

Hélio Ribeiro Neto

**Modelagem matemática e computacional  
de acoplamento fluido–estrutura em  
ambiente paralelo e com malha adaptativa**

Uberlândia

2021

Hélio Ribeiro Neto

**Modelagem matemática e computacional de  
acoplamento fluido–estrutura em ambiente paralelo  
e com malha adaptativa**

Universidade Federal de Uberlândia–UFU

Faculdade de Engenharia Mecânica

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Coorientador: Prof. Dr. João Marcelo Vedovotto

Uberlândia

2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

R484 2021	<p>Ribeiro Neto, Hédio, 1991- Modelagem matemática e computacional de acoplamento fluido-estrutura em ambiente paralelo e com malha adaptativa [recurso eletrônico] / Hédio Ribeiro Neto. - 2021.</p> <p>Orientador: Aristeu da Silveira Neto. Coorientador: João Marcelo Vedovotto. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Modo de acesso: Internet. Disponível em: <a href="http://doi.org/10.14393/ufu.te.2021.412">http://doi.org/10.14393/ufu.te.2021.412</a> Inclui bibliografia.</p> <p>1. Engenharia mecânica. I. Silveira Neto, Aristeu da , 1955-, (Orient.). II. Vedovotto, João Marcelo, 1981-, (Coorient.). III. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.</p> <p>CDU: 621</p>
--------------	---

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br

**ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO**

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Tese de Doutorado Acadêmico, 314, COPEM				
Data:	29/07/2021	Hora de início:	08:00	Hora de encerramento:	10:30
Matrícula do Discente:	11623EMC006				
Nome do Discente:	Hélio Ribeiro Neto				
Título do Trabalho:	Modelagem matemática e computacional de interações fluido-sólido utilizando o método de fronteira imersa tipo ghost em ambiente paralelo e com malha adaptativa				
Área de concentração:	Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos				
Linha de pesquisa:	Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por meio de webconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: Francisco José de Souza - FEMEC/UFU; Daniel Dall'Onder dos Santos - FEMEC/UFU; Leandro Franco de Souza - USP; Márcio da Silveira Carvalho - PUC/RJ; Eng. Dr. Ricardo Serfaty - Petrobras; João Marcelo Vedovotto (co orientador) - FEMEC/UFU; e Aristeu da Silveira Neto- FEMEC/UFU, orientador do candidato. Ressalta-se que os Prof. Aristeu da Silveira Neto, Francisco José de Souza, João Marcelo Vedovotto, Daniel Dall'Onder dos Santos e o Discente participaram da defesa por meio de webconferência desde a cidade de Uberlândia/MG, Prof. Leandro Franco de Souza desde a cidade de São Carlos/SP, Prof. Márcio da Silveira Carvalho e Eng. Ricardo Serfaty desde a cidade de Rio de Janeiro/RJ em atendimento a Portaria nº 36, de 19 de março de 2020, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Aristeu da Silveira Neto, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):



Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aristeu da Silveira Neto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 29/07/2021, às 10:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Daniel Dall'Onder dos Santos, Professor(a) do Magistério Superior**, em 29/07/2021, às 10:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Marcelo Vedovotto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 29/07/2021, às 10:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco José de Souza, Professor(a) do Magistério Superior**, em 29/07/2021, às 10:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leandro Franco de Souza, Usuário Externo**, em 29/07/2021, às 12:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **ricardo serfaty, Usuário Externo**, em 29/07/2021, às 12:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcio da Silveira Carvalho, Usuário Externo**, em 29/07/2021, às 15:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2924095** e o código CRC **6B269162**.

# Agradecimentos

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia e à coordenação do Programa de Pós-graduação pelo suporte e infraestrutura necessários para a realização dos trabalhos.

Ao Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto por abrir as portas do Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab), pela dedicação constante na orientação deste trabalho, pelos ricos conselhos e pela ajuda no meu crescimento profissional.

Ao Prof. Dr. João Marcelo Vedovotto pela coorientação demonstrada pelas recomendações e sugestões.

Ao Mestre André Rezende Dessimoni Carvalho, ao Doutor Franco Barbi, ao Mestre Gabriel Marcos Magalhães, ao Doutor Pedro Ricardo Corrêa Souza pelo companheirismo no desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos Alessandra Ribeiro, Gabriel Machado, Ítalo Augusto, Kaissar Nabbout, Lucas Vella, Marcelo Damasceno, Naiana Zaiden, Paulo Costa, Ricardo Catta Preta e Vitor Maciel pela amizade e apoio.

Ao Prof. Dr. João Rodrigo Andrade pela disposição e pelas sugestões nas discussões do trabalho. Aos demais professores do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da UFU.

Aos Prof. Dr. Márcio da Silveira Carvalho, Prof. Dr. Leandro Franco de Souza, Dr. Ricardo Serfaty, Prof. Dr. Francisco José de Souza, Prof. Dr. Daniel Dall'Onder dos Santos pela disponibilidade em participar desta banca.

Aos técnicos do Laboratório Ana Luísa, Bruno Louzada, Felipe Adriano, Johnatas Teixeira, Luismar Lopes, Rodrigo Queiroz Saramago, pelo apoio e pelos serviços prestados ao longo de todo o período.

Aos meus pais pelo apoio e incentivo. Aos meus irmãos por torcerem pelo meu sucesso.

À Geisa pelo companheirismo e presença constante.

Aos colegas do laboratório pela troca de conhecimento e colaboração durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao CNPQ pela bolsa de doutorado e à Petrobras pelo apoio à esta pesquisa.

# Resumo

Corpos submetidos a escoamentos externo e interno podem vibrar em função de flutuações de forças induzidas pelos escoamentos. Essas vibrações podem induzir, por meio de um processo não linear, um aumento das forças de arrasto e de sustentação, levando a um aumento dos esforços sobre as estruturas. Além disso, as vibrações podem causar nucleação e propagação de trincas na estrutura, conduzindo-a a falha por fadiga. O objetivo do presente trabalho é a implementação de um método de fronteira imersa que permita a simulação de escoamentos externo e interno em uma dada estrutura, o que não é possível com os métodos clássicos de fronteira imersa. As equações com as quais são modelados os escoamentos são resolvidas em um domínio euleriano, enquanto a superfície do corpo imerso é representada por um conjunto de pontos lagrangianos. Foi utilizado o código computacional MFSim, integralmente desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab), que permite a simulação de escoamentos compressíveis e incompressíveis tridimensionais em paralelo e com refinamento adaptativo de malha. No presente trabalho o método do tipo "fluido fantasma"(BERTHELSEN; FALTINSEN, 2008), *ghost fluid*, do inglês, foi implementado e validado na plataforma MFSim. As validações foram desenvolvidas modelando e simulando escoamentos sobre esferas e sobre cubos, incluindo-se o efeito magnus. Com os resultados obtidos mostra-se que o método implementado é superior ao método de fronteira imersa MDF (*Multi Direct Forcing*), já implementado nessa mesma plataforma. O custo computacional de ambos os métodos são similares. O método Ghost é adequado para modelagem e simulação de escoamentos em ambos os lados de uma dada geometria, o que abre possibilidades de aplicações altamente complexas, tais como escoamentos internos e externos a uma tubulação. Em síntese, o método implementado representa um importante avanço nos desenvolvimentos envolvendo a plataforma MFSim, abrindo um elenco de atividades futuras.

**Palavras-chave:** Método da Fronteira Imersa, Escoamentos Interno e Externo, Corpos Esbeltos, Condição de Contorno.

# Abstract

Bodies subjected to external and internal flows can vibrate due to fluctuations in forces induced by the flows. These vibrations can induce, through a non-linear process, an increase in drag and lift forces, leading to loads increase acting on the structures. In addition, vibrations can cause nucleation and crack propagation in the structure, leading to fatigue failure. The objective of this work is the implementation of an immersed boundary method that allows the simulation of external and internal flows in a given structure, that isn't possible with classic methods. The equations with which the flows are modeled are solved in a Eulerian domain, while the surface of the submerged body is represented by a set of Lagrangian points. The computational code MFSim, fully developed in-house, was used, which allows the simulation of compressible and incompressible three-dimensional flows in parallel and with an adaptive mesh refinement. In the present work, the "ghost fluid" method (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2008), was implemented and validated in the MFSim platform. The validations were developed by modeling and simulating flows over spheres and cubes, including the magnus effect. With the obtained results, it is shown that the implemented method is superior to the immersed boundary MDF (Multi Direct Forcing), already implemented in the same platform. The computational cost of both methods is similar. The Ghost method is suitable for modeling and simulating flows on both sides of a given geometry, which opens up possibilities for highly complex applications such as flows inside and outside a pipeline. In summary, the implemented method represents an important advance in the developments involving the MFSim platform, opening a wide range of future activities.

**Keywords:** Immersed Boundary Method, Internal and External Flow, Thin and Sharp Edges, Boundary Conditions.

# Lista de figuras

Figura 1 – Exemplo de distribuição de forças obtidas no extradorso para o escoamento próximo ao intradorso. . . . .	23
Figura 2 – Ilustração de uma malha conforme (a) e de uma malha euleriana com uma fronteira imersa (b). . . . .	24
Figura 3 – Ilustração das malhas euleriana e lagrangiana. . . . .	25
Figura 4 – Ilustração da deformação da malha conforme para a simulação da fluidodinâmica da movimentação de uma água viva. . . . .	26
Figura 5 – Ilustração do mapeamento da malha euleriana em função da malha lagrangiana. A figura (a) ilustra a malha euleriana com a malha lagrangiana imersa. A figura (b) ilustra a marcação da malha euleriana em função da malha lagrangiana. . . . .	26
Figura 6 – Ilustração da modificação da malha euleriana em função da presença do corpo imerso no caso de uma fronteira imersa do tipo <i>cut-cell</i> . . . . .	28
Figura 7 – Esquema de uma malha bidimensional bloco estruturada. $\Omega_{1,1}$ se refere ao nível base (malha mais grossa), $\Omega_{2,1}$ e $\Omega_{2,2}$ são dois blocos do segundo nível e $\Omega_{3,1}$ é o bloco do terceiro nível. . . . .	36
Figura 8 – Expansão de uma malha bidimensional com refinamento bloco estruturado multinível. . . . .	37
Figura 9 – Expansão de uma malha bidimensional com refinamento bloco estruturado matricial. . . . .	38
Figura 10 – Malha euleriana e objeto imerso antes da marcação. . . . .	39
Figura 11 – Primeira etapa da marcação primária. . . . .	40
Figura 12 – Ilustração dos vizinhos de uma célula $P_{i,j}$ . Os vizinhos são: $P_{i+1,j}$ , $P_{i-1,j}$ , $P_{i,j+1}$ , $P_{i,j-1}$ . . . . .	41
Figura 13 – Segunda etapa da marcação primária. . . . .	41
Figura 14 – Outro exemplo da segunda etapa da marcação primária. . . . .	42
Figura 15 – Primeira etapa da marcação secundária. . . . .	43
Figura 16 – Segunda etapa da marcação secundária. . . . .	44

Figura 17 – Marcação completa. . . . .	45
Figura 18 – Velocidade $u$ a ser resolvida. . . . .	46
Figura 19 – Posição das velocidades “ $u$ ” utilizadas para a solução de “ $u$ ” . .	47
Figura 20 – Posição das velocidades “ $v$ ” utilizadas para a solução de “ $u$ ” . .	47
Figura 21 – Posição das velocidades “ $w$ ” utilizadas para a solução de “ $u$ ” . .	48
Figura 22 – Marcação das faces vizinhas à velocidade a ser resolvida. Faces verdes podem ser usadas para a solução. Faces vermelhas não podem ser usadas. Essas informações devem ser obtidas via extrapolações. A face azul é a célula a ser resolvida. . . . .	49
Figura 23 – Marcação das faces vizinhas à velocidade a ser resolvida. Faces verdes podem e as faces vermelhas não podem ser usadas para o cálculo da face azul. . . . .	50
Figura 24 – Marcação das faces vizinhas à velocidade a ser resolvida. Faces verdes podem e as faces vermelhas não podem ser usadas para o cálculo da face azul. . . . .	50
Figura 25 – Exemplo de face $u$ (cubo azul) marcada como face com stencil modificado. Faces vermelhas não podem ser usadas para o cálculo. .	51
Figura 26 – Busca por pontos lagrangianos. O volume vermelho contém a face de interesse, enquanto os outros dois volumes pretos contém pontos lagrangianos. . . . .	52
Figura 27 – Ilustração de quais pontos lagrangianos foram encontrados na busca. . . . .	52
Figura 28 – Ilustração das distâncias necessárias para a obtenção dos polinômios que serão utilizados para extrapolação dos valores nas faces vermelhas. . . . .	53
Figura 29 – Ilustração da determinação do ponto de interseção entre a reta definida pela posição da face $v_1$ e a direção de interesse com os planos definidos pelos pontos lagrangianos $c_1$ (a), $c_2$ (b), $c_3$ (c) e $c_4$ (d). . . . .	55
Figura 30 – Ilustração das áreas necessárias para determinar se o ponto de interseção está ou não dentro do triângulo lagrangiano. . . . .	56
Figura 31 – Ilustração das áreas necessárias para determinar se o ponto de interseção está ou não dentro do triângulo lagrangiano. . . . .	57

Figura 32 – Ilustração do stencil dos polinômios que serão utilizados para extrapolação dos valores nas faces vermelhas( $u_4$ e $u_5$ ).	58
Figura 33 – Ilustração do stencil dos polinômios que serão utilizados para extrapolação dos valores nas faces vermelhas( $u_4$ e $u_5$ ).	59
Figura 34 – Ilustração de uma face que deve ser interpolada (cubo azul). As faces verdes são utilizadas para montar os polinômios de Lagrange, assim como os pontos azuis.	62
Figura 35 – Zoom da Fig. 34. $P_1$ , $P_2$ e $P_3$ são os pontos nos quais retas nas direções $X$ , $Y$ e $Z$ intersectam os triângulos da fronteira imersa. $\Delta_1$ , $\Delta_2$ e $\Delta_3$ são as distâncias da face azul até a fronteira imersa nas direções $X$ , $Y$ e $Z$ respectivamente.	62
Figura 36 – Ilustração de um caso no qual uma velocidade dever ser interpo- lada ( $u_{i+1,j,k}$ ) e outra deve ser extrapolada ( $u_{i,j+1,k}$ ) no cálculo do divergente.	64
Figura 37 – Ilustração de um caso no qual as correções de pressão nos pontos $P_{i+1,j,k}$ e $P_{i,j+1,k}$ devem ser extrapolados.	66
Figura 38 – Esquema de interpolação para a pressão na fronteira imersa.	68
Figura 39 – Direções das derivadas.	70
Figura 40 – Ilustração dos campos utilizados para verificar as interpolações implementadas para a velocidade “u”(a) e para a pressão(b) com um cubo imerso.	74
Figura 41 – Ilustração dos campos utilizados para verificar as interpolações implementadas para a velocidade “u”(a) e para a pressão(b) com uma esfera imersa.	86
Figura 42 – Ilustração da malha euleriana em função do diâmetro: 4 volumes por $\phi$ (a), 8 volumes por $\phi$ (b), 16 volumes por $\phi$ (c) e 32 volumes por $\phi$ (d).	106
Figura 43 – Domínio computacional com a esfera posicionada.	107
Figura 44 – Ilustração da medida da bolha de recirculação de uma esfera.	108
Figura 45 – Comparação do coeficiente de pressão ( $C_P$ ) avaliado ao longo da superfície da esfera para Reynolds 200 comparados com a literatura. Resultado do Ghost obtido com 8 volumes por diâmetro.	111



Figura 46 – Comparação do coeficiente de pressão ( $C_P$ ) avaliado ao longo da superfície da esfera para Reynolds 200 comparados com a literatura. Resultado do Ghost obtido com 16 volumes por diâmetro. . . . .	111
Figura 47 – Comparação do coeficiente de pressão ( $C_P$ ) avaliado ao longo da superfície da esfera para Reynolds 200 comparados com a literatura. Resultado do Ghost obtido com 32 volumes por diâmetro. . . . .	112
Figura 48 – Ilustração dos vetores de velocidade impostos na fronteira imersa.	112
Figura 49 – Comparação do coeficiente de arrasto (a) e de sustentação (b) do Ghost e do MDF ao longo do tempo para uma malha de 16 volumes por diâmetro. . . . .	115
Figura 50 – Domínio computacional com o cubo posicionado. . . . .	116

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Resumo da marcação dos centros. . . . .	45
Tabela 2 – Resumo da marcação das faces. . . . .	46
Tabela 3 – Norma $L_\infty$ do erro da interpolação de segundo grau para velocidades. . . . .	75
Tabela 4 – Taxa de convergência da norma $L_\infty$ do erro da interpolação de segundo grau para velocidades. . . . .	75
Tabela 5 – Norma $L_\infty$ do erro da interpolação de terceiro grau para velocidades. . . . .	76
Tabela 6 – Taxa de convergência da norma $L_\infty$ do erro da interpolação de terceiro grau para velocidades. . . . .	76
Tabela 7 – Norma $L_2$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”. . . . .	77
Tabela 8 – Taxa de convergência da norma $L_2$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”. . . . .	77
Tabela 9 – Norma $L_2$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”. . . . .	78
Tabela 10 – Taxa de convergência da norma $L_2$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”. . . . .	78
Tabela 11 – Norma $L_2$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”. . . . .	78
Tabela 12 – Taxa de convergência da norma $L_2$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”. . . . .	79
Tabela 13 – Norma $L_\infty$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”. . . . .	79
Tabela 14 – Taxa de convergência da norma $L_\infty$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”. . . . .	79
Tabela 15 – Norma $L_\infty$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”. . . . .	80

Tabela 16 – Taxa de convergência da norma $L_\infty$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”. . . . .	80
Tabela 17 – Norma $L_\infty$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”. . . . .	80
Tabela 18 – Taxa de convergência da norma $L_\infty$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”. . . . .	80
Tabela 19 – Normas $L_2$ e $L_\infty$ do erro da extrapolação de segundo grau para o cálculo da pressão. . . . .	81
Tabela 20 – Taxas de convergência das normas $L_2$ e $L_\infty$ do erro da extrapolação de segundo grau para o cálculo da pressão. . . . .	81
Tabela 21 – Normas $L_2$ e $L_\infty$ do erro do cálculo do divergente da velocidade. . . . .	82
Tabela 22 – Taxas de convergência das normas $L_2$ e $L_\infty$ do erro do cálculo do divergente da velocidade. . . . .	82
Tabela 23 – Normas $L_2$ e $L_\infty$ do erro do cálculo do laplaciano de $\phi$ . . . . .	83
Tabela 24 – Taxas de convergência das normas $L_2$ e $L_\infty$ do erro do cálculo do laplaciano de $\phi$ . . . . .	84
Tabela 25 – Norma $L_2$ do erro do cálculo das forças. . . . .	84
Tabela 26 – Taxa de convergência da norma $L_2$ do erro do cálculo das forças. . . . .	85
Tabela 27 – Norma $L_\infty$ do erro do cálculo das forças. . . . .	85
Tabela 28 – Taxa de convergência da norma $L_\infty$ do erro do cálculo das forças. . . . .	85
Tabela 29 – Norma $L_2$ do erro da interpolação de segundo grau para velocidades. . . . .	87
Tabela 30 – Taxa de convergência da norma $L_2$ do erro da interpolação de segundo grau para velocidades. . . . .	87
Tabela 31 – Norma $L_\infty$ do erro da interpolação de segundo grau para velocidades. . . . .	87
Tabela 32 – Taxa de convergência da norma $L_\infty$ do erro da interpolação de segundo grau para velocidades. . . . .	87
Tabela 33 – Norma $L_2$ do erro da interpolação de terceiro grau para velocidades. . . . .	88
Tabela 34 – Taxa de convergência da norma $L_2$ do erro da interpolação de terceiro grau para velocidades. . . . .	88
Tabela 35 – Norma $L_\infty$ do erro da interpolação de terceiro grau para velocidades. . . . .	89

Tabela 36 – Taxa de convergência da norma $L_\infty$ do erro da interpolação de terceiro grau para velocidades. . . . .	89
Tabela 37 – Norma $L_2$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”. . . . .	90
Tabela 38 – Taxa de convergência da norma $L_2$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”. . . . .	90
Tabela 39 – Norma $L_2$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”. . . . .	90
Tabela 40 – Taxa de convergência da norma $L_2$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”. . . . .	91
Tabela 41 – Norma $L_2$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”. . . . .	91
Tabela 42 – Taxa de convergência da norma $L_2$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”. . . . .	91
Tabela 43 – Norma $L_\infty$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”. . . . .	92
Tabela 44 – Taxa de convergência da norma $L_\infty$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”. . . . .	92
Tabela 45 – Norma $L_\infty$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”. . . . .	92
Tabela 46 – Taxa de convergência da norma $L_\infty$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”. . . . .	92
Tabela 47 – Norma $L_\infty$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”. . . . .	93
Tabela 48 – Taxa de convergência da norma $L_\infty$ do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”. . . . .	93
Tabela 49 – Normas $L_2$ e $L_\infty$ do erro da extrapolação de segundo grau para o cálculo da pressão. . . . .	94
Tabela 50 – Taxas de convergência das normas $L_2$ e $L_\infty$ do erro da extrapolação de segundo grau para o cálculo da pressão. . . . .	94
Tabela 51 – Normas $L_2$ e $L_\infty$ do erro do cálculo do divergente da velocidade. . . . .	95
Tabela 52 – Taxas de convergência das normas $L_2$ e $L_\infty$ do erro do cálculo do divergente da velocidade. . . . .	95

Tabela 53 – Normas $L_2$ e $L_\infty$ do erro do cálculo do laplaciano de $\phi$ . . . . .	96
Tabela 54 – Taxas de convergência das normas $L_2$ e $L_\infty$ do erro do cálculo do laplaciano de $\phi$ . . . . .	96
Tabela 55 – Norma $L_2$ do erro do cálculo das forças. . . . .	97
Tabela 56 – Taxa de convergência da norma $L_2$ do erro do cálculo das forças. . . . .	97
Tabela 57 – Norma $L_\infty$ do erro do cálculo das forças. . . . .	98
Tabela 58 – Taxa de convergência da norma $L_\infty$ do erro do cálculo das forças. . . . .	98
Tabela 59 – Norma $L_2$ do erro do MFSim utilizando-se solução manufaturada sem fonteira imersa. . . . .	100
Tabela 60 – Taxa de convergência da norma $L_2$ do erro do MFSim utilizando- se solução manufaturada sem fonteira imersa. . . . .	100
Tabela 61 – Norma $L_\infty$ do erro do MFSim utilizando-se solução manufatu- rada sem fonteira imersa. . . . .	100
Tabela 62 – Taxa de convergência da norma $L_\infty$ do erro do MFSim utilizando- se solução manufaturada sem fonteira imersa. . . . .	101
Tabela 63 – Norma $L_2$ do erro do MFSim utilizando-se solução manufaturada sem fonteira imersa. . . . .	101
Tabela 64 – Taxa de convergência da norma $L_2$ do erro do MFSim utilizando- se solução manufaturada com um cubo imerso. . . . .	102
Tabela 65 – Norma $L_\infty$ do erro do MFSim utilizando-se solução manufatu- rada com um cubo imerso. . . . .	102
Tabela 66 – Taxa de convergência da norma $L_\infty$ do erro do MFSim utilizando- se solução manufaturada com um cubo imerso. . . . .	102
Tabela 67 – Norma $L_2$ do erro do MFSim utilizando-se solução manufaturada com uma esfera imersa. . . . .	103
Tabela 68 – Taxa de convergência da norma $L_2$ do erro do MFSim utilizando- se solução manufaturada com uma esfera imersa. . . . .	103
Tabela 69 – Norma $L_\infty$ do erro do MFSim utilizando-se solução manufatu- rada com uma esfera imersa. . . . .	104
Tabela 70 – Taxa de convergência da norma $L_\infty$ do erro do MFSim utilizando- se solução manufaturada com uma esfera imersa. . . . .	104
Tabela 71 – Condições de contorno para o fluido. . . . .	105
Tabela 72 – Condições iniciais para o fluido. . . . .	105

Tabela 73 – Tamanhos da bolha de recirculação encontrados na literatura para Reynolds 200. . . . .	108
Tabela 74 – Coeficiente de arrasto encontrados na literatura para Reynolds 200. . . . .	109
Tabela 75 – Resultados para o coeficiente de arrasto e tamanho da bolha de recirculação para o Ghost e o MDF em um escoamento sobre uma esfera parada. . . . .	109
Tabela 76 – Erro relativo do coeficiente de arrasto e tamanho da bolha de recirculação para o Ghost e o MDF em um escoamento sobre uma esfera parada. . . . .	110
Tabela 77 – Resultados para o coeficiente de arrasto e coeficiente de sustentação para o Ghost e o MDF em um escoamento sobre uma esfera rodando. . . . .	113
Tabela 78 – Erro relativo do coeficiente de arrasto e de sustentação para o Ghost e o MDF em um escoamento sobre uma esfera rodando. . . . .	113
Tabela 79 – Custo computacional em microssegundo por volume. . . . .	114
Tabela 80 – Uso de memória RAM em kb por volume. . . . .	115
Tabela 81 – Tamanhos da bolha de recirculação encontrados na literatura para Reynolds 150. . . . .	117
Tabela 82 – Resultado do coeficiente de arrasto e tamanho da bolha de recirculação para o Ghost e o MDF em um escoamento sobre um cubo parado. . . . .	118
Tabela 83 – Erro relativo do coeficiente de arrasto e do tamanho da bolha de recirculação para Ghost e o MDF em um escoamento sobre um cubo parado. . . . .	118

# Sumário

	<b>Introdução</b>	<b>21</b>
<b>1</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>24</b>
<b>1.1</b>	<b>Interface difusa</b>	<b>27</b>
<b>1.2</b>	<b>Interface nítida (<i>sharp</i>)</b>	<b>27</b>
<b>2</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>30</b>
<b>2.1</b>	<b>MFSim</b>	<b>30</b>
<b>2.2</b>	<b>Modelo matemático diferencial</b>	<b>30</b>
<b>2.3</b>	<b>Modelo matemático numérico</b>	<b>31</b>
2.3.1	Discretização do termo temporal	31
2.3.2	Discretização do termo advectivo	32
2.3.3	Discretização do termo difusivo	33
2.3.4	Acoplamento pressão – velocidade	34
2.3.5	Fronteira imersa do tipo Ghost	35
2.3.5.1	Introdução	35
2.3.5.1.1	Dificuldades na implementação do Ghost Fluid Method no MFSim	35
2.3.5.2	Marcação	39
2.3.5.2.1	Marcação primária	40
2.3.5.2.2	Marcação secundária	43
2.3.5.2.3	Verificação da Marcação das faces em 3D	46
2.3.5.3	Cálculo de distâncias	51
2.3.5.4	Polinômios de extrapolação para a solução da velocidade	57
2.3.5.5	Polinômios de interpolação para a solução da velocidade	61
2.3.5.6	Determinação dos polinômios para obtenção das velocidades para o cálculo do divergente	63
2.3.5.7	Determinação dos polinômios de extrapolação para o cálculo da correção de pressão	65
2.3.5.8	Cálculo das forças que atuam na superfície da fronteira imersa	67

2.3.5.8.1	Determinação da pressão nos ponto lagrangianos . . . . .	67
2.3.5.8.2	Determinação do tensor gradiente da velocidade . . . . .	69
<b>3</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>3.1</b>	<b>Verificação . . . . .</b>	<b>73</b>
3.1.1	Ordem dos polinômios implementados . . . . .	73
3.1.1.1	Cubo . . . . .	74
3.1.1.1.1	Interpolação de segundo grau para velocidades . . . . .	75
3.1.1.1.2	Interpolação de terceiro grau para velocidades . . . . .	76
3.1.1.1.3	Extrapolação terceiro grau para velocidades . . . . .	77
3.1.1.1.4	Extrapolação segundo grau para pressão . . . . .	81
3.1.1.1.5	Cálculo do divergente utilizando velocidades interpoladas e extrapoladas . . .	82
3.1.1.1.6	Cálculo do laplaciano da correção de pressão nos centros irregulares . . . . .	83
3.1.1.1.7	Cálculo da força . . . . .	84
3.1.1.2	Esfera . . . . .	85
3.1.1.2.1	Interpolação segundo grau para velocidades . . . . .	86
3.1.1.2.2	Interpolação terceiro grau para velocidades . . . . .	88
3.1.1.2.3	Extrapolação terceiro grau para velocidades . . . . .	89
3.1.1.2.4	Extrapolação segundo grau para pressão . . . . .	93
3.1.1.2.5	Cálculo do divergente utilizando velocidades interpoladas e extrapoladas . . .	94
3.1.1.2.6	Cálculo do laplaciano da correção de pressão nos centros irregulares . . . . .	95
3.1.1.2.7	Cálculo da força . . . . .	96
3.1.2	Solução manufaturada . . . . .	98
3.1.2.1	Sem fronteira imersa . . . . .	100
3.1.2.2	Cubo . . . . .	101
3.1.2.3	Esfera . . . . .	103
<b>3.2</b>	<b>Escoamento . . . . .</b>	<b>104</b>
3.2.1	Esfera . . . . .	107
3.2.1.1	Escoamento sobre esfera parada . . . . .	107
3.2.1.2	Efeito Magnus . . . . .	112
3.2.2	Cubo . . . . .	116
3.2.2.1	Escoamento sobre um cubo parado . . . . .	117



<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>119</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>121</b>

# Introdução

A dinâmica dos fluidos e das estruturas imersas são ramos da Engenharia Mecânica com as quais se estuda o comportamento das interações fluido-estruturais, visando aperfeiçoar vários processos na indústria, assim como entender fenômenos na natureza. O estudo desse tipo de problema pode ser feito de duas maneiras: a experimentação material e a experimentação virtual. Na primeira é necessária a modelagem física do problema em análise e a montagem de bancadas experimentais que representem a física do problema a ser estudado. Além disso, é necessária a instrumentação da bancada para permitir a coleta de dados e análise estatística do problema. A modelagem física consiste na avaliação do problema de interesse e determinação de suposições físicas que visam simplificar o problema com o intuito de viabilizar a análise. Na segunda maneira, é necessária a modelagem física e matemática do problema de interesse. A modelagem matemática consiste na obtenção de equações diferenciais, integrais e/ou integro-diferenciais que modelam a física do problema e depois utilizar métodos numéricos apropriados para a discretização das equações.

Os métodos de análise computacional estão em franco crescimento. É importante destacar que o método computacional não substitui o experimental material, ambos se complementam. Além disso, é muito versátil, permite uma análise minuciosa do problema físico e permite maior flexibilidade em relação às condições físicas. Alguns experimentos materiais podem ser perigosos de se realizar em laboratório, ou até mesmo impossíveis. Algumas desvantagens da modelagem numérico-computacional são a necessidade de modelos numéricos adequados e de computadores robustos, conforme o problema que se está analisando.

