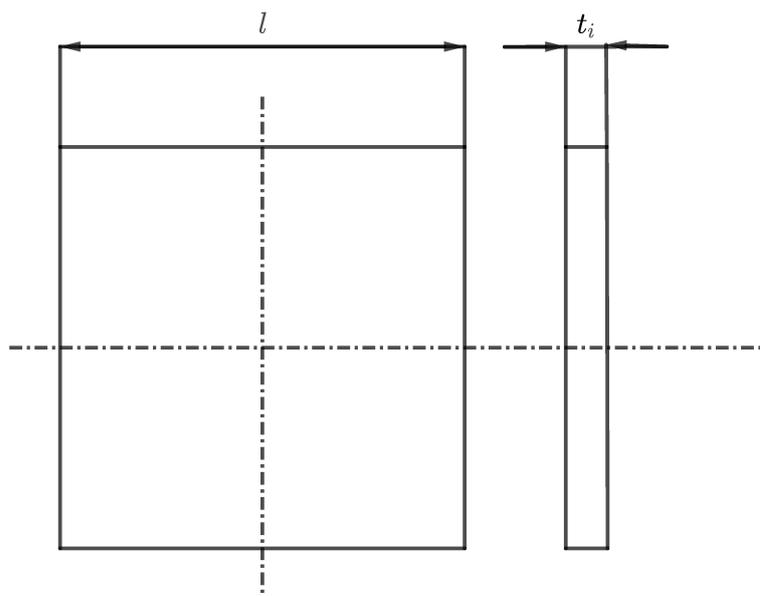
Objetiva-se modelar a vibração de placas quadradas de espessura constante e sujeitas à diferentes condições de contorno no vácuo. Uma representação gráfica do sólido é apresentada na Figura 2, onde as dimensões l e t_i são definidas como 1 m e $1 \cdot 10^{-3}\text{ m}$, respectivamente. As propriedades físicas do sólido são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Propriedades físicas das placas quadradas.

Propriedade	Valor	Unidade
E	$2,0 \cdot 10^{11}$	Pa
ρ	$7,8 \cdot 10^3$	kg/m^3
ν	$3,0 \cdot 10^{-1}$	–
κ	$8,33 \cdot 10^{-1}$	–

Os resultados obtidos com a metodologia proposta no presente trabalho são comparados com aqueles obtidos com o modelo de Reissner-Mindlin, desenvolvido no trabalho de Souza (2020), e com a solução contínua, apresentada por Wang e Wang (2014). Avaliam-se os modos de vibrar e frequências naturais, bem como a convergência da solução em função da malha numérica empregada em cada iteração do caso. Resultados próximos àqueles da solução contínua indicam a correta implementação dos modelos matemático e computacional para superfícies planas e malhas regulares.

Figura 2 – Especificações geométricas das placas quadradas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.5.2 Vibração de placas circulares com orifício

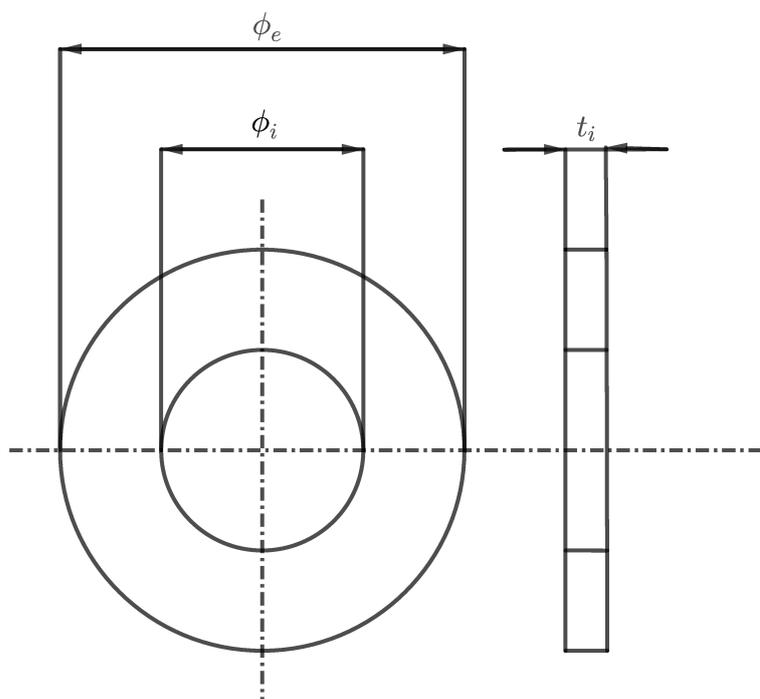
Objetiva-se modelar a vibração de placas anelares de espessura constante e sujeitas a diferentes condições de contorno no vácuo. Uma representação gráfica do sólido é apresentada na Figura 3, onde as dimensões ϕ_e , ϕ_i e t_i são definidas como 1 m , $5 \cdot 10^{-1}\text{ m}$ e $1 \cdot 10^{-3}\text{ m}$, respectivamente. As propriedades físicas do sólido são apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2 – Propriedades físicas das placas circulares com orifício.

Propriedade	Valor	Unidade
E	$2,0 \cdot 10^{11}$	Pa
ρ	$7,8 \cdot 10^3$	kg/m^3
ν	$3,0 \cdot 10^{-1}$	–
κ	$8,33 \cdot 10^{-1}$	–

Os resultados obtidos com a metodologia proposta no presente trabalho são comparados com aqueles obtidos com o modelo de Reissner-Mindlin, desenvolvido no trabalho de Souza (2020), e com a solução contínua, apresentada por Wang e Wang (2014). Avaliam-se os modos de vibrar e frequências naturais, bem como a convergência da solução em função da malha numérica empregada em cada iteração do caso. Resultados semelhantes àqueles da solução contínua indicam a correta implementação do modelo matemático e computacional para superfícies planas e malhas irregulares.

Figura 3 – Especificações geométricas das placas circulares com orifício.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.5.3 Vibração de cascas cilíndricas

Objetiva-se modelar a vibração de estruturas cilíndricas de espessura constante sujeitas às condições de engaste nas fronteiras. Uma representação gráfica do sólido é apresentada na Figura 4, onde as dimensões ϕ_e , ϕ_i e l são definidas como $3,257 \cdot 10^{-2} m$,

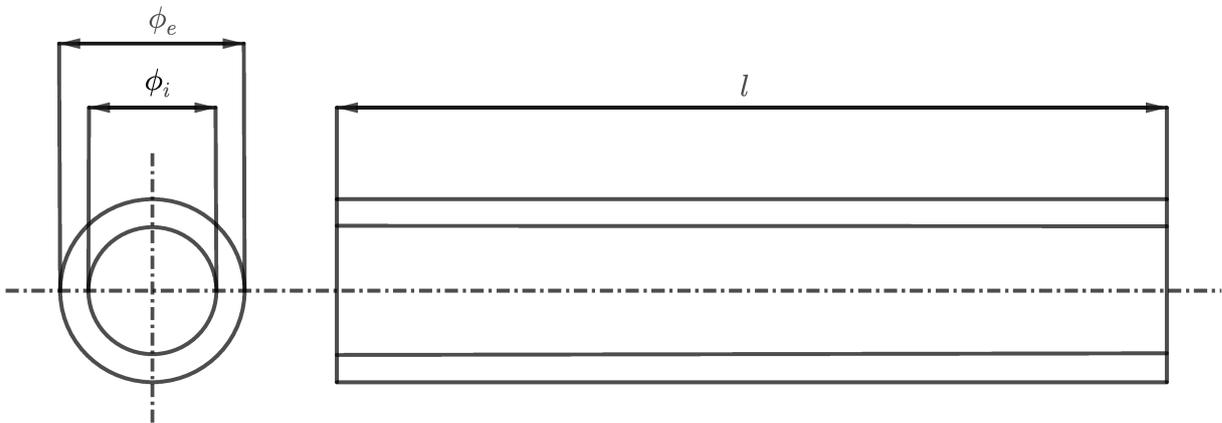
$2,927 \cdot 10^{-2} m$ e $3,676 m$, respectivamente. As propriedades físicas do sólido são apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3 – Propriedades físicas da casca cilíndrica.

Propriedade	Valor	Unidade
E	$2,068 \cdot 10^{11}$	Pa
ρ	$7,863 \cdot 10^3$	kg/m^3
ν	$3,0 \cdot 10^{-1}$	–
κ	$8,33 \cdot 10^{-1}$	–

Os resultados obtidos com a metodologia proposta no presente trabalho são comparados com aqueles obtidos com o modelo de Reissner-Mindlin, desenvolvido no trabalho de Souza (2020). Os resultados são também confrontados com a solução contínua. Avaliam-se os modos de vibrar e frequências naturais, bem como a convergência da solução em função da malha numérica empregada em cada iteração do caso. Resultados semelhantes àqueles da solução contínua indicam a correta implementação do modelo matemático e computacional para superfícies curvilíneas. A análise da convergência dos modelos de cascas curvilíneas e de Reissner-Mindlin deve apontar diferenças significativas entre as metodologias.

Figura 4 – Especificações geométricas da casca cilíndrica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.5.4 Vibração de placas retangulares imersas

Objetiva-se modelar a resposta dinâmica de placas com diferentes razões de aspecto e espessuras submersas em um fluido e submetidas a uma força pontual e discreta no tempo, aplicada sobre um ponto de excitação comum para uma série de modos de vibrar. Admite-se a condição inicial de equilíbrio estático em relação ao referencial global do modelo matemático. A resposta das placas deve ser uma combinação dos modos de vibrar, obtidos via análise do problema de autovalores e autovetores, e da resposta do fluido.

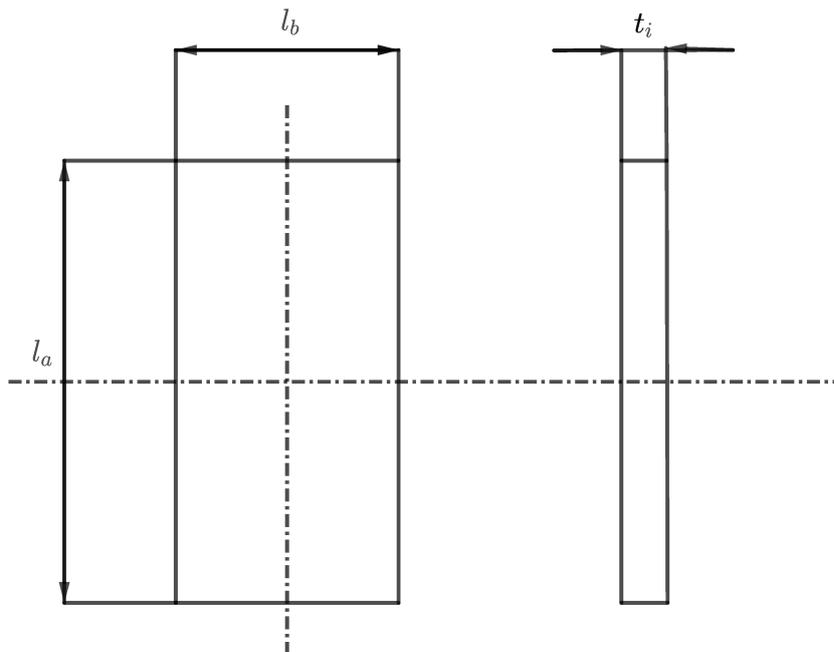
Em problemas de interação fluido-estrutura, fluidos que apresentam uma maior resistência ao movimento da estrutura promovem uma interação mais intensa e, conseqüentemente, uma vigorosa transferência de informações entre os subdomínios. Interações mais intensas promovem mudanças significativas nas amplitudes e frequências de vibração da estrutura em relação às respostas obtidas pela solução do problema de autovalores e autovetores, correspondentes à modelagem da vibração sem qualquer resistência externa.

Representações gráficas do sólido e do domínio são apresentadas nas Figuras 5 e 6, respectivamente. As Tabelas 4 e 6 apresentam as dimensões características das placas simuladas e dos domínios. Por fim, as propriedades físicas do sólido e do fluido são apresentadas nas Tabelas 5 e 7, respectivamente. Resultados compatíveis com aqueles observados em experimentos materiais indicam uma correta representação dos fenômenos físicos pelos modelos estrutural, fluidodinâmico e de acoplamento.

Tabela 4 – Dimensões das placas retangulares em milímetros.

Placa	l_a	l_b	t_i
Lind-5	203,2	203,2	4,83616
Lind-6	406,4	203,2	4,83616
Lind-7	609,6	203,2	4,83616
Lind-10	203,2	203,2	2,66192
Lind-11	406,4	203,2	2,66192
Lind-12	609,6	203,2	2,66192

Figura 5 – Especificações geométrica das placas retangulares.

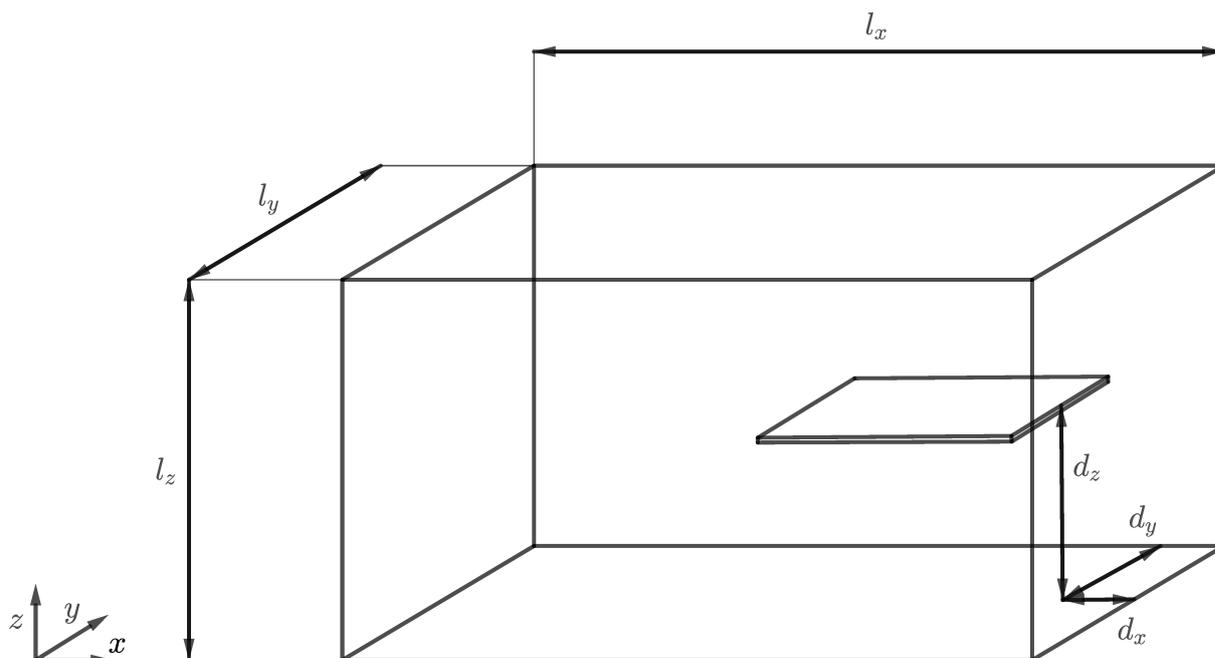


Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 5 – Propriedades físicas das placas retangulares.

Propriedade	Valor	Unidade
E	$2,068 \cdot 10^{11}$	Pa
ρ_s	$7,83 \cdot 10^3$	kg/m^3
ν_s	$3,0 \cdot 10^{-1}$	–
κ	$8,33 \cdot 10^{-1}$	–

Figura 6 – Especificações geométricas dos domínios.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 6 – Dimensões características do subdomínio fluido.

Dimensão	Valor
l_x	$8,0 \cdot l_b$
l_y	$4,0 \cdot l_b$
l_z	$4,0 \cdot l_b$
d_x	$1,5 \cdot l_b$
d_y	$2,0 \cdot l_b$
d_z	$2,0 \cdot l_b$

Tabela 7 – Propriedades físicas do fluido.

Propriedade	Valor	Unidade
ρ_{agua}	$9,982 \cdot 10^2$	kg/m^3
μ_{agua}	$1,002 \cdot 10^{-2}$	$Pa \cdot s$

3.5.5 Vibração de placas retangulares próximas à interface líquido-gás

De forma semelhante ao último caso, uma força pontual e discreta no tempo é

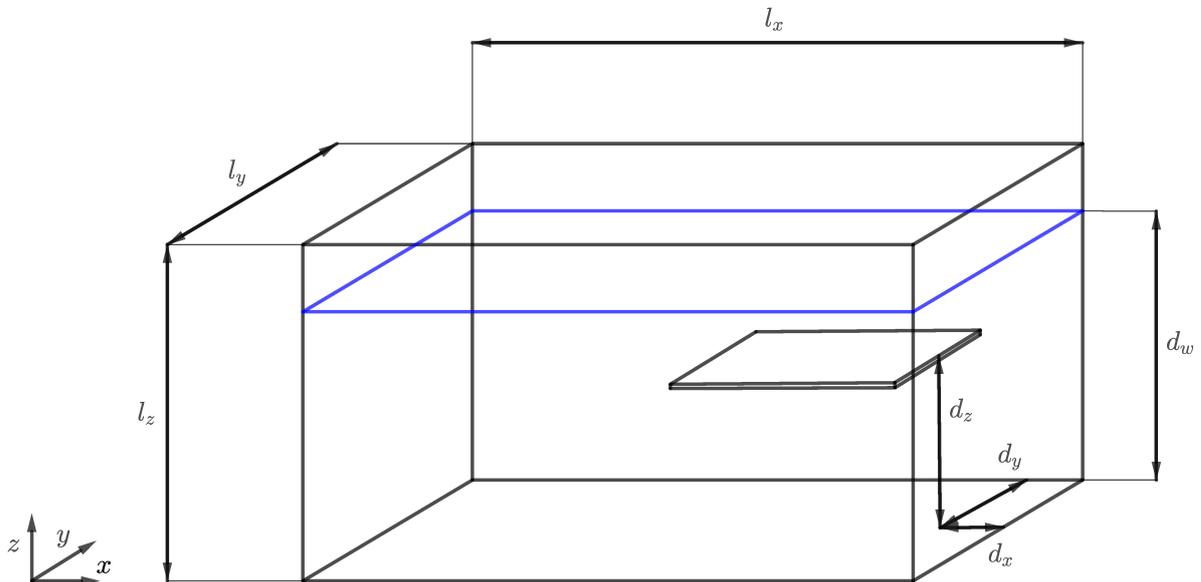
aplicada sobre uma placa em um ponto de excitação comum para uma série de modos de vibrar. Admite-se novamente a condição inicial de equilíbrio estático em relação ao referencial global. Avalia-se a influência da distância $d_i = d_w - d_z$, apresentada na Figura 7, entre estrutura e interface entre fluidos, sobre a dinâmica do componente estrutural.

Tabela 8 – Profundidade da placa em relação a interface ar-água.

Placa	Profundidade (mm)
Lind-11	203,20
Lind-11	121,92
Lind-11	81,28
Lind-11	60,96
Lind-11	40,64

O conjunto de distâncias entre sólido e interface entre fluidos é apresentada na Tabela 8 e as propriedades físicas dos fluidos são listadas na Tabela 9. Observa-se que o domínio, bem como as condições de contorno, são semelhantes àquelas do caso monofásico e a caracterização geométrica e física do sólido são aquelas correspondentes ao modelo Lind-11, segundo as Tabelas 4 e 6. Os resultados obtidos com o modelo desenvolvido são comparados com aqueles encontrados na literatura para modelagens computacionais e experimentos materiais.

Figura 7 – Placa imersa em água e ar.



Fonte: Elaborada pelo autor.

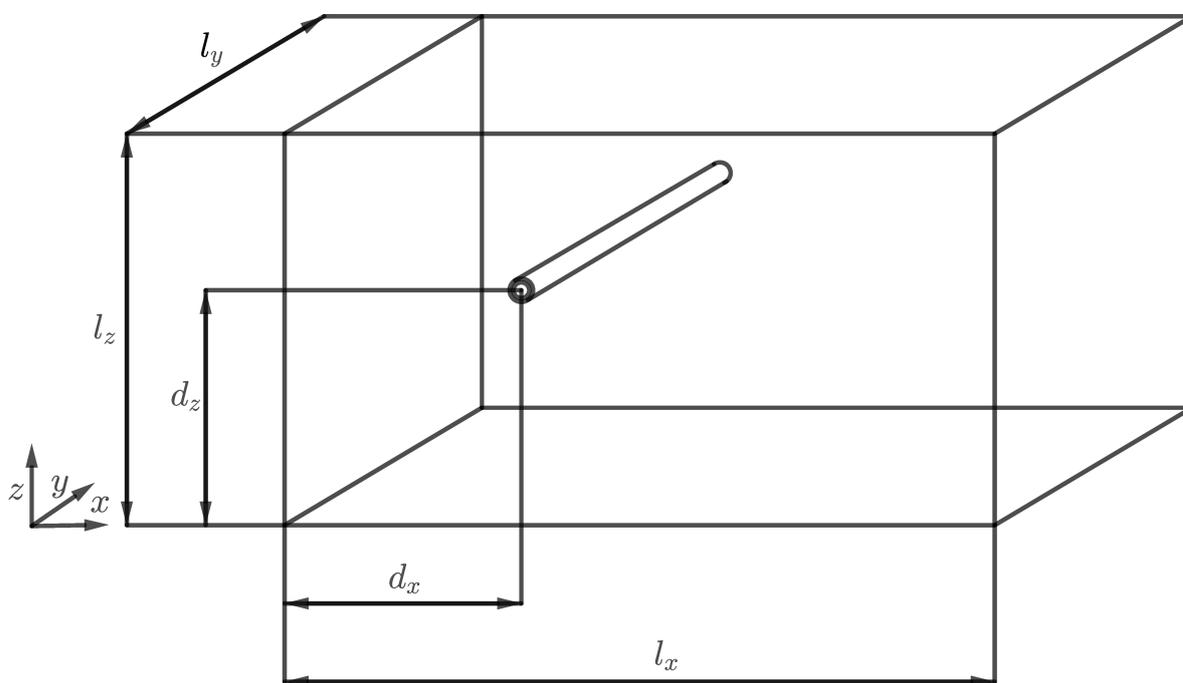
Tabela 9 – Propriedades físicas dos fluidos.

Propriedade	Valor	Unidade
ρ_{agua}	$9,982 \cdot 10^2$	kg/m^3
μ_{agua}	$1,002 \cdot 10^{-2}$	$Pa \cdot s$
ρ_{ar}	$1,225 \cdot 10^2$	kg/m^3
μ_{ar}	$1,8375 \cdot 10^{-5}$	$Pa \cdot s$

3.5.6 Escoamento turbulento sobre uma casca cilíndrica

Objetiva-se modelar o escoamento incompressível de um fluido newtoniano em regime turbulento sobre uma geometria cilíndrica. Uma representação gráfica do domínio e das condições de contorno é apresentada na Figura 8. A geometria e as propriedades físicas associadas ao sólido são aquelas apresentadas na Figura 4 e na Tabela 3, respectivamente. Observa-se que neste caso admite-se uma condição de velocidade não nula em uma das fronteiras do subdomínio fluido, em contraste aos casos anteriores. Admite-se a condição inicial de equilíbrio estático em relação ao referencial global do modelo matemático.

Figura 8 – Domínio para o escoamento sobre um cilindro.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 10 – Dimensões características do domínio para o escoamento sobre um cilindro.

Dimensão	Valor (m)
l_x	6,36
l_y	3,68
l_z	3,00
d_x	1,50
d_z	1,50

Escoamentos em regime turbulento apresentam uma dinâmica particularmente vigorosa, visto que tal regime está diretamente relacionado a intensificação dos mecanismos advectivos. O transporte acentuado de informações associado à presença de uma fronteira imersa móvel implica uma intensa troca de informações, geração e propagação de instabilidades.

São conduzidas também simulações empregando o modelo de Reissner-Mindlin, com o intuito de verificar a diferença entre resultados e custo computacional. Este caso permite ainda a comparação dos modelos de casca com modelos de viga, ainda que esta comparação não seja conduzida no presente trabalho. Apesar de o modelo de Timoshenko-Ehrenfest, implementado no MFSim, ser um modelo estrutural de vigas e, conseqüentemente, ser incapaz de capturar alguns dos modos de vibrar de uma estrutura de casca cilíndrica, admite-se que a comparação seja válida para geometrias alongadas, nas quais os principais modos de vibrar são aqueles de flexão simples ao longo da estrutura.

3.5.7 Vibração de uma tubulação de UFCC

Propõe-se a aplicação do modelo estrutural desenvolvido no estudo da vibração induzida pelo escoamento interno em um trecho de tubulação da Unidade de Craqueamento Fluido Catalítico (UFCC). Neste trecho, observa-se uma severa vibração em função da presença de uma válvula borboleta. Este mesmo problema foi avaliado inicialmente no trabalho de Souza (2020) e estende-se ao presente trabalho.

O trecho apresentado na Figura 9 conecta o terceiro estágio de ciclones à câmara de orifício e transporta gases de combustão, subproduto de carvão mineral. Nesta figura, os trechos em vermelho indicam conexões com outros equipamentos, trechos em verde indicam suportes e o trecho em azul indica a posição da válvula. A composição dos gases transportados, medida pela empresa na proximidade do tubo expensor, é apresentada na Tabela 11. A partir da composição, determinam-se as propriedades da mistura para valores típicos de pressão e temperatura (GOODWIN, 2018), como indicado na Tabela 12.

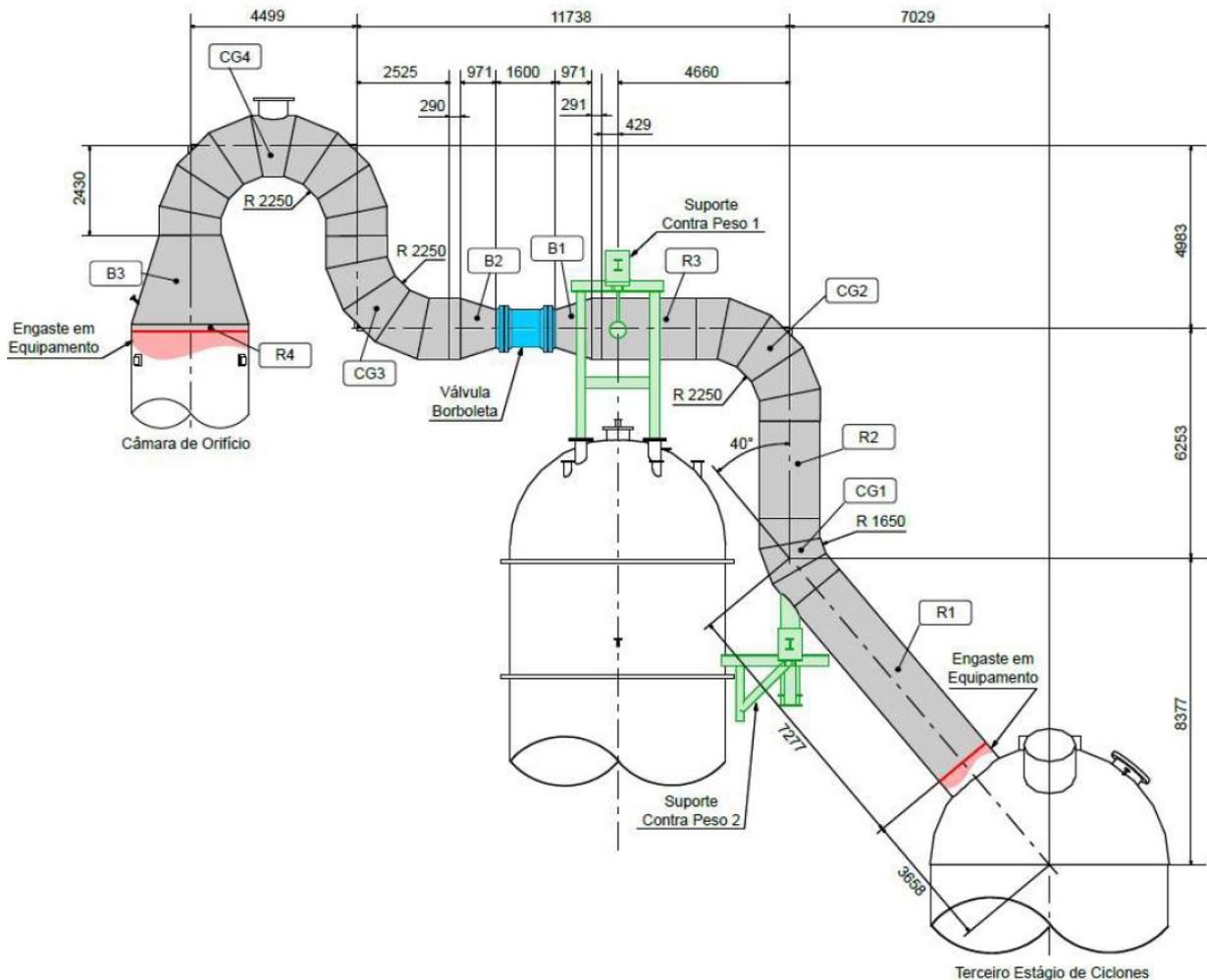
Tabela 11 – Composição química dos gases.

Dimensão	Composição molar [%]
CO	5,69
CO ₂	11,38
N ₂	68,38
O ₂	0,43
SO ₂	0,11
H ₂ O	14,01

Tabela 12 – Propriedades físicas da mistura.

Propriedade	Valor	Unidade
T_g	$6,38 \cdot 10^2$	$^{\circ}C$
P_g	2,12	$kg \cdot f/cm^2$
ρ_g	$7,818 \cdot 10^{-1}$	kg/m^3
μ_g	$3,8425 \cdot 10^{-5}$	$Pa \cdot s$
$V_{s,g}$	$5,886 \cdot 10^2$	m/s

Figura 9 – Trecho de tubulação da Unidade de Craqueamento Fluido Catalítico.



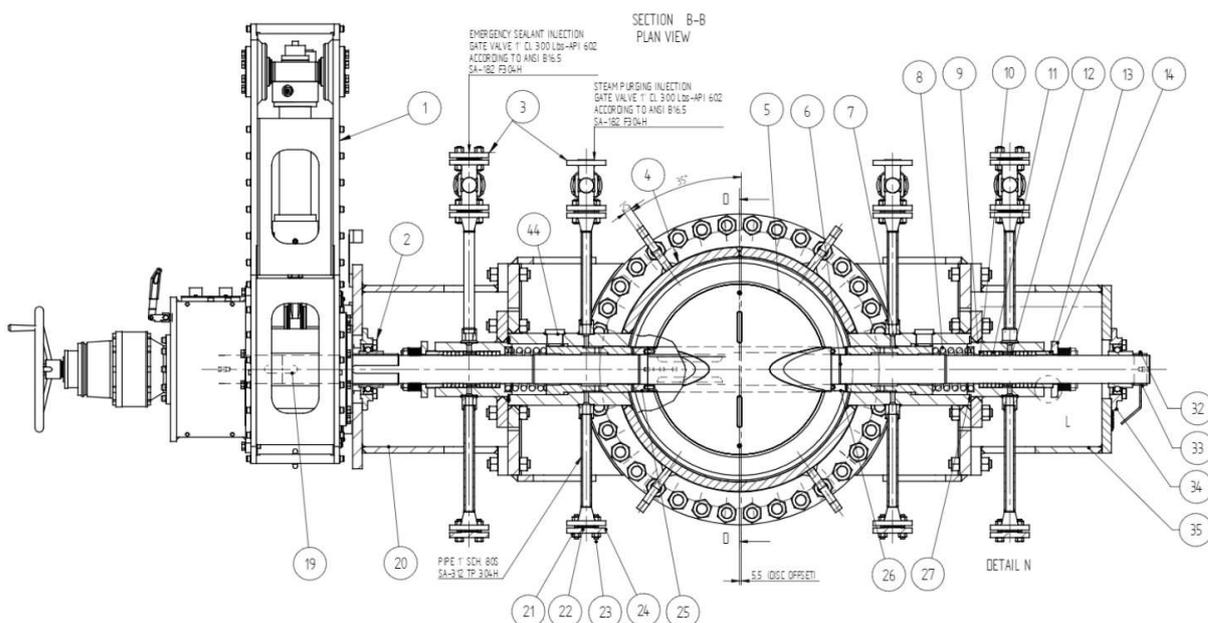
Fonte: Desenho cedido pela Petrobras e adaptado por Souza (2020).

Para a modelagem da dinâmica estrutural, emprega-se o modelo de cascas curvilíneas tridimensionais para as paredes da tubulação, apresentadas em cinza e azul na Figura 9. Os suportes de contrapeso são modelados através da aplicação de forças de dimensão e posição fornecidas pela empresa. As conexões entre a linha e os demais equipamentos são modeladas como condições de engaste. A haste da válvula é modelada por um elemento de viga de Timoshenko, através do qual as forças devido a interação entre escoamento e conjunto disco-haste são transmitidas para as paredes da linha. O disco da válvula, por sua vez, é considerado rígido, indeformável e móvel.

Visando a redução do custo de processamento, o domínio computacional associado ao subsistema fluido é definido apenas para os trechos da válvula e imediatamente à jusante da válvula, como indicado na Figura 12.

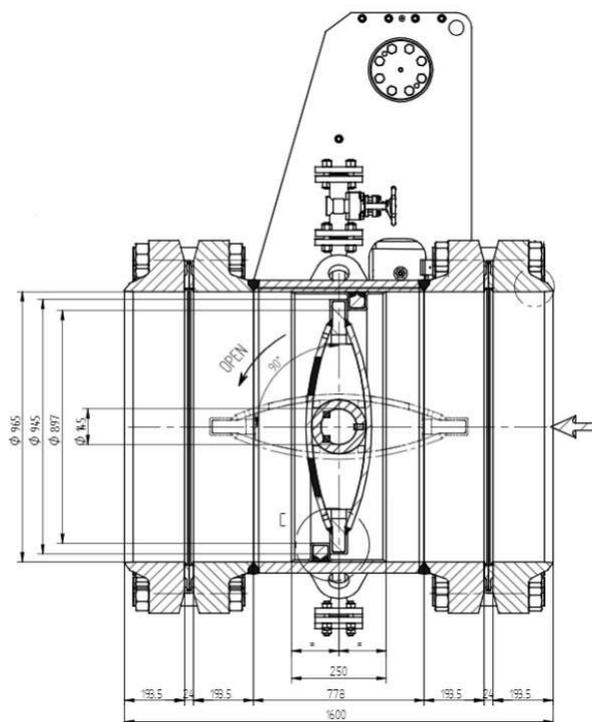
A tubulação é revestida internamente por um concreto semi-isolante de 125 mm de espessura e grampeado nas paredes da linha. A espessura das placas metálicas varia ao

Figura 10 – Vista em corte da válvula.



Fonte: Desenho cedido pela Petrobras.

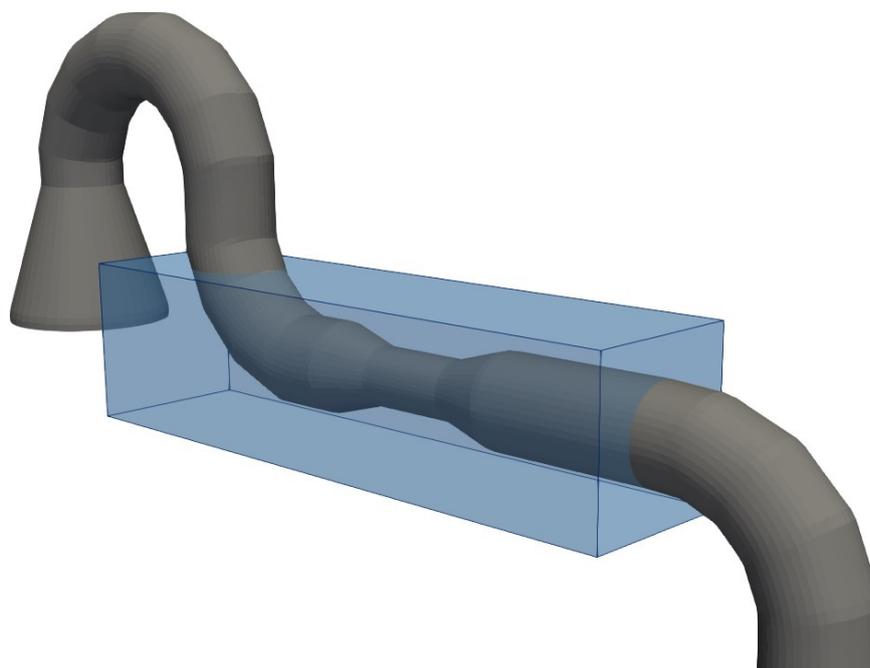
Figura 11 – Vista em corte da válvula no trecho do disco.



Fonte: Desenho cedido pela Petrobras.

longo da tubulação. No trabalho apresentado por Souza (2020), admitiu-se a hipótese de que o concreto possui pequena influência sobre a rigidez da estrutura. No presente trabalho, entretanto, admite-se que a presença do revestimento exerça considerável influência sobre a dinâmica da estrutura.

Figura 12 – Subdomínio fluido para o escoamento no interior da tubulação UFCC.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O coeficiente de Poisson ν é definido como $3,0 \cdot 10^{-1}$ para toda a estrutura. As demais propriedades físicas da casca, entretanto, são calculadas em função da combinação das propriedades do concreto e das placas metálicas, como apresentado nas Equações (3.1) e (3.2), onde os índices c e a representam valores com relação ao concreto e ao aço, respectivamente. Os valores obtidos, utilizados de referência para o modelo estrutural, são apresentados na Tabela 13.

$$E_{eq} = \frac{E_c \cdot I_c + E_a \cdot I_a}{I}, \quad (3.1)$$

$$\rho_{eq} = \frac{\rho_c \cdot V_c + \rho_a \cdot V_a}{V}. \quad (3.2)$$

Tabela 13 – Propriedades físicas equivalentes para a tubulação UFCC.

Região	Propriedade	Valor	Unidade
$h = 141,0 \text{ mm}$	E_{eq}	$2,290 \cdot 10^{11}$	Pa
$h = 141,0 \text{ mm}$	ρ_{eq}	$2,442 \cdot 10^3$	kg/m^3
$h = 150,0 \text{ mm}$	E_{eq}	$2,370 \cdot 10^{11}$	Pa
$h = 150,0 \text{ mm}$	ρ_{eq}	$2,554 \cdot 10^3$	kg/m^3
$h = 156,5 \text{ mm}$	E_{eq}	$2,440 \cdot 10^{11}$	Pa
$h = 156,5 \text{ mm}$	ρ_{eq}	$2,766 \cdot 10^3$	kg/m^3
Válvula	E	$2,200 \cdot 10^{12}$	Pa
Válvula	ρ	$7,850 \cdot 10^3$	kg/m^3

São avaliadas as respostas dinâmicas da estrutura e do fluido para cinco diferentes valores de abertura da válvula, apresentados na Tabela 14. Objetiva-se a determinação das frequências mais excitadas e os pontos de maior amplitude.

Tabela 14 – Condições de escoamento para a tubulação UFCC.

Ângulo	Vazão [kg/s]
40, 0°	29, 012
42, 5°	26, 421
45, 0°	23, 278
47, 5°	21, 572
50, 0°	19, 330

3.6 Caracterização dinâmica de escoamentos

A caracterização do problema é fundamental uma vez que, escoamentos de diferentes fluidos, a díspares velocidades no interior ou sobre geometrias com distintas dimensões características podem apresentar comportamentos semelhantes. A equivalência das condições de operação pode ser deduzida ao relacionar as proporções entre os mecanismos de transporte envolvidos no escoamento. Nesta seção, os parâmetros adimensionais que caracterizam os escoamentos e as fases que compõem o sistema, bem como sua formulação matemática, são apresentados.

A dinâmica dos escoamentos é geralmente caracterizada pelo número de Reynolds (Re), que pode ser calculado através da Eq.(3.3).

$$Re = \frac{VL}{\nu}, \quad (3.3)$$

onde V representa a velocidade, imposta em uma parede ou na entrada de um canal, L representa o comprimento característico e ν representa a viscosidade cinemática do fluido, relação entre sua viscosidade dinâmica (μ) e massa específica (ρ). O adimensional de Reynolds pode ser interpretado como a razão entre os efeitos advectivos e os efeitos difusivos.

Acerca da dinâmica de problemas com geometrias imersas, destacam-se os coeficientes de arrasto (C_d) e sustentação (C_l), calculados através das Eqs.(3.4) e (3.5). Tais adimensionais relacionam os fatores geométricos do obstáculo às forças que este exerce sobre o fluido nas direções horizontal e vertical, respectivamente. Além de uma valiosa ferramenta de validação, estes são parâmetros de grande relevância para projetos fluido-

dinâmicos.

$$C_d = \frac{2F_x}{\rho V^2 A_f}, \quad (3.4)$$

$$C_l = \frac{2F_z}{\rho V^2 A_f}, \quad (3.5)$$

onde F_x e F_z são as forças resultantes nas direções horizontal e vertical, respectivamente, e A_f é a projeção da área do corpo na direção do escoamento. Para um cilindro de base circular, a projeção da área equivale ao produto entre comprimento e diâmetro externo ($A_f = l \cdot \phi_e$).

4 Modelo matemático diferencial

4.1 Introdução

A representação simbólica do problema físico, segundo as hipóteses assumidas, é feita por meio da modelagem matemática, para o fim de avaliar quantitativamente propriedades de interesse. A sua elaboração, se conduzida de maneira criteriosa, deve proporcionar respostas condizentes com a realidade material. Neste capítulo, são apresentados os modelos matemáticos diferenciais associados à modelagem da dinâmica de estruturas e de fluidos.

4.2 Subdomínio fluido

A formulação matemática diferencial para a mecânica dos fluidos segundo a abordagem euleriana requer a definição de um volume de controle, no qual a variação das propriedades físicas e químicas para determinada substância, que eventualmente o ocupe, seja suave o suficiente para que o cálculo diferencial aplique-se de forma satisfatória. Assim, define-se um elemento grande o suficiente para eliminar variações de caráter microscópico, relacionadas ao livre caminho médio molecular, à densidade e ao fluxo de partículas de fluido pelo volume, bem como pequeno o suficiente para eliminar variações de caráter macroscópico, relacionadas à resolução mínima para captura de informações relevantes a análise do escoamento. No presente trabalho admite-se que os volumes de controle estabelecidos apresentam tal característica e que, portanto, o subdomínio fluido pode ser considerado um meio contínuo.

