

PEDRO MANUEL CONTRERAS BAZÁN

**Ideais injetivos e sobrejetivos de polinômios  
homogêneos entre espaços de Banach**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
2021

PEDRO MANUEL CONTRERAS BAZÁN

# Ideais injetivos e sobrejetivos de polinômios homogêneos entre espaços de Banach

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

**Área de Concentração:** Matemática.

**Linha de Pesquisa:** Ideais de polinômios homogêneos e operadores multilineares em espaços de Banach.

**Orientador:** Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG  
2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

B362 Bazán, Pedro Manuel Contreras, 1996-  
2021 Ideais injetivos e sobrejetivos de polinômios  
homogêneos entre espaços de Banach [recurso eletrônico]  
/ Pedro Manuel Contreras Bazán. - 2021.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de  
Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.276>

Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo,  
1962-, (Orient.). II. Universidade Federal de  
Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091


**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática  
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902  
 Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.posgrad.famat.ufu.br - pgmat@famat.ufu.br


**ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO**

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 95, PPMAT				
Data:	25 de junho de 2021	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	15:30
Matrícula do Discente:	11912MAT009				
Nome do Discente:	Pedro Manuel Contreras Bazán				
Título do Trabalho:	Ideais injetivos e sobrejetivos de polinômios homogêneos entre espaços de Banach				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Análise Funcional e Equações Diferenciais				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Teoria dos espaços de Banach: produtos tensoriais topológicos, ideais de operadores lineares, multilineares e polinomiais e algebrabilidade em espaços de funções holomorfas.				

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Mconf-RNP, em conformidade com a PORTARIA Nº 36, DE 19 DE MARÇO DE 2020 da COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR - CAPES, pela Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Nacib André Gurgel e Albuquerque - UFPB; Gustavo da Silva Araújo - UEPB e Geraldo Márcio de Azevedo Botelho - FAMAT/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Nacib André Gurgel e Albuquerque, Usuário Externo**, em 25/06/2021, às 16:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo da Silva Araújo, Usuário Externo**, em 25/06/2021, às 16:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Geraldo Marcio de Azevedo Botelho, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/06/2021, às 16:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2756301** e o código CRC **E76EC5CE**.

# Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais Francisco Contreras e María Jesús Bazán.

# Agradecimentos

Ao meu orientador Geraldo Botelho, pela paciência, confiança, apoio e contribuição neste trabalho sem os quais este não estaria finalizado.

À minha família, especialmente aos meus pais Francisco e María Jesús, pela compreensão, apoio e palavras de ânimo.

Aos professores da pós-graduação, pela contribuição na minha formação acadêmica.

Aos meus colegas do mestrado, pelo apoio e amizade.

À agência de fomento CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos professores Nacib Albuquerque e Gustavo Araújo por aceitarem o convite para compor a banca examinadora deste trabalho.

Bazán, P. M. C. *Ideais injetivos e sobrejetivos de polinômios homogêneos entre espaços de Banach*. 2021. 108 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

## Resumo

O principal objetivo desta dissertação é estudar os ideais injetivos e sobrejetivos de polinômios homogêneos entre espaços de Banach. Primeiramente faremos uma breve exposição sobre polinômios homogêneos e ideais de polinômios homogêneos. Em seguida estudamos os espaços  $\ell_\infty(\Gamma)$  e  $\ell_1(\Gamma)$ , que reúnem famílias escalares indexadas em um conjunto arbitrário não vazio  $\Gamma$ , munidos da norma do supremo e da norma da soma, respectivamente, assim como as injeções e sobrejeções métricas e as propriedades de extensão e levantamento desses espaços. Posteriormente estudamos os ideais injetivos de polinômios, com ênfase na envoltória injetiva e na descrição da envoltória injetiva de um ideal de composição. Finalmente fazemos um estudo análogo para o caso de ideais sobrejetivos de polinômios. Aplicações para as descrições das envoltórias injetiva e sobrejetiva dos ideais de composição são apresentadas.

*Palavras-chave:* espaços de Banach, polinômios homogêneos, ideais de polinômios, ideais de composição, ideais injetivos, ideais sobrejetivos.



## Abstract

The main purpose of this dissertation is to study injective and surjective ideals of homogeneous polynomials between Banach spaces. First we briefly sketch the theory of homogeneous polynomials and polynomial ideals. Next we study the spaces  $\ell_\infty(\Gamma)$  and  $\ell_1(\Gamma)$ , formed by scalar families indexed by an arbitrary non void set  $\Gamma$  endowed with the supremum norm and the sum norm, respectively, as well as metric injections and surjections and extension and lifting properties of such spaces. Then, injective polynomial ideals are investigated, with a special attention to the injective hull and to the description of the injective hull of a composition ideal. Finally we undertake a similar study concerning surjective polynomial ideals. Applications of the descriptions of the injective and surjective hulls of composition ideals are provided.

*Keywords:* Banach spaces, homogeneous polynomials, polynomial ideals, composition ideals, injective ideals, surjective ideals.

# Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$X_1, \dots, X_m, X$ e $Y$	espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$
$E_1, \dots, E_m, E$ e $F$	espaços vetoriais ou espaços normados ou espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$
$u, v, t$	operadores lineares contínuos
$L(E; F)$	espaço dos operadores lineares de $E$ em $F$
$E^*$	dual algébrico do espaço vetorial $E$
$\mathcal{L}(E; F)$	espaço dos operadores lineares contínuos de $E$ em $F$
$E'$	dual topológico do espaço normado $E$
$E''$	bidual topológico do espaço normado $E$
$B_E$	bola unitária fechada do espaço normado $E$
$\mathring{B}_E$	bola unitária aberta do espaço normado $E$
$\ell_p(E)$	$\left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \subset E : \sum_{n=1}^\infty \ x_n\ ^p < \infty \right\}$
$\ell_\infty(E)$	$\left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \subset E : \sup_{n \in \mathbb{N}} \ x_n\  < \infty \right\}$
$\ell_p^w(E)$	$\left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \subset E : \sum_{n=1}^\infty  \varphi(x_n) ^p < \infty \text{ para todo } \varphi \in E' \right\}$
$\Gamma(A)$	envoltória absolutamente convexa do subconjunto $A$ de um espaço vetorial
$E^m$	$E \times \overset{(m)}{\dots} \times E$
$L(E_1, \dots, E_m; F)$	espaço das aplicações $m$ -lineares de $E_1 \times \dots \times E_m$ em $F$
$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$	espaço das aplicações $m$ -lineares contínuas de $E_1 \times \dots \times E_m$ em $F$
$A, B$	aplicações multilineares
$L(E_1, \dots, E_m)$	$L(E_1, \dots, E_m; \mathbb{K})$
$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m)$	$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \mathbb{K})$

$L({}^m E; F)$	$L(E, \binom{m}{\cdot}, E; F)$
$\mathcal{L}({}^m E; F)$	$\mathcal{L}(E, \binom{m}{\cdot}, E; F)$
$L^s({}^m E; F)$	espaço das aplicações $m$ -lineares simétricas de $E^m$ em $F$
$\mathcal{L}^s({}^m E; F)$	espaço das aplicações $m$ -lineares contínuas simétricas de $E^m$ em $F$
$Ax^m$	$A(x, \binom{m}{\cdot}, x)$ , se $A$ é uma aplicação $m$ -linear
$P({}^m E; F)$	espaço dos polinômios $m$ -homogêneos de $E$ em $F$
$\mathcal{P}({}^m E; F)$	espaço dos polinômios $m$ -homogêneos contínuos de $E$ em $F$
$\widehat{A}$	polinômio homogêneo associado à aplicação multilinear $A$ , definido por $\widehat{A}(x) = A(x, \binom{m}{\cdot}, x)$
$\check{P}$	aplicação multilinear simétrica que satisfaz $\check{P}(x, \binom{m}{\cdot}, x) = P(x)$ para todo $x \in E$ , onde $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$
$\varphi^m \otimes b$	polinômio homogêneo contínuo dado por $(\varphi^m \otimes b)(x) = \varphi(x)^m \cdot b$ , onde $\varphi \in E'$ e $b \in F$
$\mathcal{P}_f({}^m E; F)$	conjunto dos polinômios $m$ -homogêneos contínuos de tipo finito entre os espaços normados $E$ e $F$
$x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$	tensor elementar definido por $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m(A) = A(x_1, \dots, x_m)$ para toda aplicação $A \in L(E_1, \dots, E_m)$
$E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$	produto tensorial dos espaços de Banach $E_1, \dots, E_m$ definido como o subespaço do dual algébrico $L(E_1, \dots, E_m)^*$ gerado pelos tensores elementares
$\pi$	norma projetiva definida em $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$
$\otimes^m E$	$E \otimes \binom{m}{\cdot} \otimes E$
$\otimes^{m,s} E$	produto tensorial simétrico de $E$ , definido como o subespaço do produto tensorial $\otimes^m E$ gerado pelos tensores da forma $x \otimes \binom{m}{\cdot} \otimes x$ , $x \in E$
$\otimes_{\pi}^{m,s} E$	espaço normado $(\otimes^{m,s} E, \pi)$
$\widehat{\otimes}_{\pi}^{m,s} E$	completamento do espaço normado $\otimes_{\pi}^{m,s} E$
$\delta_m$	polinômio $m$ -homogêneo canônico de $E$ em $\widehat{\otimes}_{\pi}^{m,s} E$ , dado por $\delta_m(x) = x \otimes \binom{m}{\cdot} \otimes x$
$P_L$	linearização do polinômio $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$ , definida de $\widehat{\otimes}_{\pi}^{m,s} E$ em $F$
$\pi_s$	norma $s$ -projetiva definida em $\otimes^{m,s} E$
$\otimes_{\pi_s}^{m,s} E$	espaço normado $(\otimes^{m,s} E, \pi_s)$
$\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E$	completamento do espaço normado $\otimes_{\pi_s}^{m,s} E$
$\delta_{m,s}$	polinômio $m$ -homogêneo canônico de $E$ em $\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E$ , dado por $\delta_{m,s}(x) = x \otimes \binom{m}{\cdot} \otimes x$
$P_{L,s}$	linearização do polinômio $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$ , definida de $\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E$ em $F$

$\otimes^{m,s}u$	produto tensorial simétrico do operador $u \in \mathcal{L}(E; F)$ por ele mesmo $m$ -vezes, definido de $\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E$ em $\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} F$
$\mathcal{I}$	ideal de operadores lineares
$\mathcal{F}$	ideal dos operadores de posto finito
$\mathcal{A}$	ideal dos operadores aproximáveis
$\mathcal{K}$	ideal dos operadores compactos
$\mathcal{W}$	ideal dos operadores fracamente compactos
$\Pi_p$	ideal dos operadores absolutamente $p$ -somantes
$\mathcal{CC}$	ideal dos operadores completamente contínuos
$\mathcal{I}^{\text{dual}}$	dual do ideal de operadores $\mathcal{I}$
$\mathcal{Q}$	ideal de polinômios (homogêneos)
$\mathcal{Q}_m$	$\bigcup \{ \mathcal{Q}(^m E; F) : E \text{ e } F \text{ são espaços de Banach} \}$ , para $m$ em $\mathbb{N}$ fixo
$\mathcal{P}_f$	ideal dos polinômios de tipo finito
$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$	ideal dos polinômios de posto finito
$\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$	ideal dos polinômios aproximáveis, na norma usual, por polinômios de posto finito
$\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$	ideal dos polinômios compactos
$\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$	ideal dos polinômios fracamente compactos
$\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$	ideal de polinômios de composição
$\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}$	dual polinomial do ideal de operadores $\mathcal{I}$
$\Gamma$	conjunto não vazio qualquer
$(\lambda_i)_{i \in \Gamma}$	família indexada de elementos de $\mathbb{K}$ , isto é, função de $\Gamma$ em $\mathbb{K}$
$(x_i)_{i \in \Gamma}$	família indexada de elementos de um espaço normado $E$ , isto é, função de $\Gamma$ em $E$
$\mathbb{K}^{\Gamma}$	conjunto das funções de $\Gamma$ em $\mathbb{K}$
$\ell_{\infty}(\Gamma)$	$\left\{ (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \mathbb{K}^{\Gamma} : \sup_{i \in \Gamma}  \lambda_i  < \infty \right\}$
$\  \cdot \ _{\infty}$	norma em $\ell_{\infty}(\Gamma)$ definida por $\ (\lambda_i)_{i \in \Gamma}\ _{\infty} = \sup_{i \in \Gamma}  \lambda_i $
$I_E: E \longrightarrow \ell_{\infty}(B_{E'})$	injeção métrica canônica
$\ell_1(\Gamma)$	$\left\{ (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \mathbb{K}^{\Gamma} : \sum_{i \in \Gamma}  \lambda_i  < \infty \right\}$
$\  \cdot \ _1$	norma em $\ell_1(\Gamma)$ definida por $\ (\lambda_i)_{i \in \Gamma}\ _1 = \sum_{i \in \Gamma}  \lambda_i $
$Q_E: \ell_1(B_E) \longrightarrow E$	sobrejeção métrica canônica
$\mathcal{Q}^{\text{inj}}$	envoltória injetiva do ideal de polinômios $\mathcal{Q}$
$(\mathcal{Q}_m)^{\text{inj}}$	envoltória injetiva do ideal de polinômios $m$ -homogêneos $\mathcal{Q}_m$ , para $m$ em $\mathbb{N}$ fixo

$\mathcal{I}^{\text{inj}}$	envoltória injetiva do ideal de operadores $\mathcal{I}$
$\mathcal{Q}^{\text{sur}}$	envoltória sobrejetiva do ideal de polinômios $\mathcal{Q}$
$(\mathcal{Q}_m)^{\text{sur}}$	envoltória sobrejetiva do ideal de polinômios $m$ -homogêneos $\mathcal{Q}_m$ , para $m$ em $\mathbb{N}$ fixo
$\mathcal{I}^{\text{sur}}$	envoltória sobrejetiva do ideal de operadores $\mathcal{I}$
$C_{\mathcal{I}}(F)$	coleção dos subconjuntos $\mathcal{I}$ -limitados do espaço de Banach $F$
$\mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^m E; F)$	conjunto dos polinômios $m$ -homogêneos $\mathcal{I}$ -limitados entre os espaços de Banach $E$ e $F$
$\mathcal{L}_{\mathcal{I}}(E; F)$	$\mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^1 E; F)$ .

# Sumário

Resumo	viii
Abstract	ix
Lista de Símbolos	x
Introdução	1
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Definições e resultados de Análise Funcional . . . . .	4
1.2 Polinômios homogêneos . . . . .	9
1.3 O produto tensorial simétrico projetivo . . . . .	18
1.4 Ideais de operadores lineares . . . . .	23
1.5 Ideais de polinômios homogêneos . . . . .	27
<b>2 Os espaços <math>\ell_\infty(\Gamma)</math> e <math>\ell_1(\Gamma)</math></b>	<b>33</b>
2.1 O espaço $\ell_\infty(\Gamma)$ e a propriedade da extensão métrica . . . . .	33
2.2 O espaço $\ell_1(\Gamma)$ e a propriedade do levantamento métrico . . . . .	38
<b>3 Ideais injetivos de polinômios homogêneos</b>	<b>57</b>
3.1 Definição e primeiros exemplos . . . . .	58
3.2 A envoltória injetiva . . . . .	60
3.3 As propriedades da dominação forte e fraca . . . . .	66
3.4 A envoltória injetiva de um ideal de composição . . . . .	69
<b>4 Ideais sobrejetivos de polinômios homogêneos</b>	<b>74</b>
4.1 Definição e primeiros exemplos . . . . .	74
4.2 A envoltória sobrejetiva . . . . .	76
4.3 Propriedades de levantamento para polinômios . . . . .	85
4.4 Polinômios $\mathcal{I}$ -limitados e ideais de composição . . . . .	95
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>105</b>

# Introdução

A Análise Funcional (Linear) surgiu nas primeiras décadas do século 20 abstraindo os conceitos de convergência e continuidade. Essa importante disciplina matemática tem como principal meta estudar operadores lineares contínuos entre espaços normados. Um passo natural é estender esse estudo além da linearidade, e um dos primeiros passos nesse cenário é o estudo das aplicações multilineares e dos polinômios homogêneos. Além de ser um primeiro passo na teoria não linear, os polinômios homogêneos são importantes devido a sua estreita relação com as funções holomorfas em dimensão infinita. No início da teoria, em meados do século passado, polinômios homogêneos eram apenas um passo no estudo de holomorfia em dimensão infinita; mas, ao longo das últimas décadas, polinômios homogêneos e espaços de polinômios homogêneos têm sido estudados exaustivamente sob a perspectiva da extensão da teoria para o caso não linear. É nessa linha que o estudo empreendido nesta dissertação se encaixa.

Uma das subáreas mais frutíferas da Análise funcional é a teoria de ideais de operadores (lineares). Historicamente, os fatos remontam à década de 1960 com a redescoberta dos trabalhos de A. Grothendieck, quando ficou evidente a importância de se estudar classes especiais de operadores lineares contínuos entre espaços de Banach. Posteriormente, essa teoria foi sistematizada por A. Pietsch na década de 1970, quem teve o intuito de unificar o estudo de várias classes de operadores lineares que vinham sendo estudados separadamente. A sistematização de Pietsch culminou com seu livro [33]. Os ideais de operadores são classes de operadores lineares contínuos entre espaços de Banach que se comportam de maneira similar aos ideais da Álgebra no sentido de que satisfazem a seguinte propriedade, chamada de propriedade de ideal:

Se  $u: E \rightarrow F$  é um operador linear contínuo entre espaços de Banach que pertence ao ideal  $\mathcal{I}$ , então para quaisquer operadores lineares contínuos entre espaços de Banach  $v: G \rightarrow E$  e  $t: F \rightarrow H$ , a composição  $t \circ u \circ v: G \rightarrow H$  também pertence a  $\mathcal{I}$ .

$$G \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{t} H$$

Em 1983, o próprio Pietsch esboçou a teoria de ideais de aplicações multilineares em [34]. Tal ideia foi imediatamente adaptada para polinômios homogêneos, desde então, uma vasta literatura no assunto tem sido produzida, recomendamos ao leitor as referências [2, 3, 4, 10, 12, 13, 14, 26, 30, 31, 34, 41, 44]. Nessa teoria, uma classe de grande destaque são os ideais de composição de polinômios (homogêneos), cuja importância decorre do fato de que muitas classes de polinômios que foram/são estudadas por sua própria importância, como por exemplo os polinômios de posto finito, compactos e fracamente compactos, são ideais de composição.

As noções de ideais injetivo e sobrejetivo e de envoltórias injetiva e sobrejetiva aparecem inicialmente para ideais de operadores lineares e posteriormente são generalizadas de forma natural para ideais de polinômios. A seguir mencionaremos algumas razões que justificam a importância dos ideais injetivos e sobrejetivos. Os ideais injetivos possuem estreita relação com as injeções métricas (ou isometrias lineares) e com a restrição de contradomínio de um operador. Os ideais sobrejetivos possuem proximidade com as chamadas sobrejeções métricas e, conseqüentemente, com os espaços quocientes.

Outra razão é a existência de diversas classes relevantes de operadores e de polinômios que são injetivos e sobrejetivos.

Os objetivos desta dissertação são:

- Provar que os espaços  $\ell_\infty(\Gamma)$  possuem a propriedade da extensão métrica e que os espaços  $\ell_1(\Gamma)$  possuem a propriedade do levantamento métrico.
- Definir as envoltórias injetiva e sobrejetiva de um ideal de polinômios, bem como os ideais injetivos e sobrejetivos, apresentar demonstrações completas e detalhadas das principais propriedades desses conceitos e exibir exemplos ilustrativos.
- Descrever as envoltórias injetiva e sobrejetiva de um ideal de polinômios de composição e obter aplicações dessas descrições.

Em seguida descreveremos como o trabalho está organizado. No primeiro capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados que nos ajudaram no desenvolvimento da dissertação, principalmente no desenvolvimento dos Capítulos 3 e 4. Por não serem o objeto central de estudo, a grande maioria de resultados são apresentados sem demonstração e referências são fornecidas. Este capítulo é dividido em cinco seções. A primeira é dedicada a definições e resultados básicos da Análise Funcional, os quais serão úteis no decorrer da dissertação. Na segunda seção apresentaremos a teoria básica de aplicações multilineares e polinômios homogêneos. Na terceira seção faremos um breve estudo do produto tensorial simétrico projetivo. Os principais resultados desta seção dizem respeito às linearizações de polinômios homogêneos. Estes resultados serão úteis para enunciar uma caracterização importante dos ideais de polinômios de composição, e posteriormente para descrever as envoltórias injetiva e sobrejetiva de um ideal de composição. Na quarta seção apresentaremos alguns conceitos da teoria de ideais de operadores (lineares) e alguns exemplos destes, os quais serão utilizados para dar aplicações das formulas das envoltórias injetiva e sobrejetiva de um ideal de composição. Na quinta seção apresentaremos alguns conceitos da teoria de ideais de polinômios e alguns exemplos destes, bem como os ideais de composição. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [1, 10, 11, 19, 28, 37, 38, 41, 42]

O segundo capítulo é dividido em duas seções e é dedicado a duas classes de espaços de Banach que não são muito comuns na literatura. Na primeira seção estudamos os espaços  $\ell_\infty(\Gamma)$  que serão essenciais na teoria de ideais injetivos, bem como as injeções métricas e a injeção métrica canônica; e também provaremos que  $\ell_\infty(\Gamma)$  tem a chamada *propriedade da extensão métrica*. Na segunda seção estudaremos os espaços  $\ell_1(\Gamma)$ , que serão essenciais na teoria de ideais sobrejetivos, bem como as sobrejeções métricas e a sobrejeção métrica canônica; e também provaremos que  $\ell_1(\Gamma)$  tem a chamada *propriedade de levantamento métrico*. As principais referências utilizadas no capítulo foram [20, 33].



O terceiro capítulo é dividido em quatro seções e é dedicado aos ideais injetivos de polinômios. Nas duas primeiras seções estudaremos as principais propriedades dos ideais injetivos de polinômios e da envoltória injetiva de um ideal de polinômios. Exemplos ilustrativos serão apresentados. Na terceira seção estudaremos as chamadas *propriedades de dominação*, e veremos na última seção que uma dessas propriedades nos ajudará a descrever a envoltória injetiva de um ideal de composição. Na última seção também forneceremos aplicações dessa descrição e provaremos que a chamada *propriedade de dominação forte* não caracteriza aos ideais injetivos de polinômios. As principais referências utilizadas no capítulo foram [13, 44].

O quarto capítulo é dividido em quatro seções e é dedicado aos ideais sobrejetivos de polinômios. Nas duas primeiras seções deste capítulo, estudaremos as principais propriedades dos ideais sobrejetivos de polinômios e da envoltória sobrejetiva de um ideal de polinômios. Exemplos ilustrativos serão apresentados. Na segunda seção estudaremos também a sobrejetividade dos ideais dos polinômios múltiplo  $p$ -somantes e dos polinômios  $p$ -dominados. Na terceira seção estudaremos as propriedades de levantamento para polinômios que nos ajudarão a descrever a envoltória sobrejetiva de um ideal de composição na última seção. Na última seção daremos também aplicações dessa descrição e algumas caracterizações de ideais sobrejetivos de composição. Para isso estudaremos primeiro os chamados *polinômios  $\mathcal{I}$ -limitados*. As principais referências utilizadas no capítulo foram [2, 4].

Pedro Manuel Contreras Bazán

Uberlândia-MG, 25 de junho de 2021.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados que nos ajudaram no desenvolvimento da dissertação, principalmente no desenvolvimento dos Capítulos 3 e 4. Por não serem o objeto central de estudo, a grande maioria dos resultados são apresentados sem demonstração e, para benefício do leitor, referências são fornecidas.

Ao longo da dissertação,  $\mathbb{K}$  denota o corpo dos números reais  $\mathbb{R}$  ou o corpo dos números complexos  $\mathbb{C}$ , e todos os espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$  considerados são distintos de  $\{0\}$ .

### 1.1 Definições e resultados de Análise Funcional

As principais referências usadas na elaboração desta seção foram os livros [11] e [28].

**Definição 1.1.1.** Seja  $E$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Uma *norma* em  $E$  é uma função

$$\|\cdot\|: E \longrightarrow \mathbb{R},$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1)  $\|x\| \geq 0$  para todo  $x \in E$  e  $\|x\| = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ .

(N2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  para todos  $\lambda \in \mathbb{K}$  e  $x \in E$ .

(N3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para quaisquer  $x, y \in E$ .

Neste caso o par  $(E, \|\cdot\|)$  é chamado de *espaço vetorial normado*, ou simplesmente *espaço normado*. Um espaço normado  $E$  que é completo na métrica definida por

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ para todos } x, y \in E,$$

é chamado de *espaço de Banach*.

Ao longo desta dissertação, os símbolos  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$  denotarão espaços normados sobre o corpo  $\mathbb{K}$ ,  $L(E; F)$  denotará o espaço vetorial dos operadores lineares de  $E$  em  $F$ ,  $\mathcal{L}(E; F)$  denotará o espaço normado dos operadores lineares contínuos de  $E$  em  $F$ ,  $E^*$  denotará  $L(E; \mathbb{K})$ ,  $E'$  denotará  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e  $E''$  denotará  $(E')'$ . Denotaremos também por  $B_E$  a bola unitária fechada de  $E$ , por  $\mathring{B}_E$  a bola unitária aberta de  $E$  e por  $\text{span } A$  o espaço gerado pelo subconjunto  $A$  de  $E$ .

A correspondência

$$u \in \mathcal{L}(E; F) \mapsto \|u\| = \sup_{x \in B_E} \|u(x)\|$$

é uma norma em  $\mathcal{L}(E; F)$  que faz desse espaço um espaço de Banach quando  $F$  for Banach. É fácil ver que

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$$

para todos  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  e  $x \in E$  e que

$$\|u\| = \inf\{C > 0 : \|u(x)\| \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in E\}.$$

As seguintes fórmulas alternativas para a norma de um operador são apresentadas sem demonstração por serem muito conhecidas.

**Proposição 1.1.2.** [11, Exercício 2.7.8] *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados e  $u: E \rightarrow F$  linear e contínuo. Então*

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|<1} \|u(x)\|.$$

**Definição 1.1.3.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados.

- (a) Um operador  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  é chamado de *isomorfismo topológico*, ou simplesmente *isomorfismo*, se for bijetor e sua inversa  $u^{-1}: F \rightarrow E$  - que é sempre linear - for contínua. Dizemos que os espaços  $E$  e  $F$  são *topologicamente isomorfos*, ou simplesmente *isomorfos*, se existir um isomorfismo topológico de  $E$  em  $F$ .
- (b) Um operador  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  é chamado de *isomorfismo isométrico* se for sobrejetor e  $\|u(x)\| = \|x\|$  para todo  $x \in E$ . É claro que todo isomorfismo isométrico é também um isomorfismo topológico. Dizemos que os espaços  $E$  e  $F$  são *isomorfos isometricamente* se existir um isomorfismo isométrico de  $E$  em  $F$ .

**Definição 1.1.4.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados.

- (a) Dizemos que  $E$  contém uma *cópia isomorfa* de  $F$  se  $E$  contém um subespaço isomorfo ao espaço  $F$ .
- (b) Dizemos que  $E$  contém uma *cópia isométrica* de  $F$  se  $E$  contém um subespaço isomorfo isometricamente a  $F$ .

**Proposição 1.1.5.** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $F$  um subespaço vetorial de  $E$ . Então  $F$  é um espaço de Banach, com a norma induzida de  $E$ , se, e somente se,  $F$  é fechado em  $E$ .*

*Demonstração.* Veja [11, Proposição 1.1.1]. □

O resultado a seguir é bem conhecido.

**Proposição 1.1.6.** [11, Exercício 2.7.7] *Se um espaço normado  $E$  é isomorfo a um espaço de Banach, então  $E$  é também espaço de Banach.*

A seguir apresentamos uma versão do Teorema de Hahn-Banach e uma das suas aplicações, as quais serão úteis no desenvolvimento dessa dissertação.

**Proposição 1.1.7** (Teorema de Hahn-Banach). *Seja  $G$  um subespaço de um espaço normado  $E$  e seja  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{K}$  um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo  $\tilde{\varphi}: E \rightarrow \mathbb{K}$  cuja restrição a  $G$  coincide com  $\varphi$  e  $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$ .*

*Demonstração.* Veja [11, Corolário 3.1.3]. □

**Proposição 1.1.8.** *Sejam  $E$  um espaço normado e  $x \in E$ . Então*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\}.$$

*Demonstração.* Veja [11, Corolário 3.1.5]. □

**Proposição 1.1.9.** *Sejam  $E$  um espaço normado,  $F$  um espaço de Banach,  $E_0$  um subespaço vetorial de  $E$  e  $u: E_0 \rightarrow F$  um operador linear contínuo. Então existe um único operador linear contínuo  $\tilde{u}: \overline{E_0} \subset E \rightarrow F$  tal que  $\tilde{u}|_{E_0} = u$ . Mais ainda,  $\|\tilde{u}\| = \|u\|$ .*

*Demonstração.* Veja [39, Teorema 1.21]. □

**Definição 1.1.10.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados. Dizemos que um operador  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  é *de posto finito* se  $u(E)$  é um subespaço vetorial de dimensão finita de  $F$ . Denotamos por  $\mathcal{F}(E; F)$  o conjunto de todos os operadores de posto finito de  $E$  em  $F$ . É bem conhecido que  $\mathcal{F}(E; F)$  é subespaço vetorial de  $\mathcal{L}(E; F)$ .

A seguir introduzimos a noção de operador adjunto.

**Definição 1.1.11.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados e  $u: E \rightarrow F$  um operador linear contínuo. Definimos a função  $u': F' \rightarrow E'$  por

$$u'(\varphi)(x) = \varphi(u(x)) \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in F'.$$

A função  $u'$  é chamada de *adjunto* de  $u$ .

**Proposição 1.1.12.** *Seja  $u: E \rightarrow F$  um operador linear contínuo. Então  $u'$  é também um operador linear contínuo e  $\|u'\| = \|u\|$ .*

*Demonstração.* Veja [11, Proposição 4.3.11]. □

**Definição 1.1.13.** Seja  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência no espaço normado  $E$ . Diz-se que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n:$$

- (a) *converge* para  $x \in E$ , se a sequência das somas parciais  $\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)_{n=1}^{\infty}$  converge para  $x$ .
- (b) é *incondicionalmente convergente*, se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$  é convergente, qualquer que seja a função bijetora  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

**Proposição 1.1.14.** *Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  uma série incondicionalmente convergente em um espaço normado  $E$ . Se  $\sigma_1, \sigma_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  são funções bijetoras, então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_1(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_2(n)}.$$

*Demonstração.* Veja [11, Proposição 5.3.8]. □

A seguir faremos um breve estudo sobre espaços de seqüências em um espaço normado.

**Definição 1.1.15.** *Seja  $E$  um espaço normado.*

- (a) Dado  $1 \leq p < \infty$ , dizemos que uma seqüência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  em  $E$  é *fortemente  $p$ -somável* se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty.$$

Denotamos por  $\ell_p(E)$  o conjunto de todas as seqüências fortemente  $p$ -somáveis em  $E$ . Observe que  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$  se, e somente se,  $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ .

- (b) Dizemos que uma seqüência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  em  $E$  é *limitada* se

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty.$$

Denotamos por  $\ell_{\infty}(E)$  o conjunto de todas as seqüências limitadas em  $E$ .

**Proposição 1.1.16.**  *$\ell_p(E)$  é um espaço vetorial com as operações usuais de seqüências para todo  $p \in [1, \infty]$ .*

*Demonstração.* Veja [29, Proposição 2.1.2 e Proposição 2.3.2]. □

**Definição 1.1.17.** *Seja  $E$  um espaço normado e  $1 \leq p < \infty$ . Dizemos que uma seqüência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  em  $E$  é *fracamente  $p$ -somável* se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < \infty$$

para todo  $\varphi \in E'$ . Denotamos por  $\ell_p^w(E)$  o conjunto de todas as seqüências fracamente  $p$ -somáveis em  $E$ . Definimos também:

$$\ell_{\infty}^w(E) = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E : \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi(x_n)| < \infty \text{ para todo } \varphi \in E' \right\}.$$

**Proposição 1.1.18.** *Sejam  $E$  um espaço normado e  $1 \leq p < \infty$ . Então:*

- (a)  $\ell_p^w(E)$  é um espaço vetorial com as operações usuais de seqüências.  
 (b)  $\ell_{\infty}^w(E) = \ell_{\infty}(E)$ .  
 (c)  $\ell_p(E) \subset \ell_p^w(E)$ .

*Demonstração.* Veja [29, Proposição 2.4.2, Proposição 2.4.11 e Proposição 2.4.12].  $\square$

Dado  $1 \leq p \leq \infty$ , denotamos por  $p' \in [1, +\infty]$  o conjugado de  $p$ , isto é, o único número que satisfaz a equação  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . O espaço das sequências definidas a seguir foi introduzido por Cohen em 1973 [15].

**Definição 1.1.19.** Seja  $E$  um espaço normado e  $1 \leq p < \infty$ . Dizemos que uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  em  $E$  é *Cohen fortemente  $p$ -somável* se para qualquer sequência  $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p'}^w(E')$ , a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_n) \text{ é convergente.}$$

Denotamos por  $\ell_p\langle E \rangle$  o conjunto de todas as sequências Cohen fortemente  $p$ -somáveis em  $E$ .

**Proposição 1.1.20.** *Sejam  $E$  um espaço normado e  $1 \leq p < \infty$ . Então:*

- (a)  $\ell_p\langle E \rangle$  é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências.
- (b)  $\ell_p\langle E \rangle \subset \ell_p(E)$ .

*Demonstração.* Veja [29, Proposição 2.7.2 e Proposição 2.7.9].  $\square$

A seguir faremos um breve estudo sobre conjuntos absolutamente convexos.

**Definição 1.1.21.** Seja  $A$  um subconjunto do espaço vetorial  $E$ . Dizemos que:

- (a)  $A$  é *convexo* se  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in A$  para todos  $x, y \in A$  e  $\alpha \in [0, 1]$ .
- (b)  $A$  é *equilibrado* se  $\lambda x \in A$  para todos  $x \in A$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$  com  $|\lambda| \leq 1$ .
- (c)  $A$  é *absolutamente convexo* se  $A$  é convexo e equilibrado.

**Proposição 1.1.22.** *Um subconjunto  $A$  do espaço vetorial  $E$  é absolutamente convexo se, e somente se,  $\lambda x + \gamma y \in A$  para todos  $x, y \in A$  e  $\lambda, \gamma \in \mathbb{K}$  com  $|\lambda| + |\gamma| \leq 1$ .*

*Demonstração.* Veja [28, Theorem 4.2.8].  $\square$

**Proposição 1.1.23.** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais e  $u: E \rightarrow F$  um operador linear. Então:*

- (a)  $B_E$  é um conjunto absolutamente convexo.
- (b)  $u$  transforma conjuntos absolutamente convexos em  $E$  em conjuntos absolutamente convexos em  $F$ .

*Demonstração.* (a) Sejam  $x, y \in B_E$  e  $\lambda, \gamma \in \mathbb{K}$  com  $|\lambda| + |\gamma| \leq 1$ . Então

$$\|\lambda x + \gamma y\| \leq |\lambda| \cdot \|x\| + |\gamma| \cdot \|y\| \leq |\lambda| + |\gamma| \leq 1,$$

provando que  $\lambda x + \gamma y \in B_E$ . Segue que  $B_E$  é absolutamente convexo.