Antes do desenvolvimento desse trabalho o MFSim contava com somente um método de fronteira imersa, o *Multi Direct Forcing*, que será chamado a partir desse ponto de MDF. Esse método pode ser definido como um método de interface difusa, no qual as forças singulares determinadas nos pontos lagrangianos são distribuídas para a malha euleriana com o uso de funções delta discretas ou funções máscara

(SOTIROPOULOS; YANG, 2014).

O método exige que exista um escoamento complementar, utilizado para impor a velocidade correta na superfície do sólido. Como exemplo, podemos avaliar um escoamento sobre um cilindro fechado. O escoamento de interesse é o escoamento externo, enquanto o escoamento interno funciona como escoamento complementar. Se a imposição da condição de contorno só acontece em função da existência do escoamento complementar, significa que o método não pode ser usado para simulações de escoamentos internos e externos. Deve-se portanto, escolher entre o escoamento interno e o escoamento externo. Além disso, no caso de interação fluido-estrutura, há um efeito de aumento de massa na estrutura devido à movimentação do escoamento complementar com a estrutura. Por exemplo, se um cilindro se movimentar, o escoamento interno deve acompanhar o cilindro. Portanto, deverá existir uma força que acelere o fluido interno. Quem exerce a força sobre o fluido interno é o próprio cilindro, via MDF. O fluido interno por sua vez exerce uma força contrária de mesmo módulo, mas com direção contrária. Essa força pode ser interpretada como um aumento da massa do cilindro. Esse fenômeno é discutido em Suzuki e Inamuro (2011) e em Uhlmann (2005).

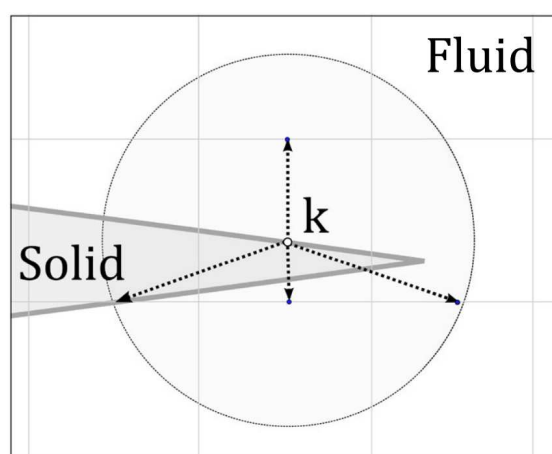
Além do problema do escoamento complementar, o MDF não é adequado para simulações de escoamentos sobre corpos esbeltos como placas finas e aerofólios. Andrade (2015) e Andrade et al. (2018) mostraram que em um bordo de fuga de um aerofólio parte das forças calculadas no extradorso são distribuídas para o escoamento próximo ao intradorso, como pode ser visto na Fig. 1.

Para contornar os problemas do MDF discutidos acima, foi necessário que se implementasse uma nova fronteira imersa no MFSim. O Ghost, proposto por Berthelsen e Faltinsen (2008) foi implementado por Andrade (2015) em um código 2D, em Matlab®, com malha uniforme e serial e se mostrou adequado para a modelagem e simulação de escoamentos em ambos os lados de uma dada geometria e também para escoamentos sobre geometrias esbeltas.

A pesquisa em desenvolvimento apresentada nesse trabalho é resultado de cooperação entre o Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) e da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) com a empresa Petróleo Brasileiro S.A.

(Petrobras). A pesquisa foi feita utilizando-se o programa MFSim, que está sendo desenvolvido no MFLab há mais de 18 anos. Nesse programa é possível a execução de simulações de escoamentos compressíveis e incompressíveis levando em consideração a movimentação de estruturas sólidas, utilizando-se uma única ferramenta computacional.

Figura 1 – Exemplo de distribuição de forças obtidas no extradorso para o escoamento próximo ao intradorso.



Fonte: Retirado de Andrade et al. (2018)

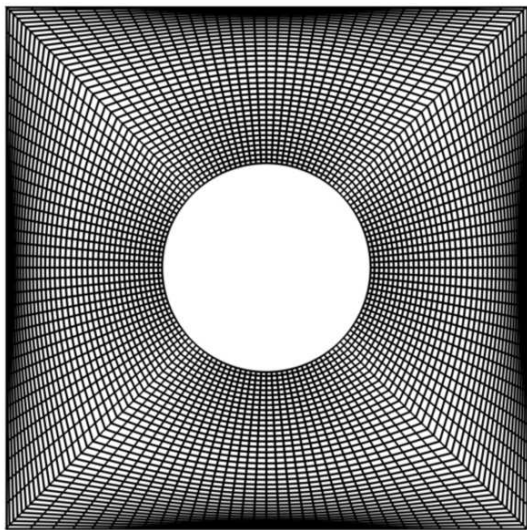
O principal objetivo do presente trabalho é adquirir e ampliar a compreensão sobre uma nova fronteira imersa que possibilita a simulação de uma gama maior de problemas. Esse estudo será feito através de solução numérica em ambiente de processamento paralelo das equações que modelam o fenômeno.

# 1 Revisão bibliográfica

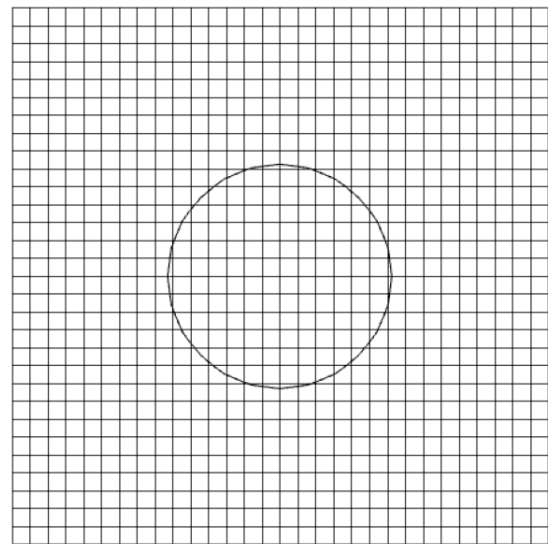
O método de fronteira imersa é usado para a análise de uma grande variedade de problemas como: válvulas de compressores (BARBI et al., 2016), válvulas borboletas (SOUZA, 2020), dutos (RIBEIRO NETO, 2016), (RIBEIRO NETO et al., 2019), nado de peixes (CUI; YANG; JIANG, 2020), asas de libélulas (VARGAS; MITTAL, 2004), voo de insetos (GADE; YOGARAJ; VENGADESAN, 2020), aerodinâmica de sementes (KIM; PESKIN, 2016), hemodinâmica (AMES et al., 2020), vibração das pregas vocais (LUO et al., 2008) (GOUNLEY; DRAEGER; RANGLES, 2019), escoamentos compressíveis sobre aeronaves (IMAMURA; TAMAKI, 2020) (PERON et al., 2017), entre outros.

O escoamento sobre corpos pode ser modelado de duas formas: com a utilização de malhas conformes ao corpo ou com malhas que não são conformes ao corpo. Na Fig. 2 são mostradas ilustrações dessas duas formas.

Figura 2 – Ilustração de uma malha conforme (a) e de uma malha euleriana com uma fronteira imersa (b).



(a)

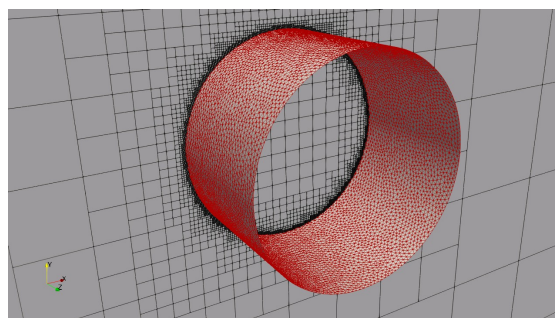


(b)

Fonte: retirado de (BANSAL, 2015)

No primeiro caso, a condição de contorno de não deslramento é imposta diretamente na superfície do corpo, enquanto no segundo caso é necessária a utilização de uma malha que descreve a superfície do corpo (chamada de malha lagrangiana) em conjunto com um método de fronteira imersa. Portanto, o método de fronteira imersa é utilizado para a imposição de condições de contorno em superfícies arbitrárias que não são necessariamente conformes à malha utilizada para resolver as equações que modelam fluido.

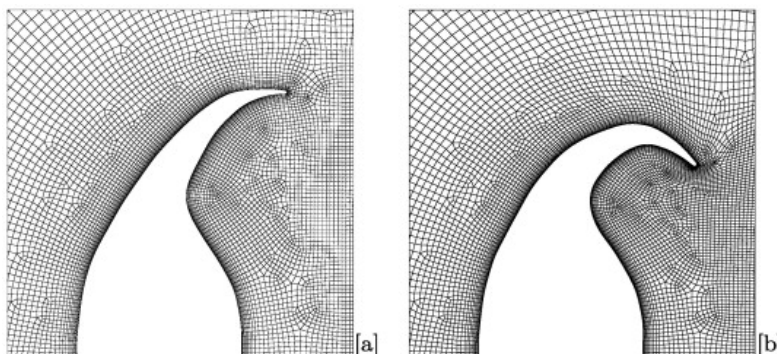
Figura 3 – Ilustração das malhas euleriana e lagrangiana.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Essa metodologia é interessante para a simulação de problemas de interação fluido-estrutura. Na malha conforme, quando há a movimentação do corpo, é necessária a modificação da malha para se impor a condição de contorno na nova posição da estrutura. Se a movimentação da estrutura for grande, essa deformação de malha deve ser tratada adequadamente para evitar a criação de volumes muito pequenos de tal forma que haja uma restrição muito grande do passo de tempo, além de garantir a qualidade da malha. A Fig. 4 ilustra a deformação de malha feita corretamente, ou seja, não há a criação de volumes muito pequenos e a qualidade de malha é assegurada. A deformação da malha foi feita usando a equação da elasticidade linear a cada passo de tempo, ao invés de se fazer a remalhagem, para aumentar a robustez numérica (SAHIN; MOHSENI, 2009). Independente da forma como o problema da malha é tratado, há o aumento da complexidade da solução e, como consequência, o aumento do custo computacional. No caso da fronteira imersa esse problema não ocorre, visto que a posição da fronteira imersa é descrita por meio de uma malha lagrangiana independente da malha euleriana.

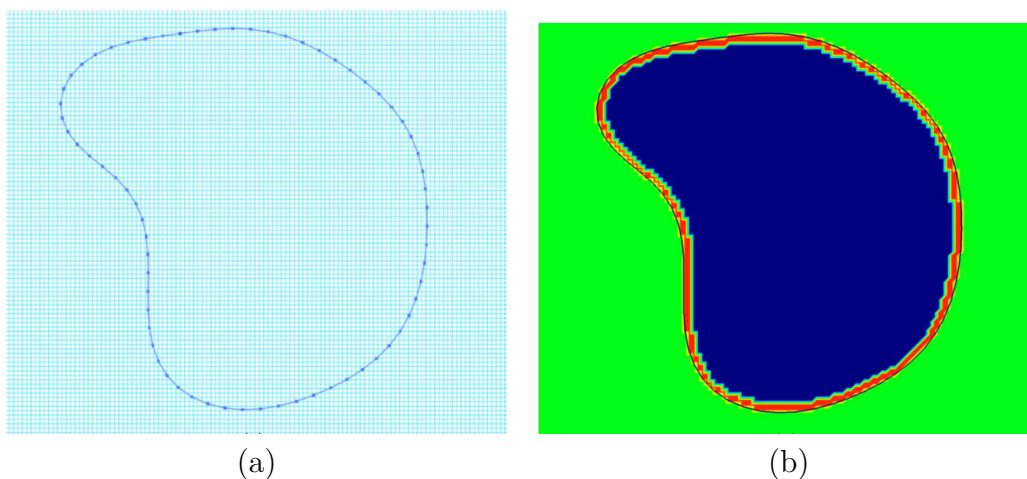
Figura 4 – Ilustração da deformação da malha conforme para a simulação da fluidodinâmica da movimentação de uma água viva.



Fonte: retirado de (SAHIN; MOHSENI, 2009)

Por outro lado, alguns métodos de fronteira imersa necessitam de um mapeamento da malha euleriana em função da malha lagrangiana (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2008), (ANDRADE et al., 2018) e (PERON et al., 2017). Um caso de mapeamento é apresentado na Fig. 5. Esse mapeamento deve ser otimizado no caso de simulações que envolvam fronteiras imersas móveis, pois ele deverá ser atualizado a cada passo de tempo.

Figura 5 – Ilustração do mapeamento da malha euleriana em função da malha lagrangiana. A figura (a) ilustra a malha euleriana com a malha lagrangiana imersa. A figura (b) ilustra a marcação da malha euleriana em função da malha lagrangiana.



Fonte: retirado de (PERON et al., 2017)

O custo da marcação utilizada no presente trabalho é discutida por Carvalho (2021).

Existem muitos métodos de fronteira imersa e o leitor é aconselhado a buscar três trabalhos de revisão bibliográfica: (MITTAL; IACCARINO, 2005), (SOTIROPOULOS; YANG, 2014) e (KIM; CHOI, 2019).

As fronteiras imersas podem ser classificadas como de interface difusa ou interface nítida (*sharp*).

## 1.1 Interface difusa

Em métodos de fronteira imersa classificados como interface difusa, a interface se torna difusa em função da distribuição das forças calculadas nos pontos lagrangianos para os volumes eulerianos próximos, utilizando-se funções delta discretas ou funções de máscara para métodos de penalização (SOTIROPOULOS; YANG, 2014).

O primeiro trabalho sobre fronteira imersa foi desenvolvido por Peskin (1972) para a simulação de um escoamento bidimensional sobre válvulas cardíacas. Muitos são os trabalhos que se basearam nesse desenvolvimento, como por exemplo Roma, Peskin e Berger (1999) implementaram uma versão desse método para malhas eulerianas com refinamento adaptativo por blocos.

Um dos métodos utilizados no presente trabalho é o método da múltipla forçagem direta (MDF), que é classificado como um método de interface difusa. A implementação dessa fronteira imersa é baseada no trabalho de Wang, Fan e Luo (2008) e os detalhes dessa implementação podem ser encontrados em (RIBEIRO NETO, 2016).

## 1.2 Interface nítida (*sharp*)

Uma característica inerente aos métodos de fronteira imersa classificados como interface difusa discutidos acima é que a fronteira não é nítida, mas sim difusa em vários nós da malha euleriana devido ao uso da função delta discreta.

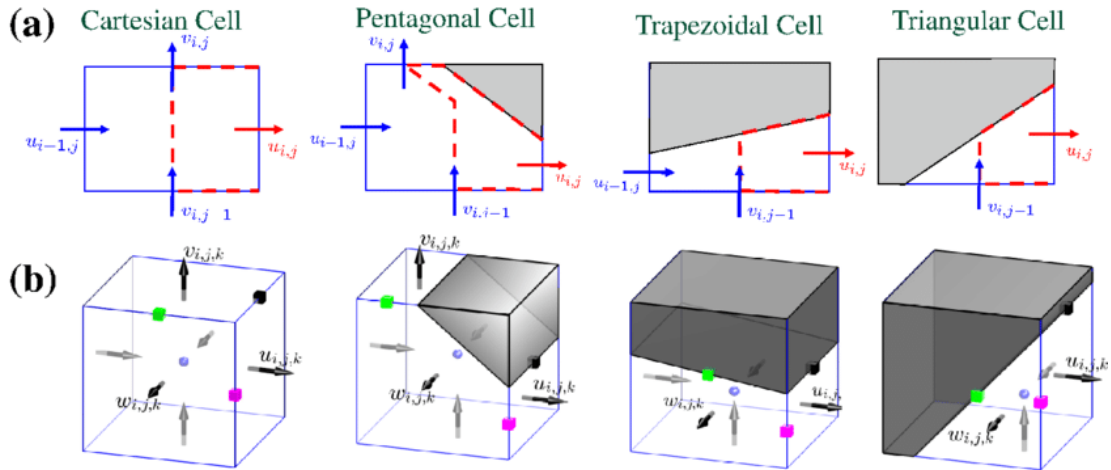


Uma classe de métodos que eliminam esta característica numérica frequentemente indesejável são os chamados métodos de fronteira imersa de interface nítida (*sharp*).

Um exemplo desse tipo de fronteira imersa é o método *cut-cell* no qual a malha euleriana é cortada de acordo com a posição da fronteira imersa. Na Fig. 6 esse processo é ilustrado. Dependendo da posição da fronteira imersa, podem surgir volumes pentagonais, trapezoidais ou triangulares no caso bidimensional. No caso tridimensional são várias possibilidades que podem surgir em simulações de problemas com geometrias complexas (SOTIROPOULOS; YANG, 2014), aumentando muito a complexidade do código.

Além disso, volumes muito pequenos podem surgir desse corte dos volumes eulerianos originais e, em função das condições de estabilidade dos métodos numéricos, há a diminuição do passo de tempo. Esse problema é chamado de "*small cell problem*" (ou problema do volume pequeno), por Almgren et al. (1997). Segundo Hartmann, Meinke e Schröder (2011) os volumes pequenos podem ser fundido com uma célula vizinha para que os problemas de instabilidade e de diminuição do passo de tempo não ocorram.

Figura 6 – Ilustração da modificação da malha euleriana em função da presença do corpo imerso no caso de uma fronteira imersa do tipo *cut-cell*.



Fonte: retirado de (NIKFARJAM; CHENY; BOTELLA, 2015)

O presente trabalho é focado na extensão do método Ghost de fronteira

imersa, originalmente desenvolvido para domínios bidimensionais (BERTHELTSEN; FALTINSEN, 2008), para problemas tridimensionais. Esse método foi escolhido em função do grande potencial mostrado por Andrade et al. (2018) e Andrade (2015).

O presente trabalho apresenta a marcação da malha euleriana baseada em uma superfície definida por equações. Esse desenvolvimento foi utilizado como base para implementação da marcação baseada em superfícies definidas por uma malha triangular (CARVALHO, 2021), que foi utilizada para executar todas as simulações apresentadas.

## 2 Metodologia

### 2.1 MFSim

O MFSim apresenta um grande leque de possibilidades de simulações, como simulações de problemas de interação fluido–estrutura, escoamentos multifásicos, escoamentos compressíveis e incompressíveis, escoamentos reativos, entre outros. Nessa seção será apresentada a modelagem específica utilizada para o desenvolvimento do presente trabalho.

### 2.2 Modelo matemático diferencial

No modelo matemático diferencial são apresentadas as equações diferenciais parciais com as quais modela-se o problema. As condições de contorno e iniciais também fazem parte do modelo matemático diferencial, mas elas serão apresentadas na seção de resultados para cada caso analisado.

Para o subsistema do fluido, foram utilizadas as equações do balanço de massa, simplificada para escoamentos incompressíveis e a equação do balanço da quantidade de movimento linear, ou segunda lei de Newton, simplificada para o caso de propriedades físicas constantes, escoamentos isotérmicos. A Eq. (2.1) é a equação do balanço de massa simplificada para o caso de escoamento incompressível em coordenadas cartesianas, utilizando-se a notação indicial:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

na qual  $x_j$  são as direções coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e  $u_j$  é a componente da velocidade do fluido na direção  $j$ . A Eq. (2.2) representa o balanço da quantidade de movimento linear para fluido newtoniano escrita na forma divergente, simplificada para o caso de massa específica constante e escrita em coordenadas cartesianas, em notação indicial:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.2)$$

na qual  $i$  e  $j = 1, 2, 3$ ,  $P$  é a pressão e  $t$  é a variável temporal.

Como a modelagem para o fechamento da turbulência não foi utilizada nesse trabalho, ela não será apresentada.

## 2.3 Modelo matemático numérico

No modelo matemático numérico, são apresentados os métodos utilizados para a obtenção das equações discretizadas que modelam a fluidodinâmica.

Na Eq. (2.3) são mostrados os principais termos das equações de Navier-Stokes (Eq. (2.2)). Na seção 2.3.1 será descrito o método de discretização do termo temporal, na seção 2.3.2 será descrito o método de discretização do termo advectivo, na seção 2.3.3 será descrito o método de discretização do termo difusivo, todos evidenciados na Eq. (2.3).

$$\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{\text{Termo Temporal}} + \underbrace{\frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j}}_{\text{Termo Advectivo}} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]}_{\text{Termo Difusivo}} \quad (2.3)$$

Na seção 2.3.4 será descrito o método de acoplamento pressão-velocidade e na seção 2.3.5 será apresentado método de fronteira imersa do tipo Ghost, objeto de estudo desse trabalho. O método de fronteira imersa *Multi Direct Forcing* (MDF) não será apresentado, mas pode ser encontrado em Ribeiro Neto (2016).

### 2.3.1 Discretização do termo temporal

A discretização do termo temporal foi feita com o método VSSBDF2 (*Variable Step-size Second-order Semi-implicit Backward Differentiation Formula*) com passo de tempo variável descrito em Wang e Ruuth (2008) em detalhes. A discretização temporal é descrita com a seguinte equação:

$$\frac{1}{\Delta t_{n+1}} \sum_{j=0}^2 \alpha_{j,n} u_i^{n+j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+2} + \sum_{j=0}^1 \beta_{j,n} f(u_i^{n+j}) + \sum_{j=0}^2 \gamma_{j,n} g(u_i^{n+j}) \quad (2.4)$$

Na qual  $f$  é o termo advectivo,  $g$  é termo difusivo,  $\Delta t$  é o passo de tempo e as variáveis  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são definidas segundo as equações:

$$\begin{aligned}\alpha_{0,n} &= \frac{(2\gamma-1)\omega_{n+1}^2}{1+\omega_{n+1}}, & \beta_{1,n} &= 1 + \gamma\omega_{n+1}, \\ \alpha_{1,n} &= (1-2\gamma)\omega_{n+1} - 1, & \gamma_{0,n} &= \frac{c}{2}, \\ \alpha_{2,n} &= \frac{1+2\gamma\omega_{n+1}}{1+\omega_{n+1}}, & \gamma_{1,n} &= 1 - \gamma - \left(1 + \frac{1}{\omega_{n+1}}\right) \frac{c}{2}, \\ \beta_{0,n} &= -\gamma\omega_{n+1}, & \gamma_{2,n} &= \gamma + \frac{c}{2\omega_{n+1}},\end{aligned}\tag{2.5}$$

nas quais  $\omega_{n+1}$  é a razão entre o passo de tempo em  $n+1$  e o passo de tempo em  $n$ . As variáveis  $\gamma$  e  $c$  são escolhidas de acordo com o método de discretização que se deseja utilizar. No método VSSBDF2 o  $\gamma$  é definido como 1 e o  $c$  é definido como zero nas Eqs. (2.5).

Portanto, simplificando a Eq. (2.4) para o caso do VSSBDF2, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t_{n+1}} \left[ \frac{1+2\omega_{n+1}}{1+\omega_{n+1}} u_i^{n+2} - (1+\omega_{n+1}) u_i^{n+1} + \frac{\omega_{n+1}^2}{1+\omega_{n+1}} u_i^n \right] = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}^{n+2} + (1+\omega_{n+1}) f(u_i^{n+1}) - \omega_{n+1} f(u_i^n) + g(u_i^{n+2})\end{aligned}\tag{2.6}$$

### 2.3.2 Discretização do termo advectivo

A discretização do termo advectivo foi feita através do método *Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection* (CUBISTA) proposto por Alves, Oliveira e Pinho (2003). Esse método é um esquema com Variação Total Diminuída T.V.D., que é um conceito introduzido por Harten (1997). Um esquema é dito ser T.V.D. se:

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n),\tag{2.7}$$

na qual

$$TV(u) = \sum_j |u_{j+1} - u_j|\tag{2.8}$$

Essa é uma propriedade importante de um método de discretização utilizado para o termo advectivo, visto que ajuda a controlar e evitar instabilidades numéricas. A avaliação da velocidade na face pelo método CUBISTA para uma malha estruturada cartesiana e uniforme é mostrada na Eq. (2.9):

$$\widehat{u}_f = \begin{cases} \frac{7}{4}\widehat{u}_P & \text{se } 0 < \widehat{u}_P < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\widehat{u}_P + \frac{3}{8} & \text{se } \frac{3}{8} \leq \widehat{u}_P \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\widehat{u}_P + \frac{3}{4} & \text{se } \frac{3}{4} < \widehat{u}_P < 1 \\ \widehat{u}_P & \text{para outros valores de } \widehat{u}_P \end{cases} \quad (2.9)$$

sendo:

$$\widehat{u}_P = \frac{u_P - u_U}{u_D - u_U} \quad (2.10)$$

onde os subscritos  $U$  e  $D$  se referem a “a montante” (*upstream*) e “a jusante” (*downstream*) em relação ao ponto de interesse ( $P$ ). Importante notar que a determinação de qual é a célula a jusante e a célula a montante depende da direção do escoamento. Após a determinação dos fluxos nas faces da célula em estudo, deve-se utilizá-los para o cálculo das derivadas.

### 2.3.3 Discretização do termo difusivo

O termo difusivo é discretizado com o método de diferenças centradas (*Central Difference Scheme* CDS (PERIC, 2002)) da seguinte forma para uma malha estruturada cartesiana e uniforme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_E - 2u_P + u_W}{\Delta x^2}, \quad (2.11)$$

na qual  $u_E$  é a velocidade  $u$  avaliada na célula leste em relação à célula  $P$ ,  $u_W$  é a velocidade  $u$  avaliada na célula oeste em relação à  $P$ ,  $u_P$  é a velocidade  $u$  avaliada na célula  $P$  e  $\Delta x$  é o passo espacial. As outras derivadas parciais de segunda ordem nas outras direções e para as outras variáveis de interesse podem ser obtidas de forma semelhante a forma na Eq. (2.11). Esse método é um método de segunda ordem, de tal forma que o erro obtido é  $O(\Delta x)^2$ . A seguir será mostrado o método

de acoplamento pressão-velocidade necessário para a solução numérica das equações de Navier-Stokes utilizando-se o método de volumes finitos ou diferenças finitas.

### 2.3.4 Acoplamento pressão – velocidade

No presente trabalho foi utilizado o método do passo fracionado (também chamado de método da projeção) proposto por Chorin (1967) em uma malha cartesiana uniforme e deslocada. Portanto a Eq. (2.6) deve ser reescrita com a pressão avaliada no tempo  $n + 1$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t_{n+1}} \left[ \frac{1 + 2\omega_{n+1}}{1 + \omega_{n+1}} u_i^{*n+2} - (1 + \omega_{n+1}) u_i^{n+1} + \frac{\omega_{n+1}^2}{1 + \omega_{n+1}} u_i^n \right] = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + (1 + \omega_{n+1}) f(u_i^{n+1}) - \omega_{n+1} f(u_i^n) + g(u_i^{*n+2}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

na qual  $u^*$  é a velocidade estimada do fluido. Essa velocidade não obedece necessariamente à equação do balanço de massa (Eq. (2.1)). Subtraindo a Eq. (2.6) da Eq. (2.12) tem-se:

$$\frac{1}{\Delta t_{n+1}} \frac{1 + 2\omega_{n+1}}{1 + \omega_{n+1}} (u_i^{*n+2} - u_i^{n+2}) = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial (p^{n+2} - p^{n+1})}{\partial x_i} \quad (2.13)$$

na qual  $p^{n+2} - p^{n+1}$  é chamado de correção de pressão e será denotado com a letra  $Q$ . Para facilitar a notação, define-se:

$$\frac{1}{F_\omega} = \frac{1}{\Delta t_{n+1}} \frac{1 + 2\omega_{n+1}}{1 + \omega_{n+1}} \quad (2.14)$$

Aplicando-se o divergente à Eq. (2.13), e substituindo a Eq. (2.14) tem-se:

$$\frac{1}{F_\omega} \left( \frac{\partial u_i^{*n+2}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i^{n+2}}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_i} \quad (2.15)$$

onde  $Q = p^{n+2} - p^{n+1}$  é a correção de pressão. Nesse caso, o campo vetorial  $u_i^{n+2}$  deve obedecer à Eq. (2.1), portanto a Eq. (2.15) pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{F_\omega} \left( \frac{\partial u_i^{*n+2}}{\partial x_i} \right) \quad (2.16)$$

Essa equação é chamada de equação de Poisson. Como o campo de velocidades  $u^*$  é conhecido, resolvendo-se a Eq. (2.12), a única incógnita da Eq. (2.16) é a variável  $Q$ . As derivadas da Eq. (2.16) são discretizadas com o método das diferenças centradas em uma malha estruturada cartesiana deslocada.

## 2.3.5 Fronteira imersa do tipo Ghost

### 2.3.5.1 Introdução

Os passos para a implementação dessa metodologia são:

1. Marcação da malha euleriana baseado no corpo imerso (seção 2.3.5.2);
2. Determinação da distância entre a malha euleriana e o corpo imerso (seção 2.3.5.3);
3. Determinação dos polinômios de Lagrange para interpolação e extrapolação (seção 2.3.5.4);
4. Modificar o sistema linear das velocidades para que a fronteira imersa seja inserida no cálculo;
5. Modificação do sistema linear da pressão para que a fronteira imersa seja inserida no cálculo;
6. Cálculo das forças (seção 2.3.5.8);

A malha euleriana é onde são resolvidas as equações que modelam o escoamento, enquanto a malha lagrangiana descreve a superfície do corpo imerso.

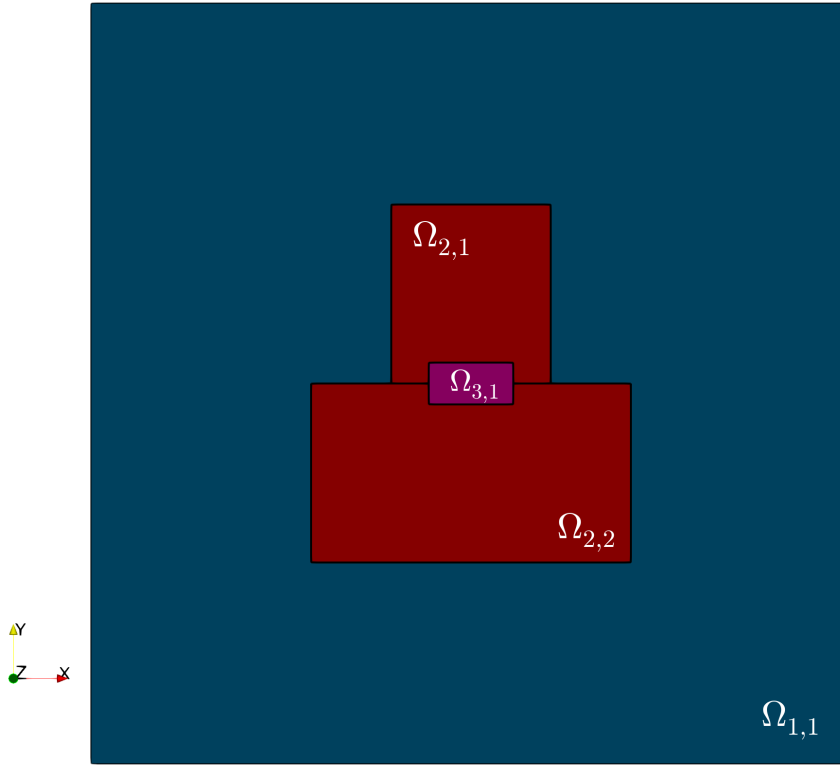
#### 2.3.5.1.1 Dificuldades na implementação do Ghost Fluid Method no MFSim

O MFSim trabalha com malha bloco estruturada com refinamento dinâmico. Na figura (7) é mostrada uma ilustração desse tipo de malha. No caso em questão  $\Omega_{1,1}$  se refere ao nível base (primeiro nível físico), que é a malha mais grossa presente no domínio,  $\Omega_{2,1}$  e  $\Omega_{2,2}$  são dois blocos do segundo nível e  $\Omega_{3,1}$  é o bloco do terceiro nível. No MFSim, a razão de refinamento de um nível para o outro é 2, ou seja,



a malha do segundo nível é duas vezes mais fina que a malha do primeiro nível e assim por diante.