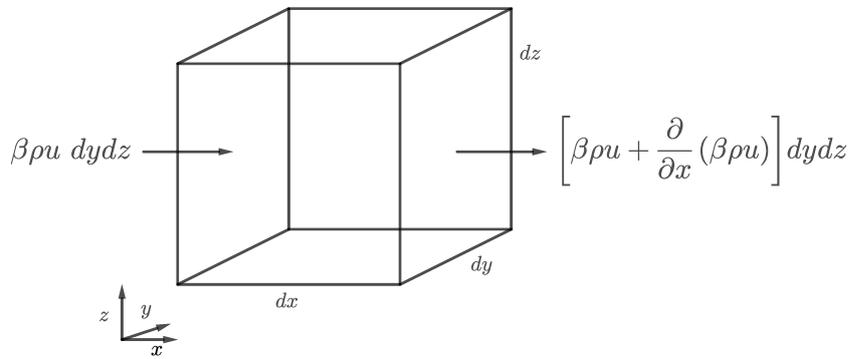
4.2.1 Teorema do Transporte de Reynolds

A modelagem em mecânica dos fluidos baseia-se nos princípios da mecânica e da termodinâmica. Tais princípios, porém, são aplicados a sistemas, ou porções do universo com massa fixa, separados do meio externo por uma fronteira. A fim de aplicar estes princípios a uma região fixa e não a uma massa singular, emprega-se o Teorema do Transporte de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\vartheta} \beta \rho d\vartheta \right) + \int_S \beta \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA, \quad (4.1)$$

onde B representa dada informação extensiva, β representa essa mesma informação de forma intensiva, ρ representa a massa específica do fluido, $d\vartheta$ representa um termo diferencial volumétrico e dA representa um termo diferencial de área. Os vetores \mathbf{V} e \mathbf{n} representam o vetor de velocidade e o vetor normal à superfície de controle no ponto avaliado, respectivamente. O termo do lado esquerdo da equação representa a taxa de variação da informação B contida no sistema. O primeiro termo do lado direito da equação representa a taxa de variação da informação B contida no volume de controle, enquanto o termo seguinte relaciona-se ao fluxo líquido da informação pelas fronteiras, ou pela superfície de controle.

Figura 13 – Teorema do transporte de Reynolds aplicado a um elemento volumétrico diferencial.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.2 Equação diferencial do balanço de massa

O Teorema do Transporte de Reynolds, aplicado a um volume de controle com respeito à massa, isto é, para o caso em que $B = m$ e $\beta = 1$, permite a extensão do princípio da conservação de massa, reservado à sistemas, a um volume de controle fixo no domínio espacial.

$$\frac{\partial M_{sist}}{\partial t} = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\vartheta} \rho \, d\vartheta \right) + \int_S \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA. \quad (4.2)$$

Utilizando-se o Teorema de Leibniz e o Teorema de Gauss (CIMBALA; ÇENGEL, 2007), e assumindo que o elemento volumétrico seja constante no tempo, torna-se possível a transformação da integral de superfície em uma integral de volume, como indicado à seguir:

$$\int_{\vartheta} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] d\vartheta = 0, \quad (4.3)$$

onde o operador ∇ é definido da seguinte forma:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (4.4)$$

Pelo Teorema da Localização, conforme apresentado por Chandrasekharaiah e Debnath (1994) e Arpaci e Larsen (1984), uma integral volumétrica é nula apenas se seu integrando for nulo. Aplicando o teorema à Equação (4.3), obtém-se a equação da continuidade, ou a equação diferencial do balanço de massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (4.5)$$

4.2.3 Equação diferencial da quantidade de movimento linear

De forma análoga àquela apresentada para a massa, o Teorema do Transporte de Reynolds pode ser aplicado para a quantidade de movimento linear. Neste caso, em que $B = m\mathbf{V}$ e $\beta = \mathbf{V}$, estende-se a relação da quantidade de movimento linear a um volume de controle fixo no domínio espacial.

$$\frac{\partial (M \cdot \mathbf{V})_{sist}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\vartheta} \mathbf{V} \rho \, d\vartheta \right) + \int_S \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \, dA. \quad (4.6)$$

Pela segunda Lei de Newton, sabe-se que a variação da quantidade de movimento linear relaciona-se diretamente ao somatório de forças externas, que atuam sobre as partículas de fluido instantaneamente compreendidas pelo volume de controle. As forças externas podem ser classificadas como forças de campo, que atuam sobre toda a massa contida no volume de controle, e como forças de superfície, decorrentes de tensões sobre a superfície de controle. Esta classificação é observada na Equação (4.7), onde os termos \mathbf{F}_c e \mathbf{F}_s representam as forças de campo e de superfície, respectivamente.

$$\frac{\partial (M \cdot \mathbf{V})_{sist}}{\partial t} = \sum \mathbf{F}_c + \sum \mathbf{F}_s, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{F}_c = \int_{\vartheta} \mathbf{f}_c \, d\vartheta, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{F}_s = \int_S \mathbf{f}_c \, dA. \quad (4.9)$$

Assim, é possível reescrever a Equação (4.6) como indicado a seguir:

$$\int_{\vartheta} \mathbf{f}_c \, d\vartheta + \int_S \mathbf{f}_c \, dA = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\vartheta} \mathbf{V} \rho \, d\vartheta \right) + \int_S \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \, dA. \quad (4.10)$$

Utilizando-se o Teorema de Leibniz e o Teorema de Gauss, e assumindo que o elemento volumétrico seja constante no tempo, torna-se possível a transformação das integrais de superfície em integrais de volume:

$$\int_{\vartheta} \left\{ \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) - \mathbf{f}_c - \nabla \cdot \mathbf{f}_s \right\} d\vartheta = 0. \quad (4.11)$$

Mais uma vez, pelo Teorema da Localização, admite-se que, para que a integral definida no volume de controle seja nula, o integrando também deve ser nulo.

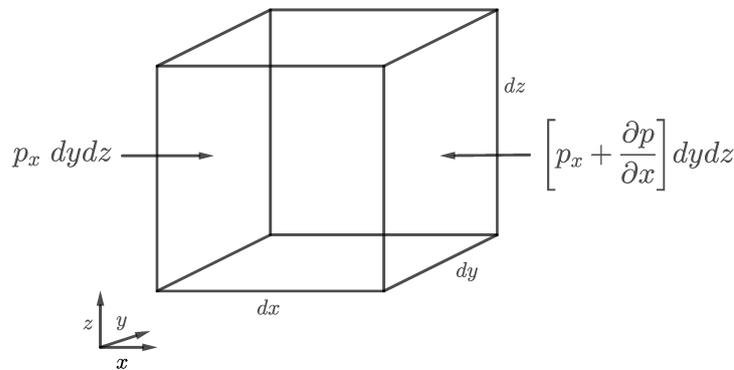
$$\mathbf{f}_c + \nabla \cdot \mathbf{f}_s = \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}). \quad (4.12)$$

Definida a derivada total do campo de velocidade, dada pela soma dos efeitos locais e advectivos segundo a Equação (4.12), são modeladas as forças que atuam sobre o volume de controle de acordo com as hipóteses apresentadas no modelo físico. Para os fins do presente trabalho, considera-se que, dentre as forças de campo, apenas a força gravitacional seja significativa. Tal força pode ser modelada matematicamente como o produto do campo gravitacional pela massa específica do fluido:

$$d\mathbf{F}_g = \rho \mathbf{g}. \quad (4.13)$$

Dentre as forças de superfície, serão consideradas as forças devido a um gradiente de pressão e devido os efeitos viscosos. A primeira relaciona-se à colisão de partículas de fluido pela superfície de controle enquanto a segunda se relaciona ao movimento relativo entre partículas de fluido pela superfície de controle.

Figura 14 – Gradiente de pressão sobre um elemento volumétrico diferencial.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A força devido a um gradiente de pressão pode ser modelada matematicamente, como indicado na Equação (4.14), pelo somatório das forças apresentadas na Figura 14.

$$d\mathbf{F}_p = \left[p_x - \left(p_x + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy dz + \left[p_y - \left(p_y + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) \right] dx dz + \left[p_z - \left(p_z + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \right] dx dy. \quad (4.14)$$

É possível reescrever a equação acima empregando a definição do operador ∇ , como indicado a seguir:

$$d\mathbf{F}_p = -\nabla p. \quad (4.15)$$

A força devido a presença de gradientes de tensões pode ser modelada de forma análoga. Observa-se, no entanto, que para o caso das tensões viscosas, cada uma das faces

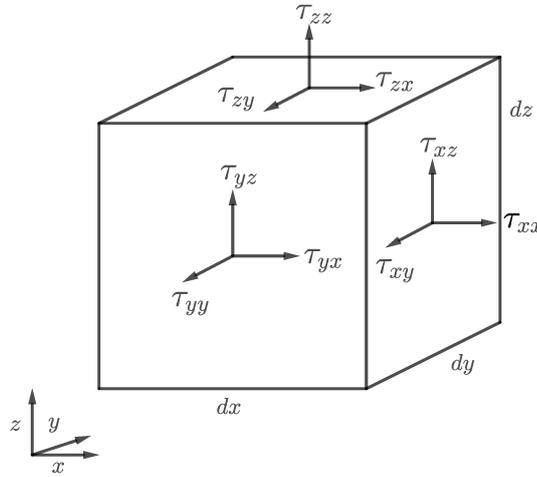
pode apresentar também componentes cisalhantes, além da componente normal. Neste caso, trabalha-se com o tensor de tensões viscosas, apresentado na Equação (4.16).

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Assim, a força viscosa pode ser modelada matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{dF_v}{d\vartheta} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \mathbf{k}. \quad (4.17)$$

Figura 15 – Tensões viscosas sobre um elemento volumétrico diferencial.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para fluidos newtonianos, admite-se que as tensões viscosas são proporcionais ao coeficiente de viscosidade do fluido (μ) e às taxas de deformação no elemento. A equação da tensão viscosa na sua forma indicial é apresentada abaixo, onde os índices i e j , contidos no intervalo $[1, 3]$, representam as direções x, y e z .

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.18)$$

Substituindo a Equação (4.18) na Equação (4.17), obtém-se o termo relacionado à força devido os efeitos viscosos, apresentada na sua forma vetorial à seguir:

$$d\mathbf{F}_v = \mu \nabla^2 \mathbf{V}. \quad (4.19)$$

Finalmente, substituindo as Equações (4.13), (4.15) e (4.19) na Equação (4.7), obtém-se a equação de Navier-Stokes, ou a equação diferencial do balanço de quantidade de movimento linear para fluidos newtonianos:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V}. \quad (4.20)$$

Para escoamentos sobre sólidos, acrescenta-se à equação de Navier-Stokes um termo de força superficial, \mathbf{f} , relacionado a interação entre os subsistemas fluido e sólido, como indicado a seguir:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{V}\mathbf{V}) = \mathbf{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{V} + \mathbf{f}. \quad (4.21)$$

4.2.4 Escoamentos monofásicos incompressíveis

Para escoamentos monofásicos, a dinâmica dos fluidos pode ser modelada através das equações diferenciais do balanço de massa (4.5), do balanço da quantidade de movimento linear (4.21) e do balanço de energia térmica. Para os casos apresentados neste trabalho, considera-se que os gradientes de temperatura e, conseqüentemente, as forças relacionadas aos efeitos térmicos tenham pequeno impacto sobre o escoamento. Tal hipótese possibilita a simplificação do modelo diferencial, que se resume então às equações (4.5) e (4.21).

Para escoamentos incompressíveis, nos quais as variações da massa específica são desprezíveis, é possível simplificar as equações da continuidade e do balanço da quantidade de movimento linear como indicado a seguir:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (4.22)$$

$$\rho \left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} \right] = \mathbf{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{V} + \mathbf{f}. \quad (4.23)$$

Escoamentos incompressíveis são caracterizados através do número de Mach, definido na Equação (4.24), onde V_c representa uma velocidade característica do escoamento e V_s representa a velocidade do som no meio material. Para valores do adimensional inferiores à 0.3, faixa que compreende boa parte das aplicações de engenharia, a hipótese de escoamento incompressível é adequada.

$$M = \frac{V_c}{V_s}, \quad (4.24)$$

4.2.5 Escoamentos bifásicos incompressíveis

Em escoamentos bifásicos incompressíveis, propriedades físicas e químicas como massa específica e viscosidade dinâmica variam significativamente pelo domínio e são função da posição $\vec{x} = (x, y, z)$ e do tempo t . Os campos escalares de cada uma dessas informações pode ser determinado da seguinte forma:

$$\rho(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t)\rho_d + (1 - \psi(\vec{x}, t))\rho_c, \quad (4.25)$$

$$\mu(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t)\mu_d + (1 - \psi(\vec{x}, t))\mu_c, \quad (4.26)$$

onde os índices c e d representam as fases contínua e dispersa, respectivamente. A função indicadora, dada por ψ , expressa a quantidade fracional da fase dispersa em dada posição \vec{x} no tempo t . Assim, ψ assume valores nulos para regiões do domínio ocupadas pela fase contínua, valores uniatários para regiões ocupadas pela fase dispersa e valores contidos no intervalo $]0, 1[$ para regiões que compreendem a fronteira entre fases.

No presente trabalho, o campo escalar ψ é definido segundo o método *Volume-of-Fluid (VOF)* (HIRT; NICHOLS, 1981). Tal método propõe que a informação seja conduzida, de forma semelhante àquela de uma função marcadora, pelo transporte advectivo:

$$\frac{\partial\psi(\vec{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\psi(\vec{x}, t) = 0. \quad (4.27)$$

Além das forças apresentadas na seção 4.2.3, relacionadas à interação com um sólido, à presença de um campo gravitacional e à presença de gradientes de pressão e de tensão viscosa, deve-se considerar ainda uma força interfacial, relativa à atividade molecular na interface formada entre fases imiscíveis. Essa força é caracterizada por parâmetros geométricos-interfaciais e pelas propriedades das fases:

$$\frac{d\mathbf{f}_s}{d\vartheta} = \frac{\rho_0\sigma\kappa\nabla\psi}{\frac{1}{2}(\rho_c + \rho_d)}, \quad (4.28)$$

onde $d\mathbf{f}_s$ representa o termo de força decorrente da interface de fluido, σ representa o coeficiente de tensão interfacial e κ representa a curvatura da interface no ponto avaliado.

Assim, as equações de balanço de massa e da quantidade de movimento linear para escoamentos bifásicos incompressíveis podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (4.29)$$

$$\rho \left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} \right] = \mathbf{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{V} + \mathbf{f} + \mathbf{f}_s, \quad (4.30)$$

onde os campos escalares ρ e μ são determinados através das equações (4.25) e (4.26), \mathbf{f} representa forças de interação entre os subsistemas fluido e sólido e \mathbf{f}_s representa forças decorrentes da interface de fluido.

4.2.6 Escoamentos monofásicos incompressíveis e turbulentos

Em escoamentos turbulentos, observa-se a coexistência de estruturas turbilhonares de diferentes ordens de grandeza. As maiores estruturas são da ordem de grandeza da geometria que excita ou delimita o escoamento. As menores, por sua vez, são caracterizadas

pelas grandezas características de Kolmogorov. A relação entre o comprimento integral e o comprimento característico de Kolmogorov é proporcional a uma exponencial do número de Reynolds:

$$\frac{l_{max}}{l_{min}} = Re^{\frac{3}{4}}. \quad (4.31)$$

A correta representação das grandezas características espacial e temporal em escoamentos turbulentos requer a modelagem da dinâmica de todo o espectro de estruturas turbilhonares. A resolução necessária à modelagem das menores estruturas, entretanto, implica em um expressivo custo de processamento pela metodologia numérico-computacional. A aplicação de filtros espaciais e temporais às Equações (4.22) e (4.21) permitem, à custo da acuidade da solução, a redução desse custo.

A filtragem é definida pela integral de convolução entre uma função escalar ou vetorial e uma função de filtro (LEONARD, 1974), como indicado a seguir:

$$\bar{\lambda}(x, t) = \int_{\vartheta} \lambda(x', t) G(x - x') dx', \quad (4.32)$$

onde λ representa uma informação qualquer, função dos domínios espacial e temporal, $\bar{\lambda}$ representa a informação filtrada, G representa a função filtro (CLARK; FERZIGER; REYNOLDS, 1979) e ϑ representa o volume de integração.

Filtros são definidos considerando os incrementos espaciais e temporal pela metodologia numérica. As equações diferenciais da continuidade e da quantidade de movimento linear, filtradas por um comprimento característico $\bar{\Delta}$, são apresentadas a seguir em sua forma indicial:

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{V}_i \bar{V}_j)}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho}. \quad (4.34)$$

Pode-se reescrever a Equação (4.34) da seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{V}_i \bar{V}_j)}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} - \tau_{s \ ij} \right) \right] + \frac{\bar{f}_i}{\rho}, \quad (4.35)$$

onde $\tau_{s \ ij}$ é o tensor submalha de Boussinesq-Reynolds:

$$\tau_{s \ ij} = \bar{V}_i \bar{V}_j - \bar{V}_j \bar{V}_i. \quad (4.36)$$

Observa-se que o termo $\bar{V}_i \bar{V}_j$ não é resolvido nas Equações (4.33) e (4.35). Assim, o processo de filtragem introduz termos adicionais que devem ser modelados por meio de um modelo de fechamento.

Nessa metodologia, as grandes estruturas, associadas aos menores números de onda, são resolvidas diretamente, enquanto as menores estruturas, associadas aos maiores

números de onda, são modeladas com um modelo submalha. A metodologia, apropriadamente referenciada como *Large Eddy Simulation* (LES), permite a solução detalhada e transiente de escoamentos a elevados números de Reynolds. Tais peculiaridades são pertinentes à problemas de interação fluido-estrutura.

O fechamento do sistema de equações filtradas pode se dar, como proposto por Boussinesq, através do conceito de viscosidade turbulenta:

$$\tau_{s\ ij} = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (4.37)$$

onde ν_t representa a viscosidade turbulenta, k representa a energia cinética turbulenta e δ representa a função delta de Kronecker, apresenada a seguir:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (4.38)$$

O tensor de tensões de Boussinesq-Reynolds pode ser modelado como função do tensor taxa de deformação do campo filtrado \bar{S}_{ij} (LESIEUR, 2008):

$$\tau_{s\ ij} = 2\nu_t \bar{S}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{s\ k,k}, \quad (4.39)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.40)$$

Os efeitos submalha, relacionados a dinâmica das menores estruturas, são modelados por um conjunto adicional de equações. No presente trabalho, utiliza-se o modelo submalha dinâmico (SMAGORINSKY, 1963; GERMANO et al., 1991; LILLY, 1992) para a modelagem da viscosidade turbulenta:

$$\nu_t = (C_s \cdot \Delta)^2 |\bar{S}|, \quad (4.41)$$

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}. \quad (4.42)$$

A fim de determinar C_s como uma função dos domínios espacial e temporal, define-se um filtro teste \hat{G} :

$$\hat{\lambda}(x) = \int_{\vartheta} \lambda(x', t) \hat{G}(x - x') dx'. \quad (4.43)$$

Aplicando este filtro à Equação (4.35), obtém-se:

$$\frac{\partial \hat{V}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{V}_i \hat{V}_j)}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \hat{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{V}_j}{\partial x_i} - T_{s\ ij} \right) \right] + \frac{\hat{f}_i}{\rho}, \quad (4.44)$$

onde o tensor submalha T_s é definido da seguinte forma:

$$T_{s\ ij} = \widehat{V_i V_j} - \widehat{V_i} \widehat{V_j}. \quad (4.45)$$

O tensor de Leonard, ou tensor resolvido para o campo filtrado L_{ij} , é dado por:

$$L_{ij} = \widehat{\widehat{V_i V_j}} - \widehat{V_i} \widehat{V_j}, \quad (4.46)$$

de forma que os tensores $\tau_{s\ ij}$, $T_{s\ ij}$ e L_{ij} , definidos, respectivamente, nas Equações (4.36), (4.45) e (4.46), relacionem-se algebricamente da seguinte forma:

$$L_{ij} = T_{s\ ij} - \widehat{\tau_{s\ ij}}, \quad (4.47)$$

onde $\tau_{s\ ij}$ é obtido através da aplicação do filtro \widehat{G} à Equação (4.36).

A partir da hipótese de Boussinesq, reescreve-se:

$$\widehat{\tau_{s\ ij}} - \frac{1}{3} \widehat{\tau_{s\ kk}} = -2C_s^2 \Delta^2 |\widehat{S}| \widehat{S_{ij}}, \quad (4.48)$$

Analogamente, determina-se o tensor de tensões do campo duplamente filtrado $T_{s\ ij}$:

$$T_{s\ ij} - \frac{1}{3} T_{s\ kk} \delta_{ij} = -2C_s^2 \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}| \widehat{S_{ij}}, \quad (4.49)$$

Subtraindo a Equação (4.48) de (4.49), tem-se:

$$L_{ij} - \frac{1}{3} L_{kk} \delta_{ij} = -2C_s^2 M_{ij}, \quad (4.50)$$

$$M_{ij} = \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}| \widehat{S_{ij}} - \Delta^2 |\widehat{S}| \widehat{S_{ij}}. \quad (4.51)$$

onde $\overline{\Delta}$ e $\widehat{\Delta}$ representam os comprimentos dos filtros G e \widehat{G} , respectivamente.

O valor de C_s pode ser obtido através da multiplicação da Equação (4.51) pelo tensor de deformação do campo filtrado (GERMANO et al., 1991). Admitindo-se a hipótese de que $\overline{S_{ii}}$ é desprezível para escoamentos incompressíveis, tem-se:

$$C_s^2 = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} \overline{S_{ij}}}{M_{ij} \overline{S_{ij}}}. \quad (4.52)$$

Retornando à equação diferencial de balanço da quantidade de movimento linear filtrada, apresentada em (4.35), substitui-se o tensor submalha pela Equação (4.37):

$$\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{V_i} \overline{V_j})}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \frac{\delta_{ij} \tau_{s\ kk}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V_j}}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\overline{f_i}}{\rho}. \quad (4.53)$$

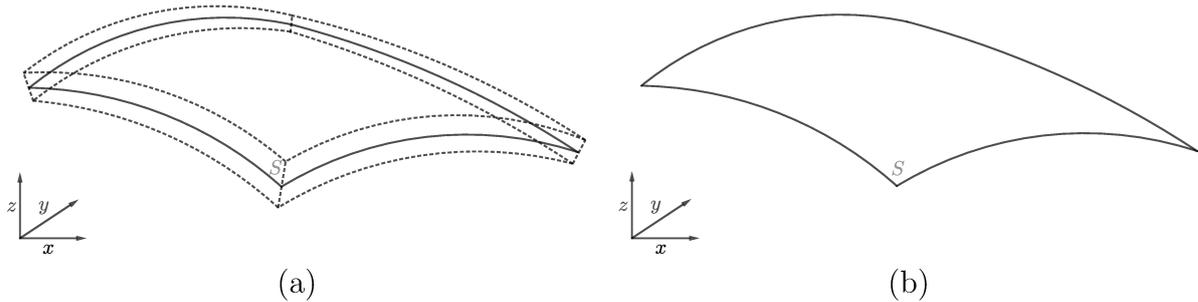
O traço do tensor submalha $\tau_{s\ kk}$ pode ainda ser incorporado à pressão, resultando em uma pressão modificada \overline{P} . Assim, obtém-se a equação para a modelagem de escoamentos monofásicos turbulentos segundo o modelo de Smagorinsky dinâmico:

$$\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{V_i} \overline{V_j})}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V_j}}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\overline{f_i}}{\rho}. \quad (4.54)$$

4.3 Subdomínio estrutural

O subdomínio estrutural é tratado com um referencial lagrangiano, de forma que a solução do campo de deformação permite a movimentação da malha estrutural, ou do sólido, através do domínio euleriano cartesiano fixo, usado para o subsistema fluido.

Figura 16 – Comparação entre elementos estruturais para a teoria de cascas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A teoria de cascas curvilíneas tridimensionais está associada à geometrias sólidas, como aquela apresentada na Figura 16a. A partir da geometria sólida, determina-se uma superfície intermediária e uma distribuição espacial de fibras, que serão referência para o modelo matemático diferencial do subdomínio estrutural (ONATE, 2012). No presente trabalho, entretanto, propõe-se a modelagem de um sólido através de uma superfície de referência apenas (16b). Para tanto, certas modificações, associadas à definição geométrica, à definição de referenciais cartesianos e curvilíneos e ao transporte de informações de campo através de funções de interpolação isoparamétricas, são necessárias. Tais alterações permitem a simplificação da malha numérico-computacional, tida como referência do sistema lagrangeano estrutural. Essa simplificação, atrelada a uma redução no número de graus de liberdade, deve resultar em uma redução no tempo de processamento do modelo estrutural.

4.3.1 Sistemas de coordenadas

A geometria da casca pode ser descrita em relação ao sistema de coordenadas cartesiano global x, y, z , associado aos vetores $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e coincidente ao sistema de coordenadas global do subdomínio fluido. Neste sistema, são definidas as componentes de deslocamento global u_i com $i \in [1, 3]$. Um sistema de coordenadas cartesiano local x', y', z' , representado pelos vetores $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, pode ser definido para cada elemento de superfície.

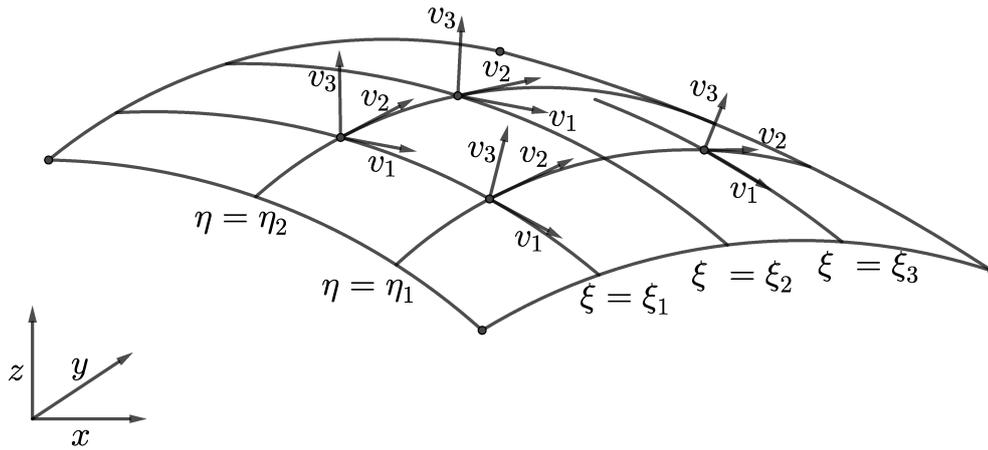
Define-se ainda, a partir do sistema local, um sistema curvilíneo ξ, η, ζ , de forma que ζ seja normal à superfície e que o produto vetorial $(\xi \times \eta)$ seja positivo em toda a superfície. A direção de ζ , por definição, deve ser coincidente à direção \vec{k}' em cada ponto. As variáveis ξ e η representam componentes curvilíneas tangentes à superfície e ortogonais

à ζ . A partir do sistema curvilíneo, é possível descrever a superfície de referência, como indicado a seguir:

$$\mathbf{x} = x(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{i} + y(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{j} + z(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{k}. \quad (4.55)$$

O sistema de coordenadas local elementar, segundo a teoria de elementos curvilíneos por degeneração de elementos sólidos (AHMAD, 1969; ONATE, 2012), é definido a partir da componente normal à superfície, dada por \vec{k}' , e de uma componente fixa, coincidente a uma das componentes do sistema de coordenadas global. No presente trabalho, entretanto, propõe-se a definição das componentes tangenciais a partir do sistema curvilíneo e da definição do jacobiano. Dessa forma, todas as componentes do sistema local podem sofrer translação e rotação com o fim de capturar as distorções geométricas do elemento de casca. Como verificado na seção de resultados, este sistema local elementar, definido pelos vetores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 , proporciona uma convergência mais rápida e soluções numéricas mais próximas das soluções contínuas mesmo para superfícies planas.

Figura 17 – Sistemas de coordenadas local e curvilíneo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A modelagem matemática dos campos de tensão e deformação é desenvolvida para os deslocamentos locais u'_i com $i \in [1, 3]$ no sistema local elementar, definido pelos vetores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 . Neste sistema, a componente normal à superfície, dada pelo vetor \vec{v}_3 , é definida pelo produto dos vetores tangentes à curva ξ constante e à curva η constante:

$$\vec{v}'_{3_{\zeta=\bar{\zeta}}} = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=\bar{\zeta}, \eta=\bar{\eta}} \times \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \eta} \right)_{\zeta=\bar{\zeta}, \xi=\bar{\xi}}, \quad (4.56)$$

onde $\vec{x} = (x, y, z)$ é o vetor posição de um ponto qualquer da casca. A definição do sistema de coordenadas local requer a normalização dos vetores de referência:

$$\vec{v}_3 = \frac{1}{|\vec{v}'_3|} \vec{v}'_3. \quad (4.57)$$

A direção de \vec{v}_1' é tomada como a tangente ao sistema de coordenadas curvilíneo para ξ constante:

$$\vec{v}_1' = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi} \right)_{\eta=\bar{\eta}} = \left[\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi} \right]. \quad (4.58)$$

O versor \vec{v}_1 é obtido, de forma análoga àquela de \vec{v}_3 , pela normalização do vetor \vec{v}_1' . Por fim, a definição de \vec{v}_2 se dá através do produto vetorial $\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_1$.

Uma representação gráfica dos sistemas local e curvilíneo, coincidentes ao elemento de lâmina, é apresentada na Figura 17. Observa-se que o sistema cartesiano local apresenta diferentes configurações ao longo da superfície em função de sua curvatura.

4.3.2 Relações de deformação

A movimentação para sólidos pode ser modelada através do princípio de Hamilton, ou do princípio dos deslocamentos virtuais (SOUZA, 2020). Este princípio determina que, em dado intervalo de tempo, o sistema deve alternar entre estados inicial e final através da ação de menor custo energético:

$$S(x, \dot{x}, t) = \int_{t_0}^{t_n} L(x, \dot{x}) dt. \quad (4.59)$$

Na equação acima, S representa uma alteração de estado ou uma ação, t_0 representa o tempo inicial, t_n representa o tempo final e L representa uma função lagrangiana.

Através do cálculo variacional, é possível reescrever a Equação (4.59) da seguinte forma:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_n} L(x, \dot{x}) dt = 0, \quad (4.60)$$

onde δ representa o operador variacional. Aplicando o princípio ao movimento de elementos sólidos, obtém-se a seguinte expressão:

$$\int_{t_0}^{t_n} (\delta U - \delta V - \delta K) dt = 0, \quad (4.61)$$

onde U representa a energia interna de deformação, V representa o trabalho virtual das forças externas e K representa a energia cinética.

A energia interna de deformação é calculada através da integral no volume do produto entre os tensores de deformação ε_{ij} e de Cauchy σ_{ij} , como indicado a seguir:

$$\delta U = \int_{\vartheta} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\vartheta. \quad (4.62)$$

Os tensores de deformação e de Cauchy são calculados como indicado nas Equações (4.63) e (4.64), respectivamente. A aproximação indicada para o tensor de deformação é apropriada para pequenos deslocamentos.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.63)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda_s \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_s \varepsilon_{ij}. \quad (4.64)$$

As constantes λ_s e μ_s são determinadas da seguinte forma:

$$\lambda_s = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (4.65)$$

$$\mu_s = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (4.66)$$

onde E representa o módulo de Young e ν representa o coeficiente de Poisson.

A energia cinética pode ser modelada, através da mecânica clássica, pelo produto entre massa e o quadrado da velocidade avaliado em um elemento de volume diferencial:

$$\delta K = \frac{1}{2} \int_{\vartheta} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial t}. \quad (4.67)$$

O trabalho virtual das forças externas pode ser calculado através da definição de trabalho, ou pela integral de linha entre força e posição, estendida a um elemento de volume diferencial pela abordagem lagrangiana:

$$\delta V = - \int_{\vartheta} F_i(\delta u_i) d\vartheta. \quad (4.68)$$

Substituindo as Equações (4.62), (4.67) e (4.68) na Equação (4.61), obtém-se a Equação (4.69), com a qual modela-se a dinâmica de estruturas sólidas.

$$\int_{t_0}^{t_n} (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u}) dt = \int_{t_0}^{t_n} \mathbf{F} dt. \quad (4.69)$$

Na equação acima, \mathbf{u} representa o vetor de deslocamentos, $\ddot{\mathbf{u}}$ representa a derivada de segunda ordem do vetor de deslocamentos, \mathbf{M} representa a matriz de massa, \mathbf{K} representa a matriz de rigidez e \mathbf{F} representa o vetor de forças e momentos.

5 Modelo numérico

A modelagem contínua através da abordagem íntegro-diferencial, apresentada no capítulo anterior, é de significativa complexidade e é limitada à domínios simples e condições de contorno triviais. Uma alternativa à metodologia contínua é a metodologia numérico-computacional. O método numérico se fundamenta na discretização do domínio e das equações relacionadas a um dado problema contínuo e na sua solução através de métodos de convergência. Ou seja, baseia-se na tradução de um conjunto contínuo de informações para um conjunto finito, e na solução do sistema de equações algébricas, resultantes de tal processo, através de iterações pelo método numérico.

O processo de discretização introduz erros de natureza numérica, associados ao truncamento de termos de ordens mais elevadas. Naturalmente, tal efeito é reduzido com o refinamento da malha numérica. A validade dos resultados obtidos da modelagem pode ser avaliada através da sua comparação com soluções exatas e experimentos materiais. A modelagem numérica-computacional, se corretamente desenvolvida, deve possibilitar a obtenção de soluções aproximadas para numerosos problemas práticos.

5.1 Subdomínio fluido

5.1.1 Malha computacional

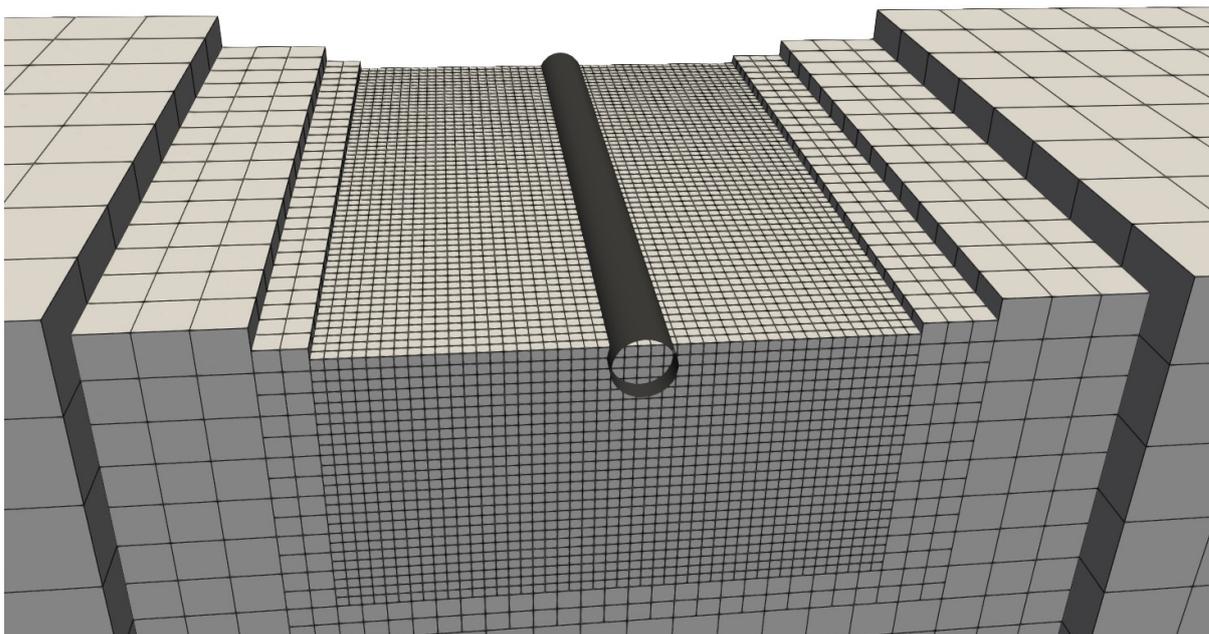
Os domínios computacionais para o subdomínio fluido, descritos no modelo físico, consistem de geometrias cartesianas. Tais domínios são discretizados em uma malha bloco estruturada com refinamento adaptativo. Define-se um nível base, euleriano, cartesiano e fixo a partir do qual é estabelecida uma sequência de níveis, progressivamente refinados e alinhados, organizados em uma hierarquia. Regiões de refinamento local são definidas de acordo com o nível de detalhamento necessário à modelagem apropriada dos fenômenos físicos pela metodologia numérica. A malha numérico-computacional para o subdomínio fluido pode ser descrita de acordo com a seguinte equação:

$$\mathcal{M}_L = \{(x_{m_1 m_2}, t_n), m_1 \in [1, 3], m_2 \in [1, n_L], n \in [0, t_f]\}. \quad (5.1)$$

onde o subíndices m_1 e m_2 relacionam-se às componentes espaciais e aos nós da malha no nível L , respectivamente. O subíndice n relaciona-se aos incrementos temporais.

Regiões que compreendem severos gradientes e concentrações de informações de interesse, como interfaces e regiões de elevada vorticidade, devem ser refinadas estática e

Figura 18 – Malha refinada localmente devido a presença de um sólido.



Fonte: Elaborada pelo autor.

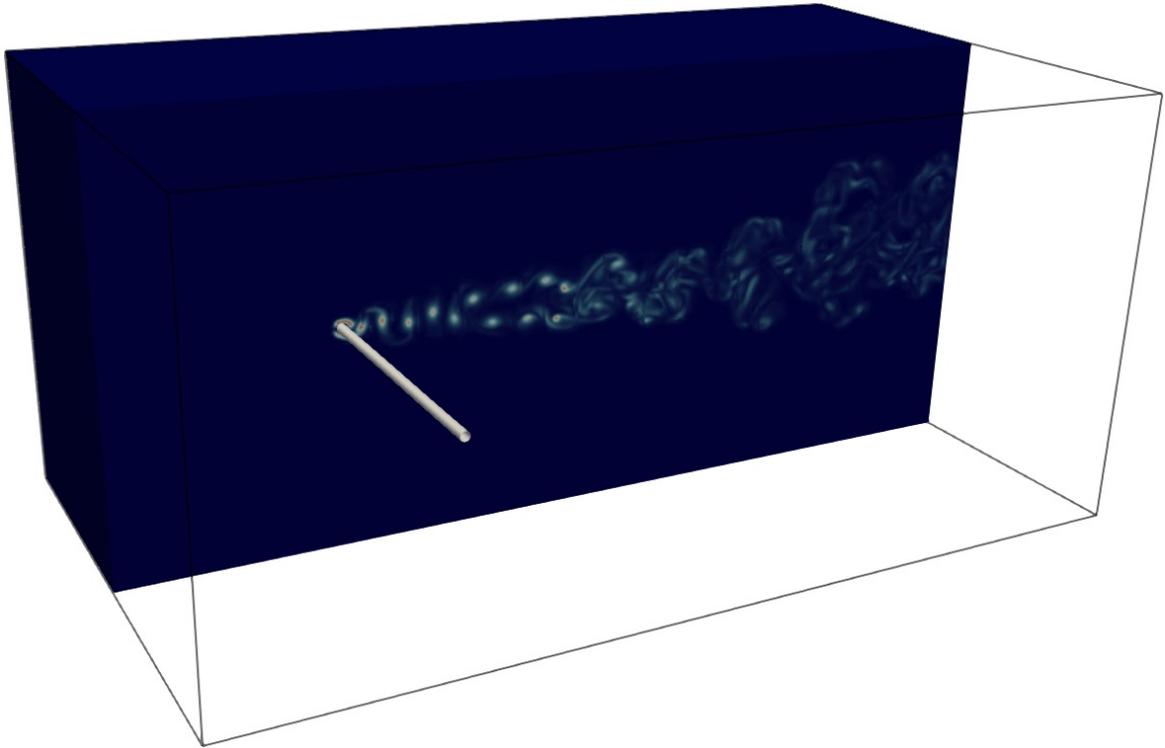
dinamicamente. Apresenta-se, na Figura 18, uma malha refinada devido a presença de uma fronteira imersa. Neste caso, os elementos volumétricos sofrem uma redução de ordens de grandeza para a captura de informações geométricas do sólido. Com o desenvolvimento do escoamento, novas regiões de interesse são estabelecidas e a definição inicial do refinamento torna-se insuficiente para a modelagem. Faz-se necessária, portanto, a implementação de um refinamento dinâmico. Para tanto, uma série de critérios são definidos e calculados com dada frequência. Condições preestabelecidas delimitam a marcação de novas regiões de interesse, que são então agrupadas de forma a minimizar interfaces entre níveis (BERGER; RIGOUTSOS, 1991).

A confecção da nova malha requer a transposição da solução associada à configuração anterior, que se dá através de interpolações sucessivas a partir do nível base. Apresenta-se na Figura 20 uma malha refinada localmente devido a presença de gradientes relevantes de vorticidade, exemplificando o caráter adaptativo e dinâmico do processo de remalhagem. Descrições mais detalhadas do processo de remalhagem e de transferência de informações entre os níveis podem ser encontradas nos trabalhos de Villar (2007) e Melo (2017).

5.1.2 Discretização das equações de balanço

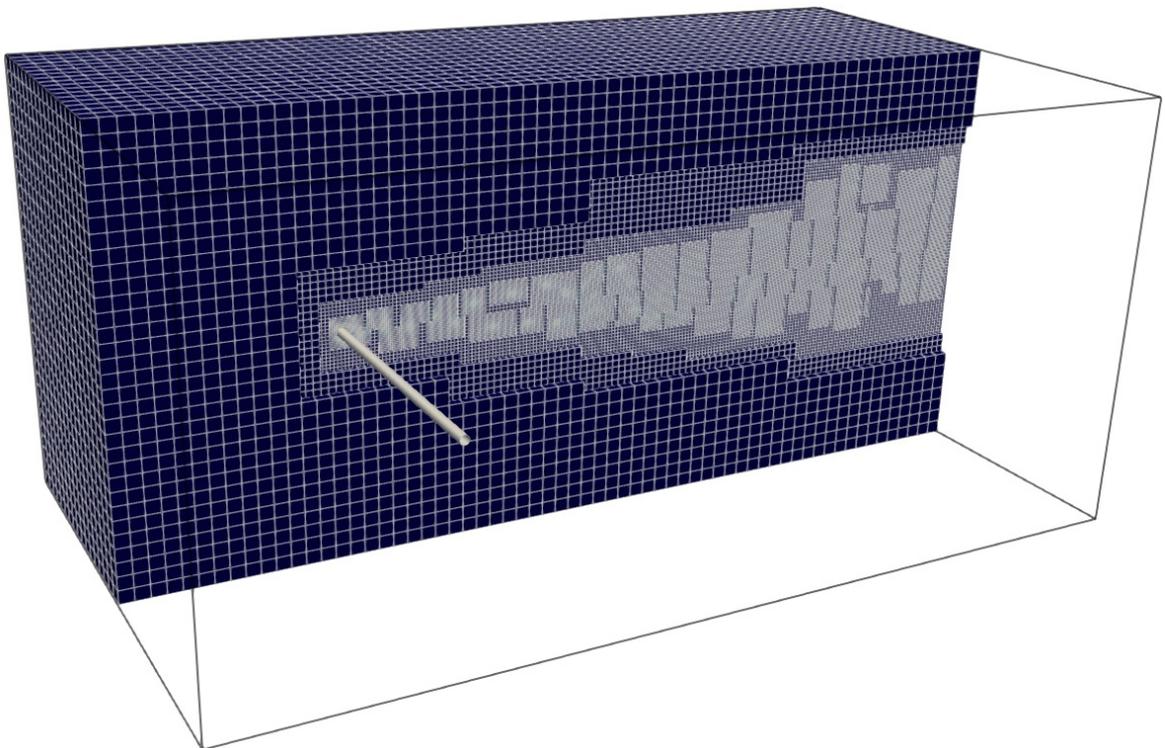
Para a modelagem da dinâmica dos fluidos, empregam-se as equações diferenciais da quantidade de movimento linear e da continuidade. Tais equações, entretanto, são

Figura 19 – Vista em corte do campo de vorticidade para o escoamento sobre um cilindro deformável.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 20 – Malha refinada dinamicamente em resposta ao campo de vorticidade.