(b) Sejam  $A$  um subconjunto absolutamente convexo de  $E$ ,  $x, y \in A$  e  $\lambda, \gamma \in \mathbb{K}$  com  $|\lambda| + |\gamma| \leq 1$ . Como  $A$  é absolutamente convexo,  $\lambda x + \gamma y \in A$ . De

$$\lambda u(x) + \gamma u(y) = u(\lambda x + \gamma y)$$

segue que  $\lambda u(x) + \gamma u(y) \in u(A)$ , e consequentemente  $u(A)$  é absolutamente convexo.  $\square$

É fácil verificar que a interseção arbitrária de conjuntos absolutamente convexos é também um conjunto absolutamente convexo. Desta forma, podemos considerar a *envoltória absolutamente convexa* de um conjunto, definida a seguir.

**Definição 1.1.24.** Seja  $A$  um subconjunto do espaço vetorial  $E$ . A *envoltória absolutamente convexa*  $\Gamma(A)$  de  $A$  é a interseção de todos os conjuntos absolutamente convexos que contêm  $A$ .

É claro que  $\Gamma(A) \supset A$  e  $\Gamma(A)$  é absolutamente convexo. Consequentemente,  $A$  é absolutamente convexo se, e somente se,  $\Gamma(A) = A$ .

**Proposição 1.1.25.** *Seja  $A$  um subconjunto do espaço vetorial  $E$ . Então*

$$\Gamma(A) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in A \text{ e } |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n| \leq 1\}.$$

*Demonstração.* Veja [28, Theorem 4.2.11]. □

**Proposição 1.1.26.** *Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos do espaço vetorial  $E$ . Se  $A \subset B$  então  $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$ .*

*Demonstração.* Com efeito, como  $B \subset \Gamma(B)$ , temos  $A \subset \Gamma(B)$ . Desta forma,  $\Gamma(B)$  é um conjunto absolutamente convexo que contém  $A$ , e daí segue que  $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$ . □

## 1.2 Polinômios homogêneos

A Análise Funcional Linear tem como principal meta estudar operadores lineares contínuos entre espaços normados. No sentido de empreender um estudo além da linearidade, um dos primeiros passos é o estudo das aplicações multilineares e dos polinômios homogêneos.

Nesta seção apresentaremos primeiramente a teoria básica de aplicações multilineares pois os polinômios homogêneos, nosso principal objeto de estudo, são definidos a partir destas aplicações. Fica claro então que os polinômios homogêneos estão estreitamente relacionados às aplicações multilineares. Apresentaremos também nesta seção alguns exemplos ilustrativos de polinômios homogêneos.

Nossas principais referências para as teorias de aplicações multilineares e polinômios homogêneos foram as dissertações [1] e [42]. Outras boas referências para essas teorias são os livros [18] e [27].

**Definição 1.2.1.** Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $X_1, \dots, X_m, Y$  espaços vetoriais sobre o corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Dizemos que uma aplicação  $A: X_1 \times \cdots \times X_m \rightarrow Y$  é *m-linear* (ou *multilinear*) se é linear em cada uma de suas variáveis, isto é,

$$A(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_m) = \lambda A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) + A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_m),$$

para todos  $i = 1, \dots, m$ ,  $x_1 \in X_1, \dots, x_i, x'_i \in X_i, \dots, x_m \in X_m$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

O conjunto de todas as aplicações  $m$ -lineares de  $X_1 \times \cdots \times X_m$  em  $Y$  será denotado por  $L(X_1, \dots, X_m; Y)$ . Denotaremos também  $L(X_1, \dots, X_m) = L(X_1, \dots, X_m; \mathbb{K})$  e no caso em que  $X_1 = \cdots = X_m = X$ ,

$$L({}^m X; Y) = L(X, \dots, X; Y).$$

Consideremos também o conjunto de todas as funções de  $X_1 \times \cdots \times X_m$  em  $Y$ :

$$F(X_1 \times \cdots \times X_m; Y) = \{ f: X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y : f \text{ é uma função} \}.$$

É fácil verificar que as operações usuais de funções, descritas a seguir, fazem de  $F(X_1 \times \cdots \times X_m; Y)$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ :

- (a) A cada par de funções  $f, g \in F(X_1 \times \cdots \times X_m; Y)$ , fazemos corresponder a função  $f + g: X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$  definida por

$$(f + g)(x_1, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_m) + g(x_1, \dots, x_m).$$

- (b) A cada escalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  e cada função  $f \in F(X_1 \times \cdots \times X_m; Y)$ , fazemos corresponder a função  $\lambda f: X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$  definida por

$$(\lambda f)(x_1, \dots, x_m) = \lambda f(x_1, \dots, x_m).$$

É fácil verificar também que  $L(X_1, \dots, X_m; Y)$  é um subespaço vetorial de  $F(X_1 \times \cdots \times X_m; Y)$ . Consequentemente,  $L(X_1, \dots, X_m; Y)$  é um espaço vetorial com as operações usuais de funções. A partir de agora, consideraremos  $L(X_1, \dots, X_m; Y)$  sempre munido com as operações usuais de funções.

**Exemplo 1.2.2.** Sejam  $m \in \mathbb{N}$ ,  $X_1, \dots, X_m, Y$  espaços vetoriais,  $\varphi_1 \in X_1^*, \dots, \varphi_m \in X_m^*$  e  $b \in Y$ . A aplicação  $A: X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$  definida por

$$A(x_1, \dots, x_m) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_m(x_m) \cdot b,$$

é claramente  $m$ -linear. Uma combinação linear finita de aplicações  $m$ -lineares deste tipo é chamada de *aplicação  $m$ -linear de tipo finito*.

Estudaremos agora o caso em que  $X_1, \dots, X_m, Y$  são espaços vetoriais normados. Neste caso, daremos uma estrutura de espaço vetorial normado ao conjunto  $X_1 \times \cdots \times X_m$  e fará sentido considerar as aplicações  $m$ -lineares  $A: X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$  que são contínuas.

Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $E_1, \dots, E_m$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ . É fácil verificar que as operações descritas a seguir fazem de  $E_1 \times \cdots \times E_m$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ :

$$(a) \quad \begin{aligned} +: (E_1 \times \cdots \times E_m) \times (E_1 \times \cdots \times E_m) &\longrightarrow E_1 \times \cdots \times E_m \\ ((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) &\longmapsto (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m). \end{aligned}$$

$$(b) \quad \begin{aligned} \cdot: \mathbb{K} \times (E_1 \times \cdots \times E_m) &\longrightarrow E_1 \times \cdots \times E_m \\ (\lambda, (x_1, \dots, x_m)) &\longmapsto (\lambda x_1, \dots, \lambda x_m). \end{aligned}$$

**Definição 1.2.3.** Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $E_1, \dots, E_m$  espaços vetoriais normados. Para cada  $(x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$  definimos

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_m)\|_1 &= \|x_1\| + \cdots + \|x_m\|; \\ \|(x_1, \dots, x_m)\|_2 &= (\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_m\|^2)^{1/2}; \\ \|(x_1, \dots, x_m)\|_\infty &= \text{máx}\{\|x_1\|, \dots, \|x_m\|\}. \end{aligned}$$



**Proposição 1.2.4.** *Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $E_1, \dots, E_m$  espaços vetoriais normados.*

- (a) *As funções  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  e  $\|\cdot\|_\infty$  são normas equivalentes em  $E_1 \times \dots \times E_m$ .*
- (b) *Se  $E_1, \dots, E_m$  são espaços de Banach, então  $E_1 \times \dots \times E_m$  é um espaço de Banach com qualquer uma dessas três normas.*

*Demonstração.* Veja [42, Proposição 2.3 e Proposição 2.6]. □

Considerando em  $E_1 \times \dots \times E_m$  qualquer uma das normas equivalentes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  e  $\|\cdot\|_\infty$ , estudaremos as aplicações  $m$ -lineares de  $E_1 \times \dots \times E_m$  em  $F$  que são contínuas.

**Definição 1.2.5.** *Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $E_1, \dots, E_m, F$  espaços vetoriais normados. Para cada  $A \in L(E_1, \dots, E_m; F)$ , definimos  $\|A\| \in [0, +\infty]$  por*

$$\|A\| = \sup\{\|A(x_1, \dots, x_m)\| : x_1 \in B_{E_1}, \dots, x_m \in B_{E_m}\}.$$

**Proposição 1.2.6.** *Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $E_1, \dots, E_m, F$  espaços vetoriais normados. Para cada aplicação  $A \in L(E_1, \dots, E_m; F)$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a)  *$A$  é contínua.*
- (b)  *$A$  é contínua na origem.*
- (c) *Existe  $c \geq 0$  tal que  $\|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq c \|x_1\| \cdots \|x_m\|$  para todos  $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$ .*
- (d)  *$\|A\| < +\infty$ .*

*Demonstração.* Veja [42, Proposição 2.7]. □

O conjunto de todas as aplicações  $m$ -lineares contínuas de  $E_1 \times \dots \times E_m$  em  $F$  será denotado por  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ . Denotaremos também  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m) = \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \mathbb{K})$  e no caso em que  $E_1 = \dots = E_m = E$ ,

$$\mathcal{L}(^m E; F) = \mathcal{L}(E, \dots, E; F).$$

A seguir, veremos algumas propriedades da função  $A \mapsto \|A\|$ , e que essa função é uma norma em  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ , como indica a notação.

**Proposição 1.2.7.** *Sejam  $m \in \mathbb{N}$ ,  $E_1, \dots, E_m, F$  espaços vetoriais normados e  $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ . Então:*

- (a)  *$\|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_m\|$  para todos  $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$ .*
- (b)  *$\|A\| = \inf\{c \geq 0 : \|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq c \|x_1\| \cdots \|x_m\| \text{ para todos } x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m\}$ .*

*Demonstração.* Veja [42, Proposição 2.8]. □

**Proposição 1.2.8.** *Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $E_1, \dots, E_m, F$  espaços vetoriais normados. Então:*

- (a)  *$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$  é um subespaço vetorial de  $L(E_1, \dots, E_m; F)$ .*

(b) A função  $A \mapsto \|A\|$  é uma norma em  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ .

(c) Se  $F$  é um espaço de Banach, então  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$  é também um espaço de Banach.

*Demonstração.* Veja [42, Proposição 2.10 e Proposição 2.11]. □

Passamos agora a estudar as aplicações multilineares simétricas, as quais desempenharão um papel de destaque no estudo dos polinômios homogêneos. Com a finalidade de começar a estudar essas aplicações, consideraremos a partir de agora o caso particular em que  $E_1 = \dots = E_m = E$ . Por simplicidade, usaremos a notação  $E^m = E \times \overset{(m)}{\dots} \times E$ .

**Definição 1.2.9.** Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $E, F$  espaços vetoriais normados. Dizemos que uma aplicação  $A: E^m \rightarrow F$  é *simétrica* se

$$A(x_1, \dots, x_m) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$$

para todos  $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$  e  $\sigma \in S_m$ , onde  $S_m$  denota o conjunto das permutações dos  $m$  primeiros números naturais.

Note que a propriedade de simetria de uma aplicação não envolve as operações algébricas e nem as normas dos espaços  $E$  e  $F$ .

Os conjuntos das aplicações  $m$ -lineares simétricas e das aplicações  $m$ -lineares simétricas contínuas  $A: E^m \rightarrow F$  serão denotados por  $L^s(mE; F)$  e  $\mathcal{L}^s(mE; F)$ , respectivamente.

É fácil verificar que  $L^s(mE; F)$  e  $\mathcal{L}^s(mE; F)$  são subespaços vetoriais de  $L(mE; F)$  e  $\mathcal{L}(mE; F)$ , respectivamente.

Sejam  $n \in \mathbb{N}$  com  $n \leq m$  e  $A \in L(mE; F)$ . Para cada  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  e cada  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  com  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$ , usaremos a notação

$$Ax_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = A(x_1, \overset{(\alpha_1)}{\dots}, x_1, \dots, x_n, \overset{(\alpha_n)}{\dots}, x_n).$$

Em particular,  $Ax^m = A(x, \overset{(m)}{\dots}, x)$  para todo  $x \in E$ .

**Proposição 1.2.10.** Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $E, F$  espaços vetoriais. Para cada  $A \in L(mE; F)$ , define  $A^s: E^m \rightarrow F$  por

$$A^s(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}).$$

Então as seguintes propriedades são satisfeitas:

(a)  $A^s \in L^s(mE; F)$ .

(b)  $A^s = A$  se, e somente se,  $A$  é simétrica.

(c)  $(A^s)^s = A^s$ .

(d) O operador  $s: L(mE; F) \rightarrow L^s(mE; F)$ , definido por  $s(A) = A^s$ , é linear.

(e) Para todo  $x \in E$ ,  $Ax^m = A^s x^m$ .

*Demonstração.* Veja [1, Proposição 1.1.6]. □

A aplicação  $A^s$  é chamada de *simetrização* da aplicação  $A$  e o operador  $s$  é chamado de *operador de simetrização*. A proposição acima, dentre outras consequências, mostra que  $s$  é uma projeção, isto é  $s \circ s = s$ , de  $L^s(mE; F)$  sobre  $L^s(mE; F)$ .

Finalizaremos esse breve estudo das aplicações multilineares simétricas com a Fórmula de Polarização. Esse resultado será de grande valia no estudo dos polinômios homogêneos.

**Proposição 1.2.11** (Fórmula de Polarização). *Sejam  $m \in \mathbb{N}$ ,  $E, F$  espaços vetoriais e  $A \in L^s(mE; F)$ . Então para todos  $x_0, x_1, \dots, x_m \in E$ , tem-se a fórmula*

$$A(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\delta_1, \dots, \delta_m \in \{-1, 1\}} \delta_1 \cdots \delta_m A(x_0 + \delta_1 x_1 + \cdots + \delta_m x_m)^m.$$

*Demonstração.* Veja [27, Theorem 1.10]. □

**Observação 1.2.12.** O conjunto de índices do somatório acima é  $\{-1, 1\}^m$  e a quantidade de parcelas do somatório é  $2^m$ .

Passamos agora a estudar os polinômios homogêneos entre espaços vetoriais normados, os quais são um dos principais objetos de estudo desta dissertação. As funções

$$p_m: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad p_m(t) = t^m, \quad m \in \mathbb{N},$$

são de fundamental importância na Análise. É claro que cada  $p_m$  é um polinômio. A propriedade que torna essas funções tão especiais é a seguinte:

$$p_m(\lambda t) = \lambda^m p_m(t) \text{ para todos } t, \lambda \in \mathbb{K}. \quad (1.1)$$

Por isso,  $p_m$  é chamado de polinômio  $m$ -homogêneo ou polinômio homogêneo de grau  $m$ . Como não há potências em espaços vetoriais, não podemos definir essas funções em espaços vetoriais. A alternativa é buscar funções que satisfaçam a propriedade (1.1).

**Definição 1.2.13.** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais normados e  $m \in \mathbb{N}$ . Uma aplicação  $P: E \longrightarrow F$  será denominada *polinômio  $m$ -homogêneo* ou *polinômio homogêneo de grau  $m$*  se existir  $A \in L^s(mE; F)$  tal que  $P(x) = Ax^m$  para todo  $x \in E$ .

Vejamus que, de fato, a propriedade (1.1) está satisfeita: usando a  $m$ -linearidade da aplicação  $A$ , temos:

$$P(\lambda x) = A(\lambda x)^m = A(\lambda x, \overset{(m)}{!}, \lambda x) = \lambda^m A(x, \overset{(m)}{!}, x) = \lambda^m Ax^m = \lambda^m P(x),$$

para todos  $x \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Os conjuntos dos polinômios  $m$ -homogêneos de  $E$  em  $F$  e dos polinômios  $m$ -homogêneos contínuos de  $E$  em  $F$  serão denotados por  $P^m(E; F)$  e  $\mathcal{P}^m(E; F)$ , respectivamente. No caso em que  $F = \mathbb{K}$ , denotamos

$$P^m(E) = P^m(E; \mathbb{K}) \quad \text{e} \quad \mathcal{P}^m(E) = \mathcal{P}^m(E; \mathbb{K}).$$

Consideremos também o conjunto de todas as funções de  $E$  em  $F$ :

$$F(E; F) = \{ f : E \longrightarrow F : f \text{ é uma função } \}.$$

É fácil verificar que  $F(E; F)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  com as operações usuais de funções e que  $P(mE; F)$  e  $\mathcal{P}(mE; F)$  são subespaços vetoriais de  $F(E; F)$ . Consequentemente,  $P(mE; F)$  e  $\mathcal{P}(mE; F)$  são espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$  com as operações usuais de funções. Note também que os polinômios 1-homogêneos são exatamente os operadores lineares.

**Definição 1.2.14.** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais normados e  $m \in \mathbb{N}$ . Para cada  $P \in P(mE; F)$ , definimos  $\|P\| \in [0, +\infty]$  por

$$\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : x \in B_E\}.$$

**Proposição 1.2.15.** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais normados e  $m \in \mathbb{N}$ . Para cada  $A \in L(mE; F)$ , considere a função

$$\widehat{A}: E \longrightarrow F, \quad \widehat{A}(x) = Ax^m.$$

Então as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (a) A correspondência  $A \longmapsto \widehat{A}$  induz um isomorfismo algébrico entre os espaços  $L^s(mE; F)$  e  $P(mE; F)$ .
- (b) Para toda  $A \in L^s(mE; F)$ ,

$$\|\widehat{A}\| \leq \|A\| \leq \frac{m!}{m^m} \|\widehat{A}\|.$$

*Demonstração.* Veja [1, Proposição 1.2.2]. □

**Observação 1.2.16.** Da Proposição 1.2.15 segue que dado um polinômio  $m$ -homogêneo  $P \in P(mE; F)$ , existe uma única aplicação  $m$ -linear simétrica  $A \in L^s(mE; F)$  satisfazendo

$$Ax^m = P(x)$$

para todo  $x \in E$ . Nesse caso denotamos  $\check{P} = A$ .

No próximo resultado, vamos caracterizar os polinômios homogêneos contínuos.

**Proposição 1.2.17.** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais normados,  $m \in \mathbb{N}$  e  $P \in P(mE; F)$ . Então as seguintes condições são equivalentes:

- (a)  $P$  é contínuo.
- (b)  $P$  é contínuo em algum ponto de  $E$ .
- (c)  $\|P\| < +\infty$ .
- (d) Existe  $c \geq 0$  tal que  $\|P(x)\| \leq c\|x\|^m$  para todo  $x \in E$ .

(e)  $\check{P}$  é contínua.

(f) Existe  $A \in \mathcal{L}(^m E; F)$  tal que  $P(x) = Ax^m$  para todo  $x \in E$ .

*Demonstração.* Veja [1, Proposição 1.2.7]. □

**Proposição 1.2.18.** *Sejam  $E, F$  espaços vetoriais normados e  $m \in \mathbb{N}$ . Então a função  $P \mapsto \|P\|$  é uma norma em  $\mathcal{P}(^m E; F)$ .*

*Demonstração.* Veja [1, Proposição 1.2.8]. □

Analogamente ao caso das aplicações multilineares, dado  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ , tem-se

$$\|P(x)\| \leq \|P\| \cdot \|x\|^m$$

para todo  $x \in E$ . Dai, conseguimos a seguinte caracterização para a norma de um polinômio homogêneo contínuo:

$$\|P\| = \inf\{c \geq 0 : \|P(x)\| \leq c \|x\|^m \text{ para todo } x \in E\}.$$

**Proposição 1.2.19.** *Sejam  $E, F$  espaços vetoriais normados e  $m \in \mathbb{N}$ . Então:*

(a) *A correspondência  $A \mapsto \hat{A}$  definida na Proposição 1.2.15 induz um isomorfismo topológico entre os espaços  $\mathcal{L}^s(^m E; F)$  e  $\mathcal{P}(^m E; F)$ .*

(b) *Se  $F$  é um espaço de Banach, então  $\mathcal{P}(^m E; F)$  é também um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Veja [1, Proposição 1.2.9 e Proposição 1.2.10]. □

Daremos agora alguns exemplos de polinômios homogêneos contínuos.

**Exemplo 1.2.20.** Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq p < \infty$ . A função  $P: \ell_{mp} \rightarrow \ell_p$  definida por

$$P((\xi_j)_{j=1}^\infty) = (\xi_j \cdots \xi_j)_{j=1}^\infty = (\xi_j^m)_{j=1}^\infty,$$

é um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo (veja [41, Exemplo 2.35]).

**Exemplo 1.2.21.** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais normados,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi \in E'$  e  $b \in F$ . Definamos a função  $\varphi^m \otimes b: E \rightarrow F$  por

$$(\varphi^m \otimes b)(x) = (\varphi(x))^m b.$$

Então

$$\varphi^m \otimes b \in \mathcal{P}(^m E; F) \text{ e } \|\varphi^m \otimes b\| = \|\varphi\|^m \cdot \|b\|.$$

Para a demonstração dessas afirmações veja [1, Exemplo 1.2.16].

**Definição 1.2.22.** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais normados e  $m \in \mathbb{N}$ . Dizemos que um polinômio homogêneo  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  é *de tipo finito* se existem  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in E'$  e  $b_1, \dots, b_k \in F$  tais que

$$P = \sum_{i=1}^k \varphi_i^m \otimes b_i.$$

Denotaremos o conjunto dos polinômios  $m$ -homogêneos de tipo finito de  $E$  em  $F$  por  $\mathcal{P}_f(mE; F)$ . Por definição,

$$\mathcal{P}_f(mE; F) = \text{span}\{\varphi^m \otimes b : \varphi \in E' \text{ e } b \in F\},$$

e portanto  $\mathcal{P}_f(mE; F)$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}(mE; F)$ .

**Exemplo 1.2.23.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi \in E'$  e  $u \in \mathcal{L}(E; F)$ . A função  $P: E \rightarrow F$  definida por

$$P(x) = (\varphi(x))^{m-1}u(x),$$

é um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo e  $\|P\| = \|\varphi\|^{m-1} \cdot \|u\|$  (veja [1, Exemplo 1.2.17]).

**Proposição 1.2.24.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados,  $m \in \mathbb{N}$  e  $P: E \rightarrow F$  um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo. Então

$$\|P\| = \sup_{\|x\| < 1} \|P(x)\|.$$

*Demonstração.* Com efeito, como

$$\{\|P(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| < 1\} \subset \{\|P(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\},$$

segue que

$$\sup_{\|x\| < 1} \|P(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| = \|P\|. \quad (1.2)$$

Por outro lado, denotemos

$$s = \sup_{\|x\| < 1} \|P(x)\|.$$

Sejam  $\alpha \in (0, 1)$  e  $x \in E$  tais que  $x \neq 0$ . Como  $\frac{\alpha x}{\|x\|}$  tem norma menor que 1, segue que

$$\|P(x)\| = \left\| P\left(\frac{\|x\|}{\alpha} \cdot \frac{\alpha x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{\|x\|^m}{\alpha^m} \cdot \left\| P\left(\frac{\alpha x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \frac{\|x\|^m}{\alpha^m} \cdot s = \left(\frac{s}{\alpha^m}\right) \cdot \|x\|^m.$$

Como o resultado acima vale também para  $x = 0$ , segue que

$$\|P\| \leq \frac{s}{\alpha^m}.$$

Fazendo  $\alpha \rightarrow 1^-$ , temos

$$\|P\| \leq s = \sup_{\|x\| < 1} \|P(x)\|, \quad (1.3)$$

e o resultado segue das equações (1.2) e (1.3).  $\square$

A seguir veremos alguns resultados sobre a composição de operadores multilineares com operadores lineares, e sobre a composição de polinômios homogêneos com operadores lineares. A composição à direita de um operador multilinear com operadores lineares, definida a seguir, é muito importante em nosso contexto.

**Definição 1.2.25.** Sejam  $m \in \mathbb{N}$ ,  $G_1, \dots, G_m$ ,  $E_1, \dots, E_m$  e  $F$  espaços normados,  $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ ,  $u_1 \in \mathcal{L}(G_1; E_1)$ ,  $\dots$ ,  $u_m \in \mathcal{L}(G_m; E_m)$ . Definimos o operador  $A \circ (u_1, \dots, u_m): G_1 \times \dots \times G_m \rightarrow F$  por

$$(A \circ (u_1, \dots, u_m))(x_1, \dots, x_m) = A(u_1(x_1), \dots, u_m(x_m)).$$

**Proposição 1.2.26.** Sejam  $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ ,  $u_1 \in \mathcal{L}(G_1; E_1)$ ,  $\dots$ ,  $u_m \in \mathcal{L}(G_m; E_m)$  e  $t \in \mathcal{L}(F; H)$ . Então o operador  $t \circ A \circ (u_1, \dots, u_m): G_1 \times \dots \times G_m \rightarrow H$  é  $m$ -linear, contínuo e

$$\|t \circ A \circ (u_1, \dots, u_m)\| \leq \|t\| \cdot \|A\| \cdot \|u_1\| \cdots \|u_m\|.$$

*Demonstração.* Veja [42, Proposição 4.15]. □

**Proposição 1.2.27.** Sejam  $G, E, F, H$  espaços normados,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \mathcal{L}(G; E)$ ,  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  e  $t \in \mathcal{L}(F; H)$ . Então:

(a) O operador  $t \circ P \circ u: G \rightarrow H$  é um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo e

$$(t \circ P \circ u)^\vee = t \circ \check{P} \circ (u, \dots, u).$$

(b)  $\|t \circ P \circ u\| \leq \|t\| \cdot \|P\| \cdot \|u\|^m$ .

*Demonstração.* (a) Consideremos o operador  $m$ -linear, contínuo e simétrico  $\check{P}: E^m \rightarrow F$  associado a  $P$ . Sabemos da Proposição 1.2.26 que

$$B = t \circ \check{P} \circ (u, \dots, u): G^m \rightarrow F$$

é um operador  $m$ -linear contínuo. Vejamos que  $\widehat{B} = t \circ P \circ u$ : para todo  $x \in G$ ,

$$B(x, \dots, x) = t(\check{P}(u(x), \dots, u(x))) = t(P(u(x))) = (t \circ P \circ u)(x).$$

Portanto,  $t \circ P \circ u$  é um polinômio  $m$ -homogêneo e segue da Proposição 1.2.17 que  $t \circ P \circ u$  é também contínuo. Para a segunda afirmação basta provar que  $t \circ \check{P} \circ (u, \dots, u)$  é um operador simétrico. Com efeito, dados  $x_1, \dots, x_m \in G$  e uma permutação  $\sigma \in S_m$ ,

$$\begin{aligned} B(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) &= t(\check{P}(u(x_{\sigma(1)}), \dots, u(x_{\sigma(m)}))) \\ &= t(\check{P}(u(x_1), \dots, u(x_m))) = B(x_1, \dots, x_m), \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue da simetria de  $\check{P}$ .

(b) Para todo  $x \in G$ ,

$$\begin{aligned} \|(t \circ P \circ u)(x)\| &= \|t(P(u(x)))\| \leq \|t\| \cdot \|P(u(x))\| \\ &\leq \|t\| \cdot \|P\| \cdot \|u(x)\|^m \\ &\leq (\|t\| \cdot \|P\| \cdot \|u\|^m) \cdot \|x\|^m. \end{aligned}$$

Consequentemente,  $\|t \circ P \circ u\| \leq \|t\| \cdot \|P\| \cdot \|u\|^m$ . □

A seguir introduzimos a definição do adjunto de Aron-Schottenloher [3].

**Definição 1.2.28.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $P: E \rightarrow F$  um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo. Definimos a função  $P': F' \rightarrow \mathcal{P}({}^m E)$  por

$$P'(\varphi)(x) = \varphi(P(x)) \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in F'.$$

A função  $P'$  é chamada de *adjunto de Aron-Schottenloher* de  $P$ .

**Proposição 1.2.29.** *Seja  $P: E \rightarrow F$  um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo. Então  $P'$  é um operador linear contínuo e  $\|P'\| = \|P\|$ .*

*Demonstração.* Veja [36, Proposição 2.1.3]. □

### 1.3 O produto tensorial simétrico projetivo

Nesta seção faremos um breve estudo do produto tensorial simétrico projetivo, o qual, como ficará claro mais adiante, é uma ferramenta central para o estudo de ideais de polinômios.

Iniciaremos a seção com uma breve exposição do produto tensorial (cheio) de espaços normados. O principal resultado da seção diz respeito à linearização de polinômios homogêneos (Teorema 1.3.5). Esse resultado nos será útil para enunciar uma caracterização importante dos ideais de polinômios de composição (Proposição 1.5.16), e posteriormente para descrever as envoltórias injetiva e sobrejetiva de um ideal de composição nas Seções 3.4 e 4.4, respetivamente.

As principais referências para o produto tensorial cheio de espaços normados foram [38, 42], e para a teoria do produto tensorial simétrico foram [19, 37].

Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $X_1, \dots, X_m$  espaços vetoriais. Dados  $x_1 \in X_1, \dots, x_m \in X_m$ , definimos a função

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_m: L(X_1, \dots, X_m) \rightarrow \mathbb{K}, \quad (x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)(A) = A(x_1, \dots, x_m).$$

É imediato que  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$  é linear e, portanto, pertence ao dual algébrico  $L(X_1, \dots, X_m)^*$  do espaço  $L(X_1, \dots, X_m)$ . O *produto tensorial* de  $X_1, \dots, X_m$  é o subespaço vetorial de  $L(X_1, \dots, X_m)^*$  gerado pelos funcionais da forma  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$ . Denotamos esse espaço por  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$  e chamamos seus elementos de *tensores*. Já seus geradores, isto é, os tensores da forma  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$ , com  $x_1 \in X_1, \dots, x_m \in X_m$ , são chamados de *tensores elementares*. Por definição, um tensor  $x \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$  se pode escrever da forma

$$x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_m^j,$$

onde  $k \in \mathbb{N}$  e  $x_i^j \in X_i$  para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, k$ , e é também conhecido que essa representação não é única.

**Proposição 1.3.1.** *Dados espaços normados  $E_1, \dots, E_m$ , a função  $\pi: E_1 \otimes \cdots \otimes E_m \rightarrow [0, +\infty)$  definida por*

$$\pi(x) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \cdots \|x_m^j\| : x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_m^j \right\},$$

*é uma norma em  $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ . Além disso,  $\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = \|x_1\| \cdots \|x_m\|$ .*



*Demonstração.* Veja [38, Proposition 2.1] ou [42, Proposição 3.3].  $\square$

A norma definida acima é chamada de *norma projetiva* e o espaço normado  $(E_1 \otimes \cdots \otimes E_m, \pi)$  é denotado por  $E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_m$ . No caso em que  $E_1, \dots, E_m$  são espaços de Banach, esse espaço é completo se, no máximo, um dos espaços  $E_1, \dots, E_m$  tem dimensão infinita, e é incompleto se pelo menos dois dentre eles forem de dimensão infinita (veja [42, Proposição 3.4] e [39, Teorema 3.24]). Como pretendemos trabalhar com espaços de dimensão infinita, consideraremos o completamento  $E_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_m$  de  $E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_m$ . O espaço completado é chamado de *produto tensorial projetivo*.

Dados espaços normados  $E_1, \dots, E_m$ , definimos a função

$$\sigma_m: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_m, \quad \sigma_m(x_1, \dots, x_m) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_m.$$

É fácil verificar que  $\sigma_m$  é  $m$ -linear e segue da definição da norma projetiva que  $\sigma_m$  é contínua e  $\|\sigma_m\| = 1$ . A função  $\sigma_m$  será chamada de *aplicação  $m$ -linear canônica*.

**Proposição 1.3.2.** *Sejam  $E_1, \dots, E_m$  espaços normados e  $F$  um espaço de Banach. Para cada aplicação  $m$ -linear contínua  $A: E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$  existe um único operador linear contínuo  $A_L: E_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_m \longrightarrow F$  tal que  $A = A_L \circ \sigma_m$ , isto é, o diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_m & \xrightarrow{A} & F \\ & \searrow \sigma_m & \nearrow A_L \\ & E_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_m & \end{array}$$

Além de isso, a correspondência  $A \longleftrightarrow A_L$  é um isomorfismo isométrico entre os espaços de Banach  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$  e  $\mathcal{L}(E_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_m; F)$ .

*Demonstração.* Veja [38, Theorem 2.9] ou [42, Teorema 3.17].  $\square$

O operador linear  $A_L$  é chamado de *linearização* da aplicação  $m$ -linear  $A$ .

Passamos agora a estudar o produto tensorial simétrico. Nossas referências são [19] e [37]. Para este estudo, trabalharemos no caso  $E_1 = \cdots = E_m = E$ . Neste caso, denotamos  $\otimes^m E = E \otimes \cdots \otimes E$ ,  $\otimes_\pi^m E = E \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E$  e  $\widehat{\otimes}_\pi^m E = E \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E$ . Começamos definindo tensor simétrico para o caso  $m = 2$ .

**Definição 1.3.3.** Seja  $E$  um espaço normado. Dizemos que um tensor  $z \in E \otimes E$  é *simétrico* se tem uma representação  $z = \sum_{j=1}^k \frac{1}{2}(x_j \otimes y_j + y_j \otimes x_j)$ , onde  $k \in \mathbb{N}$  e  $x_j, y_j \in E$  para cada  $j = 1, \dots, k$ .

Da mesma forma, definimos um tensor  *$m$ -simétrico* como um tensor  $z \in \otimes^m E$  que tem um representador da forma

$$z = \sum_{j=1}^k \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} x_{\sigma(1)}^j \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(m)}^j,$$

onde  $S_m$  denota o grupo de permutações do conjunto  $\{1, \dots, m\}$  e  $x_1^j, \dots, x_m^j \in E$  para cada  $j = 1, \dots, k$ .

Os tensores  $m$ -simétricos formam um subespaço vetorial de  $\otimes^m E$ , que denotaremos por  $\otimes^{m,s} E$  e chamamos de *produto tensorial simétrico de  $E$  por ele mesmo  $m$ -vezes*. Por outro lado, consideremos a simetrização  $(\sigma_m)^s$  da aplicação  $m$ -linear canônica  $\sigma_m$  e definamos

$$x_1 \otimes^s \cdots \otimes^s x_m = (\sigma_m)^s(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(m)},$$

para todos  $x_1, \dots, x_m \in E$ . Notemos que para  $x_1 = \cdots = x_m = x$ , temos

$$\otimes^m x = x \otimes \cdots \otimes x = x \otimes^s \cdots \otimes^s x.$$

Usando a Fórmula de Polarização (Proposição 1.2.11), temos

$$x_1 \otimes^s \cdots \otimes^s x_m = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\delta_1, \dots, \delta_m \in \{-1, 1\}} \delta_1 \cdots \delta_m \otimes^m (x_0 + \delta_1 x_1 + \cdots + \delta_m x_m),$$

e conseqüentemente temos as seguintes caracterizações para o produto tensorial simétrico.

**Proposição 1.3.4.** [19, Corollary 1.5].

$$\begin{aligned} \otimes^{m,s} E &= \text{span}\{x_1 \otimes^s \cdots \otimes^s x_m : x_1, \dots, x_m \in E\} \\ &= \text{span}\{\otimes^m x : x \in E\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^k \alpha_j \otimes^m x_j : k \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_k \in E \text{ e } \alpha_1, \dots, \alpha_k \in C_{\mathbb{K}}^m \right\}, \end{aligned}$$

onde  $C_{\mathbb{K}}^m = \{-1, 1\}$  se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $m$  é par, e  $C_{\mathbb{K}}^m = \{1\}$  caso contrário.