Figura 7 – Esquema de uma malha bidimensional bloco estruturada.  $\Omega_{1,1}$  se refere ao nível base (malha mais grossa),  $\Omega_{2,1}$  e  $\Omega_{2,2}$  são dois blocos do segundo nível e  $\Omega_{3,1}$  é o bloco do terceiro nível.

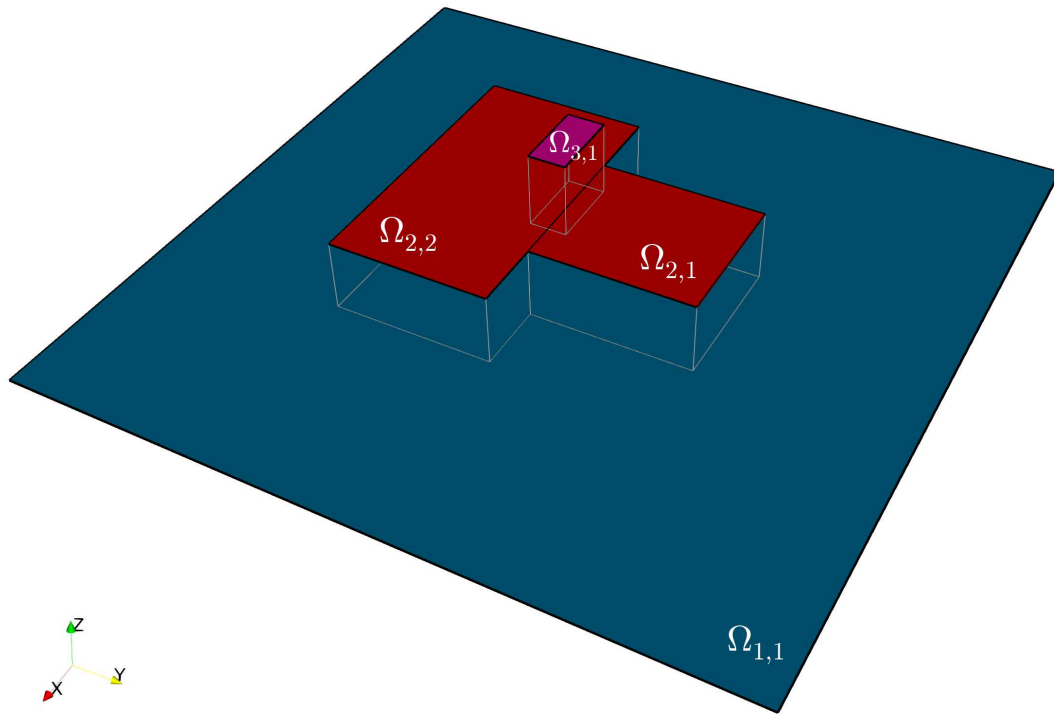


Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Em uma das possibilidades de solução do MFSim, os diversos níveis de refinamento que podem ocorrer na malha do MFSim são sobrepostos, ou seja, a malha mais fina existe em cima de uma malha mais grossa e as duas são resolvidas, tanto para a velocidade quanto para a pressão. Pode-se utilizar no MFSim o Multigrid-multinível para a solução dos sistemas lineares das velocidades e da pressão (VILLAR, 2007). Na figura (8) é mostrada a expansão da figura (7). Nesse caso a malha fina e a malha grossa coexistem em um mesmo espaço e devem ser resolvidas juntas utilizando-se o método Multigrid-multinível. Segundo Tseng e Ferziger (2003) o uso de esquemas como o multigrid é altamente desejável, mas a

presença da fronteira imersa complica a implementação do multigrid. Isso acontece devido a dois processos inerentes ao método multigrid: a restrição e o prolongamento, que são difíceis de serem feitos perto da fronteira imersa.

Figura 8 – Expansão de uma malha bidimensional com refinamento bloco estruturado multinível.

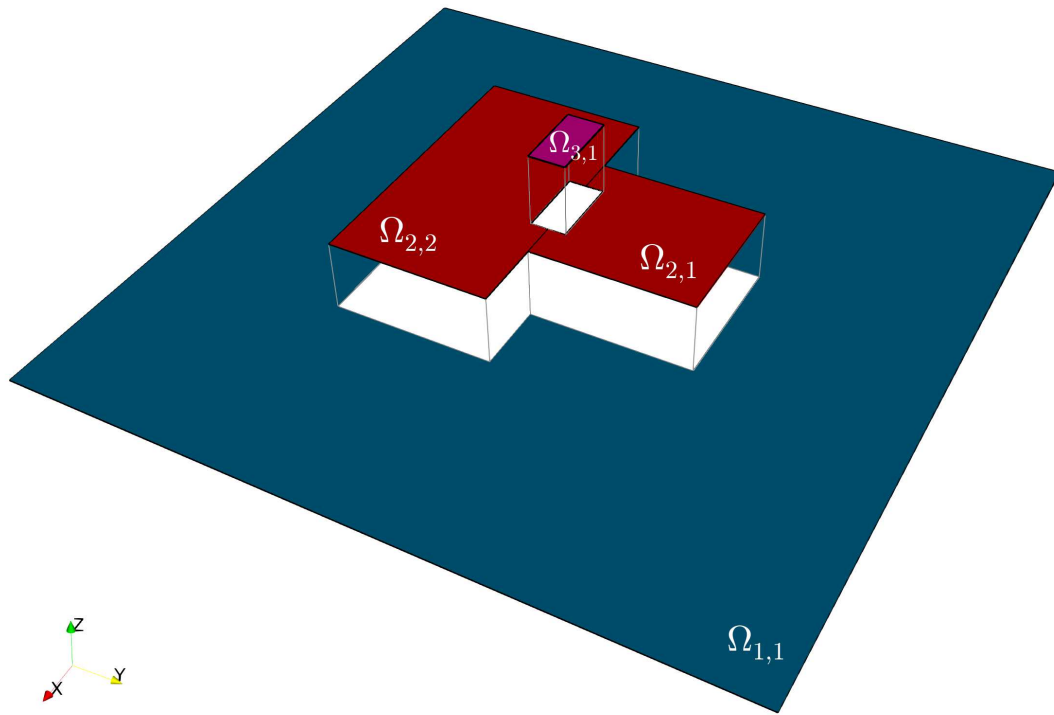


Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Isso aumenta ainda mais a complexidade da implementação desse tipo de fronteira imersa no código, pois é preciso a substituição desse solver de sistemas lineares por outro tão robusto quanto esse e sem a característica de ser multinível. Nesse contexto se encaixa o matricial (ALVAREZ, 2013), que foi inicialmente desenvolvido no MFSim pelo Dr. Franco Barbi. O matricial dispensa o uso da sobreposição. Portanto, cada posição espacial estará contida em somente um nível de malha, como pode ser visto na figura (9). A fronteira imersa estará sempre contida em um único nível. Portanto, as modificações referentes ao método de

fronteira imersa com volumes fantasmas locais só serão feitos no nível mais fino disponível. Para a solução dos sistemas lineares das velocidades e pressão será usado o pacote *Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation (PETSc)* (BALAY et al., 2018).

Figura 9 – Expansão de uma malha bidimensional com refinamento bloco estruturado matricial.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

As matrizes globais para a solução da velocidade e da correção de pressão foram modificadas para que o Ghost fosse implementado adequadamente.

Na próxima seção será apresentada a marcação da malha euleriana, que é a primeira parte do método de fronteira imersa desenvolvido no presente trabalho. Mais detalhes da marcação utilizada atualmente no código pode ser encontrado em Carvalho (2021).

### 2.3.5.2 Marcação

Nessa seção será apresentada a marcação das células eulerianas baseada na posição de uma fronteira imersa analítica, ou seja, a fronteira imersa é descrita por uma equação e não por um conjunto de pontos lagrangianos. A marcação baseada em uma malha lagrangiana foi desenvolvida e comparada com a marcação analítica em Carvalho (2021).

A fronteira escolhida para a exemplificação da marcação no presente relatório foi a de um naca 0024. A parte superior desse aerofólio é descrita pela seguinte equação:

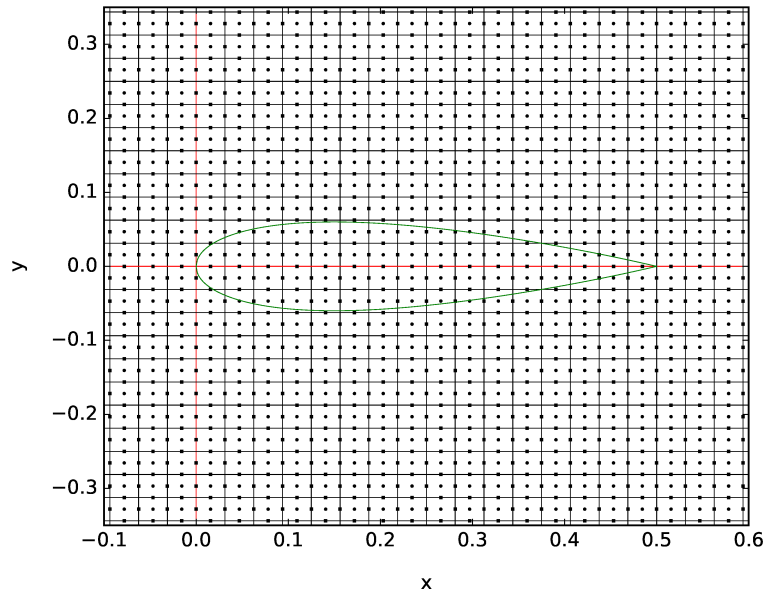
$$y = 0.06 \left[ 0,2969\sqrt{x} - 0,1260x - 0,3516x^2 + 0,2843x^3 - 0,1015x^4 \right], \quad (2.17)$$

enquanto a parte inferior do aerofólio é descrita pela seguinte equação:

$$y = -0.06 \left[ 0,2969\sqrt{x} - 0,1260x - 0,3516x^2 + 0,2843x^3 - 0,1015x^4 \right], \quad (2.18)$$

nas quais  $x$  é a posição na corda do aerofólio e  $y$  descreve a superfície do aerofólio.

Figura 10 – Malha euleriana e objeto imerso antes da marcação.



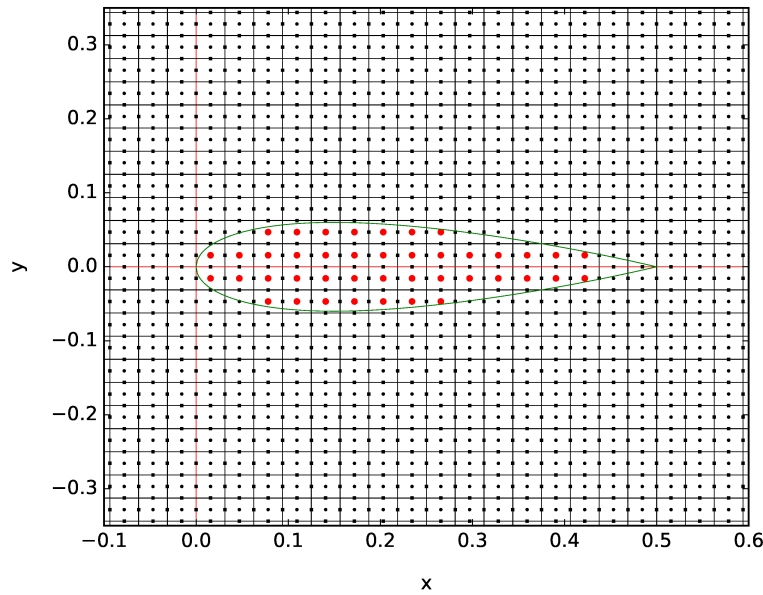
Fonte: elaborada pelo autor. Figura feita com Matplotlib (HUNTER, 2007).

Na figura (10) é mostrada a fronteira imersa posicionada na malha euleriana. Nessa figura o campo euleriano ainda não foi marcado de acordo com a fronteira imersa. O processo de marcação será mostrado por etapas. Na subseção 2.3.5.2.1 será mostrado o processo de marcação primária do aerofólio. As figuras mostradas a seguir foram obtidas fazendo-se pós processamento da marcação feita pelo MFSim.

### 2.3.5.2.1 Marcação primária

Segundo Berthelsen e Faltinsen (2008) a primeira etapa da marcação primária é determinar quais são os centros das células eulerianas que estão dentro do aerofólio, como pode ser visto na figura 11. Nessa figura os centros vermelhos foram marcados como inativos, enquanto os centros pretos foram marcados como ativos.

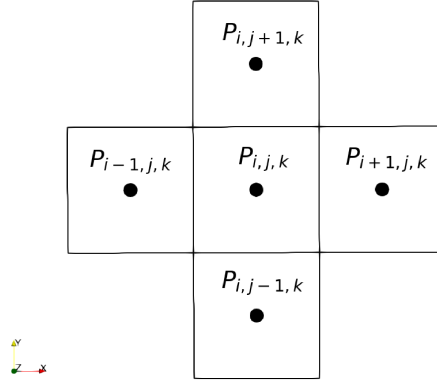
Figura 11 – Primeira etapa da marcação primária.



Fonte: elaborada pelo autor. Figura feita com Matplotlib (HUNTER, 2007).

Segundo Berthelsen e Faltinsen (2008), uma célula ativa deve ser marcada como irregular se pelo menos um dos centros dos vizinhos é separado por uma fronteira imersa. Os vizinho de um centro  $P_{i,j}$  são definidos na figura (12).

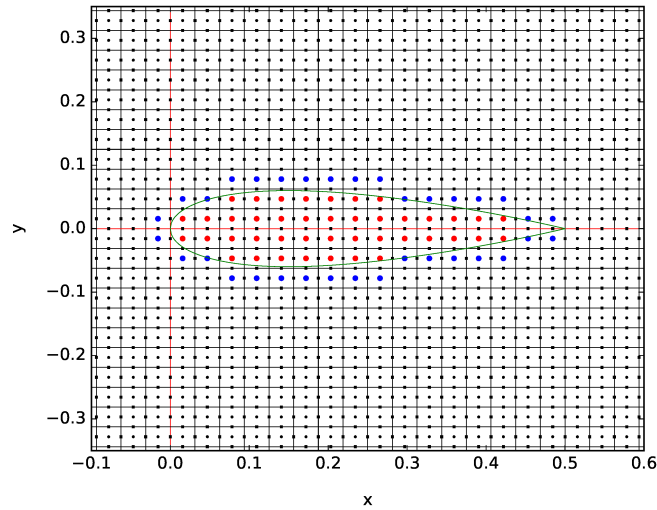
Figura 12 – Ilustração dos vizinhos de uma célula  $P_{i,j}$ . Os vizinhos são:  $P_{i+1,j}$ ,  $P_{i-1,j}$ ,  $P_{i,j+1}$ ,  $P_{i,j-1}$ .



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Na figura (13) os centros azuis foram marcados como células irregulares. Nessa fase é importante notar que não há a necessidade de a célula vizinha à célula irregular ser inativa (vermelha). Basta que haja uma fronteira imersa entre os dois centros das células a serem analisadas. Um exemplo desse caso pode ser visto no bordo de fuga do aerofólio ilustrado na figura 13.

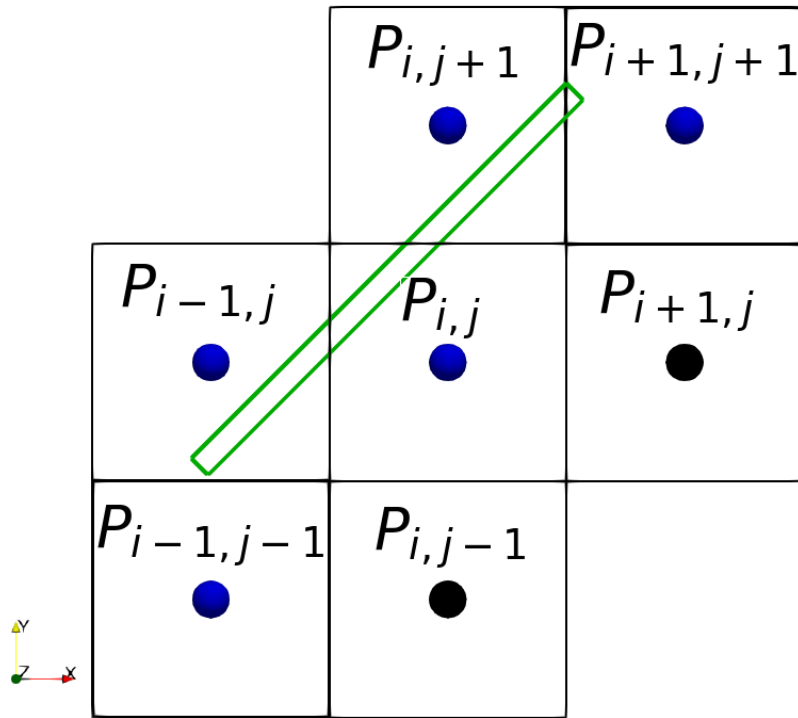
Figura 13 – Segunda etapa da marcação primária.



Fonte: elaborada pelo autor. Figura feita com Matplotlib (HUNTER, 2007).

Na figura (14) apresenta-se outro caso mais simples dessa marcação. A linha verde representa um corpo imerso, enquanto os centros pretos são centros ativos e os centros azuis são centros irregulares. O centro  $P_{i,j}$  foi marcado como irregular, pois os vizinhos  $P_{i-1,j}$  e  $P_{i,j+1}$  estão separados dele pela fronteira imersa. No mesmo sentido, o centro  $P_{i,j+1}$  é marcado como irregular, pois os centros  $P_{i,j}$  e  $P_{i+1,j+1}$  estão separados dele pela fronteira imersa. O centro  $P_{i+1,j+1}$  é marcado como irregular, pois o vizinho  $P_{i,j+1}$  está separado dele pela fronteira imersa. O centro  $P_{i-1,j}$  é marcado como irregular, pois os vizinhos  $P_{i,j}$  e  $P_{i-1,j-1}$  estão separados dele pela fronteira imersa. Por fim, o centro  $P_{i-1,j-1}$  é marcado como irregular, pois o vizinho  $P_{i-1,j}$  está separado dele pela fronteira imersa. Importante notar que não existe nenhum centro inativo, visto que não há centros dentro da fronteira imersa.

Figura 14 – Outro exemplo da segunda etapa da marcação primária.



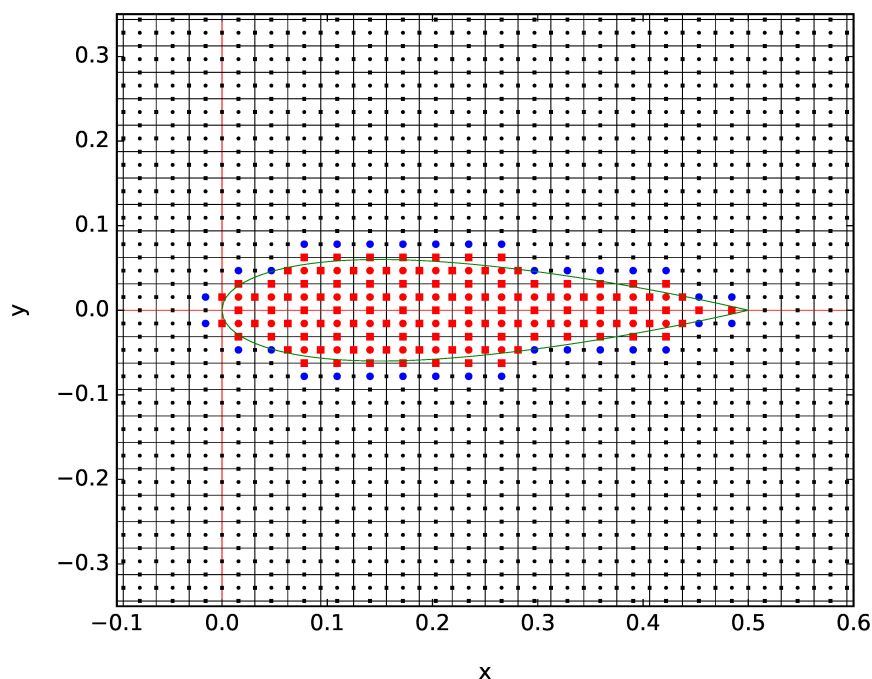
Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Na marcação primária os centros das células foram marcados de acordo com a posição da fronteira imersa. Na marcação secundária as faces das células devem ser marcadas. Esse processo é mostrado na subsecção 2.3.5.2.2

### 2.3.5.2.2 Marcação secundária

Segundo Berthelsen e Faltinsen (2008), um ponto de velocidade é ativo se e somente se os centros dos dois lados da face são ativos e não há nenhuma fronteira imersa separando esses dois centros.

Figura 15 – Primeira etapa da marcação secundária.

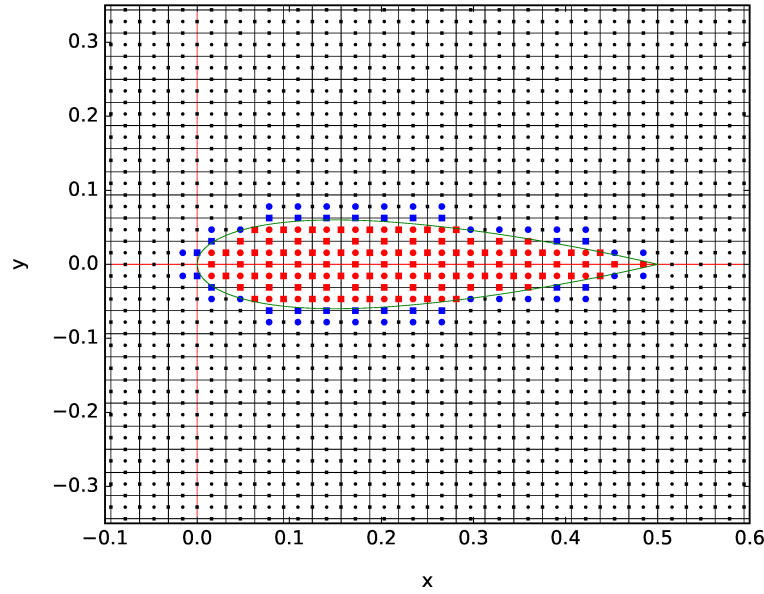


Fonte: elaborada pelo autor. Figura feita com Matplotlib (HUNTER, 2007).

Como pode ser visto na figura (15) algumas células inativas podem ser encontradas fora da fronteira imersa. Berthelsen e Faltinsen (2008) as chamou de "pontos de fronteira". Para que se tenha um problema bem definido, essas faces definidas como "pontos de fronteira" são atualizadas com interpolações utilizando-se o campo de velocidades e a condição de não deslizamento na fronteira imersa.



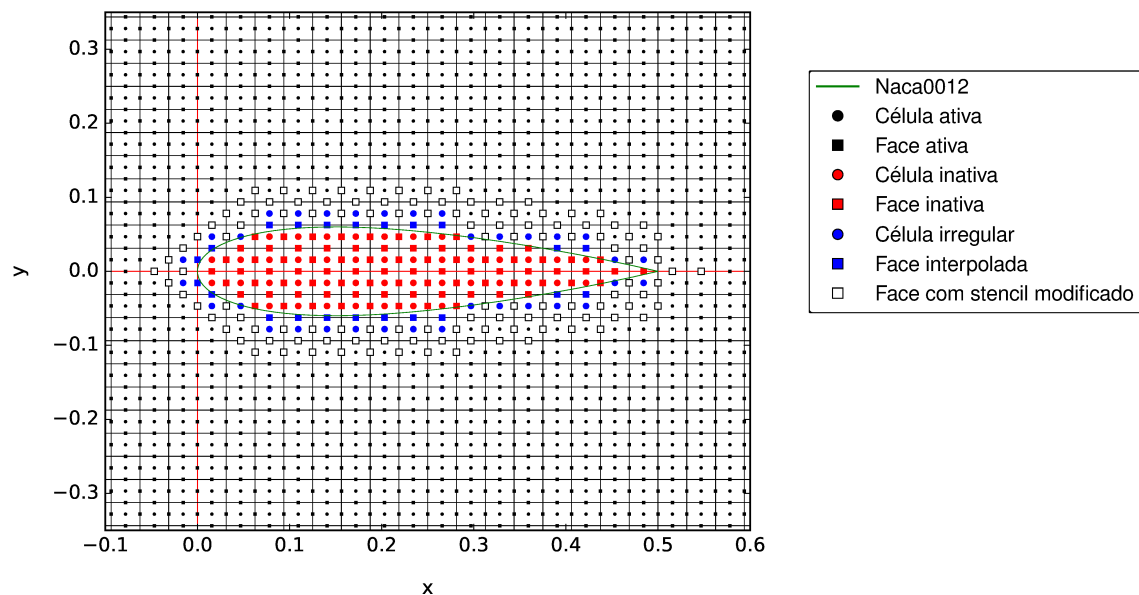
Figura 16 – Segunda etapa da marcação secundária.



Fonte: elaborada pelo autor. Figura feita com Matplotlib (HUNTER, 2007).

Finalmente, existem faces que ao serem resolvidas buscam informações de faces inativas ou de faces separadas por uma fronteira imersa. Isso não pode acontecer, visto que células inativas não são resolvidas e não têm valores definidos para elas. Além disso, ao se resolver uma face abaixo do aerofólio, não se pode utilizar faces que se encontram acima do aerofólio, pois são dois escoamentos independentes. Nesse caso, deve-se marcar essas faces para que não busque informações nas faces inativas. As informações necessárias devem ser obtidas por extrapolação utilizando-se valores das faces ativas para preencher as faces inativas. Essas faces são marcadas como faces com stencil modificado. Na figura (17) as faces brancas com bordas pretas são faces que ao serem resolvidas utilizariam informações de faces inativas ou de faces localizadas do outro lado da fronteira imersa. Como discutido anteriormente, isso não pode acontecer. Portanto, aquelas faces devem ser tratadas de tal forma que, ao serem resolvidas, não utilizem essas faces.

Figura 17 – Marcação completa.



Fonte: elaborada pelo autor. Figura feita com Matplotlib (HUNTER, 2007).

Essa marcação final é melhor explicada na subseção 2.3.5.2.3. As Tabs. 1 e 2 apresentam um resumo da marcação apresentada nessa seção.

Tabela 1 – Resumo da marcação dos centros.

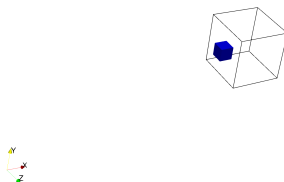
Centros		
Legenda	Significado	Explicação
●	Centro ativo.	O centro é resolvido sem modificações devido ao método de fronteira imersa. Nada a fazer nesses centros.
●	Centro irregular.	Centros que são separados de centros vizinhos por uma fronteira imersa. Deve-se modificar a forma de se resolver essa célula de forma a impor a condição de contorno de pressão na fronteira imersa.
●	Centro inativo.	Centros não resolvidos por estarem dentro do corpo imerso.

Tabela 2 – Resumo da marcação das faces.

Faces		
Legenda	Significado	Explicação
■	Face ativa.	A face é resolvida sem modificações devido ao método de fronteira imersa. Nada a fazer nessas faces.
□	Face com stencil modificado.	Essas faces são resolvidas. Deve-se modificar a forma de se resolver essa face de forma a impor a condição de contorno de velocidade na fronteira imersa. As informações que não estão disponíveis para a solução dessas faces devem ser obtidas por extrapolação do campo de velocidades.
■	Face interpolada	Essa face não é resolvida. Deve-se interpolar o valor da velocidade nessa face.
■	Face inativa.	Faces não resolvidas por estarem dentro do corpo imerso.

### 2.3.5.2.3 Verificação da Marcação das faces em 3D

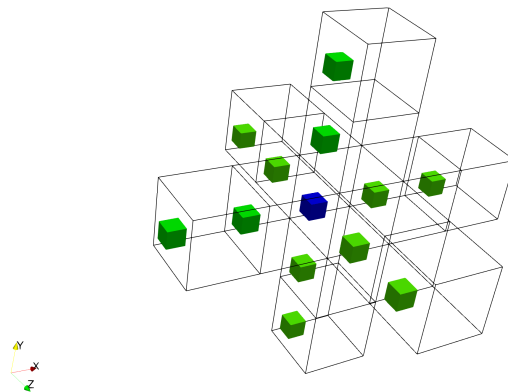
O caso exemplificado nessa subseção se refere à marcação de uma face  $u$  (face cuja normal está na direção  $x$ ) como mostrado na figura (18). Não serão utilizadas as mesmas cores utilizadas na figura 17. As cores serão definidas no texto à medida em que forem apresentadas.

Figura 18 – Velocidade  $u$  a ser resolvida.

Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

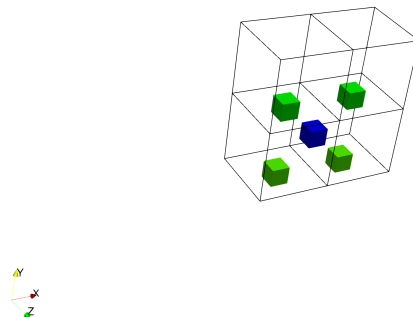
Na figura 18 o cubo transparente com bordas pretas se refere a um volume euleriano em análise, enquanto o cubo azul se refere à face “u” que se deseja analisar. Para se resolver essa face são necessárias informações de faces vizinhas. Essas faces são ilustradas nas figuras (19),(20) e (21). A figura (19) ilustra as faces “u” necessárias, enquanto as figuras (20) e (21) ilustram as faces “v” e “w”, respectivamente.