Fonte: Elaborada pelo autor.

reservadas à domínios contínuos. A fim de empregá-las ao domínio discreto, definido na última seção, se faz necessário o processo de discretização das equações diferenciais parciais com relação aos domínios espacial e temporal.

No presente trabalho, a discretização é realizada por meio do Método dos Volumes Finitos, de forma a avaliar o fluxo de informações por um elemento volumétrico discreto. Ressalta-se que as malhas associadas à campos escalares, como os de pressão e temperatura, são deslocadas daquelas associadas à campos vetoriais, como o de velocidade (HARLOW; WELCH, 1965). Assim, convenientemente, as componentes de velocidade podem ser posicionadas coincidentes às fronteiras ortogonais e às aproximações dos gradientes escalares.

5.1.2.1 Equação diferencial da quantidade de movimento linear

A equação diferencial da quantidade de movimento linear para escoamentos incompressíveis é apresentada em sua forma vetorial na Equação (4.21). É possível reescrevê-la na sua forma indicial, como indicado a seguir:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial (V_i V_j)}{\partial x_j} + \frac{f_i}{\rho}. \quad (5.2)$$

Aplicando o Método dos Volumes finitos à Equação (5.2), obtém-se:

$$\int_{\vartheta_f} \frac{\partial V_i}{\partial t} d\vartheta = \int_{\vartheta_f} g_i d\vartheta - \frac{1}{\rho} \int_{\vartheta_f} \frac{\partial p}{\partial x_i} d\vartheta + \underbrace{\nu \int_{\vartheta_f} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) d\vartheta}_{\text{termo difusivo}} - \underbrace{\int_{\vartheta_f} \frac{\partial (V_i V_j)}{\partial x_j} d\vartheta}_{\text{termo advectivo}} + \frac{1}{\rho} \int_{\vartheta_f} f_i d\vartheta. \quad (5.3)$$

O primeiro termo à direita na Equação (5.3), referente ao campo gravitacional, é desenvolvido como segue:

$$\int_{\vartheta_f} g_i d\vartheta = g_i \cdot \prod_{n=1}^{n=3} \Delta x_n. \quad (5.4)$$

O termo referente ao gradiente de pressão, descrito por uma derivada parcial de primeira ordem, pode ser desenvolvido de forma análoga:

$$\int_{\vartheta_f} \frac{\partial p}{\partial x_i} d\vartheta = \frac{p|_{x_i-1}}{\Delta x_i} \cdot \prod_{n=1}^{n=3} \Delta x_n = \left[\frac{p_{x_i} - p_{x_i-1}}{\Delta x_i} \right] \cdot \prod_{n=1}^{n=3} \Delta x_n. \quad (5.5)$$

Para o termo difusivo, descrito por integrais de segunda ordem, segue:

$$\int_{\vartheta_f} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) d\vartheta = \frac{1}{\Delta x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \Big|_{x_j-1}^{x_j+1} \cdot \prod_{n=1}^{n=3} \Delta x_n, \quad (5.6)$$

onde os termos de primeira ordem podem ser reescritos da seguinte forma:

$$\left. \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right|_{x_{j-1}}^{x_j} = \frac{V_i|_{x_j}^{x_j} - V_i|_{x_{j-1}}^{x_j}}{\Delta x_j} = \frac{V_i|_{x_j}^{x_j}}{\Delta x_j}, \quad (5.7)$$

$$\left. \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right|_{x_j}^{x_{j+1}} = \frac{V_i|_{x_j}^{x_{j+1}} - V_i|_{x_j}^{x_j}}{\Delta x_j} = \frac{V_i|_{x_j}^{x_{j+1}}}{\Delta x_j}. \quad (5.8)$$

Substituindo os termos de primeira ordem na Equação (5.6), obtém-se o termo difusivo discretizado pelo método *CDS* (*Central Difference Scheme*):

$$\int_{\vartheta_f} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) d\vartheta = \frac{1}{\Delta x_j} \left[\frac{V_i|_{x_j}^{x_{j+1}}}{\Delta x_j} - \frac{V_i|_{x_{j-1}}^{x_j}}{\Delta x_j} \right] \cdot \prod_{n=1}^{n=3} \Delta x_n. \quad (5.9)$$

Ainda, é possível reescrever a equação na sua forma expandida como indicado a seguir:

$$\int_{\vartheta_f} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) d\vartheta = \left[\frac{V_{i,x_{j+1}} - 2V_{i,x_j} + V_{i,x_{j-1}}}{\Delta x_j^2} \right] \cdot \prod_{n=1}^{n=3} \Delta x_n. \quad (5.10)$$

O termo advectivo, de caráter não-linear, pode ser desenvolvido da seguinte forma:

$$\int_{\vartheta_f} \frac{\partial(V_i V_j)}{\partial x_j} d\vartheta = \frac{1}{\Delta x_j} (V_i V_j)|_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \cdot \prod_{n=1}^{n=3} \Delta x_n. \quad (5.11)$$

Naturalmente, os termos resultantes podem ser reescritos da seguinte forma:

$$V_i|_{x_{j-1}} = \frac{V_{i,x_j} + V_{i,x_{j-1}}}{2}, \quad (5.12)$$

$$V_i|_{x_{j+1}} = \frac{V_{i,x_{j+1}} + V_{i,x_j}}{2}. \quad (5.13)$$

Substituindo os termos expandidos na Equação (5.11), obtém-se a discretização do termo advectivo:

$$\int_{\vartheta_f} \frac{\partial(V_i V_j)}{\partial x_j} d\vartheta = \left[\frac{V_{j,x_{j+1}} V_{i,x_{j+1}} - V_{j,x_{j-1}} V_{i,x_{j-1}}}{2\Delta x_j} \right] \cdot \prod_{n=1}^{n=3} \Delta x_n. \quad (5.14)$$

Observa-se que o termo V_i avaliado na direção de x_j , para os casos em que $i \neq j$, requer uma interpolação em função da definição da malha deslocada.

O último termo do lado direito da Equação (5.2), referente a forças externas, é desenvolvido como indicado a seguir:

$$\int_{\vartheta_f} f_i d\vartheta = f_i \cdot \prod_{n=1}^{n=3} dx_n = f_i \cdot \prod_{n=1}^{n=3} \Delta x_n. \quad (5.15)$$

A derivada local do campo de velocidade, apresentada à esquerda na Equação (5.3), é discretizada em um esquema implícito-explicito, como indicado a seguir:

$$\int_{\vartheta_f} \frac{\partial V_i}{\partial t} d\vartheta = \left[\frac{\alpha_2 V_i|^{t_{n+1}} + \alpha_1 V_i|^{t_n} + \alpha_0 V_i|^{t_{n-1}}}{\Delta t^{t_{n+1}}} \right] \cdot \prod_{n=1}^{n=3} \Delta x_n. \quad (5.16)$$

A substituição dos termos expandidos na Equação (5.3), considerando a metodologia implícita-explicita, resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\alpha_2 V_i |^{t_{n+1}} + \alpha_1 V_i |^{t_n} + \alpha_0 V_i |^{t_{n-1}}}{\Delta t^{t_{n+1}}} \right] &= [g_i]^{t_{n+1}} + \frac{1}{\rho} [f_i]^{t_{n+1}} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{p_{x_i} - p_{x_{i-1}}}{\Delta x_i} \right]^{t_{n+1}} + \\ &\beta_2 \nu \left[\frac{V_{i,x_{j+1}} - 2V_{i,x_j} + V_{i,x_{j-1}}}{\Delta x_j^2} \right]^{t_{n+1}} + \beta_1 \nu \left[\frac{V_{i,x_{j+1}} - 2V_{i,x_j} + V_{i,x_{j-1}}}{\Delta x_j^2} \right]^{t_n} + \\ &\beta_0 \nu \left[\frac{V_{i,x_{j+1}} - 2V_{i,x_j} + V_{i,x_{j-1}}}{\Delta x_j^2} \right]^{t_{n-1}} - \gamma_1 \left[\frac{V_{j,x_{j+1}} V_{i,x_{j+1}} - V_{j,x_{j-1}} V_{i,x_{j-1}}}{2\Delta x_j} \right]^{t_n} - \\ &\gamma_0 \left[\frac{V_{j,x_{j+1}} V_{i,x_{j+1}} - V_{j,x_{j-1}} V_{i,x_{j-1}}}{2\Delta x_j} \right]^{t_{n-1}}, \quad (5.17) \end{aligned}$$

onde as constantes α , β e γ são estabelecidas pelo esquema temporal, sendo possível a implementação de uma série de métodos como *Modified Crank-Nicolson Adams-Bashforth* (MCNAB), *Crank-Nicolson Adams-Bashforth* (CNAB), *Semi-Backward-Difference-Formula* (SBDF) e *Crank-Nicolson Leap-Frog*. No presente trabalho, emprega-se o esquema SBDF, segundo a Tabela (15).

Tabela 15 – Constantes para diferentes esquemas temporais pela metodologia implícita-explicita.

Constante	MCNAB	CNAB	SBDF	Euler	CNLF
α_2	1	1	1,5	1	0,5
α_1	-1	-1	-2	0	0
α_0	0	0	0,5	-1	-0,5
β_2	0,5625	0,5	1	1	0,5
β_1	0,3750	0,5	0	0	0
β_0	0,0625	0	0	0	0,5
γ_1	1,5	1,5	2	0	1
γ_0	-0,5	-0,5	-1	1	0

5.1.2.2 Método da Fronteira Imersa

Na última seção foi apresentado o processo de discretização da equação de balanço da quantidade de movimento linear. Nota-se, entretanto, que o termo fonte, associado à interação entre os subsistemas, permanece indefinido. No presente trabalho, a determinação deste termo, ou a imposição das condições de contorno associadas à interação entre os subdomínios, se dá pelo Método da Fronteira Imersa.

O modelo euleriano-lagrangeano admite ainda a movimentação relativa entre os subdomínios. Faz-se essencial, portanto, a utilização de um método de mapeamento e de imposição de condições de contorno para a transferência de informações da malha móvel lagrangeana para a malha fixa euleriana. Para tanto, emprega-se a metodologia apresentada no trabalho de Ribeiro-Neto et al. (2019).

Reescreve-se a equação de balanço da quantidade de movimento linear para domínios discretos, apresentada na Equação (5.17), da seguinte forma:

$$\left[\frac{\alpha_2 V_i |^{t_{n+1}} + \alpha_1 V_i |^{t_n} + \alpha_0 V_i |^{t_{n-1}}}{\Delta t^{t_{n+1}}} \right] = RHS + \frac{1}{\rho} [f_i]^{t_{n+1}}, \quad (5.18)$$

onde o termo fonte é modelado no domínio contínuo como:

$$f_i(\vec{x}, t) = \int_{\vartheta_f} F_i(\vec{x}, t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s) d\vec{x}_s. \quad (5.19)$$

Na equação acima, \vec{x} representa o vetor posição da partícula de fluido, \vec{x}_s representa a posição do ponto lagrangiano e F_i representa a força exercida pelo fluido sobre a superfície sólida.

Assume-se uma solução válida para o campo de velocidade, dada por V^* , a partir da qual, é possível reescrever a Equação (5.18) para a superfície do sólido como indicado a seguir:

$$\left[\frac{\alpha_2 V_i^* |_{\vec{x}_s} + \alpha_1 V_i |_{\vec{x}_s}^{t_n} + \alpha_0 V_i |_{\vec{x}_s}^{t_{n-1}}}{\Delta t^{t_{n+1}}} \right] = RHS_{\vec{x}_s}. \quad (5.20)$$

Observa-se que a solução proposta apresenta inerentemente a resposta do fluido à interação entre os subsistemas.

Subtraindo a Equação (5.18), aplicada à superfície do sólido, da Equação (5.20), tem-se:

$$\left[\frac{\alpha_2 V_i^* |_{\vec{x}_s} - \alpha_2 V_i |_{\vec{x}_s}^{t_{n+1}}}{\Delta t^{t_{n+1}}} \right] = \frac{1}{\rho} [F_i]^{t_{n+1}}, \quad (5.21)$$

onde V^* pode ser modelado da seguinte forma:

$$V_i^*(\vec{x}_s, t) = \int_{\vartheta_f} V_i^*(\vec{x}, t) \delta(\vec{x}_s - \vec{x}) d\vartheta. \quad (5.22)$$

A integração das Equações (5.19) e (5.22) requer uma aproximação da função delta de Dirac por um núcleo de Dirac, dado por δ_h . No presente trabalho, utiliza-se a aproximação proposta por Roma, Peskin e Berger (1999):

$$\delta_h = \begin{cases} \frac{1}{6} \left(5 - 3|r| - \sqrt{-3(1 - |r|)^2 + 1} \right), & \forall 0,5 < r \leq 1,5 \\ \frac{1}{3} \left(1 + \sqrt{-3r^2 + 1} \right), & \forall 0 < r \leq 0,5 \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases} \quad (5.23)$$

Assim, é possível reescrever as Equações (5.19) e (5.22) da seguinte forma:

$$f_i = \sum_{\vec{x} \in S_s} F_i \delta_h(\vec{x} - \vec{x}_s) \Delta S_s, \quad (5.24)$$

$$V_i^* |_{\vec{x}_s} = \sum_{\vec{x} \in \vartheta_f} V_i^* \delta_h(\vec{x}_s - \vec{x}) \Delta \vartheta = \sum_{\vec{x} \in \vartheta_f} \left[V_i^* \delta_h(\vec{x}_s - \vec{x}) \prod_{n=1}^{n=3} \Delta x_n \right]. \quad (5.25)$$

O termo ΔS_s , associado à avaliação de um elemento volumétrico sólido, pode ser definido a partir de um elemento superficial através de uma espessura característica (UHL-MANN, 2005). Para malhas triangulares, como aquelas empregadas neste trabalho, pode-se empregar a fórmula de Heron para o cálculo da área A_s . Dessa forma, é possível reescrever a Equação (5.24) da seguinte forma:

$$f_i = \sum_{\vec{x} \in S_s} \left[F_i \delta_h(\vec{x} - \vec{x}_s) \left(\sum_{l=1}^{l=3} l \right) \frac{A_s}{3} \right]. \quad (5.26)$$

5.1.2.3 Acoplamento pressão-velocidade

A modelagem associada ao subsistema fluido requer ainda o acoplamento entre os campos de pressão e velocidade. No presente trabalho, este acoplamento se dá através do método do passo fracionado, ou método da projeção, proposto por Chorin (1967). Tal, fundamenta-se na definição de passos preditores, associados à solução do campo de velocidade pela Equação (5.17), e corretores, associados à solução do campo de pressão, pela metodologia numérica.

Na equação diferencial da quantidade de movimento linear, apresentada nas formas contínua e discreta pelas Equações (5.2) e (5.17), o termo referente ao gradiente de pressão pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} \Big|^{t_{n+1}} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \Big|^{t_n} + \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \quad (5.27)$$

onde p_0 representa o campo de correção para a pressão entre os tempos t_n e $t_n + 1$. A partir da definição do campo de correção, é possível reescrever a Equação (5.17) como indicado a seguir:

$$\left[\frac{\alpha_2 V_i |^{t_{n+1}} + \alpha_1 V_i |^{t_n} + \alpha_0 V_i |^{t_{n-1}}}{\Delta t^{t_{n+1}}} \right] \approx RHS - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \Big|^{t_n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x_i}. \quad (5.28)$$

Admite-se a solução do campo de velocidade pela metodologia numérica no passo preditor, dada por V^* :

$$\left[\frac{\alpha_2 V_i^* + \alpha_1 V_i |^{t_n} + \alpha_0 V_i |^{t_{n-1}}}{\Delta t^{t_{n+1}}} \right] \approx RHS - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \Big|^{t_n}. \quad (5.29)$$

Subtraindo a Equação (5.28) da Equação (5.29), tem-se:

$$\left[\frac{\alpha_2 V_i^* - \alpha_2 V_i |^{t_{n+1}}}{\Delta t^{t_{n+1}}} \right] \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x_i}. \quad (5.30)$$

É possível reescrever a equação da seguinte forma:

$$V_i^* - V_i |^{t_{n+1}} = \frac{\Delta t^{t_{n+1}}}{\rho \alpha_2} \frac{\partial p_0}{\partial x_i}. \quad (5.31)$$

Aplicando o divergente à Equação (5.31), obtém-se:

$$\left. \frac{\partial V_i^*}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right|^{t_n+1} = \frac{\Delta t^{t_n+1}}{\rho \alpha_2} \frac{\partial^2 p_0}{\partial x_i^2}. \quad (5.32)$$

Finalmente, emprega-se a equação da continuidade para escoamentos incompressíveis, apresentada na Equação (4.22), à velocidade no tempo $t_n + 1$:

$$\frac{\partial V_i^*}{\partial x_i} = \frac{\Delta t^{t_n+1}}{\rho \alpha_2} \frac{\partial^2 p_0}{\partial x_i^2}. \quad (5.33)$$

A equação acima pode ser reescrita para domínios discretos como indicado na Equação (5.34). Esta é usada para o cálculo da correção do campo de pressão entre os incrementos temporais. A solução de p_0 permite a atualização do campo de pressão de forma a garantir a conservação de massa, como indicado na Equação (5.35).

$$\left[\frac{p_0|_{x_{i+1}} - 2p_0|_{x_i} + p_0|_{x_{i-1}}}{\Delta x_i^2} \right] = \frac{\rho \alpha_2}{\Delta t^{t_n+1}} \left[\frac{V_i|_{x_i} - V_i|_{x_{i-1}}}{\Delta x_i} \right]^{t_n}. \quad (5.34)$$

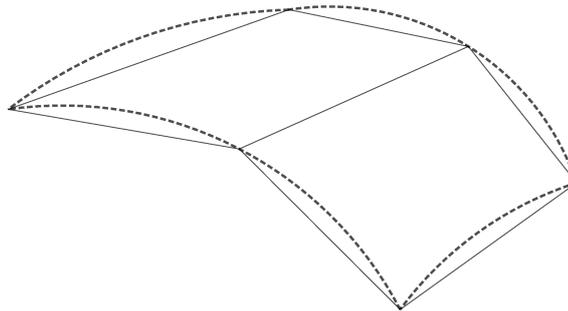
$$p|^{t_n+1} = p|^{t_n} + p_0. \quad (5.35)$$

5.2 Subdomínio estrutural

5.2.1 Malha numérica

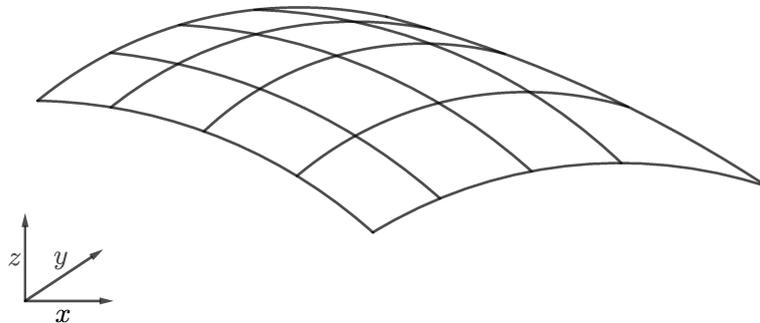
Os domínios numéricos associados à fase sólida, descritos no modelo físico, consistem de geometrias arbitrárias com espessuras moderadas. Tais geometrias são discretizadas em uma malha não estruturada. Ressalta-se que a malha fornecida ao modelo não contém informações de curvatura e, conseqüentemente, é equivalente a uma malha composta por elementos planos, empregada no modelo de Reissner-Mindlin. A malha curvilínea, efetivamente empregada no modelo matemático desenvolvido, é definida implicitamente no modelo de cascas curvilíneas a partir da malha composta por elementos planos. Em contraste à malha empregada na modelagem da dinâmica dos fluidos, a malha empregada na modelagem da dinâmica dos sólidos não é refinada dinamicamente.

Figura 21 – Comparação entre as malhas compostas por elementos planos, em linha contínua, e por elementos curvilíneos, em linha tracejada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 22 – Representação gráfica da malha numérico-computacional curvilínea.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A malha numérico-computacional para o subdomínio sólido pode ser descrita de acordo com a seguinte equação:

$$\mathcal{M} = \{(x_{m_1 m_2}, h_{m_2}, t_n), m_1 \in [1, 3], m_2 \in [1, n_p], n \in [0, t_f]\}. \quad (5.36)$$

onde o subíndices m_1 e m_2 relacionam-se às componentes espaciais e aos nós da malha estrutural, respectivamente. O subíndice n relaciona-se aos incrementos temporais. A variável h representa a informação de espessura.

Ainda, a malha não estruturada requer a definição dos elementos superficiais através de uma matriz de conectividade, apresentada na Equação (5.37), onde os subíndices i e j relacionam-se aos elementos e aos nós da malha computacional, respectivamente.

$$\mathbf{M}_{ij} = p. \quad (5.37)$$

5.2.2 Discretização das relações de deformação

A modelagem da dinâmica do subsistema sólido pela metodologia numérica requer a discretização das relações de deformação, apresentadas na seção 4.3.2. No presente trabalho, essa discretização é realizada por meio do Método dos Elementos Finitos, de forma que o sistema de equações que modela a dinâmica do sólido é obtido para o domínio discreto em forma matricial.

5.2.2.1 Sistema cartesiano local

Para cada elemento de placa da malha computacional, define-se um sistema cartesiano $\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p$. No presente trabalho, propõe-se que este sistema seja estabelecido a partir de uma componente normal e de uma componente contida no elemento plano:

$$\vec{x}_{pi} = \frac{\vec{x}_{2i} - \vec{x}_{1i}}{|\vec{x}_{2i} - \vec{x}_{1i}|}, \quad \forall i \in [0, n_e], \quad (5.38)$$

$$\vec{z}_{pi} = \frac{(\vec{x}_{3i} - \vec{x}_{1i}) \times (\vec{x}_{2i} - \vec{x}_{1i})}{|(\vec{x}_{3i} - \vec{x}_{1i}) \times (\vec{x}_{2i} - \vec{x}_{1i})|}, \quad \forall i \in [0, n_e]. \quad (5.39)$$

$$\vec{y}_{pi} = \vec{z}_{pi} \times \vec{x}_{pi}. \quad (5.40)$$

onde \vec{x}_1, \vec{x}_2 e \vec{x}_3 representam os vetores posição do primeiro, segundo e terceiro nós do elemento i . O limite superior do intervalo, representado por n_e , corresponde ao número de linhas da matriz de conectividade, apresentada na Equação (5.37), ou ao número de elementos da malha numérico-computacional.

O sistema cartesiano local, composto pelos vetores \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 , é inicialmente definido para cada nó da malha computacional. No presente trabalho, a definição desse sistema cartesiano nodal se dá através da interpolação dos vetores normais e tangentes de acordo

com a definição da malha numérico-computacional, como indicado nas Equações (5.41), (5.42) e (5.43).

$$\vec{v}_{3i} = \frac{\sum_{j=1}^{n=4} \vec{z}_{pj}}{\left| \sum_{j=1}^{n=4} \vec{z}_{pj} \right|}, \quad (5.41)$$

$$\vec{v}_{1i} = \frac{\sum_{j=1}^{n=4} \vec{x}_{pj}}{\left| \sum_{j=1}^{n=4} \vec{x}_{pj} \right|}, \quad (5.42)$$

$$\vec{v}_{2i} = \vec{v}_{3i} \times \vec{v}_{1i}. \quad (5.43)$$

A malha curvilínea, definida a partir da interpolação do sistema cartesiano local, permite a captura precisa de distorções geométricas mesmo para cascas planas.

5.2.2.2 Funções de forma

Define-se funções polinomiais com as quais torna-se possível a interpolação de informações de campo a partir dos valores nodais. Tais funções, denominadas de funções de forma, possibilitam a descrição dos deslocamentos e das informações geométricas em uma base local, contínua e regular, propriedades particularmente convenientes à operações de integração pelo método numérico. No presente trabalho, emprega-se um sistema isoparamétrico bilinear, apresentado à seguir:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad (5.44)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \quad (5.45)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad (5.46)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta), \quad (5.47)$$

onde ξ e η são as componentes isoparamétricas do sistema de coordenadas curvilíneo elementar, definidas no intervalo $[-1, 1]$.

A definição do sistema cartesiano local elementar pode então ser obtida através das seguintes equações:

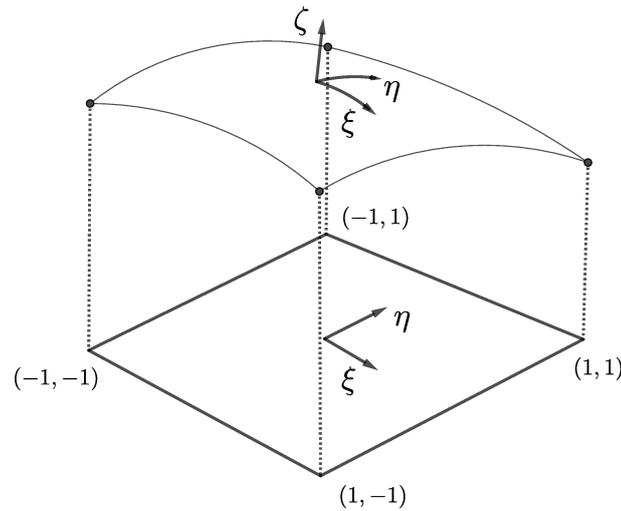
$$\vec{v}_1(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n=4} N_i \cdot \vec{v}_{1i}, \quad (5.48)$$

$$\vec{v}_2(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n=4} N_i \cdot \vec{v}_{2i}, \quad (5.49)$$

$$\vec{v}_3(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n=4} N_i \cdot \vec{v}_{3i}, \quad (5.50)$$

onde o subíndice i , contido no intervalo $[1, 4]$, relaciona-se aos nós que compõem o elemento da malha numérico-computacional.

Figura 23 – Base local estabelecida pelo sistema isoparamétrico bilinear.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2.2.3 Definição geométrica

De forma análoga àquela apresentada para os sistemas cartesianos locais, obtém-se a descrição geométrica contínua para um dado elemento sólido através da interpolação isoparamétrica aplicada às coordenadas e ao sistema cartesiano nodal:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n=4} N_i(\xi, \eta) [\vec{x}_i + \bar{z}_i \vec{v}_{3i}], \quad (5.51)$$

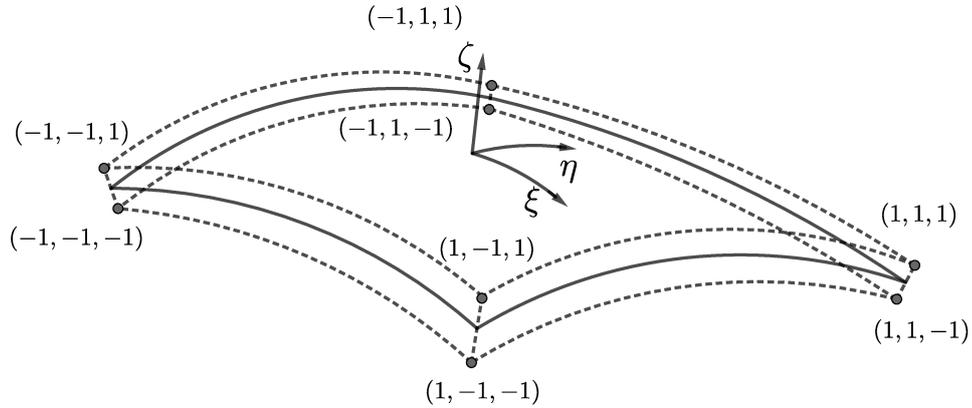
onde \vec{x} representa o vetor posição para a superfície de referência e \bar{z} representa a espessura do sólido, que pode ser definida da seguinte forma:

$$\bar{z}_i = (\zeta - \zeta_0) \frac{h_i}{2}, \quad (5.52)$$

5.2.2.4 Campo de deslocamento

Os deslocamentos globais de uma casca tridimensional podem ser descritos em função dos deslocamentos da superfície de referência e da rotação do vetor normal, como

Figura 24 – Definição geométrica de um elemento sólido a partir de um elemento de superfície.



Fonte: Elaborada pelo autor.

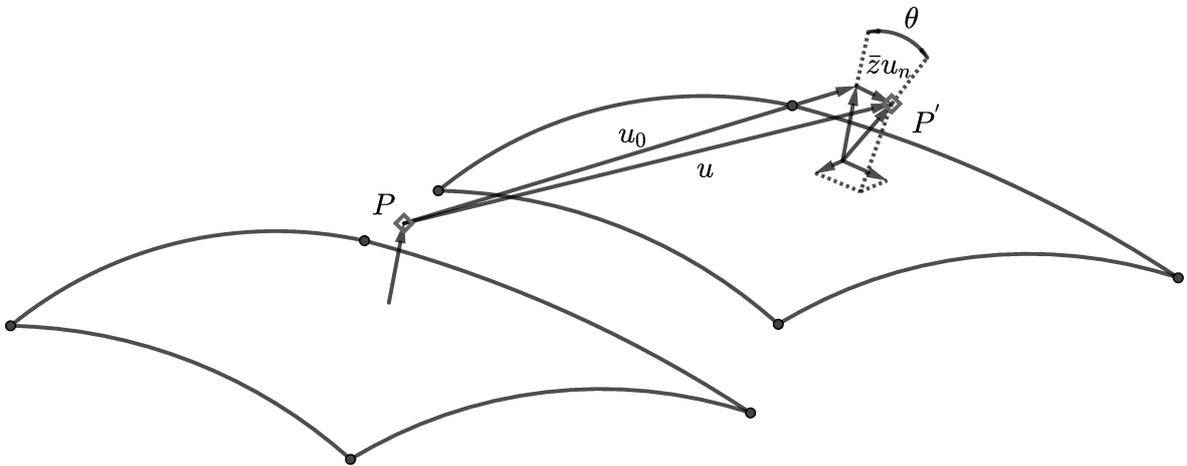
indicado a seguir:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \bar{z}\mathbf{u}_n. \quad (5.53)$$

Na Equação (5.53), \mathbf{u} representa o deslocamento total de um ponto genérico do sólido, \mathbf{u}_0 representa o deslocamento do ponto avaliado, projetado sobre a superfície de referência:

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^T, \quad \mathbf{u}_0 = [u_0, v_0, w_0]^T. \quad (5.54)$$

Figura 25 – Vetores de deslocamento para um ponto genérico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A parcela do deslocamento relacionada à rotação do vetor normal, dada por \mathbf{u}_n , pode ser estimada matematicamente de acordo com a Eq.(5.55). Nesta equação, os ângulos θ_1 e θ_2 correspondem às rotações em relação às direções \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , definidas sobre a projeção do ponto avaliado.

$$\mathbf{u}_n = -\theta_1\vec{v}_1 - \theta_2\vec{v}_2. \quad (5.55)$$

Substituindo a Equação (5.55) na Equação (5.53), obtém-se o deslocamento de um ponto arbitrário P , pertencente ao sólido, em função dos deslocamentos da superfície de

referência e da rotação do vetor normal à superfície, como indicado na Figura 25. A solução da deformação por todo o elemento pode ser obtida através da interpolação isoparamétrica para as deformações e rotações nodais, como indicado a seguir:

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^T = \sum_{i=1}^{n=4} N_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n=4} N_i \left[\mathbf{u}_{0i} - \bar{z}_i [v_{1i}, v_{2i}] [\theta_1, \theta_2]^T \right]. \quad (5.56)$$

É possível reescrever a Equação (5.56) de forma matricial, como indicado a seguir:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n=4} N_i \mathbf{a}_i^{(e)}, \quad (5.57)$$

onde $\mathbf{a}_i^{(e)}$ representa o vetor de deslocamento:

$$\mathbf{a}_i^e = [u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \theta_{1i}, \theta_{2i}]^T. \quad (5.58)$$

A matriz \mathbf{N}_i é definida como indicado a seguir:

$$\mathbf{N}_i = [\mathbf{I}_3, -\bar{z}_i \mathbf{C}_i], \quad (5.59)$$

onde \mathbf{I}_3 representa uma matriz identidade de dimensão 3 e a matriz \mathbf{C}_i contém as componentes cartesianas locais \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .

$$\mathbf{C}_i = [\vec{v}_1, \vec{v}_2]. \quad (5.60)$$

5.2.2.5 Relações de deformação

O vetor de deslocamentos para o sistema local, segundo a hipótese de um estado plano de tensões, é apresentado a seguir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \dots \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \dots \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}'_s \\ \dots \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_c \end{bmatrix}, \quad (5.61)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}'_s$ e $\boldsymbol{\varepsilon}'_c$ representam os vetores de deformação na superfície e devido ao cisalhamento, respectivamente. No modelo de cascas curvilíneas, os efeitos fletivos e de membrana estão naturalmente acoplados.

As derivadas parciais no sistema local, apresentadas na Equação (5.61), podem ser descritas a partir das derivadas parciais no sistema global através de aplicações sucessivas

da regra da cadeia. Este procedimento, apresentado em detalhes no material de Onate (2012), resulta em uma matriz de transposição:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.62)$$

O vetor de deslocamentos global para a transposição é dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_x, \boldsymbol{\varepsilon}_y, \boldsymbol{\varepsilon}_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T, \quad (5.63)$$

e a matriz de transposição é dada por:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} (v_1^x)^2 & (v_1^y)^2 & (v_1^z)^2 & v_1^x v_1^y & v_1^x v_1^z & v_1^y v_1^z \\ (v_2^x)^2 & (v_2^y)^2 & (v_2^z)^2 & v_2^x v_2^y & v_2^x v_2^z & v_2^y v_2^z \\ 2v_1^x v_2^x & 2v_1^y v_2^y & 2v_1^z v_2^z & (v_1^x v_2^y + v_1^y v_2^x) & (v_1^x v_2^z + v_1^z v_2^x) & (v_1^y v_2^z + v_1^z v_2^y) \\ 2v_1^x v_3^x & 2v_1^y v_3^y & 2v_1^z v_3^z & (v_1^x v_3^y + v_1^y v_3^x) & (v_1^x v_3^z + v_1^z v_3^x) & (v_1^y v_3^z + v_1^z v_3^y) \\ 2v_2^x v_3^x & 2v_2^y v_3^y & 2v_2^z v_3^z & (v_2^x v_3^y + v_2^y v_3^x) & (v_2^x v_3^z + v_2^z v_3^x) & (v_2^y v_3^z + v_2^z v_3^y) \end{bmatrix}. \quad (5.64)$$

A determinação do vetor de deformação requer ainda a derivação dos termos no sistema cartesiano local. O conjunto de derivadas parciais dos deslocamentos globais no sistema curvilíneo local podem ser obtidas, a partir das derivadas no sistema cartesiano global, através da matriz Jacobiana:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}^{(e)}]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix}, \quad (5.65)$$

de forma que $\mathbf{J}^{(e)}$ é dada por:

$$\mathbf{J}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (5.66)$$

Ressalta-se que as variáveis x , y e z , apresentadas na definição da matriz Jacobiana, são obtidas da Equação (5.51):

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi} \right]^T = \sum_{i=1}^{n=4} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} [x_{0i} \vec{e}_1 + \bar{z}_i v_{3i} \vec{e}_3], \quad (5.67)$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \eta} = \left[\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta} \right]^T = \sum_{i=1}^{n=4} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} [x_{0i} \vec{e}_1 + \bar{z}_i v_{3i} \vec{e}_3], \quad (5.68)$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \zeta} = \left[\frac{\partial x}{\partial \zeta}, \frac{\partial y}{\partial \zeta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right]^T = \sum_{i=1}^{n=4} N_i \frac{t_i}{2} v_{3i} \vec{e}_3. \quad (5.69)$$

As derivadas dos deslocamentos globais em relação ao sistema curvilíneo local ξ, η, ζ , são determinadas a partir da distribuição contínua elementar do campo de deslocamento, apresentada na Equação (5.57).

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \xi} \right]^T = \sum_{i=1}^{n=4} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} [\mathbf{I}_3 - z_i \mathbf{C}_i] \mathbf{a}_i^{(e)}, \quad (5.70)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} = \left[\frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial v}{\partial \eta}, \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T = \sum_{i=1}^{n=4} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} [\mathbf{I}_3 - z_i \mathbf{C}_i] \mathbf{a}_i^{(e)}, \quad (5.71)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} = \left[\frac{\partial u}{\partial \zeta}, \frac{\partial v}{\partial \zeta}, \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right]^T = \sum_{i=1}^{n=4} N_i \left[\mathbf{0}, -\frac{t_i}{2} \mathbf{C}_i \right] \mathbf{a}_i^{(e)}. \quad (5.72)$$

Das equações (5.67), (5.68), (5.69), (5.70), (5.71) e (5.72) é possível determinar as derivadas do vetor de deslocamentos em relação ao sistema global cartesiano, dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n=4} [N_i^j \mathbf{I}_3, \mathbf{G}_i^j] \mathbf{a}_i^{(e)}, \quad (5.73)$$

onde

$$N_i^j = J_{j1}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{j2}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \quad (5.74)$$

e

$$\mathbf{G}_i^j = - \left(\frac{t_i}{2} J_{j3}^{-1} N_i + \bar{z}_i N_i^j \right) \mathbf{C}_i. \quad (5.75)$$

As relações apresentadas acima podem ser rearranjadas de forma que as deformações sejam descritas, em função do vetor $\mathbf{a}^{(e)}$, através de uma matriz de relações de deformação \mathbf{B}_i , como indicado a seguir:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n=4} \mathbf{B}_i \mathbf{a}_i^{(e)}, \quad (5.76)$$

onde a matriz \mathbf{B}_i é definida segundo a Equação (5.77). A matriz das relações de deformação local \mathbf{B}' , apresentada na Equação (5.78), pode ser dividida em duas parcelas, que representam as relações associadas às deformações na superfície de referência (\mathbf{B}_s) e às deformações devido o cisalhamento na seção ortogonal à superfície (\mathbf{B}_c), como indicado nas Equações (5.79) e (5.80). Essa separação é conveniente à integração numérica de diferentes ordens para os termos associados a efeitos de superfície e de cisalhamento.

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_i^1 & 0 & 0 & (\mathbf{G}_i^1)_{11} & (\mathbf{G}_i^1)_{12} \\ 0 & N_i^2 & 0 & (\mathbf{G}_i^2)_{21} & (\mathbf{G}_i^2)_{22} \\ 0 & 0 & N_i^3 & (\mathbf{G}_i^3)_{31} & (\mathbf{G}_i^3)_{32} \\ N_i^2 & N_i^1 & 0 & [(\mathbf{G}_i^2)_{11} + (\mathbf{G}_i^1)_{21}] & [(\mathbf{G}_i^2)_{12} + (\mathbf{G}_i^1)_{22}] \\ N_i^3 & 0 & N_i^1 & [(\mathbf{G}_i^3)_{11} + (\mathbf{G}_i^1)_{31}] & [(\mathbf{G}_i^3)_{12} + (\mathbf{G}_i^1)_{22}] \\ 0 & N_i^3 & N_i^2 & [(\mathbf{G}_i^3)_{21} + (\mathbf{G}_i^2)_{31}] & [(\mathbf{G}_i^3)_{22} + (\mathbf{G}_i^2)_{32}] \end{bmatrix}. \quad (5.77)$$

$$\mathbf{B}'_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}'_{s_i} \\ \mathbf{B}'_{c_i} \end{bmatrix}, \quad (5.78)$$

$$\mathbf{B}'_{s_i} = \mathbf{Q}_{[0,3]x6} \times \mathbf{B}_i, \quad (5.79)$$

$$\mathbf{B}'_{c_i} = \mathbf{Q}_{[4,5]x6} \times \mathbf{B}_i. \quad (5.80)$$

5.2.2.6 Relações constitutivas

A modelagem da dinâmica de estruturas sólidas requer ainda a definição das matrizes de rigidez à flexão na superfície e devido o cisalhamento, representadas por \mathbf{D}_s e \mathbf{D}_c , respectivamente:

$$\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)E}{2(1-\nu^2)} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.81)$$

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}. \quad (5.82)$$

A matriz de rigidez elementar é determinada, a partir das matrizes de relações de deformação e das matrizes de rigidez à flexão, através de integrações seletivas pela metodologia numérica. No presente trabalho, as integrais são calculadas através da quadratura de Gauss-Legendre. Emprega-se na integração espacial das matrizes de rigidez, associadas às informações de superfície e de cisalhamento, as quadraturas de segunda e primeira ordem, respectivamente.

$$\mathbf{K}_s^{(e)} = \int_{\vartheta} \left(\mathbf{B}'_s{}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}'_s \right) d\vartheta, \quad (5.83)$$

$$\mathbf{K}_c^{(e)} = \int_{\vartheta} \left(\mathbf{B}'_c{}^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}'_c \right) d\vartheta, \quad (5.84)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_s^{(e)} + \mathbf{K}_c^{(e)}. \quad (5.85)$$

Reescrevendo as equações para o domínio discreto e utilizando a quadratura de Gauss-Legendre para a aproximação da integral espacial, obtém-se:

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \sum_{p=1}^{n=n_\xi} \sum_{q=1}^{n=n_\eta} \sum_{r=1}^{n=n_\zeta} \mathbf{I}_{ij}(\xi_p, \eta_q, \zeta_r) W_p W_q W_r, \quad (5.86)$$

$$\mathbf{I}_{ij} = \mathbf{B}_i'^T \mathbf{D}' \mathbf{B}_j'^T |J^{(e)}|, \quad (5.87)$$

onde ξ_p, η_q e ζ_r representam as coordenadas isoparamétricas para avaliação da função e as variáveis W_i representam os pesos para a integração pela quadratura. Ressalta-se que a matriz de transposição, empregada na definição da matriz das relações de deformação local, assim como todas as demais informações, deve ser calculada para o ponto avaliado, definido pelas coordenadas ξ_p, η_q e ζ_r , através da matriz jacobiana.