Consideremos agora a restrição da norma projetiva  $\pi$  ao espaço vetorial  $\otimes^{m,s} E$ . Neste caso, denotamos  $\otimes_{\pi}^{m,s} E = (\otimes^{m,s} E, \pi)$ . Também denotamos por  $\widehat{\otimes}_{\pi}^{m,s} E$  ao completamento do espaço  $(\otimes^{m,s} E, \pi)$ , isto é, o fecho de  $\otimes^{m,s} E$  no completamento  $\widehat{\otimes}_{\pi}^m E$  de  $\otimes_{\pi}^m E$ . Por outro lado, consideremos o polinômio  $m$ -homogêneo

$$\delta_m : E \longrightarrow \widehat{\otimes}_{\pi}^{m,s} E, \quad \delta_m(x) = \otimes^m x.$$

Segue da igualdade  $\pi(\otimes^m x) = \|x\|^m$  que  $\delta_m$  é contínuo e tem norma 1. Um importante resultado devido a R. Ryan em [37] é o seguinte.

**Teorema 1.3.5.** *Sejam  $E$  um espaço normado e  $F$  um espaço de Banach. Para cada polinômio  $m$ -homogêneo contínuo  $P : E \longrightarrow F$  existe um único operador linear contínuo  $P_L : \widehat{\otimes}_{\pi}^{m,s} E \longrightarrow F$  tal que  $P = P_L \circ \delta_m$ , isto é, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{P} & F \\ & \searrow \delta_m & \uparrow P_L \\ & & \widehat{\otimes}_{\pi}^{m,s} E \end{array}$$

Mais ainda, a correspondência  $P \longleftrightarrow P_L$  é um isomorfismo topológico entre os espaços de Banach  $\mathcal{P}(^m E; F)$  e  $\mathcal{L}(\widehat{\otimes}_{\pi}^{m,s} E; F)$ .

O operador linear  $P_L$  é chamado de *linearização* do polinômio  $P$ . É conhecido que  $\|P_L\| = \|\dot{P}\|$ , conseqüentemente os espaços  $\mathcal{P}(^m E; F)$  e  $\mathcal{L}(\widehat{\otimes}_{\pi}^{m,s} E; F)$  nem sempre são isometricamente isomorfos ([19, 2.1]). Com o objetivo de conseguir um isomorfismo isométrico no teorema acima, introduz-se uma segunda norma, denotada por  $\pi_s$ , no espaço  $\otimes^{m,s} E$ .

**Proposição 1.3.6.** [19, 2.2] *Seja  $E$  um espaço normado e  $m \in \mathbb{N}$ . A função*

$$\pi_s: \otimes^{m,s} E \longrightarrow [0, +\infty) , \quad \pi_s(z) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^k |\lambda_j| \|x_j\|^m : k \in \mathbb{N} \text{ e } z = \sum_{j=1}^k \lambda_j \otimes^m x_j \right\}$$

é uma norma em  $\otimes^{m,s} E$ . Além disso,  $\pi_s(\otimes^m x) = \|x\|^m$  para todo  $x \in E$ .

A norma definida acima é chamada de *norma  $s$ -projetiva* e o espaço normado  $(\otimes^{m,s} E, \pi_s)$  é denotado por  $\otimes_{\pi_s}^{m,s} E$ . Também denotamos por  $\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E$  ao completamento do espaço  $(\otimes^{m,s} E, \pi_s)$ . Por outro lado, definamos o polinômio  $m$ -homogêneo

$$\delta_{m,s}: E \longrightarrow \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E , \quad \delta_{m,s}(x) = \otimes^m x.$$

Segue da igualdade  $\pi_s(\otimes^m x) = \|x\|^m$  que  $\delta_{m,s}$  é contínuo e tem norma 1. Chegamos ao resultado mais importante desta seção.

**Teorema 1.3.7.** [19, Proposition 2.2] *Sejam  $E$  um espaço normado e  $F$  um espaço de Banach. Para cada polinômio  $m$ -homogêneo contínuo  $P: E \longrightarrow F$  existe um único operador linear contínuo  $P_{L,s}: \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E \longrightarrow F$  tal que  $P = P_{L,s} \circ \delta_{m,s}$ , isto é, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{P} & F \\ & \searrow \delta_{m,s} & \uparrow P_{L,s} \\ & & \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E \end{array}$$

Mais ainda, a correspondência  $P \longleftrightarrow P_{L,s}$  é um isomorfismo isométrico entre os espaços de Banach  $\mathcal{P}(^m E; F)$  e  $\mathcal{L}(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E; F)$ .

O operador linear  $P_{L,s}$  é também chamado de *linearização* do polinômio  $P$ .

A seguir veremos algumas propriedades do produto tensorial de operadores lineares contínuos.

**Proposição 1.3.8.** *Sejam  $m \in \mathbb{N}$ ,  $E_1, \dots, E_m, F_1, \dots, F_m$  espaços normado,  $u_1 \in \mathcal{L}(E_1; F_1)$ ,  $\dots$ ,  $u_m \in \mathcal{L}(E_m; F_m)$ . Então existe um único operador linear contínuo*

$$u_1 \otimes \dots \otimes u_m: E_1 \widehat{\otimes}_{\pi} \dots \widehat{\otimes}_{\pi} E_m \longrightarrow F_1 \widehat{\otimes}_{\pi} \dots \widehat{\otimes}_{\pi} F_m$$

tal que

$$(u_1 \otimes \dots \otimes u_m)(x_1 \otimes \dots \otimes x_m) = u_1(x_1) \otimes \dots \otimes u_m(x_m)$$

para todos  $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$ .

*Demonstração.* Veja [38, Proposition 2.3]. □

**Proposição 1.3.9.** *Sejam  $m \in \mathbb{N}$ ,  $E$  e  $F$  espaços normados e  $u \in \mathcal{L}(E; F)$ . Então existe um único operador linear contínuo*

$$\otimes^{m,s} u: \otimes_{\pi_s}^{m,s} E \longrightarrow \otimes_{\pi_s}^{m,s} F$$

tal que  $(\otimes^{m,s} u)(\otimes^m x) = \otimes^m u(x)$  para todo  $x \in E$ .

*Demonstração.* Veja [36, Proposição 3.2.7]. □

**Corolário 1.3.10.** *Sejam  $m \in \mathbb{N}$ ,  $E$  e  $F$  espaços normados e  $u \in \mathcal{L}(E; F)$ . Então existe um único operador linear contínuo*

$$\otimes^{m,s} u: \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E \longrightarrow \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} F$$

tal que  $(\otimes^{m,s} u)(\otimes^m x) = \otimes^m u(x)$  para todo  $x \in E$ .

*Demonstração.* Denotemos  $G = (\otimes^{m,s} E, \pi_s)$  e  $H = (\otimes^{m,s} F, \pi_s)$ . Por definição,  $\widehat{G} = \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E$  é um completamento de  $G$  e  $\widehat{H} = \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} F$  é um completamento de  $H$ . Sabemos da Proposição 1.3.9 que existe um operador linear contínuo  $v: G \longrightarrow H$  tal que  $v(\otimes^m x) = \otimes^m u(x)$  para todo  $x \in E$ . Identificando  $H$  como subespaço de  $\widehat{H}$ , podemos definir o operador

$$v_1: G \longrightarrow \widehat{H}, \quad v_1(z) = v(z),$$

que claramente é também linear e contínuo. E identificando  $G$  como subespaço denso de  $\widehat{G}$ , podemos estender  $v_1$  a  $\widehat{G}$  de acordo com a Proposição 1.1.9, isto é, existe um único operador linear contínuo  $\tilde{v}_1: \widehat{G} \longrightarrow \widehat{H}$  tal que  $\tilde{v}_1(z) = v_1(z)$  para todo  $z \in G$ . Chamando  $\otimes^{m,s} u = \tilde{v}_1$ , temos

$$(\otimes^{m,s} u)(\otimes^m x) = \tilde{v}_1(\otimes^m x) = v_1(\otimes^m x) = v(\otimes^m x) = \otimes^m u(x)$$

para todo  $x \in E$ . Provemos a unicidade do operador  $\otimes^{m,s} u$ . Suponhamos que  $t: \widehat{G} \longrightarrow \widehat{H}$  seja um operador linear contínuo com  $t(\otimes^m x) = \otimes^m u(x)$  para todo  $x \in E$ . Segue da linearidade de  $t$  e de  $v_1$  que  $t(z) = v_1(z)$  para todo  $z \in G$ . Pela unicidade da extensão  $\tilde{v}_1$  temos que  $t = \tilde{v}_1 = \otimes^{m,s} u$ . □

**Proposição 1.3.11.** *Sejam  $m \in \mathbb{N}$ ,  $G, E, F$  espaços de Banach,  $u: G \longrightarrow E$  um operador linear contínuo e  $P: E \longrightarrow F$  um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo. Então*

$$(P \circ u)_{L,s} = P_{L,s} \circ \otimes^{m,s} u,$$

isto é, a metade inferior do diagrama abaixo é comutativa

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{u} & E & \xrightarrow{P} & F \\ & & \searrow (P \circ u)_{L,s} & & \uparrow P_{L,s} \\ \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} G & \xrightarrow{\otimes^{m,s} u} & \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E & & \end{array}$$

*Demonstração.* Sabemos da Proposição 1.2.27 que  $P \circ u: G \rightarrow F$  é também um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo. Por outro lado, consideremos os polinômios  $m$ -homogêneos canônicos  $\delta_{m,s}^E: E \rightarrow \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E$  e  $\delta_{m,s}^G: G \rightarrow \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} G$  definidos por

$$\delta_{m,s}^E(x) = \otimes^m x \quad e \quad \delta_{m,s}^G(y) = \otimes^m y.$$

Para todo  $y \in G$ , tem-se

$$\begin{aligned} (P_{L,s} \circ \otimes^{m,s} u)(\otimes^m y) &= P_{L,s}(\otimes^{m,s} u(\otimes^m y)) = P_{L,s}(\otimes^m u(y)) \\ &= P_{L,s}(\delta_{m,s}^E(u(y))) = (P_{L,s} \circ \delta_{m,s}^E)(u(y)) \\ &= P(u(y)) = (P \circ u)(y) = (P \circ u)_{L,s}(\otimes^m y), \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue da definição do operador  $\otimes^{m,s} u$  (Corolário 1.3.10), a terceira segue da definição do polinômio  $\delta_{m,s}^E$  e a quinta segue da definição do operador  $P_{L,s}$  (Teorema 1.3.7). Usando a linearidade e continuidade dos operadores  $P_{L,s} \circ \otimes^{m,s} u$  e  $(P \circ u)_{L,s}$ , segue que

$$(P_{L,s} \circ \otimes^{m,s} u)(z) = (P \circ u)_{L,s}(z)$$

para todo  $z \in \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} G$ . □

## 1.4 Ideais de operadores lineares

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos, propriedades e exemplos da teoria de ideais de operadores lineares.

A teoria de ideais de operadores foi introduzida por A. Pietsch na década de 1970 com o intuito de unificar o estudo de varias classes de operadores lineares que vinham sendo estudados separadamente.

Esta seção é preparatória para a apresentação dos ideais de polinômios de composição na Seção 1.5 e para dar aplicações das fórmulas das envoltórias injetiva e sobrejetiva de um ideal de composição nas Seções 3.4 e 4.4. Nossa principal referência foi a dissertação [42] e excelentes referências para a teoria geral de ideais de operadores são os livros [16, 33].

Nesta dissertação, o termo *classe* é usado como sinônimo de coleção ou conjunto. Essa terminologia é usada para não entrar em conflito com a teoria de conjuntos quando se tomam coleções arbitrárias. Ao longo desta seção,  $E, F, G, H$  denotarão espaços de Banach quaisquer.

**Definição 1.4.1.** Um *ideal de operadores* é uma subclasse  $\mathcal{I}$  da classe de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach sobre o corpo  $\mathbb{K}$  tal que suas componentes

$$\mathcal{I}(E; F) = \mathcal{L}(E; F) \cap \mathcal{I},$$

onde  $E$  e  $F$  são espaços de Banach arbitrários, satisfazem as seguintes condições:

- (1)  $\mathcal{I}(E; F)$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{L}(E; F)$  que contém os operadores lineares contínuos de posto finito.

(2) A propriedade do ideal: se  $u_1 \in \mathcal{L}(G; E)$ ,  $u_2 \in \mathcal{I}(E; F)$  e  $u_3 \in \mathcal{L}(F; H)$ ,

$$G \xrightarrow{u_1} E \xrightarrow{u_2} F \xrightarrow{u_3} H$$

então  $u_3 \circ u_2 \circ u_1 \in \mathcal{I}(G; H)$ .

Dizemos que um ideal de operadores  $\mathcal{I}$  é *fechado* se cada componente  $\mathcal{I}(E; F)$  é um subespaço fechado de  $\mathcal{L}(E; F)$ .

**Definição 1.4.2.** Um *ideal normado de operadores*  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  é um ideal de operadores  $\mathcal{I}$  munido de uma função  $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}: \mathcal{I} \rightarrow [0, +\infty)$  que satisfaz as seguintes condições:

- (I)  $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$  restrita a  $\mathcal{I}(E; F)$  é uma norma para quaisquer espaços de Banach  $E$  e  $F$ .
- (II) O funcional  $id: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , dado por  $id(\lambda) = \lambda$ , é tal que  $\|id\|_{\mathcal{I}} = 1$ .
- (III) A desigualdade do ideal: se  $u_1 \in \mathcal{L}(G; E)$ ,  $u_2 \in \mathcal{I}(E; F)$  e  $u_3 \in \mathcal{L}(F; H)$ , então

$$\|u_3 \circ u_2 \circ u_1\|_{\mathcal{I}} \leq \|u_3\| \cdot \|u_2\|_{\mathcal{I}} \cdot \|u_1\|.$$

Dizemos que um ideal normado de operadores  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  é *de Banach* se o espaço normado  $(\mathcal{I}(E; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  é completo para quaisquer espaços de Banach  $E$  e  $F$ .

É bem conhecido e muito útil que, nas condições acima,  $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{I}}$  (veja [33, Proposition 6.1.4]).

**Exemplo 1.4.3** (Operadores de posto finito). A classe dos operadores de posto finito  $\mathcal{F}$  é o menor ideal de operadores (veja [42, Exemplo 4.5]).

**Exemplo 1.4.4** (Operadores aproximáveis). Dizemos que um operador  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  é *aproximável* se existe uma sequência de operadores  $(u_n)_{n=1}^{\infty}$  em  $\mathcal{F}(E; F)$  tal que  $u_n \rightarrow u$  na norma usual de  $\mathcal{L}(E; F)$ .

Denotamos por  $\mathcal{A}(E; F)$  o conjunto de todos os operadores aproximáveis de  $E$  em  $F$ . A classe dos operadores aproximáveis  $\mathcal{A}$  é o menor ideal fechado de operadores (veja [42, Exemplo 4.6]).

**Exemplo 1.4.5** (Operadores compactos). Dizemos que um operador  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  é *compacto* se  $\overline{u(B_E)}$  é compacto em  $F$ . Denotamos por  $\mathcal{K}(E; F)$  o conjunto de todos os operadores compactos de  $E$  em  $F$ . A classe dos operadores compactos  $\mathcal{K}$  é um ideal fechado de operadores (veja [42, Exemplo 4.7] ou [33, 1.4]).

**Exemplo 1.4.6** (Operadores fracamente compactos). Dizemos que um operador  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  é *fracamente compacto* se  $u(B_E)$  é relativamente fracamente compacto em  $F$ , isto é,  $\overline{u(B_E)}^w$  é fracamente compacto em  $F$ . Denotamos por  $\mathcal{W}(E; F)$  o conjunto de todos os operadores fracamente compactos de  $E$  em  $F$ . A classe dos operadores fracamente compactos  $\mathcal{W}$  é um ideal fechado de operadores (veja [42, Exemplo 4.8] ou [33, 1.5]).

Nosso próximo exemplo é o ideal dos operadores  $p$ -nucleares. Nossa principal referência é o livro [17]. Dado  $1 \leq p \leq \infty$ , continuamos a denotar por  $p' \in [1, +\infty]$  o conjugado de  $p$ , isto é,  $p'$  satisfaz a equação  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

**Exemplo 1.4.7** (Operadores  $p$ -nucleares). Seja  $1 \leq p < \infty$ . Dizemos que um operador  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  é  $p$ -nuclear se existem sequências  $(\lambda_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$ ,  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{F'}$  e  $(y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p'}^w(F)$  tais que

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n \otimes y_n,$$

onde a série acima converge em  $\mathcal{L}(E; F)$  e  $\ell_{p'}^w(F)$  é o espaço das sequências fracamente  $p'$ -somáveis em  $F$  (Definição 1.1.17).

Denotamos por  $\mathfrak{N}_p(E; F)$  o conjunto de todos os operadores  $p$ -nucleares de  $E$  em  $F$ . A classe  $\mathfrak{N}_p$  dos operadores  $p$ -nucleares é um ideal de operadores para todo  $p \in [1, +\infty)$  (veja [17, Theorem 5.25]).

Nosso próximo exemplo é o ideal dos operadores  $p$ -compactos. Nossa referência é [35]. Começamos definindo conjunto relativamente  $p$ -compacto.

**Definição 1.4.8.** Seja  $E$  um espaço de Banach.

- (a) Dado  $1 < p < \infty$ , dizemos que um subconjunto  $K$  de  $E$  é *relativamente  $p$ -compacto* se existe uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(E)$  tal que

$$K \subset \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n : (\lambda_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{p'} \leq 1 \right\},$$

onde  $\ell_p(E)$  é o espaço das sequências absolutamente  $p$ -somáveis em  $E$  (Definição 1.1.15).

- (b) Para o caso  $p = 1$ , dizemos que um subconjunto  $K$  de  $E$  é *relativamente 1-compacto* se existe uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1(E)$  tal que

$$K \subset \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n : (\lambda_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K} \text{ e } \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| \leq 1 \right\}.$$

**Exemplo 1.4.9** (Operadores  $p$ -compactos). Seja  $1 \leq p < \infty$ . Dizemos que um operador  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  é  $p$ -compacto se  $u$  transforma conjuntos limitados em  $E$  em conjuntos relativamente  $p$ -compactos em  $F$ .

Denotamos por  $\mathfrak{K}_p(E; F)$  o conjunto de todos os operadores  $p$ -compactos de  $E$  em  $F$ . A classe dos operadores  $p$ -compactos  $\mathfrak{K}_p$  é um ideal de operadores para todo  $p \in [1, +\infty)$  [35].

Nosso próximo exemplo é o ideal dos operadores  $p$ -integráveis. Nossa principal referência é o livro [17].

**Exemplo 1.4.10** (Operadores  $p$ -integráveis). Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Dizemos que um operador  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  é  $p$ -integrável se existe um espaço de medida de probabilidade  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  e existem operadores lineares contínuos  $t_1: E \rightarrow L_\infty(\mu)$  e  $t_2: L_p(\mu) \rightarrow F''$  tais que  $J_F \circ u = t_2 \circ i_p \circ t_1$ , isto é, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{J_F} & F'' \\ \downarrow t_1 & & & & \uparrow t_2 \\ L_\infty(\mu) & \xrightarrow{i_p} & L_p(\mu) & & \end{array}$$

onde  $i_p: L_\infty(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$  é o operador inclusão e  $J_F: F \rightarrow F''$  é o mergulho canônico.

Denotamos por  $\mathfrak{I}_p(E; F)$  o conjunto de todos os operadores  $p$ -integráveis de  $E$  em  $F$ . A classe  $\mathfrak{I}_p$  dos operadores  $p$ -integráveis é um ideal de operadores para todo  $p \in [1, +\infty]$  (veja [17, Theorem 5.2]).

**Exemplo 1.4.11** (Operadores absolutamente  $p$ -somantes). Seja  $1 \leq p < \infty$ . Dizemos que um operador  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  é *absolutamente  $p$ -somante* se existe uma constante  $c \geq 0$  tal que

$$\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^p \leq c^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^p,$$

para todos  $n \in \mathbb{N}$  e  $x_1, \dots, x_n \in E$ . Ou, equivalentemente, se  $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p(F)$  sempre que  $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$  (veja [17, Proposition 2.1]).

Denotamos por  $\Pi_p(E; F)$  o conjunto de todos os operadores absolutamente  $p$ -somantes de  $E$  em  $F$ . A classe  $\Pi_p$  dos operadores absolutamente  $p$ -somantes é um ideal de operadores para todo  $p \in [1, +\infty]$  (veja [42, Exemplo 4.11]).

Nosso próximo exemplo é o ideal dos operadores Cohen fortemente  $p$ -somantes. Os operadores Cohen fortemente  $p$ -somantes foram introduzidos por Cohen em [15] para descrever os operadores que têm adjuntos absolutamente  $p'$ -somantes.

**Exemplo 1.4.12** (Operadores Cohen fortemente  $p$ -somantes). Seja  $1 \leq p < \infty$ . Dizemos que um operador  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  é *Cohen fortemente  $p$ -somante* se

$$(u(x_n))_{n=1}^\infty \in \ell_p\langle F \rangle \text{ sempre que } (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(E),$$

onde  $\ell_p\langle F \rangle$  é o espaço de todas as sequências Cohen fortemente  $p$ -somáveis em  $F$  (Definição 1.1.19).

Denotamos por  $\mathcal{D}_p(E; F)$  o conjunto de todos os operadores Cohen fortemente  $p$ -somantes de  $E$  em  $F$ . A classe  $\mathcal{D}_p$  dos operadores Cohen fortemente  $p$ -somantes é um ideal de operadores (veja, por exemplo, [29, Proposição 4.4.15]).

**Exemplo 1.4.13** (Operadores completamente contínuos). Dizemos que um operador  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  é *completamente contínuo* se para toda sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  em  $E$  tal que  $x_n \xrightarrow{w} x$  em  $E$ , tem-se que  $u(x_n) \rightarrow u(x)$  em  $F$ .

Denotamos por  $\mathcal{CC}(E; F)$  o conjunto de todos os operadores completamente contínuos de  $E$  em  $F$ . A classe  $\mathcal{CC}$  dos operadores completamente contínuos é um ideal de operadores (veja [33, 1.6]).

A seguir faremos um breve resumo sobre o dual de um ideal de operadores.

**Definição 1.4.14.** (a) Seja  $\mathcal{I}$  um ideal de operadores. Definimos a classe de operadores  $\mathcal{I}^{\text{dual}}$  por

$$\mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F) = \{u \in \mathcal{L}(E; F) : u' \in \mathcal{I}(F'; E')\},$$

onde  $u'$  é o adjunto do operador  $u$  (Definição 1.1.11).

(b) Seja  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  um ideal normado de operadores. Definimos a função  $\|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}}: \mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F) \rightarrow [0, +\infty)$  por

$$\|u\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} = \|u'\|_{\mathcal{I}}.$$



**Proposição 1.4.15.** *Seja  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  um ideal normado (de Banach) de operadores. Então  $(\mathcal{I}^{\text{dual}}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}})$  é também um ideal normado (de Banach) de operadores.*

*Demonstração.* Veja [16, 9.9]. □

O seguinte resultado segue da proposição acima e da Proposição 1.1.12.

**Corolário 1.4.16.** *Seja  $\mathcal{I}$  um ideal (fechado) de operadores. Então  $\mathcal{I}^{\text{dual}}$  é também um ideal (fechado) de operadores.*

**Definição 1.4.17.** Dizemos que um ideal de operadores  $\mathcal{I}$  é:

- (a) *Simétrico* se  $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}^{\text{dual}}$ .
- (b) *Anti-simétrico* se  $\mathcal{I}^{\text{dual}} \subset \mathcal{I}$ .
- (c) *Completamente simétrico* se  $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{dual}}$ .

**Proposição 1.4.18.** (a) (Teorema de Schauder) *O ideal dos operadores compactos é completamente simétrico, isto é,  $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{\text{dual}}$ .*

- (b) (Teorema de Gantmacher) *O ideal dos operadores fracamente compactos é completamente simétrico, isto é,  $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{\text{dual}}$ .*

*Demonstração.* Veja [22, Theorem 17.1.3 e Theorem 17.2.5]. A demonstração do item (a) também pode ser encontrada em [11, Teorema 7.2.7]. □

## 1.5 Ideais de polinômios homogêneos

Em 1983, o próprio Pietsch generalizou o conceito de ideais de operadores para aplicações multilineares, e tal ideia foi imediatamente adaptada para polinômios homogêneos. A partir daí, ideais de aplicações multilineares e de polinômios homogêneos têm sido exaustivamente estudados.

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos, propriedades e exemplos da teoria de ideais de polinômios. Também apresentaremos os ideais de composição, que são uma classe muito importante de ideais de polinômios. Sua importância deve-se a que muitas classes interessantes de polinômios, como os polinômios de posto finito, compactos e fracamente compactos, são ideais de composição. Nossas principais referências foram a dissertação [41] e o artigo [10].

Ao longo deste seção,  $m$  denotará um número natural qualquer e  $E, F, G, H$  espaços de Banach quaisquer.

É importante na definição a seguir que, conforme vimos na Proposição 1.2.27, a composição de um polinômio  $m$ -homogêneo com operadores lineares, à esquerda e à direita, é também um polinômio  $m$ -homogêneo.

**Definição 1.5.1.** Um *ideal de polinômios homogêneos* ou, simplesmente um *ideal de polinômios*, é uma subclasse  $\mathcal{Q}$  da classe de todos os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach sobre o corpo  $\mathbb{K}$  tal que suas componentes

$$\mathcal{Q}({}^m E; F) = \mathcal{P}({}^m E; F) \cap \mathcal{Q},$$

onde  $m \in \mathbb{N}$  e  $E$  e  $F$  são espaços de Banach arbitrários, satisfazem as seguintes condições:

- (1)  $\mathcal{Q}(^m E; F)$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}(^m E; F)$  que contem os polinômios  $m$ -homogêneos contínuos de tipo finito.
- (2) A propriedade do ideal: se  $u \in \mathcal{L}(G; E)$ ,  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$  e  $t \in \mathcal{L}(F; H)$ , então  $t \circ P \circ u \in \mathcal{Q}(^m G; H)$ .

Para cada  $m \in \mathbb{N}$  fixo, a classe

$$\mathcal{Q}_m = \bigcup \{ \mathcal{Q}(^m E; F) : E \text{ e } F \text{ são espaços de Banach} \}$$

é chamada de *ideal de polinômios  $m$ -homogêneos*. Assim,  $\mathcal{Q}_m(E; F) = \mathcal{Q}(^m E; F)$  para todos  $E$  e  $F$  espaços de Banach.

Dizemos que um ideal de polinômios  $\mathcal{Q}$  é *fechado* se cada componente  $\mathcal{Q}(^m E; F)$  é um subespaço fechado de  $\mathcal{P}(^m E; F)$ . Se  $m \in \mathbb{N}$ , sob as condições acima, dizemos que  $\mathcal{Q}^m$  é um *ideal fechado de polinômios  $m$ -homogêneos*.

**Observação 1.5.2.** Dado um ideal de polinômios  $\mathcal{Q}$ , é claro que a classe  $\mathcal{Q}_1$  é um ideal de operadores. Desta forma, a teoria de ideais de operadores pode ser recuperada se consideramos  $m = 1$  na teoria de ideais de polinômios.

**Definição 1.5.3.** Um *ideal normado de polinômios*  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é um ideal de polinômios  $\mathcal{Q}$  munido de uma função  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}: \mathcal{Q} \rightarrow [0, +\infty)$  que satisfaz as seguintes condições:

- (I)  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$  restrita a  $\mathcal{Q}(^m E; F)$  é uma norma para todo  $m \in \mathbb{N}$  e quaisquer espaços de Banach  $E$  e  $F$ .
- (II) O polinômio  $m$ -homogêneo contínuo de tipo finito  $id_m: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , dado por  $id_m(\lambda) = \lambda^m$ , é tal que  $\|id_m\|_{\mathcal{Q}} = 1$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ .
- (III) A desigualdade do ideal: se  $u \in \mathcal{L}(G; E)$ ,  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$  e  $t \in \mathcal{L}(F; H)$ , então

$$\|t \circ P \circ u\|_{\mathcal{Q}} \leq \|t\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|u\|^m.$$

Dizemos que um ideal normado de polinômios  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é *de Banach* se o espaço normado  $(\mathcal{Q}(^m E; F), \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é completo para todo  $m \in \mathbb{N}$  e quaisquer espaços de Banach  $E$  e  $F$ . Se  $m \in \mathbb{N}$ , sob as condições acima, dizemos que  $(\mathcal{Q}^m, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é um *ideal normado (respetivamente, de Banach) de polinômios  $m$ -homogêneos*.

**Proposição 1.5.4.** Se  $\mathcal{Q}$  é um ideal de polinômios, então  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|)$  é um ideal normado de polinômios, onde  $\|\cdot\|$  é a norma usual de polinômios.

*Demonstração.* Veja [41, Proposição 2.52]. □

Note que um ideal de polinômios  $\mathcal{Q}$  é fechado se, e somente se,  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|)$  é um ideal de Banach.

**Definição 1.5.5.** Seja  $\mathcal{Q}$  um ideal de polinômios. Definimos a classe de polinômios  $\overline{\mathcal{Q}}$  por

$$\overline{\mathcal{Q}}(^m E; F) = \overline{\mathcal{Q}(^m E; F)}.$$

É bem conhecido, e muito fácil de ser demonstrado, que a classe  $\overline{\mathcal{Q}}$  é também um ideal de polinômios.

**Proposição 1.5.6.** *Sejam  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  um ideal normado de polinômios,  $m \in \mathbb{N}$  e  $E, F$  espaços de Banach. Então:*

- (a)  $\|P\| \leq \|P\|_{\mathcal{Q}}$  para todo  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$ .
- (b)  $\|\varphi^m \otimes b\|_{\mathcal{Q}} = \|\varphi\|^m \cdot \|b\|$  para todos  $\varphi \in E'$  e  $b \in F$ .

*Demonstração.* Veja [41, Proposição 2.56]. □

A seguir, introduziremos as seguintes notações.

**Definição 1.5.7.** (a) Sejam  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{R}$  ideais de polinômios. Escreveremos  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$  se  $\mathcal{Q}(^m E; F) \subset \mathcal{R}(^m E; F)$  para todos  $m \in \mathbb{N}$  e espaços de Banach  $E$  e  $F$ .

- (b) Sejam  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  e  $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$  ideais normados de polinômios tais que  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$ . Escreveremos  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{R}}$  (respetivamente  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{R}}$ ) se  $\|P\|_{\mathcal{Q}} \leq \|P\|_{\mathcal{R}}$  (respetivamente  $\|P\|_{\mathcal{Q}} \geq \|P\|_{\mathcal{R}}$ ) para todo  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$ .

**Exemplo 1.5.8.** A classe  $\mathcal{P}_f$  dos polinômios de tipo finito (Definição 1.2.22) é o menor ideal de polinômios (veja, por exemplo, [26, Exemplo 4.1.2]).

**Exemplo 1.5.9.** Dizemos que um polinômio  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  é *aproximável por polinômios de tipo finito* se existe uma sequência de polinômios  $(P_n)_{n=1}^{\infty}$  em  $\mathcal{P}_f(^m E; F)$  tal que  $P_n \rightarrow P$ , isto é,  $P \in \overline{\mathcal{P}_f(^m E; F)}$ . Como

$$\overline{\mathcal{P}_f(^m E; F)} = \overline{\mathcal{P}_f(^m E; F)},$$

então a classe  $\overline{\mathcal{P}_f}$  dos polinômios aproximáveis por polinômios de tipo finito é um ideal de polinômios.

**Exemplo 1.5.10.** Dizemos que um polinômio  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  é *de posto finito* se sua imagem  $P(E)$  gera um subespaço de dimensão finita de  $F$ .

Denotamos por  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^m E; F)$  o conjunto de todos os polinômios  $m$ -homogêneos de posto finito de  $E$  em  $F$ . A classe dos polinômios de posto finito  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$  é um ideal de polinômios (veja, por exemplo, [26, Exemplo 4.1.3]).

**Exemplo 1.5.11.** Dizemos que um polinômio  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  é *aproximável por polinômios de posto finito* se existe uma sequência de polinômios  $(P_n)_{n=1}^{\infty}$  em  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^m E; F)$  tal que  $P_n \rightarrow P$ . Nesse caso escrevemos  $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^m E; F)$ . Assim,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^m E; F) = \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^m E; F)},$$

e portanto a classe  $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  dos polinômios aproximáveis por polinômios de posto finito é um ideal de polinômios.

**Exemplo 1.5.12.** Dizemos que um polinômio  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  é *compacto* se  $\overline{P(B_E)}$  é um subconjunto compacto de  $F$ .

Denotamos por  $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^m E; F)$  o conjunto de todos os polinômios  $m$ -homogêneos compactos de  $E$  em  $F$ . É bem conhecido, e muito fácil de ser demonstrado, que a classe dos polinômios compactos  $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$  é um ideal de polinômios.

**Exemplo 1.5.13.** Dizemos que um polinômio  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  é *fracamente compacto* se  $P(B_E)$  é um subconjunto relativamente fracamente compacto de  $F$ , isto é, se  $\overline{P(B_E)}^w$  é fracamente compacto em  $F$ .

Denotamos por  $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^m E; F)$  o conjunto de todos os polinômios  $m$ -homogêneos fracamente compactos de  $E$  em  $F$ . Também é bem conhecido, e muito fácil de demonstrar, que a classe dos polinômios fracamente compactos  $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$  é um ideal de polinômios.

Passamos agora a estudar os ideais de composição. Para maiores informações veja [10].

**Definição 1.5.14.** Seja  $\mathcal{I}$  um ideal de operadores. Um polinômio  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  pertence a  $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^m E; F)$  se existem um espaço de Banach  $G$ , um polinômio  $Q \in \mathcal{P}(^m E; G)$  e um operador linear  $u \in \mathcal{I}(G; F)$  tais que  $P = u \circ Q$ .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{P} & F \\ & \searrow Q & \nearrow u \\ & & G \end{array}$$

A classe de polinômios  $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$  é chamada de *ideal de composição*.

**Proposição 1.5.15.** *Sejam  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{J}$  ideais de operadores. Então:*

- (a)  $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$  é um ideal de polinômios.
- (b) Se  $\mathcal{I}$  é um ideal fechado então  $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$  é também um ideal fechado.
- (c) Se  $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$  então  $\mathcal{I} \circ \mathcal{P} \subset \mathcal{J} \circ \mathcal{P}$ .

*Demonstração.* Para as demonstrações dos itens (a) e (b) veja [10, Proposition 3.3]. Provemos o item (c). Seja  $P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^m E; F)$ . Então  $P = u \circ Q$ , para algum espaço de Banach  $G$ , algum polinômio  $Q \in \mathcal{P}(^m E; G)$  e algum operador  $u \in \mathcal{I}(G; F)$ . Como  $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$  então  $u \in \mathcal{J}(G; F)$ . Isso prova que  $P$  também pertence a  $\mathcal{J} \circ \mathcal{P}(^m E; F)$ . E portanto o item (c) segue.  $\square$

A caracterização a seguir é bastante útil.

**Proposição 1.5.16.** *Sejam  $\mathcal{I}$  um ideal de operadores e  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a)  $P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^m E; F)$ .
- (b)  $P_L \in \mathcal{I}(\widehat{\otimes}_{\pi}^{m,s} E; F)$ .
- (c)  $P_{L,s} \in \mathcal{I}(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E; F)$ .

*Demonstração.* Veja [10, Proposition 3.2(b)].  $\square$

Para a definição da componente  $m$ -ésima  $\mathcal{Q}_m$  de um ideal de polinômios  $\mathcal{Q}$ , veja a Definição 1.5.1.