Figura 19 – Posição das velocidades “u” utilizadas para a solução de “u”



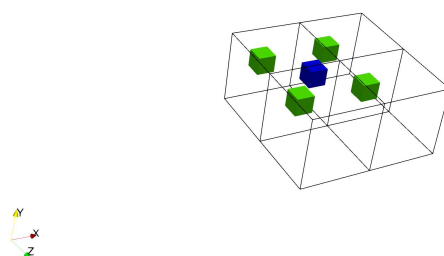
Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Figura 20 – Posição das velocidades “v” utilizadas para a solução de “u”



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Figura 21 – Posição das velocidades “w” utilizadas para a solução de “u”



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

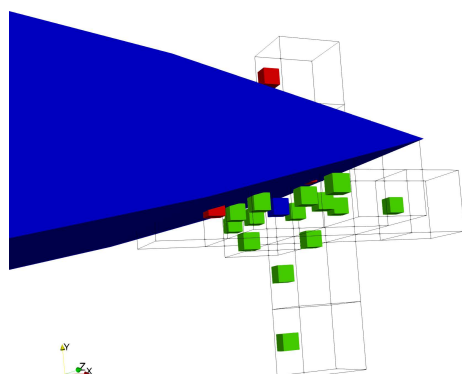
Nas figuras (19),(20) e (21) os cubos verdes são as faces utilizadas para o cálculo da face “u” em análise (cubo azul). O cálculo da face azul envolve a solução das equações de Navier–Stokes discretizadas, além da modelagem da turbulência, quando for necessária. As extrapolações e interpolações citadas nesse trabalho não envolvem a solução do modelo diferencial. Trata-se da obtenção de valores utilizando-se polinômios de Lagrange que utilizam faces ativas ou faces com stencil modificado. Nas faces ativas ou faces com stencil modificado são resolvidas as equações de balanço, embora na última utilize-se valores de faces extrapoladas nesse cálculo.

Ao se resolver uma face ativa utilizam-se todas as informações das faces vizinhas ilustradas nas figuras (19),(20) e (21).

Ao se resolver uma face com stencil modificado, algumas informações das faces vizinha podem não estar disponíveis, visto que alguns vizinhos podem estar dentro do corpo imerso ou separado da face em análise pela fronteira. Essa seção tem a finalidade de ilustrar um caso em que se deseja resolver uma face com stencil modificado. No caso em análise, a face que está sendo analisada se encontra próxima ao bordo de fuga do aerofólio, como pode ser visto na figura (22) (face azul é a face que se deseja resolver). Além disso, a face em análise é uma face com stencil

modificado (conforme figura 17), visto que existem faces utilizadas para seu cálculo que se encontram dentro do aerofólio e do outro lado do aerofólio. Na figura (22) é apresentada a face que se deseja resolver (cubo azul) e as faces que são necessárias para o cálculo (cubos vermelhos e verdes). Os cubos verdes podem ser faces ativas, faces interpoladas ou faces com stencil modificados. Portanto, as faces verdes têm valores atribuídos a elas. Além disso as faces verdes não são separadas da face azul por uma fronteira imersa, ou seja, não existe fronteira imersa entre os cubos verdes e o cubo azul. As faces vermelhas podem ser faces inativas ou podem ser faces ativas, faces interpoladas ou faces com stencil modificados que estão separadas da face azul pela fronteira imersa.

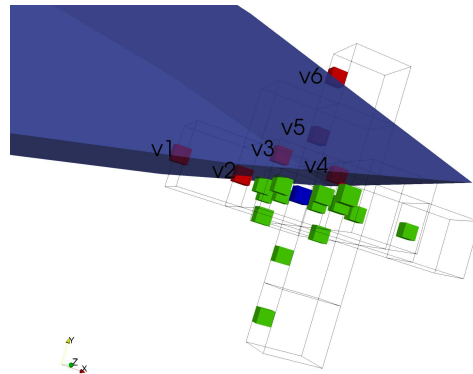
Figura 22 – Marcação das faces vizinhas à velocidade a ser resolvida. Faces verdes podem ser usadas para a solução. Faces vermelhas não podem ser usadas. Essas informações devem ser obtidas via extrapolações. A face azul é a célula a ser resolvida.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Na figura (23) a fronteira imersa foi representada com transparência para facilitar a visualização das faces vermelhas. Nesse caso as faces vermelhas “v1”, “v2”, “v3” e “v4” estão dentro do aerofólio e as faces “v5” e “v6” estão fora do aerofólio, mas se encontram do outro lado do mesmo e não podem ser utilizadas nos cálculos da face azul. Os valores das velocidades nas faces vermelhas, para o cálculo da face azul, devem ser obtidos por extrapolação do campo de velocidades abaixo da fronteira imersa, pois é onde se encontra a face azul.

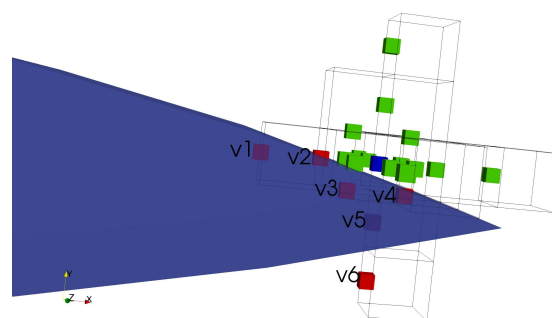
Figura 23 – Marcação das faces vizinhas à velocidade a ser resolvida. Faces verdes podem e as faces vermelhas não podem ser usadas para o cálculo da face azul.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

A mesma análise pode ser feita para um ponto acima do aerofólio, como pode ser visto na figura (24). Nesse caso as faces vermelhas “v1”, “v2”, “v3” e “v4” estão dentro do aerofólio e as faces “v5” e “v6” estão fora do aerofólio, mas se encontram do outro lado do mesmo e não podem ser utilizadas nos cálculos da face azul.

Figura 24 – Marcação das faces vizinhas à velocidade a ser resolvida. Faces verdes podem e as faces vermelhas não podem ser usadas para o cálculo da face azul.



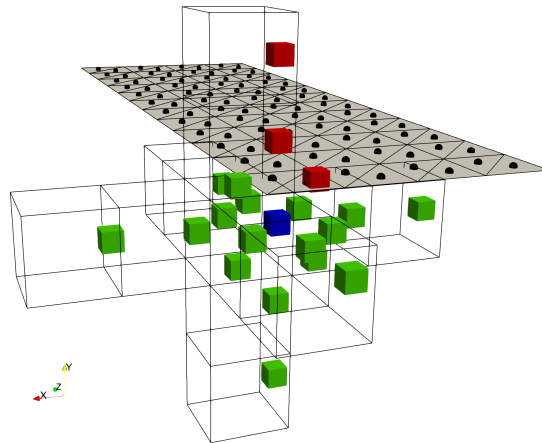
Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Os valores das velocidades nas faces vermelhas, para o cálculo da face azul, devem ser obtidos por extrapolação do campo de velocidades acima da fronteira imersa, pois é onde se encontra a face azul. As faces “v1”, “v2”, “v3” e “v4” são inativas, enquanto as faces “v5” e “v6” são células com stencil modificado. É importante notar que a face “v5” da figura (23) é a face azul da figura (24), enquanto a face “v5” da figura (24) é a face azul da figura (23).

### 2.3.5.3 Cálculo de distâncias

O cálculo das distâncias é necessário para possibilitar o começo da etapa de determinação dos polinômios de interpolação e extrapolação, discutidos na seção 2.3.5.4. Nessa seção será exemplificado o cálculo da distância entre pontos eulerianos e pontos lagrangianos. A Figura 25 será o ponto de partida para a exemplificação desse cálculo. Nessa figura há um exemplo de marcação das células eulerianas baseada na posição do corpo imerso, que no caso em estudo é uma placa com espessura nula. A face em análise é a face  $u$  (cubo azul) identificada como face com stencil modificado. No cálculo da face  $u$  em análise não se pode utilizar as informações contidas nas faces vermelhas. Portanto, deve-se extrapolar informações nas faces vermelhas. O conjunto de triângulos encontrado na Fig. 25 ilustra a malha que descreve o corpo imerso.

Figura 25 – Exemplo de face  $u$  (cubo azul) marcada como face com stencil modificado. Faces vermelhas não podem ser usadas para o cálculo.



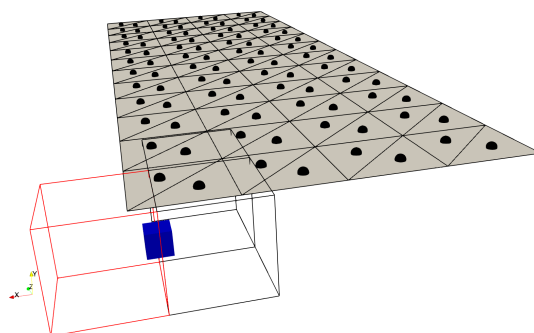
Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).



As esferas pretas descrevem os centroides de cada triângulo. Esses centroides também serão chamados nesse relatório de pontos lagrangianos.

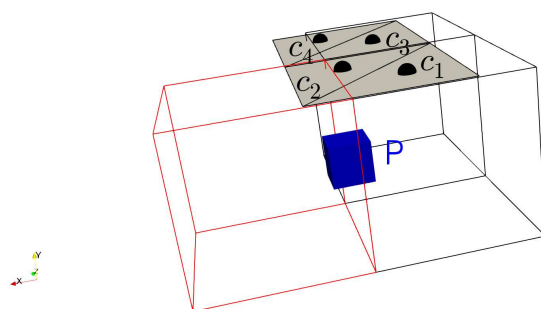
Após a escolha da face que será analisada, deve-se identificar quais são os pontos lagrangianos que se encontram perto dessa face. Na Figura 26 é ilustrado o processo de busca. Somente os volumes pretos contém pontos lagrangianos, enquanto o volume vermelho é referente à face de interesse. Os pontos lagrangianos que se encontram fora dos volumes pretos não serão utilizados no cálculo da distância. Essa separação é importante para evitar que se façam cálculos com todos os pontos lagrangianos.

Figura 26 – Busca por pontos lagrangianos. O volume vermelho contém a face de interesse, enquanto os outros dois volumes pretos contém pontos lagrangianos.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Figura 27 – Ilustração de quais pontos lagrangianos foram encontrados na busca.

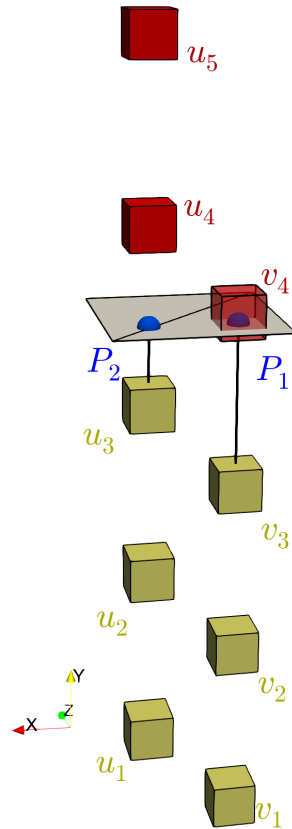


Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Na Figura 27 é ilustrado o resultado da busca por pontos lagrangianos. Os centroides  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$  serão utilizados no cálculo da distância.

Na Figura 28 são ilustradas as distâncias que precisam ser determinadas (reta entre face  $u_3$  e ponto  $P_2$  e reta entre face  $v_3$  e ponto  $P_1$ ). O ponto  $P_2$  se encontra no triângulo referente ao centroide  $c_2$  (Fig. 27) e o ponto  $P_1$  no triângulo referente ao centroide  $c_1$ . Importante notar que apesar de os centroides  $c_3$  e  $c_4$  serem consultados pelo algoritmo, não há nenhum ponto de interesse (para a face em análise) nos triângulos referentes a esses centroides. Na Figura 28 não ficou claro, portanto é preciso clarear que a face  $v_4$  se encontra ligeiramente acima da superfície imersa, enquanto o ponto  $P_2$  se encontra na superfície imersa.

Figura 28 – Ilustração das distâncias necessárias para a obtenção dos polinômios que serão utilizados para extrapolação dos valores nas faces vermelhas.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

O cálculo de distância é baseado no processo de determinação da interseção de uma reta com um plano.

Com a posição da face  $v_1$  e a direção de interesse, é possível criar uma reta. Sendo assim, a equação paramétrica da reta  $r$  é definida como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_t t, \quad (2.19)$$

na qual  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x}_p$  é a posição da face, e  $\mathbf{x}_t$  é o vetor que fornece a direção de interesse.

A equação de um plano é dada em função do vetor normal e um ponto qualquer pertencente a ele. Com isso, o plano  $s$  é definido como:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) = 0, \quad (2.20)$$

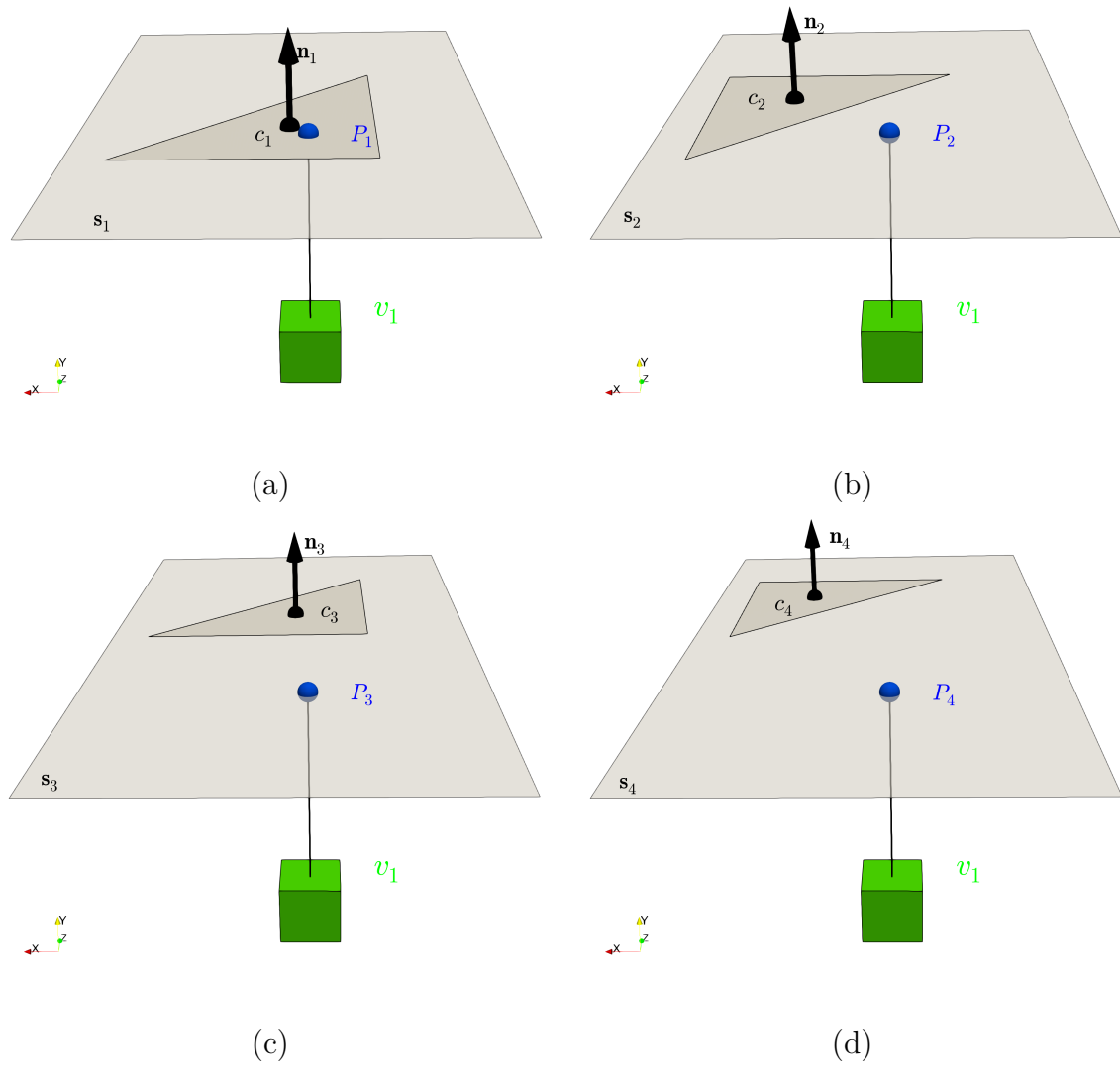
na qual  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{n}$  o vetor normal e  $x_c$  a posição do centroide do elemento triangular.

Substituindo a Eq. (2.19) na Eq. (2.20), o valor de  $t$  no ponto de interseção é:

$$t = \frac{(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_p) \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{x}_t \cdot \mathbf{n}}. \quad (2.21)$$

Consequentemente, o ponto de interseção é obtido substituindo a Eq. (2.21) na Eq. (2.19). No entanto, o ponto de interseção pode não estar contido no triângulo em análise. Nesse caso a distância encontrada deve ser desconsiderada. Esse processo é exemplificado na Fig. 29 para a face  $v_1$ . No caso, deseja-se determinar a distância da face  $v_1$  até a fronteira imersa na direção  $Y$ . Portanto, deve-se calcular o ponto de interseção entre a reta definida pela posição da face  $v_1$  e a direção de interesse com os planos definidos pelos pontos lagrangianos  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$ . Como pode ser visto na Fig. 29, somente a interseção entre a reta e o plano definido pelo ponto lagrangiano  $c_1$  pode ser utilizada.

Figura 29 – Ilustração da determinação do ponto de interseção entre a reta definida pela posição da face  $v_1$  e a direção de interesse com os planos definidos pelos pontos lagrangianos  $c_1$  (a),  $c_2$  (b),  $c_3$  (c) e  $c_4$  (d).



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Assim, faz-se necessário verificar se o ponto de interseção plano-reta está dentro da região do triângulo lagrangiano, conforme Fig. 29(a). O método utilizado consiste em somar a área de três triângulos formados a partir do ponto de interseção e dois vértices do elemento triangular, e avaliar se essa soma corresponde a área do

elemento triangular (Fig. 30). Caso o ponto esteja fora do elemento, as áreas não são equivalentes. Para isso, a área de um triângulo BCD qualquer é definida por:

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|. \quad (2.22)$$

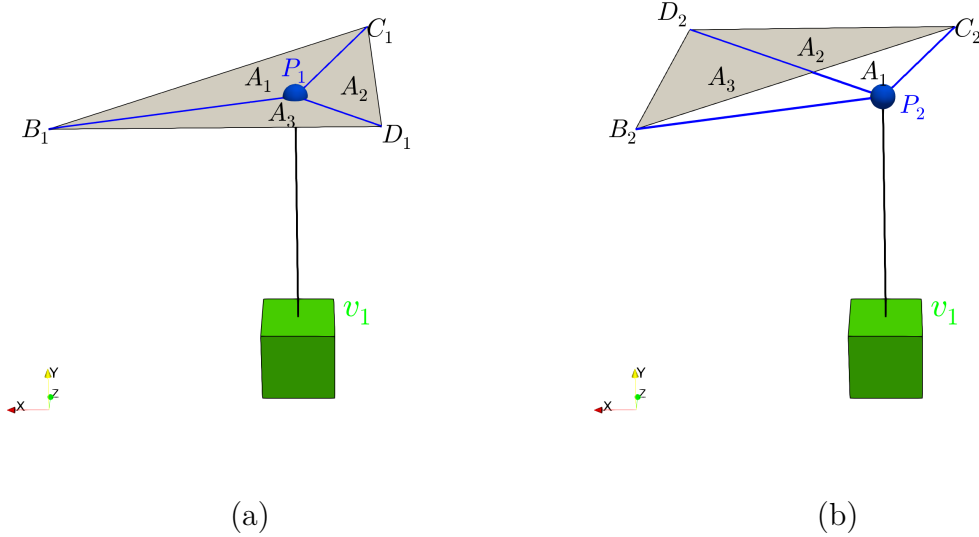
Portanto, no caso da Fig. 30(a), tem-se:

$$A_{B_1C_1D_1} = A_{B_1C_1P_1} + A_{C_1D_1P_1} + A_{D_1B_1P_1}, \quad (2.23)$$

enquanto na Fig. 30(b) e na Fig. 31, tem-se:

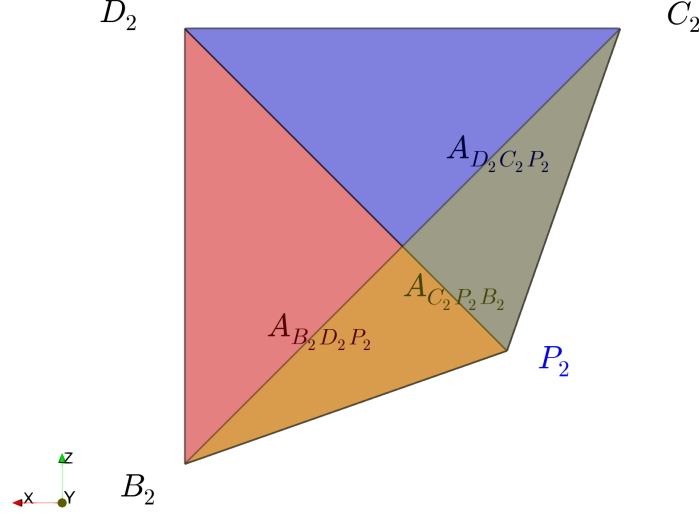
$$A_{B_2D_2C_2} < A_{B_2D_2P_2} + A_{D_2C_2P_2} + A_{C_2P_2B_2}. \quad (2.24)$$

Figura 30 – Ilustração das áreas necessárias para determinar se o ponto de interseção está ou não dentro do triângulo lagrangiano.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Figura 31 – Ilustração das áreas necessárias para determinar se o ponto de interseção está ou não dentro do triângulo lagrangiano.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

#### 2.3.5.4 Polinômios de extrapolação para a solução da velocidade

Com o cálculo das distâncias concluído, é possível determinar os polinômios de interpolação e extrapolação necessários para imposição das condições de contorno no fluido. Na Fig. 32 é exemplificado o stencil de extrapolação para obtenção das informações nas faces  $u_4$  e  $u_5$ .

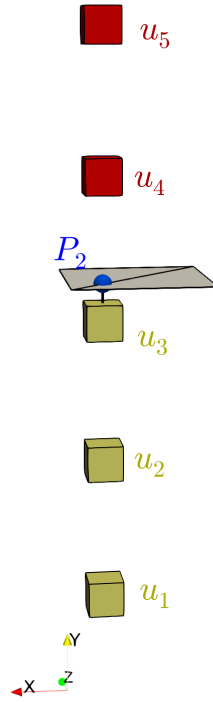
No método da fronteira imersa com volumes fantasmas locais proposto por Berthelsen e Faltinsen (2008), utilizam-se polinômios de Lagrange para as extrapolações. No exemplo da Figura 32, para a obtenção dos polinômios referente às faces  $u_4$  e  $u_5$ , o polinômio é de quarta ordem e terceiro grau, portanto tem-se:

$$\beta_{u_s}(y) = \left( \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^3 \frac{y - y_{u_t}}{y_{u_s} - y_{u_t}} \right) \frac{y - y_{P_2}}{y_{u_s} - y_{P_2}}, \quad (2.25)$$

$$\beta_{P_2}(y) = \prod_{t=1}^3 \frac{y - y_{u_t}}{y_{P_2} - y_{u_t}}, \quad (2.26)$$

$$p_q(y) = \left( \sum_{s=1}^3 \beta_{u_s}(y) f_{u_s} \right) + \beta_{P_2}(y) f_{P_2}. \quad (2.27)$$

Figura 32 – Ilustração do stencil dos polinômios que serão utilizados para extrapolação dos valores nas faces vermelhas ( $u_4$  e  $u_5$ ).



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Nessas equações  $y_{u_1}$ ,  $y_{u_2}$ ,  $y_{u_3}$  e  $y_{P_2}$  são as posições na direção  $Y$  das faces  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  e do ponto  $P_2$  respectivamente.  $f_{u_1}$ ,  $f_{u_2}$ ,  $f_{u_3}$  e  $f_{P_2}$  são os valores da velocidade  $u$  das faces  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  e do ponto  $P_2$  respectivamente. Portanto, para que se obtenha o polinômio para extrapolar o valor da velocidade  $u$  na face  $u_4$ , deve-se

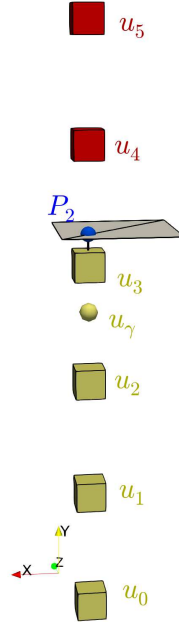
determinar os coeficientes  $\beta_{u_1}(y_{u_4})$ ,  $\beta_{u_2}(y_{u_4})$ ,  $\beta_{u_3}(y_{u_4})$ ,  $\beta_{P_2}(y_{u_4})$  e substituí-los na equação 2.27.

Segundo Berthelsen e Faltinsen (2008), o polinômio obtido pode apresentar dificuldades se o ponto  $P_2$  estiver muito próximo das faces  $u_3$  ou  $u_4$ . Isso acontece devido ao comportamento das Eqs. (2.25) e (2.26) quando  $|y_{u_i} - y_{P_2}| \rightarrow 0$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  ou 5. Nesse caso  $\beta_{u_s} \rightarrow \infty$  ou  $\beta_{P_2} \rightarrow \infty$ . Para contornar esse problema, o autor introduz um ponto (chamado de ponto de imagem) cuja posição é definida como:

$$y_\gamma = y_{P_2} - \max(a, \epsilon) \Delta y, \quad (2.28)$$

na qual  $y_\gamma$  é a posição do ponto de imagem,  $\Delta y$  é o tamanho de um volume euleriano na direção  $Y$ ,  $a\Delta y$  é a distância entre a face  $u_3$  e o ponto  $P_2$ , e  $\epsilon$  é uma constante previamente definida, de tal forma que se  $a \geq \epsilon$  o polinômio não apresenta comportamento singular. A Figura 33 ilustra o ponto de imagem introduzido.

Figura 33 – Ilustração do stencil dos polinômios que serão utilizados para extrapolação dos valores nas faces vermelhas( $u_4$  e  $u_5$ ).



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).



Determina-se um polinômio para  $u_\gamma$  utilizando-se as faces  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , da seguinte forma:

$$f_{u_\gamma} = p_q(y_\gamma) = \sum_{s=0}^3 \left( \prod_{t=0}^3 \frac{y_\gamma - y_{u_t}}{y_{u_s} - y_{u_t}} f_{u_s} \right) \quad (2.29)$$

Dessa forma, a face  $u_4$  pode ser preenchida com o seguinte polinômio de quarta ordem (terceiro grau):

$$p_q(y) = \left( \sum_{s=1}^2 \beta_{u_s}(y) f_{u_s} \right) + \beta_{P_2}(y) f_{P_2} + \beta_{u_\gamma}(y) f_{u_\gamma}, \quad (2.30)$$

na qual

$$\beta_{u_s}(y) = \left( \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^2 \frac{y - y_{u_t}}{y_{u_s} - y_{u_t}} \right) \frac{y - y_{P_2}}{y_{u_s} - y_{P_2}} \frac{y - y_\gamma}{y_{u_s} - y_\gamma}, \quad (2.31)$$

$$\beta_{P_2}(y) = \left( \prod_{t=1}^2 \frac{y - y_{u_t}}{y_{P_2} - y_{u_t}} \right) \frac{y - y_{u_\gamma}}{y_{P_2} - y_{u_\gamma}}, \quad (2.32)$$

$$\beta_{u_\gamma}(y) = \left( \prod_{t=1}^2 \frac{y - y_{u_t}}{y_{u_\gamma} - y_{u_t}} \right) \frac{y - y_{P_2}}{y_{u_\gamma} - y_{P_2}}, \quad (2.33)$$

Dessa forma, nenhum denominador dos coeficientes  $\beta$  se torna menor que  $\epsilon$ , enquanto  $\epsilon \leq 0,5$  e a ordem do método Ghost seja preservada. Em verdade, essa mudança no polinômio, nada mais é que usar uma combinação linear de polinômios baseados no conjunto de pontos:  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_{P_2}$  e no conjunto de pontos:  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_{P_2}$ .

Observou-se que ao se utilizar polinômios de terceiro grau na matriz de coeficientes da solução das velocidades, o solver de sistema linear não convergia para malhas mais finas. Após análise da matriz, observou-se que ela não se manteve estritamente diagonal dominante, dificultando ou impossibilitando a convergência da solução do sistema linear (PERIC, 2002). Portanto, na matriz de coeficientes da velocidade utilizaram-se polinômios de segundo grau para a extrapolação das

velocidades, possibilitando a rodada de casos com malhas mais finas. A metodologia de obtenção desses polinômios é idêntica à apresentada nessa subseção. Na montagem do RHS do sistema linear da velocidade, utilizaram-se polinômios de terceiro grau para a extrapolação da velocidade.

A verificação da ordem de convergência dos polinômios implementados para extrapolação de terceiro grau para as velocidades podem ser vistos nas seções 3.1.1.1.3 e 3.1.1.2.3.