A matriz elementar de massa é obtida de forma semelhante pela definição da energia cinética para um domínio discreto. A sua integração é realizada através de uma quadratura de terceira ordem.

$$T_e = \frac{1}{2} \int_V \rho_i \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) dV, \quad (5.88)$$

$$T_e = \frac{1}{2} \int_V \rho_i [\dot{w}_e] [\mathbf{N}_i] [\mathbf{N}_i]^T [\dot{w}_e]^T dV, \quad (5.89)$$

$$T_e = \frac{1}{2} [\dot{w}_e] \left(\rho_i \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y} [\mathbf{N}_i] [\mathbf{N}_i]^T dx dy dz \right) [\dot{w}_e]^T, \quad (5.90)$$

$$\mathbf{M}^{(e)} = \left(\rho_i \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y} [\mathbf{N}_i] [\mathbf{N}_i]^T dx dy dz \right). \quad (5.91)$$

Reescrevendo a Equação (5.91) para o domínio discreto e utilizando a quadratura de Gauss-Legendre para a aproximação da integral espacial, obtém-se:

$$\mathbf{M}_{ij}^{(e)} = \rho_i \sum_{p=1}^{n=n_\xi} \sum_{q=1}^{n=n_\eta} \sum_{r=1}^{n=n_\zeta} \mathbf{N}_i(\xi_p, \eta_q, \zeta_r) \mathbf{N}_i^T(\xi_p, \eta_q, \zeta_r) W_p W_q W_r, \quad (5.92)$$

onde a matriz \mathbf{N}_i é apresentada na Equação (5.59).

5.2.2.7 Matrizes globais

A definição das matrizes elementares de rigidez e de massa possibilita a determinação das matrizes globais através de matrizes elementares de conectividade:

$$\mathbf{K}^{(g)} = \sum_{i=1}^{n=n_e} \mathbf{T}_i^T \mathbf{K}_i^{(e)} \mathbf{T}_i, \quad (5.93)$$

$$\mathbf{M}^{(g)} = \sum_{i=1}^{n=n_e} \mathbf{T}_i^T \mathbf{M}_i^{(e)} \mathbf{T}_i, \quad (5.94)$$

onde a matriz elementar \mathbf{T}_i é construída através da matriz de conectividade \mathbf{M}_{ij} , apresentada na Equação (5.37):

$$\mathbf{T}_i \text{ } n_{gle} \times n_{glg} = \mathbf{0}_{n_{gle} \times n_{glg}} + \sum_{i=1}^{n=n_e} \sum_{j=1}^{n=4} \mathbf{I}_{[1+(j-1) \cdot n_{glp}, j \cdot n_{glp}] \times [1+(M_{ij}-1) \cdot n_{glp}, M_{ij} \cdot n_{glp}]}. \quad (5.95)$$

Na Equação (5.95), n_{glp} representa o número de graus de liberdade para um nó da malha numérico-computacional, ou o número de elementos do vetor \mathbf{a}_i^e , apresentado na Equação (5.58), e n_{gle} representa o número de graus de liberdade para um elemento de casca.

Substituindo as Equações (5.93) e (5.94) na Equação (4.69), obtém-se a equação com a qual se modela a dinâmica de estruturas sólidas em um domínio discreto:

$$\int_{t_0}^{t_n} \left(\mathbf{M}^{(g)} \ddot{\mathbf{u}}^{(g)} + \mathbf{K}^{(g)} \mathbf{u}^{(g)} \right) dt = \int_{t_0}^{t_n} \mathbf{F}^{(g)} dt. \quad (5.96)$$

5.2.2.8 Transformação modal

A dinâmica de estruturas sólidas pode ser descrita pelo conjunto de seus modos de vibrar e frequências naturais, funções da geometria, das condições de contorno e das propriedades do sólido. Assim, admite-se que as possíveis configurações do sistema global, ou o conjunto de modos de movimento da estrutura, são fixos, enquanto as amplitudes associadas a cada modo, ou frequência, são variáveis (RAO, 2014). Tal hipótese permite a modelagem do sistema global através das seguintes equações:

$$u_i(t) = X_i T(t), \quad (5.97)$$

$$\dot{u}_i(t) = -\omega_i^2 X_i T(t), \quad (5.98)$$

onde X representa uma amplitude, T representa uma função do domínio temporal e w representa uma frequência. O subíndice i relaciona-se ao conjunto de nós da malha computacional.

Dessa forma, o integrando da Equação (5.96) pode ser reescrito segundo a Equação (5.97). A raiz da equação resultante estabelece um problema de autovetores e autovalores.

$$(\mathbf{K} - \{\omega^2\} \mathbf{M}) \mathbf{X} = 0. \quad (5.99)$$

Dada a solução de \mathbf{X} e ω , aplica-se, sobre a Equação (4.69), a seguinte transformação de coordenadas:

$$\mathbf{u} = \mathbf{X}^T \mathbf{u}, \quad (5.100)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{X}^T \ddot{\mathbf{u}}, \quad (5.101)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{X}^T \mathbf{F}, \quad (5.102)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X}, \quad (5.103)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X}. \quad (5.104)$$

A transformação modal permite a seleção de N modos de vibrar com $N \in [0, N_t]$, onde N_t representa o número total de modos não amortecidos. Admite-se que os modos são linearmente independentes e, conseqüentemente, modos associados a frequências comuns são complementares e ortogonais. Através da combinação dos modos e frequências selecionados, é possível descrever o movimento da estrutura no domínio modal para um sistema de N graus de liberdade.

A superposição modal é particularmente apropriada para a modelagem da dinâmica de estruturas lineares, isto é, estruturas nas quais os deslocamentos são diretamente proporcionais aos carregamentos aplicados. Tal metodologia, entretanto, não é apropriada para sistemas não lineares, associados à materiais não lineares, grandes deslocamentos e condições de contorno específicas.

Ressalta-se que o sistema de equações deve ser proporcional ao nível de detalhamento da solução no domínio modal. A filtragem das frequências, se corretamente conduzida, permite a redução do custo computacional sem grandes prejuízos à modelagem. Ainda, permite a redução ou mesmo a eliminação da propagação de incertezas numéricas entre os subsistemas.

5.2.3 Modelagem numérica transiente

A dinâmica do subsistema sólido, modelada de acordo com a Equação (5.96), requer ainda a integração temporal do sistema matricial definido nas últimas seções. No presente trabalho, essa integração no domínio temporal é realizada pelo método RKDP5(4), proposto por Dormand e Prince (1980) e fundamentado no método de Runge-Kutta.

Define-se o vetor de estados, apresentado na Equação (5.105), e sua derivada temporal, apresentada na Equação (5.106), que qualificam o espaço de estado do subsistema sólido.

$$\mathbf{u}_{st} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix}, \quad (5.105)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{st} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{bmatrix}. \quad (5.106)$$

Utilizando a definição do espaço de estado, reescreve-se a Equação (5.96) como indicado a seguir:

$$\dot{\mathbf{u}}_{st} = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}] \\ -[\mathbf{M}^{(e)}] & [\mathbf{K}^{(e)}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \times \mathbf{u}_{st} + \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{K}^{(e)}] & [\mathbf{F}^{(e)}] \end{bmatrix}, \quad (5.107)$$

onde $\mathbf{0}$ e \mathbf{I} representam matrizes zero e identidade, respectivamente, e $\mathbf{F}^{(e)}$ representa o vetor de forças e momentos elementar.

5.3 Acoplamento

A modelagem numérica para os subsistemas fluido e sólido foram apresentadas nas seções anteriores. Nesta seção, apresenta-se a modelagem da interação entre os subsistemas, isto é, do acoplamento das soluções. No presente trabalho, emprega-se a metodologia de acoplamento particionado de natureza forte, na qual as soluções desacopladas dos subsistemas são combinadas em um processo iterativo entre passos temporais.

A solução acoplada, obtida pelo método bloco-Gauss-Seidel não linear (MATTHIES; NIEKAMP; STEINDORF, 2006), é então utilizada na imposição de condições de contorno para os modelos desacoplados nos cálculos do próximo passo temporal. Neste sentido, faz-se necessária a definição de uma metodologia para a transferência de informações entre os subdomínios. Esta metodologia de transferência de informações é detalhada nas próximas seções.

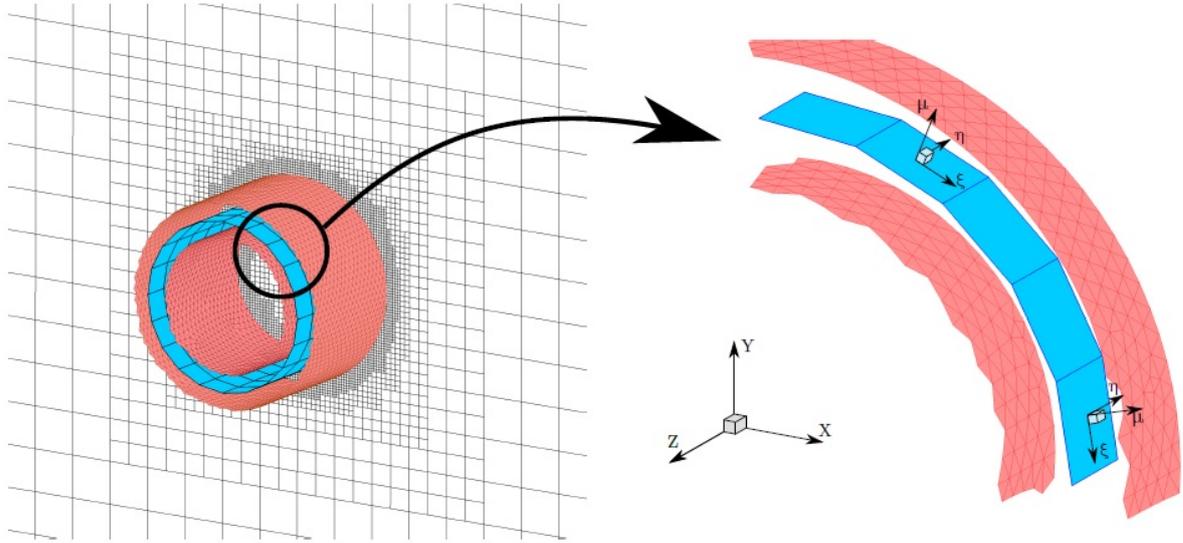
5.3.1 Comunicação entre malhas numéricas

No presente trabalho, a modelagem conjunta da dinâmica dos subsistemas fluido e estrutura sólida faz uso de três malhas numéricas distintas. A malha euleriana cartesiana fixa, utilizada na modelagem da dinâmica dos fluidos, a malha lagrangiana triangular, empregada na metodologia da Fronteira Imersa, e a malha lagrangeana composta por elementos quadriláteros irregulares, empregada no modelo estrutural.

A movimentação da fronteira imersa no modelo computacional desenvolvido requer o mapeamento dos pontos que compõem a superfície do sólido em relação aos elementos da malha lagrangeana estrutural. Para tanto, são definidas regiões de busca para cada elemento de casca. Esta região consiste de um hexaedro irregular que contém o elemento quadrilátero como plano intermediário e cuja altura é ligeiramente superior à espessura da superfície no ponto avaliado.

Uma vez mapeado, o conjunto de pontos da fronteira imersa contido no elemento curvilíneo sólido deve ser descrito no sistema curvilíneo local, através das Equação (5.51).

Figura 26 – Malhas numéricas.



Fonte: Souza (2020).

O sistema não linear, resultante do mapeamento inverso, é resolvido através do método de Newton-Raphson.

5.3.2 Transferência de informações entre subdomínios

Pelo Método da Fronteira Imersa, determina-se o campo vetorial de força resultante da interação do fluido com o sólido. Este campo, definido sobre os centróides da malha triangular, é diretamente imposto ao subsistema fluido. Em contrapartida, o carregamento fluidodinâmico, imposto ao subsistema sólido, deve ser determinado através de uma transposição de forças e momentos. Tal transposição se dá na base local, definida pelas coordenadas (ξ, η, ζ) , para os centróides da malha triangular com os valores obtidos no mapeamento.

A transposição das forças e momentos para a malha estrutural permite a solução desacoplada dos deslocamentos no passo de tempo. A solução dos campos de deslocamento e de velocidade deve ser então imposta à malha da fronteira imersa, através da Equação (5.56), como indicado a seguir:

$$\vec{x}_p^{tn} = \sum_{i=1}^{n=4} N_i \left[\mathbf{u}_{0i}^{tn} - \bar{z}_i [v_{1i}, v_{2i}] [\theta_1, \theta_2]^T \right], \quad (5.108)$$

$$\vec{V}_p^{tn} = \sum_{i=1}^{n=4} N_i \left[\dot{\mathbf{u}}_{0i}^{tn} - \bar{z}_i [v_{1i}, v_{2i}] [\theta_1, \theta_2]^T \right]. \quad (5.109)$$

6 Resultados

A abordagem particionada permite a validação independente para os subsistemas fluido e sólido. Neste sentido, as três primeiras seções são dedicadas à validação e análise de convergência do modelo estrutural para diferentes geometrias e condições de contorno. As duas seções subsequentes são dedicadas à validação do modelo de acoplamento, ou de transferência de informações entre os subsistemas fluido e sólido. Por fim, são apresentadas duas aplicações industriais.

6.1 Vibração de placas quadradas

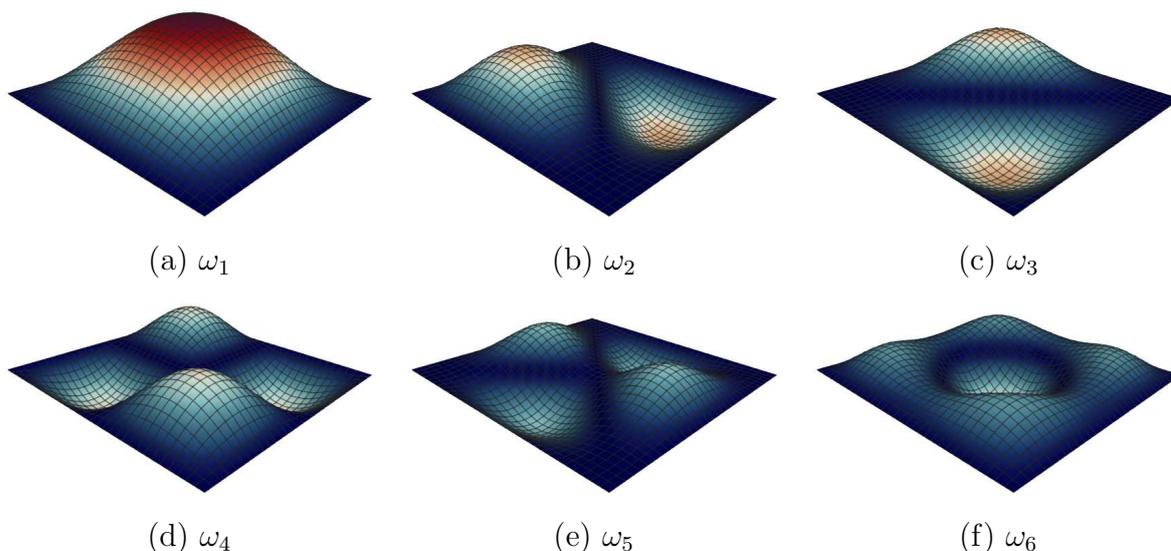
Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com o modelo desenvolvido para os modos e frequências de vibrar de placas quadradas submetidas a quatro condições de contorno distintas. As propriedades físicas e geométricas da placa são apresentadas na seção 3.5.1. Os resultados obtidos com o modelo de cascas curvilíneas são comparados com aqueles obtidos com o modelo de Reissner-Mindlin e com as soluções contínuas, apresentadas por Wang e Wang (2014).

Resultados semelhantes àqueles obtidos com o método contínuo indicam a correta formulação e construção das matrizes de rigidez e de massa para cascas planas e malhas regulares. Resultados coerentes indicam ainda a correta implementação da transformação modal e da solução do problema de autovalores. Uma análise de convergência é também conduzida a fim de avaliar como os erros numéricos associados aos modelos de cascas e de placas variam em função da malha.

6.1.1 Condição de apoio simples para todas as arestas

Os modos de vibrar de uma placa apoiada em todas as arestas, obtidos com uma malha regular de 32×32 elementos, são apresentados na Figura 27. As frequências naturais são apresentadas na Tabela 16. Observa-se que, para esta primeira configuração, as frequências obtidas são semelhantes àquelas da solução contínua, fato que indica a correta implementação do modelo numérico-computacional para o subdomínio estrutural.

Figura 27 – Modos de vibrar da placa quadrada apoiada em todas as arestas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

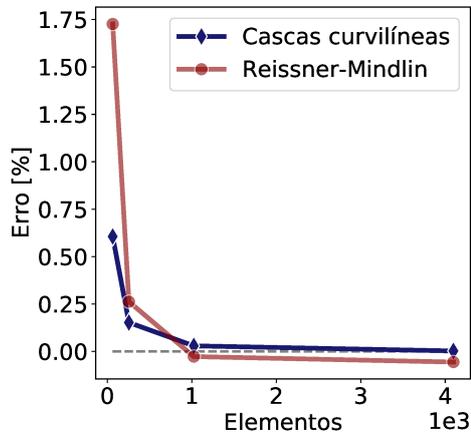
Tabela 16 – Frequências naturais da placa quadrada apoiada em todas as arestas.

Modo	4×4	8×8	16×16	32×32	64×64	Contínua	Erro %
1	4,91636	4,84317	4,82134	4,81541	4,81312	4,81400	0,01832
2	15,63787	12,78277	12,21362	12,07786	12,04318	12,03500	0,06793
3	15,63787	12,78277	12,21362	12,07786	12,04318	12,03500	0,06793
4	25,91165	20,65135	19,58954	19,33376	19,26796	19,25601	0,06207
5	51,57190	28,23584	25,00527	24,29685	24,12382	24,07001	0,22356
6	53,76585	28,23995	25,00552	24,29687	24,12383	24,07001	0,22360

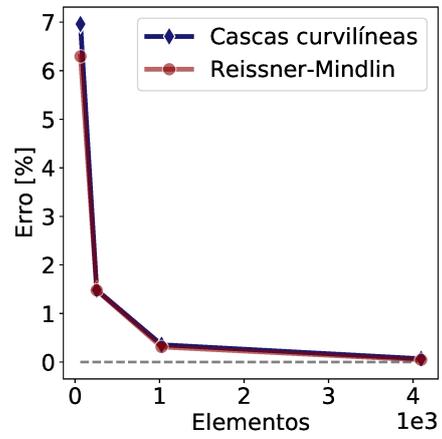
Como verificado no capítulo anterior, o processo de discretização introduz erros de natureza numérica que podem ser reduzidos, à custo da eficiência computacional, com o refinamento da malha. A análise de convergência permite a avaliação dessa redução. A análise de convergência para a placa quadrada apoiada em todas as arestas é apresentada na Figura 28, onde a linha tracejada, coincidente à reta $Erro = 0$, representa a solução contínua. Observa-se que, com ambos os modelos, de cascas curvilíneas e de placas, os erros são reduzidos gradativamente com o refinamento da malha. Ainda, os resultados obtidos para todas as frequências avaliadas aproximam-se assintoticamente àqueles da solução contínua.

Ressalta-se que o modelo de cascas curvilíneas deve apresentar resultados semelhantes àqueles do modelo de placas para superfícies planas, uma vez que a teoria de cascas por degeneração de elementos sólidos é uma generalização do modelo de Mindlin para superfícies curvas.

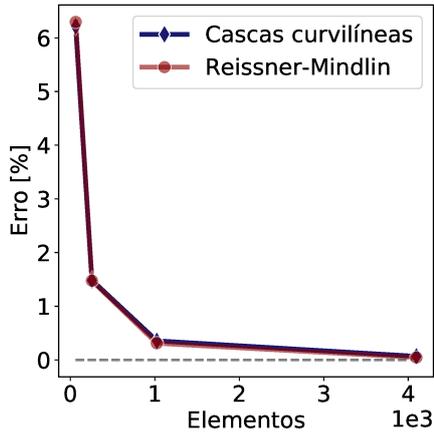
Figura 28 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa quadrada apoiada em todas as arestas.



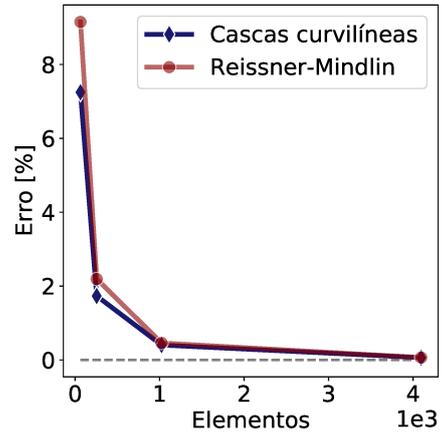
(a) ω_1



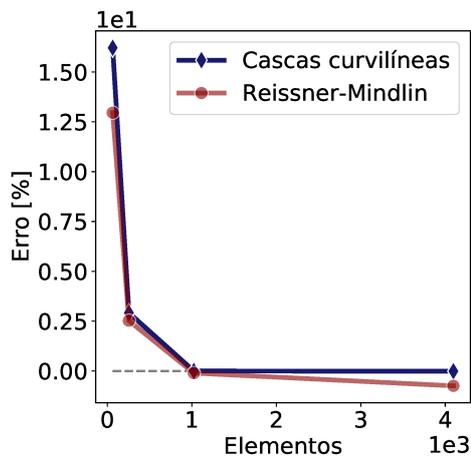
(b) ω_2



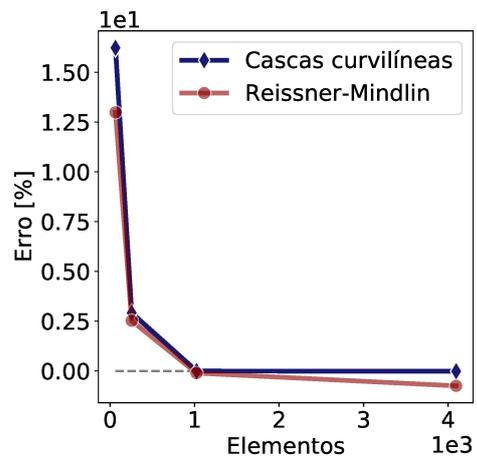
(c) ω_3



(d) ω_4



(e) ω_5



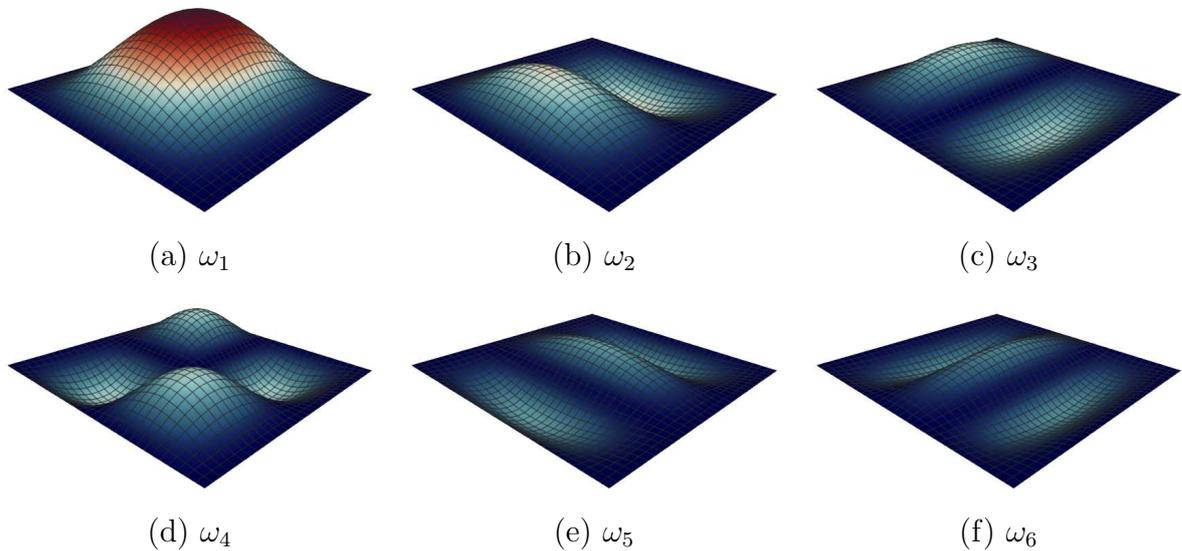
(f) ω_6

Fonte: Elaborada pelo autor.

6.1.2 Duas arestas engastadas e duas arestas apoiadas

Os modos de vibrar de uma placa quadrada engastada em duas arestas e apoiada nas demais, obtidos com uma malha regular de 32×32 elementos, são apresentados na Figura 29. As frequências naturais são apresentadas na Tabela 17. Observa-se que as frequências obtidas são semelhantes àsquelas da solução contínua, fato que indica a correta implementação do modelo numérico-computacional para condições de contorno arbitrárias. Observa-se, da análise de convergência, apresentada na Figura 30, que os resultados de ambos os modelos aproximam-se assintoticamente àsquelas da solução contínua com o refinamento da malha.

Figura 29 – Modos de vibrar da placa quadrada engastada em duas arestas opostas e apoiada nas demais.

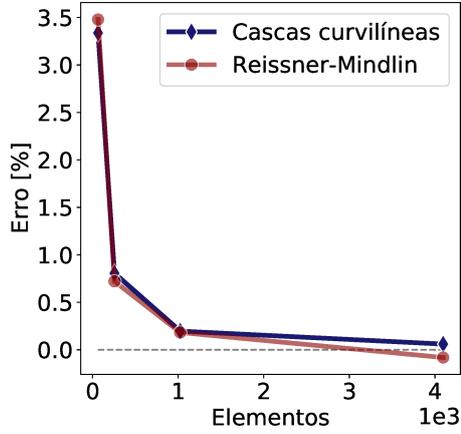


Fonte: Elaborada pelo autor.

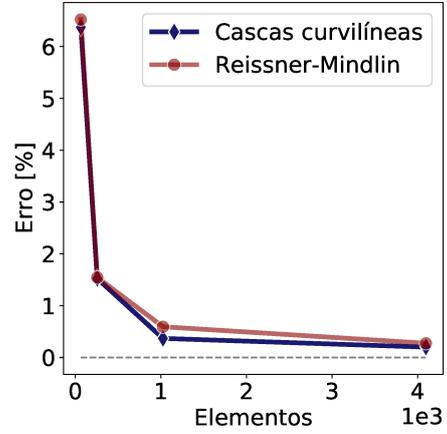
Tabela 17 – Frequências naturais da placa quadrada engastada em duas arestas opostas e apoiada nas demais.

Modo	4×4	8×8	16×16	32×32	64×64	Contínua	Erro %
1	8,15027	7,29623	7,11747	7,07443	7,06480	7,06058	0,05984
2	17,46107	14,20147	13,55419	13,39998	13,37750	13,35073	0,20049
3	31,26443	19,00924	17,38469	17,02360	16,93440	16,90748	0,15921
4	38,28787	25,49621	23,62871	23,20267	23,11010	23,06741	0,18508
5	54,61590	29,12062	25,87106	25,15750	24,96550	24,92846	0,14860
6	62,19407	39,29261	33,38338	31,93787	31,63787	31,48493	0,48575

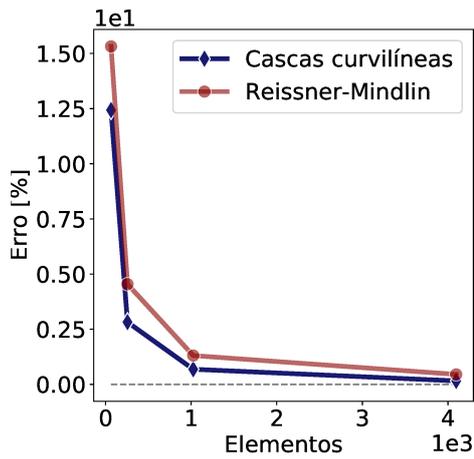
Figura 30 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa quadrada engastada em duas arestas opostas e apoiada nas demais.



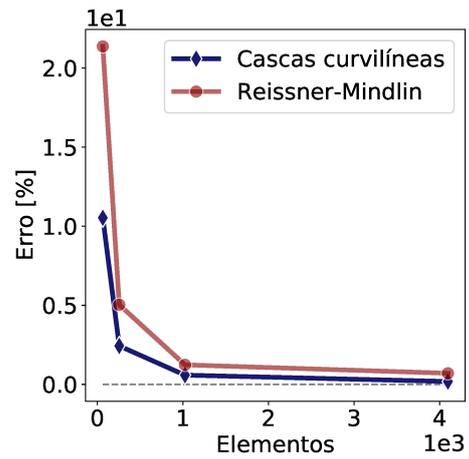
(a) ω_1



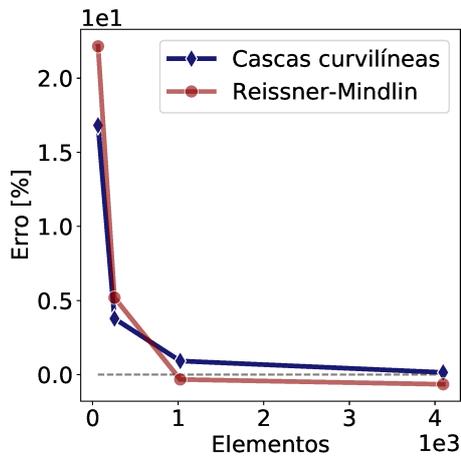
(b) ω_2



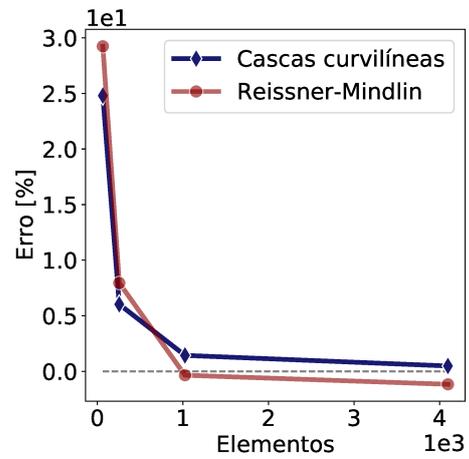
(c) ω_3



(d) ω_4



(e) ω_5



(f) ω_6

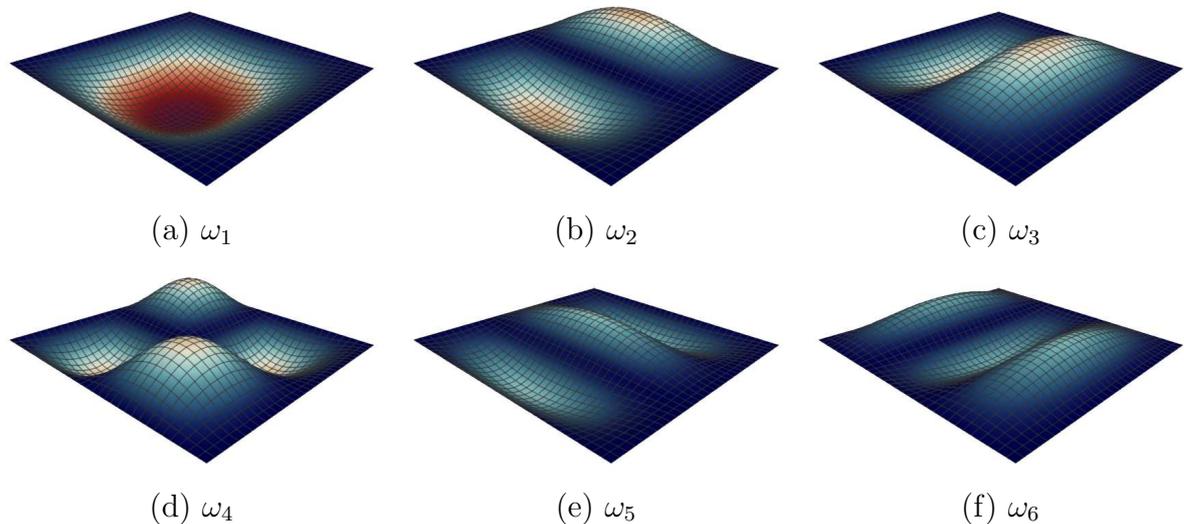
Fonte: Elaborada pelo autor.

Ainda que a hipótese do estado plano de tensões não seja particularmente apropriada para a condição de engaste, visto que tal condição está associada ao cisalhamento da seção ortogonal à superfície, observa-se que o modelo apresenta erros numéricos de pequena magnitude. Observa-se ainda que as condições de engaste restringem significativamente o deslocamento do elemento estrutural. A redução das amplitudes é refletida nos valores das frequências, que são superiores àqueles observados na primeira iteração do caso.

6.1.3 Uma aresta engastada e as demais apoiadas

Os modos de vibrar de uma placa quadrada engastada em uma aresta e apoiada nas demais, obtidos com uma malha regular de 32×32 elementos, são apresentados na Figura 31. As frequências naturais são apresentadas na Tabela 18. Observa-se que as frequências obtidas são, mais uma vez, semelhantes àquelas da solução contínua para a condição de contorno avaliada. Verifica-se, da análise de convergência, apresentada na Figura 32, que os resultados de ambos os modelos aproximam-se assintoticamente àquelas da solução contínua com o refinamento da malha.

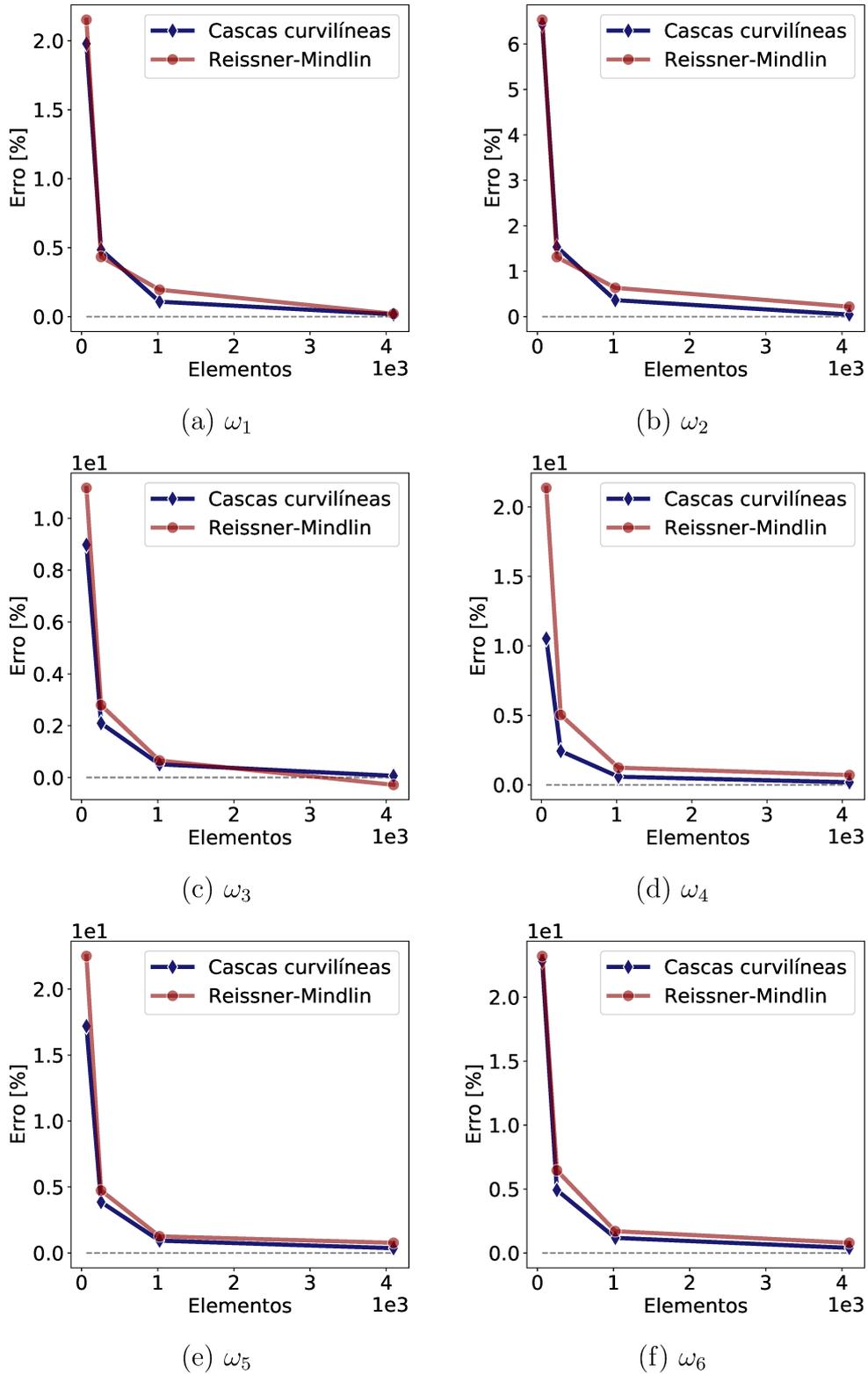
Figura 31 – Modos de vibrar da placa quadrada engastada em uma de suas arestas e apoiada nas demais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Novamente, observa-se que, mesmo com a condição de engaste, o modelo apresenta erros numéricos de pequena magnitude. A condição de engaste, estendida a apenas uma das arestas, restringe o deslocamento do elemento estrutural e introduz assimetrias aos modos de vibrar. A redução das amplitudes em apenas uma das arestas resulta em frequências ainda superiores àquelas obtidas para a condição de apoio simples, mas substancialmente inferiores àquelas obtidas na última seção.

Figura 32 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa quadrada engastada em uma de suas arestas e apoiada nas demais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

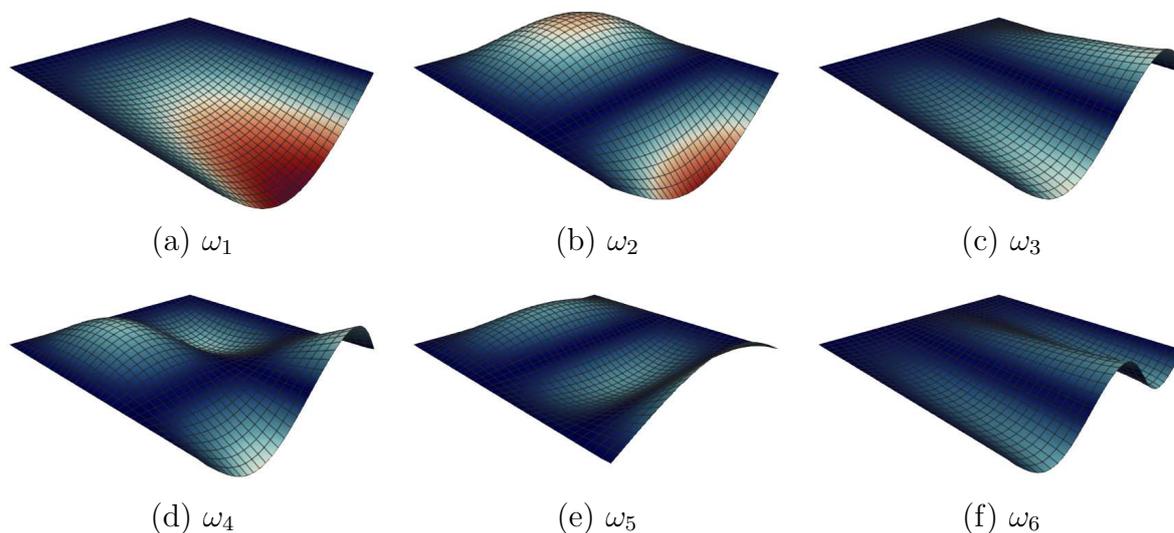
Tabela 18 – Frequências naturais da placa quadrada engastada em uma de suas arestas e apoiada nas demais.

Modo	4×4	8×8	16×16	32×32	64×64	Contínua	Erro %
1	6,24409	5,88091	5,79477	5,77307	5,76779	5,76679	0,01733
2	16,53299	13,41254	12,79561	12,64823	12,60823	12,60226	0,04734
3	21,43463	15,58690	14,60220	14,37518	14,31180	14,30260	0,06434
4	30,36232	22,80341	21,43034	21,10660	21,06800	21,00540	0,29802
5	54,35977	28,65720	25,39797	24,68230	24,54230	24,45313	0,36464
6	60,42217	33,91551	28,97379	27,94107	27,72480	27,61431	0,40012

6.1.4 Três arestas apoiadas e uma livre

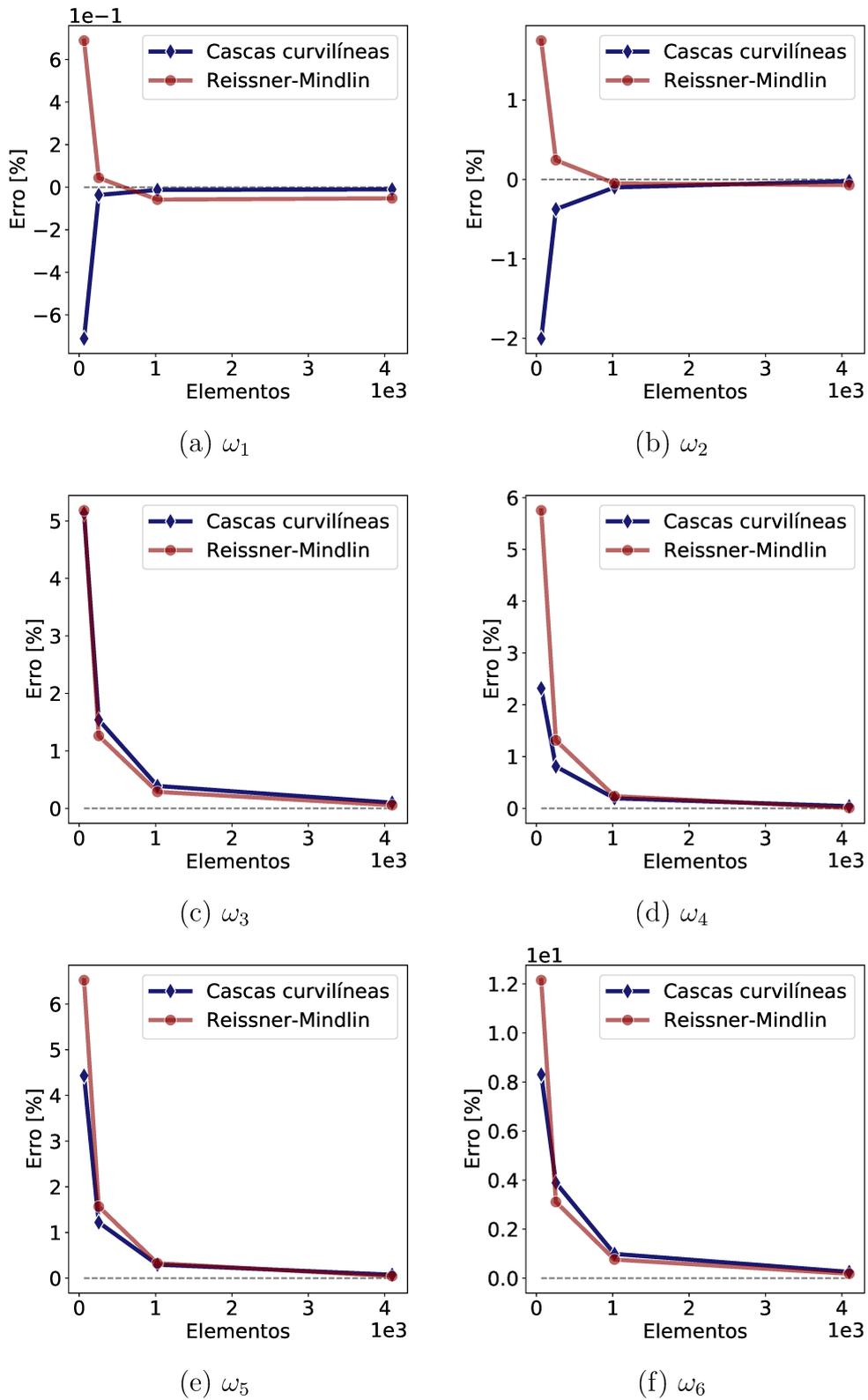
Os modos de vibrar de uma placa apoiada em três arestas, obtidos com uma malha regular de 32×32 elementos, são apresentados na Figura 33. As frequências naturais são apresentadas na Tabela 19. Observa-se que as frequências obtidas são, mais uma vez, semelhantes àquelas da solução contínua para a condição de contorno avaliada. Verifica-se, da análise de convergência, apresentada na Figura 34, que os resultados de ambos os modelos aproximam-se assintoticamente àquelas da solução contínua com o refinamento da malha.