**Proposição 1.5.17.** *Sejam  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$  ideais de operadores. Então:*

(a) Dados  $m \in \mathbb{N}$  e  $E, F$  espaços de Banach, se  $\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{P}(^m E; F) \subset \mathcal{I}_2 \circ \mathcal{P}(^m E; F)$  então  $\mathcal{I}_1(E; F) \subset \mathcal{I}_2(E; F)$ .

(b) Se  $(\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{P})_m = (\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{P})_m$  para algum  $m \in \mathbb{N}$ , então  $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$ .

*Demonstração.* Para a demonstração do item (a) veja [10, Lemma 3.4(b)]. Provemos o item (b). Suponhamos que  $(\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{P})_m = (\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{P})_m$  para algum  $m \in \mathbb{N}$  e sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach. Então

$$(\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{P})(^m E; F) = (\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{P})_m(^m E; F) = (\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{P})_m(^m E; F) = (\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{P})(^m E; F).$$

Aplicando duas vezes o item (a), temos que  $\mathcal{I}_1(E; F) = \mathcal{I}_2(E; F)$ , provando que  $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$ .  $\square$

**Definição 1.5.18.** Seja  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  um ideal normado de operadores. Definimos a função  $\|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{P}}: \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^m E; F) \rightarrow [0, +\infty)$  por

$$\|P\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{P}} = \inf\{\|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|Q\| : P = u \circ Q, Q \in \mathcal{P}(^m E; G) \text{ e } u \in \mathcal{I}(G; F)\}.$$

**Proposição 1.5.19.** Seja  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  um ideal normado de operadores. Então:

(a)  $(\mathcal{I} \circ \mathcal{P}, \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{P}})$  é um ideal normado de polinômios.

(b) Se  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  é um ideal de Banach então  $(\mathcal{I} \circ \mathcal{P}, \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{P}})$  é também um ideal de Banach.

(c) Para cada  $P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^m E; F)$ ,  $\|P\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{P}} = \|P_{L,s}\|_{\mathcal{I}}$ .

*Demonstração.* Veja [10, Proposition 3.7(b)].  $\square$

**Exemplo 1.5.20.** Algumas classes clássicas de polinômios são casos especiais de ideais de composição. De [12, Lemma 2.1] e [12, Theorem 2.2] segue que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \circ \mathcal{P} \text{ e } \mathcal{P}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \circ \mathcal{P}.$$

De [37, Proposition 4.1] segue que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \circ \mathcal{P} \text{ e } \mathcal{P}_{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \circ \mathcal{P}.$$

A seguir faremos um breve estudo do dual polinomial de um ideal de operadores. Para maiores informações veja [7].

**Definição 1.5.21.** (a) Seja  $\mathcal{I}$  um ideal de operadores. Definimos a classe de polinômios  $\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}$  por

$$\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}(^m E; F) = \{P \in \mathcal{P}(^m E; F) : P' \in \mathcal{I}(F'; \mathcal{P}(^m E))\},$$

onde  $P'$  é o adjunto de Aron-Schottenloher de  $P$  (veja Definição 1.2.28). A classe de polinômios  $\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}$  é chamada de *dual polinomial* do ideal  $\mathcal{I}$ .

- (b) Seja  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  um ideal normado de operadores. Definimos a função  $\|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}} : \mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}({}^m E; F) \rightarrow [0, +\infty)$  por

$$\|P\|_{\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}} = \|P'\|_{\mathcal{I}}.$$

**Proposição 1.5.22.** (a) *Seja  $\mathcal{I}$  um ideal de operadores. Então  $\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}} = \mathcal{I}^{\text{dual}} \circ \mathcal{P}$ .*

- (b) *Seja  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  um ideal normado de operadores. Então  $\|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}} = \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}} \circ \mathcal{P}}$ .*

*Demonstração.* Veja [7, Theorem 2.2]. □

O seguinte resultado segue da proposição acima e das propriedades do dual de um ideal de operadores e do ideal de composição.

**Corolário 1.5.23.** (a) *Seja  $\mathcal{I}$  um ideal (fechado) de operadores. Então  $\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}$  é um ideal (fechado) de polinômios.*

- (b) *Seja  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  um ideal normado (de Banach) de operadores. Então  $(\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}})$  é um ideal normado (de Banach) de polinômios.*

# Capítulo 2

## Os espaços $\ell_\infty(\Gamma)$ e $\ell_1(\Gamma)$

Neste capítulo estudaremos duas classes de espaços de Banach que serão fundamentais nos próximos capítulos. Como a teoria básica desses espaços não é encontrada nas referências usuais da literatura, optamos por estudá-los de forma mais minuciosa, apresentando as devidas demonstrações.

O estudo apresentado neste capítulo se baseou nas referências [20, 21] e [33, B.3 e C.3]. Ao longo deste capítulo,  $\Gamma$  denotará um conjunto não vazio qualquer.

### 2.1 O espaço $\ell_\infty(\Gamma)$ e a propriedade da extensão métrica

Estudaremos nesta seção os espaços  $\ell_\infty(\Gamma)$ , que serão essenciais na teoria de ideais injetivos. Estudaremos também as injeções métricas e provaremos que  $\ell_\infty(\Gamma)$  tem a propriedade da extensão métrica.

Começamos esta seção, considerando o conjunto:

$$\mathbb{K}^\Gamma = \{f: \Gamma \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ é uma função}\}.$$

Cada função  $f \in \mathbb{K}^\Gamma$  será chamada de *família indexada de elementos de  $\mathbb{K}$* . Para cada  $i \in \Gamma$ , denotaremos  $f(i) = \lambda_i$  e chamaremos este número de  *$i$ -ésima coordenada* de  $f$ . E como é usual, denotaremos a função  $f$  por  $(\lambda_i)_{i \in \Gamma}$ .

Consideremos também em  $\mathbb{K}^\Gamma$  as operações de soma e produto por escalar definidas coordenada a coordenada, ou seja:

- (a) Para todos  $(\lambda_i)_{i \in \Gamma}$  e  $(\gamma_i)_{i \in \Gamma} \in \mathbb{K}^\Gamma$ , fazemos corresponder o elemento

$$(\lambda_i)_{i \in \Gamma} + (\gamma_i)_{i \in \Gamma} = (\lambda_i + \gamma_i)_{i \in \Gamma} \in \mathbb{K}^\Gamma.$$

- (b) Para todos  $\gamma \in \mathbb{K}$  e  $(\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \mathbb{K}^\Gamma$ , fazemos corresponder o elemento

$$\gamma \cdot (\lambda_i)_{i \in \Gamma} = (\gamma \lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \mathbb{K}^\Gamma.$$

É fácil verificar que  $\mathbb{K}^\Gamma$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  com essas operações. Definiremos agora o espaço  $\ell_\infty(\Gamma)$ .

**Definição 2.1.1.** Dado um conjunto não vazio  $\Gamma$ , definimos:

$$\ell_\infty(\Gamma) = \left\{ (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \mathbb{K}^\Gamma : \sup_{i \in \Gamma} |\lambda_i| < \infty \right\},$$

e a função  $\|\cdot\|_\infty: \ell_\infty(\Gamma) \rightarrow [0, +\infty)$  dada por

$$\|(\lambda_i)_{i \in \Gamma}\|_\infty = \sup_{i \in \Gamma} |\lambda_i|.$$

Quando  $\Gamma = \mathbb{N}$ , temos  $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ .

**Proposição 2.1.2.** (a)  $\ell_\infty(\Gamma)$  é subespaço vetorial de  $\mathbb{K}^\Gamma$ .

(b)  $\|\cdot\|_\infty$  é uma norma em  $\ell_\infty(\Gamma)$ .

*Demonstração.* (a) Provemos que  $\ell_\infty(\Gamma)$  é fechado com respeito à soma e ao produto por escalar. Sejam  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma}$  e  $y = (\gamma_i)_{i \in \Gamma} \in \ell_\infty(\Gamma)$ . Para cada  $i \in \Gamma$ ,

$$|\lambda_i + \gamma_i| \leq |\lambda_i| + |\gamma_i| \leq \sup_{j \in \Gamma} |\lambda_j| + \sup_{j \in \Gamma} |\gamma_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Portanto  $x + y \in \ell_\infty(\Gamma)$  e

$$\|x + y\|_\infty = \sup_{i \in \Gamma} |\lambda_i + \gamma_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \quad (2.1)$$

Por outro lado, dados  $\gamma \in \mathbb{K}$  e  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \ell_\infty(\Gamma)$ ,

$$\sup_{i \in \Gamma} |\gamma \lambda_i| = |\gamma| \cdot \sup_{i \in \Gamma} |\lambda_i| = |\gamma| \cdot \|x\|_\infty.$$

Portanto  $\gamma \cdot x \in \ell_\infty(\Gamma)$  e

$$\|\gamma \cdot x\|_\infty = |\gamma| \cdot \|x\|_\infty. \quad (2.2)$$

(b) Segue de (2.1) e (2.2) que só resta provar que se  $\|x\|_\infty = 0$  então  $x = 0$ . Seja  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \ell_\infty(\Gamma)$  tal que  $\|x\|_\infty = 0$ . Para cada  $i \in \Gamma$ ,

$$|\lambda_i| \leq \sup_{j \in \Gamma} |\lambda_j| = \|x\|_\infty = 0,$$

donde segue que  $\lambda_i = 0$ , e portanto  $x = 0$ . □

A partir de agora consideraremos  $\ell_\infty(\Gamma)$  sempre munido da norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Proposição 2.1.3.**  $\ell_\infty(\Gamma)$  é um espaço de Banach.

*Demonstração.* Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de Cauchy em  $\ell_\infty(\Gamma)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , como  $x_n \in \ell_\infty(\Gamma)$  podemos escrever  $x_n = (\lambda_i^n)_{i \in \Gamma}$ , onde cada  $\lambda_i^n \in \mathbb{K}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $m, n \geq n_0$ , temos

$$\sup_{i \in \Gamma} |\lambda_i^m - \lambda_i^n| = \|x_m - x_n\|_\infty < \varepsilon.$$



Assim, para todos  $j \in \Gamma$  e  $m, n \geq n_0$ ,

$$|\lambda_j^m - \lambda_j^n| \leq \sup_{i \in \Gamma} |\lambda_i^m - \lambda_i^n| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Logo, para cada  $j \in \Gamma$ ,  $(\lambda_j^n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K}$  é uma sequência de Cauchy. Como  $\mathbb{K}$  é completo, a sequência  $(\lambda_j^n)_{n=1}^\infty$  converge a um elemento de  $\mathbb{K}$ , digamos  $\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_j^n$ . Defina  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \mathbb{K}^\Gamma$  e provemos que  $x \in \ell_\infty(\Gamma)$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  em  $\ell_\infty(\Gamma)$ . Fazendo  $m \rightarrow \infty$  em (2.3) segue que para todos  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq n_0$ , tem-se  $|\lambda_j - \lambda_j^n| \leq \varepsilon$  para cada  $j \in \Gamma$ . Isso prova que, para  $n \geq n_0$ ,  $x - x_n = (\lambda_j - \lambda_j^n)_{j \in \Gamma} \in \ell_\infty(\Gamma)$  e

$$\|x - x_n\|_\infty = \sup_{j \in \Gamma} |\lambda_j - \lambda_j^n| \leq \varepsilon. \quad (2.4)$$

Tomando  $n = n_0$ , temos  $x = (x - x_{n_0}) + x_{n_0} \in \ell_\infty(\Gamma)$ . Como  $\varepsilon > 0$  é qualquer e (2.4) vale para todo  $n \geq n_0$ , segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  em  $\ell_\infty(\Gamma)$ .  $\square$

**Definição 2.1.4.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados. Um operador  $I \in L(E; F)$  é dito *injeção métrica* se  $\|I(x)\|_F = \|x\|_E$  para todo  $x \in E$ .

É fácil ver que toda injeção métrica é contínua, injetora, tem norma igual a 1 e que sua inversa  $I^{-1}: I(E) \subset F \rightarrow E$  é também uma injeção métrica.

É usual chamar uma injeção métrica de isometria linear, mas para ser compatível com a terminologia normalmente usada no estudo de ideais injetivos, optamos pelo termo injeção métrica. A seguir apresentamos dois exemplos importantes de injeções métricas.

**Exemplo 2.1.5.** Sejam  $F$  um espaço normado e  $E \subset F$  um subespaço vetorial. Definamos o *operador inclusão*

$$I: E \rightarrow F, \quad I(x) = x.$$

É imediato ver que  $I$  é uma injeção métrica e que sua inversa é o operador identidade em  $E$ .

**Exemplo 2.1.6.** Seja  $E$  um espaço normado. O operador  $J_E: E \rightarrow E''$  definido por

$$J_E(x)(\varphi) = \varphi(x),$$

para todos  $x \in E$  e  $\varphi \in E'$ , é uma injeção métrica, que é chamado de *mergulho canônico de  $E$  em  $E''$* . Para a demonstração de que  $J_E$  é uma injeção métrica, veja [11, Proposição 4.3.1].

**Proposição 2.1.7.** Sejam  $E, F, G$  espaços normados e  $i: E \rightarrow F$  e  $j: F \rightarrow G$  injeções métricas. Então  $j \circ i: E \rightarrow G$  é também uma injeção métrica.

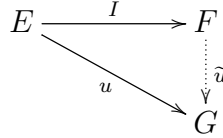
*Demonstração.* A linearidade de  $j \circ i$  segue da linearidade de  $i$  e  $j$ . Por outro lado, dado  $x \in E$ , temos

$$\|(j \circ i)(x)\| = \|j(i(x))\| = \|i(x)\| = \|x\|,$$

o que prova que  $j \circ i$  é uma injeção métrica.  $\square$

Passamos agora a estudar a propriedade dos espaços  $\ell_\infty(\Gamma)$  que os torna tão especiais para nossos propósitos.

**Definição 2.1.8.** Diz-se que um espaço de Banach  $G$  tem a *propriedade da extensão métrica* se para cada par de espaços de Banach  $E$  e  $F$ , cada injeção métrica  $I: E \rightarrow F$  e cada  $u \in \mathcal{L}(E; G)$ , existe  $\tilde{u} \in \mathcal{L}(F; G)$  tal que  $\tilde{u} \circ I = u$  e  $\|\tilde{u}\| \leq \|u\|$ .



**Observação 2.1.9.** Na Definição 2.1.8 vale também a outra desigualdade  $\|u\| \leq \|\tilde{u}\|$ . De fato, para todo  $x \in E$ ,

$$\|u(x)\| = \|\tilde{u}(I(x))\| \leq \|\tilde{u}\| \cdot \|I(x)\| = \|\tilde{u}\| \cdot \|x\|.$$

Portanto  $\|u\| \leq \|\tilde{u}\|$ .

A seguir veremos que para provar que um espaço de Banach tem a propriedade extensão métrica, basta considerar o operador inclusão no lugar de uma injeção métrica qualquer. Antes disso, lembremos que se  $F$  é um espaço de Banach e  $E$  um subespaço vetorial de  $F$ , então  $E$  é um espaço de Banach se, e somente se,  $E$  é fechado em  $F$  (Proposição 1.1.5). Devido a esse fato, consideraremos subespaços fechados na proposição abaixo.

**Proposição 2.1.10.** Um espaço de Banach  $G$  tem a *propriedade de extensão métrica* se, e somente se, para cada espaço de Banach  $F$ , cada subespaço fechado  $E$  de  $F$  e cada  $u \in \mathcal{L}(E; G)$ , existe uma extensão  $\tilde{u} \in \mathcal{L}(F; G)$  de  $u$  tal que  $\|\tilde{u}\| \leq \|u\|$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $G$  tenha a propriedade de extensão métrica e sejam  $F$  um espaço de Banach,  $E$  um subespaço fechado de  $F$  e  $u \in \mathcal{L}(E; G)$ . Consideremos o operador inclusão  $I: E \rightarrow F$  definido por

$$I(x) = x.$$

Então  $I$  é uma injeção métrica (Exemplo 2.1.5). Segue da hipótese que existe  $\tilde{u} \in \mathcal{L}(F; G)$  tal que  $\tilde{u} \circ I = u$  e  $\|\tilde{u}\| \leq \|u\|$ . Só resta provar que  $\tilde{u}$  é uma extensão de  $u$ . De fato, para cada  $x \in E$ ,

$$u(x) = (\tilde{u} \circ I)(x) = \tilde{u}(I(x)) = \tilde{u}(x).$$

Reciprocamente, suponhamos que  $G$  satisfaça a segunda condição e sejam  $E, F$  espaços de Banach,  $I: E \rightarrow F$  uma injeção métrica e  $u \in \mathcal{L}(E; G)$ . É imediato que o operador  $v = u \circ I^{-1}: I(E) \rightarrow G$  é linear e contínuo. Notemos também que  $I(E)$  é um subespaço fechado de  $F$ , pois  $I(E)$  é isomorfo isometricamente ao espaço de Banach  $E$ . Segue da hipótese que existe uma extensão  $\tilde{u} \in \mathcal{L}(F; G)$  de  $v$  tal que  $\|\tilde{u}\| \leq \|v\|$ . Vejamos que  $\tilde{u} \circ I = u$  e  $\|\tilde{u}\| \leq \|u\|$ . De fato, dado  $x \in E$ , tem-se

$$(\tilde{u} \circ I)(x) = \tilde{u}(I(x)) = v(I(x)) = (u \circ I^{-1})(I(x)) = u(x),$$

provando que  $\tilde{u} \circ I = u$ . Para finalizar,

$$\|\tilde{u}\| \leq \|v\| = \|u \circ I^{-1}\| \leq \|u\| \cdot \|I^{-1}\| = \|u\|.$$

□

O teorema a seguir explica o nosso interesse nos espaços  $\ell_\infty(\Gamma)$ .

**Teorema 2.1.11.** *O espaço  $\ell_\infty(\Gamma)$  tem a propriedade da extensão métrica.*

*Demonstração.* Provaremos que  $\ell_\infty(\Gamma)$  tem a propriedade da extensão métrica usando a Proposição 2.1.10. Sejam  $F$  um espaço de Banach,  $E$  um subespaço vetorial fechado de  $F$  e  $u \in \mathcal{L}(E; \ell_\infty(\Gamma))$ . Para cada  $x \in E$ , como  $u(x) \in \ell_\infty(\Gamma)$  podemos escrever  $u(x) = (\lambda_i^x)_{i \in \Gamma}$ , onde cada  $\lambda_i^x \in \mathbb{K}$ . Para  $i \in \Gamma$  fixo, definamos o funcional

$$\varphi_i: E \longrightarrow \mathbb{K}, \varphi_i(x) = \lambda_i^x.$$

Provemos que  $\varphi_i \in E'$ . Sejam  $x, y \in E$  e  $\gamma \in \mathbb{K}$ . Da linearidade de  $u$  e da definição das operações em  $\ell_\infty(\Gamma)$ , temos

$$(\lambda_j^{x+\gamma y})_{j \in \Gamma} = u(x + \gamma y) = u(x) + \gamma u(y) = (\lambda_j^x)_{j \in \Gamma} + \gamma (\lambda_j^y)_{j \in \Gamma} = (\lambda_j^x + \gamma \lambda_j^y)_{j \in \Gamma}.$$

Isso prova que  $\lambda_j^{x+\gamma y} = \lambda_j^x + \gamma \lambda_j^y$  para todo  $j \in \Gamma$ . Em particular,

$$\varphi_i(x + \gamma y) = \lambda_i^{x+\gamma y} = \lambda_i^x + \gamma \lambda_i^y = \varphi_i(x) + \gamma \varphi_i(y),$$

provando que  $\varphi_i$  é linear. Por outro lado, para  $x \in E$ ,

$$|\varphi_i(x)| = |\lambda_i^x| \leq \sup_{j \in \Gamma} |\lambda_j^x| = \|u(x)\|_\infty \leq \|u\| \cdot \|x\|.$$

Portanto  $\varphi_i$  é contínua e

$$\|\varphi_i\| \leq \|u\|. \quad (2.5)$$

Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach (Proposição 1.1.7), para cada  $i \in \Gamma$  existe uma extensão  $\tilde{\varphi}_i \in F'$  de  $\varphi_i$  tal que  $\|\tilde{\varphi}_i\| = \|\varphi_i\|$ . Definamos a aplicação  $\tilde{u}: F \longrightarrow \mathbb{K}^\Gamma$  mediante

$$\tilde{u}(x) = (\tilde{\varphi}_i(x))_{i \in \Gamma}.$$

Devemos provar que  $\tilde{u}(x) \in \ell_\infty(\Gamma)$ ,  $\tilde{u} \in \mathcal{L}(F; \ell_\infty(\Gamma))$ ,  $\|\tilde{u}\| \leq \|u\|$  e  $\tilde{u}$  estende  $u$ . Seja  $x \in F$ . Para cada  $i \in \Gamma$ , segue de (2.5) que

$$|\tilde{\varphi}_i(x)| \leq \|\tilde{\varphi}_i\| \cdot \|x\| = \|\varphi_i\| \cdot \|x\| \leq \|u\| \cdot \|x\|.$$

Portanto  $\tilde{u}(x) \in \ell_\infty(\Gamma)$  e

$$\|\tilde{u}(x)\|_\infty = \sup_{i \in \Gamma} |\tilde{\varphi}_i(x)| \leq \|u\| \cdot \|x\|. \quad (2.6)$$

A linearidade de  $\tilde{u}$  segue da linearidade dos funcionais  $\tilde{\varphi}_i$ . Por outro lado, segue da linearidade de  $\tilde{u}$  e de (2.6) que  $\tilde{u}$  é contínua e  $\|\tilde{u}\| \leq \|u\|$ . Finalmente, provemos que  $\tilde{u}$  estende  $u$ . Com efeito, para todo  $x \in E$ ,

$$\tilde{u}(x) = (\tilde{\varphi}_i(x))_{i \in \Gamma} = (\varphi_i(x))_{i \in \Gamma} = u(x).$$

Segue da Proposição 2.1.10 que  $\ell_\infty(\Gamma)$  tem a propriedade da extensão métrica. □

Prova-se também que os espaços  $L_\infty(\mu)$ , onde  $\mu$  é uma medida qualquer, têm a propriedade da extensão métrica. Como não usaremos este fato nesta dissertação, não apresentaremos a demonstração. O leitor interessado pode encontrá-la em [33, C.3.2 Proposition 2].

A seguir apresentamos uma injeção métrica que será muito útil para o estudo dos ideais injetivos.

**Proposição 2.1.12.** *Seja  $E$  um espaço vetorial normado. O operador  $I_E: E \rightarrow \ell_\infty(B_{E'})$  definido por*

$$I_E(x) = (\varphi(x))_{\varphi \in B_{E'}}$$

*é uma injeção métrica, que será chamada de injeção métrica canônica de  $E$  em  $\ell_\infty(B_{E'})$ .*

*Demonstração.* Por definição,

$$\ell_\infty(B_{E'}) = \left\{ (\lambda_\varphi)_{\varphi \in B_{E'}} \in \mathbb{K}^{B_{E'}} : \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\lambda_\varphi| < \infty \right\}.$$

Primeiro, provemos que o operador  $I_E$  está bem definido. Para todos  $x \in E$  e  $\varphi \in B_{E'}$ ,

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| \leq \|x\|.$$

Portanto,  $I_E(x) = (\varphi(x))_{\varphi \in B_{E'}} \in \ell_\infty(B_{E'})$ . Provemos que  $I_E$  é linear. Dados  $x, y \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} I_E(\lambda x + y) &= (\varphi(\lambda x + y))_{\varphi \in B_{E'}} = (\lambda\varphi(x) + \varphi(y))_{\varphi \in B_{E'}} \\ &= \lambda(\varphi(x))_{\varphi \in B_{E'}} + (\varphi(y))_{\varphi \in B_{E'}} = \lambda I_E(x) + I_E(y). \end{aligned}$$

Por outro lado, dado  $x \in E$ , segue da Proposição 1.1.8 que

$$\|I_E(x)\|_\infty = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \|x\|,$$

o que prova que  $I_E$  é uma injeção métrica. □

Da Proposição 2.1.12 temos o seguinte resultado:

**Corolário 2.1.13.** *Todo espaço normado é isometricamente isomorfo a um subespaço de algum espaço  $\ell_\infty(\Gamma)$ .*

## 2.2 O espaço $\ell_1(\Gamma)$ e a propriedade do levantamento métrico

Os espaços de Banach que estudaremos nesta seção serão essenciais na teoria de ideais sobrejetivos. Estudaremos também as sobrejeções métricas e provaremos que  $\ell_1(\Gamma)$  tem a propriedade do levantamento métrico.

Optamos por definir o espaço  $\ell_1(\Gamma)$  usando somas não ordenadas, e para isso faremos um breve estudo desse conceito. Na Proposição 2.2.5 mostraremos que a definição de soma

não ordenada considerada nesta dissertação é equivalente a uma condição usualmente utilizada neste caso. Nossas principais referências para esse estudo foram [20, 21].

Analogamente à seção anterior, uma função  $f$  do conjunto  $\Gamma$  a valores em um espaço vetorial normado  $E$  será chamada de *família indexada de elementos de  $E$* . E, também como anteriormente, chamando  $f(i) = x_i$  para cada  $i \in \Gamma$ , denotaremos a função  $f$  por  $(x_i)_{i \in \Gamma}$ . Por outro lado, dado um subconjunto finito  $J = \{i_1, \dots, i_n\}$  de  $\Gamma$ , como a soma  $x_{i_1} + \dots + x_{i_n}$  não depende da ordem que somemos, usaremos a notação usual  $x_{i_1} + \dots + x_{i_n} = \sum_{i \in J} x_i$ .

**Definição 2.2.1.** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $(x_i)_{i \in \Gamma}$  uma família indexada de elementos de  $E$ . Dizemos que a soma não ordenada  $\sum_{i \in \Gamma} x_i$  converge a  $x \in E$  se para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $I \subset \Gamma$  finito tal que para cada  $J \subset \Gamma$  finito que contém  $I$ , tem-se

$$\left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Neste caso escreveremos  $\sum_{i \in \Gamma} x_i = x$ . Uma soma não ordenada convergente é dita *incondicionalmente convergente*, mas por simplicidade diremos apenas que é convergente.

Vejamus que toda soma não ordenada convergente tem no máximo um número enumerável de termos não nulos.

**Proposição 2.2.2.** Seja  $\sum_{i \in \Gamma} x_i$  uma soma não ordenada convergente em um espaço normado. Então o conjunto  $\{i \in \Gamma : x_i \neq 0\}$  é finito ou enumerável.

*Demonstração.* Digamos  $\sum_{i \in \Gamma} x_i = x \in E$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe um subconjunto finito  $I_n$  de  $\Gamma$  tal que  $\left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \frac{1}{n}$  para cada  $J \subset \Gamma$  finito que contém  $I_n$ . Tome  $j \in \Gamma$  tal que  $j \notin I_n$ . Então  $I_n$  e  $I_n \cup \{j\}$  são subconjuntos finitos de  $\Gamma$  que contêm  $I_n$ , e portanto

$$\begin{aligned} \|x_j\| &= \left\| \sum_{i \in I_n \cup \{j\}} x_i - \sum_{i \in I_n} x_i \right\| = \left\| \left( x - \sum_{i \in I_n \cup \{j\}} x_i \right) - \left( x - \sum_{i \in I_n} x_i \right) \right\| \\ &\leq \left\| x - \sum_{i \in I_n \cup \{j\}} x_i \right\| + \left\| x - \sum_{i \in I_n} x_i \right\| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Provamos que  $\|x_j\| < \frac{2}{n}$  para todo  $j \notin I_n$ . Segue que se  $j \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ , então  $\|x_j\| \leq \frac{2}{n}$  para todo  $n$ , e portanto  $x_j = 0$ . Isso prova que

$$\{i \in \Gamma : x_i \neq 0\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

O resultado segue pois  $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  é finito ou enumerável por ser uma união enumerável de conjuntos finitos.  $\square$

Não é difícil verificar que se uma soma não ordenada é convergente, então seu limite é único. No Lema 2.2.23 daremos um exemplo importante de uma soma não ordenada convergente em um espaço vetorial normado. Analogamente ao caso de séries, diz-se que a soma não ordenada  $\sum_{i \in \Gamma} x_i$  é *absolutamente convergente* se a soma não ordenada  $\sum_{i \in \Gamma} \|x_i\|$  converge em  $\mathbb{R}$ . Na Proposição 2.2.25 provaremos que toda soma não ordenada absolutamente convergente em um espaço de Banach é convergente.

Para o caso de somas não ordenadas de números reais não negativos, temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.2.3.** *Sejam  $(\lambda_i)_{i \in \Gamma}$  uma família indexada de números reais não negativos e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . A soma não ordenada  $\sum_{i \in \Gamma} \lambda_i$  converge a  $\lambda$  se, e somente se,*

$$\lambda = \sup \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i : I \subset \Gamma \text{ é finito} \right\}.$$

*Demonstração.* Primeiramente, dados  $I_1, I_2 \subset \Gamma$  finitos tais que  $I_1 \subset I_2$ , como  $\lambda_i \geq 0$  para cada  $i \in \Gamma$ , tem-se

$$\sum_{i \in I_1} \lambda_i \leq \sum_{i \in I_2} \lambda_i.$$

( $\Rightarrow$ ) Dado  $\varepsilon > 0$ , por hipótese existe  $I \subset \Gamma$  finito tal que para cada  $J \subset \Gamma$  finito que contém  $I$ , tem-se

$$\lambda - \varepsilon < \sum_{i \in J} \lambda_i < \lambda + \varepsilon. \quad (2.7)$$

Seja  $J \subset \Gamma$  finito. Então  $(J \cup I) \subset \Gamma$  é finito e contém  $I$ . Portanto,

$$\sum_{i \in J} \lambda_i \leq \sum_{i \in I \cup J} \lambda_i < \lambda + \varepsilon.$$

Isso prova que  $\sup \left\{ \sum_{i \in J} \lambda_i : J \subset \Gamma \text{ é finito} \right\} \leq \lambda + \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$

obtemos  $\sup \left\{ \sum_{i \in J} \lambda_i : J \subset \Gamma \text{ é finito} \right\} \leq \lambda$ .

Por outro lado, por (2.7) sabemos que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $I \subset \Gamma$  finito tal que  $\sum_{i \in I} \lambda_i > \lambda - \varepsilon$ . Isso quer dizer que nenhum número menor que  $\lambda$  é cota superior do

conjunto  $\left\{ \sum_{i \in J} \lambda_i : J \subset \Gamma \text{ é finito} \right\}$ , donde segue que  $\lambda$  é a menor cota superior, ou seja,  $\lambda$  é o supremo.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $\varepsilon > 0$ . Segue da hipótese que existe  $I \subset \Gamma$  finito tal que

$$\lambda - \varepsilon < \sum_{i \in I} \lambda_i.$$

Logo, para cada  $J \subset \Gamma$  finito que contém  $I$ , tem-se

$$\lambda - \varepsilon < \sum_{i \in I} \lambda_i \leq \sum_{i \in J} \lambda_i.$$

Portanto,

$$\lambda - \sum_{i \in J} \lambda_i < \varepsilon$$

para todo  $J \subset \Gamma$  finito que contém  $I$ . Segue novamente da hipótese que  $\lambda - \sum_{i \in J} \lambda_i \geq 0$

para todo  $J \subset \Gamma$  finito. Consequentemente

$$\left| \lambda - \sum_{i \in J} \lambda_i \right| < \varepsilon$$

para todo  $J \subset \Gamma$  finito que contém  $I$ , provando que  $\sum_{i \in \Gamma} \lambda_i$  converge a  $\lambda$ .  $\square$

Provaremos a seguir que a definição de soma ordenada é equivalente a uma condição que aparece como definição em algumas referências.

Definimos o *suporte* de uma família indexada  $(x_i)_{i \in \Gamma}$  em um espaço normado por

$$\text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\} = \{i \in \Gamma : x_i \neq 0\}.$$

Nos dois resultados abaixo trabalharemos com famílias indexadas  $(x_i)_{i \in \Gamma}$  não nulas em um espaço normado, pois no caso em que a família indexada for nula, tem-se  $\text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\} = \emptyset$  e não faria sentido considerar a soma  $\sum_{i \in \text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\}} x_i$ .

**Observação 2.2.4.** Sejam  $E$  um espaço normado,  $(x_i)_{i \in \Gamma}$  uma família indexada não nula de elementos de  $E$  e  $x \in E$ . É fácil verificar que  $\sum_{i \in \Gamma} x_i = x$  se, e somente se,  $\sum_{i \in \text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\}} x_i = x$ .

**Proposição 2.2.5.** Sejam  $E$  um espaço normado,  $(x_i)_{i \in \Gamma}$  uma família indexada não nula de elementos de  $E$  e  $x \in E$ . Então a soma não ordenada  $\sum_{i \in \Gamma} x_i$  converge a  $x$  se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:

(a)  $\text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\}$  é um conjunto finito e  $\sum_{i \in \text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\}} x_i = x$ .

(b)  $\text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\}$  é um conjunto infinito enumerável e, para cada função bijetiva  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\}$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$  converge a  $x$ .

*Demonstração.* Denotemos, por simplicidade,  $\text{supp} = \text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\}$ . Para a primeira implicação, suponhamos que  $\sum_{i \in \Gamma} x_i = x$  e que não valha o item (a), e provemos que vale o

item (b). Como não vale o item (a),  $\text{supp}$  não é um conjunto finito. Segue da Proposição 2.2.2 que  $\text{supp}$  é um conjunto infinito enumerável. Provemos a segunda afirmação do item (b). Para isso, seja  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \text{supp}$  uma função bijetiva. Dado  $\varepsilon > 0$ , sabemos da Observação 2.2.4 que existe  $I \subset \text{supp}$  finito tal que para cada  $J \subset \text{supp}$  finito que contém  $I$ , tem-se

$$\left\| \sum_{i \in J} x_i - x \right\| < \varepsilon. \quad (2.8)$$

Como  $I$  é um subconjunto finito de  $\text{supp}$ ,  $\sigma^{-1}(I)$  é um subconjunto finito de  $\mathbb{N}$ . Logo,  $\sigma^{-1}(I) \subset \{1, \dots, n_0\}$  para algum  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Dado  $n \geq n_0$ , é claro que  $J = \sigma(\{1, \dots, n\})$  é um subconjunto finito de  $\text{supp}$  e  $J \supset \sigma(\{1, \dots, n_0\}) \supset I$ . Segue da equação (2.8) que

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_{\sigma(k)} - x \right\| = \left\| \sum_{i \in \sigma(\{1, \dots, n\})} x_i - x \right\| < \varepsilon.$$

Isso prova que  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = x$ .