### 2.3.5.5 Polinômios de interpolação para a solução da velocidade

Como foi discutido anteriormente, algumas faces devem ser interpoladas. Em algumas ocasiões, essas faces podem ser interpoladas em mais de uma direção, como é o caso da face azul das Figs. 34 e 35. Quando isso acontece, deve-se utilizar uma combinação dos três polinômios para obtenção do valor na face azul. Segundo Tremblay e Friedrich (2002) os polinômios devem ser multiplicados por pesos, que são calculados da seguinte forma:

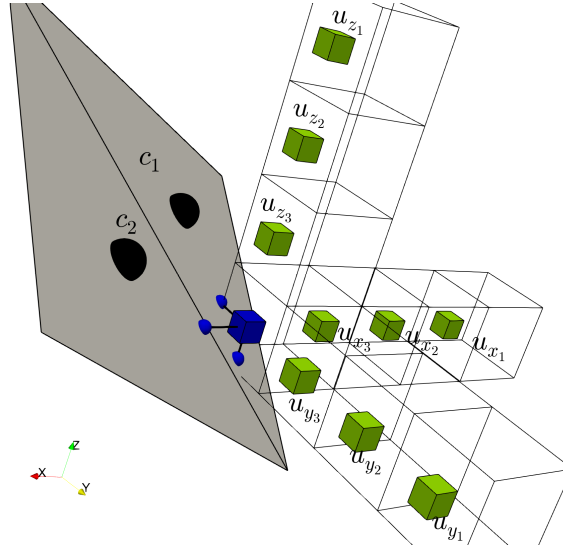
$$\alpha_{dir} = \frac{\theta_{dir}}{\sum_{k=1}^{N_{dir}} \theta_k}, \quad (2.34)$$

na qual  $\alpha_{dir}$  é o peso do polinômio interpolador na direção “ $dir$ ”,  $N_{dir}$  é o número de direções nas quais a face pode ser interpolada e  $\theta$  pode ser calculado da seguinte forma:

$$\theta_{dir} = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq dir}}^{N_{dir}} \Delta_k}{\Delta_{dir}}, \quad (2.35)$$

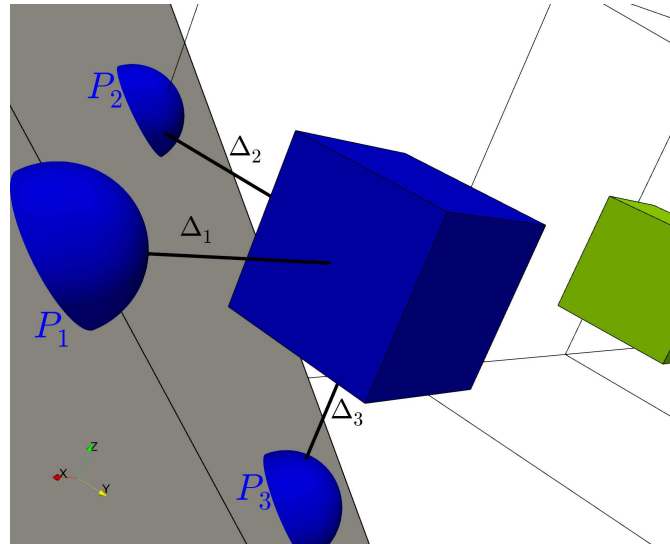
na qual  $\Delta_{dir}$  é a distância da face até o objeto imerso, como pode ser visto na Fig. 35. Nessa figura,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  são os pontos nos quais retas nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  intersectam os triângulos da fronteira imersa.  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  e  $\Delta_3$  são as distâncias da face azul até a fronteira imersa nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  respectivamente.

Figura 34 – Ilustração de uma face que deve ser interpolada (cubo azul). As faces verdes são utilizadas para montar os polinômios de Lagrange, assim como os pontos azuis.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Figura 35 – Zoom da Fig. 34.  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  são os pontos nos quais retas nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  intersectam os triângulos da fronteira imersa.  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  e  $\Delta_3$  são as distâncias da face azul até a fronteira imersa nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  respectivamente.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

A verificação da ordem de convergência dos polinômios implementados para interpolação de terceiro grau para as velocidades podem ser vistos nas seções 3.1.1.1.2 e 3.1.1.2.2.

### 2.3.5.6 Determinação dos polinômios para obtenção das velocidades para o cálculo do divergente

O cálculo do divergente da velocidade predita deve ser feito para o cálculo do RHS do cálculo da correção de pressão. O divergente deve ser calculado em todos os volumes eulerianos ativos. A Fig. 36 ilustra um caso no qual o cálculo do divergente deve ser modificado devido a presença da fronteira imersa.

Deseja-se calcular o divergente no ponto  $P_{i,j,k}$ , portanto utilizam-se a velocidade  $u_{i,j,k}$ ,  $u_{i+1,j,k}$ ,  $v_{i,j,k}$ ,  $v_{i,j+1,k}$ ,  $w_{i,j,k}$  e  $w_{i,j,k+1}$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U}^*|_{i,j,k} \approx \frac{u_{i+1,j,k}^* - u_{i,j,k}^*}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k}^* - v_{i,j,k}^*}{\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1}^* - w_{i,j,k}^*}{\Delta z}, \quad (2.36)$$

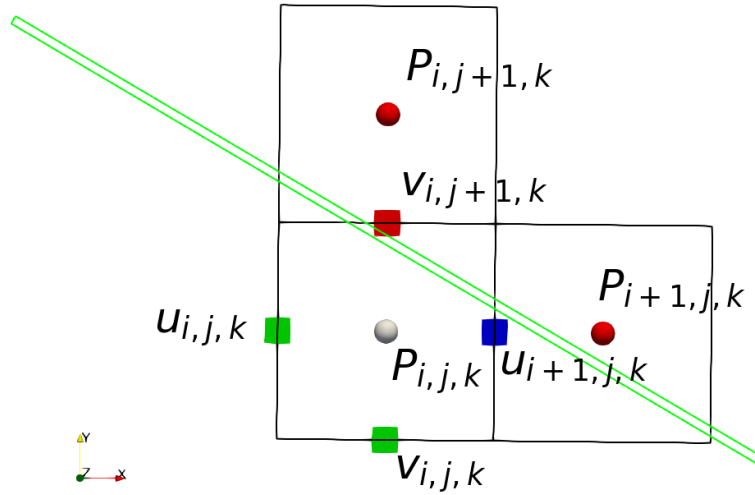
na qual  $\vec{U}^*$  é o vetor com as velocidades  $u$ ,  $v$  e  $w$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  é o tamanho do volume euleriano nas direções x, y e z respectivamente. O sobrescrito \* significa que se trata da velocidade predita. Para facilitar a discussão, supõe-se que as velocidades  $w_{i,j,k}^*$  e  $w_{i,j,k+1}^*$  não devem ser interpoladas ou extrapoladas. No caso ilustrado na Fig. 36 as velocidade  $u_{i,j,k}^*$  e  $v_{i,j,k}^*$  podem ser usadas sem nenhum tratamento, no entanto, as velocidades  $u_{i+1,j,k}^*$  e  $v_{i,j+1,k}^*$  devem ser interpolada e extrapolada respectivamente. A velocidade  $v_{i,j+1,k}^*$  está separada do ponto  $P_{i,j,k}$  pela fronteira imersa (descrita por uma linha verde), ou seja, deve-se extrapolar essa velocidade para o cálculo do divergente. Essa extrapolação é feita com a seguinte equação (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2008):

$$v_{i,j+1,k}^g = \frac{2}{a_d(a_d + 1)} v_{\Gamma}^{n+1} + \frac{2(a_d - 1)}{a_d} v_{i,j,k}^* - \frac{(a_d - 1)}{(a_d + 1)} v_{i,j-1,k}^*, \quad (2.37)$$

na qual  $v_{i,j+1,k}^g$  é a velocidade extrapolada,  $v_{\Gamma}^{n+1}$  é a velocidade na fronteira imersa e  $a_d \Delta y$  é a distância entre o ponto  $v_{i,j,k}^*$  e a fronteira imersa. É importante notar que  $a_d$  sempre será maior que 0,5 nesse caso.

Além disso, a velocidade  $u_{i+1,j,k}$  é uma velocidade interpolada, e foi interpolada na predição de velocidades segundo a subseção anterior. Segundo Berthelsen e Faltinsen (2008), essa velocidade não precisa de nenhum tratamento e pode ser usada no cálculo do divergente com a interpolação feita na predição da velocidade. No entanto, no presente trabalho isso causou instabilidades numéricas em alguns casos, que só foram sanadas ao se reinterpolarmos essa velocidade com um polinômio de segundo grau análogo ao apresentado na Eq. (2.37).

Figura 36 – Ilustração de um caso no qual uma velocidade deve ser interpolada ( $u_{i+1,j,k}$ ) e outra deve ser extrapolada ( $u_{i,j+1,k}$ ) no cálculo do divergente.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

A verificação da ordem de convergência dos polinômios implementados para cálculo do divergente podem ser vistos nas seções 3.1.1.1.5 e 3.1.1.2.5 e nas seções 3.1.1.1.1 e 3.1.1.2.1.

### 2.3.5.7 Determinação dos polinômios de extrapolação para o cálculo da correção de pressão

A matriz de coeficientes do sistema linear responsável pela determinação da correção de pressão deve ser modificado para que a fronteira imersa seja levada em consideração. Sabe-se que a derivada da correção de pressão normal à fronteira imersa em qualquer ponto da fronteira imersa deve ser igual a zero. Isso é verdade devido à correção da velocidade que deve ser feita:

$$u^{n+1} = u^* - \frac{F_\omega}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (2.38)$$

na qual  $u^{n+1}$  é a velocidade corrigida,  $u^*$  é a velocidade predita,  $F_\omega$  é definido na Eq. (2.14) e  $\rho$  é a massa específica do fluido. Se  $\frac{\partial P}{\partial x}$  não for igual a zero na fronteira imersa, a velocidade imposta será modificada. A velocidade imposta na fronteira imersa já é a velocidade corrigida, ou seja, já é a velocidade em  $n + 1$ .

Na Fig. 37 para a solução de  $P_{i,j,k}$  as pressões  $P_{i+1,j,k}$  e  $P_{i,j+1,k}$  devem ser extrapoladas, visto que são separadas do ponto  $P_{i,j,k}$  por uma fronteira imersa (descrita por uma linha verde). Para a extrapolação da correção de pressão no ponto  $P_{i+1,j,k}$  utiliza-se o seguinte polinômio:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{i+1,j,k}^g \approx \frac{2}{a_d(a_d + 1)} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_\Gamma^{n+1} + \frac{2(a_d - 1)}{a_d} \left( \frac{P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k}}{\Delta x} \right) - \frac{(a_d - 1)}{(a_d + 1)} \left( \frac{P_{i-1,j,k} - P_{i-2,j,k}}{\Delta x} \right). \quad (2.39)$$

Esse polinômio fornece uma aproximação da derivada da correção de pressão na face  $u_{i+1,j,k}$ . Portanto, inicialmente, deve-se fazer uma interpolação da derivada da correção de pressão. Nota-se que o erro dessa interpolação é de segunda ordem, devido à utilização do método de diferenças centradas para a discretização da derivada da correção de pressão. Portanto, apesar da utilização de um polinômio de segundo grau, que apresenta erro de terceira ordem, essa interpolação é de segunda ordem devido à utilização do método de diferenças centradas.

Para a determinação da correção de pressão no ponto  $P_{i+1,j,k}$  utiliza-se a aproximação por diferenças centradas da derivada da correção de pressão na face  $u_{i+1,j,k}$ :

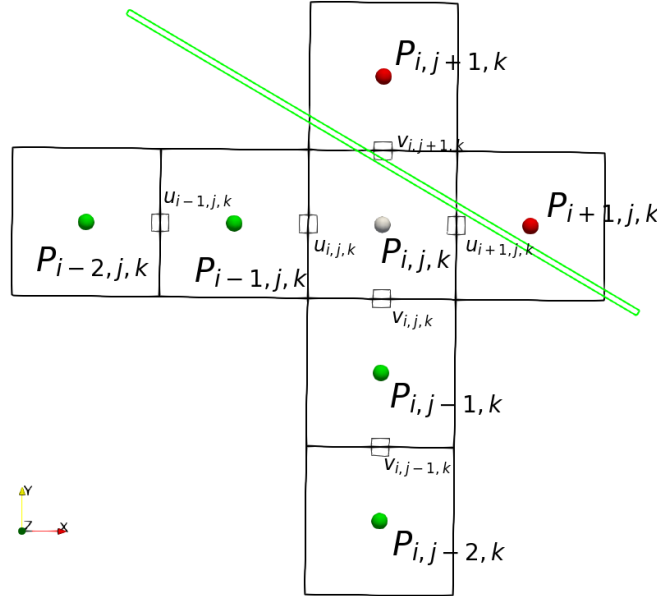
$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{i+1,j,k} \approx \frac{P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k}}{\Delta x}. \quad (2.40)$$

Pode-se isolar o termo  $P_{i+1,j,k}$  da seguinte forma:

$$P_{i+1,j,k} \approx P_{i,j,k} + \Delta x \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{i+1,j,k}. \quad (2.41)$$

Portanto, utiliza-se a aproximação para  $\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{i+1,j,k}^g$  determinada na Eq. (2.40) para a determinação de  $P_{i+1,j,k}$  na Eq. (2.41). Vale ressaltar que apesar de a interpolação da Eq. (2.40) ser de segunda ordem, a determinação de  $P_{i+1,j,k}$  na Eq. (2.41) é de terceira ordem.

Figura 37 – Ilustração de um caso no qual as correções de pressão nos pontos  $P_{i+1,j,k}$  e  $P_{i,j+1,k}$  devem ser extrapolados.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

A extrapolação da pressão  $P_{i,j+1,k}$  é obtida de forma análoga. A verificação da ordem de convergência dos polinômios implementados para a extrapolação da pressão podem ser vistos nas seções 3.1.1.1.4 e 3.1.1.2.4 e nas seções 3.1.1.1.6 e 3.1.1.2.6.

### 2.3.5.8 Cálculo das forças que atuam na superfície da fronteira imersa

A tensão que atua sobre um ponto da fronteira imersa, com direção normal ao elemento pode ser calculada da seguinte forma:

$$T_i = \tau_{ji}n_j = \left[ -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j, \quad (2.42)$$

na qual  $T_i$  é a tensão na direção  $x_i$ ,  $\tau_{ji}$  é o tensor de tensões, e  $n_j$  é o componente  $j$  do vetor unitário que descreve a normal da superfície onde a tensão está sendo calculada,  $u_i$  é campo vetorial de velocidades, e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido.

Portanto, para calcular o tensor é necessário que se obtenha a pressão e as derivadas parciais da velocidade no ponto de interesse. Nas seções seguintes serão discutidas as formas como esses valores foram determinados.

#### 2.3.5.8.1 Determinação da pressão nos ponto lagrangianos

A pressão foi obtida interpolando-se a pressão do campo euleriano ao longo de uma linha definida pelo ponto lagrangiano e a normal do triângulo lagrangiano de interesse. Utilizam-se dois pontos nessa linha e a informação de que a derivada da pressão na direção normal ao triângulo lagrangiano em um ponto da fronteira imersa é igual à aceleração do corpo naquele ponto. No entanto, não é sempre que existem pontos eulerianos que coincidem com a linha onde será feita a interpolação. Portanto, utilizando o campo euleriano, deve-se interpolar a pressão em pontos na linha de interesse. Isso é feito com interpolações bilineares no plano mais perpendicular à normal do triângulo lagrangiano, ou seja, se a normal do ponto lagrangiano for (1,0,0), a interpolação bilinear é feita no plano (y,z), se a normal for (0.42,0.2367,0.876), a interpolação bilineares é feita no plano (x,y) e assim por diante. Dois pontos são interpolados na linha de interesse, os pontos  $PI1$  e  $PI2$ , que podem ser vistos na fig.38. Com esses dois pontos determina-se a derivada da pressão no ponto  $P2$ , utilizando-se diferenças centradas:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{P2} \approx \frac{p(PI2) - p(PI1)}{\Delta n_1}, \quad (2.43)$$



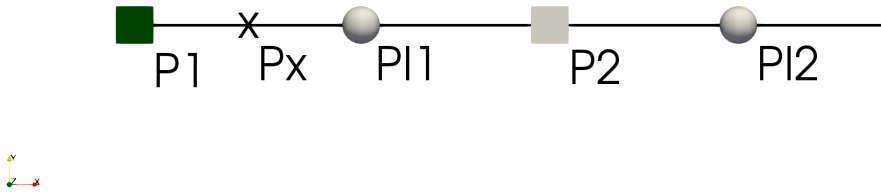
na qual  $\frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{P_2}$  é a derivada da pressão na direção normal no ponto  $P_2$ ,  $p(PI1)$  e  $p(PI2)$  são a pressão nos pontos  $PI1$  e  $PI2$  respectivamente e  $\Delta n_1$  é a distância entre os pontos  $PI1$  e  $PI2$ . O ponto  $P1$  é o ponto lagrangiano, onde a derivada da pressão na direção normal é igual à aceleração do corpo na direção normal. Portanto, utilizando-se as derivadas nos pontos  $P1$  e  $P2$ , pode-se interpolar linearmente a derivada da pressão no ponto  $Px$ . O ponto  $Px$  está centrado em relação aos pontos  $P1$  e  $PI1$ . Podemos escrever a aproximação da derivada da pressão no  $Px$  por diferenças centradas da seguinte forma:

$$\frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{Px} \approx \frac{p(PI1) - p(P1)}{\Delta n_2}, \quad (2.44)$$

na qual  $\frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{Px}$  é a derivada da pressão na direção normal no ponto  $Px$ ,  $p(PI1)$  e  $p(P1)$  são a pressão nos pontos  $PI1$  e  $P1$  respectivamente e  $\Delta n_2$  é a distância entre os pontos  $P1$  e  $PI1$ . Portanto, pode-se reescrever a eq. 2.44 para determinar a pressão no ponto  $P1$  ( $p(P1)$ ):

$$p(P1) \approx p(PI1) - \Delta n_2 \frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{Px}, \quad (2.45)$$

Figura 38 – Esquema de interpolação para a pressão na fronteira imersa.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Espera-se uma taxa de convergência de segunda ordem nesse caso. Testes foram feitos para a determinação da taxa de convergência da metodologia apresentada e são apresentados na seção 3.1.

Na seção seguinte será discutida a forma de determinação do tensor taxa de deformação nos pontos lagrangianos.

#### 2.3.5.8.2 Determinação do tensor gradiente da velocidade

Após a determinação da pressão no ponto lagrangiano, é necessário calcular a contribuição da força devido à tensão viscosa. Para isso é necessário determinar o gradiente da velocidade e seu transposto. O tensor gradiente da velocidade é um tensor com 9 componentes:

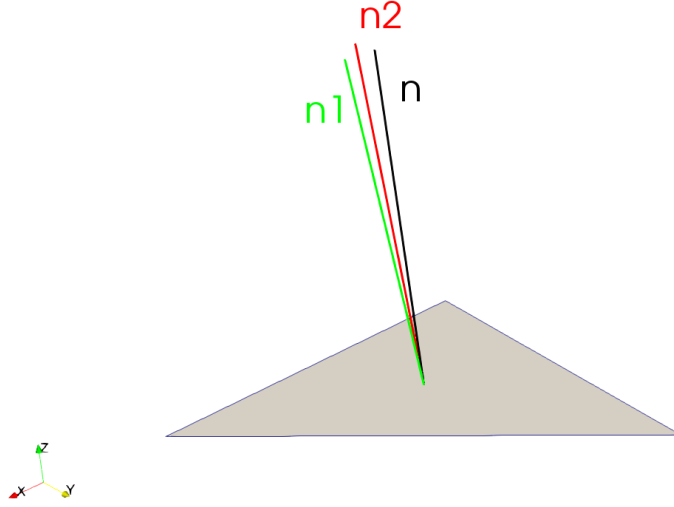
$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Portanto, deve-se determinar as derivadas das 3 velocidades (u,v,w) nas 3 direções(x,y,z).

O cálculo das derivadas nas direções coordenadas pode ser feito da maneira tradicional. Nesse trabalho, esse cálculo foi feito de uma forma alternativa, devido à complexidade de se determinar as velocidades que podem ou não ser utilizadas nesse cálculo. A implementação da metodologia apresentada a seguir foi mais simples, na visão do autor.

No presente trabalho, calculou-se a derivada das velocidade em 3 direções:  $n$ ,  $n1$  e  $n2$ , como pode ser visto na fig.39.

Figura 39 – Direções das derivadas.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

A direção  $n$  é a direção normal ao plano lagrangiano a direção  $n1$  e  $n2$  estão inclinadas  $5^\circ$  em relação à direção normal. Importante notar que os vetores  $n1$  e  $n2$  podem ser escritos da seguinte forma:

$$n1 = n + vec_1, \quad (2.47)$$

$$n2 = n + vec_2, \quad (2.48)$$

na qual  $vec_1$  e  $vec_2$  são vetores contidos no plano lagrangiano e são perpendiculares entre si. Portanto,  $vec_1$ ,  $vec_2$  e  $n$  são vetores perpendiculares entre si, visto que  $vec_1$  é perpendicular a  $vec_2$  e estão no plano lagrangiano. Como definição o vetor normal é perpendicular a qualquer vetor contido no plano lagrangiano.

Dessa forma,  $n$ ,  $n1$  e  $n2$  são linearmente independentes. As derivadas das 3 velocidades são feitas nessas 3 direções, resultando em 9 valores de derivadas. As derivadas na direção normal são obtidas com 3 pontos: o ponto lagrangiano, onde a velocidade é conhecida, e mais dois pontos contidos na linha  $n$ . Esses dois pontos são obtidos de forma análoga à interpolação bilinear utilizada no cálculo

da pressão (seção 2.3.5.8.1), mas nesse caso é necessário utilizar um polinômio biquadrático para garantir segunda ordem. Com esses 3 pontos, utiliza-se o método upwind de segunda ordem para determinar derivada da velocidade na direção  $n$  no ponto lagrangiano. Esse processo deve ser feito para as três velocidades ( $u, v$  e  $w$ ). A determinação das derivadas nas direções  $n1$  e  $n2$  são obtidas de forma análoga.

Portanto, ao final do processo descrito até aqui, teremos 9 derivadas:  $\frac{\partial u}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n1}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n2}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial n1}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial n2}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial n1}$  e  $\frac{\partial w}{\partial n2}$ . Mas as derivadas estão nas direções erradas. Precisamos das derivadas nas direções  $x, y$  e  $z$  e as temos nas direções  $n, n1$  e  $n2$ . Se fizermos o produto escalar entre o vetor gradiente de  $u$  e a direção  $n$ , obtemos o seguinte:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \left[ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right] \cdot [n_a, n_b, n_c], \quad (2.49)$$

na qual  $[n_a, n_b, n_c]$  são as três componentes do vetor  $n$ . Dessa forma, tem-se uma equação e três incógnitas  $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$ .

Importante notar que uma aproximação para  $\frac{\partial u}{\partial n}$  foi obtida anteriormente e o vetor  $n$  é conhecido. Se o mesmo processo for feito para as direções  $n1$  e  $n2$ , teremos 3 equações e 3 incógnitas. Portanto, o vetor gradiente de  $u$  pode ser obtido com a solução de um sistema linear. Se o mesmo processo for feito para o gradiente de  $v$  e  $w$ , teremos todas as componentes do tensor gradiente da velocidade.

Espera-se uma taxa de convergência de segunda ordem nesse caso. Portanto, testou-se a taxa de convergência da determinação da força viscosa na fronteira imersa, que pode ser calculada da seguinte forma:

$$F_{visc\ i} = \left[ A\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j, \quad (2.50)$$

na qual  $F_{visc}$  é a força viscosa e  $A$  é a área do triângulo lagrangiano.

Espera-se uma ordem de convergência de segunda ordem nesse caso. Testes para verificar a ordem da implementação são apresentados nas seções 3.1.1.1.7 e 3.1.1.2.7.

Importante notar que as forças só foram obtidas após a solução das velocidades e da pressão, ao contrário do MDF, no qual a força é obtida após a predição

da velocidade.

Todos os termos da eq.2.42 foram determinados e a tensão que atua no ponto lagrangiano pode ser calculada. Para calcular a força que atua no ponto lagrangiano, basta multiplicar a tensão pela área do triângulo lagrangiano. O coeficiente de arrasto e sustentação de escoamentos sobre esferas e cubos são apresentados na seção 3.2.

## 3 Resultados

Nessa seção serão apresentados resultados de verificação das implementações na seção 3.1 e de escoamento sobre corpos rombudos na seção 3.2.

### 3.1 Verificação

A verificação das implementações são apresentadas a seguir. Na seção 3.1.1 são apresentadas verificações dos polinômios utilizados na reconstrução da solução utilizando a metodologia Ghost. Além disso, também foram feitas verificações do cálculo do divergente, laplaciano e de forças. Na seção 3.1.2 são apresentadas verificações utilizando-se solução manufaturada (ROACHE, 2019) (SALARI; KNUPP, 2000).

#### 3.1.1 Ordem dos polinômios implementados

O resultados dos testes dos polinômios implementados são apresentados nessa seção. Para determinar o erro dos polinômios utilizados para manipular a pressão, preencheu-se o campo escalar de pressão com a Eq. (3.1). Com o campo preenchido, é possível comparar o resultado da interpolação com essa equação e determinar o erro.

$$p = \text{sen}(\pi 0,5 x) + \text{sen}(\pi 0,5 y) + \text{sen}(\pi 0,5 z) \quad (3.1)$$

Esse mesmo procedimento foi feito para as velocidades. Preencheu-se o campo vetorial de velocidades com a Eq. (3.2).

$$u = v = w = \pi 0,5 (\cos(\pi 0,5 x) + \cos(\pi 0,5 y) + \cos(\pi 0,5 z)) \quad (3.2)$$

Essas equações foram escolhidas de tal forma que o divergente do campo vetorial de velocidades fosse igual ao laplaciano do campo escalar de pressão, como pode ser visto na equação Eq. (3.3).

$$\nabla^2 p = \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = -(\pi 0,5)^2 (\text{sen}(\pi 0,5 x) + \text{sen}(\pi 0,5 y) + \text{sen}(\pi 0,5 z)) \quad (3.3)$$

Os testes foram executados em duas fronteiras imersas: um cubo e uma esfera. Os resultados são apresentados a seguir nas seções 3.1.1.1 e 3.1.1.2 respectivamente.

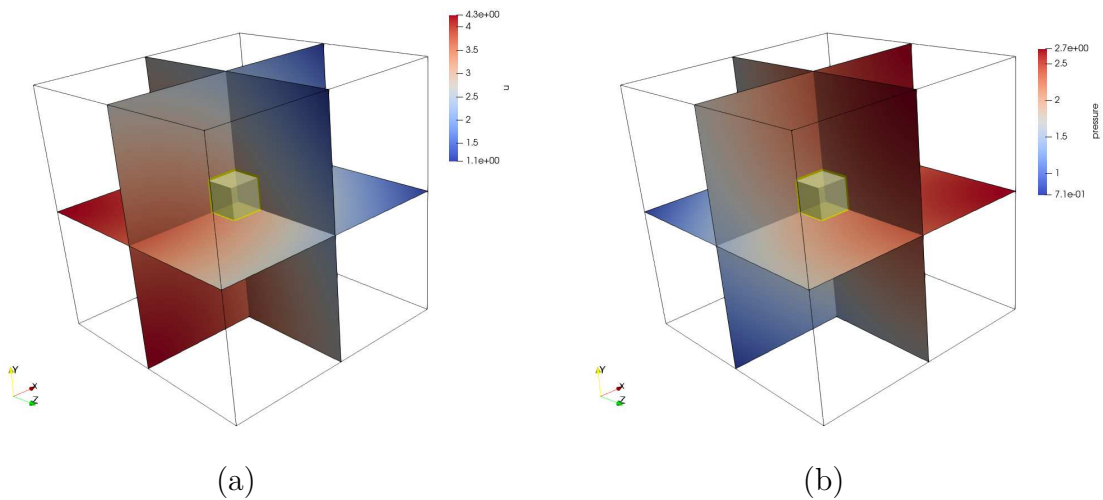
Escolheu-se um domínio de  $4\phi$  nas direções x, y e z, no qual  $\phi$  é o diâmetro da esfera ou o lado do cubo. Os centros das fronteiras imersas foram posicionadas em  $2\phi$  nas direções x, y e z, ou seja, no centro do domínio.

Todos os testes foram feitos com quatro diferentes malhas:  $16^3$ ,  $32^3$ ,  $64^3$  e  $128^3$ . Isso significa que a primeira simulação foi feita com 16 volumes nas direções x, y e z, totalizando 4096 volumes.

#### 3.1.1.1 Cubo

Os campos de velocidade “u” e pressão são ilustrados na Fig. 40.

Figura 40 – Ilustração dos campos utilizados para verificar as interpolações implementadas para a velocidade “u”(a) e para a pressão(b) com um cubo imerso.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Importante notar que dentro do cubo os campos estão amarelos, indicando que estão preenchidos com “NaN”. Isso foi feito porque o que se está avaliando nesse caso é o escoamento externo ao cubo. Se algum ponto utilizado na interpolação estiver dentro da fronteira imersa, o resultado será “NaN”. Isso ajuda a verificar se o estêncil de interpolação está sendo montado de forma adequada.

Os resultados das interpolações de segundo grau para velocidades são apresentados a seguir.

#### 3.1.1.1.1 Interpolação de segundo grau para velocidades

A norma  $L_\infty$  do erro da interpolação de segundo grau é apresentada na Tab. 3. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro do cubo, como esperado. Com a norma  $L_\infty$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 4.

Tabela 3 – Norma  $L_\infty$  do erro da interpolação de segundo grau para velocidades.

Malha	u	v	w
$16^3$	8.59E-05	8.59E-05	8.59E-05
$32^3$	1.05E-05	1.05E-05	1.05E-05
$64^3$	1.30E-06	1.30E-06	1.30E-06
$128^3$	1.62E-07	1.62E-07	1.62E-07

Tabela 4 – Taxa de convergência da norma  $L_\infty$  do erro da interpolação de segundo grau para velocidades.

Malha	u	v	w
$16^3/32^3$	3.03	3.03	3.03
$32^3/64^3$	3.02	3.02	3.02
$64^3/128^3$	3.01	3.01	3.01

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 3, em acordo com o que era esperado para um polinômio de segundo grau.

A norma  $L_2$  do erro teve o mesmo comportamento e não será apresentado.



Os resultados das interpolações de terceiro grau para velocidades são apresentados a seguir.

#### 3.1.1.1.2 Interpolação de terceiro grau para velocidades

A norma  $L_\infty$  do erro da interpolação de terceiro grau é apresentada na Tab. 5. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro do cubo, como esperado. Com a norma  $L_\infty$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 6.

Tabela 5 – Norma  $L_\infty$  do erro da interpolação de terceiro grau para velocidades.

Malha	u	v	w
$16^3$	3.33E-06	3.33E-06	3.33E-06
$32^3$	2.31E-07	2.31E-07	2.31E-07
$64^3$	1.52E-08	1.52E-08	1.52E-08
$128^3$	9.69E-10	9.69E-10	9.69E-10

Tabela 6 – Taxa de convergência da norma  $L_\infty$  do erro da interpolação de terceiro grau para velocidades.

Malha	u	v	w
$16^3/32^3$	3.85	3.85	3.85
$32^3/64^3$	3.93	3.93	3.93
$64^3/128^3$	3.97	3.97	3.97

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 4, em acordo com o que era esperado para um polinômio de terceiro grau.

A norma  $L_2$  do erro teve o mesmo comportamento e não será apresentado.

Os resultados das extrapolações de terceiro grau para velocidades são apresentados a seguir.

### 3.1.1.1.3 Extrapolação terceiro grau para velocidades

Como mostrado nas figuras Figs. 19, 20 e 21, para o cálculo da velocidade “u”, utiliza-se as velocidades “u”, “v” e “w”. Portanto, a Tab. 7 apresenta as seguintes colunas: “u - u”, “u - v” e “u - w”, que representam respectivamente a extrapolação de “u” para a solução de “u”, extrapolação de “v” para a solução de “u” e extrapolação de “w” para a solução de “u”. Ou seja, no caso de “u - v” a primeira velocidade representa a velocidade que se deseja resolver e a segunda é a velocidade que se está extrapolando.

A norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para a velocidade “u” é apresentada na Tab. 7. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro do cubo, como esperado. Com a norma  $L_2$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 8.

Tabela 7 – Norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”.

Malha	u - u	u - v	u - w
$16^3$	1.44E-04	6.51E-06	6.51E-06
$32^3$	8.72E-06	3.94E-07	3.94E-07
$64^3$	5.36E-07	2.42E-08	2.42E-08
$128^3$	3.32E-08	1.50E-09	1.50E-09

Tabela 8 – Taxa de convergência da norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”.

Malha	u - u	u - v	u - w
$16^3/32^3$	4.04	4.05	4.05
$32^3/64^3$	4.02	4.03	4.03
$64^3/128^3$	4.01	4.01	4.01

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 4, em acordo com o que era esperado para um polinômio de terceiro grau.

A norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para a velocidade “v” é apresentada na Tab. 9. Importante notar que em nenhum teste realizado

houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro do cubo, como esperado. Com a norma  $L_2$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 10.

Tabela 9 – Norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”.

Malha	v - v	v - w	v - u
$16^3$	2.03E-04	9.20E-06	9.20E-06
$32^3$	1.23E-05	5.57E-07	5.57E-07
$64^3$	7.58E-07	3.42E-08	3.42E-08
$128^3$	4.69E-08	2.12E-09	2.12E-09

Tabela 10 – Taxa de convergência da norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”.

Malha	v - v	v - w	v - u
$16^3/32^3$	4.04	4.05	4.05
$32^3/64^3$	4.02	4.03	4.03
$64^3/128^3$	4.01	4.01	4.01

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 4, em acordo com o que era esperado para um polinômio de terceiro grau.

A norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para a velocidade “w” é apresentada na Tab. 11. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro do cubo, como esperado. Com a norma  $L_2$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 12.

Tabela 11 – Norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”.

Malha	w-w	w-u	w-v
$16^3$	1.44E-04	6.51E-06	6.51E-06
$32^3$	8.72E-06	3.94E-07	3.94E-07
$64^3$	5.36E-07	2.42E-08	2.42E-08
$128^3$	3.32E-08	1.50E-09	1.50E-09

Tabela 12 – Taxa de convergência da norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”.

Malha	w-w	w-u	w-v
$16^3/32^3$	4.04	4.05	4.05
$32^3/64^3$	4.02	4.03	4.03
$64^3/128^3$	4.01	4.01	4.01

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 4, em acordo com o que era esperado para um polinômio de terceiro grau.

A norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para a velocidade “u” é apresentada na Tab. 13. Com a norma  $L_\infty$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 14.

Tabela 13 – Norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”.

Malha	u - u	u - v	u - w
$16^3$	3.63E-04	6.51E-06	6.51E-06
$32^3$	2.21E-05	3.94E-07	3.94E-07
$64^3$	1.36E-06	2.42E-08	2.42E-08
$128^3$	8.43E-08	1.50E-09	1.50E-09

Tabela 14 – Taxa de convergência da norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”.

Malha	u - u	u - v	u - w
$16^3/32^3$	4.04	4.05	4.05
$32^3/64^3$	4.02	4.03	4.03
$64^3/128^3$	4.01	4.01	4.01

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 4, em acordo com o que era esperado para um polinômio de terceiro grau.

A norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para a velocidade “v” é apresentada na Tab. 15. Com a norma  $L_\infty$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 16.

Tabela 15 – Norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”.

Malha	v - v	v - w	v - u
$16^3$	3.63E-04	6.51E-06	6.51E-06
$32^3$	2.21E-05	3.94E-07	3.94E-07
$64^3$	1.36E-06	2.42E-08	2.42E-08
$128^3$	8.43E-08	1.50E-09	1.50E-09

Tabela 16 – Taxa de convergência da norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”.

Malha	v - v	v - w	v - u
$16^3/32^3$	4.04	4.05	4.05
$32^3/64^3$	4.02	4.03	4.03
$64^3/128^3$	4.01	4.01	4.01

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 4, em acordo com o que era esperado para um polinômio de terceiro grau.

A norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para a velocidade “w” é apresentada na Tab. 17. Com a norma  $L_\infty$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 18.

Tabela 17 – Norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”.

Malha	w-w	w-u	w-v
$16^3$	3.63E-04	6.51E-06	6.51E-06
$32^3$	2.21E-05	3.94E-07	3.94E-07
$64^3$	1.36E-06	2.42E-08	2.42E-08
$128^3$	8.43E-08	1.50E-09	1.50E-09

Tabela 18 – Taxa de convergência da norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”.

Malha	w-w	w-u	w-v
$16^3/32^3$	4.04	4.05	4.05
$32^3/64^3$	4.02	4.03	4.03
$64^3/128^3$	4.01	4.01	4.01

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 4, em acordo com o que era esperado para um polinômio de terceiro grau.

Os resultados das extrapolações de segundo grau para a pressão são apresentados a seguir.

#### 3.1.1.1.4 Extrapolação segundo grau para pressão

As normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro da interpolação de segundo grau são apresentadas na Tab. 19. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro do cubo, como esperado. Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 20.

Tabela 19 – Normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro da extrapolação de segundo grau para o cálculo da pressão.

Malha	$L_2$	$L_\infty$
$16^3$	3.16E-05	4.31E-05
$32^3$	4.10E-06	5.53E-06
$64^3$	5.24E-07	7.01E-07
$128^3$	6.62E-08	8.83E-08

Tabela 20 – Taxas de convergência das normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro da extrapolação de segundo grau para o cálculo da pressão.

Malha	$L_2$	$L_\infty$
$16^3/32^3$	2.94	2.96
$32^3/64^3$	2.97	2.98
$64^3/128^3$	2.98	2.99

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 3, em acordo com o que era esperado para um polinômio de segundo grau.

Os resultados do cálculo do divergente utilizando velocidades interpoladas e extrapoladas são apresentados a seguir.

## 3.1.1.1.5 Cálculo do divergente utilizando velocidades interpoladas e extrapoladas

O cálculo do divergente em centros irregulares deve ser tratado, visto que algumas velocidades não estão disponíveis. As velocidades que estão separadas do centro irregular de interesse por uma fronteira imersa devem ser extrapoladas, enquanto as velocidades pertencentes a uma face interpolada devem ser interpoladas novamente utilizando um polinômio de segundo grau.

O cálculo do divergente apresenta um erro de segunda ordem, visto que se utiliza o método de diferenças centradas e mesmo com as interpolações deve manter a mesma ordem.

As normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro do cálculo do divergente da velocidade são apresentadas na Tab. 21. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro do cubo, como esperado. Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 22.

Tabela 21 – Normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro do cálculo do divergente da velocidade.

Malha	$L_2$	$L_\infty$
$16^3$	2.68E-03	3.82E-03
$32^3$	6.62E-04	9.51E-04
$64^3$	1.64E-04	2.37E-04
$128^3$	4.10E-05	5.93E-05

Tabela 22 – Taxas de convergência das normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro do cálculo do divergente da velocidade.

Malha	$L_2$	$L_\infty$
$16^3/32^3$	2.02	2.00
$32^3/64^3$	2.01	2.00
$64^3/128^3$	2.00	2.00

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 2, em acordo com o que era esperado para o cálculo do divergente.

Os resultados do cálculo do laplaciano da correção de pressão nos centros irregulares são apresentados a seguir.

#### 3.1.1.1.6 Cálculo do laplaciano da correção de pressão nos centros irregulares

A matriz “A” de coeficientes usada para a determinação da correção pressão foi modificada de acordo com a metodologia da fronteira imersa do tipo Ghost. Dessa forma, os polinômios testados na seção 3.1.1.1.4 são incorporados nessa matriz para os centro irregulares. Para a determinação da correção de pressão resolve-se o seguinte sistema linear:

$$A\phi = b, \quad (3.4)$$

na qual  $A$  é a matriz de coeficientes,  $\phi$  é o vetor de incógnitas e  $b$  é o vetor preenchido com o divergente da velocidade. Para verificar se a matriz havia sido preenchida corretamente, preencheu-se o vetor  $\phi$  com um campo escalar definido pela Eq. (3.1). Em posse da matriz  $A$  e do vetor  $\phi$  é possível fazer o produto matricial  $A\phi$ . O resultado esperado é o laplaciano aproximado de  $\phi$ . Essa aproximação é de primeira ordem nos centros irregulares. Apesar de o laplaciano ser discretizado com diferenças centradas, que é de segunda ordem, o cálculo é feito utilizando uma extrapolação de terceira ordem nos centros irregulares. Como esse valor extrapolado é dividido por  $\Delta x^2$ , tem-se um erro de primeira ordem.

As normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro do cálculo do laplaciano de  $\phi$  são apresentadas na Tab. 23. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro do cubo, como esperado. Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 24.

Tabela 23 – Normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro do cálculo do laplaciano de  $\phi$ .

Malha	$L_2$	$L_\infty$
$16^3$	1.05E-02	1.52E-02
$32^3$	6.73E-03	4.71E-03
$64^3$	2.26E-03	3.14E-03
$128^3$	1.11E-03	1.51E-03



Tabela 24 – Taxas de convergência das normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro do cálculo do laplaciano de  $\phi$ 

Malha	$L_2$	$L_\infty$
$16^3/32^3$	0.65	1.69
$32^3/64^3$	1.58	0.58
$64^3/128^3$	1.02	1.05

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 1, em acordo com o que era esperado para o cálculo do laplaciano aproximado de  $\phi$ .

### 3.1.1.1.7 Cálculo da força

O calculo de forças é apresentado na seção seção 2.3.5.8. Os erros calculados nessa seção são da pressão e da força viscosa obtidas no ponto lagrangiano. Nas tabelas a coluna “ $p$ ” se refere ao erro da pressão obtida no ponto lagrangiano. Para o cálculo do erro da força viscosa calculou-se o ângulo em graus entre o vetor obtido numericamente e o vetor usado como referência, denominado “Ângulo  $\vec{F}_{visc}$ ” nas tabelas abaixo. Além disso, calculou-se a diferença entre o módulo do vetor obtido numericamente e o vetor usado como referência, denominado “ $|\vec{F}_{visc}|$ ” nas tabelas abaixo.

A norma  $L_2$  do erro do cálculo das forças são apresentadas na Tab. 25. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro do cubo, como esperado. Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 26.

Tabela 25 – Norma  $L_2$  do erro do cálculo das forças.

Malha	p	Ângulo $\vec{F}_{visc}$	$ \vec{F}_{visc} $
$16^3$	1.20E-03	1.56E-01	4.02E-03
$32^3$	2.93E-04	4.44E-02	1.04E-03
$64^3$	7.10E-05	1.11E-02	3.01E-04
$128^3$	1.58E-05	2.51E-03	5.40E-05

Tabela 26 – Taxa de convergência da norma  $L_2$  do erro do cálculo das forças.

Malha	p	Ângulo $\vec{F}_{visc}$	$ \vec{F}_{visc} $
$16^3/32^3$	2.03	1.81	1.94
$32^3/64^3$	2.05	1.99	1.79
$64^3/128^3$	2.17	2.15	2.48

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 2, em acordo com o que era esperado para o cálculo de forças.

A norma  $L_\infty$  do erro do cálculo das forças são apresentadas na Tab. 27. Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 28.

Tabela 27 – Norma  $L_\infty$  do erro do cálculo das forças.

Malha	p	Ângulo $\vec{F}_{visc}$	$ \vec{F}_{visc} $
$16^3$	2.21E-03	5.20E-01	1.34E-02
$32^3$	5.24E-04	1.32E-01	3.08E-03
$64^3$	1.28E-04	3.16E-02	7.94E-04
$128^3$	2.95E-05	5.74E-03	1.20E-04

Tabela 28 – Taxa de convergência da norma  $L_\infty$  do erro do cálculo das forças.

Malha	p	Ângulo $\vec{F}_{visc}$	$ \vec{F}_{visc} $
$16^3/32^3$	2.08	1.97	2.12
$32^3/64^3$	2.04	2.07	1.95
$64^3/128^3$	2.11	2.46	2.72

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 2, em acordo com o que era esperado para o cálculo de forças.

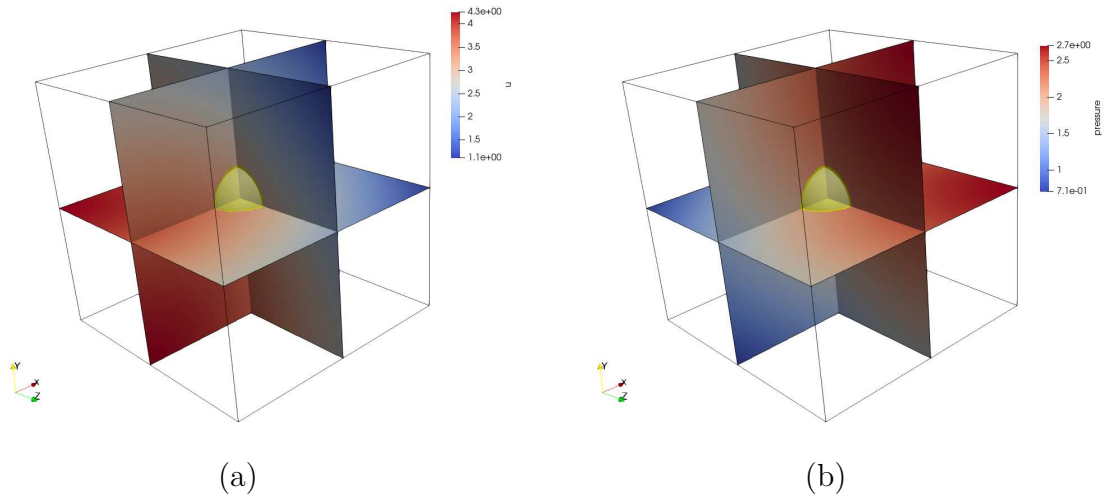
A seguir são mostrados resultados para uma esfera imersa no escoamento.

### 3.1.1.2 Esfera

Os campos de velocidade “u” e pressão são ilustrados na Fig. 41. Importante notar que dentro da esfera os campos estão amarelos, indicando que estão

preenchidos com “NaN”. Isso foi feito porque o que se está avaliando nesse caso é o escoamento externo à esfera. Se algum ponto utilizado na interpolação estiver dentro da fronteira imersa, o resultado será “NaN”. Isso ajuda a verificar se o estêncil de interpolação está sendo montado de forma adequada.

Figura 41 – Ilustração dos campos utilizados para verificar as interpolações implementadas para a velocidade “u”(a) e para a pressão(b) com uma esfera imersa.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Os resultados das interpolações de segundo grau para velocidades são apresentados a seguir.

#### 3.1.1.2.1 Interpolação segundo grau para velocidades

A norma  $L_2$  do erro da interpolação de segundo grau é apresentada na Tab. 29. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro da esfera, como esperado. Com a norma  $L_2$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 30.

Tabela 29 – Norma  $L_2$  do erro da interpolação de segundo grau para velocidades.

Malha	u	v	w
$16^3$	3.96E-05	4.62E-05	4.60E-05
$32^3$	1.09E-05	1.17E-05	1.17E-05
$64^3$	1.45E-06	1.65E-06	1.66E-06
$128^3$	2.09E-07	2.09E-07	2.09E-07

Tabela 30 – Taxa de convergência da norma  $L_2$  do erro da interpolação de segundo grau para velocidades.

Malha	u	v	w
$16^3/32^3$	1.86	1.98	1.98
$32^3/64^3$	2.91	2.82	2.82
$64^3/128^3$	2.80	2.99	2.98

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 3, em acordo com o que era esperado para um polinômio de segundo grau.

A norma  $L_\infty$  do erro da interpolação de segundo grau é apresentada na Tab. 31. Com a norma  $L_\infty$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 32.

Tabela 31 – Norma  $L_\infty$  do erro da interpolação de segundo grau para velocidades.

Malha	u	v	w
$16^3$	4.48E-05	6.24E-05	6.21E-05
$32^3$	2.67E-05	2.55E-05	2.53E-05
$64^3$	3.26E-06	3.20E-06	3.21E-06
$128^3$	3.99E-07	5.10E-07	5.48E-07

Tabela 32 – Taxa de convergência da norma  $L_\infty$  do erro da interpolação de segundo grau para velocidades.

Malha	u	v	w
$16^3/32^3$	0.75	1.29	1.30
$32^3/64^3$	3.03	2.99	2.98
$64^3/128^3$	3.03	2.65	2.55

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 3, em acordo com o que era esperado para um polinômio de segundo grau.

Os resultados das interpolações de terceiro grau para velocidades são apresentados a seguir.

#### 3.1.1.2.2 Interpolação terceiro grau para velocidades

A norma  $L_2$  do erro da interpolação de terceiro grau é apresentada na Tab. 33. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro da esfera, como esperado. Com a norma  $L_2$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 34.

Tabela 33 – Norma  $L_2$  do erro da interpolação de terceiro grau para velocidades.

Malha	u	v	w
$16^3$	4.27E-06	3.40E-06	3.39E-06
$32^3$	4.59E-07	4.08E-07	4.08E-07
$64^3$	2.67E-08	2.88E-08	2.88E-08
$128^3$	1.94E-09	1.87E-09	1.85E-09

Tabela 34 – Taxa de convergência da norma  $L_2$  do erro da interpolação de terceiro grau para velocidades.

Malha	u	v	w
$16^3/32^3$	3.22	3.06	3.05
$32^3/64^3$	4.10	3.82	3.82
$64^3/128^3$	3.79	3.95	3.96

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 4, em acordo com o que era esperado para um polinômio de terceiro grau. A norma  $L_\infty$  do erro da interpolação de terceiro grau é apresentada na Tab. 35. Com a norma  $L_\infty$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 36.

Tabela 35 – Norma  $L_\infty$  do erro da interpolação de terceiro grau para velocidades.

Malha	u	v	w
$16^3$	5.90E-06	4.70E-06	4.68E-06
$32^3$	8.50E-07	8.15E-07	8.12E-07
$64^3$	6.59E-08	5.95E-08	5.95E-08
$128^3$	4.89E-09	4.75E-09	4.62E-09

Tabela 36 – Taxa de convergência da norma  $L_\infty$  do erro da interpolação de terceiro grau para velocidades.

Malha	u	v	w
$16^3/32^3$	2.80	2.53	2.53
$32^3/64^3$	3.69	3.78	3.77
$64^3/128^3$	3.75	3.65	3.69

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 4, em acordo com o que era esperado para um polinômio de terceiro grau.

Os resultados das extrapolações de terceiro grau para velocidades são apresentados a seguir.

#### 3.1.1.2.3 Extrapolação terceiro grau para velocidades

Como mostrado nas figuras Figs. 19, 20 e 21, para o cálculo da velocidade “u”, utiliza-se as velocidades “u”, “v” e “w”. Portanto, a Tab. 37 apresenta as seguintes colunas: “u - u”, “u - v” e “u - w”, que representam respectivamente a extrapolação de “u” para a solução de “u”, extrapolação de “v” para a solução de “u” e extrapolação de “w” para a solução de “u”. Ou seja, no caso de “u - v” a primeira velocidade representa a velocidade que se deseja resolver e a segunda é a velocidade que se está extrapolando.

A norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para a velocidade “u” é apresentada na Tab. 37. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro da esfera, como esperado. Com a norma  $L_2$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 38.

Tabela 37 – Norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”.

Malha	u - u	u - v	u - w
$16^3$	7.13E-05	5.07E-06	5.06E-06
$32^3$	3.52E-06	2.24E-07	2.24E-07
$64^3$	2.31E-07	2.15E-08	2.15E-08
$128^3$	2.27E-08	1.49E-09	1.50E-09

Tabela 38 – Taxa de convergência da norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”.

Malha	u - u	u - v	u - w
$16^3/32^3$	4.34	4.50	4.50
$32^3/64^3$	3.93	3.38	3.38
$64^3/128^3$	3.35	3.85	3.85

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 4, em acordo com o que era esperado para um polinômio de terceiro grau.

A norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para a velocidade “v” é apresentada na Tab. 39. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro da esfera, como esperado. Com a norma  $L_2$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 40.

Tabela 39 – Norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”.

Malha	v - v	v - w	v - u
$16^3$	7.10E-05	5.13E-06	4.95E-06
$32^3$	3.48E-06	2.23E-07	1.90E-07
$64^3$	2.46E-07	2.18E-08	2.44E-08
$128^3$	3.43E-08	2.14E-09	2.06E-09

Tabela 40 – Taxa de convergência da norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”.

Malha	v - v	v - w	v - u
$16^3/32^3$	4.35	4.53	4.71
$32^3/64^3$	3.82	3.35	2.95
$64^3/128^3$	2.84	3.35	3.57

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 4, em acordo com o que era esperado para um polinômio de terceiro grau.

A norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para a velocidade “w” é apresentada na Tab. 41. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro da esfera, como esperado. Com a norma  $L_2$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 42.

Tabela 41 – Norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”.

Malha	w-w	w-u	w-v
$16^3$	7.10E-05	4.95E-06	5.12E-06
$32^3$	3.48E-06	1.89E-07	2.23E-07
$64^3$	2.46E-07	2.45E-08	2.18E-08
$128^3$	2.53E-08	1.54E-09	1.58E-09

Tabela 42 – Taxa de convergência da norma  $L_2$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”.

Malha	w-w	w-u	w-v
$16^3/32^3$	4.35	4.71	4.52
$32^3/64^3$	3.82	2.95	3.35
$64^3/128^3$	3.28	3.99	3.79

A norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para a velocidade “u” é apresentada na Tab. 43. Com a norma  $L_\infty$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 44.



Tabela 43 – Norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”.

Malha	u - u	u - v	u - w
$16^3$	4.49E-04	7.48E-06	7.48E-06
$32^3$	2.06E-05	8.28E-07	8.28E-07
$64^3$	1.96E-06	5.78E-08	5.77E-08
$128^3$	1.30E-07	3.61E-09	3.63E-09

Tabela 44 – Taxa de convergência da norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “u”.

Malha	u - u	u - v	u - w
$16^3/32^3$	4.45	3.18	3.17
$32^3/64^3$	3.39	3.84	3.84
$64^3/128^3$	3.91	4.00	3.99

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 4, em acordo com o que era esperado para um polinômio de terceiro grau.

A norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para a velocidade “v” é apresentada na Tab. 45. Com a norma  $L_\infty$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 46.

Tabela 45 – Norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”.

Malha	v - v	v - w	v - u
$16^3$	5.03E-04	8.76E-06	5.94E-06
$32^3$	2.15E-05	8.28E-07	5.47E-07
$64^3$	2.21E-06	5.77E-08	4.84E-08
$128^3$	1.40E-07	3.63E-09	3.57E-09

Tabela 46 – Taxa de convergência da norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “v”.

Malha	v - v	v - w	v - u
$16^3/32^3$	4.55	3.40	3.44
$32^3/64^3$	3.28	3.84	3.50
$64^3/128^3$	3.98	3.99	3.76

A norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para a velocidade “w” é apresentada na Tab. 47. Com a norma  $L_\infty$  do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 48.

Tabela 47 – Norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”.

Malha	w-w	w-u	w-v
$16^3$	5.03E-04	5.96E-06	8.77E-06
$32^3$	2.15E-05	5.47E-07	8.28E-07
$64^3$	2.21E-06	4.81E-08	5.78E-08
$128^3$	1.40E-07	3.57E-09	3.61E-09

Tabela 48 – Taxa de convergência da norma  $L_\infty$  do erro da extrapolação de terceiro grau para o cálculo da velocidade “w”.

Malha	w-w	w-u	w-v
$16^3/32^3$	4.55	3.45	3.41
$32^3/64^3$	3.28	3.51	3.84
$64^3/128^3$	3.98	3.75	4.00

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 4, em acordo com o que era esperado para um polinômio de terceiro grau.

Os resultados das extrapolações de segundo grau para a pressão são apresentados a seguir.

#### 3.1.1.2.4 Extrapolação segundo grau para pressão

As normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro da interpolação de segundo grau são apresentadas na Tab. 49. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro da esfera, como esperado. Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 50.

Tabela 49 – Normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro da extrapolação de segundo grau para o cálculo da pressão.

Malha	$L_2$	$L_\infty$
$16^3$	3.64E-05	4.66E-05
$32^3$	3.65E-06	8.58E-06
$64^3$	5.78E-07	1.27E-06
$128^3$	6.83E-08	1.63E-07

Tabela 50 – Taxas de convergência das normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro da extrapolação de segundo grau para o cálculo da pressão.

Malha	$L_2$	$L_\infty$
$16^3/32^3$	3.32	2.44
$32^3/64^3$	2.66	2.76
$64^3/128^3$	3.08	2.96

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 3, em acordo com o que era esperado para um polinômio de segundo grau. Os resultados do cálculo do divergente utilizando velocidades interpoladas e extrapoladas são apresentados a seguir.

#### 3.1.1.2.5 Cálculo do divergente utilizando velocidades interpoladas e extrapoladas

O cálculo do divergente em centros irregulares deve ser tratado, visto que algumas velocidades não estão disponíveis. As velocidades que estão separadas do centro irregular de interesse por uma fronteira imersa devem ser extrapoladas, enquanto as velocidades pertencentes a uma face interpolada devem ser interpoladas novamente utilizando um polinômio de segundo grau.

O cálculo do divergente apresenta um erro de segunda ordem, visto que se utiliza o método de diferenças centradas e mesmo com as interpolações deve manter a mesma ordem.

As normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro do cálculo do divergente da velocidade são apresentadas na Tab. 51. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma

velocidade dentro da esfera, como esperado. Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 52.

Tabela 51 – Normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro do cálculo do divergente da velocidade.

Malha	$L_2$	$L_\infty$
$16^3$	2.04E-03	3.25E-03
$32^3$	8.79E-04	1.72E-03
$64^3$	2.22E-04	4.24E-04
$128^3$	5.52E-05	1.31E-04

Tabela 52 – Taxas de convergência das normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro do cálculo do divergente da velocidade.

Malha	$L_2$	$L_\infty$
$16^3/32^3$	1.21	0.92
$32^3/64^3$	1.98	2.02
$64^3/128^3$	2.01	1.70

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 2, em acordo com o que era esperado para o cálculo do divergente.

Os resultados do cálculo do laplaciano da correção de pressão nos centros irregulares são apresentados a seguir.

#### 3.1.1.2.6 Cálculo do laplaciano da correção de pressão nos centros irregulares

A matriz “A” de coeficientes usada para a determinação da correção pressão foi modificada de acordo com a metodologia da fronteira imersa do tipo Ghost. Dessa forma, os polinômios testados na seção 3.1.1.2.4 são incorporados nessa matriz para os centro irregulares. Para a determinação da correção de pressão resolve-se o seguinte sistema linear:

$$A\phi = b \quad (3.5)$$

Na qual  $A$  é a matriz de coeficientes,  $\phi$  é o vetor de incógnitas e  $b$  é o vetor preenchido com o divergente da velocidade. Para verificar se a matriz havia sido

preenchida corretamente, preencheu-se o vetor  $\phi$  com um campo escalar definido pela Eq. (3.1). Em posse da matriz  $A$  e do vetor  $\phi$  é possível fazer o produto matricial  $A\phi$ . O resultado esperado é o laplaciano aproximado de  $\phi$ . Essa aproximação é de primeira ordem nos centros irregulares.

As normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro do cálculo do laplaciano de  $\phi$  são apresentadas na Tab. 53. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro da esfera, como esperado. Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 54.

Tabela 53 – Normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro do cálculo do laplaciano de  $\phi$ .

Malha	$L_2$	$L_\infty$
$16^3$	1.21E-02	2.55E-02
$32^3$	4.89E-03	1.90E-02
$64^3$	3.12E-03	1.43E-02
$128^3$	1.50E-03	7.36E-03

Tabela 54 – Taxas de convergência das normas  $L_2$  e  $L_\infty$  do erro do cálculo do laplaciano de  $\phi$

Malha	$L_2$	$L_\infty$
$16^3/32^3$	1.31	0.43
$32^3/64^3$	0.65	0.41
$64^3/128^3$	1.05	0.95

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 1, em acordo com o que era esperado para o cálculo do laplaciano aproximado de  $\phi$ .

### 3.1.1.2.7 Cálculo da força

O cálculo de forças é apresentado na seção 2.3.5.8. Os erros calculados nessa seção são da pressão e da força viscosa obtidas no ponto lagrangiano. Nas tabelas a coluna “ $p$ ” se refere ao erro da pressão obtida no ponto lagrangiano. Para o cálculo do erro da força viscosa calculou-se o ângulo em graus entre o vetor

obtido numericamente e o vetor usado como referência, denominado “Ângulo  $\vec{F}_{visc}$ ” nas tabelas abaixo. Além disso, calculou-se a diferença entre o módulo do vetor obtido numericamente e o vetor usado como referência, denominado “ $|\vec{F}_{visc}|$ ” nas tabelas abaixo.

A norma  $L_2$  do erro do cálculo das forças são apresentadas na Tab. 55. Importante notar que em nenhum teste realizado houve um erro igual a “NaN”, indicando que o estêncil de interpolação não utiliza nenhuma velocidade dentro da esfera, como esperado. Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 56.

Tabela 55 – Norma  $L_2$  do erro do cálculo das forças.

Malha	p	Ângulo $\vec{F}_{visc}$	$ \vec{F}_{visc} $
$16^3$	1.46E-03	2.28E+00	3.07E-02
$32^3$	3.39E-04	6.83E-01	8.52E-03
$64^3$	8.23E-05	1.50E-01	2.03E-03
$128^3$	2.01E-05	3.75E-02	4.44E-04

Tabela 56 – Taxa de convergência da norma  $L_2$  do erro do cálculo das forças.

Malha	p	Ângulo $\vec{F}_{visc}$	$ \vec{F}_{visc} $
$16^3/32^3$	2.10	1.74	1.85
$32^3/64^3$	2.04	2.18	2.07
$64^3/128^3$	2.03	2.00	2.20

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 2, em acordo com o que era esperado para o cálculo de forças.

A norma  $L_\infty$  do erro do cálculo das forças são apresentadas na Tab. 57. Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 58.

Tabela 57 – Norma  $L_\infty$  do erro do cálculo das forças.

Malha	p	Ângulo $\vec{F}_{visc}$	$ \vec{F}_{visc} $
$16^3$	3.68E-03	5.74E+01	6.49E-01
$32^3$	8.07E-04	1.70E+01	1.84E-01
$64^3$	1.77E-04	5.01E+00	6.49E-02
$128^3$	4.43E-05	9.01E-01	8.90E-03

Tabela 58 – Taxa de convergência da norma  $L_\infty$  do erro do cálculo das forças.