Figura 33 – Modos de vibrar da placa quadrada apoiada em três arestas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 34 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa quadrada apoiada em três arestas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em contraste à configuração da última seção, na qual uma das arestas é engastada, admite-se, nesta seção, uma aresta livre. De forma semelhante, a condição singular introduz assimetrias aos modos de vibrar. A ausência de resistências adicionais em uma das fronteiras resulta no aumento dos deslocamentos do elemento estrutural e, consequentemente, na redução das frequências naturais. Naturalmente, as frequências obtidas para esta configuração são as menores dentre as condições avaliadas.

Tabela 19 – Frequências naturais da placa quadrada apoiada em três arestas.

Modo	4×4	8×8	16×16	32×32	64×64	Contínua	Erro %
1	2,54393	2,82947	2,84870	2,84938	2,84942	2,84974	0,00011
2	6,08434	6,63350	6,74380	6,76240	6,76235	6,76914	0,00100
3	9,12101	10,56262	10,20190	10,08637	10,07293	10,04713	0,00257
4	13,96455	14,73897	14,52173	14,43317	14,42121	14,40503	0,00112
5	16,18213	15,75544	15,27098	15,13150	15,11803	15,08667	0,00208
6	19,90414	23,84931	22,87747	22,23887	22,21729	22,02092	0,00892

6.2 Vibração de placas circulares com orifício

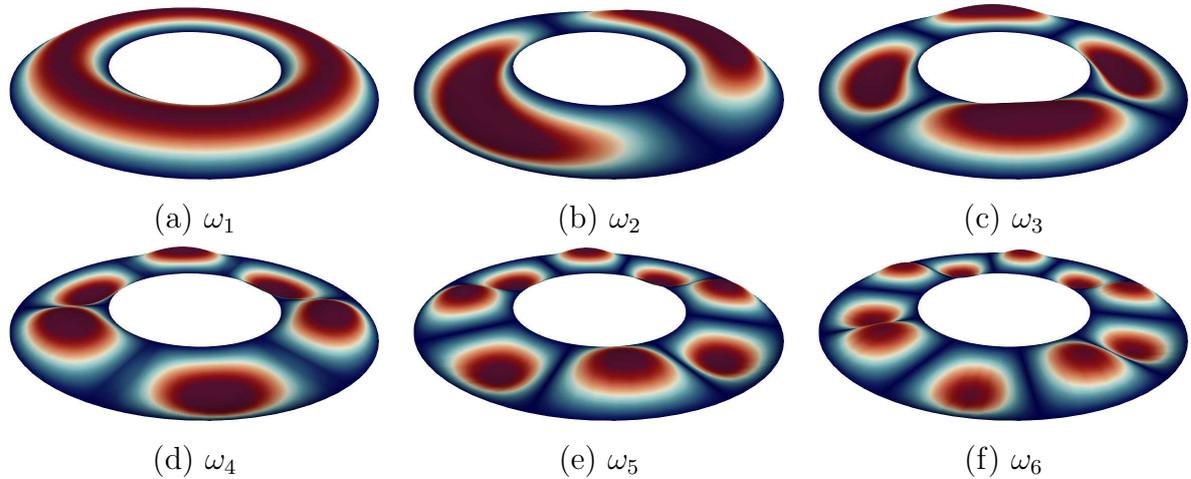
Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com o modelo desenvolvido para os modos e frequências de vibrar de placas circulares com orifício para quatro combinações de condições de contorno distintas. As propriedades físicas e geométricas das placas são apresentadas na seção 3.5.2. Os resultados obtidos com o modelo de cascas curvilíneas são comparados com aqueles obtidos com o modelo de Reissner-Mindlin e com as soluções contínuas, apresentadas por Wang e Wang (2014).

Resultados semelhantes àqueles obtidos com o método contínuo indicam a correta formulação e construção das matrizes de rigidez e de massa para cascas planas e malhas irregulares. Uma análise de convergência é também conduzida a fim de avaliar como os erros numéricos associados aos modelos de cascas e de placas variam em função da malha.

6.2.1 Apoio nas fronteiras interna e externa

Os modos de vibrar de uma placa circular com orifício apoiada nas fronteiras interna e externa, obtidos com uma malha irregular de 80×80 elementos, são apresentados na Figura 35. As frequências naturais são apresentadas na Tabela 20. Observa-se que, para esta primeira configuração, as frequências obtidas são semelhantes àquelas da solução contínua, fato que indica a correta implementação do modelo numérico-computacional para o subdomínio estrutural.

Figura 35 – Modos de vibrar da placa circular com orifício apoiada nas fronteiras interna e externa.



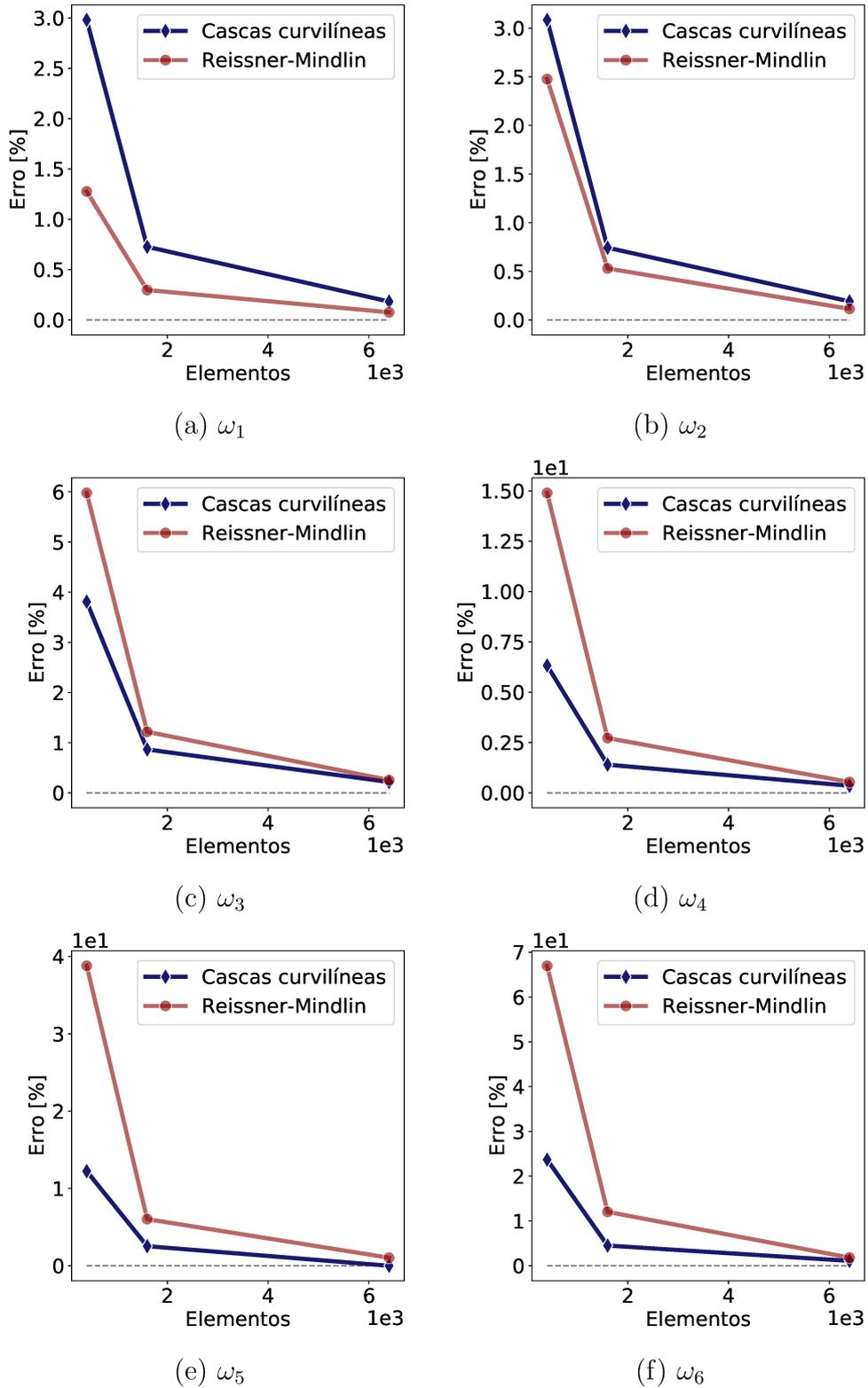
Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 20 – Frequências naturais da placa circular com orifício apoiada nas fronteiras interna e externa.

Modo	20 × 20	40 × 40	80 × 80	Contínua	Erro %
1	10,05680	9,83667	9,78353	9,76569	0,18264
2	10,50792	10,26920	10,21289	10,19346	0,19061
3	11,92166	11,58354	11,50890	11,48407	0,21618
4	14,51044	13,83805	13,69511	13,64680	0,35398
5	18,71663	17,09972	16,77527	16,67628	0,59358
6	25,41912	21,47601	20,77529	20,54861	1,10313

A malha curvilínea, definida a partir da interpolação do sistema cartesiano local, permite a captura precisa de distorções geométricas mesmo para cascas planas. Assim, mesmo que a teoria de cascas por degeneração de elementos sólidos seja equivalente à teoria de placas de Mindlin para cascas planas, o modelo desenvolvido deve convergir mais rapidamente para a solução contínua. Observa-se, da análise de convergência, apresentada na Figura 36, uma diferença considerável entre os modelos. Para ambos, os resultados obtidos aproximam-se assintoticamente àqueles da solução contínua com o refinamento da malha. O modelo de cascas curvilíneas, entretanto, apresenta uma convergência notavelmente mais rápida, principalmente para os modos associados às maiores frequências.

Figura 36 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa circular com orifício apoiada nas fronteiras interna e externa.

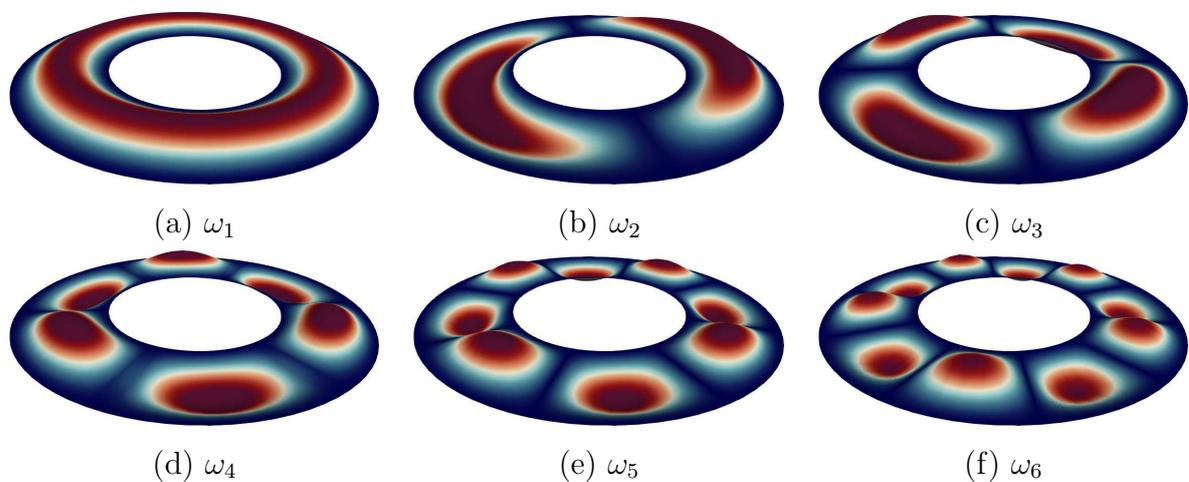


Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2.2 Engaste nas fronteiras interna e externa

Os modos de vibrar de uma placa circular com orifício engastada nas fronteiras interna e externa, obtidos com uma malha irregular de 80×80 elementos, são apresentados na Figura 37. As frequências naturais são apresentadas na Tabela 21. Observa-se que, para esta primeira configuração, as frequências obtidas são semelhantes àquelas da solução contínua, fato que indica a correta implementação do modelo numérico-computacional para o subdomínio estrutural.

Figura 37 – Modos de vibrar da placa circular com orifício engastada nas fronteiras interna e externa.



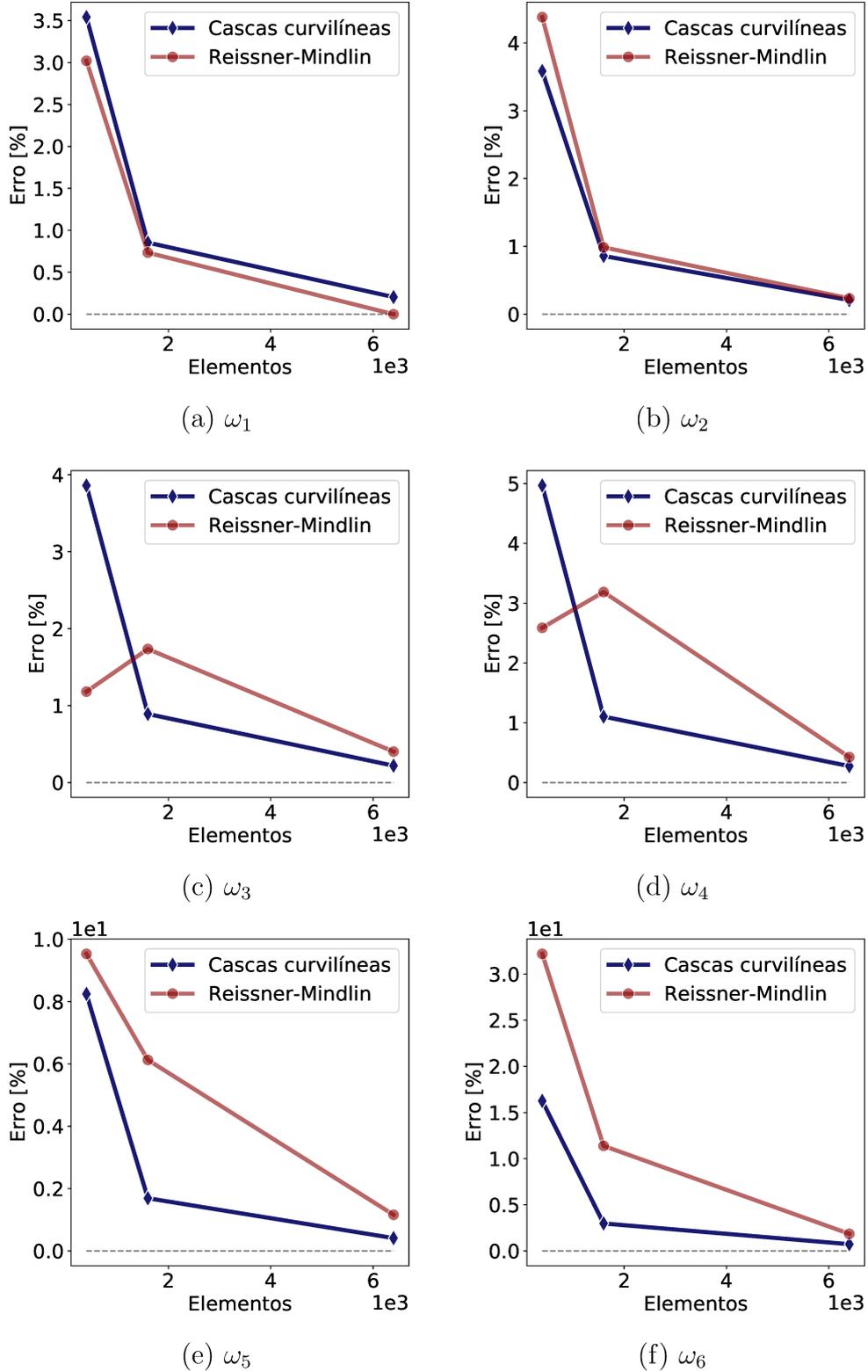
Fonte: Elaborada pelo autor.

A condição de engaste introduz restrições mais severas ao deslocamento do elemento estrutural, alterando levemente os modos de vibrar. A redução das amplitudes é refletida nos valores das frequências, que são substancialmente superiores àquelas obtidos para a condição de apoio simples.

Tabela 21 – Frequências naturais da placa circular com orifício engastada nas fronteiras interna e externa.

Modo	20×20	40×40	80×80	Contínua	Erro %
1	22,53742	21,95234	21,81103	21,76655	0,20435
2	22,79408	22,19436	22,05110	22,00531	0,20809
3	23,63771	22,96205	22,80915	22,75914	0,21973
4	25,32527	24,39301	24,19324	24,12658	0,27630
5	28,39648	26,67730	26,34176	26,23346	0,41283
6	33,93794	30,06180	29,40586	29,19173	0,73354

Figura 38 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa circular com orifício engastada nas fronteiras interna e externa.



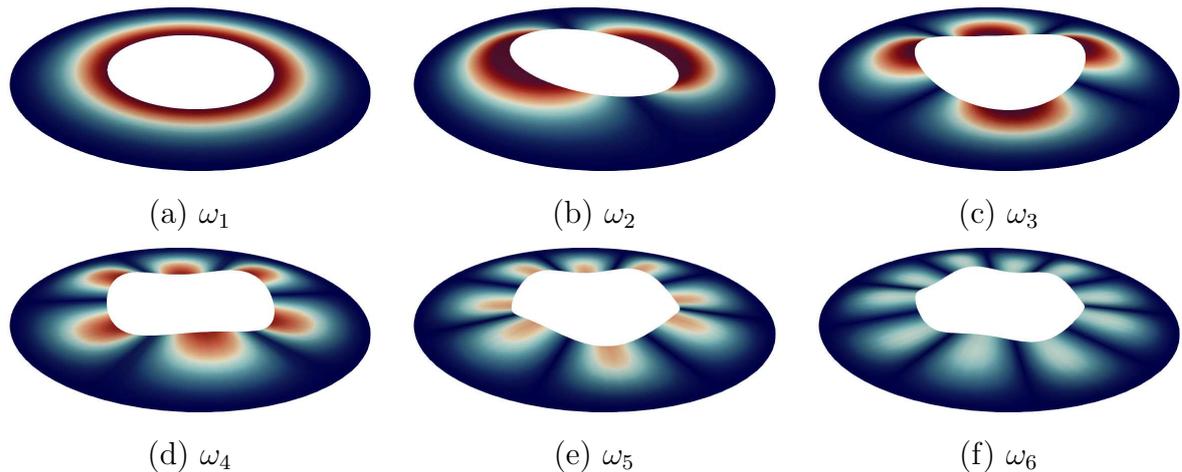
Fonte: Elaborada pelo autor.

Novamente, observa-se da análise de convergência, apresentada na Figura 38, uma notável diferença entre os modelos. Para ambos, os resultados obtidos aproximam-se assintoticamente àquelas da solução contínua com o refinamento da malha. O modelo de cascas curvilíneas apresenta resultados notavelmente mais exatos, mesmo com malhas mais grossas, principalmente para os modos associados às maiores frequências.

6.2.3 Engaste na fronteira externa

Os modos de vibrar de uma placa circular com orifício engastada na fronteira externa, obtidos com uma malha irregular de 80×80 elementos, são apresentados na Figura 39. As frequências naturais são apresentadas na Tabela 22. Observa-se que as frequências obtidas são semelhantes àquelas da solução contínua, fato que indica a correta implementação do modelo numérico-computacional para o subdomínio estrutural.

Figura 39 – Modos de vibrar da placa circular com orifício engastada na fronteira externa.

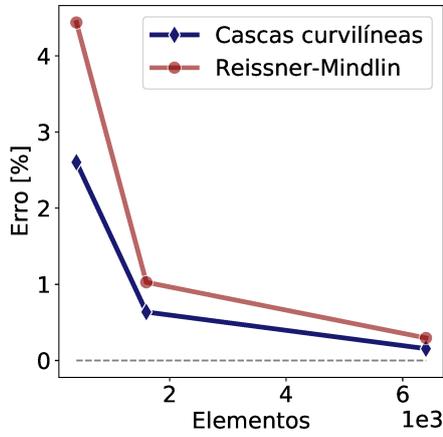


Fonte: Elaborada pelo autor.

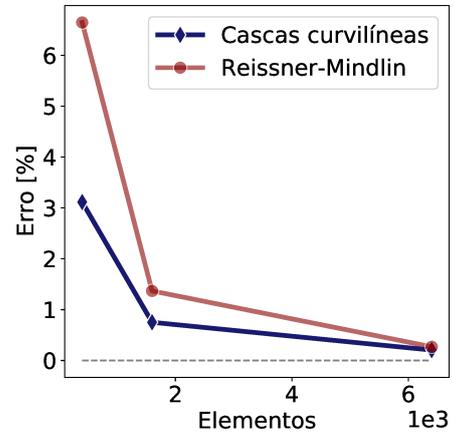
Tabela 22 – Frequências naturais da placa circular com orifício engastada na fronteira externa.

Modo	20×20	40×40	80×80	Contínua	Erro %
1	4,43280	4,34786	4,32706	4,32034	0,15560
2	5,53625	5,40937	5,38001	5,36902	0,20465
3	8,28553	7,93684	7,85979	7,83246	0,34899
4	12,43015	11,45575	11,24667	11,17264	0,66261
5	18,47720	16,02592	15,52784	15,36884	1,03455
6	23,63647	21,80343	20,77959	20,44057	1,65855

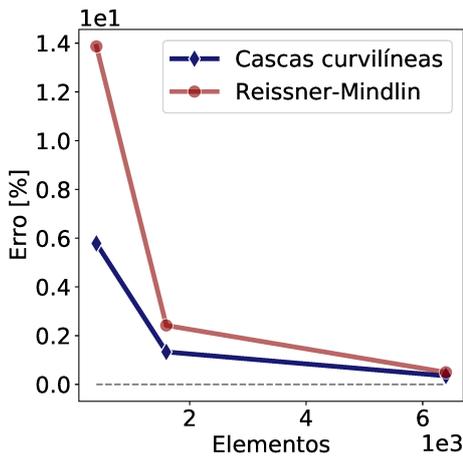
Figura 40 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa circular com orifício engastada na fronteira externa.



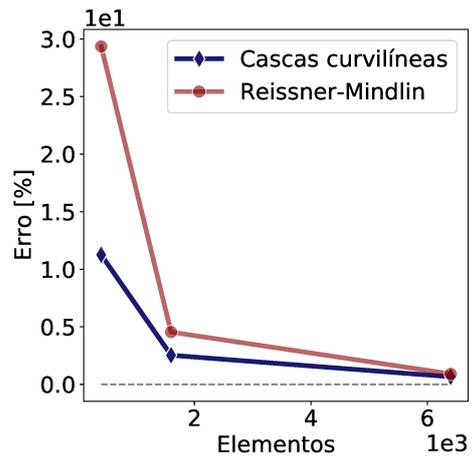
(a) ω_1



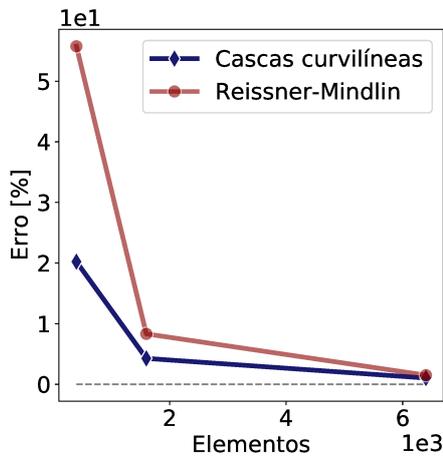
(b) ω_2



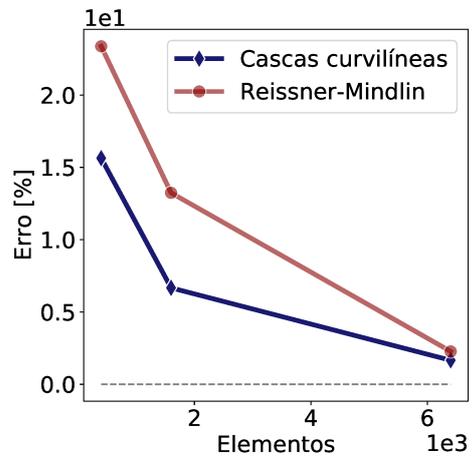
(c) ω_3



(d) ω_4



(e) ω_5



(f) ω_6

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em contraste à configuração da última seção, na qual as ambas as fronteiras, interna e externa, são engastadas, admite-se, nesta seção, uma fronteira livre. A ausência de resistências adicionais em uma das fronteiras resulta no aumento dos deslocamentos do elemento estrutural e, conseqüentemente, na redução das frequências naturais.

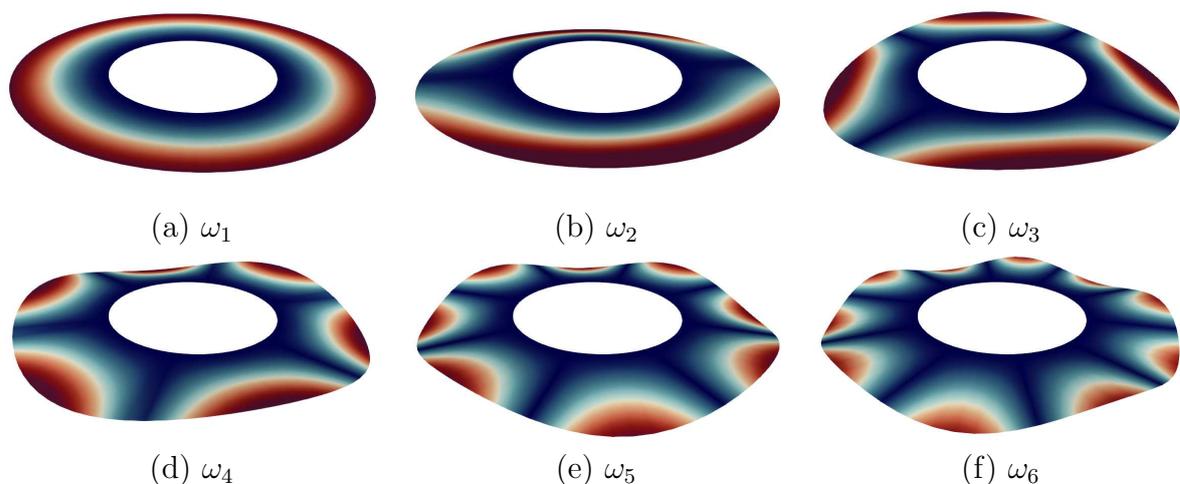
Verifica-se da análise de convergência, apresentada na Figura 40, que os resultados de ambos os modelos aproximam-se assintoticamente àqueles da solução contínua com o refinamento da malha. Neste caso, no qual observa-se uma maior similaridade entre a convergência dos modelos, nota-se que o modelo desenvolvido apresenta uma convergência mais rápida para todas as frequências avaliadas.

6.2.4 Engaste na fronteira interna

Os modos de vibrar de uma placa circular com orifício engastada na fronteira interna, obtidos com uma malha irregular de 80×80 elementos, são apresentados na Figura 41. As frequências naturais são apresentadas na Tabela 23. Observa-se que as frequências obtidas são semelhantes àquelas da solução contínua, fato que indica a correta implementação do modelo numérico-computacional para o subdomínio estrutural.

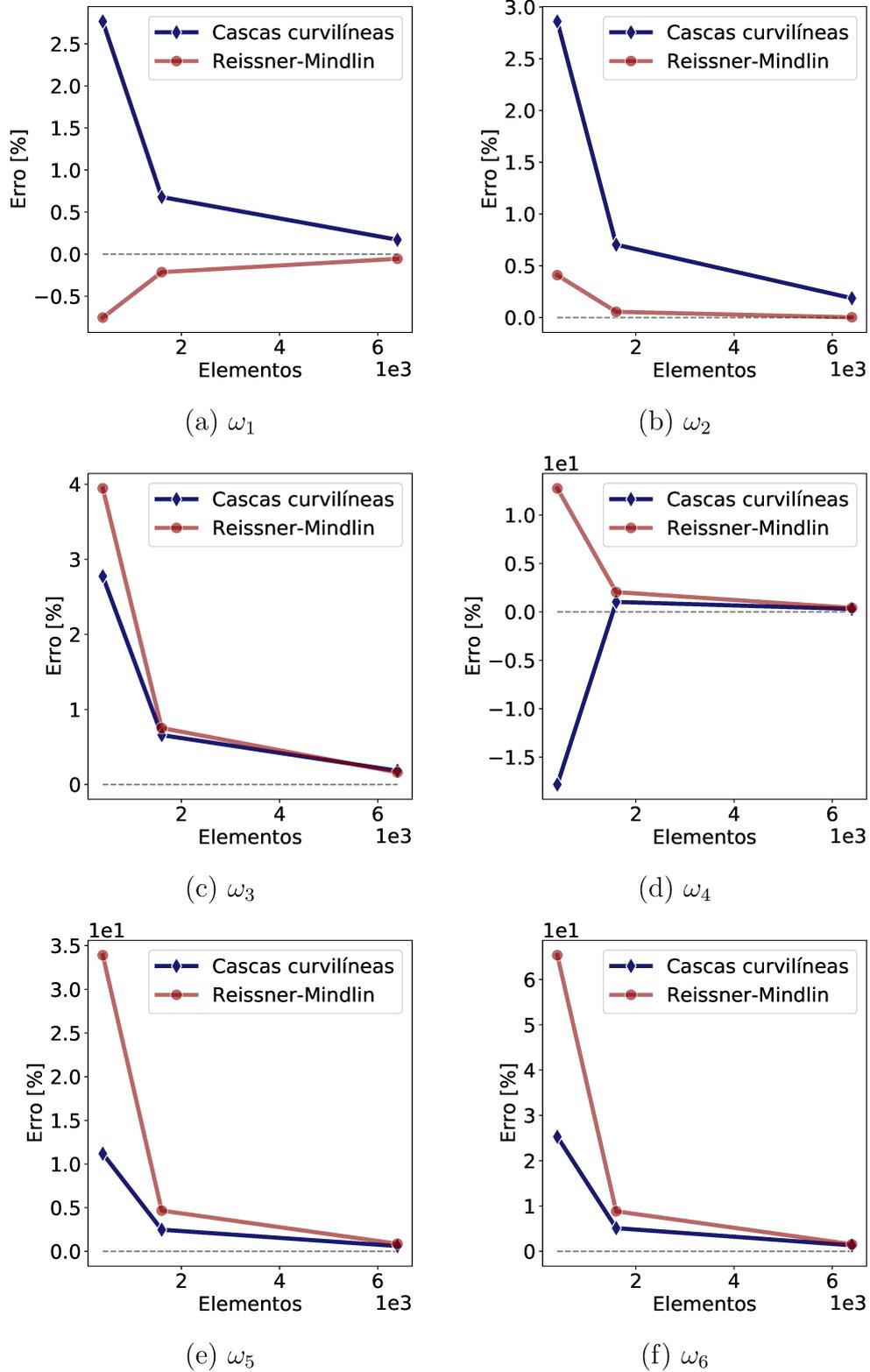
Semelhantemente à última configuração avaliada, admite-se, nesta seção, uma fronteira livre. A ausência de resistências adicionais na fronteira externa resulta em um aumento ainda mais expressivo dos deslocamentos em relação àqueles observados com o engaste da fronteira externa. Naturalmente, as frequências obtidas para esta configuração são as menores dentre as condições avaliadas.

Figura 41 – Modos de vibrar da placa circular com orifício engastada na fronteira interna.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 42 – Convergência das frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma placa circular com orifício engastada na fronteira interna.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 23 – Frequências naturais da placa circular com orifício engastada na fronteira interna.

Modo	20×20	40×40	80×80	Contínua	Erro %
1	3,26416	3,19786	3,18172	3,17630	0,17078
2	3,33387	3,26400	3,24724	3,24117	0,18735
3	3,68552	3,60962	3,59257	3,58601	0,18282
4	3,71972	4,57321	4,54046	4,52690	0,29946
5	6,94046	6,39709	6,28013	6,24236	0,60511
6	10,91772	9,16035	8,82938	8,71384	1,32595

Mais uma vez, verifica-se da análise de convergência, apresentada na Figura 42, que os resultados de ambos os modelos aproximam-se assintoticamente àqueles da solução contínua com o refinamento da malha.

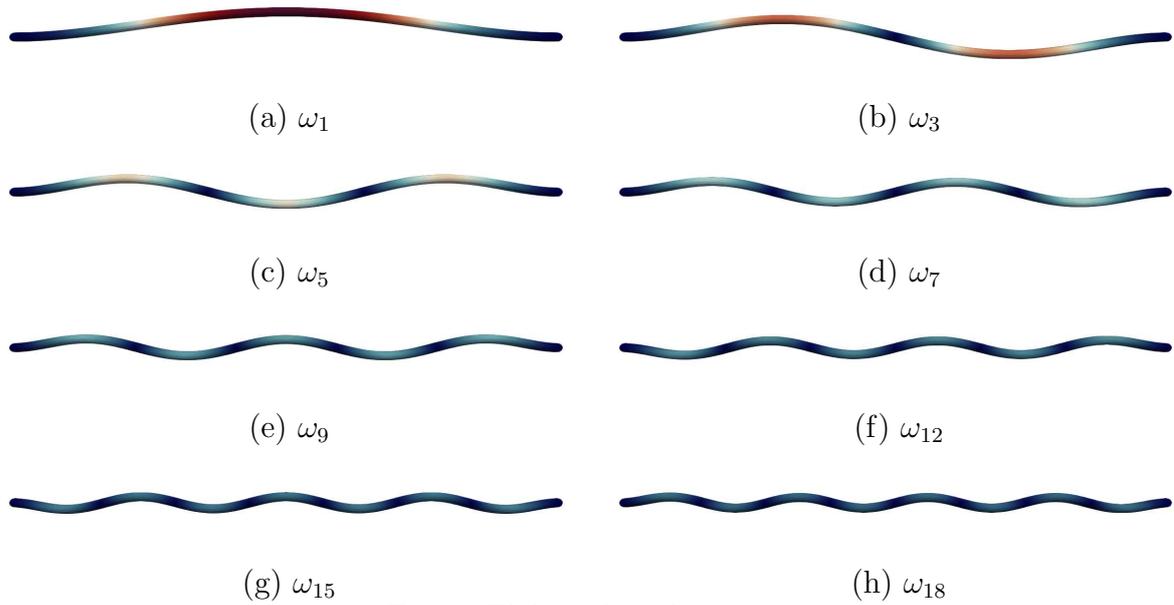
6.3 Vibração de cascas cilíndricas

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com o modelo desenvolvido para os modos e frequências de vibrar de um cilindro bi-engastado. As propriedades físicas e geométricas do cilindro são apresentadas na seção 3.5.3. Os resultados obtidos com o modelo de cascas curvilíneas são comparados com aqueles obtidos com o modelo de Reissner-Mindlin e com as soluções contínuas.

Resultados semelhantes àqueles obtidos pelo método analítico indicam a correta formulação e construção das matrizes de rigidez e de massa para cascas curvilíneas e geometrias complexas. Uma análise de convergência é também conduzida a fim de avaliar como os erros numéricos associados aos modelos de cascas e de placas variam em função da malha.

Os modos de vibrar do cilindro bi-engastado, obtidos com uma malha regular de 31×200 elementos, são apresentados na Figura 43. As frequências naturais são apresentadas na Tabela 24. Observa-se que as frequências obtidas são semelhantes àquelas da solução contínua, fato que indica a correta representação dos fenômenos físicos associados à deformação de estruturas sólidas curvilíneas com o modelo desenvolvido.

Figura 43 – Modos de vibrar do cilindro bi-engastado.

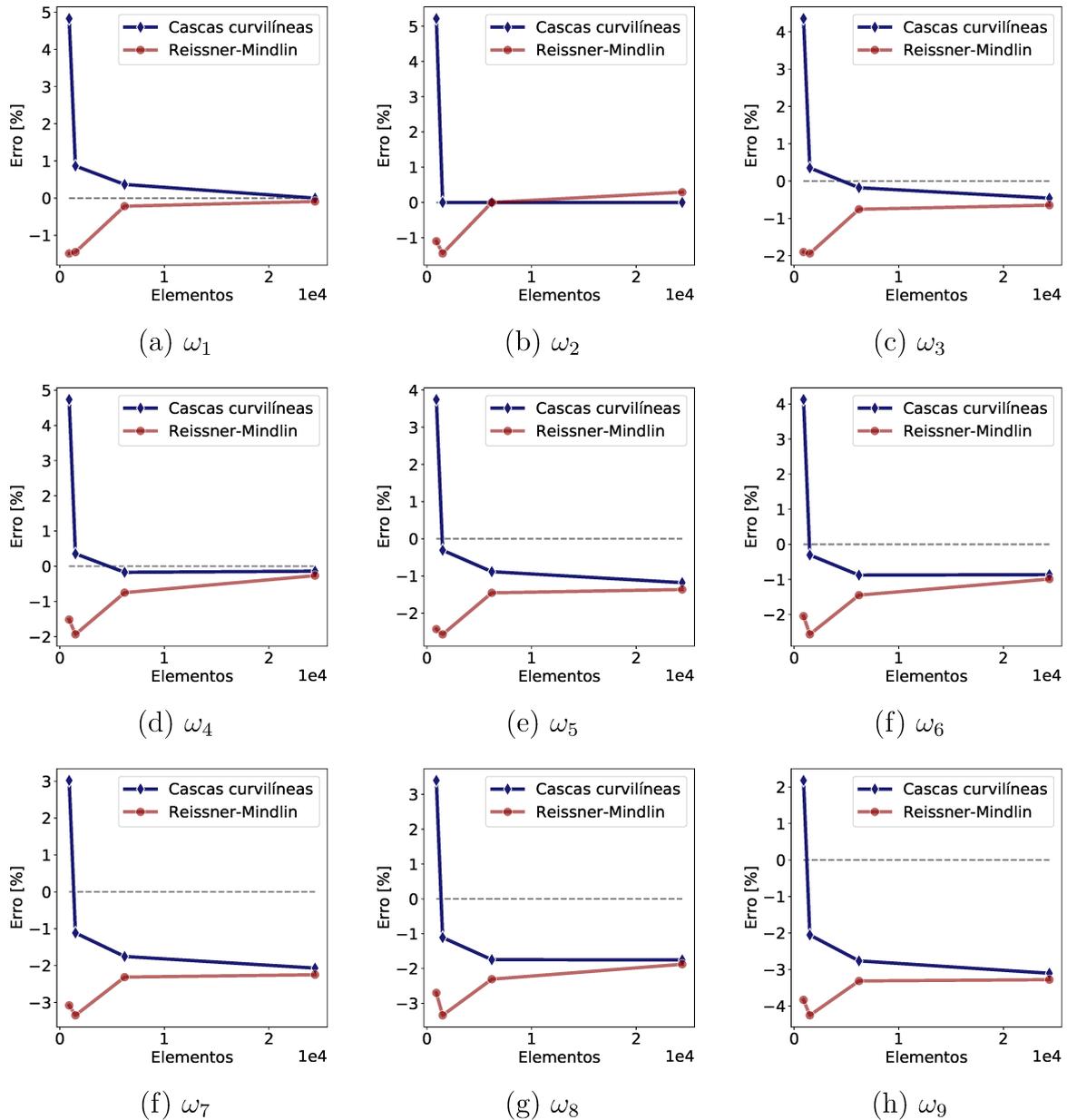


Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 24 – Frequências naturais da casca cilíndrica bi-engastada.

Modo	15 × 60	15 × 100	31 × 200	61 × 400	Contínua	Erro %
1	31, 11148	29, 9349	29, 7874	29, 7078	29, 6780	0, 1005
2	31, 22602	29, 9360	29, 7893	29, 8023	29, 6780	0, 4189
3	85, 36810	82, 0960	81, 6623	81, 4335	81, 8080	0, 4577
4	85, 68264	82, 0990	81, 6676	81, 6933	81, 8080	0, 1402
5	166, 3828	159, 8824	158, 9565	158, 4823	160, 3760	1, 1807
6	166, 9963	159, 8882	158, 9667	158, 9895	160, 3760	0, 8645
7	273, 1193	262, 1559	260, 4639	259, 6265	265, 1100	2, 0683
8	274, 1268	262, 1654	260, 4806	260, 4606	265, 1100	1, 7537
9	404, 6677	387, 8972	385, 0832	383, 7382	396, 0290	3, 1035
10	406, 1611	387, 9111	385, 1079	384, 9764	396, 0290	2, 7908
11	434, 1643	434, 2274	436, 9047	435, 9996	—	—
12	560, 0196	535, 9268	531, 5435	529, 5153	553, 1310	4, 2694
13	562, 0873	535, 9459	531, 5774	531, 2324	553, 1310	3, 9590
14	704, 6990	704, 42745	698, 4734	695, 5535	—	—
15	738, 0168	704, 98661	698, 5177	697, 8216	736, 4170	5, 2409
16	740, 7429	705, 01160	705, 1037	705, 4439	736, 4170	4, 2059
17	868, 6299	868, 56387	873, 8367	871, 9963	—	—
18	937, 5699	893, 73275	884, 4421	880, 3906	945, 8870	6, 9243
19	941, 0352	893, 76423	884, 4978	883, 2772	945, 8870	6, 6191
20	1157, 4530	1100, 82622	1087, 9919	1082, 5256	1181, 540	8, 38011

Figura 44 – Convergência do primeiro conjunto de frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma casca cilíndrica bi-engastada.

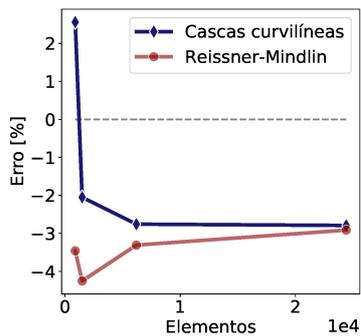


Fonte: Elaborada pelo autor.