Para a implicação inversa, suponhamos primeiramente que valha o item (a). Dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $I = \text{supp}$ . É claro que para cada  $J \subset \Gamma$  finito que contém  $I$ , tem-se

$$\left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| = 0 < \varepsilon.$$

Isso prova que  $\sum_{i \in \Gamma} x_i = x$ . Agora suponhamos que valha o item (b) e suponhamos também, por absurdo, que a soma não ordenada  $\sum_{i \in \Gamma} x_i$  não convirja a  $x$ . Segue da Observação 2.2.4 que existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $I \subset \text{supp}$  finito existe  $J \subset \text{supp}$  finito que contém  $I$  e

$$\left\| \sum_{i \in J} x_i - x \right\| \geq \delta.$$

Como  $\text{supp}$  é um conjunto infinito enumerável, podemos tomar uma função bijetiva  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \text{supp}$ . Logo, dado  $n \in \mathbb{N}$ , como  $\sigma(\{1, \dots, n+1\})$  é um subconjunto finito de  $\text{supp}$ , existe  $J_n \subset \text{supp}$  finito que contém  $\sigma(\{1, \dots, n+1\})$  e

$$\left\| \sum_{i \in J_n} x_i - x \right\| \geq \delta. \quad (2.9)$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{N}$ :

$$A_n = \sigma^{-1}(J_n) \quad \text{e} \quad M_n = A_n \setminus \{1, \dots, n\}.$$

É claro que  $(M_n)_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência de subconjuntos finitos não vazios dos naturais e que  $\text{mín } M_n > n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Denotemos  $m_1 = 1$  e  $N_1 = M_1$ , e definamos recursivamente as seguintes sequências:  $m_n = \text{máx } N_{n-1} + 1$  e  $N_n = M_{m_n}$ . Logo,

$$\text{mín } N_n = \text{mín } M_{m_n} > m_n = \text{máx } N_{n-1} + 1 \quad (2.10)$$

para todo  $n \geq 2$ . Segue da desigualdade  $\text{mín } N_n > m_n$  e de um argumento simples de indução que

$$n \leq m_n \quad (2.11)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . O símbolo  $|B|$  denota o número de elementos do conjunto finito  $B$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$ , segue da equação (2.10) que  $N_n$  e  $\{m_n + 1, \dots, m_n + |N_n|\}$  são subconjuntos de  $\{m_n + 1, \dots, m_{n+1}\}$ . Assim, podemos escolher uma função bijetiva

$$\rho_n: \{m_n + 1, \dots, m_{n+1}\} \rightarrow \{m_n + 1, \dots, m_{n+1}\}$$



que leva o conjunto  $\{m_n + 1, \dots, m_n + |N_n|\}$  em  $N_n$ . Definamos a função  $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  por

$$\rho(1) = 1, \quad \rho(k) = \rho_n(k) \text{ se } n \in \mathbb{N} \text{ e } k \in \{m_n + 1, \dots, m_{n+1}\}.$$

Segue da bijetividade das funções  $\rho_1, \rho_2, \dots$  que  $\rho$  é também uma função bijetiva. Vejamos que

$$\rho(\{1, \dots, m_n + |N_n|\}) = A_{m_n} \quad (2.12)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Com efeito, dado  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \rho(\{1, \dots, m_n + |N_n|\}) &= \rho(\{1\} \cup \{m_1 + 1, \dots, m_2\} \cup \dots \cup \{m_{n-1} + 1, \dots, m_n\} \cup \\ &\quad \cup \{m_n + 1, \dots, m_n + |N_n|\}) \\ &= \rho(\{1\}) \cup \rho_1(\{m_1 + 1, \dots, m_2\}) \cup \dots \cup \\ &\quad \cup \rho_{n-1}(\{m_{n-1} + 1, \dots, m_n\}) \cup \rho_n(\{m_n + 1, \dots, m_n + |N_n|\}) \\ &= \{1\} \cup \{m_1 + 1, \dots, m_2\} \cup \dots \cup \{m_{n-1} + 1, \dots, m_n\} \cup N_n \\ &= \{1, \dots, m_n\} \cup N_n = A_{m_n}. \end{aligned}$$

Finalmente, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tomando  $q = m_n + |N_n|$ , temos:  $q > m_n \stackrel{(2.11)}{\geq} n$  e

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^q x_{(\sigma \circ \rho)(j)} - x \right\| &= \left\| \sum_{k \in \rho(\{1, \dots, m_n + |N_n|\})} x_{\sigma(k)} - x \right\| \stackrel{(2.12)}{=} \left\| \sum_{k \in A_{m_n}} x_{\sigma(k)} - x \right\| \\ &= \left\| \sum_{i \in \sigma(A_{m_n})} x_i - x \right\| \stackrel{(2.9)}{\geq} \delta. \end{aligned}$$

Isso prova que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{(\sigma \circ \rho)(n)}$  não converge para  $x$ , o que contradiz a hipótese.  $\square$

Consideramos que o conjunto vazio é um conjunto finito.

**Corolário 2.2.6.** *Seja  $(x_i)_{i \in \Gamma}$  uma família indexada no espaço normado  $E$ . Então a soma não ordenada  $\sum_{i \in \Gamma} x_i$  é convergente em  $E$  se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:*

- (a)  $\text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\}$  é um conjunto finito.
- (b)  $\text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\}$  é um conjunto infinito enumerável e, para cada função bijetiva  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\}$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$  é convergente em  $E$ .

*Demonstração.* A equivalência é trivialmente verificada no caso em que a família indexada  $(x_i)_{i \in \Gamma}$  é nula. Suponhamos o caso contrário. Neste caso, uma implicação segue da Proposição 2.2.5. Para a implicação inversa, suponhamos primeiramente que valha o item (a). Segue novamente da Proposição 2.2.5 que a soma não ordenada  $\sum_{i \in \Gamma} x_i$  é convergente em  $E$ . Suponhamos agora que valha o item (b). Tomemos uma função bijetiva  $\sigma_0: \mathbb{N} \rightarrow \text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\}$  e definamos a sequência  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  em  $E$  por  $y_n = x_{\sigma_0(n)}$  e denotemos  $y =$

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ . Vejamos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  é incondicionalmente convergente. Com efeito, dada uma função bijetiva  $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , segue da hipótese que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_{\rho(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_0(\rho(n))} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{(\sigma_0 \circ \rho)(n)}$$

é convergente. Isso prova que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  é incondicionalmente convergente. Finalmente, dada uma função bijetiva  $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\}$ , segue da Proposição 1.1.14 que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\rho(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_0((\sigma_0^{-1} \circ \rho)(n))} = \sum_{n=1}^{\infty} y_{(\sigma_0^{-1} \circ \rho)(n)} = y.$$

Pela Proposição 2.2.5 concluímos que a soma não ordenada  $\sum_{i \in \Gamma} x_i$  converge a  $y$ .  $\square$

Se uma soma não ordenada  $\sum_{i \in \Gamma} \lambda_i$  de números não negativos for convergente, escreveremos  $\sum_{i \in \Gamma} \lambda_i < \infty$ . Agora podemos definir o espaço  $\ell_1(\Gamma)$ .

**Definição 2.2.7.** Dado um conjunto não vazio  $\Gamma$ , definimos:

$$\ell_1(\Gamma) = \left\{ (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \mathbb{K}^{\Gamma} : \sum_{i \in \Gamma} |\lambda_i| < \infty \right\}.$$

Definimos também a função

$$\|\cdot\|_1: \ell_1(\Gamma) \rightarrow [0, +\infty), \quad \|(\lambda_i)_{i \in \Gamma}\|_1 = \sum_{i \in \Gamma} |\lambda_i|.$$

Quando  $\Gamma = \mathbb{N}$ , temos  $\ell_1 = \ell_1(\mathbb{N})$ .

Para provar que  $\ell_1(\Gamma)$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ , precisamos das seguintes propriedades das somas não ordenadas convergentes.

**Lema 2.2.8.** *Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $(x_i)_{i \in \Gamma}$  e  $(y_i)_{i \in \Gamma}$  conjuntos indexados de elementos de  $E$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ .*

- (a) *Se  $\sum_{i \in \Gamma} x_i = x$  então  $\sum_{i \in \Gamma} \lambda x_i = \lambda x$ .*
- (b) *Se  $\sum_{i \in \Gamma} x_i = x$  e  $\sum_{i \in \Gamma} y_i = y$  então  $\sum_{i \in \Gamma} (x_i + y_i) = x + y$ .*

*Demonstração.* (a) Consideremos  $\lambda \neq 0$ , pois o caso contrario é trivial. Seja  $\varepsilon > 0$ . Então existe  $I \subset \Gamma$  finito tal que para cada  $J \subset \Gamma$  finito que contém a  $I$ , tem-se

$$\left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Portanto

$$\left\| \lambda x - \sum_{i \in J} \lambda x_i \right\| = \left\| \lambda \left( x - \sum_{i \in J} x_i \right) \right\| = |\lambda| \cdot \left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Isto prova que  $\sum_{i \in \Gamma} \lambda x_i = \lambda x$ .

(b) Seja  $\varepsilon > 0$ . Então existe  $I_1 \subset \Gamma$  finito tal que para cada  $J \subset \Gamma$  finito que contém a  $I_1$ , tem-se

$$\left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Também existe  $I_2 \subset \Gamma$  finito tal que para cada  $J \subset \Gamma$  finito que contém a  $I_2$ , tem-se

$$\left\| y - \sum_{i \in J} y_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

É claro que  $I = I_1 \cup I_2$  é um subconjunto finito de  $\Gamma$ . Para cada  $J \subset \Gamma$  finito tal que  $J \supset I$ , tem-se  $J \supset I_1$  e  $J \supset I_2$ , e portanto

$$\begin{aligned} \left\| x + y - \sum_{i \in J} (x_i + y_i) \right\| &= \left\| x - \sum_{i \in J} x_i + y - \sum_{i \in J} y_i \right\| \\ &\leq \left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| + \left\| y - \sum_{i \in J} y_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova que  $\sum_{i \in \Gamma} (x_i + y_i) = x + y$ . □

**Lema 2.2.9.** *Sejam  $(\lambda_i)_{i \in \Gamma}$  e  $(\gamma_i)_{i \in \Gamma}$  conjuntos indexados de números reais não negativos tais que  $\lambda_i \leq \gamma_i$  para cada  $i \in \Gamma$ . Se  $\sum_{i \in \Gamma} \gamma_i < \infty$ , então  $\sum_{i \in \Gamma} \lambda_i < \infty$  e*

$$\sum_{i \in \Gamma} \lambda_i \leq \sum_{i \in \Gamma} \gamma_i.$$

*Demonstração.* Seja  $\gamma = \sum_{i \in \Gamma} \gamma_i$ . Pela Proposição 2.2.3, para cada  $J \subset \Gamma$  finito é verdade que

$$\sum_{i \in J} \lambda_i \leq \sum_{i \in J} \gamma_i \leq \gamma.$$

Portanto

$$\sup \left\{ \sum_{i \in J} \lambda_i : J \subset \Gamma \text{ finito} \right\} \leq \gamma.$$

Novamente pela Proposição 2.2.3,  $\sum_{i \in \Gamma} \lambda_i$  é convergente e  $\sum_{i \in \Gamma} \lambda_i \leq \gamma = \sum_{i \in \Gamma} \gamma_i$ . □

Agora estamos em condições de provar que  $\ell_1(\Gamma)$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ .

**Proposição 2.2.10.** (a)  $\ell_1(\Gamma)$  é subespaço vetorial de  $\mathbb{K}^\Gamma$ .

(b)  $\|\cdot\|_1$  é uma norma em  $\ell_1(\Gamma)$ .

*Demonstração.* (a) Provemos que  $\ell_1(\Gamma)$  é fechado com respeito à soma e ao produto por escalar. Sejam  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma}$ ,  $y = (\gamma_i)_{i \in \Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$ . Usando os Lemas 2.2.8 e 2.2.9, temos que  $\sum_{i \in \Gamma} |\lambda_i + \gamma_i| < \infty$  e

$$\sum_{i \in \Gamma} |\lambda_i + \gamma_i| \leq \sum_{i \in \Gamma} (|\lambda_i| + |\gamma_i|) = \sum_{i \in \Gamma} |\lambda_i| + \sum_{i \in \Gamma} |\gamma_i|,$$

provando que  $x + y \in \ell_1(\Gamma)$  e

$$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1. \quad (2.13)$$

Por outro lado, sejam  $\gamma \in \mathbb{K}$  e  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$ . Pelo Lema 2.2.8 temos  $\sum_{i \in \Gamma} |\gamma \lambda_i| < \infty$  e

$$\sum_{i \in \Gamma} |\gamma \lambda_i| = \sum_{i \in \Gamma} |\gamma| \cdot |\lambda_i| = |\gamma| \cdot \sum_{i \in \Gamma} |\lambda_i|,$$

provando que  $\gamma \cdot x \in \ell_1(\Gamma)$  e

$$\|\gamma \cdot x\|_1 = |\gamma| \cdot \|x\|_1. \quad (2.14)$$

(b) Segue de (2.13) e (2.14) que só resta provar que  $\|x\|_1 = 0$  se, e somente se,  $x = (0)_{i \in \Gamma}$ . Se  $x = (0)_{i \in \Gamma}$ , então

$$\sup \left\{ \sum_{i \in J} |0| : J \subset \Gamma \text{ finito} \right\} = \sup\{0\} = 0.$$

Segue da Proposição 2.2.3 que  $\|x\|_1 = 0$ . Por outro lado, seja  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$  tal que  $\|x\|_1 = 0$ . Para cada  $i \in \Gamma$ , aplicando novamente a Proposição 2.2.3,

$$|\lambda_i| \leq \sup \left\{ \sum_{j \in J} |\lambda_j| : J \subset \Gamma \text{ finito} \right\} = \|x\|_1 = 0.$$

Portanto  $\lambda_i = 0$  para todo  $i \in \Gamma$ , isto é,  $x = (0)_{i \in \Gamma}$ . □

A partir de agora consideraremos  $\ell_1(\Gamma)$  sempre munido da norma  $\|\cdot\|_1$ .

**Proposição 2.2.11.**  $\ell_1(\Gamma)$  é um espaço de Banach.

*Demonstração.* Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de Cauchy em  $\ell_1(\Gamma)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , como  $x_n \in \ell_1(\Gamma)$  podemos escrever  $x_n = (\lambda_i^n)_{i \in \Gamma}$ , onde cada  $\lambda_i^n \in \mathbb{K}$ . Seja  $\varepsilon > 0$ . Então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $m, n \geq n_0$ , temos

$$\sum_{i \in \Gamma} |\lambda_i^m - \lambda_i^n| = \|x_m - x_n\|_1 < \varepsilon. \quad (2.15)$$

Segue da Proposição 2.2.3 que para cada  $j \in \Gamma$ ,

$$|\lambda_j^m - \lambda_j^n| \leq \sum_{i \in \Gamma} |\lambda_i^m - \lambda_i^n| < \varepsilon.$$

Isso prova que para cada  $j \in \Gamma$ ,  $(\lambda_j^n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K}$  é uma sequência de Cauchy. Como  $\mathbb{K}$  é completo,  $(\lambda_j^n)_{n=1}^\infty$  converge a um elemento de  $\mathbb{K}$ , digamos  $\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_j^n$ . Definimos  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma}$  e provaremos que  $x \in \ell_1(\Gamma)$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  em  $\ell_1(\Gamma)$ . Segue de (2.15) e da Proposição 2.2.3 que para todos  $m, n \geq n_0$  e todo subconjunto finito  $J = \{i_1, \dots, i_n\}$  de  $\Gamma$ ,

$$|\lambda_{i_1}^m - \lambda_{i_1}^n| + \dots + |\lambda_{i_k}^m - \lambda_{i_k}^n| < \varepsilon. \quad (2.16)$$

Fazendo  $m \rightarrow \infty$  em (2.16), obtemos

$$\sum_{i \in J} |\lambda_i - \lambda_i^n| = |\lambda_{i_1} - \lambda_{i_1}^n| + \dots + |\lambda_{i_k} - \lambda_{i_k}^n| \leq \varepsilon$$

para todo subconjunto finito  $J = \{i_1, \dots, i_n\}$  de  $\Gamma$ . Portanto,

$$\sup \left\{ \sum_{i \in J} |\lambda_i - \lambda_i^n| : J \subset \Gamma \text{ finito} \right\} \leq \varepsilon$$

para cada  $n \geq n_0$ . Pela Proposição 2.2.3, a soma  $\sum_{i \in \Gamma} |\lambda_i - \lambda_i^n|$  converge ao supremo anterior, portanto  $x - x_n \in \ell_1(\Gamma)$  e

$$\|x - x_n\|_1 = \sum_{i \in \Gamma} |\lambda_i - \lambda_i^n| \leq \varepsilon. \quad (2.17)$$

Fixando  $\varepsilon > 0$  e tomando  $n = n_0$ , temos  $x = (x - x_{n_0}) + x_{n_0} \in \ell_1(\Gamma)$ . E segue de (2.17) que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  em  $\ell_1(\Gamma)$ .  $\square$

Para definir a propriedade dual da propriedade da extensão métrica, descrita na Definição 2.1.8, precisamos definir o que é uma sobrejeção métrica.

**Definição 2.2.12.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados. Um operador  $s \in L(E; F)$  é uma *sobrejeção métrica* se  $s$  é sobrejetivo e

$$\|y\|_F = \inf \{ \|x\|_E : x \in E \text{ e } s(x) = y \}$$

para todo  $y \in F$ .

Lembre-se que  $\mathring{B}_E$  denota a bola unitária aberta do espaço normado  $E$ .

**Proposição 2.2.13.** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados e  $s: E \rightarrow F$  uma sobrejeção métrica. Então:*

(a)  $s(\mathring{B}_E) = \mathring{B}_F$ .

(b)  $s$  é contínua e  $\|s\| = 1$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in E$ , segue da definição de sobrejeção métrica que

$$\|s(x)\| = \inf \{ \|x_1\| : x_1 \in E \text{ e } s(x_1) = s(x) \}.$$

Como  $x \in \{x_1 \in E : s(x_1) = s(x)\}$ , temos que

$$\|s(x)\| \leq \|x\|. \quad (2.18)$$

(a) Provemos que  $s(\overset{\circ}{B}_E) \subset \overset{\circ}{B}_F$ . Para  $x \in \overset{\circ}{B}_E$ , segue da equação (2.18) que

$$\|s(x)\| \leq \|x\| < 1.$$

Assim,  $s(x) \in \overset{\circ}{B}_F$  e portanto,  $s(\overset{\circ}{B}_E) \subset \overset{\circ}{B}_F$ . Para provar a outra inclusão  $\overset{\circ}{B}_F \subset s(\overset{\circ}{B}_E)$ , seja  $y \in \overset{\circ}{B}_F$ . Como  $\|y\| = \inf \{\|x\| : x \in E \text{ e } s(x) = y\}$  e  $\|y\| < 1$ , segue da definição de ínfimo que existe  $x \in E$  tal que  $s(x) = y$  e  $\|x\| < 1$ . Logo,  $x \in \overset{\circ}{B}_E$  e portanto,  $\overset{\circ}{B}_F \subset s(\overset{\circ}{B}_E)$ .

(b) A continuidade de  $s$  segue da equação (2.18). Por outro lado, segue da Proposição 1.1.2 e do item (a) desta proposição que

$$\|s\| = \sup_{x \in \overset{\circ}{B}_E} \|s(x)\| = \sup_{y \in \overset{\circ}{B}_F} \|y\| = 1.$$

□

Um exemplo importante de sobrejeção métrica é a projeção  $\pi: E \rightarrow E/M$  de um espaço normado  $E$  sobre o espaço quociente  $E/M$ , onde  $M$  é um subespaço fechado de  $E$ . Veremos esse exemplo na Proposição 2.2.18. Outro exemplo importante de sobrejeção métrica será apresentado na Proposição 2.2.27. Para ver o exemplo da projeção, faremos um breve estudo sobre espaços quocientes. Nossa principal referência é o livro [24].

Lembremos as seguintes definições da Álgebra Linear.

**Definição 2.2.14.** Seja  $M$  um subespaço vetorial do espaço vetorial  $X$ . Definimos a relação  $\sim$  em  $X$  por

$$x \sim y \text{ se } x - y \in M$$

para todos  $x, y \in X$ . Para cada  $a \in X$ , definimos também

$$[a] = \{x \in X : x \sim a\}.$$

É fácil verificar que  $\sim$  é uma relação de equivalência. Dado  $a \in X$ , definimos

$$a + M = \{a + x : x \in M\}.$$

É fácil verificar também que

$$[a] = a + M.$$

**Definição 2.2.15** (Espaço quociente). Seja  $M$  um subespaço vetorial do espaço vetorial  $X$ . O espaço quociente  $X/M$  é a coleção  $X/M = \{x + M : x \in X\}$  munido das operações dadas pelas fórmulas

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M$$

e

$$\lambda \cdot (x + M) = (\lambda x) + M.$$

Sejam  $M$  e  $X$  como na definição acima. Dois elementos  $x + M$  e  $y + M$  de  $X/M$  são iguais se, e somente se,  $x - y \in M$ . Usando isso, é fácil provar que as operações definidas acima estão bem definidas. É fácil provar também que  $X/M$  munido de essas operações é um espaço vetorial. Notar que o zero de  $X/M$  é  $M = 0 + M$  e que  $-(x + M) = (-x) + M$  para todo  $x \in X$ .

**Proposição 2.2.16.** *Seja  $M$  um subespaço fechado do espaço normado  $E$ . Então:*

(a) *A função  $\|\cdot\|: E/M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$\|a + M\| = d(a, M) = \inf\{\|a - m\| : m \in M\},$$

*é uma norma em  $E/M$ .*

(b) *Se  $E$  é completo então  $E/M$  é também completo.*

*Demonstração.* Veja [24, Theorem 1.7.4 e Theorem 1.7.7]. □

A partir de agora, consideraremos ao espaço quociente  $E/M$  munido dessa norma.

**Definição 2.2.17.** *Seja  $M$  um subespaço fechado do espaço normado  $E$ . A projeção de  $E$  sobre o espaço quociente  $E/M$  é a função  $\pi: E \rightarrow E/M$  definida por*

$$\pi(x) = x + M.$$

**Proposição 2.2.18.** *Seja  $M$  um subespaço fechado do espaço normado  $E$ . Então*

(a)  $\|a + M\| = \inf\{\|a + m\| : m \in M\}$  *para cada  $a \in E$ .*

(b)  $\pi$  *é uma sobrejeção métrica.*

*Demonstração.* (a) Com efeito, seja  $a \in E$ . Devemos provar que

$$\inf\{\|a - m\| : m \in M\} = \inf\{\|a + m\| : m \in M\}. \quad (2.19)$$

Como  $M$  é subespaço vetorial de  $E$ , segue que

$$\{a - m : m \in M\} = \{a + m : m \in M\},$$

donde segue a equação (2.19).

(b) Com efeito, a sobrejetividade de  $\pi$  segue da definição de  $E/M$ . Provemos que  $\pi$  é linear. Dados  $x, y \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\pi(\lambda x + y) = (\lambda x + y) + M = \lambda(x + M) + (y + M) = \lambda\pi(x) + \pi(y).$$

Resta provar que, para cada  $a \in E$ ,

$$\|a + M\| = \inf\{\|x\| : x \in E \text{ e } \pi(x) = a + M\}. \quad (2.20)$$

Para isso, seja  $a \in E$ . Então

$$\begin{aligned} \{x \in E : \pi(x) = a + M\} &= \{x \in E : x - a \in M\} \\ &= \{a + m : m \in M\}, \end{aligned}$$

e daí,

$$\inf\{\|x\| : x \in E \text{ e } \pi(x) = a + M\} = \inf\{\|a + m\| : m \in M\} = \|a + M\|,$$

onde a última igualdade segue do item (a) desta proposição. Obtemos assim a equação (2.20), provando que  $\pi$  é uma sobrejeção métrica.  $\square$

A seguir veremos que a relação entre sobrejeção métrica e espaço quociente é ainda mais estreita.

**Proposição 2.2.19.** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados. Se  $s: E \rightarrow F$  é uma sobrejeção métrica, então  $F$  é isomorfo isometricamente ao espaço quociente  $E/\ker s$ , onde  $\ker s = \{x \in E : s(x) = 0\}$ .*

*Demonstração.* Veja [42, Proposição 3.27].  $\square$

Voltamos agora a estudar as sobrejeções métricas.

**Proposição 2.2.20.** *Sejam  $E, F, G$  espaços normados e  $s: E \rightarrow F$  e  $t: F \rightarrow G$  sobrejeções métricas. Então  $t \circ s: E \rightarrow G$  é também uma sobrejeção métrica.*

*Demonstração.* A linearidade de  $t \circ s$  segue da linearidade de  $t$  e de  $s$  e a sobrejetividade de  $t \circ s$  segue da sobrejetividade de  $t$  e de  $s$ . Resta provar que, para cada  $z \in G$ ,

$$\|z\| = \inf\{\|x\| : x \in E \text{ e } t(s(x)) = z\}. \quad (2.21)$$

Para isso, seja  $z \in G$  qualquer. Dado  $x \in E$  tal que  $t(s(x)) = z$ , segue da Proposição 2.2.13 que

$$\|z\| = \|t(s(x))\| \leq \|t\| \cdot \|s\| \cdot \|x\| = \|x\|,$$

e portanto

$$\|z\| \leq \inf\{\|x\| : x \in E \text{ e } t(s(x)) = z\}. \quad (2.22)$$

Por outro lado, seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $t$  é uma sobrejeção métrica,

$$\|z\| = \inf\{\|y\| : y \in F \text{ e } t(y) = z\}.$$

Portanto, existe  $y_1 \in F$  tal que  $t(y_1) = z$  e

$$\|y_1\| < \|z\| + \varepsilon. \quad (2.23)$$

Novamente, por  $s$  ser uma sobrejeção métrica temos

$$\|y_1\| = \inf\{\|x\| : x \in E \text{ e } s(x) = y_1\}.$$

Existe então  $x_1 \in E$  tal que  $s(x_1) = y_1$  e  $\|x_1\| < \|y_1\| + \varepsilon$ . Combinando isso com a equação (2.23) temos

$$\|x_1\| < \|y_1\| + \varepsilon < \|z\| + 2\varepsilon. \quad (2.24)$$

Note também que  $t(s(x_1)) = t(y_1) = z$ . Segue da equação (2.24) que

$$\inf\{\|x\| : x \in E \text{ e } t(s(x)) = z\} < \|z\| + 2\varepsilon.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  obtemos

$$\inf\{\|x\| : x \in E \text{ e } t(s(x)) = z\} \leq \|z\|. \quad (2.25)$$

Combinando as equações (2.22) e (2.25) temos a igualdade da equação (2.21), provando que  $t \circ s$  é uma sobrejeção métrica.  $\square$



**Definição 2.2.21.** Diz-se que um espaço de Banach  $E$  tem a *propriedade do levantamento métrico* se para cada par de espaços de Banach  $F$  e  $G$ , cada sobrejeção métrica  $s: F \rightarrow G$ , cada  $u \in \mathcal{L}(E; G)$  e cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E; F)$  tal que  $u = s \circ \tilde{u}$  e  $\|\tilde{u}\| \leq (1 + \varepsilon)\|u\|$ .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{u}} & F \\ & \searrow u & \downarrow s \\ & & G \end{array}$$

Nosso próximo objetivo é provar que os espaços  $\ell_1(\Gamma)$  têm a propriedade do levantamento métrico, para isso precisaremos dos seguintes resultados preparatórios.

**Lema 2.2.22.** *Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $K \subset \Gamma$  finito e  $(x_i)_{i \in \Gamma}$  uma família indexada de elementos de  $E$  tal que  $\sum_{i \in \Gamma} x_i$  é convergente. Definamos a família indexada  $(y_i)_{i \in \Gamma}$  de elementos de  $E$  por*

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{se } i \in \Gamma \setminus K \\ 0 & \text{se } i \in K. \end{cases}$$

$$\text{Então } \sum_{i \in \Gamma} y_i = \sum_{i \in \Gamma} x_i - \sum_{i \in K} x_i.$$

*Demonstração.* Fazemos o caso em que  $\Gamma$  é um conjunto infinito, pois o caso contrario é trivial. Sejam  $x = \sum_{i \in \Gamma} x_i$  e  $\varepsilon > 0$ . Então existe  $I_1 \subset \Gamma$  finito tal que para cada  $J \subset \Gamma$  finito que contém a  $I_1$ , tem-se

$$\left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Como  $\Gamma$  é um conjunto infinito, podemos tomar um subconjunto finito  $I_2$  de  $\Gamma$  tal que  $I_2 \supsetneq I_1 \cup K$ . Então, para cada  $J \subset \Gamma$  finito tal que  $J \supset I_2$  temos que  $J \supset I_1$  e  $J \supsetneq K$ , daí

$$\begin{aligned} \left\| \left( x - \sum_{i \in K} x_i \right) - \sum_{i \in J} y_i \right\| &= \left\| x - \left( \sum_{i \in K} x_i + \sum_{i \in J} y_i \right) \right\| \\ &= \left\| x - \left( \sum_{i \in K} x_i + \sum_{i \in J \setminus K} x_i \right) \right\| = \left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso prova que  $\sum_{i \in \Gamma} y_i = \sum_{i \in \Gamma} x_i - \sum_{i \in K} x_i$ . □

Para cada  $i \in \Gamma$ , definamos  $e_i$  como a família indexada de elementos de  $\mathbb{K}$  que tem  $i$ -ésima coordenada igual a 1 e as demais coordenadas iguais a 0. É imediato que  $e_i \in \ell_1(\Gamma)$  e  $\|e_i\|_1 = 1$ .

**Lema 2.2.23.** *Para cada  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$ , tem-se  $x = \sum_{i \in \Gamma} \lambda_i e_i$ .*

*Demonstração.* Seja  $a = \sum_{i \in \Gamma} |\lambda_i| \in \mathbb{R}$ . Para cada  $J \subset \Gamma$  finito, é claro que  $x - \sum_{i \in J} \lambda_i e_i \in \ell_1(\Gamma)$ , e portanto podemos escrever  $x - \sum_{i \in J} \lambda_i e_i = (\gamma_i)_{i \in \Gamma}$ . É fácil ver que

$$\gamma_i = \begin{cases} \lambda_i & \text{se } i \in \Gamma \setminus J \\ 0 & \text{se } i \in J. \end{cases}$$

Considerando a família indexada  $(|\lambda_i|)_{i \in \Gamma}$  e usando o Lema 2.2.22, tem-se  $\sum_{i \in \Gamma} |\gamma_i| = \sum_{i \in \Gamma} |\lambda_i| - \sum_{i \in J} |\lambda_i|$ . Consequentemente,

$$\left\| x - \sum_{i \in J} \lambda_i e_i \right\|_1 = a - \sum_{i \in J} |\lambda_i|. \quad (2.26)$$

Como  $a = \sum_{i \in \Gamma} |\lambda_i|$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $I \subset \Gamma$  finito tal que para cada  $J \subset \Gamma$  finito que contém  $I$ , tem-se

$$\left| a - \sum_{i \in J} |\lambda_i| \right| < \varepsilon. \quad (2.27)$$

Segue de (2.26) e (2.27) que

$$\left\| x - \sum_{i \in J} \lambda_i e_i \right\|_1 < \varepsilon,$$

o que prova que  $x = \sum_{i \in \Gamma} \lambda_i e_i$ . □

**Lema 2.2.24.** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados,  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  e  $(x_i)_{i \in \Gamma}$  uma família indexada de elementos de  $E$ . Se  $x = \sum_{i \in \Gamma} x_i$  em  $E$ , então  $u(x) = \sum_{i \in \Gamma} u(x_i)$  em  $F$ .*

*Demonstração.* Consideremos  $u \neq 0$ , pois o caso contrário é trivial. Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $I \subset \Gamma$  finito tal que para cada  $J \subset \Gamma$  finito que contém  $I$ , tem-se

$$\left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{\|u\|}.$$

Segue que, para cada  $J \subset \Gamma$  finito que contém  $I$ ,

$$\left\| u(x) - \sum_{i \in J} u(x_i) \right\| = \left\| u \left( x - \sum_{i \in J} x_i \right) \right\| \leq \|u\| \cdot \left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \varepsilon,$$

o que nos permite concluir que  $u(x) = \sum_{i \in \Gamma} u(x_i)$ . □

Chegamos agora ao último resultado preparatório, o qual, além de nos ser útil, tem interesse próprio óbvio.

**Proposição 2.2.25.** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $(x_i)_{i \in \Gamma}$  uma família indexada de elementos de  $E$ . Se  $\sum_{i \in \Gamma} \|x_i\| < \infty$  então a soma não ordenada  $\sum_{i \in \Gamma} x_i$  é convergente em  $E$  e*

$$\left\| \sum_{i \in \Gamma} x_i \right\| \leq \sum_{i \in \Gamma} \|x_i\|.$$

*Demonstração.* Note que  $\text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\} = \text{supp}\{(\|x_i\|)_{i \in \Gamma}\}$ . Por simplicidade, denotemos  $\text{supp} = \text{supp}\{(x_i)_{i \in \Gamma}\}$ . Como  $\sum_{i \in \Gamma} \|x_i\| < \infty$ , segue da Proposição 2.2.2 que  $\text{supp}$  é um conjunto finito ou infinito enumerável. Suponhamos primeiramente que  $\text{supp}$  seja um conjunto finito. Do Corolário 2.2.6 segue que  $\sum_{i \in \Gamma} x_i$  é convergente em  $E$ . A desigualdade

$\left\| \sum_{i \in \Gamma} x_i \right\| \leq \sum_{i \in \Gamma} \|x_i\|$  é imediata. Agora suponhamos que  $\text{supp}$  seja um conjunto infinito enumerável. Dada uma função bijetiva  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \text{supp}$ , como  $\text{supp}$  não é um conjunto finito, segue da hipótese e o Corolário 2.2.6 que  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{\sigma(n)}\| < \infty$ . Como  $E$  é um espaço de Banach, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$  é convergente em  $E$ . Segue novamente do Corolário 2.2.6 que a soma não ordenada  $\sum_{i \in \Gamma} x_i$  é convergente em  $E$ . Para a segunda afirmação, escolhamos uma função bijetiva  $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \text{supp}$ . Logo,

$$\left\| \sum_{i \in \Gamma} x_i \right\| \stackrel{(*)}{=} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_{\rho(n)} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{\rho(n)}\| \stackrel{(*)}{=} \sum_{i \in \Gamma} \|x_i\|,$$

onde  $(*)$  segue da Proposição 2.2.5. □

Nosso interesse nos espaços  $\ell_1(\Gamma)$  se justifica pelo resultado a seguir.

**Teorema 2.2.26.** *O espaço  $\ell_1(\Gamma)$  possui a propriedade do levantamento métrico.*

*Demonstração.* Sejam  $F$  e  $G$  espaços de Banach,  $s: F \rightarrow G$  uma sobrejeção métrica,  $u \in \mathcal{L}(\ell_1(\Gamma); G)$  e  $\varepsilon > 0$ . Denotemos  $a_i = u(e_i)$  para cada  $i \in \Gamma$ . Dado  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$ , segue dos Lemas 2.2.23 e 2.2.24 que  $x = \sum_{i \in \Gamma} \lambda_i e_i$  e

$$u(x) = \sum_{i \in \Gamma} \lambda_i a_i. \tag{2.28}$$

Provemos que

$$\|u\| = \sup_{i \in \Gamma} \|a_i\|. \tag{2.29}$$

Por um lado, para cada  $i \in \Gamma$ ,

$$\|a_i\| = \|u(e_i)\| \leq \|u\| \cdot \|e_i\| = \|u\|,$$

donde segue que  $\sup_{i \in \Gamma} \|a_i\| \leq \|u\|$ . Por outro lado, dado  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$ , segue dos Lemas 2.2.8, 2.2.9 e da Proposição 2.2.25 que

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &= \left\| \sum_{i \in \Gamma} \lambda_i a_i \right\| \leq \sum_{i \in \Gamma} \|\lambda_i a_i\| \leq \sum_{i \in \Gamma} \left( |\lambda_i| \cdot \sup_{j \in \Gamma} \|a_j\| \right) \\ &= \sup_{i \in \Gamma} \|a_i\| \cdot \sum_{i \in \Gamma} |\lambda_i| = \sup_{i \in \Gamma} \|a_i\| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Portanto  $\|u\| \leq \sup_{i \in \Gamma} \|a_i\|$ , provando (2.29).