Malha	p	Ângulo $\vec{F}_{visc}$	$ \vec{F}_{visc} $
$16^3/32^3$	2.19	1.76	1.82
$32^3/64^3$	2.19	1.76	1.51
$64^3/128^3$	2.00	2.47	2.86

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 2, em acordo com o que era esperado para o cálculo de forças.

A seguir são mostrados resultados para solução manufaturada.

### 3.1.2 Solução manufaturada

Após a verificação individual das implementações, utiliza-se o método da solução manufaturada (ROACHE, 2019) (SALARI; KNUPP, 2000) para verificar a convergência da solução numérico-computacional das equações de Navier-Stokes. Segundo SALARI e KNUPP (2000) o método de solução manufaturada ajuda a identificar erros no código que afete a taxa de convergência do método numérico. Mais detalhes sobre a solução manufaturada no código MFSim podem ser encontrados em Pivello (2012) e Pivello et al. (2014).

No método de solução manufaturada utiliza-se um termo fonte nas equações discretizadas, cuja função é guiar a solução numérico-computacional para uma solução conhecida. A solução numérico-computacional é então comparada com a solução exata. Dessa forma, obtém-se o erro da solução numérico-computacional.

As equações utilizadas para esse fim são descritas na Eqs. (3.6) e (3.7).

$$\begin{aligned}
 p &= \cos(\pi \omega_3 z + \pi \omega_2 y + \pi \omega_1 x + t \omega_4), \\
 u &= \sin(\pi \omega_3 z + \pi \omega_2 y + \pi \omega_1 x + t \omega_4)^2, \\
 v &= -\cos(\pi \omega_3 z + \pi \omega_2 y + \pi \omega_1 x + t \omega_4)^2, \\
 w &= \frac{\omega_2 \cos(\pi \omega_3 z + \pi \omega_2 y + \pi \omega_1 x + t \omega_4)^2}{\omega_3} + \\
 &\quad + \frac{\omega_1 \cos(\pi \omega_3 z + \pi \omega_2 y + \pi \omega_1 x + t \omega_4)^2}{\omega_3}.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= 2.0, \\
 \omega_2 &= 2.0, \\
 \omega_3 &= 2.0, \\
 \omega_4 &= 1.0.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Escolheu-se um domínio de  $4\phi$  nas direções x, y e z, no qual  $\phi$  é o diâmetro da esfera ou o lado do cubo. Os centros das fronteiras imersas foram posicionadas em  $2\phi$  nas direções x, y e z, ou seja, no centro do domínio.

Todos os testes foram feitos com malha uniforme e com quatro diferentes malhas:  $16^3$ ,  $32^3$ ,  $64^3$  e  $128^3$ . Isso significa que a primeira simulação foi feita com 16 volumes nas direções x, y e z, totalizando 4096 volumes.

As condições de contorno nos limites do domínio para velocidades foram impostas como Dirichlet com valor igual à Eq. (3.6). Como consequência, as condições de contorno para a correção de pressão foram impostas como Newmann e iguais a zero. As condições iniciais foram impostas de acordo com a Eq. (3.6).

Quando a fronteira imersa está presente, impõem-se velocidades com valor igual à Eq. (3.6) na fronteira. Como consequência, as condições de contorno para a correção de pressão foram impostas como Newmann e iguais a zero.

Inicialmente, serão apresentados os resultados do código sem a fronteira imersa, para usar como parâmetro de comparação. Depois, são apresentados os resultados para a solução manufaturada com duas fronteiras imersas: cubo e esfera.



## 3.1.2.1 Sem fronteira imersa

Nessa seção são apresentados os erros e taxas de convergência para o MFSim sem as implementações do Ghost. As normas de verificação do MFSim e os resultados podem ser encontrados em Souza (). A norma  $L_2$  do erro da solução numérico-computacional das equações de Navier-Stokes são apresentadas na Tab. 59. Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 60.

Tabela 59 – Norma  $L_2$  do erro do MFSim utilizando-se solução manufaturada sem fronteira imersa.

Malha	u	v	w	P
$16^3$	2.07E-02	2.02E-02	3.94E-02	5.09E-02
$32^3$	5.08E-03	4.93E-03	9.64E-03	1.74E-02
$64^3$	1.27E-03	1.21E-03	2.38E-03	5.38E-03
$128^3$	3.17E-04	2.96E-04	5.87E-04	1.58E-03

Tabela 60 – Taxa de convergência da norma  $L_2$  do erro do MFSim utilizando-se solução manufaturada sem fronteira imersa.

Malha	u	v	w	P
$16^3/32^3$	2.0249	2.0333	2.0299	1.5494
$32^3/64^3$	2.0026	2.0221	2.0150	1.6930
$64^3/128^3$	2.0008	2.0333	2.0222	1.7695

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 2 para as velocidades e para a pressão a ordem de convergência de 1 é observada, em acordo com o que era esperado. A norma  $L_\infty$  do erro da solução numérico-computacional das equações de Navier-Stokes são apresentadas na Tab. 61.

Tabela 61 – Norma  $L_\infty$  do erro do MFSim utilizando-se solução manufaturada sem fronteira imersa.

Malha	u	v	w	P
$16^3$	4.80E-02	4.61E-02	7.48E-02	6.19E-01
$32^3$	1.21E-02	1.18E-02	1.89E-02	4.68E-01
$64^3$	3.16E-03	3.06E-03	4.83E-03	2.77E-01
$128^3$	8.26E-04	7.82E-04	1.21E-03	1.48E-01

Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 58.

Tabela 62 – Taxa de convergência da norma  $L_\infty$  do erro do MFSim utilizando-se solução manufaturada sem fonteira imersa.

Malha	u	v	w	P
$16^3/32^3$	1.9883	1.9632	1.9890	0.4037
$32^3/64^3$	1.9366	1.9483	1.9657	0.7562
$64^3/128^3$	1.9356	1.9701	2.0011	0.9066

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 2 para as velocidades e para a pressão a ordem de convergência de 1 é observada, em acordo com o que era esperado. A seguir são apresentados os resultados de convergência para a solução numérico-computacional das equações de Navier-Stokes com a presença de um cubo.

### 3.1.2.2 Cubo

Nessa seção são apresentados os erros e taxas de convergência para o MFSim com as implementações do Ghost. Posicionou-se um cubo no centro do domínio. Dentro do cubo as equações de Navier-Stokes não são resolvidas, as velocidades e pressões são impostas como zero. Isso não influencia nos resultados, pois o escoamento externo de interesse é completamente independente do escoamento interno.

A norma  $L_2$  do erro da solução numérico-computacional das equações de Navier-Stokes são apresentadas na Tab. 63. Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 64.

Tabela 63 – Norma  $L_2$  do erro do MFSim utilizando-se solução manufaturada sem fonteira imersa.

Malha	u	v	w	P
$16^3$	2.06E-02	2.01E-02	3.89E-02	5.23E-02
$32^3$	5.03E-03	4.88E-03	9.49E-03	1.79E-02
$64^3$	1.25E-03	1.20E-03	2.35E-03	5.62E-03
$128^3$	3.13E-04	2.94E-04	5.78E-04	1.67E-03

Tabela 64 – Taxa de convergência da norma  $L_2$  do erro do MFSim utilizando-se solução manufaturada com um cubo imerso.

Malha	u	v	w	P
$16^3/32^3$	2.0326	2.0402	2.0359	1.5467
$32^3/64^3$	2.0040	2.0220	2.0161	1.6695
$64^3/128^3$	2.0014	2.0317	2.0219	1.7536

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 2 para as velocidades e para a pressão a ordem de convergência de 1 é observada, em acordo com o que era esperado.

A norma  $L_\infty$  do erro da solução numérico-computacional das equações de Navier-Stokes são apresentadas na Tab. 65. Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 66.

Tabela 65 – Norma  $L_\infty$  do erro do MFSim utilizando-se solução manufaturada com um cubo imerso.

Malha	u	v	w	P
$16^3$	4.79E-02	4.58E-02	7.95E-02	6.25E-01
$32^3$	1.21E-02	1.18E-02	1.92E-02	4.67E-01
$64^3$	3.18E-03	3.08E-03	4.83E-03	2.76E-01
$128^3$	1.08E-03	1.07E-03	1.96E-03	2.12E-01

Tabela 66 – Taxa de convergência da norma  $L_\infty$  do erro do MFSim utilizando-se solução manufaturada com um cubo imerso.

Malha	u	v	w	P
$16^3/32^3$	1.9889	1.9558	2.0518	0.4186
$32^3/64^3$	1.9272	1.9416	1.9902	0.7592
$64^3/128^3$	1.5528	1.5268	1.3001	0.3806

A ordem de convergência obtida foi abaixo de 2 para as velocidades. Isso pode ser justificado por duas razões: diminuição do grau do polinômio na matriz de coeficientes da velocidade e diminuição do grau do polinômio de interpolação das faces interpoladas no cálculo do divergente. Embora localmente o erro não seja de segunda ordem, evidenciado pela diminuição da ordem de convergência da norma

$L_\infty$ , o erro global não foi afetado, como pode ser visto na ordem de convergência da norma  $L_2$ .

A seguir são apresentados os resultados de convergência para a solução numérico-computacional das equações de Navier-Stokes com a presença de uma esfera.

### 3.1.2.3 Esfera

Nessa seção são apresentados os erros e taxas de convergência para o MFSim com as implementações do Ghost. Posicionou-se uma esfera no centro do domínio. Dentro da esfera as equações de Navier-Stokes não são resolvidas, as velocidades e pressões são impostas como zero. Isso não influencia nos resultados, pois o escoamento externo de interesse é completamente independente do escoamento interno.

A norma  $L_2$  do erro da solução numérico-computacional das equações de Navier-Stokes são apresentadas na Tab. 67.

Tabela 67 – Norma  $L_2$  do erro do MFSim utilizando-se solução manufaturada com uma esfera imersa.

Malha	u	v	w	P
$16^3$	2.06E-02	2.01E-02	3.90E-02	5.22E-02
$32^3$	5.05E-03	4.90E-03	9.56E-03	1.78E-02
$64^3$	1.26E-03	1.21E-03	2.36E-03	5.56E-03
$128^3$	3.15E-04	2.95E-04	5.82E-04	1.68E-03

Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 68.

Tabela 68 – Taxa de convergência da norma  $L_2$  do erro do MFSim utilizando-se solução manufaturada com uma esfera imersa.

Malha	u	v	w	P
$16^3/32^3$	2.0247	2.0330	2.0289	1.5561
$32^3/64^3$	2.0052	2.0241	2.0165	1.6756
$64^3/128^3$	2.0014	2.0329	2.0224	1.7221

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 2 para as velocidades e para a pressão a ordem de convergência de 1 é observada, em acordo com o que era esperado.

A norma  $L_\infty$  do erro da solução numérico-computacional das equações de Navier-Stokes são apresentadas na Tab. 69. Com as normas do erro em mãos é possível calcular a ordem de convergência, que é apresentada na Tab. 70.

Tabela 69 – Norma  $L_\infty$  do erro do MFSim utilizando-se solução manufaturada com uma esfera imersa.

Malha	u	v	w	P
$16^3$	4.79E-02	4.58E-02	7.47E-02	6.22E-01
$32^3$	1.21E-02	1.18E-02	1.89E-02	4.67E-01
$64^3$	3.17E-03	3.07E-03	4.83E-03	2.87E-01
$128^3$	8.29E-04	7.83E-04	1.21E-03	2.43E-01

Tabela 70 – Taxa de convergência da norma  $L_\infty$  do erro do MFSim utilizando-se solução manufaturada com uma esfera imersa.

Malha	u	v	w	P
$16^3/32^3$	1.9900	1.9629	1.9837	0.4132
$32^3/64^3$	1.9283	1.9379	1.9688	0.7034
$64^3/128^3$	1.9358	1.9703	2.0012	0.2376

A ordem de convergência obtida foi de aproximadamente 2 para as velocidades, em acordo com o que era esperado. A pressão apresentou uma perda de ordem na norma  $L_\infty$ , que não foi vista na norma  $L_2$ .

A seguir são apresentados os resultados de validação da ferramenta em escoamentos sobre esfera e cubo.

## 3.2 Escoamento

Importante notar que no caso do Ghost não existem restrições para o tamanho da malha lagrangiana, enquanto no caso do MDF, o tamanho da malha lagrangiana é função do tamanho da malha euleriana (UHLMANN, 2005).

Escolheu-se um domínio de  $32,0 \phi$  na direção  $X_f$ ,  $16,0 \phi$  na direção  $Y_f$  e  $16,0 \phi$  na direção  $Z_f$ , no qual  $\phi$  é o diâmetro da esfera ou o lado do cubo.

Tabela 71 – Condições de contorno para o fluido.

Local da condição de contorno	Velocidades [ $m s^{-1}$ ] e Gradientes [ $s^{-1}$ ]			Correção de Pressão [ $Pa$ ] e Gradientes [ $Pa m^{-1}$ ]
	u	v	w	
$X_f=0,0 \phi$ m (Dirichlet)	$u = 1,0$	$v = 0,0$	$w = 0,0$	$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,0$
$X_f=32,0 \phi$ m (ORLANSKI, 1976)	Equação da onda	Equação da onda	Equação da onda	$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,0$
$Y_f=0,0 \phi$ m (Neumann)	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0,0$	$\frac{\partial v}{\partial y} = 0,0$	$\frac{\partial w}{\partial y} = 0,0$	$\phi = 0,0$
$Y_f=16,0 \phi$ m (Neumann)	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0,0$	$\frac{\partial v}{\partial y} = 0,0$	$\frac{\partial w}{\partial y} = 0,0$	$\phi = 0,0$
$Z_f=0,0 \phi$ m (Neumann)	$\frac{\partial u}{\partial z} = 0,0$	$\frac{\partial v}{\partial z} = 0,0$	$\frac{\partial w}{\partial z} = 0,0$	$\phi = 0,0$
$Z_f=16,0 \phi$ m (Neumann)	$\frac{\partial u}{\partial z} = 0,0$	$\frac{\partial v}{\partial z} = 0,0$	$\frac{\partial w}{\partial z} = 0,0$	$\phi = 0,0$

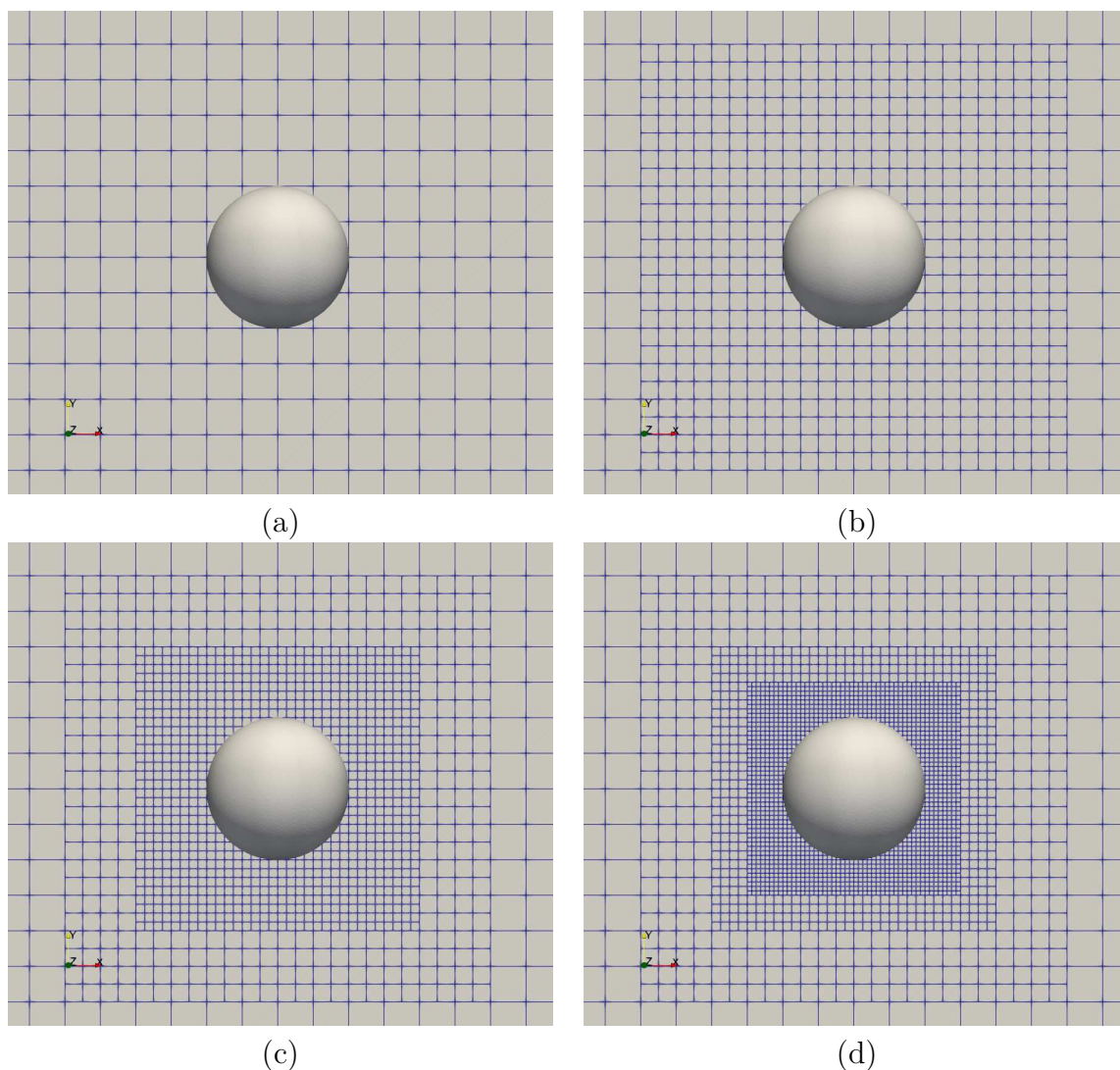
As condições iniciais apresentadas na Tab. 72.

Tabela 72 – Condições iniciais para o fluido.

	Velocidades [ $m s^{-1}$ ]			Pressão [ $Pa$ ]
	u	v	w	
Condições iniciais	1,0	0,0	0,0	0,0

As simulações foram feitas em paralelo e com malha adaptativa. Além disso, executaram-se simulações com 4, 8, 16 e 32 volume por  $\phi$ .

Figura 42 – Ilustração da malha euleriana em função do diâmetro: 4 volumes por  $\phi$  (a), 8 volumes por  $\phi$  (b), 16 volumes por  $\phi$  (c) e 32 volumes por  $\phi$  (d).



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

A seguir são apresentados os resultados do Ghost e comparações com o *Multi Direct Forcing*.

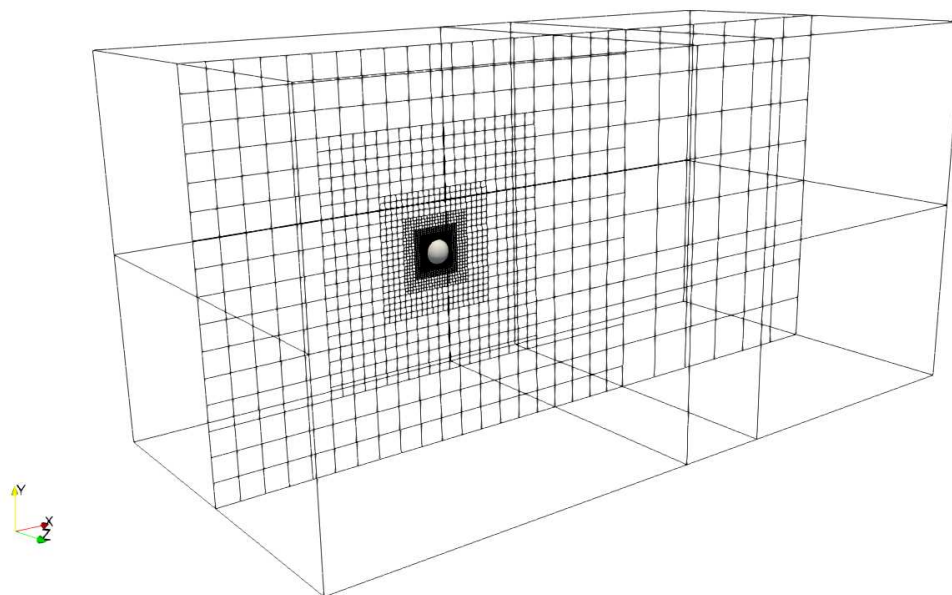
### 3.2.1 Esfera

Nessa subseção serão apresentados resultados de escoamentos sobre uma esfera parada e uma esfera com velocidade angular imposta para que o efeito Magnus apareça (WHITE, 1998).

#### 3.2.1.1 Escoamento sobre esfera parada

O centro da esfera foi posicionado em  $(10\phi, 8,0\phi, 8,0\phi)$ . Na figura 43 é ilustrado o domínio com a esfera imersa.

Figura 43 – Domínio computacional com a esfera posicionada.



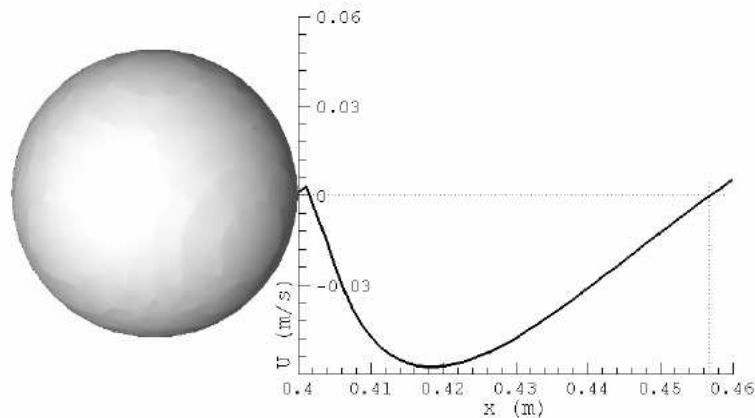
Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Três parâmetros são comparados com a literatura: o tamanho da bolha de recirculação, o coeficiente de arrasto e o coeficiente de pressão na superfície da esfera. Tamanhos da bolha de recirculação ( $S_b$ ), adimensionalizados pelo diâmetro da esfera ( $\phi$ ), encontrados na literatura para escoamentos com número de Reynolds igual a 200 são apresentados na Tab. 73. A bolha de recirculação é medida do ponto



mais a jusante da esfera até o ponto no qual a velocidade muda de sinal, como pode ser visto na Fig. 44.

Figura 44 – Ilustração da medida da bolha de recirculação de uma esfera.



Fonte: Retirado de (Campregher Junior, 2005)

Tabela 73 – Tamanhos da bolha de recirculação encontrados na literatura para Reynolds 200.

Referência	$S_b/\phi$
(CAMPREGHER et al., 2009)	1,40
(FORNBERG, 1988)	1,43
(GILMANOV; SOTIROPOULOS; BALARAS, 2003)	1,45
(JOHNSON; PATEL, 1999)	1,43
(TOMBOULIDES; ORSZAG, 2000)	1,44

O coeficiente de arrasto de uma esfera pode ser calculado com a seguinte equação:

$$C_D = \frac{2 F_x}{\rho U_\infty \left( \frac{\pi \phi^2}{4} \right)}, \quad (3.8)$$

na qual  $F_x$  é o somatório de forças na direção  $x$ ,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $U_\infty$  é a velocidade do escoamento e  $\phi$  é o diâmetro da esfera.

O coeficiente de arrasto foi comparado com a Eq. (3.9). Essa equação é recomendada em Clift, Grace e Weber (1978) para  $20 \leq Re \leq 260$ , na qual  $Re$  é o número de Reynolds do escoamento.

$$C_D = \frac{24}{Re} [1 + 0.1935 Re^{0.6305}] \quad (3.9)$$

Além dessa equação, apresentam-se na Tab. 74 resultados de coeficiente de arrasto de outros trabalhos.

Tabela 74 – Coeficiente de arrasto encontrados na literatura para Reynolds 200.

Referência	$C_D$
(CAMPREGHER et al., 2009)	0,815
(FORNBERG, 1988)	0,768
(NIAZMAND; RENKSIZBULUT, 2003)	0,776
(ROOS; WILLMARTH, 1971)	0,772
(CLIFT; GRACE; WEBER, 1978) Eq. (3.9)	0,776

Para fim de comparação, foram executadas 4 simulações com o Ghost e 4 simulações com o MDF. Foram utilizadas malhas eulerianas de 4 a 32 volumes por diâmetro, conforme Fig. 42. Os resultados dessas simulações são apresentados na Tab. 75.

Tabela 75 – Resultados para o coeficiente de arrasto e tamanho da bolha de recirculação para o Ghost e o MDF em um escoamento sobre uma esfera parada.

Método	Parâmetro	Volumes por diâmetro				Referência
		4	8	16	32	
$C_d$	MDF	1.29	0.97	0.81	0.79	0.78
	Ghost	0.51	0.66	0.73	0.75	0.78
$S_b/\phi$	MDF	2.56	2.07	1.63	1.49	1.43
	Ghost	1.24	1.56	1.51	1.45	1.43

Há uma tendência de o MDF superestimar tanto o coeficiente de arrasto quanto o tamanho da bolha de recirculação e uma tendência de o Ghost subestimar o coeficiente de arrasto. Na Tab. 76 são apresentados os erros relativos em porcentagem.

Tabela 76 – Erro relativo do coeficiente de arrasto e tamanho da bolha de recirculação para o Ghost e o MDF em um escoamento sobre uma esfera parada.

Método	Parâmetro	Volumes por diâmetro			
		4	8	16	32
$C_D$	MDF	66.06%	25.27%	4.77%	1.25%
	Ghost	34.58%	14.98%	5.98%	3.33%
$S_b/\phi$	MDF	79.02%	44.90%	14.27%	4.43%
	Ghost	13.29%	9.37%	5.73%	1.29%

O Ghost apresenta um erro menor em quase todos os resultados, menos para o coeficiente de arrasto com 32 volumes por diâmetro.

A seguir são mostradas as comparações do coeficiente de pressão  $C_P$  das simulações do Ghost. O MDF não apresenta, até a presente data, a informação de pressão nos pontos lagrangianos. É possível obter essa informação, mas não estava disponível até a presente data. No Ghost, como a obtenção da pressão nos pontos lagrangianos é um processo necessário para o cálculo da força, essa informação estava disponível.

Segundo Campregher Junior (2005), o coeficiente de pressão é calculado com a seguinte equação:

$$C_P(x) = \frac{2(p(x) - p_\infty)}{\rho U_\infty^2} \quad (3.10)$$

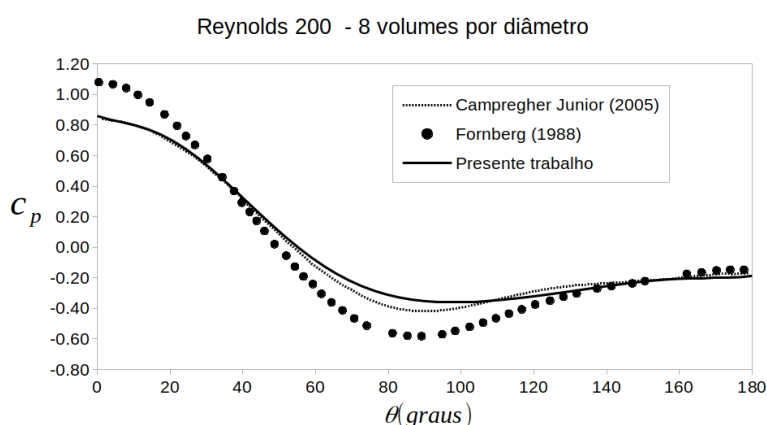
Onde  $p_\infty$  é a pressão de entrada no domínio e  $p(x)$  é a pressão no ponto lagrangiano de interesse.

Nas Figs. 45, 46 e 47 são apresentadas comparações do coeficiente de pressão obtido com o Ghost com a literatura. Escolheu-se uma linha que passa pelo equador da esfera no plano  $xy$ . O valor de  $0^\circ$  foi definido no ponto de estagnação e à montante da esfera e o ângulo aumenta no sentido anti-horário. Essa definição foi extraída de Campregher Junior (2005).

Na Fig. 45 é apresentado o resultado do  $C_P$  do Ghost com 8 volumes por diâmetro enquanto nas Fig. 46 e 47 são apresentados os resultados com 16 e

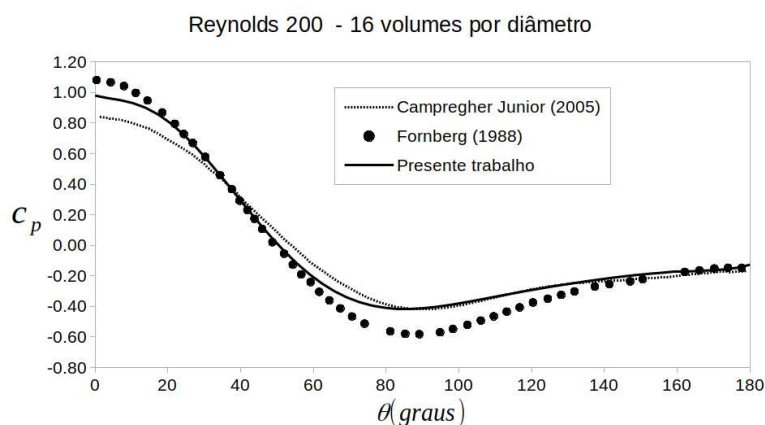
32 volumes por diâmetro respectivamente. Nota-se que o resultado do Ghost para a malha mais grossa se aproxima mais do resultado de Campregher Junior (2005), enquanto o resultado do Ghost com malha mais fina se aproxima mais de Fornberg (1988) (1988).

Figura 45 – Comparação do coeficiente de pressão ( $C_P$ ) avaliado ao longo da superfície da esfera para Reynolds 200 comparados com a literatura. Resultado do Ghost obtido com 8 volumes por diâmetro.



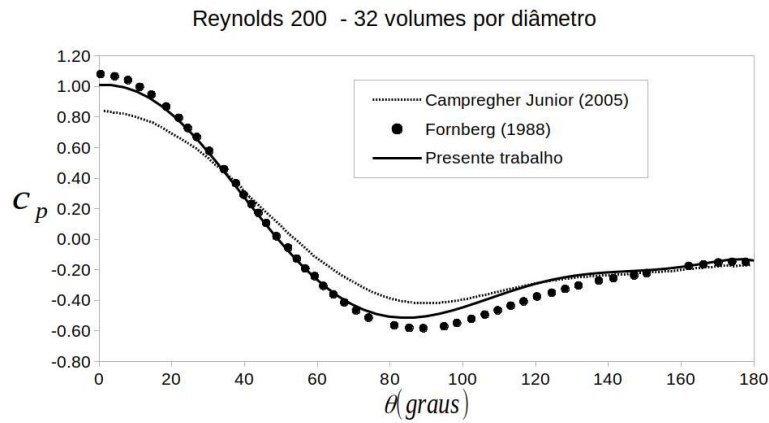
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 46 – Comparação do coeficiente de pressão ( $C_P$ ) avaliado ao longo da superfície da esfera para Reynolds 200 comparados com a literatura. Resultado do Ghost obtido com 16 volumes por diâmetro.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 47 – Comparação do coeficiente de pressão ( $C_p$ ) avaliado ao longo da superfície da esfera para Reynolds 200 comparados com a literatura. Resultado do Ghost obtido com 32 volumes por diâmetro.