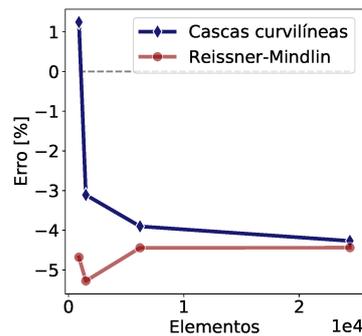
Da análise de convergência, apresentada nas Figuras 44 e 45, observa-se uma substancial diferença nas respostas dos modelos às diferentes malhas avaliadas. Para o modelo desenvolvido, observa-se que as soluções numéricas aproximam-se progressiva e assintoticamente à solução contínua. Para o modelo de placas, entretanto, o erro numérico não é reduzido gradativamente em função do refinamento da malha numérica. Ressalta-se que, para a malha mais refinada, ambos os modelos apresentaram resultados próximos àquelas da solução contínua.

As diferenças observadas na convergência são justificadas pela informação de curvatura, que no modelo de cascas é admitida nos calculos das matrizes elementares, via a definição de um elemento curvilíneo. No modelo de Mindlin, em contrapartida, a informação de curvatura é consequente da inclinação entre elementos de placa, sendo as matrizes elementares confeccionadas para segmentos de superfícies planas.

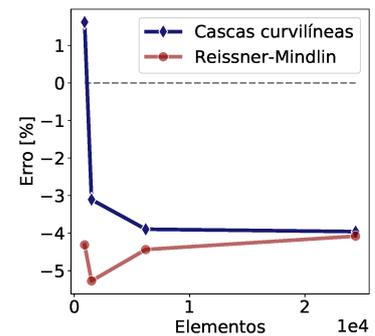
Figura 45 – Convergência do segundo conjunto de frequências naturais em função do número de elementos da malha numérica para uma casca cilíndrica bi-engastada.



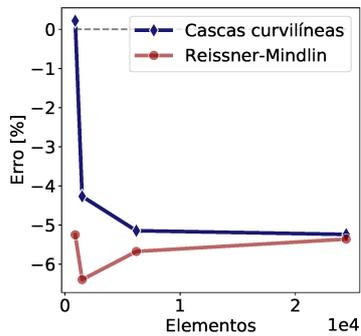
(a) ω_{10}



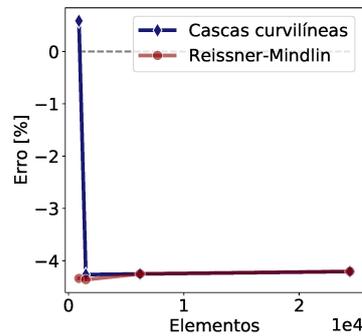
(b) ω_{11}



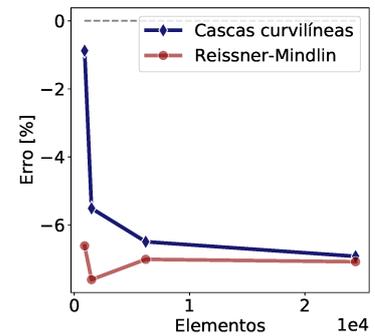
(c) ω_{12}



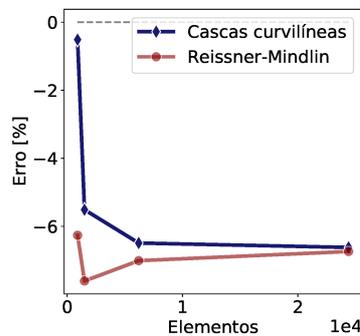
(d) ω_{13}



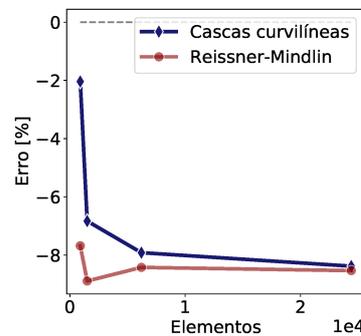
(e) ω_{15}



(f) ω_{16}



(f) ω_{18}



(g) ω_{19}

Fonte: Elaborada pelo autor.

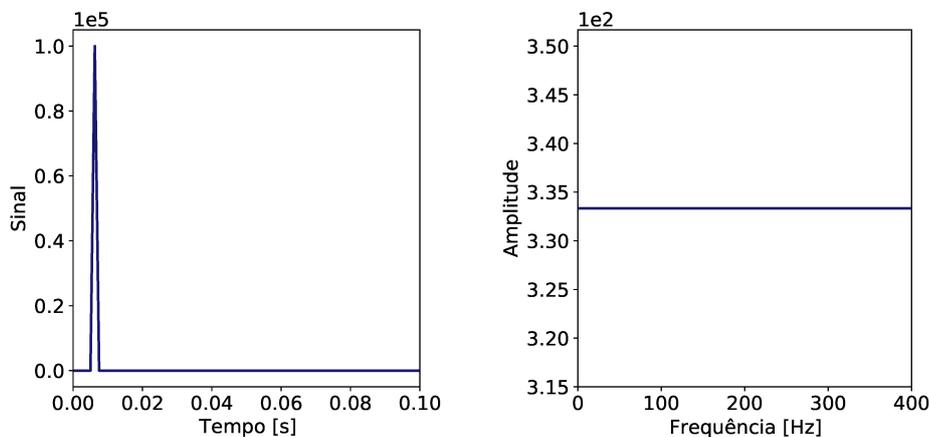
6.4 Vibração de placas retangulares imersas

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com o modelo desenvolvido para a vibração de placas retangulares imersas em um fluido. Em contraste aos casos apresentados nas últimas seções, a resposta dinâmica das placas deve ser uma combinação dos modos de vibrar e das frequências naturais, obtidos via análise do problema de autovalores e autovetores, e da resposta do fluido. As placas imersas são submetidas a uma força pontual e sua movimentação é registrada por meio de uma sonda estrutural. Os sinais obtidos de tais sondas são processados via Transformada Discreta de Fourier (*DFT*) com o fim de determinar as frequências naturais amortecidas devido a interação fluido-estrutural. Os resultados obtidos são comparados com o experimento material de Lindholm (1965) e com os modelos computacionais desenvolvidos por Liang (2001) e Souza (2020). Assim, é possível avaliar o acoplamento das soluções, bem como validar o modelo de interação fluido-estrutura desenvolvido.

As propriedades físicas e geométricas das placas são apresentadas na seção 3.5.4. As superfícies de referência são discretizadas em uma malha de 32×32 elementos. Observa-se, dos modos de vibrar da placa Lind-11, apresentados na Figura 47, que os vértices opostos à aresta engastada são excitados por todos os modos avaliados. Os pontos para a aplicação da força e para o posicionamento da sonda estrutural são, convenientemente, definidos na proximidade destes vértices.

Ressalta-se que, além da posição de aplicação, a própria metodologia de imposição da força é relevante à captura das frequências naturais amortecidas. Neste sentido, as forças aplicadas sobre as estruturas são pontuais e discretas no tempo. Como verificado na Figura 46, a imposição de uma força discreta no tempo garante a excitação de todas as frequências.

Figura 46 – Frequências excitadas por uma força pontual e discreta no tempo.



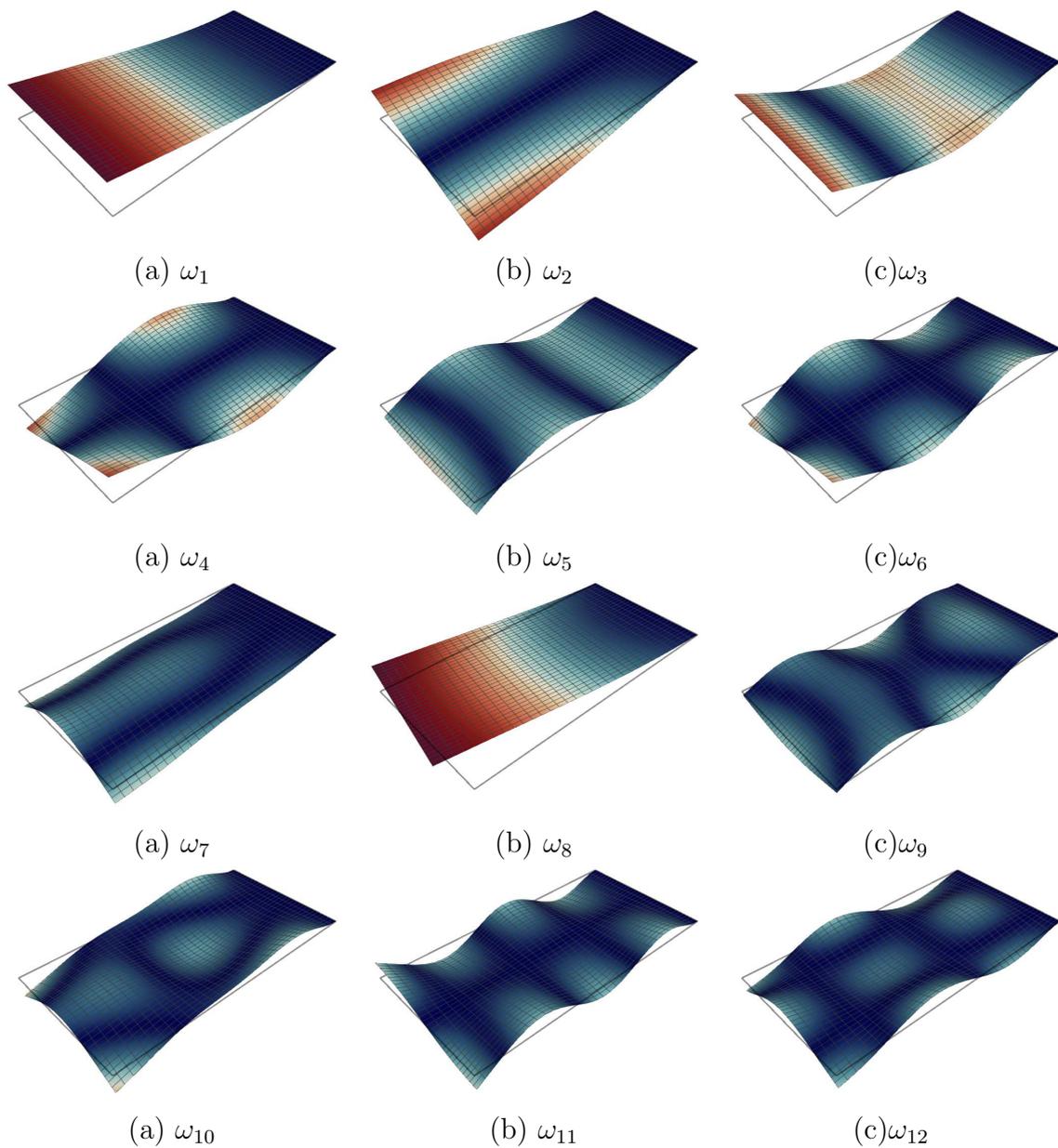
(a) Delta de Dirac (δ)

(b) DFT da função Delta de Dirac

Fonte: Elaborada pelo autor.

As dimensões do subdomínio fluido são definidas como uma função das dimensões das placas segundo a Figura 6 e a Tabela 6. As propriedades do fluido são apresentadas na Tabela 7. A malha euleriana é definida com um nível base de $8 \times 16 \times 8$ células e cinco níveis de refinamento. Emprega-se o refinamento adaptativo com respeito a presença de interfaces e gradientes consideráveis de vorticidade. Utiliza-se um CFL (COURANT; FRIEDERICHS; LEWY, 1967) de 0,45. No limite superior do domínio, admite-se a condição de Orlanski (ORLANSKI, 1976), isto é, Neumann para velocidade e Dirichlet para pressão. Para os demais limites da malha euleriana, admite-se a condição de Dirichlet para velocidade e Neumann para a pressão.

Figura 47 – Modos de vibrar da placa Lind-11.



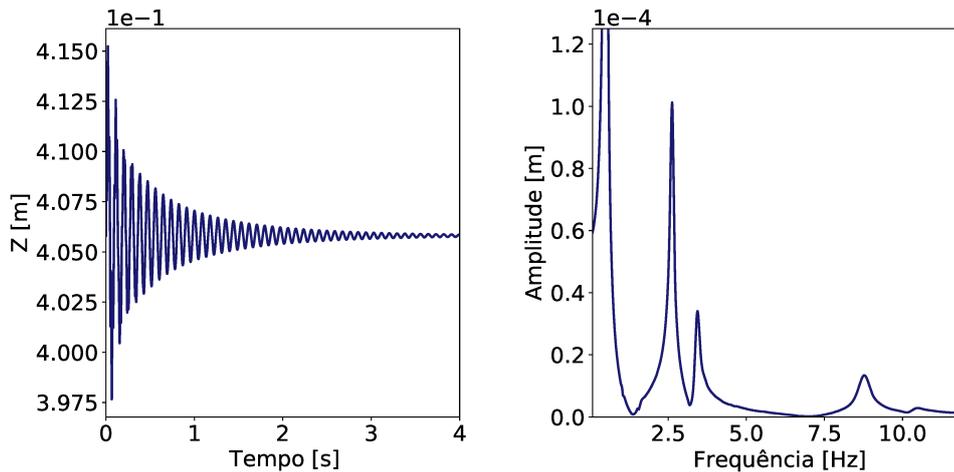
Fonte: Elaborada pelo autor.

As simulações são conduzidas para um tempo limite de 10 s físicos. As frequências amortecidas devido a interação das placas com o fluido são determinadas, via Transformada Discreta de Fourier (*DFT*), a partir dos sinais das sondas estruturais. Ressalta-se que, devido ao passo de tempo variável, um pré-processamento, no qual o sinal é reescrito em intervalos regulares por meio de interpolações lineares, é conduzido. As frequências mais excitadas são normalizadas segundo a seguinte equação:

$$\bar{\omega}_n = \omega_n 2\pi \sqrt{\frac{\rho h a^4}{D}}, \quad (6.1)$$

onde ω_n representa a frequência do modo n , ρ representa a massa específica do sólido, h representa a espessura da casca, a representa uma dimensão característica da placa e D representa a rigidez à flexão.

Figura 48 – Frequências mais excitadas em uma sonda estrutural posicionada sobre a placa Lind-6.



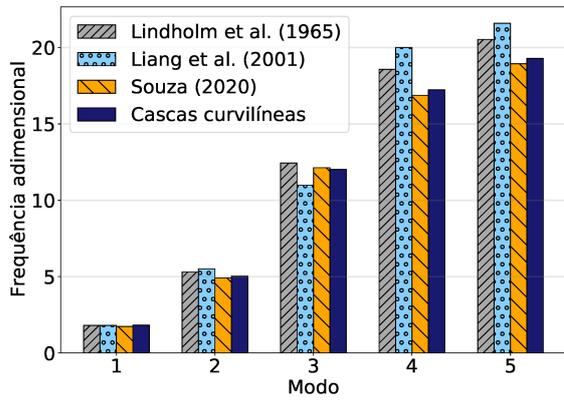
(a) Sinal obtido da sonda estrutural

(b) DFT do sinal

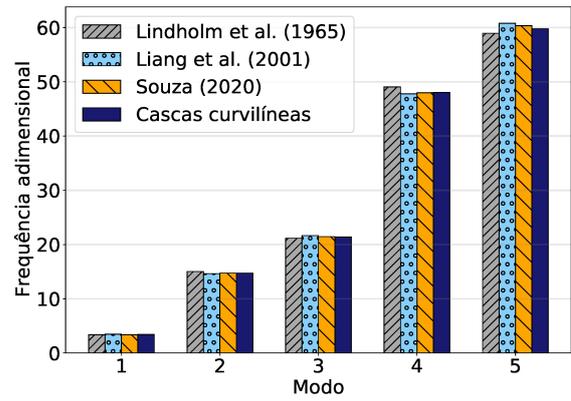
Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalmente, os resultados obtidos são comparados com o experimento material apresentado por Lindholm (1965) e com outros modelos computacionais (LIANG, 2001; SOUZA, 2020). Observa-se, na Figura 49, que o modelo desenvolvido apresenta uma resposta dinâmica semelhante àquela do modelo de placas, do trabalho de Souza (2020). Diferenças mais significativas são observadas para as maiores frequências, nas quais o modelo de cascas curvilíneas apresenta, em concordância ao observado da vibração de placas quadradas, maiores módulos. Ambos os modelos, de cascas curvilíneas e de placas, apresentam considerável exatidão. Dentre os casos simulados, os maiores erros obtidos para os modelos de placas e de cascas curvilíneas foram de 12,51% e 12,17%, respectivamente.

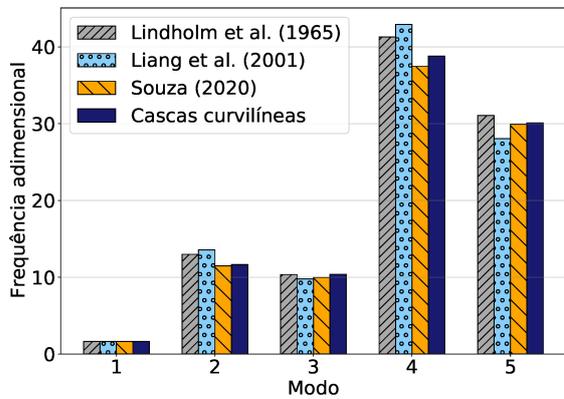
Figura 49 – Modos de vibrar das placas retangulares imersas em água.



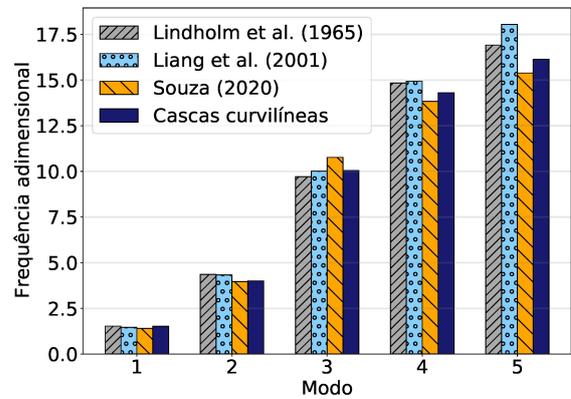
(a) Lind-5



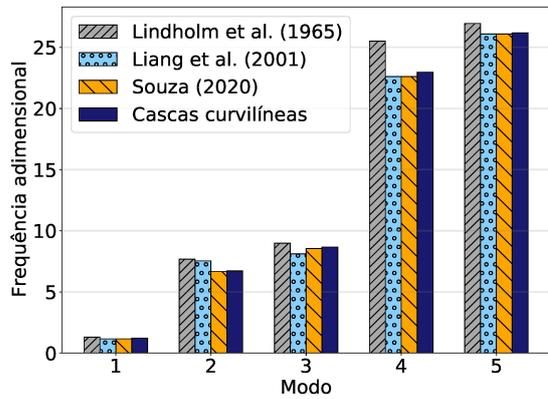
(b) Lind-6



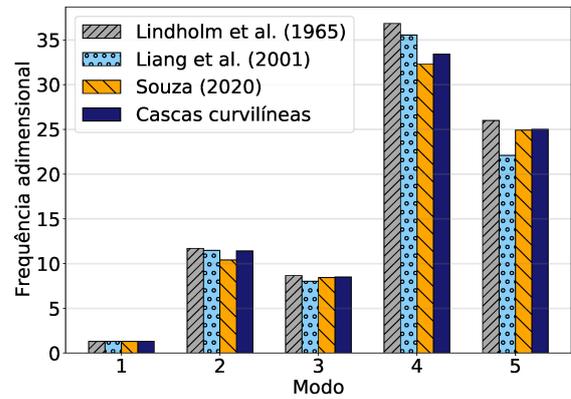
(c) Lind-7



(e) Lind-10



(f) Lind-11



(g) Lind-12

Fonte: Elaborada pelo autor.

6.5 Vibração de placas retangulares próximas à interface líquido-gás

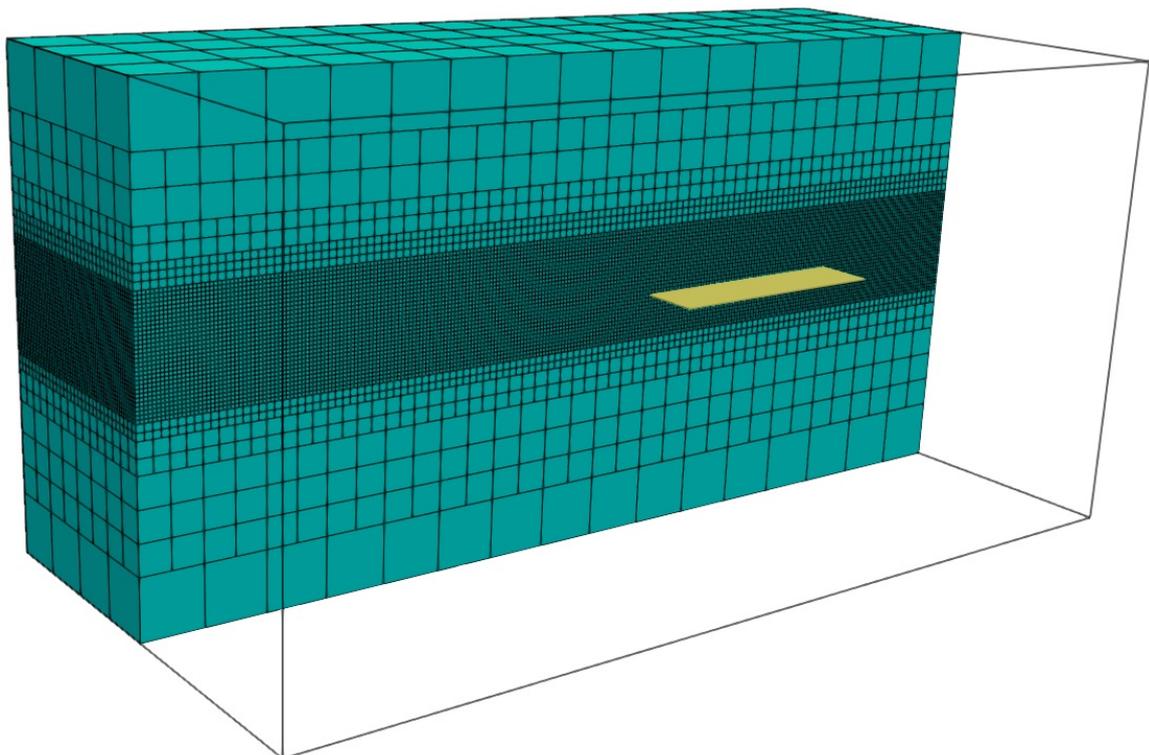
Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com o modelo desenvolvido para a vibração de placas retangulares próximas à interface líquido-gás. De forma semelhante ao

último caso, aplica-se uma força pontual e discreta no tempo sobre um ponto de excitação comum a uma série de modos de vibrar. Objetiva-se avaliar a influência da distância da placa à interface líquido-gás sobre a dinâmica do componente e, conseqüentemente, validar a modelagem estrutural para gradientes de informações ainda mais severos no subdomínio fluido. Valores de frequência próximos àqueles de referência indicam a correta modelagem dos fenômenos associados à interação fluido-estrutura para escoamentos bifásicos.

A placa utilizada na simulação corresponde ao modelo Lind-11, cujas propriedades físicas e geométricas são apresentadas nas Tabelas 6 e 4. A superfície de referência é discretizada em uma malha de 32×32 elementos. Os pontos definidos para a aplicação da força e para o posicionamento da sonda estrutural são os mesmos do último caso.

As dimensões do subdomínio fluido são definidas como uma função das dimensões da placa segundo a Figura 7 e a Tabela 6. As propriedades dos fluidos são apresentadas na Tabela 9. A malha euleriana é definida com um nível base de $8 \times 16 \times 8$ células e cinco níveis de refinamento. Emprega-se o refinamento adaptativo com respeito a presença de interfaces, que compreende a interface formada entre fluidos, e gradientes consideráveis de vorticidade. Utiliza-se um *CFL* de 0,45. No limite superior do domínio, admite-se a condição de Orlanski (ORLANSKI, 1976), isto é, Neumann para velocidade e Dirichlet para pressão. Para os demais limites da malha euleriana, admite-se a condição de Dirichlet para velocidade e Neumann para a pressão.

Figura 50 – Malha numérica inicial para a modelagem da vibração de placas próximas à interface líquido-gás.



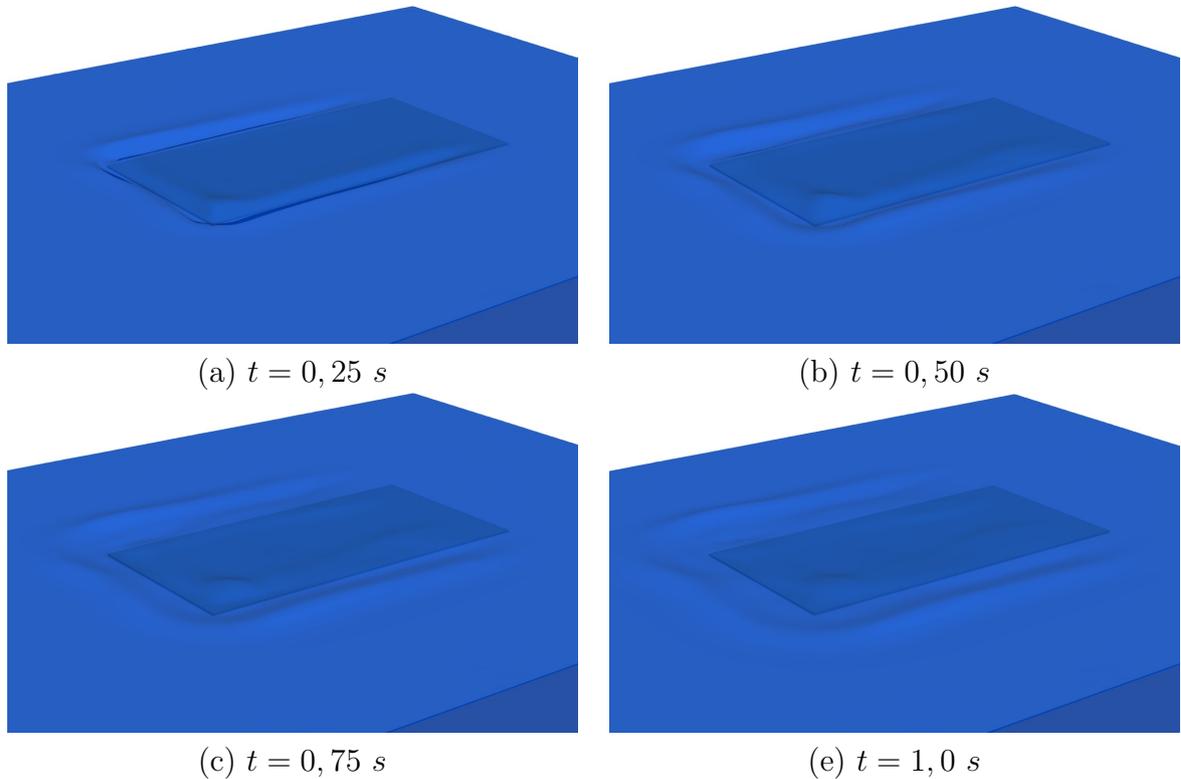
Fonte: Elaborada pelo autor.

As simulações são conduzidas para um tempo limite de 10 *s* físicos. As frequências naturais amortecidas da placa submersa a diferentes profundidades são determinadas a partir dos sinais das sondas estruturais. Mais uma vez, realiza-se um pré-processamento a fim de reescrever a posição do ponto avaliado em intervalos regulares no domínio temporal. As frequências obtidas são adimensionalizadas segundo a Equação (6.1), na qual o termo ω_0 representa a frequência obtida para o caso da placa totalmente submersa em água. Os resultados obtidos são comparados com o experimento material apresentado por Lindholm (1965) e com o modelo de placas desenvolvido por Souza (2020).

$$\text{Aumento relativo de frequência} = 100 \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}. \quad (6.2)$$

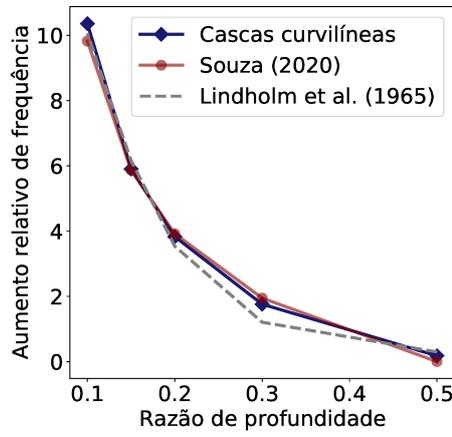
Ressalta-se que, principalmente para as menores distâncias entre placa e interface líquido-gás, a amplitude dos deslocamentos tornam-se relevantes à comparação das frequências naturais. Grandes deslocamentos podem causar significativas alterações à coluna de líquido sobre a estrutura e, conseqüentemente, desqualificar a comparação com o experimento conduzido por Lindholm (1965). A fim de garantir condições semelhantes àquelas do experimento material, impõe-se uma força suficiente para causar um deslocamento máximo de 10 *mm* para cada profundidade avaliada. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 52.

Figura 51 – Vibração da placa imersa a uma distância de 10 *mm* da interface líquido-gás.

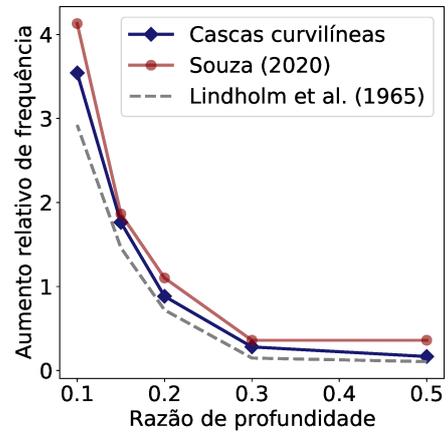


Fonte: Elaborada pelo autor.

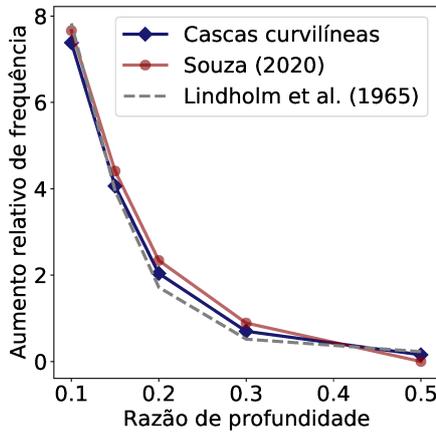
Figura 52 – Modos de vibrar das placas retangulares imersas em água.



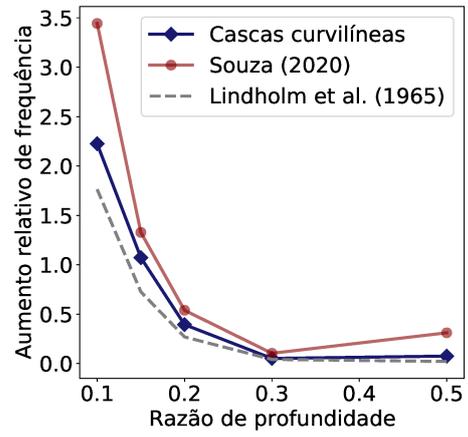
(a) ω_1



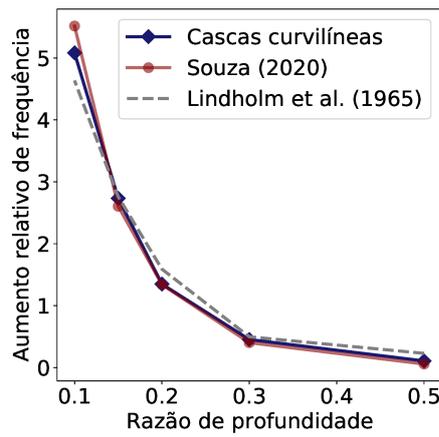
(b) ω_2



(c) ω_3



(e) ω_4



(f) ω_5

Fonte: Elaborada pelo autor.

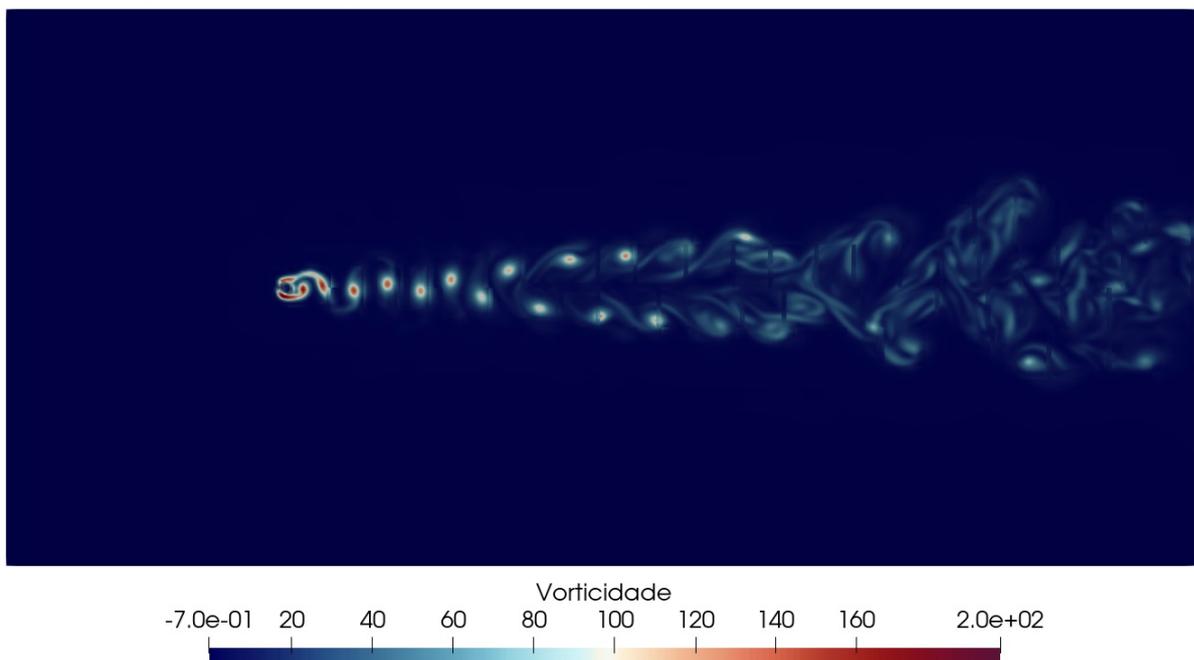
6.6 Escoamento turbulento sobre uma casca cilíndrica

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para o escoamento sobre um cilindro deformável bi-engastado. As propriedades físicas e geométricas do cilindro são apresentadas na Tabela 3 e na Figura 4. A superfície de referência é discretizada em uma malha regular de 31×200 elementos. As dimensões do subdomínio fluido são especificadas na Figura 8 e na Tabela 10. A malha euleriana é definida com um nível base de $32 \times 64 \times 32$ células e quatro níveis de refinamento. Emprega-se refinamento adaptativo com respeito à presença de interfaces e gradientes de vorticidade. Utiliza-se um CFL de 0,45. As simulações são conduzidas com 32 núcleos, divididos em quatro processadores Intel Xeon X5650, no cluster do Laboratório de Mecânica dos Fluidos.

Admite-se, para o subdomínio fluido, a condição de velocidade constante para o limite esquerdo do domínio, isto é, condição de Dirichlet para velocidade e Neumann para pressão. Para os demais limites da malha euleriana, admite-se a condição advectiva. O escoamento é caracterizado por um número de Reynolds de aproximadamente $9,8 \cdot 10^4$.

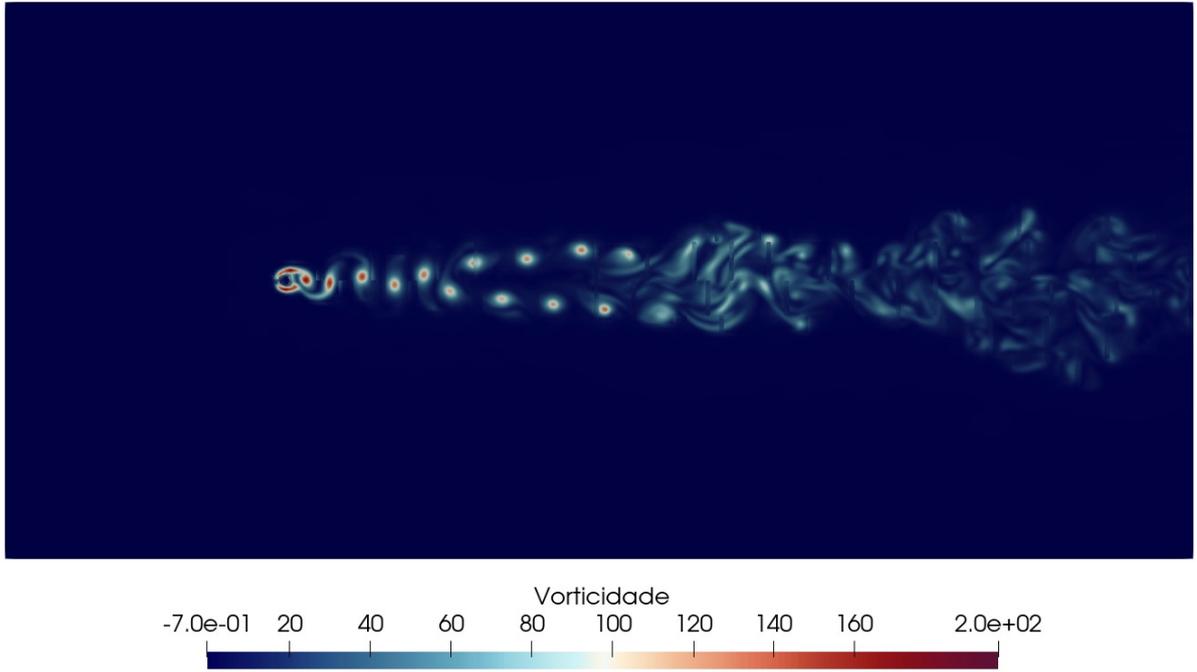
Vistas em corte do campo de vorticidade são apresentadas nas Figuras 53, 54, 55 e 56, nas quais é possível verificar o desenvolvimento de esteiras de Von-Karman em regime turbulento. Em regime estatisticamente permanente, os gradientes de pressão assimétricos, associados à esteira, causam um movimento oscilatório da estrutura. Em escoamentos laminares, o processo descrito é denominado de vibração induzida por vórtices (*vortex induced vibration*). A terminologia mais apropriada para o caso estudado, entretanto, seria a de vibração induzida por estruturas turbilhonares.

Figura 53 – Campo de vorticidade no plano $x = 1,839 \text{ m}$ em $t = 2,5 \text{ s}$.



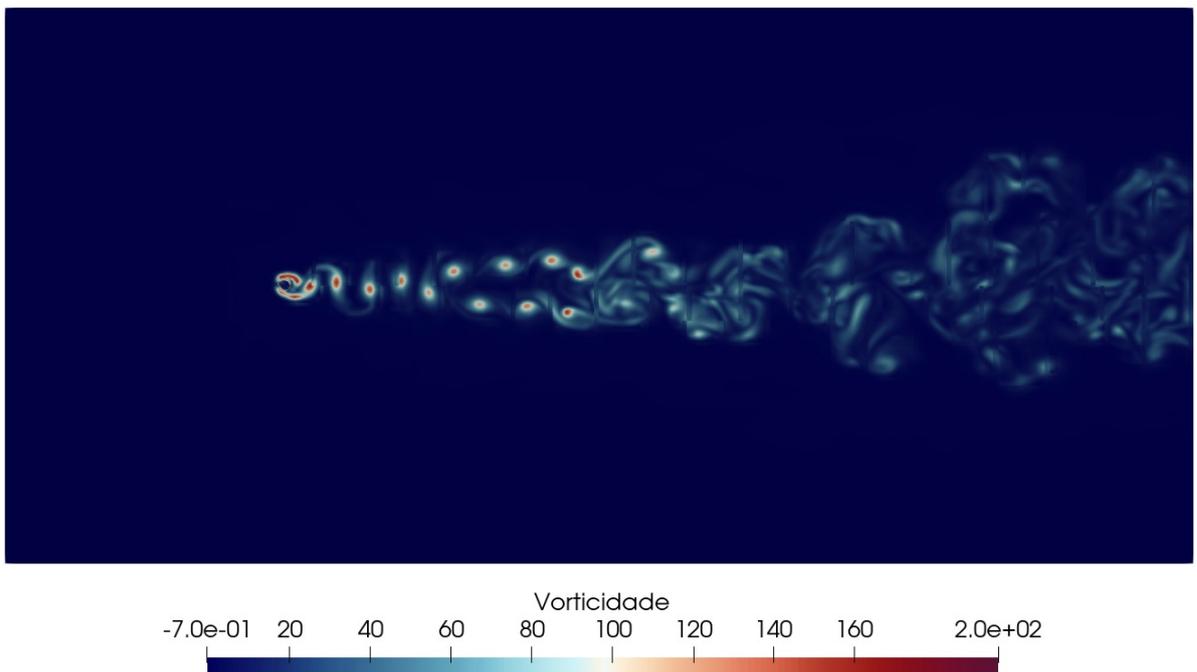
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 54 – Campo de vorticidade no plano $x = 1,839 \text{ m}$ em $t = 5.0 \text{ s}$.



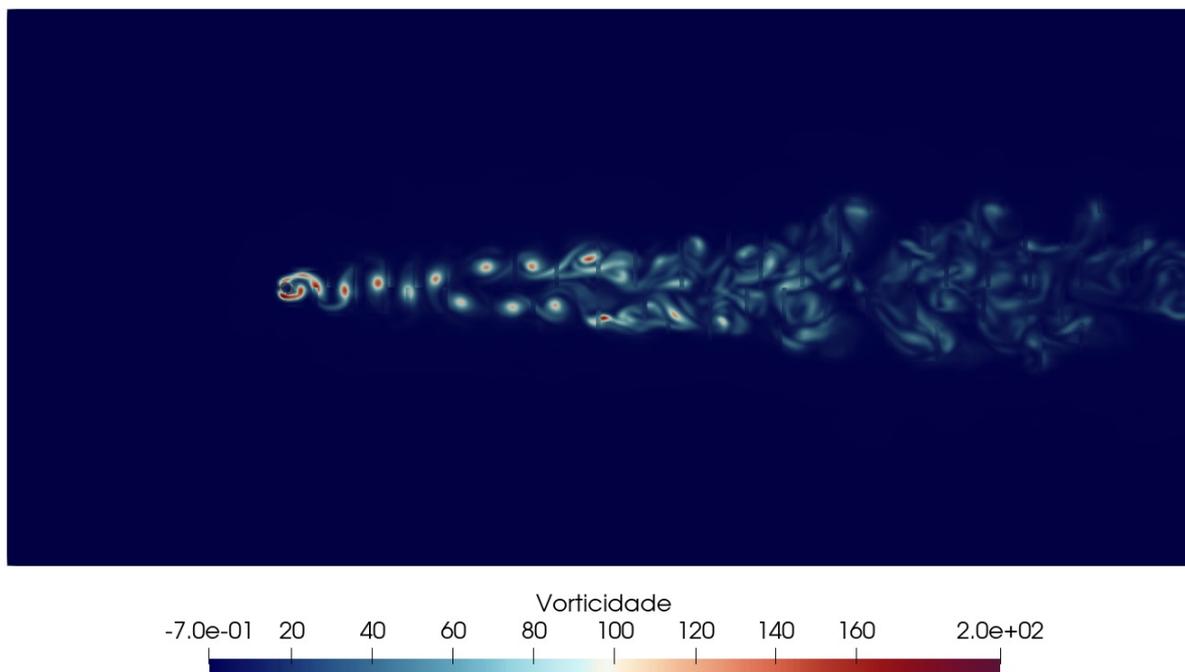
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 55 – Campo de vorticidade no plano $x = 1,839 \text{ m}$ em $t = 7,5 \text{ s}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 56 – Campo de vorticidade no plano $x = 1,839 \text{ m}$ em $t = 10,0 \text{ s}$.