Para cada  $i \in \Gamma$ , como  $s$  é sobrejeção métrica e  $\|a_i\| \leq (1 + \varepsilon) \cdot \|a_i\|$ , existe  $b_i \in F$  tal que  $s(b_i) = a_i$  e  $\|b_i\| \leq (1 + \varepsilon) \cdot \|a_i\|$ . Segue de (2.29) que  $\|b_i\| \leq (1 + \varepsilon) \cdot \|u\|$ , e como isso vale para todo  $i \in \Gamma$ ,

$$\sup_{i \in \Gamma} \|b_i\| \leq (1 + \varepsilon) \cdot \|u\|. \quad (2.30)$$

Definimos a aplicação  $\tilde{u}: \ell_1(\Gamma) \rightarrow F$  por

$$\tilde{u}((\lambda_i)_{i \in \Gamma}) = \sum_{i \in \Gamma} \lambda_i b_i.$$

Devemos provar que  $\tilde{u}$  está bem definida,  $\tilde{u} \in \mathcal{L}(\ell_1(\Gamma); F)$ ,  $\|\tilde{u}\| \leq (1 + \varepsilon)\|u\|$  e  $s \circ \tilde{u} = u$ . Para ver que  $\tilde{u}$  está bem definida, pela Proposição 2.2.25 basta provar que  $\sum_{i \in \Gamma} \|\lambda_i b_i\| < \infty$  para todo  $(\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$ . Dado  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$ , segue dos Lemas 2.2.8 e 2.2.9 que  $\sum_{i \in \Gamma} \|\lambda_i b_i\| < \infty$ , uma vez que

$$\sum_{i \in \Gamma} \|\lambda_i b_i\| \leq \sum_{i \in \Gamma} \left( |\lambda_i| \cdot \sup_{j \in \Gamma} \|b_j\| \right) = \sup_{i \in \Gamma} \|b_i\| \cdot \sum_{i \in \Gamma} |\lambda_i|.$$

A Proposição 2.2.25 garante que  $\sum_{i \in \Gamma} \lambda_i b_i$  é convergente em  $F$  e

$$\|\tilde{u}(x)\| = \left\| \sum_{i \in \Gamma} \lambda_i b_i \right\| \leq \sum_{i \in \Gamma} \|\lambda_i b_i\| \leq \sup_{i \in \Gamma} \|b_i\| \cdot \|x\|. \quad (2.31)$$

Para provar que  $\tilde{u}$  é linear, sejam  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma}$ ,  $y = (\gamma_i)_{i \in \Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Decorre do Lema 2.2.8 que

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\alpha x + y) &= \sum_{i \in \Gamma} (\alpha \lambda_i + \gamma_i) b_i = \sum_{i \in \Gamma} (\alpha (\lambda_i b_i) + \gamma_i b_i) \\ &= \alpha \sum_{i \in \Gamma} \lambda_i b_i + \sum_{i \in \Gamma} \gamma_i b_i = \alpha \tilde{u}(x) + \tilde{u}(y). \end{aligned}$$

Segue da linearidade de  $\tilde{u}$  e de (2.31) que  $\tilde{u}$  é contínua. Segue também de (2.30) e (2.31) que

$$\|\tilde{u}\| \leq \sup_{i \in \Gamma} \|b_i\| \leq (1 + \varepsilon) \cdot \|u\|.$$

Finalmente provemos que  $s \circ \tilde{u} = u$ . Para todo  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$ , pelo Lema 2.2.24 tem-se

$$(s \circ \tilde{u})(x) = s(\tilde{u}(x)) = s\left(\sum_{i \in \Gamma} \lambda_i b_i\right) = \sum_{i \in \Gamma} s(\lambda_i b_i) = \sum_{i \in \Gamma} \lambda_i a_i = u(x),$$

onde a última igualdade segue da equação (2.28).  $\square$

Paralelamente à injeção métrica canônica descrita na Proposição 2.1.12, a seguinte sobrejeção métrica nos será muito útil.

**Proposição 2.2.27.** *Seja  $E$  um espaço de Banach. O operador  $Q_E: \ell_1(B_E) \rightarrow E$  definido por*

$$Q_E((\lambda_x)_{x \in B_E}) = \sum_{x \in B_E} \lambda_x x,$$

*é uma sobrejeção métrica, que será chamada de sobrejeção métrica canônica de  $\ell_1(B_E)$  em  $E$ .*

*Demonstração.* Por definição,

$$\ell_1(B_E) = \left\{ (\lambda_x)_{x \in B_E} \in \mathbb{K}^{B_E} : \sum_{x \in B_E} |\lambda_x| < \infty \right\}.$$

Devemos provar que  $Q_E$  está bem definida,  $Q_E$  é linear e sobrejetiva e que para cada  $y \in E$ ,

$$\|y\| = \inf\{\|f\|_1 : f \in \ell_1(B_E) \text{ e } Q_E(f) = y\}. \quad (2.32)$$

Para ver que  $Q_E$  está bem definida, pela Proposição 2.2.25 basta provar que  $\sum_{x \in B_E} \|\lambda_x x\| < \infty$ . Dado  $f = (\lambda_x)_{x \in B_E} \in \ell_1(B_E)$ , segue do Lema 2.2.9 que

$$\sum_{x \in B_E} \|\lambda_x x\| = \sum_{x \in B_E} (|\lambda_x| \cdot \|x\|) \leq \sum_{x \in B_E} |\lambda_x| < \infty.$$

Pela Proposição 2.2.25, tem-se que  $\sum_{x \in B_E} \lambda_x x$  é convergente em  $E$  e

$$\|Q_E(f)\| = \left\| \sum_{x \in B_E} \lambda_x x \right\| \leq \sum_{x \in B_E} \|\lambda_x x\| \leq \sum_{x \in B_E} |\lambda_x| = \|f\|_1. \quad (2.33)$$

Para a linearidade de  $Q_E$ , sejam  $f = (\lambda_x)_{x \in B_E}$ ,  $g = (\gamma_x)_{x \in B_E} \in \ell_1(B_E)$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Pelo Lema 2.2.8,

$$\begin{aligned} Q_E(\alpha f + g) &= \sum_{x \in B_E} (\alpha \lambda_x + \gamma_x) x = \sum_{x \in B_E} (\alpha (\lambda_x x) + \gamma_x x) \\ &= \alpha \sum_{x \in B_E} \lambda_x x + \sum_{x \in B_E} \gamma_x x = \alpha Q_E(f) + Q_E(g). \end{aligned}$$

Provemos que  $Q_E$  é sobrejetiva. Por linearidade,  $Q_E((0)_{x \in B_E}) = 0$ . Dado  $y \neq 0 \in E$ , definamos a família indexada  $f_0 = (\lambda_x^0)_{x \in B_E}$  de elementos de  $\mathbb{K}$  por

$$\lambda_x^0 = \begin{cases} \|y\| & \text{se } x = y/\|y\| \\ 0 & \text{se } x \neq y/\|y\|. \end{cases}$$

Por ter apenas uma coordenada não nula, é claro que  $f_0 \in \ell_1(B_E)$  e, mais ainda,  $\|f_0\|_1 = \|y\|$  e  $Q_E(f_0) = \sum_{x \in B_E} \lambda_x^0 x = y$ . Segue que  $Q_E$  é sobrejetiva e

$$\inf\{\|f\|_1 : f \in \ell_1(B_E) \text{ e } Q_E(f) = y\} \leq \|y\|.$$

Provemos a outra desigualdade. Dados  $y \in E$  e  $f \in \ell_1(B_E)$  tais que  $Q_E(f) = y$ , segue de (2.33) que  $\|y\| = \|Q_E(f)\| \leq \|f\|_1$ , logo

$$\|y\| \leq \inf\{\|f\|_1 : f \in \ell_1(B_E) \text{ e } Q_E(f) = y\},$$

provando assim (2.32) e completando a demonstração.  $\square$

Combinado as Proposições 2.2.27 e 2.2.19, temos o seguinte resultado.

**Corolário 2.2.28.** *Todo espaço de Banach é isomorfo isometricamente a algum espaço quociente  $\ell_1(\Gamma)/M$ , onde  $M$  é um subespaço fechado de  $\ell_1(\Gamma)$ .*

Sabemos que uma sobrejeção métrica  $s: E \rightarrow F$  aplica a bola unitária aberta de  $E$  sobre a bola unitária aberta de  $F$  (Proposição 2.2.13(a)). Veremos a seguir que a sobrejeção métrica canônica  $Q_E: \ell_1(B_E) \rightarrow E$  aplica também a bola unitária fechada de  $\ell_1(B_E)$  sobre a bola unitária fechada de  $E$ .

**Corolário 2.2.29.** *Seja  $E$  um espaço de Banach. A sobrejeção métrica canônica  $Q_E: \ell_1(B_E) \rightarrow E$  aplica a bola unitária fechada de  $\ell_1(B_E)$  sobre a bola unitária fechada de  $E$ , isto é,  $Q_E(B_{\ell_1(B_E)}) = B_E$ .*

*Demonstração.* Sabemos da Proposição 2.2.13(b) que  $\|Q_E\| = 1$ . Consequentemente,  $Q_E(B_{\ell_1(B_E)}) \subset B_E$ . Provemos a outra inclusão. Dado  $x_0 \in B_E$ , definimos a família indexada  $f = (\lambda_x)_{x \in B_E}$  de elementos de  $\mathbb{K}$  por

$$\lambda_x = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por ter apenas uma coordenada não nula, é claro que  $f \in \ell_1(B_E)$ , e como essa única coordenada não nula é igual a 1, temos  $\|f\|_1 = 1$ . Pela definição de  $Q_E$ , temos  $Q_E(f) = \sum_{x \in B_E} \lambda_x x = x_0$ . Portanto,  $f \in B_{\ell_1(B_E)}$  e  $x_0 \in Q_E(B_{\ell_1(B_E)})$ .  $\square$

Um importante resultado sobre o produto tensorial de sobrejeções métricas é o seguinte.

**Proposição 2.2.30.** [19, Proposition 2.2(5)] *Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $E$  e  $F$  espaços normados. Se  $u: E \rightarrow F$  é uma sobrejeção métrica, então  $\otimes^{m,s} u: \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E \rightarrow \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} F$  é também uma sobrejeção métrica.*

## Capítulo 3

# Ideais injetivos de polinômios homogêneos

As noções de ideal injetivo e envoltória injetiva aparecem inicialmente para ideais de operadores lineares (veja [16, 33]) e posteriormente são generalizados de forma natural para ideais de polinômios.

A seguir mencionaremos a principal razão que justifica a importância dos ideais injetivos. A razão é a estreita relação com as injeções métricas (ou isometrias lineares) e com a restrição de contradomínio de um operador (veja Proposição 3.1.5). Mais precisamente, sejam  $G$  um subespaço fechado de  $F$  e  $P: E \rightarrow G$  um polinômio  $m$ -homogêneo:

$$P: E \rightarrow G \subseteq F.$$

É claro que  $P$  toma valores em  $G$ , mas pode-se pensar, de forma natural, em  $P$  tomando valores em  $F$ ; basta considerar a composição com a inclusão de  $G$  em  $F$ :

$$E \xrightarrow{P} G \hookrightarrow F.$$

Não raramente pensa-se que, se  $P: E \rightarrow F$  pertence a um ideal  $\mathcal{Q}$ , então  $P: E \rightarrow G$  também pertence a  $\mathcal{Q}$ . Apesar de ser algo intuitivo, isso não é verdade em geral. Os ideais injetivos são exatamente os ideais para os quais isso é verdade, e nisso reside sua importância: os ideais injetivos são os ideais nos quais vale aquilo que a intuição nos faz supor que valha sempre. Afortunadamente, muitos ideais importantes da teoria são injetivos.

Nas duas primeiras seções deste capítulo, estudaremos as principais propriedades dos ideais injetivos de polinômios e da envoltória injetiva de um ideal de polinômios. Exibiremos também exemplos ilustrativos relacionados com esses conceitos. Na terceira seção iniciamos investigação de alguns aspectos importantes denominados *propriedades de dominação*. Na última seção, veremos que uma dessas propriedades, chamada de *propriedade da dominação fraca*, é útil em descrever completamente a envoltória injetiva de um ideal de composição. Ainda apresentaremos algumas aplicações dessa descrição e veremos que a chamada *propriedade da dominação forte* não caracteriza os ideais injetivos de polinômios.

As principais referências para este capítulo são o artigo [13] e a tese [44]. Ao longo deste capítulo, novamente  $m$  denotará um número natural qualquer e  $E, F, G, H$  espaços de Banach quaisquer.

### 3.1 Definição e primeiros exemplos

Ideais injetivos de polinômios são definidos à semelhança dos ideais injetivos de operadores lineares (veja [16, 33]).

**Definição 3.1.1.** (a) Dizemos que um ideal de polinômios  $\mathcal{Q}$  é *injetivo* se dados  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  e uma injeção métrica  $j: F \rightarrow G$  tais que  $j \circ P \in \mathcal{Q}({}^m E; G)$ , tem-se que  $P \in \mathcal{Q}({}^m E; F)$ .

(b) Dizemos que um ideal normado de polinômios  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é *injetivo* se dados  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  e uma injeção métrica  $j: F \rightarrow G$  tais que  $j \circ P \in \mathcal{Q}({}^m E; G)$ , tem-se que  $P \in \mathcal{Q}({}^m E; F)$  e

$$\|P\|_{\mathcal{Q}} = \|j \circ P\|_{\mathcal{Q}}. \quad (3.1)$$

**Observação 3.1.2.** Para provar a equação (3.1), basta provar a desigualdade

$$\|P\|_{\mathcal{Q}} \leq \|j \circ P\|_{\mathcal{Q}},$$

pois a outra desigualdade  $\|j \circ P\|_{\mathcal{Q}} \leq \|P\|_{\mathcal{Q}}$  é sempre satisfeita. Com efeito, segue do fato de  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  ser um ideal normado de polinômios que

$$\|j \circ P\|_{\mathcal{Q}} \leq \|j\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}} = \|P\|_{\mathcal{Q}}.$$

A seguinte proposição nos diz que a igualdade (3.1) é sempre satisfeita para a norma usual de polinômios.

**Proposição 3.1.3.** *Sejam  $E, F, G$  espaços vetoriais normados e  $m \in \mathbb{N}$ . Dados  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  e uma injeção métrica  $j: F \rightarrow G$ , tem-se*

$$\|P\| = \|j \circ P\|.$$

*Demonstração.* Com efeito, dados  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  e uma injeção métrica  $j: F \rightarrow G$ , tem-se

$$\|j \circ P\| = \sup_{x \in B_E} \|(j \circ P)(x)\| = \sup_{x \in B_E} \|j(P(x))\| = \sup_{x \in B_E} \|P(x)\| = \|P\|.$$

□

A proposição a seguir nos diz que se restringimos o contradomínio de um polinômio  $m$ -homogêneo, a nova função obtida é também um polinômio  $m$ -homogêneo

**Proposição 3.1.4.** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  e  $F_0$  um subespaço vetorial de  $F$  com  $F_0 \supset P(E)$ . Definamos a função  $P_0: E \rightarrow F_0$  por*

$$P_0(x) = P(x).$$

*Então  $P_0 \in \mathcal{P}({}^m E; F_0)$  e  $\|P_0\| = \|P\|$ .*

*Demonstração.* Veja [41, Proposição 2.39].

□



A proposição a seguir nos diz que um ideal de polinômios é injetivo se, e somente se, ao restringir o contradomínio de um polinômio  $m$ -homogêneo que pertence ao ideal, tem-se que o novo polinômio obtido pertence também ao ideal. Lembremos que se  $E$  é um espaço de Banach e  $E_0$  um subespaço vetorial de  $E$ , então  $E_0$  é um espaço de Banach se, e somente se,  $E_0$  é fechado em  $E$  (Proposição 1.1.5). Devido a esse fato, consideraremos subespaços fechados na proposição abaixo.

**Proposição 3.1.5.** (a) *Um ideal de polinômios  $\mathcal{Q}$  é injetivo se, e somente se, dados espaços de Banach  $E$  e  $F$ ,  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$  e  $F_0$  um subespaço fechado de  $F$  com  $F_0 \supset P(E)$ , tem-se que o polinômio  $P_0: E \rightarrow F_0$  definido por  $P_0(x) = P(x)$ , pertence a  $\mathcal{Q}(^m E; F_0)$ .*

(b) *Um ideal normado de polinômios  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é injetivo se, e somente se, dados espaços de Banach  $E$  e  $F$ ,  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$  e  $F_0$  um subespaço fechado de  $F$  com  $F_0 \supset P(E)$ , tem-se que o polinômio  $P_0: E \rightarrow F_0$  definido por  $P_0(x) = P(x)$ , pertence a  $\mathcal{Q}(^m E; F_0)$  e  $\|P_0\|_{\mathcal{Q}} = \|P\|_{\mathcal{Q}}$ .*

*Demonstração.* Basta provar o item (b). Suponhamos que  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  seja um ideal normado injetivo de polinômios e sejam  $E, F$  espaços de Banach,  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$  e  $F_0$  um subespaço vetorial de  $F$  com  $F_0 \supset P(E)$ . Consideremos a função  $P_0: E \rightarrow F_0$  definida por  $P_0(x) = P(x)$ . Segue da Proposição 3.1.4 que  $P_0$  é um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo. Por outro lado, como  $F_0$  é um subespaço fechado de  $F$  e  $F$  é um espaço de Banach, segue que  $F_0$  é também um espaço de Banach. Consideremos também o operador inclusão  $i: F_0 \rightarrow F$ . Então  $i$  é uma injeção métrica entre espaços de Banach e  $i \circ P_0 = P$ . Logo, como  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é injetivo e  $i \circ P_0 = P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$ , segue que  $P_0 \in \mathcal{Q}(^m E; F_0)$  e

$$\|P_0\|_{\mathcal{Q}} = \|i \circ P_0\|_{\mathcal{Q}} = \|P\|_{\mathcal{Q}}.$$

Reciprocamente, sejam  $E, F, G$  espaços de Banach,  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  e  $j: F \rightarrow G$  uma injeção métrica tais que  $j \circ P \in \mathcal{Q}(^m E; G)$ . Notemos que  $j(F)$  é um espaço de Banach, pois  $j(F)$  é isometricamente isomorfo a  $F$  e  $F$  é um espaço de Banach (Proposição 1.1.6). Consequentemente,  $j(F)$  é um subespaço fechado de  $G$ . Por outro lado, como  $(j \circ P)(E) \subset j(F)$ , então podemos considerar a função  $(j \circ P)_0: E \rightarrow j(F) \subset G$  definida por

$$(j \circ P)_0(x) = (j \circ P)(x).$$

Segue da hipótese que  $(j \circ P)_0 \in \mathcal{Q}(^m E; j(F))$  e  $\|(j \circ P)_0\|_{\mathcal{Q}} = \|j \circ P\|_{\mathcal{Q}}$ . Consideremos também o operador inverso  $j^{-1}: j(F) \subset G \rightarrow F$ . Então  $j^{-1}$  é uma injeção métrica entre espaços de Banach e  $j^{-1} \circ (j \circ P)_0 = P$ . Como  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é um ideal normado de polinômios e  $(j \circ P)_0 \in \mathcal{Q}(^m E; j(F))$ , segue que

$$j^{-1} \circ (j \circ P)_0 = P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$$

e

$$\|P\|_{\mathcal{Q}} = \|j^{-1} \circ (j \circ P)_0\|_{\mathcal{Q}} \leq \|j^{-1}\| \cdot \|(j \circ P)_0\|_{\mathcal{Q}} = \|(j \circ P)_0\|_{\mathcal{Q}} = \|j \circ P\|_{\mathcal{Q}}.$$

Segue da Observação 3.1.2 que  $\|P\|_{\mathcal{Q}} = \|j \circ P\|_{\mathcal{Q}}$ , e portanto  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é injetivo.  $\square$

**Exemplo 3.1.6.** Vejamos que o ideal  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$  dos polinômios de posto finito é injetivo. Para isso usaremos a caracterização da Proposição 3.1.5. Sejam  $P: E \rightarrow F$  um polinômio  $m$ -homogêneo de posto finito e  $F_0$  um subespaço fechado de  $F$  com  $F_0 \supset P(E)$ . Então  $\text{span}\{P(E)\}$  é um subespaço de dimensão finita de  $F$ . Consideremos o polinômio

$$P_0: E \rightarrow F_0, \quad P_0(x) = P(x),$$

e vejamos que  $P_0$  tem também posto finito. Como  $F_0$  é um subespaço vetorial de  $F$ ,  $\text{span}\{P(E)\} \subset F_0$ . Combinando isso com  $P_0(E) = P(E)$  temos

$$\text{span}\{P_0(E)\} = \text{span}\{P(E)\} \subset F_0.$$

Logo,  $\text{span}\{P_0(E)\}$  é um subespaço de dimensão finita de  $F_0$ , isto é,  $P_0$  é um polinômio de posto finito. Isso prova que o ideal  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$  é injetivo.

**Exemplo 3.1.7.** É fácil também verificar que os ideais  $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$  e  $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$  são injetivos (veja por exemplo [44, Proposição 4.23]). No Exemplo 3.4.3 daremos uma outra demonstração da injetividade dos ideais  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$  e  $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$ .

**Exemplo 3.1.8.** O ideal  $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  dos polinômios aproximáveis por polinômios de posto finito não é injetivo. Isso, e outras propriedades, serão provadas no Corolário 3.4.4. Veremos também no Corolário 3.4.2 condições para determinar a injetividade ou não injetividade de certos tipos de ideais de polinômios.

## 3.2 A envoltória injetiva

Nesta seção estudaremos, detalhadamente, as principais propriedades da envoltória injetiva de um ideal de polinômios e veremos a caracterização de um ideal injetivo por meio da sua envoltória injetiva.

**Definição 3.2.1.** (a) Seja  $\mathcal{Q}$  um ideal de polinômios. Definimos a classe de polinômios  $\mathcal{Q}^{\text{inj}}$  por

$$\mathcal{Q}^{\text{inj}}({}^m E; F) = \{P \in \mathcal{P}({}^m E; F) : I_F \circ P \in \mathcal{Q}({}^m E; \ell_{\infty}(B_{F'}))\},$$

onde  $I_F$  denota a injeção métrica canônica de  $F$  em  $\ell_{\infty}(B_{F'})$  definida na Proposição 2.1.12. A classe  $\mathcal{Q}^{\text{inj}}$  é chamada de *envoltória injetiva* de  $\mathcal{Q}$ .

(b) Seja  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  um ideal normado de polinômios. Definimos a função  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} : \mathcal{Q}^{\text{inj}}({}^m E; F) \rightarrow [0, +\infty)$  por

$$\|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} = \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}},$$

para todo  $m \in \mathbb{N}$  e quaisquer espaços de Banach  $E$  e  $F$ .

**Proposição 3.2.2.** *Seja  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  um ideal normado de polinômios. Então*

(a)  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}})$  é um ideal normado de polinômios.

- (b)  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{\text{inj}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}$ .
- (c)  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}})$  é injetivo.
- (d) Se  $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$  é um ideal normado injetivo de polinômios tal que  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{R}}$  então  $\mathcal{Q}^{\text{inj}} \subset \mathcal{R}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{R}}$ .
- (e)  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}})$  é o único ideal normado de polinômios que satisfaz os itens (a), (b), (c) e (d).
- (f) Se  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é um ideal de Banach então  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}})$  é também um ideal de Banach.

*Demonstração.* Provemos primeiro o item (b). Sejam  $m \in \mathbb{N}$ ,  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$ . Como  $\mathcal{Q}$  é um ideal de polinômios, segue que  $I_F \circ P \in \mathcal{Q}(^m E; \ell_{\infty}(B_{F'}))$ . Portanto,  $P \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}(^m E; F)$  e  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{\text{inj}}$ . Por outro lado, segue da desigualdade de ideal de  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  que

$$\|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} = \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}} \leq \|I_F\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}} = \|P\|_{\mathcal{Q}}.$$

Consequentemente,  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}$ .

(a) Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $E$  e  $F$  espaços de Banach. Inicialmente provemos que  $\mathcal{Q}^{\text{inj}}(^m E; F)$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}(^m E; F)$  que contém os polinômios  $m$ -homogêneos contínuos de tipo finito e que  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}$  é uma norma em  $\mathcal{Q}^{\text{inj}}(^m E; F)$ .

Combinando o item (b) com o fato de  $\mathcal{Q}$  ser um ideal de polinômios, temos

$$\mathcal{P}_f(^m E; F) \subset \mathcal{Q}(^m E; F) \subset \mathcal{Q}^{\text{inj}}(^m E; F),$$

logo,  $\mathcal{Q}^{\text{inj}}(^m E; F)$  contém os polinômios  $m$ -homogêneos contínuos de tipo finito.

Agora vejamos que  $\mathcal{Q}^{\text{inj}}(^m E; F)$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}(^m E; F)$ . Denotemos por  $0_1$  o polinômio nulo de  $E$  em  $F$  e por  $0_2$  o polinômio nulo de  $E$  em  $\ell_{\infty}(B_{F'})$ . Segue de  $\mathcal{Q}(^m E; F) \subset \mathcal{Q}^{\text{inj}}(^m E; F)$  que  $0_1 \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}(^m E; F)$ . Por outro lado, sejam  $P, Q \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}(^m E; F)$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Segue da linearidade de  $I_F$  que

$$I_F \circ (\lambda P + Q) = \lambda(I_F \circ P) + I_F \circ Q. \quad (3.2)$$

Como  $\mathcal{Q}(^m E; \ell_{\infty}(B_{F'}))$  é um espaço vetorial, segue da equação (3.2) que  $I_F \circ (\lambda P + Q) \in \mathcal{Q}(^m E; \ell_{\infty}(B_{F'}))$ , ou seja,  $\lambda P + Q \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}(^m E; F)$ .

(I) Provemos que  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}$  é uma norma em  $\mathcal{Q}^{\text{inj}}(^m E; F)$ .

(N1) Segue de  $I_F(0) = 0$  que  $I_F \circ 0_1 = 0_2$ . Logo,

$$\|0_1\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} = \|I_F \circ 0_1\|_{\mathcal{Q}} = \|0_2\|_{\mathcal{Q}} = 0.$$

Por outro lado, seja  $P \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}(^m E; F)$  tal que  $\|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} = 0$ . Então  $\|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}} = \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} = 0$  e portanto,  $I_F \circ P = 0_2$ . Segue da injetividade de  $I_F$  que  $P = 0_1$ .

(N2) Sejam  $P \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}(^m E; F)$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Segue da equação (3.2) e do fato de  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$  ser uma norma em  $\mathcal{Q}(^m E; \ell_{\infty}(B_{F'}))$  que

$$\begin{aligned} \|\lambda P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} &= \|I_F \circ (\lambda P)\|_{\mathcal{Q}} = \|\lambda(I_F \circ P)\|_{\mathcal{Q}} \\ &= |\lambda| \cdot \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}} = |\lambda| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}. \end{aligned}$$

(N3) Sejam  $P, Q \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}({}^m E; F)$ . Segue da equação (3.2) e do fato de  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$  ser uma norma em  $\mathcal{Q}({}^m E; \ell_{\infty}(B_{F'}))$  que

$$\begin{aligned}\|P + Q\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} &= \|I_F \circ (P + Q)\|_{\mathcal{Q}} = \|I_F \circ P + I_F \circ Q\|_{\mathcal{Q}} \\ &\leq \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}} + \|I_F \circ Q\|_{\mathcal{Q}} = \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} + \|Q\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}.\end{aligned}$$

(II) Seja  $m \in \mathbb{N}$ , provemos que  $\|id_m\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} = 1$ , onde  $id_m: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  é o polinômio  $m$ -homogêneo definido por  $id_m(\lambda) = \lambda^m$  (Definição 1.5.3). Usando a notação do Exemplo 1.2.21, temos que  $I_{\mathbb{K}} \circ id_m = id^m \otimes I_{\mathbb{K}}(1)$ . Segue da Proposição 1.5.6 e do fato de  $I_{\mathbb{K}}$  ser uma injeção métrica que

$$\|id_m\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} = \|I_{\mathbb{K}} \circ id_m\|_{\mathcal{Q}} = \|id^m \otimes I_{\mathbb{K}}(1)\|_{\mathcal{Q}} = \|id\|^m \cdot \|I_{\mathbb{K}}(1)\|_{\infty} = 1 \cdot |1| = 1.$$

(III) Provemos agora a propriedade de ideal e a desigualdade de ideal. Sejam  $u \in \mathcal{L}(G; E)$ ,  $P \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}({}^m E; F)$  e  $t \in \mathcal{L}(F; H)$ . Logo,  $I_F \circ P \in \mathcal{Q}({}^m E; \ell_{\infty}(B_{F'}))$ . Como  $\ell_{\infty}(B_{H'})$  tem a propriedade de extensão métrica (Teorema 2.1.11) e  $I_H \circ t: F \rightarrow \ell_{\infty}(B_{H'})$  é um operador linear contínuo, existe um operador linear contínuo  $v: \ell_{\infty}(B_{F'}) \rightarrow \ell_{\infty}(B_{H'})$  tal que  $v \circ I_F = I_H \circ t$  e

$$\|v\| = \|I_H \circ t\| = \|t\|. \quad (3.3)$$

$$\begin{array}{ccccccc} G & \xrightarrow{u} & E & \xrightarrow{P} & F & \xrightarrow{t} & H \\ & & & & \downarrow I_F & & \downarrow I_H \\ & & & & \ell_{\infty}(B_{F'}) & \xrightarrow{v} & \ell_{\infty}(B_{H'}) \end{array}$$

Logo,

$$I_H \circ t \circ P \circ u = v \circ (I_F \circ P) \circ u. \quad (3.4)$$

Como  $\mathcal{Q}$  é um ideal de polinômios e  $I_F \circ P \in \mathcal{Q}({}^m E; \ell_{\infty}(B_{F'}))$ , segue que  $I_H \circ t \circ P \circ u \in \mathcal{Q}({}^m G; \ell_{\infty}(B_{H'}))$ , isto é,  $t \circ P \circ u \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}({}^m G; H)$ .

Para provar a desigualdade de ideal, note que das equações (3.3) e (3.4) e da desigualdade de ideal de  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  segue que

$$\begin{aligned}\|t \circ P \circ u\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} &= \|I_H \circ t \circ P \circ u\|_{\mathcal{Q}} \stackrel{(3.4)}{=} \|v \circ (I_F \circ P) \circ u\|_{\mathcal{Q}} \leq \|v\| \cdot \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|u\|^m \\ &= \|v\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} \cdot \|u\|^m \stackrel{(3.3)}{=} \|t\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} \cdot \|u\|^m.\end{aligned}$$

(c) Provemos que  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}})$  é injetivo. Sejam  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  e  $j: F \rightarrow G$  uma injeção métrica tais que  $j \circ P \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}({}^m E; G)$ . Logo,  $I_G \circ j \circ P \in \mathcal{Q}({}^m E; \ell_{\infty}(B_{G'}))$ . Como  $\ell_{\infty}(B_{F'})$  tem a propriedade de extensão métrica (Teorema 2.1.11) e  $I_G \circ j: F \rightarrow \ell_{\infty}(B_{G'})$  é uma injeção métrica (Proposição 2.1.7), existe um operador linear contínuo  $v: \ell_{\infty}(B_{G'}) \rightarrow \ell_{\infty}(B_{F'})$  tal que  $v \circ I_G \circ j = I_F \circ P$  e

$$\|v\| = \|I_F\| = 1. \quad (3.5)$$

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{P} & F & \xrightarrow{j} & G \\ & & \downarrow I_F & & \downarrow I_G \\ & & \ell_{\infty}(B_{F'}) & \xleftarrow{v} & \ell_{\infty}(B_{G'}) \end{array}$$

Logo,

$$I_F \circ P = v \circ (I_G \circ j \circ P). \quad (3.6)$$

Como  $\mathcal{Q}$  é um ideal de polinômios e  $I_G \circ j \circ P \in \mathcal{Q}({}^m E; \ell_\infty(B_{G'}))$ , temos

$$I_F \circ P = v \circ (I_G \circ j \circ P) \in \mathcal{Q}({}^m E; \ell_\infty(B_{F'})),$$

isto é,  $P \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}({}^m E; F)$ . Por outro lado, segue das equações (3.5) e (3.6) e da desigualdade de ideal de  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  que

$$\begin{aligned} \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} &= \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}} \stackrel{(3.6)}{=} \|v \circ (I_G \circ j \circ P)\|_{\mathcal{Q}} \leq \|v\| \cdot \|I_G \circ j \circ P\|_{\mathcal{Q}} \\ &= \|v\| \cdot \|j \circ P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} \stackrel{(3.5)}{=} \|j \circ P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}. \end{aligned}$$

Segue da Observação 3.1.2 que

$$\|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} = \|j \circ P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}},$$

provando que  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}})$  é injetivo.

(d) Seja  $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$  um ideal normado injetivo de polinômios tal que  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{R}}$ . Vejamos que  $\mathcal{Q}^{\text{inj}} \subset \mathcal{R}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{R}}$ . Com efeito, para todo  $P \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}({}^m E; F)$  temos

$$I_F \circ P \in \mathcal{Q}({}^m E; \ell_\infty(B_{F'})) \subset \mathcal{R}({}^m E; \ell_\infty(B_{F'})),$$

donde segue que  $I_F \circ P \in \mathcal{R}({}^m E; \ell_\infty(B_{F'}))$ . Como  $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$  é injetivo, temos  $P \in \mathcal{R}({}^m E; F)$  e

$$\|P\|_{\mathcal{R}} = \|I_F \circ P\|_{\mathcal{R}} \leq \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}} = \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}},$$

provando que  $\mathcal{Q}^{\text{inj}} \subset \mathcal{R}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{R}}$ .

(e) Seja  $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_{\mathcal{S}})$  um ideal normado de polinômios que satisfaz os itens (a), (b), (c) e (d). Provemos que  $\mathcal{S} = \mathcal{Q}^{\text{inj}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{S}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}$ . Com efeito, como  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}})$  é um ideal normado injetivo de polinômios com  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{\text{inj}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}$  e  $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_{\mathcal{S}})$  satisfaz o item (d), tem-se  $\mathcal{S} \subset \mathcal{Q}^{\text{inj}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{S}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}$ . Analogamente, como  $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_{\mathcal{S}})$  é um ideal normado injetivo de polinômios com  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{S}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{S}}$ , segue do item (d) que  $\mathcal{Q}^{\text{inj}} \subset \mathcal{S}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{S}}$ , provando assim as igualdades desejadas.