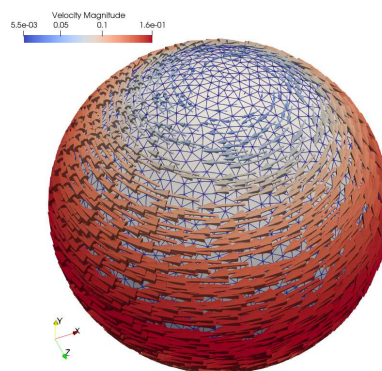
Fonte: elaborada pelo autor.

A seguir são apresentados os resultados de uma esfera com efeito Magnus.

### 3.2.1.2 Efeito Magnus

Nessa seção utilizou-se a mesma configuração do caso anterior, mas impôs-se uma velocidade de rotação na esfera. O efeito buscado é o efeito Magnus, no qual uma força de sustentação aparece como consequência da rotação da esfera. (WHITE, 1998). Na Fig. 48 são ilustrados os vetores velocidades impostos na fronteira imersa.

Figura 48 – Ilustração dos vetores de velocidade impostos na fronteira imersa.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

Para fim de comparação, foram executadas 4 simulações com o Ghost e 4 simulações com o MDF. Foram utilizadas malhas eulerianas de 4 a 32 volumes por diâmetro, conforme Fig. 42. Comparou-se o resultado em um escoamento com Reynolds igual 200 e uma rotação adimensional de 0,16. A rotação adimensional é calculada da seguinte forma:

$$\Omega = \phi\omega/(2U_\infty), \quad (3.11)$$

na qual  $\phi$  é o diâmetro da esfera,  $\omega$  é velocidade de rotação da esfera em rad/s e  $U_\infty$  é a velocidade do escoamento.

Os resultados dessas simulações são apresentados na Tab. 77. Utilizou-se como referência o trabalho de Niazmand e Renksizbulut (2003).

Tabela 77 – Resultados para o coeficiente de arrasto e coeficiente de sustentação para o Ghost e o MDF em um escoamento sobre uma esfera rodando.

Método	Parâmetro	Volumes por diâmetro				Referência
		4	8	16	32	
$C_D$	MDF	1.3893	1.0140	0.8574	0.8267	0.8101
	Ghost	0.5041	0.6821	0.7698	0.7892	0.8101
$C_L$	MDF	-0.3689	-0.2471	-0.2348	-0.2283	-0.2007
	Ghost	-0.0375	-0.1211	-0.1779	-0.2051	-0.2007

Mais uma vez, observa-se uma tendência de o MDF superestimar tanto o coeficiente de arrasto quanto o de sustentação e uma tendência de o Ghost subestimar o coeficiente de arrasto e o de sustentação. Na Tab. 78 são apresentados os erros relativos em porcentagem.

Tabela 78 – Erro relativo do coeficiente de arrasto e de sustentação para o Ghost e o MDF em um escoamento sobre uma esfera rodando.

Método	Parâmetro	Volumes por diâmetro			
		4	8	16	32
$C_D$	MDF	71.50%	25.17%	5.84%	2.05%
	Ghost	37.78%	15.80%	4.97%	2.58%
$C_L$	MDF	83.81%	23.14%	17.02%	13.78%
	Ghost	81.31%	39.66%	11.36%	2.18%

O Ghost apresenta um erro menor em quase todos os resultados, menos para o coeficiente de arrasto com 32 volumes por diâmetro e para a sustentação com 8 volumes por diâmetro.

Nessa seção também será feita a análise do custo computacional do Ghost quando comparado com o MDF. Na Tab. 79 é apresentado o tempo médio para resolver 1 volume euleriano. Na coluna "Média somente Remalhagem" está o custo computacional médio dos passos de tempo que têm remalhagem. Na coluna "Média Sem Remalhagem" está o custo computacional médio dos passos de tempo que não têm remalhagem e na coluna "Média Total" está o custo computacional médio sem distinguir um passo de tempo de remalhagem do sem remalhagem. Na linha "Aumento do Custo" está o aumento do custo em % em função do uso do Ghost quando comparado com o MFSim. Importante dizer que esse é um teste que precisa ser melhorado, visto que a simulação só foi feita uma vez para cada caso. O caso em questão é o escoamento sobre uma esfera em rodando com 8 volumes por diâmetro. As simulações do Ghost e do MDF duraram aproximadamente 13 horas cada.

Tabela 79 – Custo computacional em microssegundo por volume.

	Média Total	Média somente Remalhagem	Média Sem Remalhagem
MDF	22.77	67.57	21.85
Ghost	23.02	72.70	22.00
Aumento do Custo	1.10%	7.60%	0.70%

Houve um aumento muito pequeno no custo computacional quando se utiliza o Ghost, quando comparado com o MDF. No passo tempo onde há a remalhagem é preciso refazer a marcação das faces e centros discutido no capítulo 2, por isso houve um aumento percentual maior nesses passos de tempo que nos outros passos de tempo. Mais detalhes sobre o custo computacional da marcação podem ser vistos em Carvalho (2021).

Na Tab. 79 é apresentado o uso de memória RAM médio para resolver 1 volume euleriano.

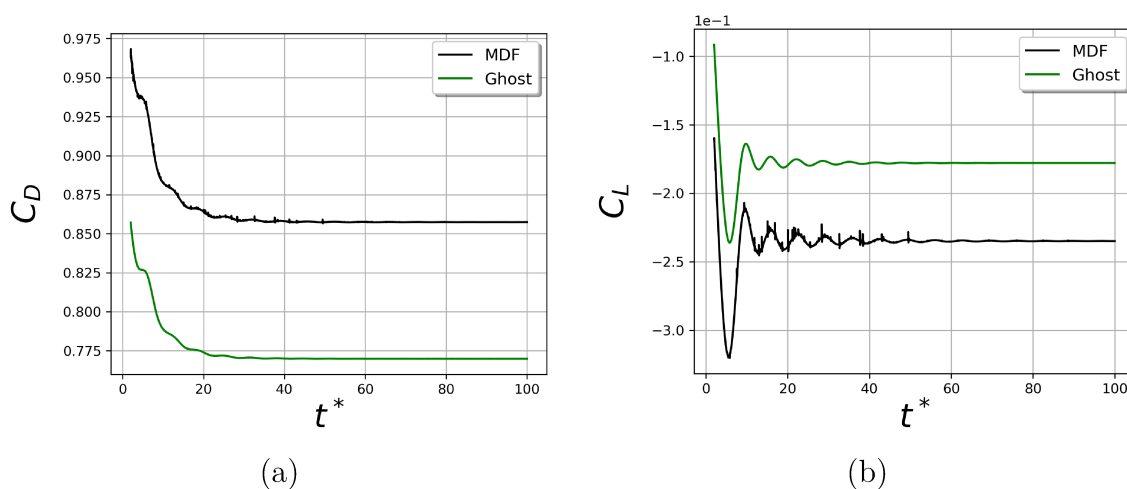
Tabela 80 – Uso de memória RAM em kb por volume.

	Média Total	Média somente Remalhagem	Média Sem Remalhagem
MDF	6.26	6.18	6.26
Ghost	7.42	7.37	7.42
Aumento de uso de memória	18.64%	19.30%	18.62%

O uso de memória aumentou aproximadamente 20% ao se utilizar o Ghost. Isso se deve aos mapeamentos necessários para a marcação dos volumes eulerianos em função da malha lagrangiana. Mais estudos devem ser feitos para determinar o custo de memória por ponto lagrangiano.

Na Fig. 49 é mostrada a comparação do coeficiente de arrasto e de sustentação do Ghost e do MDF ao longo do tempo para uma malha de 16 volumes por diâmetro.

Figura 49 – Comparação do coeficiente de arrasto (a) e de sustentação (b) do Ghost e do MDF ao longo do tempo para uma malha de 16 volumes por diâmetro.



Fonte: elaborada pelo autor. Figura feita com Matplotlib (HUNTER, 2007).

É importante notar que as forças do MDF apresentam oscilações que ocorrem logo após uma remalhagem, enquanto essas oscilações são imperceptíveis no Ghost.



Esse é um resultado importante para simulações de interação fluido–estrutura, visto que oscilações dessa natureza podem prejudicar a simulação.

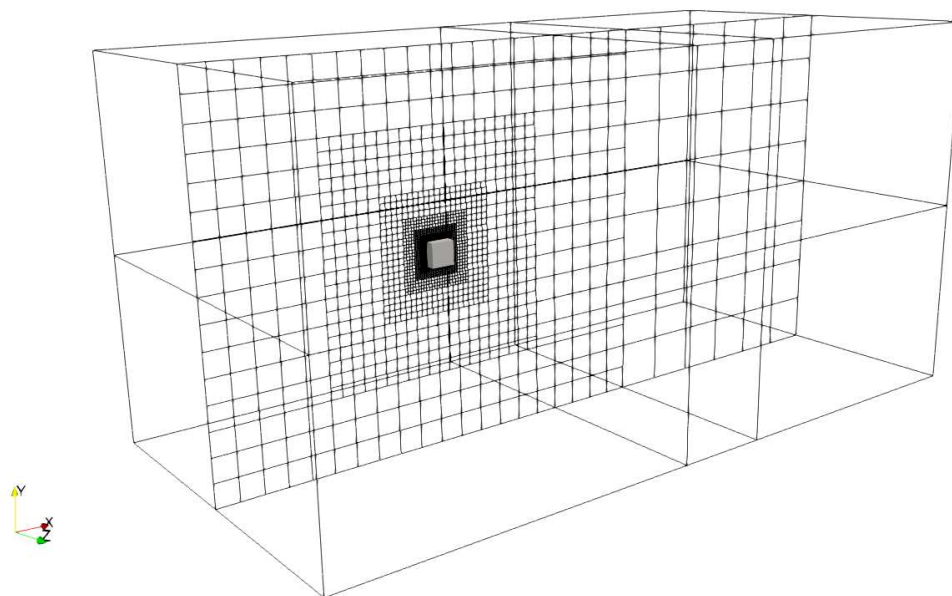
A seguir são apresentados resultados do escoamento sobre um cubo.

### 3.2.2 Cubo

Nessa subseção serão apresentados resultados de escoamentos sobre um cubo parado.

O centro do cubo foi posicionado em  $(10\phi, 8,0\phi, 8,0\phi)$ . Na Fig. 50 é ilustrado o domínio com o cubo imerso.

Figura 50 – Domínio computacional com o cubo posicionado.



Fonte: elaborada pelo autor. Captura de tela do software Paraview (AYACHIT, 2015).

As condições de contorno e iniciais para esse caso podem ser vistas nas Tabs. 71 e 72.

### 3.2.2.1 Escoamento sobre um cubo parado

Dois parâmetros são comparados com a literatura: o tamanho da bolha de recirculação e o coeficiente de arrasto. Tamanhos da bolha de recirculação ( $S_b$ ), adimensionalizados pelo lado do cubo ( $\phi$ ), encontrados na literatura para escoamentos com número de Reynolds igual a 150 são apresentados na Tab. 81. A bolha de recirculação é medida do centro do cubo até o ponto no qual a velocidade muda de sinal.

Tabela 81 – Tamanhos da bolha de recirculação encontrados na literatura para Reynolds 150.

Referência	$S_b/\phi$
(KLOTZ et al., 2014)	2,1555
(SAHA, 2004)	2,37

O coeficiente de arrasto de uma esfera pode ser calculado com a seguinte equação:

$$C_D = \frac{2 F_x}{\rho U_\infty \phi^2}, \quad (3.12)$$

na qual  $F_x$  é o somatório de forças na direção  $x$ ,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $U_\infty$  é a velocidade do escoamento e  $\phi$  é o tamanho do lado do cubo.

O coeficiente de arrasto foi comparado com a Eq. (3.13). Essa equação foi obtida por Saha (2004) para  $Re \leq 300$ , na qual  $Re$  é o número de Reynolds do escoamento. O maior erro do ajuste de curva foi de 4,35%.

$$C_D = \frac{24}{Re} [1 + 0.232 Re^{0.628}] \quad (3.13)$$

Para fim de comparação, foram executadas 4 simulações com o Ghost e 4 simulações com o MDF. Foram utilizadas malhas eulerianas de 4 a 32 volumes por diâmetro, conforme Fig. 42. Os resultados dessas simulações são apresentados na Tab. 82.

Tabela 82 – Resultado do coeficiente de arrasto e tamanho da bolha de recirculação para o Ghost e o MDF em um escoamento sobre um cubo parado.

Método	Parâmetro	Volumes por diâmetro				Referência
		4	8	16	32	
$C_D$	MDF	1.6551	1.2977	1.1439	1.0987	1.0234
	Ghost	1.0773	1.1502	1.0768	1.0512	1.0234
$S_b/\phi$	MDF	4.2200	3.3680	2.7440	2.5120	2.3700
	Ghost	3.0208	2.9480	2.6160	2.4684	2.3700

Mais uma vez, observa-se uma tendência de o MDF superestimar tanto o coeficiente de arrasto quanto o de sustentação. Tanto o Ghost quanto o MDF superestimam o tamanho da bolha de recirculação com malhas mais grossas. Na Tab. 83 são apresentados os erros relativos em porcentagem.

Tabela 83 – Erro relativo do coeficiente de arrasto e do tamanho da bolha de recirculação para Ghost e o MDF em um escoamento sobre um cubo parado.

Método	Parâmetro	Volumes por diâmetro			
		4	8	16	32
$C_D$	MDF	61.73%	26.80%	11.78%	7.37%
	Ghost	5.27%	12.40%	5.22%	2.72%
$S_b/\phi$	MDF	78.06%	42.11%	15.78%	5.99%
	Ghost	27.46%	24.39%	10.38%	4.15%

O Ghost apresenta um erro menor em todos os resultados.

## 4 Conclusão

No presente trabalho apresentou-se uma extensão do método Ghost de fronteira imersa, originalmente desenvolvido para domínios bidimensionais (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2008), para problemas tridimensionais. Para isso foi utilizado o software MFSim, que é uma plataforma computacional que está sendo desenvolvida no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). As implementações foram verificadas utilizando-se testes específicos, como a ordem de convergência dos polinômios de Lagrange e também utilizando-se a metodologia da solução manufaturada. Além disso, as implementações foram validadas para escoamentos sobre corpos rígidos simples (esfera e cubo). Os resultados qualitativos e quantitativos obtidos apresentaram boa concordância com os resultados encontrados na literatura. Os resultados de um escoamento com número de Reynolds igual a 200 sobre uma esfera foram comparados com a fronteira imersa MDF, já disponível no MFSim, e com dados da literatura. O mesmo processo foi feito para escoamentos sobre uma esfera com efeito Magnus com Reynolds 200 e velocidade angular adimensional de  $\Omega = 0, 16$  e também para um escoamento com número de Reynolds de 150 sobre um cubo. Com os teste de taxa de convergência mostraram-se que as numerosas e complexas implementações realizadas foram feitas de forma a manter as taxas esperadas. Com as comparações quantitativas evidencia-se que a metodologia Ghost é promissora em termos de qualidade de resultados assim como em termos de custo computacional. Essas promessas ficam evidentes comparando-se com a metodologia MDF, a qual é funcional, mas limitada em termos de aplicações industriais.

O presente trabalho foi proposto com os objetivos de: formar pessoas no tema de fronteira imersa, dar sequência aos desenvolvimentos, no MFLab, sobre esse importante tema e contribuir para o desenvolvimento de uma plataforma de simulação numérica de problemas de dinâmica dos fluidos.

A principal contribuição com o presente trabalho foi a abertura, no MFLab, de uma importante linha de desenvolvimento numérico-computacional. Grandes

são os desdobramentos dessa tese em termos de pesquisa e desenvolvimento. A seguir elencam-se esses desdobramentos.

Sugestão de trabalhos futuros envolvendo a plataforma MFSim:

- Adequar o modelo de Smagorinsky para que utilize velocidades extrapoladas;
- Implementar Ghost no solver Multigrid multinível e SIP do MFSim;
- Implementar a metodologia Ghost para escalares (Imposição de condições de contorno de primeira, segunda e terceira espécie);
- Generalização do método para a modelagem de fechamento da turbulência (LES e URANS) ;
- Generalização do método para escoamentos internos e externos simultâneos;
- Generalização do método para interação fluido–estrutura;
- Generalização do método para escoamentos bifásicos;
- Melhorar desempenho do Petsc no MFSim (contexto geral);
- Melhorar desempenho do Ghost;
- Implementar outras condições de contorno para velocidade e pressão (permitindo colocar um sumidouro de massa no interior do domínio, por exemplo);
- Adaptar saída de dados para levar em consideração a presença da fronteira imersa (escrita do hdf5);
- Generalização do método para interação fluido-estrutura com escoamento interno e externo;
- Implementação da abordagem monolítica de acoplamento fluido–sólido;
- Comparação entre os métodos monolítico, particionado forte e fraco, para verificação de robustez e custo.

## Referências

ALMGREN, A. S. et al. A cartesian grid projection method for the incompressible euler equations in complex geometries. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 18, n. 5, p. 1289–1309, set. 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/s1064827594273730>>. Citado na página 28.

ALVAREZ, C. M. R. *Simulação computacional adaptativa de escoamentos bifásicos viscoelásticos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, may 2013. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45132/tde-07082013-112937/>>. Citado na página 37.

ALVES, M.; OLIVEIRA, P.; PINHO, F. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 41, p. 47–75, jan. 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/fld.428>>. Citado na página 32.

AMES, J. et al. Multi-gpu immersed boundary method hemodynamics simulations. *Journal of Computational Science*, v. 44, p. 101153, 2020. ISSN 1877-7503. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jocs.2020.101153>>. Citado na página 24.

ANDRADE, J. R. *Métodos de fronteira imersa para corpos esbeltos: implementação e validação*. 133 p. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2015. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/15015>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 29.

ANDRADE, J. R. et al. Assessment of two immersed boundary methods for flow over thin plates and sharp edges. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 40, n. 6, p. 288, May 2018. ISSN 1806-3691. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40430-018-1212-7>>. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 26 e 29.

AYACHIT, U. *The Paraview Guide : A Parallel Visualization Application*. New York: Kitware, Inc., 2015. ISBN 1-930934-29-7. Citado 30 vezes nas páginas 25, 36, 37, 38, 41, 42, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 62, 64, 66, 68, 70, 74, 86, 106, 107, 112 e 116.

BALAY, S. et al. *PETSc Web page*. 2018. [Http://www.mcs.anl.gov/petsc](http://www.mcs.anl.gov/petsc). Citado na página 38.

BANSAL, K. Exact implementation of boundary conditions for immersed boundary methods. In: . [S.l.: s.n.], 2015. p. 78. Citado na página 24.

BARBI, F. et al. Numerical simulation of the flow through a compressor-valve model using an immersed-boundary method. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, v. 10, n. 1, p. 255–271, 2016. ISSN 1997003X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/19942060.2016.1140076>>. Citado na página 24.

BERTHELSEN, P. A.; FALTINSEN, O. M. A local directional ghost cell approach for incompressible viscous flow problems with irregular boundaries. *J. Comput. Phys.*, Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, v. 227, n. 9, p. 4354–4397, abr. 2008. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.12.022>>. Citado 12 vezes nas páginas 7, 8, 22, 26, 29, 40, 43, 57, 59, 63, 64 e 119.

Campregher Junior, R. *MODELAGEM MATEMÁTICA TRIDIMENSIONAL PARA PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA*. 160 p. Tese (Tese de doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2005. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14794>>. Citado 3 vezes nas páginas 108, 110 e 111.

CAMPREGHER, R. et al. Computations of the flow past a still sphere at moderate reynolds numbers using an immersed boundary method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, scielo, v. 31, p. 344 – 352, 12 2009. ISSN 1678-5878. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1678-58782009000400009>>. Citado 2 vezes nas páginas 108 e 109.

CARVALHO, A. R. D. *Aplicação e Modelagem de Método de Fronteira Imersa para Análise de Escoamentos Sobre Supressores de VIV*. 150 p. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2021. Citado 5 vezes nas páginas 27, 29, 38, 39 e 114.

CHORIN, A. J. The numerical solution of the navier-stokes equations for an incompressible fluid. *Bull. Amer. Math. Soc.*, American Mathematical Society, v. 73, n. 6, p. 928–931, 11 1967. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11853-6>>. Citado na página 34.

CLIFT, R.; GRACE, J.; WEBER, M. E. *Bubbles, Drops, and Particles*. [S.l.: s.n.], 1978. Citado na página 109.

CUI, Z.; YANG, Z.; JIANG, H. Sharp interface immersed boundary method for simulating three-dimensional swimming fish. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, Taylor & Francis, v. 14, n. 1, p. 534–544, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/19942060.2020.1724197>>. Citado na página 24.

FORNBERG, B. Steady viscous flow past a sphere at high reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 190, p. 471–489, 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112088001417>>. Citado 3 vezes nas páginas 108, 109 e 111.

GADE, S. N.; YOGARAJ, S.; VENGADESAN, S. Investigation of the unsteady aerodynamics of insect flight: The use of immersed boundary method. In: \_\_\_\_\_. [s.n.], 2020. p. 335–359. ISBN 978-981-15-3939-8. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-981-15-3940-4\\_13](https://doi.org/10.1007/978-981-15-3940-4_13)>. Citado na página 24.

GILMANOV, A.; SOTIROPOULOS, F.; BALARAS, E. A general reconstruction algorithm for simulating flows with complex 3d immersed boundaries on cartesian grids. *Journal of Computational Physics*, v. 191, n. 2, p. 660 – 669, 2003. ISSN 0021-9991. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00321-8](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00321-8)>. Citado na página 108.

GOUNLEY, J.; DRAEGER, E. W.; RANDLES, A. Immersed boundary method halo exchange in a hemodynamics application. In: *Computational Science – ICCS 2019*. Cham: Springer International Publishing, 2019. p. 441–455. ISBN 978-3-030-22734-0. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-3-030-22734-0\\_32](https://doi.org/10.1007/978-3-030-22734-0_32)>. Citado na página 24.

HARTEN, A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, v. 135, p. 260–278, ago. 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jcph.1997.5713>>. Citado na página 32.

HARTMANN, D.; MEINKE, M.; SCHRÖDER, W. A strictly conservative cartesian cut-cell method for compressible viscous flows on adaptive grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, n. 9, p. 1038–1052, 2011. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.05.015>>. Citado na página 28.

HUNTER, J. D. Matplotlib: A 2d graphics environment. *Computing In Science & Engineering*, IEEE COMPUTER SOC, v. 9, n. 3, p. 90–95, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55>>. Citado 7 vezes nas páginas 39, 40, 41, 43, 44, 45 e 115.



- IMAMURA, T.; TAMAKI, Y. Immersed boundary method for high reynolds number compressible flows around an aircraft configuration. In: *Computational Methods in Engineering & the Sciences*. Springer Singapore, 2020. p. 421–442. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-981-15-3940-4\\_16](https://doi.org/10.1007/978-981-15-3940-4_16)>. Citado na página 24.
- JOHNSON, T. A.; PATEL, V. C. Flow past a sphere up to a reynolds number of 300. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 378, p. 19–70, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112098003206>>. Citado na página 108.
- KIM, W.; CHOI, H. Immersed boundary methods for fluid-structure interaction: A review. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 75, p. 301–309, 2019. ISSN 0142-727X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2019.01.010>>. Citado na página 27.
- KIM, Y.; PESKIN, C. S. A penalty immersed boundary method for a rigid body in fluid. *Physics of Fluids*, AIP Publishing, v. 28, n. 3, p. 033603, mar. 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4944565>>. Citado na página 24.
- KLOTZ, L. et al. Experimental investigation of flow behind a cube for moderate reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 750, p. 73–98, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/jfm.2014.236>>. Citado na página 117.
- LUO, H. et al. An immersed-boundary method for flow–structure interaction in biological systems with application to phonation. *Journal of Computational Physics*, Elsevier BV, v. 227, n. 22, p. 9303–9332, nov. 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.05.001>>. Citado na página 24.
- MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 37, n. 1, p. 239–261, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743>>. Citado na página 27.
- NIAZMAND, H.; RENKSIZBULUT, M. Surface effects on transient three-dimensional flows around rotating spheres at moderate reynolds numbers. *Computers & Fluids*, v. 32, n. 10, p. 1405–1433, 2003. ISSN 0045-7930. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0045-7930\(02\)00115-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7930(02)00115-9)>. Citado 2 vezes nas páginas 109 e 113.
- NIKFARJAM, F.; CHENY, Y.; BOTELLA, O. The ls-stag immersed boundary/cut-cell method for non-newtonian flows in quasi-3d geometries. In: . [S.l.: s.n.], 2015. Citado na página 28.

- ORLANSKI, I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal of Computational Physics*, v. 21, p. 251–269, 1976. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(76\)90023-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(76)90023-1)>. Citado na página 105.
- PERIC, J. H. F. e M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002. ISBN 978-3-540-42074-3. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 60.
- PERON, S. et al. An Immersed Boundary Method for preliminary design aerodynamic studies of complex configurations. In: *23rd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. Denver, Colorado: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2017. ISBN 978-1-62410-506-7. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.2017-3623>>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 26.
- PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *Journal of Computational Physics*, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972. ISSN 0021-9991. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(72\)90065-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(72)90065-4)>. Citado na página 27.
- PIVELLO, M. et al. A fully adaptive front tracking method for the simulation of two phase flows. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 58, p. 72–82, 2014. ISSN 0301-9322. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2013.08.009>>. Citado na página 98.
- PIVELLO, M. R. *A fully adaptive Front-Tracking method for the simulation of 3D two-phase flows*. Tese (Ph.D. Thesis) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil, 2012. Citado na página 98.
- RIBEIRO NETO, H. *Modelagem matemática para a interação fluido–estrutura acoplando escoamentos incompressíveis e viga de Timoshenko*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Engenharia Mecânica, 2016. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/21141>>. Citado 3 vezes nas páginas 24, 27 e 31.
- RIBEIRO NETO, H. et al. Influence of seabed proximity on the vibration responses of a pipeline accounting for fluid-structure interaction. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 114, p. 224 – 238, 2019. ISSN 0888-3270. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.05.017>>. Citado na página 24.
- ROACHE, P. J. The method of manufactured solutions for code verification. In: \_\_\_\_\_. *Computer Simulation Validation: Fundamental Concepts, Methodological Frameworks, and Philosophical Perspectives*. Cham: Springer International Publishing, 2019. p. 295–318. ISBN 978-3-319-70766-2. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-3-319-70766-2\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-319-70766-2_12)>. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 98.

ROMA, A. M.; PESKIN, C. S.; BERGER, M. J. An adaptive version of the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 153, n. 2, p. 509–534, 1999. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6293>>. Citado na página 27.

ROOS, F. W.; WILLMARTH, W. W. Some experimental results on sphere and disk drag. *AIAA Journal*, v. 9, n. 2, p. 285–291, 1971. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.6164>>. Citado na página 109.

SAHA, A. K. Three-dimensional numerical simulations of the transition of flow past a cube. *Physics of Fluids*, AIP Publishing, v. 16, n. 5, p. 1630–1646, maio 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1688324>>. Citado na página 117.

SAHIN, M.; MOHSENI, K. An arbitrary lagrangian–eulerian formulation for the numerical simulation of flow patterns generated by the hydromedusa aequorea victoria. *Journal of Computational Physics*, v. 228, n. 12, p. 4588–4605, 2009. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.03.027>>. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

SALARI, K.; KNUPP, P. Code verification by the method of manufactured solutions. 6 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.2172/759450>>. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 98.

SOTIROPOULOS, F.; YANG, X. Immersed boundary methods for simulating fluid–structure interaction. *Progress in Aerospace Sciences*, Pergamon, v. 65, p. 1–21, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2013.09.003>>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 27 e 28.

SOUZA, P. R. C. *Publicação de Normas*. Disponível em: <<http://www.mflab.mecanica.ufu.br/gitea/root/MFSim/wiki/Publica%C3%A7%C3%A3o-de-Normas>>. Citado na página 100.

SOUZA, P. R. C. *Modelagem Matemática e Computacional da Interação Fluido-Estrutura Utilizando Elementos de Placa e a Metodologia LES em um Ambiente de Malha Adaptativa*. Tese (PhD Thesis) — Universidade Federal de Uberlândia, 2020. Citado na página 24.

SUZUKI, K.; INAMURO, T. Effect of internal mass in the simulation of a moving body by the immersed boundary method. *Computers & Fluids*, v. 49, n. 1, p. 173–187, 2011. ISSN 0045-7930. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2011.05.011>>. Citado na página 22.

- TOMBOULIDES, A. G.; ORSZAG, S. A. Numerical investigation of transitional and weak turbulent flow past a sphere. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 416, p. 45–73, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112000008880>>. Citado na página 108.
- TREMBLAY, F.; FRIEDRICH, R. An algorithm to treat flows bounded by arbitrarily shaped surfaces with cartesian meshes. In: \_\_\_\_\_. *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics III: Contributions to the 12th STAB/DGLR Symposium Stuttgart, Germany 2000*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002. p. 289–296. ISBN 978-3-540-45466-3. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-3-540-45466-3\\_35](https://doi.org/10.1007/978-3-540-45466-3_35)>. Citado na página 61.
- TSENG, Y.-H.; FERZIGER, J. H. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, v. 192, n. 2, p. 593–623, 2003. ISSN 00219991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.07.024>>. Citado na página 36.
- UHLMANN, M. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. *Journal of Computational Physics*, v. 209, n. 2, p. 448–476, 2005. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.03.017>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 104.
- VARGAS, A.; MITTAL, R. Aerodynamic Performance of Biological Airfoils. In: *2nd AIAA Flow Control Conference*. Portland, Oregon: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2004. ISBN 978-1-62410-030-7. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.2004-2319>>. Citado na página 24.
- VILLAR, M. *Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007. Citado na página 36.
- WANG, D.; RUUTH, S. Variable step-size implicit-explicit linear multistep methods for time-dependent partial differential equations. *Journal of Computational Mathematics*, v. 26, p. 838–855, 2008. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/2142/18708>>. Citado na página 31.
- WANG, Z.; FAN, J.; LUO, K. Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 34, n. 3, p. 283 – 302, 2008. ISSN 0301-9322. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2007.10.004>>. Citado na página 27.
- WHITE, F. M. *Fluid Mechanics*. 4. ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1998. (McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering). Citado 2 vezes nas páginas 107 e 112.