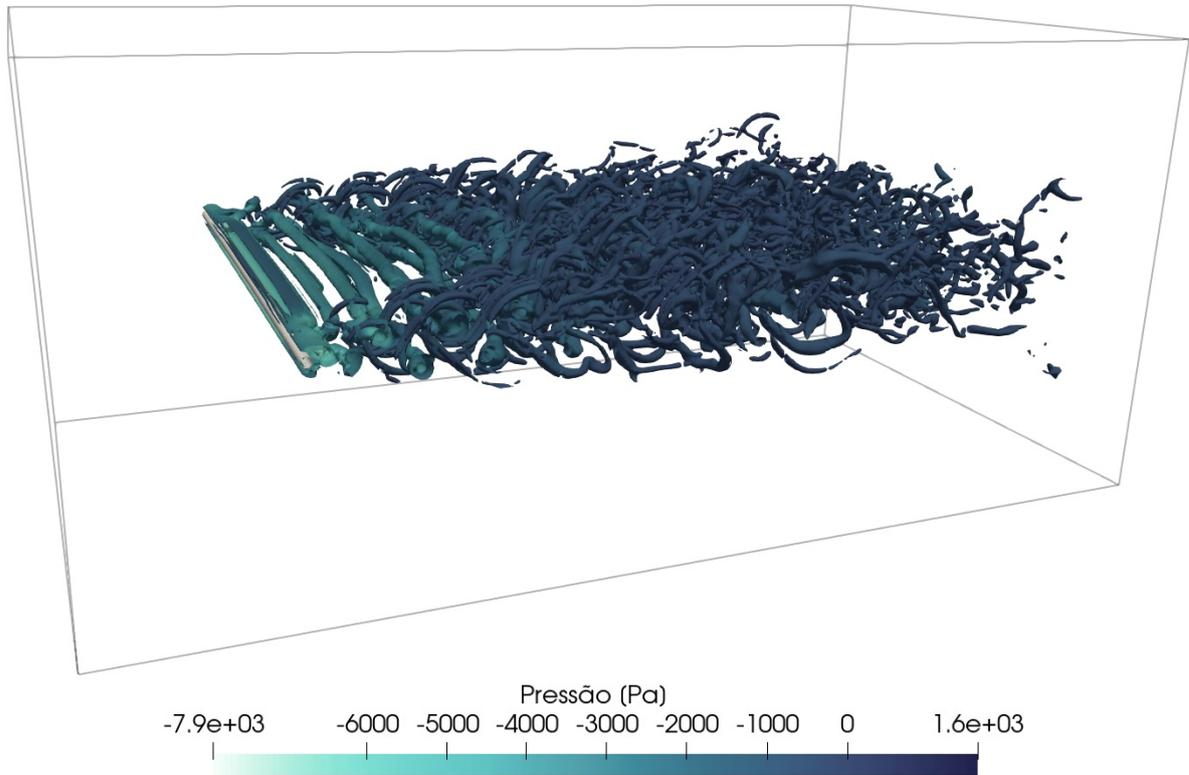
Fonte: Elaborada pelo autor.

Como consequência do movimento oscilatório, observa-se, sobre a estrutura, um carregamento cíclico. Este carregamento pode ocasionar uma falha por fadiga, processo no qual tensões e deformações locais e cíclicas modificam gradual e permanentemente a estrutura até a formação de trincas e, eventualmente, a fratura. Em uma série de práticas de engenharia é possível, através de ferramentas de simulação computacional, avaliar o campo de deslocamentos e tensões e introduzir modificações aos componentes estruturais com o fim de maximizar sua vida útil.

Na Figura 57, é apresentada a visualização das iso-superfícies definidas pelo critério $Q = 100$ (HUNT; WRAY; MOIN, 1988; CHONG; PERRY; CANTWELL, 1990), calculada em função dos gradientes do tensor de velocidade. Com tal critério, objetiva-se identificar estruturas turbilhonares pelas taxas de deformação e de rotação. As iso-superfícies são coloridas com o campo de pressão. Observa-se a formação de zonas de baixa pressão exatamente à jusante do cilindro.

Ainda, são avaliados os coeficientes de arrasto e de sustentação, definidos nas Equações (3.4) e (3.5). Os coeficientes obtidos com o modelo desenvolvido são apresentados nas Figuras 58 e 59. Os coeficientes obtidos com o modelo de Reissner-Mindlin são apresentados nas Figuras 61 e 61. Ambos os coeficientes, de arrasto e de sustentação, são compostos por um conjunto de baixas e altas frequências, como observado das oscilações de diferentes frequências no regime estatisticamente permanente.

Figura 57 – Iso-superfícies para o critério $Q = 100$ colorido com o campo de pressão em $t = 10$ s.

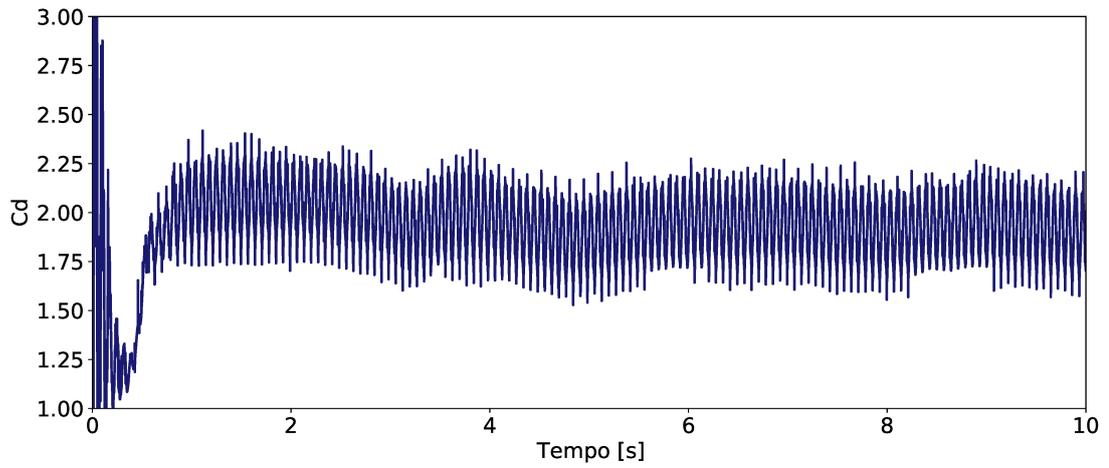


Fonte: Elaborada pelo autor.

Em escoamentos turbulentos, nos quais os efeitos advectivos são predominantes sobre os difusivos, as informações são transportadas e amplificadas pelo escoamento por um processo altamente não linear. Naturalmente, pequenas discordâncias nos deslocamentos da estrutura são propagadas para todo o escoamento. Para escoamentos em regime turbulento, portanto, é pertinente a caracterização dinâmica do escoamento através de informações médias, uma vez que a comparação entre respostas dinâmicas em regime transiente pode não ser particularmente apropriada.

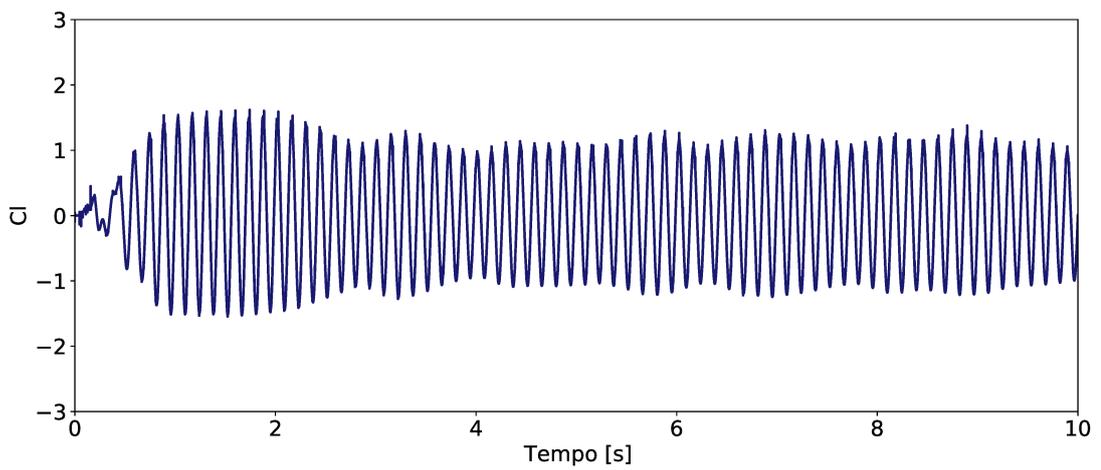
Comportamentos médios semelhantes indicam uma resposta dinâmica concordante. Os valores médios obtidos para os coeficientes de arrasto e de sustentação obtidos com o modelo desenvolvido são de 1,9369 e $3,1074 \cdot 10^{-3}$, respectivamente. Os valores médios obtidos para os coeficientes de arrasto e de sustentação obtidos com o modelo de Reissner-Mindlin são de 1,9379 e $4,6172 \cdot 10^{-3}$, respectivamente. Para o regime de escoamento simulado, os valores encontrados na literatura (WHITE, 2011) para o coeficiente de arrasto de um cilindro rígido é de 1,9339. Da comparação dos coeficientes médios, observa-se que as respostas dinâmicas, apesar de localmente distintas, apresentam comportamentos médios similares. Devido aos pequenos deslocamentos, verifica-se que os coeficientes de arrasto obtidos são próximos daqueles encontrados na literatura para sólidos rígidos. Infere-se, portanto, que as respostas dinâmicas obtidas com os modelos de cascas curvilíneas e de placas são concordantes e condizentes com a literatura.

Figura 58 – Coeficiente de arrasto obtido com o modelo de cascas curvilíneas.



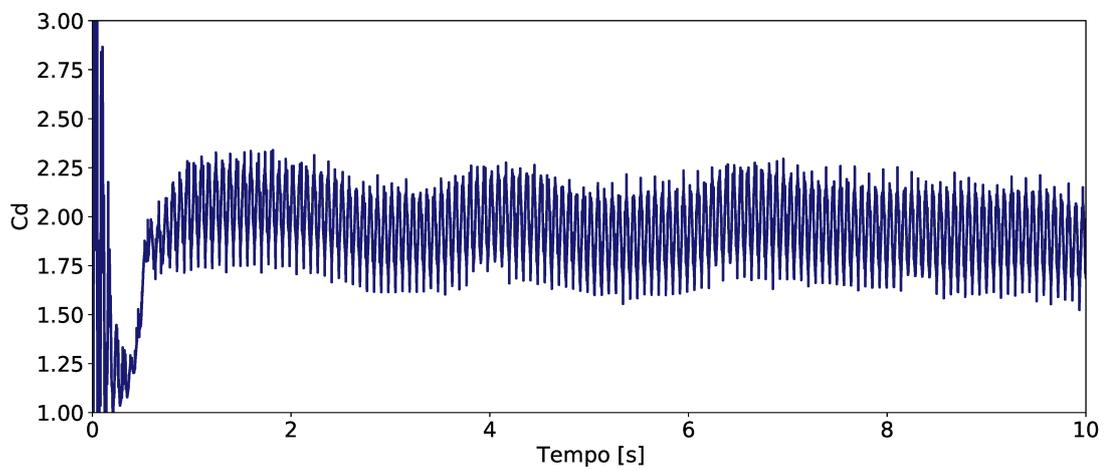
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 59 – Coeficiente de sustentação obtido com o modelo de cascas curvilíneas.



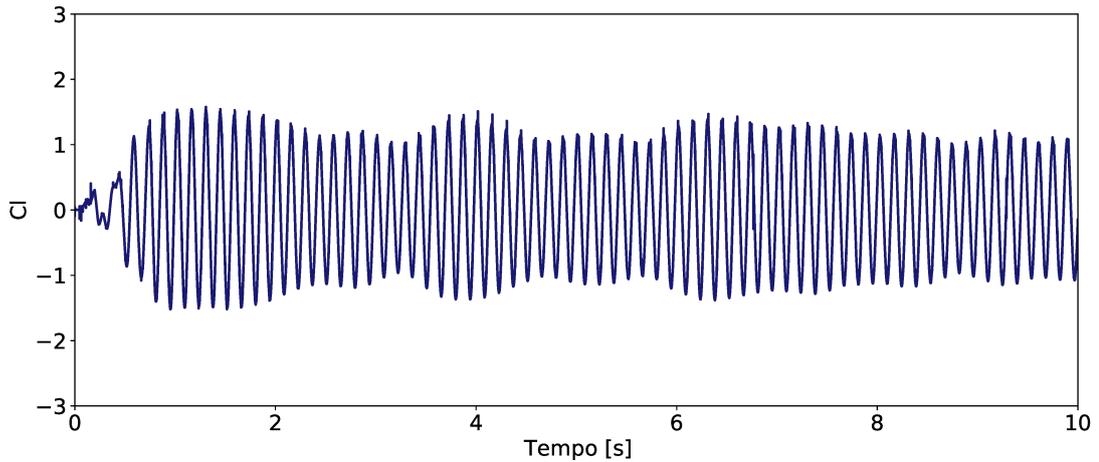
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 60 – Coeficiente de arrasto obtido com o modelo de Reissner-Mindlin.



Fonte: Elaborada pelo autor.

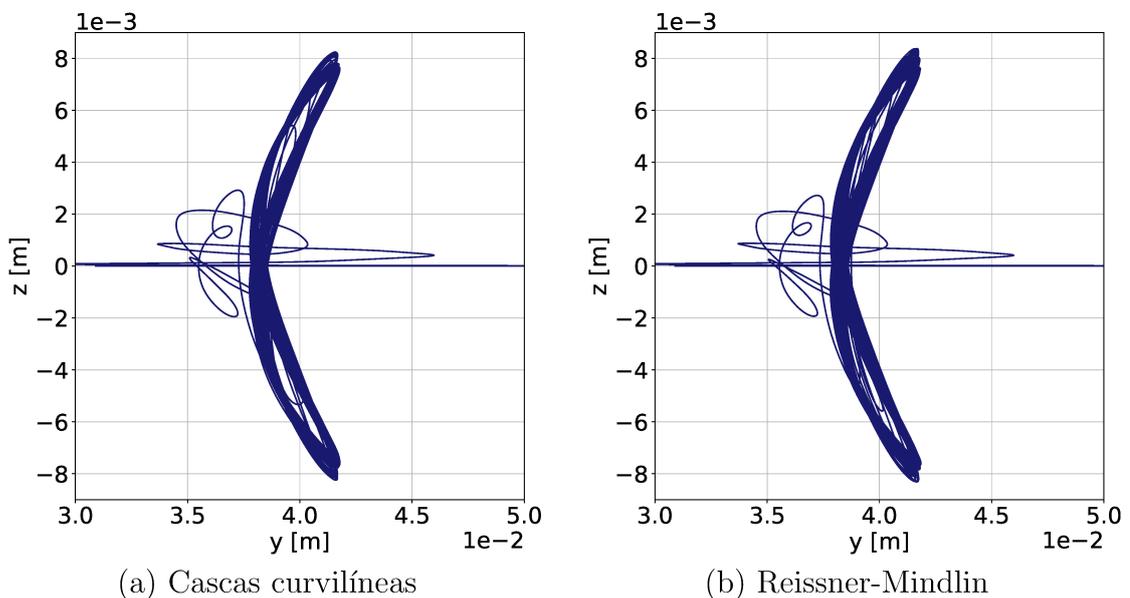
Figura 61 – Coeficiente de sustentação obtido com o modelo de Reissner-Mindlin.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 62 são apresentadas as curvas de posição da seção transversal intermediária obtidas com os modelos de cascas curvilíneas e de Reissner-Mindlin. Observa-se, mais uma vez, que as respostas dinâmicas são equivalentes. O maior deslocamento observado, com ambos os modelos, é de cerca de $7,2 \cdot 10^{-2} m$ e corresponde ao deslocamento devido ao movimento da massa de fluido inicialmente em repouso. Após este deslocamento inicial, a seção transversal intermediária retorna, em um movimento oscilatório na direção do escoamento, para o deslocamento de $3,8 \cdot 10^{-2} m$. Por fim, a subsequente formação de estruturas turbilhonares promove a introdução de componentes verticais que, quando combinadas às horizontais, relacionadas à resposta elástica da estrutura ao carregamento fluidodinâmico, produz um padrão de movimento semelhante a uma lemniscata distorcida na direção do escoamento.

Figura 62 – Movimento da seção transversal intermediária do cilindro bi-engastado em relação a sua posição inicial.



(a) Cascas curvilíneas

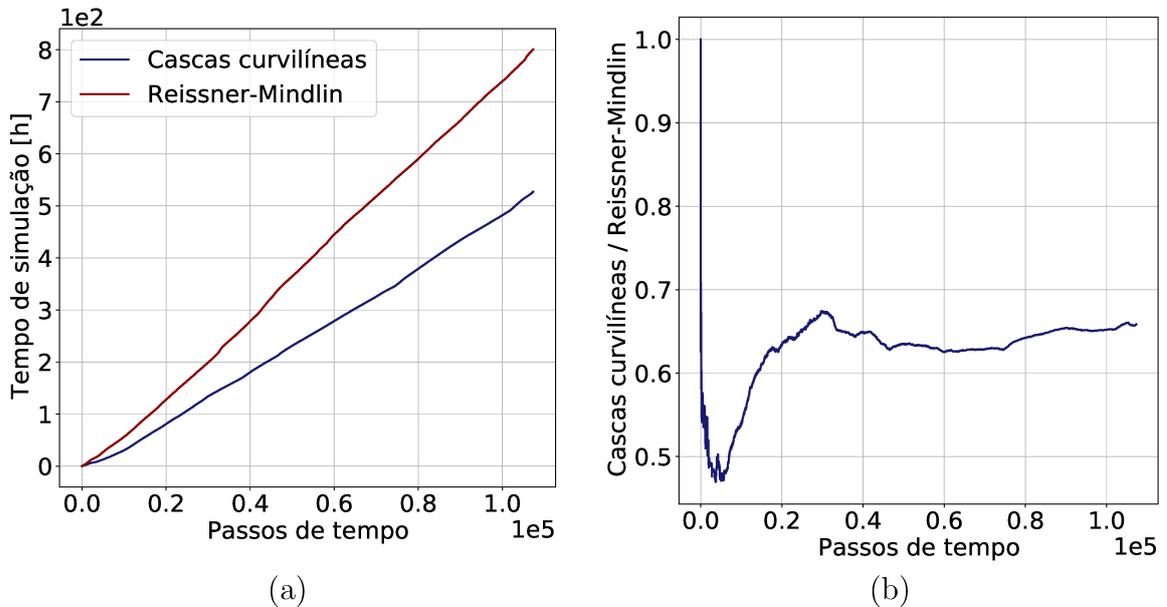
(b) Reissner-Mindlin

Fonte: Elaborada pelo autor.

Verifica-se que, em regime estatisticamente permanente, a estrutura apresenta um movimento vertical com amplitude de cerca de $1,6 \cdot 10^{-2} m$ e um movimento horizontal, na direção do escoamento, com amplitude de cerca de $3,6 \cdot 10^{-3} m$. Nota-se que a amplitude do movimento nas direções vertical e horizontal estão em concordância com as oscilações nos sinais dos coeficientes de sustentação e arrasto, respectivamente. Ainda, o padrão é simétrico em relação ao eixo $z = 0$, em concordância com um valor médio nulo para o coeficiente de sustentação, e deslocado em relação ao eixo $y = 0$, em concordância com o valor médio não nulo e bem definido do coeficiente de arrasto.

Na Figura 63.a, é apresentada a comparação entre os tempos de simulação para os modelos de cascas curvilíneas e de Reissner-Mindlin. Observou-se uma economia absoluta de cerca de 34,78 % de tempo de processamento. Apresenta-se ainda, na Figura (63.b), a razão entre os tempos de processamento para cada incremento temporal. A razão média entre os tempos de processamento por incremento, de cerca de 0,6270, indica uma economia média por passo de tempo equivalente à 37,30%. Uma economia média maior que a absoluta indica que o modelo desenvolvido apresentou melhor performance relativa em passos de tempo com menores custos computacionais. Dada a natureza do problema, infere-se que a performance do modelo desenvolvido se destaca sobremaneira àquela do modelo de placas para os passos associados à malhas numéricas menos refinadas, em concordância com o observado na Figura 63.b.

Figura 63 – Comparação do tempo de processamento para o escoamento sobre o cilindro bi-engastado com os modelos de cascas curvilíneas e de Reissner-Mindlin.



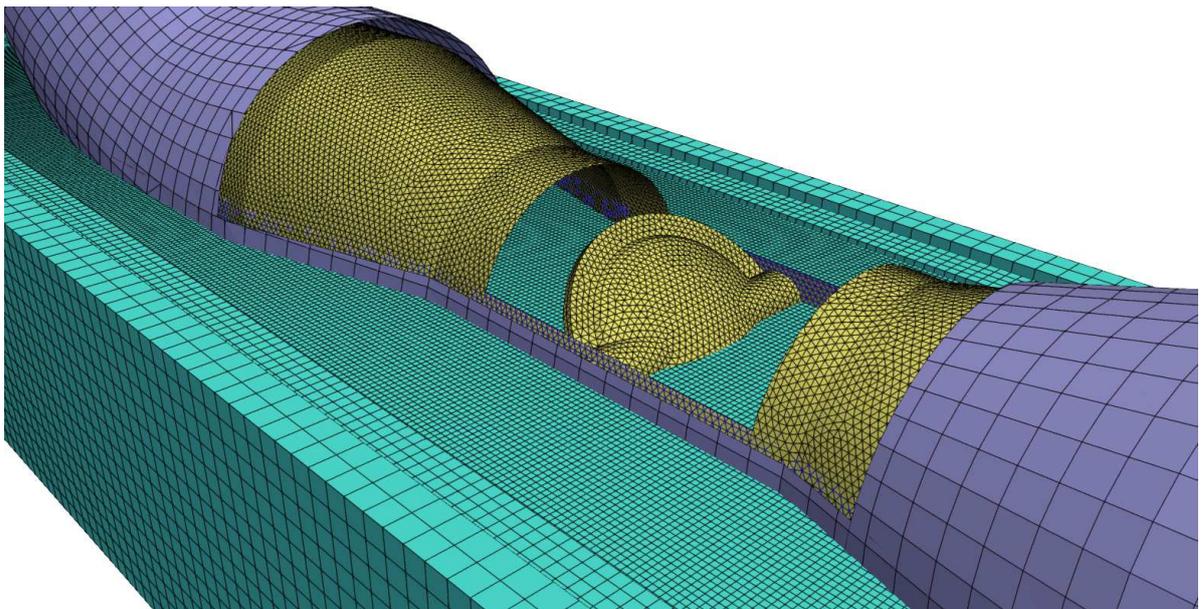
Fonte: Elaborada pelo autor.

6.7 Vibração de uma tubulação de UFCC

Nesta seção avalia-se a resposta dinâmica estrutural de um trecho de tubulação da Unidade de Craqueamento Fluido Catalítico ao escoamento interno para diferentes ângulos de abertura da válvula. Os resultados obtidos com o modelo de cascas curvilíneas são confrontados com aqueles obtidos com o modelo de Reissner-Mindlin. Realiza-se ainda uma comparação do tempo de processamento. As simulações são conduzidas com 64 núcleos, divididos em oito processadores Intel Xeon X5650, no cluster do Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia.

Nas primeiras iterações do caso, apresentadas no trabalho de Souza (2020), foram avaliadas grandes variações de abertura da válvula, sendo o ângulo de abertura $\alpha = 45^\circ$ aquele associado aos maiores deslocamentos. Neste sentido, apresenta-se, no presente trabalho, o estudo de uma faixa mais estreita de ângulos de abertura, como especificado na Tabela 14. Ressalta-se ainda que no trabalho de Souza (2020) admitiu-se a hipótese de que a camada de concreto semi-isolante possui pequena influência sobre a rigidez da estrutura, de forma que as propriedades físicas da estrutura foram tomadas como sendo aquelas do aço. No presente trabalho, entretanto, as propriedades físicas da estrutura são calculadas como uma função das propriedades do aço e do concreto, como indicado na seção 3.5.7. Considerando ainda que o trecho apresenta espessura variável, a estimativa das propriedades é imposta para cada nó da malha numérica segundo a Tabela 13.

Figura 64 – Vista em corte das malhas lagrangeanas e euleriana.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O subdomínio fluido, apresentado na Figura 12, é refinado localmente pelo critério

da presença de uma fronteira imersa. Uma vez que o escoamento interno é completamente compreendido pelo nível mais refinado, o refinamento dinâmico torna-se redundante. A malha euleriana é definida com quatro níveis de refinamento e um nível base de $64 \times 16 \times 16$ células. Admite-se um CFL de 0,45. Uma representação das malhas lagrangeanas, associadas ao modelo estrutural e à metodologia da Fronteira Imersa, é apresentada na Figura 64.

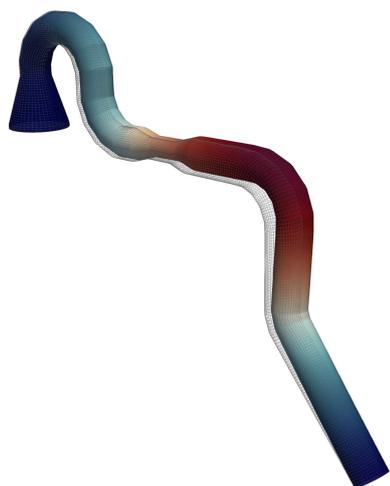
Visando a simplificação do problema e a redução do custo computacional, impõe-se à face direita do domínio euleriano, na área descrita pela interseção com a malha da fronteira imersa, um perfil de velocidade desenvolvido, segundo os valores da Tabela 14. Ressalta-se que esta condição não é particularmente apropriada para a modelagem refinada das condições de entrada após uma curvatura, que deveria apresentar um perfil assimétrico e uma forte influência de uma zona de recirculação.

Para a transformação modal, são utilizadas as informações dos 12 primeiros modos de vibrar da tubulação, apresentadas nas Figuras 65 e 66. A Tabela 25 apresenta a comparação entre os valores obtidos com modelos de casca curvilínea e Reissner-Mindlin. Os resultados obtidos por Souza (2020) são também incluídos na tabela. Observa-se que os modelos implementados apresentam resultados semelhantes para os modos e frequências naturais da estrutura. As propriedades físicas equivalentes, calculadas a partir das propriedades do aço e do concreto, proporcionaram um aumento significativo das frequências naturais da tubulação em relação aos resultados obtidos por Souza (2020). A inclusão de uma camada de concreto semi-isolante, altamente rígida, introduz resistências mecânicas mais severas ao modelo. Naturalmente, essa resistência se traduz em menores amplitudes e maiores frequências.

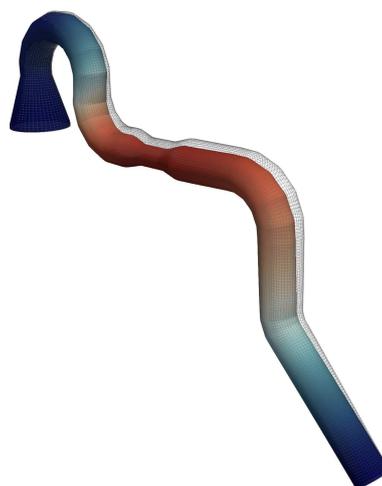
Tabela 25 – Comparação das frequências naturais da tubulação de UFCC [Hz].

Modo	Cascas Curvilíneas	Reissner-Mindlin	Souza (2020)
1	11, 8592	12, 0058	5, 4078
2	16, 5868	16, 8143	5, 8069
3	30, 2555	30, 3856	11, 3238
4	31, 2386	31, 4149	13, 3039
5	41, 9950	42, 7892	17, 6266
6	43, 9260	44, 0471	18, 8586
7	53, 3425	53, 7315	25, 1847
8	86, 6888	87, 2176	36, 0911
9	97, 1717	99, 8164	41, 8012
10	102, 7283	103, 5510	41, 9206
11	117, 3505	120, 1687	42, 9435
12	147, 5564	147, 9445	43, 9297

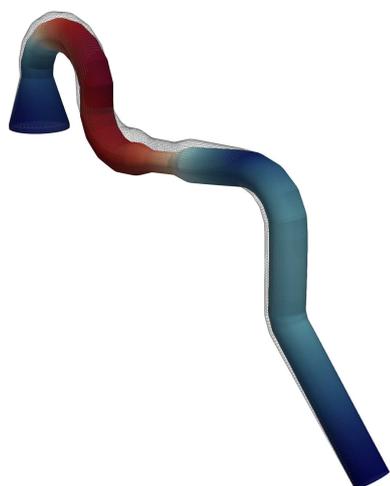
Figura 65 – Primeiro conjunto dos modos de vibrar da tubulação de UFCC.



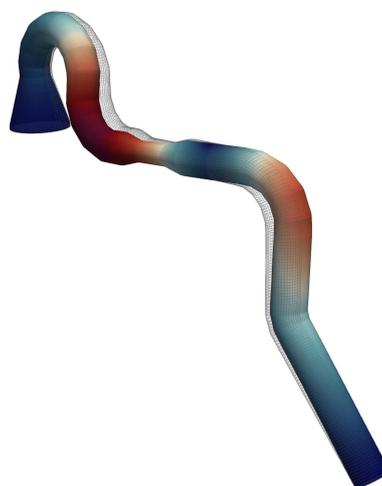
(a) $\omega_1 = 11,85920 \text{ Hz}$



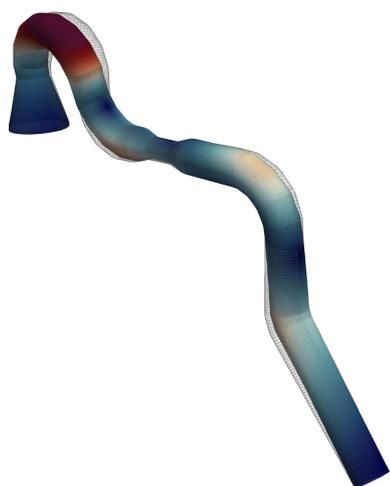
(b) $\omega_2 = 16,58681 \text{ Hz}$



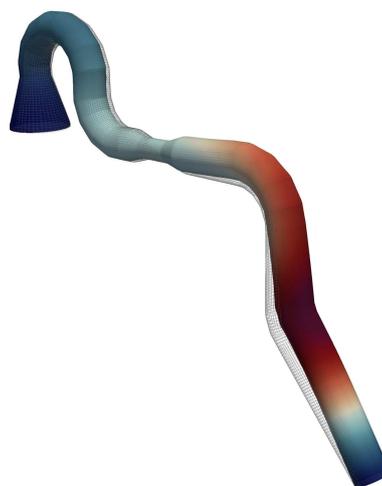
(c) $\omega_3 = 30,25548 \text{ Hz}$



(d) $\omega_4 = 31,23861 \text{ Hz}$



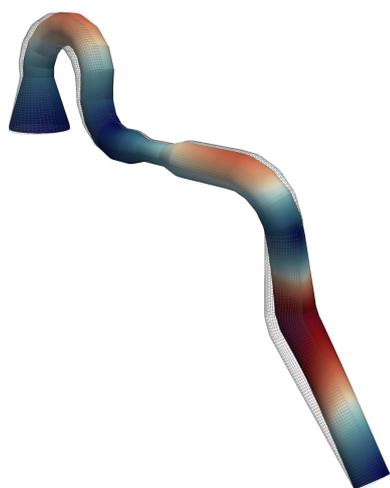
(e) $\omega_5 = 41,99504 \text{ Hz}$



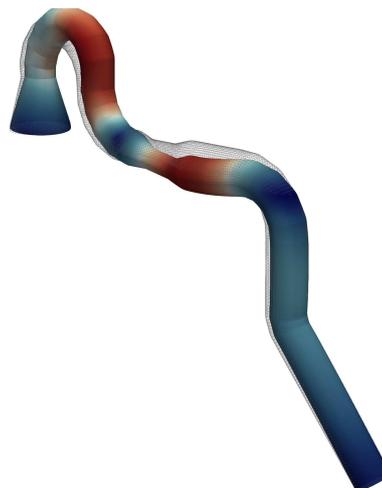
(f) $\omega_6 = 43,92597 \text{ Hz}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

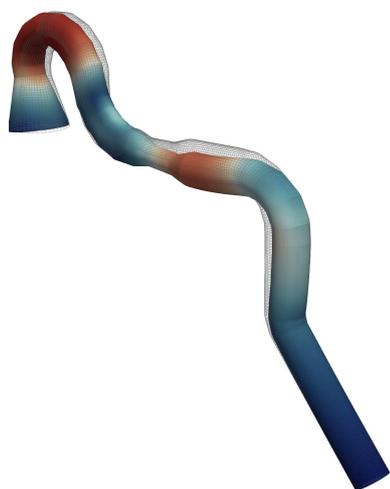
Figura 66 – Segundo conjunto dos modos de vibrar da tubulação de UFCC.



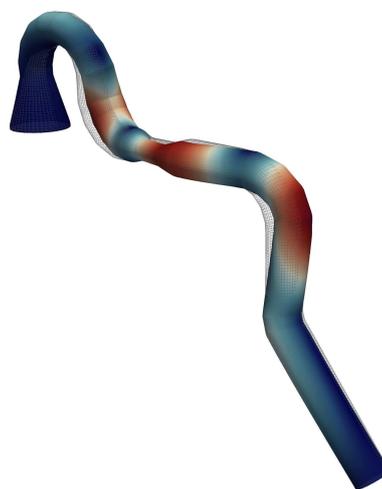
(a) $\omega_7 = 53,34249 \text{ Hz}$



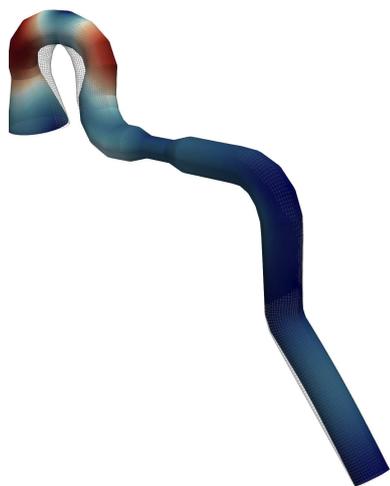
(b) $\omega_8 = 86,68877 \text{ Hz}$



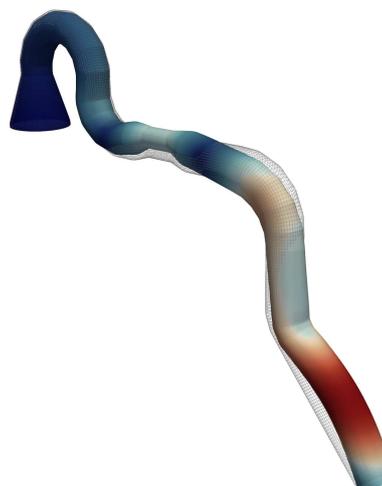
(c) $\omega_9 = 97,17173 \text{ Hz}$



(d) $\omega_{10} = 102,72825 \text{ Hz}$



(e) $\omega_{11} = 117,35048 \text{ Hz}$

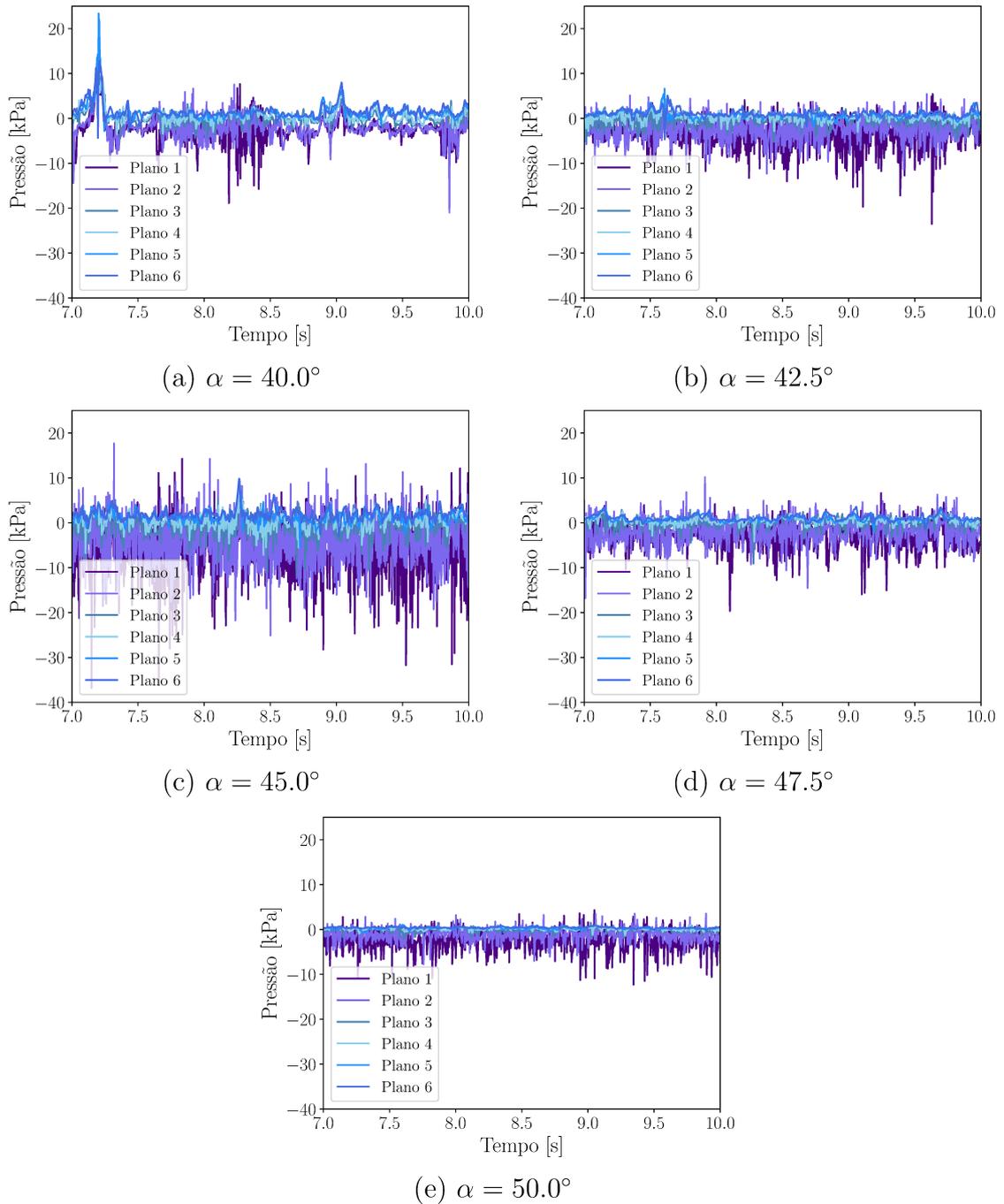


(f) $\omega_{12} = 147,55640 \text{ Hz}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

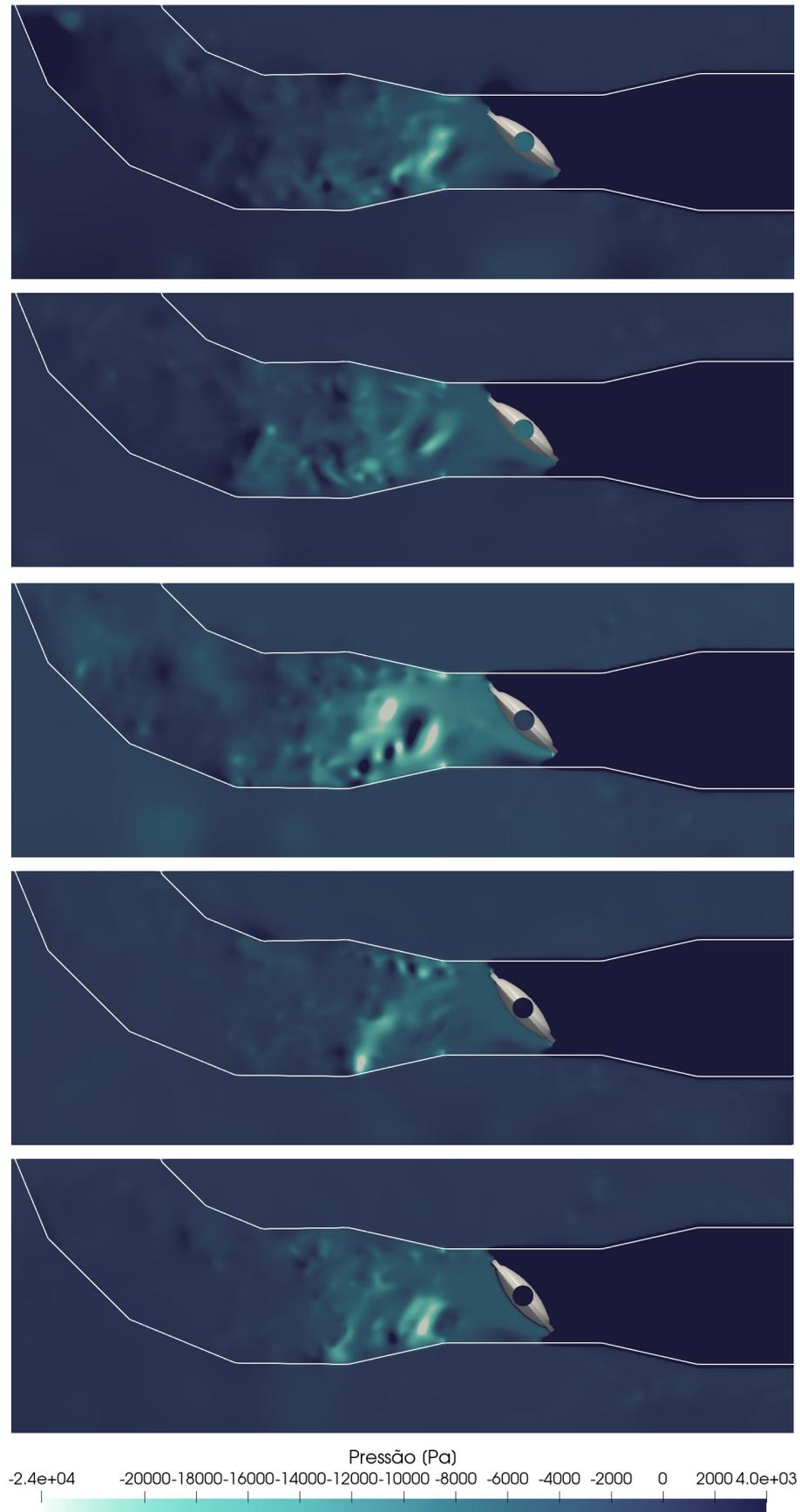
Sondas são posicionadas pelo subdomínio fluido no trecho à jusante da válvula, na proximidade da parede superior da estrutura. Os sinais obtidos de tais sondas são apresentados na Figura 67. Os gradientes mais significativos estão associados ao ângulo $\alpha = 45^\circ$. O mesmo resultado pode ser observado de forma qualitativa pelos campos de pressão, apresentados na Figura 68.