(f) Suponhamos que  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  seja um ideal de Banach e provemos que  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}})$  é também um ideal de Banach. Para isso, seja  $(P_n)_{n=1}^\infty$  uma seqüência de Cauchy em  $\mathcal{Q}^{\text{inj}}({}^m E; F)$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todos  $k, n \geq n_0$ ,

$$\|P_k - P_n\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} < \varepsilon. \quad (3.7)$$

Como  $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}$  (Proposição 1.5.6), tem-se

$$\|P_k - P_n\| \leq \|P_k - P_n\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} < \varepsilon.$$

Isto prova que  $(P_n)_{n=1}^\infty$  é uma seqüência de Cauchy em  $(\mathcal{P}({}^m E; F), \|\cdot\|)$ . Como  $(\mathcal{P}({}^m E; F), \|\cdot\|)$  é um espaço completo (Proposição 1.2.19), existe  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - P\| = 0$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , pela Proposição 3.1.3 temos

$$\|P_n - P\| = \|I_F \circ (P_n - P)\| = \|I_F \circ P_n - I_F \circ P\|.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_F \circ P_n = I_F \circ P \quad (3.8)$$

em  $(\mathcal{P}({}^m E; \ell_\infty(B_{F'})), \|\cdot\|)$ . Por outro lado, para todos  $k, n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|P_k - P_n\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} = \|I_F \circ (P_k - P_n)\|_{\mathcal{Q}} = \|I_F \circ P_k - I_F \circ P_n\|_{\mathcal{Q}}.$$

Combinando isso com a equação (3.7) segue que  $(I_F \circ P_n)_{n=1}^\infty$  é uma seqüência de Cauchy no espaço de Banach  $(\mathcal{Q}({}^m E; \ell_\infty(B_{F'})), \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ . Existe então  $Q \in \mathcal{Q}({}^m E; \ell_\infty(B_{F'}))$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|I_F \circ P_n - Q\|_{\mathcal{Q}} = 0. \quad (3.9)$$

Novamente, como  $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$  (Proposição 1.5.6), temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_F \circ P_n = Q$  no espaço  $(\mathcal{P}({}^m E; \ell_\infty(B_{F'})), \|\cdot\|)$ . Combinando isso com a equação (3.8), temos que  $I_F \circ P = Q \in \mathcal{Q}({}^m E; \ell_\infty(B_{F'}))$ . Isto prova que  $P \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}({}^m E; F)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|P_n - P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} = \|I_F \circ (P_n - P)\|_{\mathcal{Q}} = \|I_F \circ P_n - I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}} = \|I_F \circ P_n - Q\|_{\mathcal{Q}}.$$

Combinando isso com a equação (3.9), obtemos que a seqüência  $(P_n)_{n=1}^\infty$  converge a  $P$  em  $\mathcal{Q}^{\text{inj}}({}^m E; F)$ , provando assim que  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}})$  é um ideal de Banach.  $\square$

**Corolário 3.2.3.** *Seja  $\mathcal{Q}$  um ideal de polinômios. Então*

- (a)  $\mathcal{Q}^{\text{inj}}$  é um ideal de polinômios.
- (b)  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{\text{inj}}$ .
- (c)  $\mathcal{Q}^{\text{inj}}$  é injetivo.
- (d) Se  $\mathcal{R}$  é um ideal injetivo de polinômios tal que  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$  então  $\mathcal{Q}^{\text{inj}} \subset \mathcal{R}$ .
- (e)  $\mathcal{Q}^{\text{inj}}$  é a única classe de polinômios que satisfaz os itens (a), (b), (c) e (d).
- (f) Se  $\mathcal{Q}$  é um ideal fechado então  $\mathcal{Q}^{\text{inj}}$  é também um ideal fechado.

*Demonstração.* As demonstrações dos itens (a), (b), (c), (d) e (e) seguem como nas demonstrações dos itens (a), (b), (c), (d) e (e) da Proposição 3.2.2 respectivamente.

Provemos o item (f). Suponhamos que  $\mathcal{Q}$  seja um ideal fechado. Então  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|)$  é um ideal de Banach, onde  $\|\cdot\|$  é a norma usual de polinômios. Segue do item (f) da Proposição 3.2.2 que  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_1)$  é também um ideal de Banach, onde  $\|P\|_1 = \|I_F \circ P\|$  para todo  $P \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}({}^m E; F)$ . Segue da Proposição 3.1.3 que

$$\|P\|_1 = \|I_F \circ P\| = \|P\|$$

para cada  $P \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}({}^m E; F)$ . Portanto,  $\|\cdot\|_1$  é a norma usual de polinômios. Logo,  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_1)$  é um ideal de Banach, isto é,  $\mathcal{Q}^{\text{inj}}$  é um ideal fechado.  $\square$

A seguir veremos a caracterização de um ideal injetivo por meio da sua envoltória injetiva.

**Corolário 3.2.4.** (a) *Um ideal de polinômios  $\mathcal{Q}$  é injetivo se, e somente se,  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{\text{inj}}$ .*

(b) Um ideal normado de polinômios  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é injetivo se, e somente se,  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{\text{inj}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}$ .

*Demonstração.* Basta provar o item (b). Suponhamos que  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  seja um ideal injetivo. Sabemos do item (b) da Proposição 3.2.2 que  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{\text{inj}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}$ . Por outro lado, como  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é um ideal normado injetivo de polinômios e  $\mathcal{Q}$  contém  $\mathcal{Q}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ , segue do item (d) da Proposição 3.2.2 que  $\mathcal{Q}^{\text{inj}} \subset \mathcal{Q}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ , donde segue o desejado.

Reciprocamente, suponhamos que  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{\text{inj}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}$ . Como  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}})$  é um ideal injetivo (Proposição 3.2.2), segue diretamente que  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é também um ideal injetivo.  $\square$

Veremos agora que a correspondência  $\mathcal{Q} \mapsto \mathcal{Q}^{\text{inj}}$  é um procedimento de envoltória no sentido de [33, 8.1.2]. Veremos também o resultado análogo para a correspondência  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}) \mapsto (\mathcal{Q}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}})$ .

**Proposição 3.2.5.** (1) *Sejam  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{R}$  ideais (fechados) de polinômios. Então:*

- (a)  $\mathcal{Q}^{\text{inj}}$  é um ideal (fechado) de polinômios.
- (b) Se  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$  então  $\mathcal{Q}^{\text{inj}} \subset \mathcal{R}^{\text{inj}}$ .
- (c)  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}})^{\text{inj}} = \mathcal{Q}^{\text{inj}}$ .
- (d)  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{\text{inj}}$ .

(2) *Sejam  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  e  $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$  ideais normados (de Banach) de polinômios. Então:*

- (a)  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}})$  é um ideal normado (de Banach) de polinômios.
- (b) Se  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{R}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$  então  $\mathcal{Q}^{\text{inj}} \subset \mathcal{R}^{\text{inj}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{R}^{\text{inj}}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}$ .
- (c)  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}})^{\text{inj}} = \mathcal{Q}^{\text{inj}}$  e  $\|\cdot\|_{(\mathcal{Q}^{\text{inj}})^{\text{inj}}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}$ .
- (d)  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{\text{inj}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ .

*Demonstração.* Basta provar (2). Os itens (a) e (d) foram provados na Proposição 3.2.2.

(b) Suponhamos que  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{R}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$  e seja  $P \in \mathcal{Q}^{\text{inj}}({}^m E; F)$ . Então  $I_F \circ P \in \mathcal{Q}({}^m E; \ell_{\infty}(B_{F'})) \subset \mathcal{R}({}^m E; \ell_{\infty}(B_{F'}))$ . Portanto,  $P \in \mathcal{R}^{\text{inj}}({}^m E; F)$  e além disso

$$\|P\|_{\mathcal{R}^{\text{inj}}} = \|I_F \circ P\|_{\mathcal{R}} \leq \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}} = \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}.$$

Isso prova que  $\mathcal{Q}^{\text{inj}} \subset \mathcal{R}^{\text{inj}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{R}^{\text{inj}}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}}$ .

(c) Lembremos que  $(\mathcal{Q}^{\text{inj}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}})$  é um ideal normado injetivo de polinômios. Segue do item (b) do Corolário 3.2.4 que  $\mathcal{Q}^{\text{inj}} = (\mathcal{Q}^{\text{inj}})^{\text{inj}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{inj}}} = \|\cdot\|_{(\mathcal{Q}^{\text{inj}})^{\text{inj}}}$ .  $\square$

**Observação 3.2.6.** Os conceitos e propriedades de ideais injetivos de operadores (veja [33, 4.6] ou [16, 9.7]) são análogos aos de ideais injetivos de polinômios, e são recuperados ao se considerar o caso linear  $m = 1$  no que foi feito acima. Neste caso, denotamos também por  $\mathcal{I}^{\text{inj}}$  a envoltória injetiva de um ideal de operadores  $\mathcal{I}$ .

Analogamente, obtemos a definição e as propriedades de ideal injetivo de polinômios  $m$ -homogêneos ao considerarmos  $m$  fixo no que foi feito acima.

**Exemplo 3.2.7.** De [33, 4.6.12] sabemos que os ideais de operadores  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{CC}$  são injetivos. O ideal dos operadores aproximáveis  $\mathcal{A}$  não é injetivo, pois  $\mathcal{A}^{\text{inj}} = \mathcal{K}$  (veja [22, Proposition 19.2.3]).

**Exemplo 3.2.8.** Vejamos que o ideal  $\overline{\mathcal{P}_f}$  dos polinômios aproximáveis por polinômios de tipo finito (Definição 1.5.9) não é injetivo. Como  $(\mathcal{P}_f)_1 = \mathcal{F}$  (veja [42, Exemplo 4.5]), onde  $(\mathcal{P}_f)_1$  é a componente linear do ideal de polinômios  $\mathcal{P}_f$  (Definição 1.5.1), temos  $(\overline{\mathcal{P}_f})_1 = \mathcal{A}$ . Logo  $\overline{\mathcal{P}_f}$  não é um ideal injetivo uma vez que sua componente linear  $(\overline{\mathcal{P}_f})_1$  é um ideal de operadores não injetivo. O mesmo argumento mostra que o ideal de polinômios  $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  não é injetivo.

Mais adiante veremos que, algumas vezes, é interessante considerar a envoltória injetiva de um ideal de polinômios  $m$ -homogêneos. A definição é óbvia:

**Definição 3.2.9.** Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $\mathcal{Q}_m$  um ideal de polinômios  $m$ -homogêneos. Definimos a classe de polinômios  $m$ -homogêneos  $(\mathcal{Q}_m)^{\text{inj}}$  por

$$(\mathcal{Q}_m)^{\text{inj}}(E; F) = \{P \in \mathcal{P}(^m E; F) : I_F \circ P \in \mathcal{Q}_m(E; \ell_\infty(B_{F'}))\},$$

para quaisquer espaços de Banach  $E$  e  $F$ .

Segue do que provamos antes que  $(\mathcal{Q}_m)^{\text{inj}}$  é também um ideal de polinômios  $m$ -homogêneos.

Dizemos que  $\mathcal{Q}_m$  é *injetivo* se  $\mathcal{Q}_m = (\mathcal{Q}_m)^{\text{inj}}$ .

No caso em que  $\mathcal{Q}$  é um ideal de polinômios, desta definição, a definição de componente  $m$ -ésima de um ideal de polinômios (Definição 1.5.1) e a Definição 3.2.1 segue imediatamente que

$$(\mathcal{Q}^{\text{inj}})_m = (\mathcal{Q}_m)^{\text{inj}} \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Assim, um ideal de polinômios  $\mathcal{Q}$  é injetivo se, e somente se,  $\mathcal{Q}_m$  é um ideal injetivo de polinômios  $m$ -homogêneos para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

### 3.3 As propriedades da dominação forte e fraca

Nesta seção estudaremos duas propriedades da dominação que generalizam a propriedade da dominação que caracteriza aos ideais injetivos de operadores lineares (veja proposição a seguir). Provaremos que a chamada *propriedade da dominação fraca* caracteriza aos ideais injetivos de polinômios, e veremos, na próxima seção, que essa caracterização nos ajudará a descrever a envoltória injetiva de um ideal de composição.

Os ideais injetivos de operadores são caracterizados pela seguinte propriedade da dominação:

**Proposição 3.3.1.** ([16, Exercise 9.10(b)], [6, Lemma 3.1]) *Um ideal de operadores  $\mathcal{I}$  é injetivo se, e somente se, dados operadores  $u \in \mathcal{I}(E; F)$  e  $v \in \mathcal{L}(E; G)$  tais que*

$$\|v(x)\| \leq C \cdot \|u(x)\|$$

*para todo  $x \in E$  e alguma constante  $C \geq 0$  (dependendo eventualmente de  $E, F, G, u, v$ ), tem-se  $v \in \mathcal{I}(E; G)$ .*



Adaptando diretamente a propriedade da dominação acima para o caso de polinômios, temos a seguinte definição:

**Definição 3.3.2.** Dizemos que um ideal de polinômios  $\mathcal{Q}$  tem a *propriedade da dominação forte* se dados  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$  e  $Q \in \mathcal{P}(^m E; G)$  tais que

$$\|Q(x)\| \leq C \cdot \|P(x)\|$$

para todo  $x \in E$  e alguma constante  $C \geq 0$  (dependendo eventualmente de  $E, F, G, m, P, Q$ ), tem-se  $Q \in \mathcal{Q}(^m E; G)$ .

**Proposição 3.3.3.** *Todo ideal de polinômios com a propriedade da dominação forte é injetivo.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $\mathcal{Q}$  seja um ideal de polinômios com a propriedade da dominação forte e sejam  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  e  $j: F \rightarrow G$  uma injeção métrica tais que  $j \circ P \in \mathcal{Q}(^m E; G)$ . Então

$$\|P(x)\| = \|j(P(x))\| = \|(j \circ P)(x)\|$$

para todo  $x \in E$ . Como  $j \circ P \in \mathcal{Q}(^m E; G)$ , segue da propriedade da dominação forte de  $\mathcal{Q}$  que  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$ . Provando assim que  $\mathcal{Q}$  é injetivo.  $\square$

A recíproca da proposição anterior não é válida. Mostraremos isso no Exemplo 3.4.11. Precisa-se então de uma nova propriedade da dominação para caracterizar os ideais injetivos de polinômios.

**Definição 3.3.4.** Dizemos que um ideal de polinômios  $\mathcal{Q}$  tem a *propriedade da dominação fraca* se dados  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$  e  $Q \in \mathcal{P}(^m E; G)$  tais que

$$\left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i Q(x_i) \right\| \leq C \cdot \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i P(x_i) \right\|$$

para todos  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_k \in E$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  e alguma constante  $C \geq 0$  (dependendo eventualmente de  $E, F, G, m, P, Q$ ), tem-se  $Q \in \mathcal{Q}(^m E; G)$ .

É fácil verificar que a propriedade da dominação forte implica a propriedade da dominação fraca. Por outro lado, os ideais injetivos de polinômios são caracterizados pela propriedade da dominação fraca:

**Teorema 3.3.5.** *Um ideal de polinômios é injetivo se, e somente se, tem a propriedade da dominação fraca.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $\mathcal{Q}$  seja um ideal injetivo de polinômios e sejam  $E, F, G$  espaços de Banach,  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$  e  $Q \in \mathcal{P}(^m E; G)$  tais que

$$\left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i Q(x_i) \right\| \leq C \cdot \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i P(x_i) \right\| \quad (3.10)$$

para todos  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_k \in E$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  e alguma constante  $C \geq 0$ . Definamos a função  $u$ :  $\text{span}\{P(E)\} \subset F \rightarrow G$  por

$$u \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i P(x_i) \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i Q(x_i).$$

Vejamos que  $u$  está bem definida. Dado  $z \in \text{span}\{P(E)\}$  tal que  $z = \sum_{i=1}^k \lambda_i P(x_i)$  e

$z = \sum_{j=1}^l \alpha_j P(y_j)$ , onde  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l \in E$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{K}$ , tem-

se  $\left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i P(x_i) - \sum_{j=1}^l \alpha_j P(y_j) \right\| = 0$ . Segue de (3.10) que  $\left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i Q(x_i) - \sum_{j=1}^l \alpha_j Q(y_j) \right\| = 0$  e portanto

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i Q(x_i) = \sum_{j=1}^l \alpha_j Q(y_j),$$

o que mostra que  $u$  está bem definida. Provemos que  $u$  é linear. Sejam  $z = \sum_{i=1}^k \lambda_i P(x_i)$ ,  $w =$

$\sum_{j=1}^l \alpha_j P(y_j) \in \text{span}\{P(E)\}$  e  $\gamma \in \mathbb{K}$ . Então  $\gamma z + w = \sum_{i=1}^k \gamma \lambda_i P(x_i) + \sum_{j=1}^l \alpha_j P(y_j)$ . Portanto

$$u(\gamma z + w) = \sum_{i=1}^k \gamma \lambda_i Q(x_i) + \sum_{j=1}^l \alpha_j Q(y_j) = \gamma u(z) + u(w).$$

Vejamos que  $u$  é contínua. Segue de (3.10) que

$$\left\| u \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i P(x_i) \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i Q(x_i) \right\| \leq C \cdot \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i P(x_i) \right\|,$$

o que prova que  $u$  é contínua. Segue da Proposição 1.1.9 que existe um (único) operador linear contínuo  $\tilde{u}: \overline{\text{span}\{P(E)\}} \subset F \rightarrow G$  tal que  $\tilde{u}|_{\text{span}\{P(E)\}} = u$ . Por outro lado, consideremos a função

$$P_0: E \rightarrow \overline{\text{span}\{P(E)\}} \subset F, \quad P_0(x) = P(x).$$

Pela Proposição 3.1.5 sabemos que  $P_0 \in \mathcal{Q} \left( {}^m E; \overline{\text{span}\{P(E)\}} \right)$ . Para todo  $x \in E$ ,

$$(\tilde{u} \circ P_0)(x) = \tilde{u}(P_0(x)) = \tilde{u}(P(x)) = Q(x),$$

onde a última igualdade segue da definição de  $u$ . Isso prova que  $\tilde{u} \circ P_0 = Q$ .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{P_0} & \overline{\text{span}\{P(E)\}} \\ & \searrow Q & \downarrow \tilde{u} \\ & & G \end{array}$$

Como  $\mathcal{Q}$  é um ideal de polinômios e  $P_0 \in \mathcal{Q} \left( {}^m E; \overline{\text{span}\{P(E)\}} \right)$  segue que  $\tilde{u} \circ P_0 = Q \in \mathcal{Q}({}^m E; G)$ , mostrando que  $\mathcal{Q}$  tem a propriedade da dominação fraca.

Reciprocamente, suponhamos que  $\mathcal{Q}$  seja um ideal de polinômios com a propriedade da dominação fraca e sejam  $E, F, G$  espaços de Banach,  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  e  $j: F \rightarrow G$  uma injeção métrica tais que  $j \circ P \in \mathcal{Q}({}^m E; G)$ . Então

$$\left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i P(x_i) \right\| = \left\| j \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i P(x_i) \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i (j \circ P)(x_i) \right\|,$$

para todos  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_k \in E$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ . Como  $\mathcal{Q}$  tem a propriedade da dominação fraca, tem-se que  $P \in \mathcal{Q}({}^m E; F)$ , provando que  $\mathcal{Q}$  é injetivo.  $\square$

### 3.4 A envoltória injetiva de um ideal de composição

O objetivo desta seção é provar que a envoltória injetiva de um ideal de composição também é um ideal de composição, e apresentar aplicações deste resultado. Provaremos também nesta seção que a propriedade da dominação forte não caracteriza os ideais injetivos de polinômios.

Lembre-se que  $\mathcal{I}^{\text{inj}}$  denota a envoltória injetiva de um ideal de operadores  $\mathcal{I}$  (Observação 3.2.6).

**Teorema 3.4.1.** *Seja  $\mathcal{I}$  um ideal de operadores. Então*

$$\mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P} = (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{inj}}.$$

*Em particular, o ideal de polinômios  $\mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P}$  é injetivo.*

*Demonstração.* Provemos primeiramente que  $\mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P} \subset (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{inj}}$ . Para isso, seja  $P \in (\mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P})({}^m E; F)$ . Então  $P = u \circ Q$  para algum espaço de Banach  $G$ , algum polinômio  $Q \in \mathcal{P}({}^m E; G)$  e algum operador linear  $u \in \mathcal{I}^{\text{inj}}(G; F)$ . Como

$$I_F \circ P = (I_F \circ u) \circ Q \text{ e } I_F \circ u \in \mathcal{I}(G; \ell_\infty(B_{F'})),$$

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{P} & F & \xrightarrow{I_F} & \ell_\infty(B_{F'}) \\ & \searrow Q & \nearrow u & & \\ & & G & & \end{array}$$

temos que  $I_F \circ P$  pertence a  $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ , isto é,  $P \in (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{inj}}({}^m E; F)$ . Isso prova que

$$\mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P} \subset (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{inj}}. \quad (3.11)$$

Provemos agora que o ideal de polinômios  $\mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P}$  é injetivo. Faremos isso por meio da propriedade da dominação fraca. Sejam  $P \in (\mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P})({}^m E; F)$  e  $Q \in \mathcal{P}({}^m E; G)$  tais que

$$\left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i Q(x_i) \right\| \leq C \cdot \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i P(x_i) \right\| \quad (3.12)$$

para todos  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_k \in E$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  e alguma constante  $C \geq 0$ . Consideremos as linearizações  $P_L: \widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E \rightarrow F$  e  $Q_L: \widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E \rightarrow G$  dos polinômios  $P$  e  $Q$ , respetivamente, de acordo com o Teorema 1.3.5. Logo,

$$P_L(\otimes^m x) = P(x) \quad \text{e} \quad Q_L(\otimes^m x) = Q(x)$$

para todo  $x \in E$ . Seja  $z = \sum_{i=1}^k \lambda_i \otimes^m x_i$  um elemento do produto tensorial simétrico (não completado)  $\otimes_\pi^{m,s} E$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_k \in E$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ . Então,

$$\|Q_L(z)\| = \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i Q(x_i) \right\| \stackrel{(3.12)}{\leq} C \cdot \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i P(x_i) \right\| = C \cdot \|P_L(z)\|.$$

Da continuidade de  $P_L$ ,  $Q_L$  e das normas segue que

$$\|Q_L(z)\| \leq C \cdot \|P_L(z)\| \tag{3.13}$$

para todo  $z \in \widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E$ . Como  $P \in (\mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P})({}^m E; F)$ , pela Proposição 1.5.16 temos  $P_L \in \mathcal{I}^{\text{inj}}(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E; F)$ . Combinando a injetividade de  $\mathcal{I}^{\text{inj}}$  com a desigualdade (3.13) e a Proposição 3.3.1 segue que  $Q_L \in \mathcal{I}^{\text{inj}}(\widehat{\otimes}_\pi^{m,s} E; G)$ . Novamente da Proposição 1.5.16 segue que  $Q \in (\mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P})({}^m E; G)$ . Acabamos de provar que  $\mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P}$  tem a propriedade da dominação fraca, e portanto é um ideal injetivo pelo Teorema 3.3.5. De  $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}^{\text{inj}}$  segue que  $\mathcal{I} \circ \mathcal{P} \subset \mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P}$  pela Proposição 1.5.15(c), daí

$$(\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{inj}} \stackrel{(*)}{\subset} (\mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P})^{\text{inj}} \stackrel{(**)}{=} \mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P},$$

onde (\*) segue da Proposição 3.2.5(1) e (\*\*) segue do Corolário 3.2.4(a). Combinando isso com a inclusão (3.11) obtemos a fórmula desejada.

A segunda afirmação segue do Corolário 3.2.3(c). □

Nos ocuparemos agora de algumas consequências do Teorema 3.4.1, que nos fornecerá, entre outras coisas, alguns exemplos interessantes.

**Corolário 3.4.2.** *As seguintes afirmações são equivalentes para um ideal de operadores  $\mathcal{I}$ :*

- (a)  $\mathcal{I}$  é injetivo.
- (b)  $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$  é um ideal injetivo de polinômios.
- (c)  $(\mathcal{I} \circ \mathcal{P})_m$  é um ideal injetivo de polinômios  $m$ -homogêneos para algum  $m \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* (a)  $\implies$  (b) Suponhamos que  $\mathcal{I}$  seja um ideal injetivo de operadores. Então  $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{inj}}$ , e portanto

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{P} = \mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P} = (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{inj}},$$

onde a segunda igualdade segue do Teorema 3.4.1. Logo,  $\mathcal{I} \circ \mathcal{P} = (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{inj}}$  e pelo Corolário 3.2.4 segue que  $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$  é um ideal injetivo.

(b)  $\implies$  (c) Essa implicação é imediata.

(c)  $\implies$  (a) Suponhamos que  $(\mathcal{I} \circ \mathcal{P})_m$  seja um ideal injetivo de polinômios  $m$ -homogêneos para algum  $m \in \mathbb{N}$ . Então

$$(\mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P})_m = ((\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{inj}})_m = ((\mathcal{I} \circ \mathcal{P})_m)^{\text{inj}} = (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})_m,$$

onde a primeira igualdade segue do Teorema 3.4.1, a segunda igualdade segue das definições e a terceira segue da injetividade de  $(\mathcal{I} \circ \mathcal{P})_m$ . Logo,  $(\mathcal{I}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P})_m = (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})_m$ . Segue da Proposição 1.5.17(b) que  $\mathcal{I}^{\text{inj}} = \mathcal{I}$ , isto é,  $\mathcal{I}$  é um ideal injetivo.  $\square$

**Exemplo 3.4.3.** Vejamos que os ideais de polinômios de posto finito  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ , compactos  $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$  e fracamente compactos  $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$  são injetivos. Do Exemplo 1.5.20 sabemos que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \circ \mathcal{P}, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \circ \mathcal{P} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \circ \mathcal{P}.$$

E do Exemplo 3.2.7 sabemos que  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{W}$  são ideais injetivos de operadores lineares. Segue do Corolário 3.4.2 que  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$  e  $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$  são ideais injetivos de polinômios.

Já vimos que o ideal  $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  dos polinômios que são aproximáveis, na norma usual, por polinômios de posto finito não é injetivo. Calcularemos agora sua envoltória injetiva.

**Corolário 3.4.4.**  $(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^{\text{inj}} = \mathcal{P}_{\mathcal{K}}$ .

*Demonstração.* Com efeito,

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^{\text{inj}} = (\mathcal{A} \circ \mathcal{P})^{\text{inj}} = \mathcal{A}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P} = \mathcal{K} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{K}},$$

onde a primeira igualdade segue do Exemplo 1.5.20, a segunda segue do Teorema 3.4.1, a terceira segue de [22, Proposição 19.2.3] e a quarta segue também do Exemplo 1.5.20.  $\square$

Veremos agora uma aplicação sobre o dual polinomial de um ideal de operadores (Definição 1.5.21). Lembre-se que um ideal de operadores  $\mathcal{I}$  é completamente simétrico se  $\mathcal{I}^{\text{dual}} = \mathcal{I}$  (Definição 1.4.17).

**Corolário 3.4.5.** *Um ideal de operadores completamente simétrico é injetivo se, e somente se, seu dual polinomial é injetivo.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $\mathcal{I}$  seja um ideal de operadores completamente simétrico. Então

$$\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}} = \mathcal{I}^{\text{dual}} \circ \mathcal{P} = \mathcal{I} \circ \mathcal{P},$$

onde a primeira igualdade segue da Proposição 1.5.22. Segue do Corolário 3.4.2 que o ideal  $\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}$  é injetivo se, e somente se,  $\mathcal{I}$  é um ideal injetivo.  $\square$

Na próxima aplicação relacionamos o dual polinomial do ideal  $\mathfrak{K}_p$  dos operadores  $p$ -compactos (Exemplo 1.4.9) com o ideal dos operadores  $p$ -nucleares  $\mathfrak{N}_p$  (Exemplo 1.4.7).

**Proposição 3.4.6.**  $\mathfrak{K}_p^{\mathcal{P}\text{-dual}} = (\mathfrak{N}_p \circ \mathcal{P})^{\text{inj}}$  para todo  $1 \leq p < \infty$ .

*Demonstração.* Com efeito,

$$\mathfrak{K}_p^{\mathcal{P}\text{-dual}} = \mathfrak{K}_p^{\text{dual}} \circ \mathcal{P} = \mathfrak{N}_p^{\text{inj}} \circ \mathcal{P} = (\mathfrak{N}_p \circ \mathcal{P})^{\text{inj}},$$

onde a primeira igualdade segue da Proposição 1.5.22, a segunda segue de [35, Theorem 6] e a terceira segue do Teorema 3.4.1.  $\square$

A seguir relacionamos o dual polinomial do ideal  $\mathcal{D}_p$  dos operadores Cohen fortemente  $p$ -somantes (Exemplo 1.4.12) com o ideal  $\mathfrak{J}_p$  dos operadores  $p$ -integráveis (Exemplo 1.4.10).

**Proposição 3.4.7.**  $\mathcal{D}_p^{\mathcal{P}\text{-dual}} = (\mathfrak{J}_{p'} \circ \mathcal{P})^{\text{inj}}$  para todo  $1 < p < \infty$ .

*Demonstração.* Com efeito,

$$\mathcal{D}_p^{\mathcal{P}\text{-dual}} = \mathcal{D}_p^{\text{dual}} \circ \mathcal{P} = \Pi_{p'} \circ \mathcal{P} = \mathfrak{J}_{p'}^{\text{inj}} \circ \mathcal{P} = (\mathfrak{J}_{p'} \circ \mathcal{P})^{\text{inj}},$$

onde a primeira igualdade segue da Proposição 1.5.22, a segunda segue de [15], a terceira de [33, Theorem 19.2.7] e a quarta segue do Teorema 3.4.1.  $\square$

Finalizaremos esta seção com o exemplo prometido de um ideal injetivo de polinômios que não tem a propriedade da dominação forte. Para isso, vejamos algumas propriedades dos espaços de Schur. Isso provará, em particular, que as propriedades da dominação fraca e forte não são equivalentes.

**Definição 3.4.8.** Dizemos que um espaço normado  $E$  é *de Schur* se toda sequência fracamente convergente em  $E$  é convergente em norma.

**Exemplo 3.4.9.**  $\ell_1$  é um espaço de Schur. Para uma demonstração deste fato, veja, por exemplo, [11, Teorema 6.2.12].

Lembre-se que um operador  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  é completamente contínuo se  $u$  transforma sequências fracamente convergentes em  $E$  em sequências convergentes em norma em  $F$  (Exemplo 1.4.13).

**Proposição 3.4.10.** *Seja  $E$  um espaço normado. Então:*

- (a)  $E$  é um espaço de Schur se, e somente se, o operador identidade  $id: E \rightarrow E$  é completamente contínuo.
- (b) Se  $E$  é um espaço de Schur, então, para todo espaço normado  $F$ , todo operador  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  é completamente contínuo.
- (c) Se  $E$  contém uma cópia isomorfa de um espaço reflexivo de dimensão infinita, então  $E$  não é um espaço de Schur.

*Demonstração.* Os itens (a) e (b) seguem das definições de operador completamente contínuo e de espaço de Schur. Para a demonstração do item (c) veja [23, Proposição 2.3.7].  $\square$

**Exemplo 3.4.11.** Consideremos o ideal  $\mathcal{CC}$  dos operadores completamente contínuos (Exemplo 1.4.13), e vejamos que o ideal de polinômios  $\mathcal{CC} \circ \mathcal{P}$  é injetivo e não tem a propriedade da dominação forte.

A injetividade de  $\mathcal{CC} \circ \mathcal{P}$  segue da injetividade de  $\mathcal{CC}$  (veja [33, 4.6.12]) e do Corolário 3.4.2.

Vejamos que  $\mathcal{CC} \circ \mathcal{P}$  não tem a propriedade da dominação forte. Para isso, consideremos as funções  $R: \ell_2 \rightarrow \ell_1$  e  $Q: \ell_2 \rightarrow \ell_2 \widehat{\otimes}_\pi^s \ell_2$  dadas por

$$R((\lambda_n)_{n=1}^\infty) = (\lambda_n^2)_{n=1}^\infty \quad \text{e} \quad Q(x) = x \otimes x.$$

Pelo Exemplo 1.2.20,  $R$  é um polinômio 2-homogêneo contínuo. E  $Q$  é um polinômio 2-homogêneo contínuo por ser o polinômio canônico de  $\ell_2$  em  $\ell_2 \widehat{\otimes}_\pi^s \ell_2$ . Segue de [38, Example 2.10] que o operador

$$u: \ell_1 \rightarrow \ell_2 \widehat{\otimes}_\pi^s \ell_2, \quad u((\lambda_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n,$$

onde  $\{e_1, e_2, \dots\}$  são os vetores unitários canônicos, é uma injeção métrica.

Como  $\ell_1$  é um espaço de Schur, segue da Proposição 3.4.10(b) que  $u \in \mathcal{CC}(\ell_1; \ell_2 \widehat{\otimes}_\pi^s \ell_2)$ . Portanto,

$$P = u \circ R \in \mathcal{CC} \circ \mathcal{P}(^2\ell_2; \ell_2 \widehat{\otimes}_\pi^s \ell_2).$$

Por outro lado, como  $\ell_2 \widehat{\otimes}_\pi^s \ell_2$  contém uma cópia isomorfa do espaço reflexivo  $\ell_2$  (veja [5]), segue da Proposição 3.4.10(c) que  $\ell_2 \widehat{\otimes}_\pi^s \ell_2$  não é um espaço de Schur, isto é, o operador identidade  $id_{\ell_2 \widehat{\otimes}_\pi^s \ell_2}$  não pertence a  $\mathcal{CC}$  (Proposição 3.4.10(a)). Considerando a igualdade

$$Q_L(x \otimes x) = Q(x) = x \otimes x$$

para todo  $x \in \ell_2$ , do fato de  $Q_L$  ser um operador linear contínuo e o fato de que o subespaço gerado pelos tensores elementares  $x \otimes x$  é denso em  $\ell_2 \widehat{\otimes}_\pi^s \ell_2$ , segue que  $Q_L = id_{\ell_2 \widehat{\otimes}_\pi^s \ell_2}$ . Consequentemente,  $Q_L$  não pertence a  $\mathcal{CC}$ . Segue da Proposição 1.5.16 que  $Q$  não pertence ao ideal  $\mathcal{CC} \circ \mathcal{P}$ . Por outro lado, denotando a norma projetiva  $\pi$  por  $\|\cdot\|$ , temos

$$\begin{aligned} \|P((\lambda_n)_{n=1}^\infty)\| &= \|u(R((\lambda_n)_{n=1}^\infty))\| = \|R((\lambda_n)_{n=1}^\infty)\| \\ &= \|(\lambda_n^2)_{n=1}^\infty\|_{\ell_1} = \|(\lambda_n)_{n=1}^\infty\|_{\ell_2}^2 \\ &= \|(\lambda_n)_{n=1}^\infty \otimes (\lambda_n)_{n=1}^\infty\| = \|Q((\lambda_n)_{n=1}^\infty)\| \end{aligned}$$

para todo  $(\lambda_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$ . Assim,  $P$  pertence a  $\mathcal{CC} \circ \mathcal{P}$ ,  $\|Q(x)\| = \|P(x)\|$  para todo  $x \in \ell_2$  mas  $Q$  não pertence a  $\mathcal{CC} \circ \mathcal{P}$ . Isto prova que o ideal de polinômios  $\mathcal{CC} \circ \mathcal{P}$  não tem a propriedade da dominação forte, e portanto o exemplo está completo.

# Capítulo 4

## Ideais sobrejetivos de polinômios homogêneos

Analogamente ao caso dos ideais injetivos, as noções de ideal sobrejetivo e envoltória sobrejetiva aparecem inicialmente para ideais de operadores lineares (veja [16, 33]) e posteriormente são generalizados de forma natural para ideais de polinômios.

Assim como a importância dos ideais injetivos é a estreita relação com subespaços do contradomínio de um operador e injeções métricas, a importância dos ideais sobrejetivos é a estreita relação com espaços quocientes e sobrejeções métricas (veja Proposição 2.2.19). Também é importante que muitos ideais centrais da teoria de ideais de operadores/polinômios são sobrejetivos.

Nas duas primeiras seções deste capítulo, estudaremos as principais propriedades dos ideais sobrejetivos de polinômios e da envoltória sobrejetiva de um ideal de polinômios. Exibiremos também exemplos ilustrativos relacionados com esses conceitos. Além disso, estudaremos a sobrejetividade dos ideais dos polinômios múltiplo  $p$ -somantes e dos polinômios  $p$ -dominados. Na terceira seção estudaremos propriedades de levantamento para polinômios que nos ajudarão a descrever a envoltória sobrejetiva de um ideal de composição na última seção. Na última seção daremos também aplicações dessa descrição e algumas caracterizações de ideais sobrejetivos de composição. Para isso será necessário estudar primeiramente os chamados *polinômios  $\mathcal{I}$ -limitados*, em que  $\mathcal{I}$  é um ideal de operadores.