Figura 67 – Sondas de pressão.



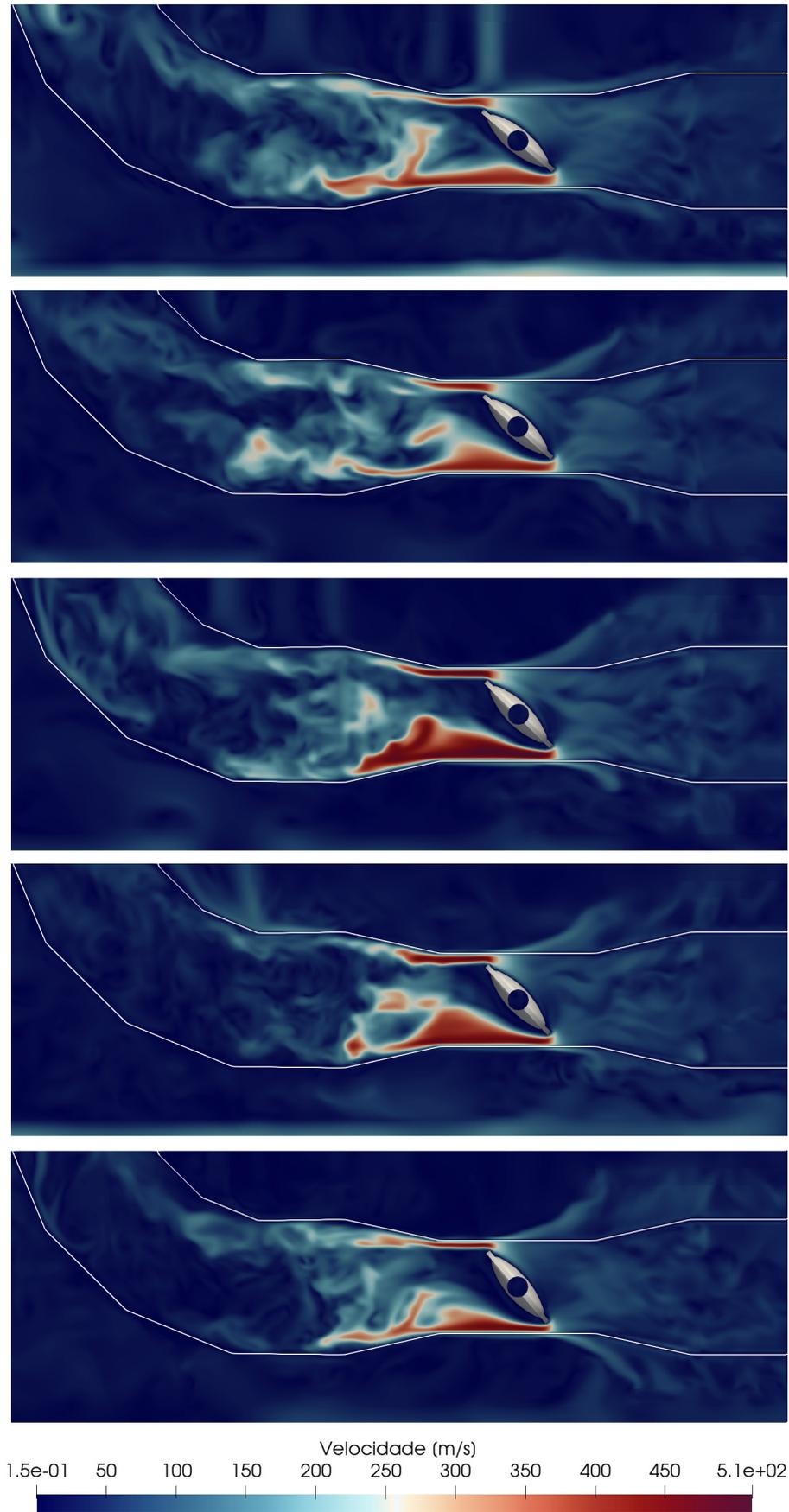
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 68 – Campo de pressão para ao escoamento no interior da tubulação de UFCC em $t = 10$ s.



Fonte: Elaborada pelo autor.

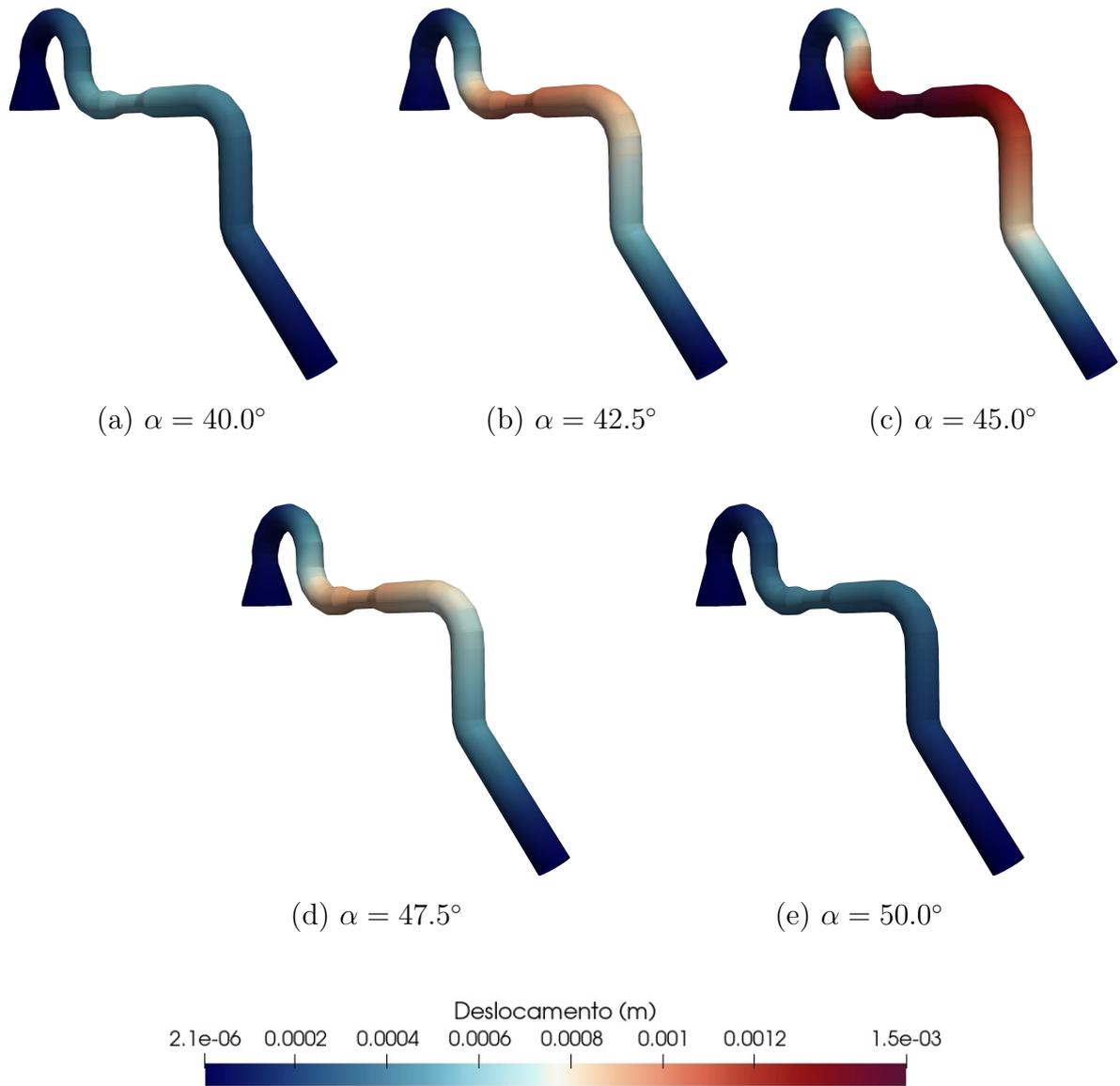
Figura 69 – Campo de velocidade para o escoamento no interior da tubulação de UFCC em $t = 10$ s.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a determinação das maiores amplitudes, um arquivo no formato VTK (*Visualization Toolkit Legacy Data*), contendo as informações do campo de deslocamento estrutural, é produzido a cada 10^{-2} s físicos de simulação. Para cada configuração do caso, determinam-se os pontos associados aos maiores deslocamentos e as frequências que compõem o sinal do vetor posição de tais pontos.

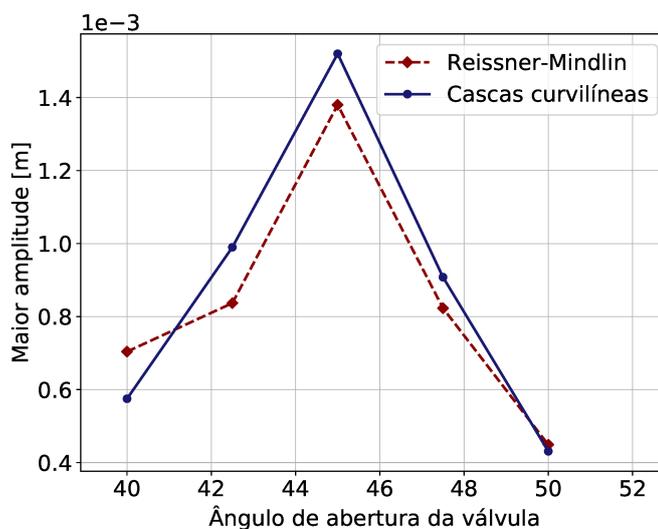
Figura 70 – Campos de deslocamento para o momento de maior amplitude global no intervalo $t \in [0, 10]$ s obtidos com o modelo de cascas curvilíneas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

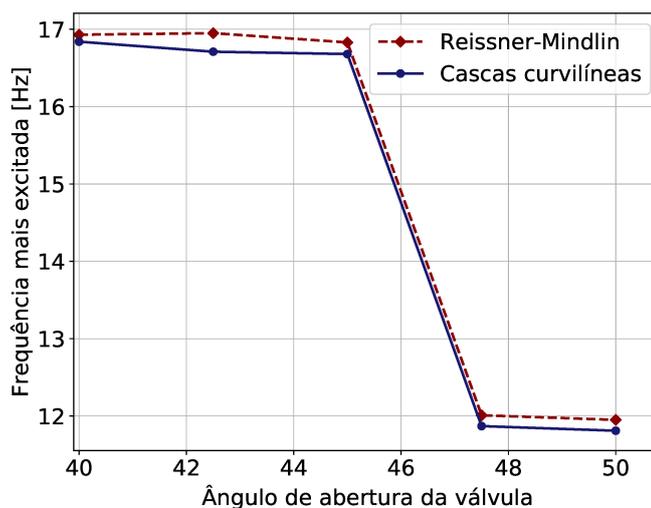
Na Figura 72 são apresentadas as frequências mais excitadas para cada ângulo de abertura da válvula. Observa-se que para os ângulos de 40.0° , 42.5° e 45.0° , o segundo modo de vibrar, associado à frequência de $16,58 \text{ Hz}$, é o mais excitado. Para os ângulos de 47.5° e 50.0° , o primeiro modo, associado à frequência de $11,86 \text{ Hz}$, é o mais excitado.

Figura 71 – Deslocamentos globais de maior amplitude.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 72 – Frequências mais excitadas para cada ângulo de abertura da válvula.



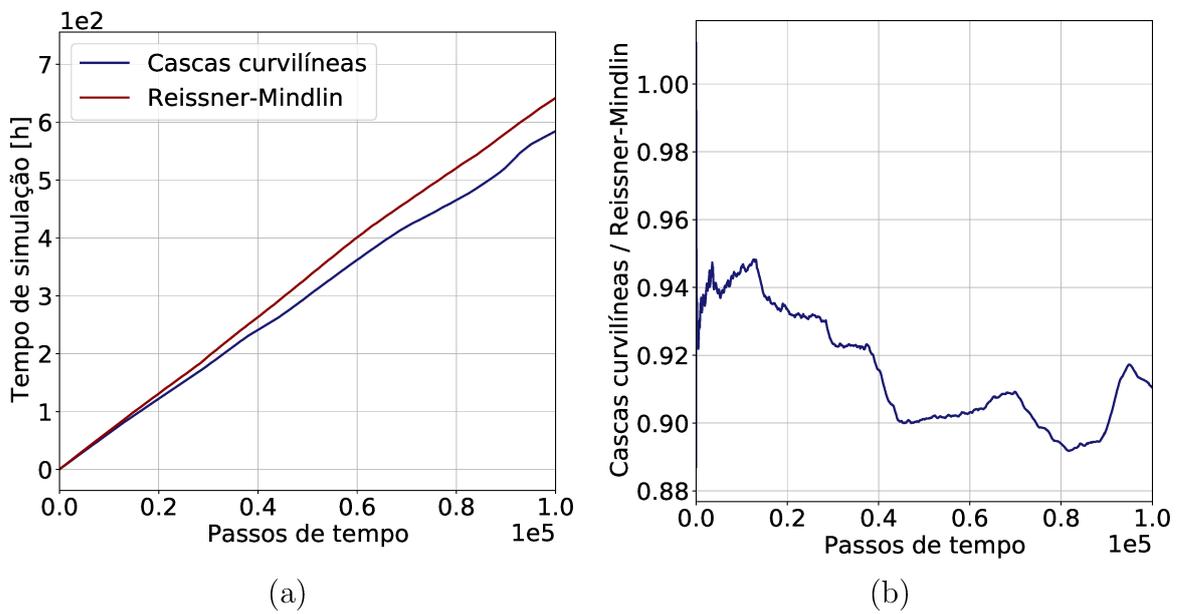
Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 73.a, é apresentada a comparação entre os tempos de simulação com os modelos de cascas curvilíneas e de Reissner-Mindlin. Para os primeiros 10^5 passos temporais, ou aproximadamente 640 horas de simulação com o modelo de placas, observou-se uma economia absoluta de cerca de 11,11 % de tempo de processamento. Apresenta-se ainda, na Figura (73.b), a razão entre os tempos de processamento para cada incremento temporal. A razão média entre os tempos de processamento por incremento, de cerca de 0,9137, indica uma economia média por passo de tempo equivalente à 8,63%. Uma economia absoluta maior que a média indica que, em contraste ao observado na última seção, o modelo desenvolvido apresentou melhor performance relativa em passos de tempo com maiores tempos de processamento. Dada a natureza do problema, infere-se que a performance do modelo desenvolvido se destaca sobremaneira ao modelo de placas em

passos de maior custo computacional associados ao modelo estrutural e de acoplamento.

A economia, apesar de significativamente inferior àquela observada em casos mais simples, como o escoamento turbulento sobre um cilindro deformável, ainda é considerável. A redução é menos representativa neste caso pelo alto nível de refinamento da malha numérico-computacional associada ao subdomínio fluido. Naturalmente, os ganhos obtidos pelo processamento do modelo estrutural são menos relevantes frente ao tempo total de processamento.

Figura 73 – Comparação do tempo de processamento para o escoamento no interior da tubulação de UFCC com os modelos de cascas curvilíneas e de Reissner-Mindlin.



Fonte: Elaborada pelo autor.

7 Conclusões e perspectivas

No presente trabalho, é apresentada a modelagem física, matemática e computacional de interação fluido-estrutura com elementos de casca curvilíneas por degeneração de elementos sólidos. As modelagens apresentadas compreendem escoamentos tridimensionais incompressíveis de fluidos newtonianos em regime transiente. A dinâmica do subdomínio sólido é modelada pelo Método dos Elementos Finitos, enquanto a dinâmica do subdomínio fluido é modelada pelo Método dos Volumes Finitos. A imposição das condições de contorno associadas à interação entre os subdomínios se dá pelo Método da Fronteira Imersa.

Rotinas computacionais são desenvolvidas e simulações são conduzidas a fim de validar o código e de analisar a influência de escoamentos sobre a dinâmica de estruturas de casca. As equações são resolvidas em um domínio tridimensional euleriano cartesiano fixo bloco-estruturado. Emprega-se a metodologia do passo fracionado para o acoplamento pressão-velocidade.

A partir dos resultados computacionais obtidos nos casos de validação, constata-se que a modelagem desenvolvida está em concordância com aquelas encontradas na literatura. Verifica-se ainda, da concordância entre os resultados obtidos com o modelo desenvolvido e aqueles obtidos via experimentação material, a modelagem apropriada dos fenômenos físicos pelo modelo numérico-computacional desenvolvido, bem como assegura-se a viabilidade do emprego da implementação para casos genéricos de interação fluido-estrutura para estruturas de casca e pequenas deformações.

A correta modelagem dos fenômenos físicos para escoamentos monofásicos laminares e turbulentos e para escoamentos bifásicos laminares evidencia a integração do modelo desenvolvido com os numerosos recursos do MFSim. Assim, o modelo implementado é complementar àqueles apresentados nos trabalhos de Ribeiro-Neto et al. (2019) e Souza (2020).

No primeiro estudo de caso, foi avaliada a influência do escoamento externo sobre a dinâmica de um trecho de tubulação deformável. Verifica-se a vibração induzida pela esteira de estruturas turbulentas e sua influência sobre a durabilidade do componente estrutural. Observou-se, neste caso, uma expressiva economia de recursos computacionais com o modelo de cascas curvilíneas, sendo o tempo de simulação com tal modelo 34,78 % inferior ao tempo de simulação com o modelo de placas, previamente implementado no código.

No segundo caso, avalia-se a influência do ângulo de abertura da válvula sobre o escoamento interno e, conseqüentemente, sobre a dinâmica da tubulação de UFCC.

Verifica-se que o ângulo de abertura da válvula é determinante à dinâmica estrutural. Aberturas próximas de 45° estão associadas aos regimes de vibração mais severos. Ainda, foi verificada uma mudança do modo mais excitado em função do ângulo de abertura da válvula. Os menores ângulos avaliados apresentaram maiores amplitudes para o sinal associado ao segundo modo de vibrar da estrutura. Para os ângulos de $47,5^\circ$ e $50,0^\circ$, em contrapartida, verificou-se que o sinal de maior amplitude está associado ao primeiro modo de vibrar da estrutura. Observou-se, neste caso, uma considerável economia de recursos computacionais com o modelo de cascas curvilíneas, sendo o tempo de simulação com tal modelo 11,11 % inferior ao tempo de simulação com o modelo de placas, previamente implementado no código.

Em trabalhos futuros a modelagem dos efeitos térmicos sobre a estrutura pode ser desenvolvida. Uma importante frente de desenvolvimento para o código é a inclusão de uma metodologia de contato, para modelagens estruturais ou de interação fluido-estrutura com elementos próximos e concorrentes no espaço. Uma possível frente é ainda o desenvolvimento de elementos estruturais para grandes deslocamentos.

Especificamente para os estudos de caso apresentados, uma avaliação dos tempos de processamento dos modelos estruturais pode ser conduzida para a solução do subdomínio sólido apenas. Para o escoamento no interior da tubulação de UFCC, pode-se incluir os efeitos térmicos e de compressibilidade do escoamento. Ainda, estudos podem ser desenvolvidos com o fim de determinar condições de entrada mais apropriadas para o trecho simulado.

Referências

AHMAD, S. *Curved finite elements in the analysis of solid shell and plate structures*. Tese (Doutorado) — University of Wales, Swansea, 1969.

AHMAD, S.; IRONS, B. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v. 2, n. 1, p. 419–451, 1970. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.1620020310>.

ANNEREL, S. et al. The upstream boundary condition influences the leaflet opening dynamics in the numerical fsi simulation of an aortic bmvh. *International Journal of Methods in Biomedical Engineering*, n. 1, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/cnm.2470>.

ARPACI, V. S.; LARSEN, P. S. *Convection Heat Transfer Slattery*. New York: Prentice Hall, 1984.

AVILA, I. A. M. et al. A discussion about numerical diffusion and dispersion on the numerical solution of one dimensional wave equation. *Brazilian Association of Mechanical Sciences and Engineering*, n. 11, 2018.

BAE, D. M. et al. Numerical simulation for the collision between side structure and level ice in event of side impact scenario. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 13, n. 1, p. 2991–3004, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1679-78252975>.

BARTH, T. J. et al. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Fluid-Structure Interaction: Modeling, Simulation, Optimization*. 1st edition. ed. New York: Springer, 2006. v. 1.

BASU, D.; GHOSH, K. K. Experimental validation of a generalized shell formulation by mixed finite element approach. *Computer and Structures*, v. 48, n. 1, p. 1–6, 1993. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(93\)90452-J](https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90452-J).

BATHE, K. J. A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 22, n. 1, p. 697–722, 1986. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.1620220312>.

BATOZ, J. L.; DHATT, G. *Modelisation des structures par éléments finis*. 1st edition. ed. New Castle: Hermes, 1990. v. 3.

BATOZ, J. L.; TAHAR, M. B. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v. 18, n. 1, p. 1655–1677, 1982. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.1620181106>.

BELYTSCHKO, T. A review of recent developments in plate and shell elements. *Computational Mechanics - Advances and Trends*, v. 75, n. 1, p. 25–69, 1986. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(85\)90061-6](https://doi.org/10.1016/0045-7949(85)90061-6).

- BELYTSCHKO, T. et al. Implementation and application of a 9-node lagrange shell element with spurious mode control. *Computers and Structures*, v. 20, n. 1, p. 121–128, 1985. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1016/0045-7949\(85\)90061-6⟩](https://doi.org/10.1016/0045-7949(85)90061-6).
- BELYTSCHKO, T. et al. Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. *Computational Methods Applied in Mechanical Engineering*, v. 51, n. 1, p. 221–258, 1985. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90035-0⟩](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90035-0).
- BERGER, M.; RIGOUTSOS, I. An algorithm for point clustering and grid generation. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, v. 21, n. 5, p. 1278–1286, 1991. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1109/21.120081⟩](https://doi.org/10.1109/21.120081).
- BERGER, M. J.; OLIGER, J. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, v. 35, n. 1, p. 484, 1984. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1016/0021-9991\(84\)90073-1⟩](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90073-1).
- BISCHOFF, M. et al. *Models and Finite Elements for Thin-walled Structures - Encyclopedia of computational Mechanics*. 1st edition. ed. Winsconsin: John Wiley, 2004. v. 2. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1002/9781119176817.ecm2026⟩](https://doi.org/10.1002/9781119176817.ecm2026).
- BLOM, F. J. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 167, n. 3-4, p. 369–391, 1998. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00151-0⟩](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00151-0).
- BRUMMELEN, E. H. V. Added mass effects of compressible and incompressible flows in fluid-structure interaction. *Journal of Applied Mechanics*, v. 76, n. 1, p. 121–137, 2009. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1115/1.3059565⟩](https://doi.org/10.1115/1.3059565).
- BUCALEM, M. L.; BATHE, K. J. *Finite Element Analysis of Shell Structures*. 1st edition. ed. Barcelona: CIMNE, 1997. v. 1. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1007/BF02818930⟩](https://doi.org/10.1007/BF02818930).
- BUDIANSKY, B.; SANDERS, J. L. *On the best first order linear shell theory*. 1st edition. ed. New York: MacMillan, 1963.
- BUKAC, M. et al. Fluid–structure interaction between pulsatile blood flow and a curved stented coronary artery on a beating heart: A four stent computational study. *Computational Methods Applied in Mechanical Engineering*, v. 350, n. 1, p. 679–700, 2019. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.03.034⟩](https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.03.034).
- CALLADINE, C. R. *The theory of shell structures*. 1th edition. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. v. 1.
- CHANDRASEKHARAIHAH, D. S.; DEBNATH, L. *Continuum Mechanics*. [S.l.]: Academic Press, 1994.
- CHAO, W. C.; REDDY, J. N. Analysis of laminated composite shells using a degenerated 3d element. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v. 2, n. 1, p. 181–187, 1984. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1002/nme.1620201104⟩](https://doi.org/10.1002/nme.1620201104).
- CHONG, M. S.; PERRY, A. E.; CANTWELL, B. J. A general classification of three-dimensional flow fields. *Phys. Fluids*, v. 2, p. 765–777, 1990. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1063/1.857730⟩](https://doi.org/10.1063/1.857730).

CHORIN, A. J. The numerical solution of the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid. *Bulletin of the american mathematical society*, v. 73, p. 1195–1232, June 1967. ISSN 1088-9485. Disponível em: <https://www.ams.org/journals/bull/1967-73-06/S0002-9904-1967-11853-6/S0002-9904-1967-11853-6.pdf>.

CHUNG, H. Free vibration analysis of circular cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, v. 74, n. 3, p. 331–350, 1980. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(81\)90303-5](https://doi.org/10.1016/0022-460X(81)90303-5).

CIMBALA, J. M.; ÇENGEL, Y. A. *Mecânica dos Fluidos, Fundamentos e Aplicações*. Londres: McGraw Hill, 2007.

CLARK, R. A.; FERZIGER, J. H.; REYNOLDS, W. C. Evaluation of subgrid model using an accurately simulated turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 91, p. 1–16, 1979. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/S002211207900001X>.

CLOUGH, R. W.; TOCHER, J. L. Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending. *University of California, Berkeley; The Boeing Company*, v. 1, n. 1, p. 515–546, 1966. Disponível em: <http://contrails.iit.edu/items/show/8574>.

COOK, R. D. et al. *Concepts and applications of finite element analysis*. 4th edition. ed. University of Wisconsin - Madison: John Wiley, 2001. v. 1.

COURANT, R.; FRIEDERICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, v. 11, n. 2, p. 215–234, 1967. Disponível em: <https://doi.org/10.1147/rd.112.0215>.

CRISCO, J. J.; WOLFE, S. W. *Mechanical Testing of Orthopaedic Implants*. 1st edition. ed. Woodhead Publishing: Elsevier, 2017. v. 1. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-100286-5.00005-6>.

CRUZ, M. L. S.; CARILLO, J.; ALMEIDA, S. F. M. Effect of thermal residual stresses on buckling and post-buckling properties of laminated composites perimetally reinforced. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 13, n. 3, p. 435–455, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1679-78251828>.

DOOMS, D. et al. Finite element modelling of a silo based on experimental modal analysis. *Engineering Structures*, v. 28, n. 1, p. 532–542, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2005.09.008>.

DORMAND, J. R.; PRINCE, P. J. A family of embedded runge-kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 1, p. 19–26, 1980. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0771-050X\(80\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0771-050X(80)90013-3).

FARHAT, C.; LESOINNE, M.; LETALLEC, P. Load and motion transfer algorithms for fluid-structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 157, n. 1, p. 95–114, 1998. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00216-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00216-8).

FELIPPA, C. A.; PARK, K. C.; FARHAT c. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 24-25, p. 3247–3270, 2001. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(00\)00391-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00391-1).

FERNANDES, J. W. D. *Interação Fluido-Estrutura com escoamentos incompressíveis utilizando o Método dos Elementos Finitos*. Tese (Doutorado) — University of São Paulo, São Carlos, 2016.

FEZANS, G.; VERSCHERY, G. Some results on the behaviour of degenerated shells (ds) elements. *Nuclear Engineering and Design*, v. 70, n. 1, p. 303–312, 1982. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(82\)90264-3](https://doi.org/10.1016/0029-5493(82)90264-3).

FOSTER, C.; WALL, W. A.; RAMM, E. The artificial added mass effect in sequential staggered fluid-structure interaction algorithms. *European Conference on the Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD*, 2006. Disponível em: <http://resolver.tudelft.nl/uuid:f6316ca6-b02a-4a6f-b5ad-4e2f6744c7de>.

FUJITA, K. Flow-induced vibration and fluid-structure interaction in nuclear power plant components. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 33, n. 1-2, p. 405–418, 1990. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0167-6105\(90\)90056-I](https://doi.org/10.1016/0167-6105(90)90056-I).

GAHORIAN, A.; ABDULLAH, M. R. *Trauma Plating Systems*. 1st edition. ed. Elsevier: Elsevier, 2017. v. 1.

GALLAGHER, R. H. *Finite Element Analysis Fundamentals*. 1th edition. ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1975. v. 3.

GALLAGHER, R. H. Shell elements. *World Conference on Finite Element Methods in Structural Mechanics*, v. 35, n. 1, 1975.

GERMANO, M. et al. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids*, v. 3, n. 7, p. 1760, 1991. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.857955>.

GOLDGRUBER, M.; SHAHRIARI, S.; ZENZ, G. Influence of damping and different interaction modelling on a high arch dam. *Vienna Congress on Recent Advances in Earthquake Engineering and Structural Dynamics (VEESD2013)*, v. 1, n. 559, p. 1–10, 2013.

GOODWIN, D. G. Cantera: An object-oriented software toolkit for chemical kinetics, thermodynamics and transport processes. v. 2.4.0, 2018.

GREIMANN, L. F.; LYNN, P. P. Finite element analysis of plate bending with transverse shear deformation. *Nuclear Engineering and Design*, v. 14, n. 1, p. 223–230, 1970. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(70\)90101-9](https://doi.org/10.1016/0029-5493(70)90101-9).

GUILLAUME, M. et al. Fluid structure interaction simulation on the f/a-18 vertical tail. *American Institute of Aeronautics and Astronautics - 40th Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, v. 1, n. 4613, p. 1–16, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/6.2010-4613>.

HAN, P. et al. Vibration analysis of rotating cross-ply laminated cylindrical, conical and spherical shells by using weak-form differential quadrature method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 42, n. 3, p. 352–371, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s40430-020-02434-y>.

HARLOW, F. H.; WELCH, J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface. *Physics of Fluids*, v. 8, p. 2182–2189, 1965. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.1761178>.

- HENGSTLER, J.; DUAL, J. *Fluid structure interaction of a vibrating circular plate in a bounded fluid volume: simulation and experiment*. 1st edition. ed. New Forest National Park, England: WIT Press, 2011. v. 115. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.2495/FSI110011⟩](https://doi.org/10.2495/FSI110011).
- HESSENTHALER, A. et al. 3d fluid-structure interaction experiment and benchmark results. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, v. 16, n. 1, p. 451–452, 2016. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1002/pamm.201610214⟩](https://doi.org/10.1002/pamm.201610214).
- HIRSCHHORN, M. et al. Fluid–structure interaction modeling in cardiovascular medicine: A systematic review 2017–2019. *Medical Engineering and Physics*, v. 72, n. 1, p. 106–119, 2020. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2020.01.008⟩](https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2020.01.008).
- HIRT, C. W.; NICHOLS, B. D. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 39, p. 201–225, 1981. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90145-5⟩](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90145-5).
- HOFSTEDE, E. *Numerical Study of Fluid Structure Interaction in Nuclear Reactor Applications*. Tese (Doutorado) — Delft University of Technology, Delft, 2015.
- HRON, J.; MADLIK, M. Fluid-structure interaction with applications in biomechanics. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 8, n. 5, p. 1431–1458, 2007. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2006.05.007⟩](https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2006.05.007).
- HUANG, S.; LI, R.; LI, Q. S. Numerical simulation on fluid-structure interaction of wind around supper-tall building at high reynolds number conditions. *The 2012 World Congress on Advances in Civil, Environmental, and Materials Research (ACEM 12)*, v. 1, n. 1, p. 3075–3091, 2012. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.12989/sem.2013.46.2.197⟩](https://doi.org/10.12989/sem.2013.46.2.197).
- HUBNER, B.; WALHORN, E.; DINLKER, D. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. *Computational Methods Applied to Mechanical Engineering*, v. 193, n. 1, p. 2087–2104, 2004. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.01.024⟩](https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.01.024).
- HUNT, J. C. R.; WRAY, A.; MOIN, P. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. *Proceedings of the Summer Program*, v. 1, p. 193–208, 1988.
- KANT, T.; KUMAR, S.; SINGH, U. P. Shell dynamics with three-dimensional degenerate finite elements. *Computers and Structures*, v. 50, n. 1, p. 135–149, 1994. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1016/0045-7949\(94\)90444-8⟩](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)90444-8).
- KHOSRONEJAD, A.; KANG, S.; SOTIROPOULOS, F. Experimental and computational investigation of local scour around bridge piers. *Advances in Water Resources*, v. 37, p. 73–85, 2012. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2011.09.013⟩](https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2011.09.013).
- KOITER, W. T. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. v. 2, n. 1, 1960.
- KRAUS, H. *Thin elastic shells*. 1th edition. ed. [S.l.]: J. Wiley, 1967. v. 1.
- LEE, C. J. K.; NOGUCHI, H.; KOSHIZUKA, S. Fluid-shell structure interaction analysis by coupled particle and finite element method. *Computers and Structures*, v. 85, n. 1, p. 688–697, 2007. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.01.019⟩](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.01.019).

- LEE, S. J.; HAN, S. E. Free-vibration analysis of plates and shells with a nine-node assumed natural degenerated shell element. *Journal of Sound and Vibration*, v. 241, n. 4, p. 605–633, 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3313>.
- LEONARD, A. On the energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows. *Advanced Geophysics*, v. 184A, p. 237–248, 1974. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0065-2687\(08\)60464-1](https://doi.org/10.1016/S0065-2687(08)60464-1).
- LESIEUR, M. *Turbulence in Fluids*. 4th edition. ed. Dordrecht, Holanda: Springer, 2008.
- LIANG, C. C. The free vibration analysis of submerged cantilever plates. *Ocean Engineering*, v. 28, n. 9, p. 1225–1245, 2001. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0029-8018\(00\)00045-7](https://doi.org/10.1016/S0029-8018(00)00045-7).
- LILLY, D. K. A. A proposed modification of the germano subgrid-scale closure method. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, v. 4, n. 3, p. 633–635, 1992. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.858280>.
- LINDHOLM, U. Elastic vibration characteristics of cantilever plates in water. *Journal of Ship Research*, v. 9, n. 1, p. 123, 1965. Disponível em: <https://doi.org/10.5957/jsr.1965.9.2.11>.
- LIU, J. et al. Effective finite element model in-loop system of laminated cylindrical structure for multiple inputs and multiple outputs active vibration control. *Journal of low frequency noise, vibration and active control*, v. 38, n. 2, p. 664–683, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1177/1461348419829615>.
- LOVE, A. E. H. On the small free vibrations and deformations of elastic shells. *Philosophical trans. of the Royal Society*, v. 1, n. 17, p. 491–549, 1888. Disponível em: <https://doi.org/10.1098/rspl.1887.0146>.
- MANSUR, S. S.; RIO, E. D.; SILVEIRA-NETO, A. *Turbulência*. 7th edition. ed. Rio de Janeiro: Brazilian Society of Engineering and Mechanical Sciences, 2010.
- MAO, W. et al. Fully-coupled fluid-structure interaction simulation of the aortic and mitral valves in a realistic 3d left ventricle model. *PLoS One*, v. 12, n. 9, p. 1–21, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0184729>.
- MARGUERRE, K. Zur theorie der gekrummten platte grosser formänderung. *5th International Congress of Applied Mechanics*, v. 1, n. 1, p. 98–101, 1938.
- MARINKOVIC, D.; KOPPE, H.; GABBERT, U. Degenerated shell element for geometrically nonlinear analysis of thin-walled piezoelectric active structures. *Smart Materials and Structures*, v. 17, n. 1, p. 11–20, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/17/01/015030>.
- MATTHIES, H. G.; NIEKAMP, R.; STEINDORF, J. Algorithms for strong coupling procedures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 17-18, p. 2028–2049, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.032>.
- MELO, R. R. S. *Modelagem e simulação de escoamentos turbulentos com efeitos térmicos, utilizando a metodologia da fronteira imersa e malha adaptativa*. Tese (Doutorado) — Federal University of Uberlândia, Uberlândia, 2017.

MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, v. 18, n. 1, p. 31–38, 1951. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.4010217>.

MITCHEL, A. K.; HAZELL, C. R. A simple frequency formula for clamped rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, v. 118, n. 2, p. 271–281, 1986. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(87\)90525-6](https://doi.org/10.1016/0022-460X(87)90525-6).

NAGHDI, P. M. *The theory of shells and plates. Handbuch der Physik*. 1th edition. ed. [S.l.]: Springer Verlag, 1972. v. 1.

OLSON, M. D.; LINDBERG, G. M. Dynamic analysis of shallow shells with a doubly-curved triangular finite element. *Journal of Sound and Vibration*, v. 19, n. 3, p. 299–318, 1971. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(71\)90691-2](https://doi.org/10.1016/0022-460X(71)90691-2).

ONATE, E. *Structural Analysis with The Finite Element Method*. 1st edition. ed. Barcelona: Springer-CIMNE, 2009. v. 1.

ONATE, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method*. 1st edition. ed. Barcelona: Springer, 2012. v. 2.

ORLANSKI, I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal of Computational Physics*, v. 21, p. 251–269, 1976. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(76\)90023-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(76)90023-1).

PANG, F. et al. A series solution for the vibration of mindlin rectangular plates with elastic point supports around the edges. *Shock and Vibration - Hindawi*, v. 1, n. 1, p. 1–21, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/2018/8562079>.

PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: a numerical method. *Journal of Computational Physics*, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(72\)90065-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(72)90065-4).

PIPERNO, S. Explicit-implicit fluid-structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2d inviscid aeroelastic simulations. *International Journal of Numerical Methods for Fluids*, v. 25, n. 1, p. 1207–1226, 1997. Disponível em: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19971130\)25:10<1207::AID-FLD616>3.0.CO;2-R](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19971130)25:10<1207::AID-FLD616>3.0.CO;2-R).

PONTAZA, J. P.; MENON, R. G. On the numerical simulation of fluid-structure interaction to estimate the fatigue life of subsea pipeline spans: Effects of wall proximity. *Proceedings of the ASME 2010 29th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, v. 6, n. 1, p. 817–827, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/OMAE2010-20804>.

PRABOWO, A. R.; PUTRANO, T.; SOHN, J. M. Simulation of the behavior of a ship hull under grounding: Effect of applied element size on structural crashworthiness. *Marine Science and Engineering*, v. 7, n. 270, p. 1–15, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/jmse7080270>.

RAO, S. S. *Vibrações Mecânicas*. 4th edition. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2014.

REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, v. 2, n. 1, p. 68–77, 1945. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.4009435>.

RIBEIRO-NETO, H. *Modelagem matemática para interação fluido estrutura acoplado escoamentos incompressíveis e viga de Timoshenko*. Tese (Doutorado) — Federal University of Uberlândia, Uberlândia, 2016.

RIBEIRO-NETO, H. et al. Influence of seabed proximity on the vibration responses of a pipeline accounting for fluid-structure interaction. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 114, n. 1, p. 224–238, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2018.05.017>.

ROMA, A. M.; PESKIN, C. S.; BERGER, M. J. An adaptative version of the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 153, n. 1, p. 509–534, 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6293>.

SAETTA, A. V.; VITALIANI, R. V. A finite element formulation for shells of arbitrary geometry. *Computer and Structures*, v. 37, n. 5, p. 781–793, 1990. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(90\)90108-E](https://doi.org/10.1016/0045-7949(90)90108-E).

SILVEIRA-NETO, A. *Escoamentos turbulentos*. 1st edition. ed. Uberlândia: Composer, 2020.

SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. part i. formulations and optimal parametrizations. *Computer Methods Applied in Mechanical Engineering*, v. 72, n. 1, p. 267–304, 1989. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(89\)90002-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(89)90002-9).

SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with primitive equations. *Mon. Weather Rev.*, v. 91, p. 99–164, 1963. Disponível em: [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1963\)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1963)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2).

SOGANCI, S. Fluid structure interaction in a beating human whole heart with flowvision and abaqus. *NAFEMS European Conference: Multiphysics Simulation*, v. 1, n. 1, 2016.

SOTIROPOULOS, F.; YANG, X. Immersed boundary methods for simulating fluid-structure interaction. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 65, n. 1, p. 1–21, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2013.09.003>.

SOUZA, P. R. C. *Modelagem matemática e computacional da interação fluido-estrutura utilizando elementos de placa e a metodologia LES em um ambiente de malha adaptativa*. Tese (Doutorado) — Federal University of Uberlândia, Uberlândia, 2020.

STICKAN, B.; DILLINGER, J.; SCHEWE, G. Computational aeroelastic investigation of a transonic limit-cycle-oscillation experiment at a transport aircraft wing model. *Journal of Fluids and Structures*, v. 1, n. 14, p. 1–19, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2014.04.014>.

TAGAWA, H. et al. Detailed finite element analysis of full-scale four-story steel frame structure subjected to consecutive ground motions. *International Journal of High-Rise Buildings*, v. 4, n. 1, p. 65–73, 2015.

TEZDUYAR, T. E. et al. Finite element modeling of fluid-structure interactions with space-time and advanced mesh update techniques. *Proceedings of the 10th International Conference on Numerical Methods in Continuum Mechanics*, v. 1, n. 5, p. 1–20, 2005.

UHLMANN, M. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. *Journal of Computational Physics*, v. 209, n. 2, p. 448–476, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.03.017>.

VALLE, J. M. M.; ALBANESI, A.; FACHINOTTI, V. An efficient general curvilinear coordinates finite element method for the linear dynamic study of thickness-independent shells. *Latin America Journal of solids and structures*, v. 16, n. 5, p. 1–26, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1679-78255353>.

VASOV, V. Z. *General theory of shells and its application to engineering*. 1th edition. ed. [S.l.]: NASA TTF-99, 1964. v. 1.

VILLAR, M. M. *Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais*. Tese (Doutorado) — Federal University of Uberlândia, Uberlândia, 2007.

WANG, C. Y.; WANG, C. M. *Structural Vibration: Exact Solutions for Strings, Membranes, Beams and Plates*. 1st edition. ed. New York: CRC Press, 2014. v. 1.

WEMPNER, G. A. *Mechanics of solids with applications to thin bodies*. 1th edition. ed. [S.l.]: Sijthoff and Noordhoff, 1981. v. 1.

WHITE, F. M. *Fluid Mechanics*. 6th edition. ed. [S.l.]: McGraw Hill, 2011.

WIGGERT, D. C.; TIJSSELING, A. S. Fluid transients and fluid-structure interaction in flexible liquid-filled piping. *Applied Mechanics*, v. 54, n. 5, p. 455–481, 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.1404122>.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. 6th edition. ed. Elsevier, 2005. v. 1. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/B978-075066431-8/50188-0>.