A principal referência para o tópico dos ideais sobrejetivos de polinômios é o artigo [4], e a principal referência para o tópico dos polinômios  $\mathcal{I}$ -limitados é o artigo [2].

Ao longo deste capítulo, novamente  $m$  denotará um número natural qualquer e  $E, F, G, H$  espaços de Banach quaisquer.

### 4.1 Definição e primeiros exemplos

Ideais sobrejetivos de polinômios são definidos à semelhança dos ideais sobrejetivos de operadores lineares (veja [16, 33]).

**Definição 4.1.1.** (a) Dizemos que um ideal de polinômios  $\mathcal{Q}$  é *sobrejetivo* se dados  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  e uma sobrejeção métrica  $s: G \rightarrow E$  tais que  $P \circ s \in \mathcal{Q}({}^m G; F)$ , tem-se  $P \in \mathcal{Q}({}^m E; F)$ .



- (b) Dizemos que um ideal normado de polinômios  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é *sobrejetivo* se dados  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  e uma sobrejeção métrica  $s: G \rightarrow E$  tais que  $P \circ s \in \mathcal{Q}({}^m G; F)$ , tem-se  $P \in \mathcal{Q}({}^m E; F)$  e

$$\|P\|_{\mathcal{Q}} = \|P \circ s\|_{\mathcal{Q}}. \quad (4.1)$$

**Observação 4.1.2.** Para provar a equação (4.1), basta provar a desigualdade

$$\|P\|_{\mathcal{Q}} \leq \|P \circ s\|_{\mathcal{Q}},$$

pois a desigualdade inversa  $\|P \circ s\|_{\mathcal{Q}} \leq \|P\|_{\mathcal{Q}}$  é sempre satisfeita. Com efeito, como  $\|s\| = 1$  (Proposição 2.2.13), segue do fato de  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  ser um ideal normado de polinômios que

$$\|P \circ s\|_{\mathcal{Q}} \leq \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|s\|^m = \|P\|_{\mathcal{Q}}.$$

A seguinte proposição nos diz que a igualdade (4.1) é sempre satisfeita para a norma usual de polinômios.

**Proposição 4.1.3.** *Sejam  $E, F, G$  espaços normados,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $s: E \rightarrow F$  uma sobrejeção métrica e  $P: F \rightarrow G$  um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo. Então*

$$\|P\| = \|P \circ s\|.$$

*Demonstração.* Pelo item (a) da Proposição 2.2.13 sabemos que  $s(\mathring{B}_E) = \mathring{B}_F$ . Daí,

$$\{\|P(s(x))\| : x \in E \text{ e } \|x\| < 1\} = \{\|P(y)\| : y \in F \text{ e } \|y\| < 1\}.$$

Segue da Proposição 1.2.24 e da equação acima que

$$\|P \circ s\| = \sup_{\|x\| < 1} \|(P \circ s)(x)\| = \sup_{\|x\| < 1} \|P(s(x))\| = \sup_{\|y\| < 1} \|P(y)\| = \|P\|.$$

□

**Exemplo 4.1.4.** Vejamos que o ideal  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$  dos polinômios de posto finito é sobrejetivo.

Para isso, sejam  $P: E \rightarrow F$  um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo e  $s: G \rightarrow E$  uma sobrejeção métrica tais que  $P \circ s: G \rightarrow F$  é um polinômio de posto finito. Devemos provar que  $P$  é também um polinômio de posto finito. Da hipótese sabemos que  $\text{span}\{(P \circ s)(G)\}$  é um subespaço de dimensão finita de  $F$ . Como

$$\text{span}\{(P \circ s)(G)\} = \text{span}\{P(s(G))\} = \text{span}\{P(E)\},$$

onde a segunda igualdade segue da sobrejetividade de  $s$ , então  $\text{span}\{P(E)\}$  é também um subespaço de dimensão finita de  $F$ , isto é,  $P$  é um polinômio de posto finito.

No Exemplo 4.2.10 veremos que os ideais  $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$  dos polinômios compactos e  $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$  dos polinômios fracamente compactos são sobrejetivos, e na Proposição 4.4.13 veremos algumas condições para determinar a sobrejetividade ou não sobrejetividade de certas classe de ideais de polinômios.

## 4.2 A envoltória sobrejetiva

Nesta seção estudaremos detalhadamente as propriedades principais da envoltória sobrejetiva de um ideal de polinômios e veremos a caracterização de um ideal sobrejetivo por meio da sua envoltória sobrejetiva. Estudaremos também a sobrejetividade dos ideais dos polinômios múltiplo  $p$ -somantes e dos polinômios  $p$ -dominados.

**Definição 4.2.1.** (a) Seja  $\mathcal{Q}$  um ideal de polinômios. Definimos a classe de polinômios  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}$  por

$$\mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F) = \{P \in \mathcal{P}({}^m E; F) : P \circ Q_E \in \mathcal{Q}({}^m \ell_1(B_E); F)\},$$

onde  $Q_E$  denota sobrejeção métrica canônica de  $\ell_1(B_E)$  em  $E$  definida na Proposição 2.2.27. A classe  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}$  é chamada de *envoltória sobrejetiva* de  $\mathcal{Q}$ .

(b) Seja  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  um ideal normado de polinômios. Definimos a função  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} : \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F) \rightarrow [0, +\infty)$  por

$$\|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} = \|P \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}},$$

para todo  $m \in \mathbb{N}$  e quaisquer espaços de Banach  $E$  e  $F$ .

**Proposição 4.2.2.** *Seja  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  um ideal normado de polinômios. Então*

- (a)  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}})$  é um ideal normado de polinômios.
- (b)  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{\text{sur}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$ .
- (c)  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}})$  é sobrejetivo.
- (d) Se  $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$  é um ideal normado sobrejetivo de polinômios tal que  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{R}}$  então  $\mathcal{Q}^{\text{sur}} \subset \mathcal{R}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{R}}$ .
- (e)  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}})$  é o único ideal normado de polinômios que satisfaz os itens (a), (b), (c) e (d).
- (f) Se  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é um ideal de Banach então  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}})$  é também um ideal de Banach.

*Demonstração.* Provemos primeiro o item (b). Sejam  $m \in \mathbb{N}$ ,  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $P \in \mathcal{Q}({}^m E; F)$ . Como  $\mathcal{Q}$  é um ideal de polinômios, temos  $P \circ Q_E \in \mathcal{Q}({}^m \ell_1(B_E); F)$ . Portanto,  $P \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$  e  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{\text{sur}}$ . Por outro lado, pela desigualdade de ideal de  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  temos

$$\|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} = \|P \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} \leq \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|Q_E\|^m = \|P\|_{\mathcal{Q}}.$$

Consequentemente,  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$ .

(a) Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $E$  e  $F$  espaços de Banach. Provemos primeiro que  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}({}^m E; F)$  que contém os polinômios  $m$ -homogêneos contínuos de tipo finito e que  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$  é uma norma em  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$ .

Combinando o item (b) com o fato de  $\mathcal{Q}$  ser um ideal de polinômios, temos

$$\mathcal{P}_f({}^m E; F) \subset \mathcal{Q}({}^m E; F) \subset \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F),$$

provando que  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$  contém os polinômios  $m$ -homogêneos contínuos de tipo finito.

Provemos que  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}({}^m E; F)$ . Denotemos por  $0_1$  o polinômio nulo de  $E$  em  $F$  e por  $0_2$  o polinômio nulo de  $\ell_1(B_E)$  em  $F$ . Segue de  $\mathcal{Q}({}^m E; F) \subset \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$  que  $0_1 \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$ . Por outro lado, sejam  $P, Q \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Segue da definição de soma e produto por escalar que

$$(\lambda P + Q) \circ Q_E = \lambda(P \circ Q_E) + Q \circ Q_E. \quad (4.2)$$

Como  $\mathcal{Q}({}^m \ell_1(B_E); F)$  é um espaço vetorial, segue da equação (4.2) que  $(\lambda P + Q) \circ Q_E \in \mathcal{Q}({}^m \ell_1(B_E); F)$ , ou seja,  $\lambda P + Q \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$ .

Provemos que  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$  é uma norma em  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$ .

(N1) Note que

$$\|0_1\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} = \|0_1 \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} = \|0_2\|_{\mathcal{Q}} = 0.$$

Por outro lado, seja  $P \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$  tal que  $\|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} = 0$ . Então  $\|P \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} = \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} = 0$  e portanto,  $P \circ Q_E = 0_2$ . Segue da sobrejetividade de  $Q_E$  que  $P = 0_1$ .

(N2) Sejam  $P \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Segue da equação (4.2) e do fato de  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$  ser uma norma em  $\mathcal{Q}({}^m \ell_1(B_E); F)$  que

$$\begin{aligned} \|\lambda P\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} &= \|\lambda P \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} = \|\lambda(P \circ Q_E)\|_{\mathcal{Q}} \\ &= |\lambda| \cdot \|P \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} = |\lambda| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}. \end{aligned}$$

(N3) Sejam  $P, Q \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$ . Segue da equação (4.2) e do fato de  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$  ser uma norma em  $\mathcal{Q}({}^m \ell_1(B_E); F)$  que

$$\begin{aligned} \|P + Q\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} &= \|(P + Q) \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} = \|P \circ Q_E + Q \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} \\ &\leq \|P \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} + \|Q \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} = \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} + \|Q\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}. \end{aligned}$$

Para  $m \in \mathbb{N}$ , provemos que  $\|id_m\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} = 1$ . Note que  $Q_{\mathbb{K}}: \ell_1(B_{\mathbb{K}}) \rightarrow \mathbb{K}$  é um funcional linear contínuo. Segue da igualdade  $id_m \circ Q_{\mathbb{K}} = Q_{\mathbb{K}}^m \otimes 1$  e da Proposição 1.5.6 que

$$\|id_m\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} = \|id_m \circ Q_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{Q}} = \|Q_{\mathbb{K}}^m \otimes 1\|_{\mathcal{Q}} = \|Q_{\mathbb{K}}\|^m \cdot |1| = 1.$$

Provemos a propriedade de ideal e a desigualdade de ideal. Sejam  $u \in \mathcal{L}(G; E)$ ,  $P \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$ ,  $t \in \mathcal{L}(F; H)$  e  $\varepsilon > 0$ . Temos  $P \circ Q_E \in \mathcal{Q}({}^m \ell_1(B_E); F)$ . Como  $\ell_1(B_G)$  tem a propriedade do levantamento métrico (Teorema 2.2.26) e  $u \circ Q_G: \ell_1(B_G) \rightarrow E$  é um operador linear contínuo, segue que existe um operador linear contínuo  $v: \ell_1(B_G) \rightarrow \ell_1(B_E)$  tal que  $Q_E \circ v = u \circ Q_G$  e

$$\|v\| \leq (1 + \varepsilon) \cdot \|u \circ Q_G\|. \quad (4.3)$$

$$\begin{array}{ccccccc} G & \xrightarrow{u} & E & \xrightarrow{P} & F & \xrightarrow{t} & H \\ \uparrow Q_G & & \uparrow Q_E & & & & \\ \ell_1(B_G) & \xrightarrow{v} & \ell_1(B_E) & & & & \end{array}$$

Daí,

$$t \circ P \circ u \circ Q_G = t \circ (P \circ Q_E) \circ v. \quad (4.4)$$

Como  $\mathcal{Q}$  é um ideal de polinômios e  $P \circ Q_E \in \mathcal{Q}({}^m\ell_1(B_E); F)$ , temos  $t \circ P \circ u \circ Q_G \in \mathcal{Q}({}^m\ell_1(B_G); H)$ , isto é,  $t \circ P \circ u \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^mG; H)$ .

Provemos a desigualdade de ideal. Pela equação (4.3),

$$\|v\| \leq (1 + \varepsilon) \cdot \|u\|.$$

Combinando a desigualdade acima, com a equação (4.4) e com a desigualdade de ideal de  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ , segue que

$$\begin{aligned} \|t \circ P \circ u\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} &= \|t \circ P \circ u \circ Q_G\|_{\mathcal{Q}} \stackrel{(4.4)}{=} \|t \circ P \circ Q_E \circ v\|_{\mathcal{Q}} \leq \|t\| \cdot \|P \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|v\|^m \\ &= \|t\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} \cdot \|v\|^m \leq \|t\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} \cdot (1 + \varepsilon)^m \cdot \|u\|^m. \end{aligned}$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  obtemos a desigualdade de ideal.

(c) Para provar que  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}})$  é sobrejetivo, sejam  $P \in \mathcal{P}({}^mE; F)$  e  $s: G \rightarrow E$  uma sobrejeção métrica tais que  $P \circ s \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^mG; F)$ . Logo,  $P \circ s \circ Q_G \in \mathcal{Q}({}^m\ell_1(B_G); F)$ . Como  $\ell_1(B_E)$  tem a propriedade do levantamento métrico (Teorema 2.2.26) e  $s \circ Q_G: \ell_1(B_G) \rightarrow E$  é uma sobrejeção métrica (Proposição 2.2.20), segue que existe um operador linear contínuo  $v: \ell_1(B_E) \rightarrow \ell_1(B_G)$  tal que  $Q_E = s \circ Q_G \circ v$  e

$$\|v\| \leq (1 + \varepsilon)\|Q_E\| = 1 + \varepsilon. \quad (4.5)$$

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{P} & F \\ Q_G \uparrow & & \uparrow Q_E & & \\ \ell_1(B_G) & \xleftarrow{v} & \ell_1(B_E) & & \end{array}$$

Daí,

$$P \circ Q_E = (P \circ s \circ Q_G) \circ v. \quad (4.6)$$

Como  $\mathcal{Q}$  é um ideal de polinômios e  $P \circ s \circ Q_G \in \mathcal{Q}({}^m\ell_1(B_G); F)$ , temos

$$P \circ Q_E = (P \circ s \circ Q_G) \circ v \in \mathcal{Q}({}^m\ell_1(B_E); F),$$

isto é,  $P \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^mE; F)$ . Por outro lado, segue da desigualdade (4.5), da equação (4.6) e da desigualdade de ideal de  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  que

$$\begin{aligned} \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} &= \|P \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} \stackrel{(4.6)}{=} \|(P \circ s \circ Q_G) \circ v\|_{\mathcal{Q}} \leq \|P \circ s \circ Q_G\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|v\|^m \\ &= \|P \circ s\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} \cdot \|v\|^m \stackrel{(4.5)}{\leq} \|P \circ s\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} \cdot (1 + \varepsilon)^m. \end{aligned}$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  obtemos  $\|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} \leq \|P \circ s\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$ . Segue da Observação 4.1.2 que

$$\|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} = \|P \circ s\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}},$$

provando que  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}})$  é sobrejetivo.

(d) Seja  $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$  um ideal normado sobrejetivo de polinômios tal que  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{R}}$ . Vejamos que  $\mathcal{Q}^{\text{sur}} \subset \mathcal{R}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{R}}$ . Dado  $P \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$ ,

$$P \circ Q_E \in \mathcal{Q}({}^m \ell_1(B_E); F) \subset \mathcal{R}({}^m \ell_1(B_E); F),$$

e portanto  $P \circ Q_E \in \mathcal{R}({}^m \ell_1(B_E); F)$ . Da sobrejetividade de  $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$  decorre que  $P \in \mathcal{R}({}^m E; F)$  e

$$\|P\|_{\mathcal{R}} = \|P \circ Q_E\|_{\mathcal{R}} \leq \|P \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} = \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}},$$

provando que  $\mathcal{Q}^{\text{sur}} \subset \mathcal{R}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{R}}$ .

(e) Seja  $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_{\mathcal{S}})$  um ideal normado de polinômios que satisfaz os itens (a), (b), (c) e (d). Provemos que  $\mathcal{S} = \mathcal{Q}^{\text{sur}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{S}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$ . Com efeito, como  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}})$  é um ideal normado sobrejetivo de polinômios com  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{\text{sur}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$  e  $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_{\mathcal{S}})$  satisfaz o item (d), tem-se  $\mathcal{S} \subset \mathcal{Q}^{\text{sur}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{S}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$ . Analogamente, como  $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_{\mathcal{S}})$  é um ideal normado sobrejetivo de polinômios com  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{S}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{S}}$ , segue do item (d) que  $\mathcal{Q}^{\text{sur}} \subset \mathcal{S}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{S}}$ , provando assim o que se desejava.

(f) Suponhamos que  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  seja um ideal de Banach e provemos que  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}})$  é também um ideal de Banach. Para isso, seja  $(P_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todos  $k, n \geq n_0$ ,

$$\|P_k - P_n\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} < \varepsilon. \quad (4.7)$$

Como  $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$  (Proposição 1.5.6), tem-se

$$\|P_k - P_n\| \leq \|P_k - P_n\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} < \varepsilon.$$

Isso prova que  $(P_n)_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência de Cauchy em  $(\mathcal{P}({}^m E; F), \|\cdot\|)$ . Como  $(\mathcal{P}({}^m E; F), \|\cdot\|)$  é um espaço completo (Proposição 1.2.19), existe  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - P\| = 0$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$ , segue da Proposição 4.1.3 que

$$\|P_n - P\| = \|(P_n - P) \circ Q_E\| = \|P_n \circ Q_E - P \circ Q_E\|.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \circ Q_E = P \circ Q_E \quad (4.8)$$

em  $(\mathcal{P}({}^m \ell_1(B_E); F), \|\cdot\|)$ . Por outro lado, para todos  $k, n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|P_k - P_n\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} = \|(P_k - P_n) \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} = \|P_k \circ Q_E - P_n \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}}.$$

Combinando isso com a desigualdade (4.7), segue que  $(P_n \circ Q_E)_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach  $(\mathcal{Q}({}^m \ell_1(B_E); F), \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ . Podemos tomar  $Q \in \mathcal{Q}({}^m \ell_1(B_E); F)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n \circ Q_E - Q\|_{\mathcal{Q}} = 0. \quad (4.9)$$

Novamente, como  $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$  (Proposição 1.5.6), temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \circ Q_E = Q$  em  $(\mathcal{P}({}^m \ell_1(B_E); F), \|\cdot\|)$ . Combinando isso com a equação (4.8) obtemos  $P \circ Q_E = Q \in \mathcal{Q}({}^m \ell_1(B_E); F)$ , o que prova que  $P \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|P_n - P\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} = \|(P_n - P) \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} = \|P_n \circ Q_E - P \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} = \|P_n \circ Q_E - Q\|_{\mathcal{Q}}.$$

Da equação (4.9) concluímos que a sequência  $(P_n)_{n=1}^{\infty}$  converge a  $P$  em  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$ , provando assim que  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}})$  é um ideal de Banach.  $\square$

**Corolário 4.2.3.** *Seja  $\mathcal{Q}$  um ideal de polinômios. Então:*

- (a)  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}$  é um ideal de polinômios.
- (b)  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{\text{sur}}$ .
- (c)  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}$  é sobrejetivo.
- (d) Se  $\mathcal{R}$  é um ideal sobrejetivo de polinômios tal que  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$  então  $\mathcal{Q}^{\text{sur}} \subset \mathcal{R}$ .
- (e)  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}$  é a única classe de polinômios que satisfaz os itens (a), (b), (c) e (d).
- (f) Se  $\mathcal{Q}$  é um ideal fechado então  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}$  é também um ideal fechado.

*Demonstração.* As demonstrações dos itens (a), (b), (c), (d) e (e) seguem como nas demonstrações dos itens (a), (b), (c), (d) e (e) da Proposição 4.2.2 respectivamente.

Provemos o item (f). Suponhamos que  $\mathcal{Q}$  seja um ideal fechado. Então  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|)$  é um ideal de Banach, onde  $\|\cdot\|$  é a norma usual de polinômios. Segue do item (f) da Proposição 4.2.2 que  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}}, \|\cdot\|_1)$  é também um ideal de Banach, onde  $\|P\|_1 = \|P \circ Q_E\|$  para todo  $P \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$ . Pela Proposição 4.1.3,

$$\|P\|_1 = \|P \circ Q_E\| = \|P\|$$

para cada  $P \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$ . Portanto,  $\|\cdot\|_1$  é a norma usual de polinômios. Logo,  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}}, \|\cdot\|)$  é um ideal de Banach. Consequentemente,  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}$  é um ideal fechado.  $\square$

Veremos a seguir que, para provar que um ideal de polinômios é sobrejetivo, basta considerar a composição com a sobrejeção métrica canônica no lugar de uma sobrejeção métrica qualquer na Definição 4.1.1.

**Corolário 4.2.4.** (1) *As seguintes condições são equivalentes para um ideal de polinômios  $\mathcal{Q}$ :*

- (a)  $\mathcal{Q}$  é sobrejetivo.
- (b)  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{\text{sur}}$ .
- (c) Se um polinômio  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  é tal que  $P \circ Q_E \in \mathcal{Q}({}^m \ell_1(B_E); F)$ , então  $P \in \mathcal{Q}({}^m E; F)$ .

(2) *As seguintes condições são equivalentes para um ideal normado de polinômios  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ :*

- (a)  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é sobrejetivo.
- (b)  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{\text{sur}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$ .
- (c) Se um polinômio  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  é tal que  $P \circ Q_E \in \mathcal{Q}({}^m \ell_1(B_E); F)$ , então  $P \in \mathcal{Q}({}^m E; F)$  e  $\|P\|_{\mathcal{Q}} = \|P \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}}$ .

*Demonstração.* Basta provar (2).

(b)  $\iff$  (c) Como  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{\text{sur}}$ , então esta equivalência segue imediatamente das definições.

(a)  $\implies$  (b) Suponhamos que  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  seja um ideal sobrejetivo. Sabemos de Proposição 4.2.2(b) que  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{\text{sur}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$ . Por outro lado, como  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é um ideal normado sobrejetivo de polinômios e  $\mathcal{Q}$  contém  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$ , pelo item (d) da Proposição 4.2.2 concluímos que  $\mathcal{Q}^{\text{sur}} \subset \mathcal{Q}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ , provando assim o desejado.

(b)  $\implies$  (a) Suponhamos que  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{\text{sur}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$ . Como  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}})$  é um ideal sobrejetivo (Proposição 4.2.2), segue diretamente que  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  é também um ideal sobrejetivo.  $\square$

Veremos agora que a correspondência  $\mathcal{Q} \mapsto \mathcal{Q}^{\text{sur}}$  é um procedimento de envoltória no sentido de [33, 8.1.2]. Veremos também o resultado análogo para a correspondência  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}) \mapsto (\mathcal{Q}^{\text{sur}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}})$ .

**Proposição 4.2.5.** (1) *Sejam  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{R}$  ideais (fechados) de polinômios. Então:*

(a)  $\mathcal{Q}^{\text{sur}}$  é um ideal (fechado) de polinômios.

(b) Se  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$  então  $\mathcal{Q}^{\text{sur}} \subset \mathcal{R}^{\text{sur}}$ .

(c)  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}})^{\text{sur}} = \mathcal{Q}^{\text{sur}}$ .

(d)  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{\text{sur}}$ .

(2) *Sejam  $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$  e  $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$  ideais normados (de Banach) de polinômios. Então:*

(a)  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}})$  é um ideal normado (de Banach) de polinômios.

(b) Se  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{R}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$  então  $\mathcal{Q}^{\text{sur}} \subset \mathcal{R}^{\text{sur}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{R}^{\text{sur}}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$ .

(c)  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}})^{\text{sur}} = \mathcal{Q}^{\text{sur}}$  e  $\|\cdot\|_{(\mathcal{Q}^{\text{sur}})^{\text{sur}}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$ .

(d)  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{\text{sur}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ .

*Demonstração.* Basta provar (2). Os itens (a) e (d) foram provados na Proposição 4.2.2.

(b) Suponhamos que  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{R}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$  e seja  $P \in \mathcal{Q}^{\text{sur}}({}^m E; F)$ . Então  $P \circ Q_E \in \mathcal{Q}({}^m \ell_1(B_E); F) \subset \mathcal{R}({}^m \ell_1(B_E); F)$ . Portanto,  $P \in \mathcal{R}^{\text{sur}}({}^m E; F)$  e além disso

$$\|P\|_{\mathcal{R}^{\text{sur}}} = \|P \circ Q_E\|_{\mathcal{R}} \leq \|P \circ Q_E\|_{\mathcal{Q}} = \|P\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}},$$

provando assim que  $\mathcal{Q}^{\text{sur}} \subset \mathcal{R}^{\text{sur}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{R}^{\text{sur}}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}}$ .

(c) Lembremos que  $(\mathcal{Q}^{\text{sur}}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}})$  é um ideal normado sobrejetivo de polinômios. Segue do item (b) do Corolário 4.2.4 que  $\mathcal{Q}^{\text{sur}} = (\mathcal{Q}^{\text{sur}})^{\text{sur}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^{\text{sur}}} = \|\cdot\|_{(\mathcal{Q}^{\text{sur}})^{\text{sur}}}$ .  $\square$

**Observação 4.2.6.** Os conceitos e propriedades de ideais sobrejetivos de operadores (veja [33, 4.7] ou [16, 9.8]) são análogos aos de ideais sobrejetivos de polinômios, e são recuperados ao se considerar o caso linear  $m = 1$  no que foi feito acima. Neste caso, denotamos também por  $\mathcal{I}^{\text{sur}}$  a envoltória sobrejetiva de um ideal de operadores  $\mathcal{I}$ .

Analogamente, obtemos a definição e as propriedades de ideal sobrejetivo de polinômios  $m$ -homogêneos ao considerarmos  $m$  fixo no que foi feito acima.

**Exemplo 4.2.7.** De [33, 4.7.12] sabemos que os ideais de operadores  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{W}$  são sobrejetivos. O ideal dos operadores aproximáveis  $\mathcal{A}$  não é sobrejetivo, pois  $\mathcal{A}^{\text{sur}} = \mathcal{K}$  (veja [22, Proposition 19.2.3]).

Mais adiante veremos que, algumas vezes, é interessante considerar a envoltória sobrejetiva de um ideal de polinômios  $m$ -homogêneos. A definição é óbvia:

**Definição 4.2.8.** Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $\mathcal{Q}_m$  um ideal de polinômios  $m$ -homogêneos. Definimos a classe de polinômios  $m$ -homogêneos  $(\mathcal{Q}_m)^{\text{sur}}$  por

$$(\mathcal{Q}_m)^{\text{sur}}(E; F) = \{P \in \mathcal{P}(^m E; F) : P \circ Q_E \in \mathcal{Q}_m(\ell_1(B_E); F)\},$$

para quaisquer espaços de Banach  $E$  e  $F$ .

Segue do que provamos antes que  $(\mathcal{Q}_m)^{\text{sur}}$  é também um ideal de polinômios  $m$ -homogêneos.

Dizemos que  $\mathcal{Q}_m$  é *sobrejetivo* se  $\mathcal{Q}_m = (\mathcal{Q}_m)^{\text{sur}}$ .

No caso em que  $\mathcal{Q}$  é um ideal de polinômios, desta definição, a definição de componente  $m$ -ésima de um ideal de polinômios (Definição 4.1.1) e a Definição 3.2.1 segue imediatamente que

$$(\mathcal{Q}^{\text{sur}})_m = (\mathcal{Q}_m)^{\text{sur}} \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Assim, um ideal de polinômios  $\mathcal{Q}$  é sobrejetivo se, e somente se,  $\mathcal{Q}_m$  é um ideal sobrejetivo de polinômios  $m$ -homogêneos para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

A seguir veremos exemplos de ideais de polinômios sobrejetivos e não sobrejetivos.

**Exemplo 4.2.9.** Vejamos que o ideal  $\overline{\mathcal{P}_f}$  dos polinômios aproximáveis por polinômios de tipo finito (Definição 1.5.9) não é sobrejetivo. Como  $(\mathcal{P}_f)_1 = \mathcal{F}$  (veja [42, Exemplo 4.5]), onde  $(\mathcal{P}_f)_1$  é a componente linear do ideal de polinômios  $\mathcal{P}_f$  (Definição 1.5.1), temos  $(\overline{\mathcal{P}_f})_1 = \mathcal{A}$ . Logo  $\overline{\mathcal{P}_f}$  não é um ideal sobrejetivo uma vez que sua componente linear  $(\overline{\mathcal{P}_f})_1$  é um ideal de operadores não sobrejetivo (Exemplo 4.2.7). O mesmo argumento mostra que o ideal de polinômios  $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  não é sobrejetivo.

**Exemplo 4.2.10.** Vejamos que os ideais  $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$  dos polinômios compactos e  $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$  dos polinômios fracamente compactos são sobrejetivos.

Provemos primeiro a sobrejetividade do ideal  $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$ . Para isso usaremos a caracterização do Corolário 4.2.4. Seja  $P: E \rightarrow F$  um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo tal que  $P \circ Q_E: \ell_1(B_E) \rightarrow F$  é um polinômio compacto. Vejamos que  $P$  é também um polinômio compacto. Da hipótese temos que  $(P \circ Q_E)(B_{\ell_1(B_E)})$  é um conjunto relativamente compacto em  $F$ . Como

$$(P \circ Q_E)(B_{\ell_1(B_E)}) = P(Q_E(B_{\ell_1(B_E)})) = P(B_E),$$

onde a segunda igualdade segue do Corolário 2.2.29, então  $P(B_E)$  é também um conjunto relativamente compacto em  $F$ , isto é,  $P$  é um polinômio compacto.

O mesmo argumento mostra que o ideal  $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$  dos polinômios fracamente compactos é sobrejetivo.



A seguir estudaremos a sobrejetividade dos ideais  $\mathcal{P}_{ms,p}$  dos polinômios múltiplo  $p$ -somantes e  $\mathcal{P}_{d,p}$  dos polinômios  $p$ -dominados. Esses ideais representam duas das mais estudadas generalizações do ideal dos operadores lineares absolutamente  $p$ -somantes (Exemplo 1.4.11). As definições desses ideais podem ser encontradas em várias referências, por exemplo [14, 31]. Para exibir essas definições, necessitamos do seguinte conceito:

**Definição 4.2.11.** Seja  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p < \infty$  e  $(x_i)_{i=1}^n$  uma sequência finita no espaço normado  $E$ . Definimos

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Definição 4.2.12.** Seja  $1 \leq p < \infty$ .

- (a) Um polinômio  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  é *múltiplo  $p$ -somante*, em símbolos  $P \in \mathcal{P}_{ms,p}(^m E; F)$ , se existe  $C > 0$  tal que para todos  $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  e para todas sequências finitas  $(x_1^{i_1})_{i_1=1}^{n_1}, \dots, (x_m^{i_m})_{i_m=1}^{n_m}$  em  $E$ , tem-se

$$\left( \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{n_1, \dots, n_m} \|\check{P}(x_1^{i_1}, \dots, x_m^{i_m})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \|(x_1^{i_1})_{i_1=1}^{n_1}\|_{w,p} \cdots \|(x_m^{i_m})_{i_m=1}^{n_m}\|_{w,p}.$$

- (b) Um polinômio  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  é  *$p$ -dominado*, em símbolos  $P \in \mathcal{P}_{d,p}(^m E; F)$ , se existe  $C > 0$  tal que para todo  $k \in \mathbb{N}$  e para toda sequência finita  $(x_i)_{i=1}^k$  em  $E$ , tem-se

$$\left( \sum_{i=1}^k \|P(x_i)\|^{\frac{p}{m}} \right)^{\frac{m}{p}} \leq C \cdot \|(x_i)_{i=1}^k\|_{w,p}^m.$$

No caso linear  $m = 1$ , ambas as classes recuperam o ideal dos operadores  $p$ -somantes, isto é,

$$\mathcal{P}_{ms,p}(^1 E; F) = \mathcal{P}_{d,p}(^1 E; F) = \Pi_p(E; F).$$

É conhecido que as classes  $\mathcal{P}_{ms,p}$  dos polinômios múltiplo  $p$ -somantes e  $\mathcal{P}_{d,p}$  dos polinômios  $p$ -dominados são ideais de polinômios. Para estudar a sobrejetividade desses ideais de polinômios, precisamos definir o ideal de polinômios  $\mathcal{P}^2$ , de algumas propriedades importantes dos operadores absolutamente  $p$ -somantes e também de alguns outros resultados relacionados.

**Definição 4.2.13.** Um polinômio  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  pertence a  $\mathcal{P}^2(^m E; F)$  se admite uma fatoração à direita através de um espaço de Hilbert no sentido que existem um espaço de Hilbert  $H$ , um operador  $u \in \mathcal{L}(E; H)$  e um polinômio  $Q \in \mathcal{P}(^m H; F)$  tais que  $P = Q \circ u$ .

É conhecido que a classe de polinômios  $\mathcal{P}^2$  é um ideal de polinômios.

**Proposição 4.2.14.** (a) Se  $1 \leq p \leq q < \infty$ , então  $\Pi_p \subset \Pi_q$ .

- (b) (Forma fraca do Teorema de Dvoretzky-Rogers) Sejam  $E$  um espaço de Banach de dimensão infinita e  $1 \leq p < \infty$ . Então o operador identidade  $id: E \rightarrow E$  não é absolutamente  $p$ -somante.

(c) (Teorema de Grothendieck) *Sejam  $\Gamma$  um conjunto não vazio e  $H$  um espaço de Hilbert. Então todo operador  $u \in \mathcal{L}(\ell_1(\Gamma); H)$  é absolutamente 1-somante.*

*Demonstração.* Para o item (a) veja [17, Theorem 2.8], para o item (b) veja [17, Theorem 2.18] e o item (c) segue de [16, 23.10].  $\square$

**Proposição 4.2.15.** [9, 40] *Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$ . Então  $P$  é  $p$ -dominado se, e somente se, existem um espaço de Banach  $G$ , um operador  $u \in \Pi_p(E; G)$  e um polinômio  $Q \in \mathcal{P}({}^m G; F)$  tais que  $P = Q \circ u$ .*

**Proposição 4.2.16.**  $\mathcal{P}_{d,p} \subset \mathcal{P}_{ms,p}$  para todo  $1 \leq p < \infty$ .

*Demonstração.* A demonstração segue de [32, Theorem 3.10].  $\square$

**Observação 4.2.17.** Sejam  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{R}$  ideais de polinômios. Segue imediatamente da definição da envoltória sobrejetiva que se

$$\mathcal{Q}({}^m \ell_1(\Gamma); F) = \mathcal{R}({}^m \ell_1(\Gamma); F)$$

para qualquer  $m \in \mathbb{N}$ , qualquer conjunto não vazio  $\Gamma$  e qualquer espaço de Banach  $F$ , então

$$\mathcal{Q}^{\text{sur}} = \mathcal{R}^{\text{sur}}.$$

Finalmente, veremos no teorema a seguir resultados sobre a sobrejetividade dos ideais de polinômios  $\mathcal{P}_{d,p}$  e  $\mathcal{P}_{ms,p}$ .

**Teorema 4.2.18.** (a) *Para todos  $p \geq 1$  e  $m \in \mathbb{N}$ , os ideais de polinômios  $m$ -homogêneos  $(\mathcal{P}_{d,p})_m$  e  $(\mathcal{P}_{ms,p})_m$  não são sobrejetivos.*

(b)  $(\mathcal{P}_{d,p})^{\text{sur}} = (\mathcal{P}^2)^{\text{sur}}$  para todo  $1 \leq p \leq 2$ . Em particular,  $(\mathcal{P}_{d,p})^{\text{sur}} = (\mathcal{P}_{d,q})^{\text{sur}}$  para todos  $1 \leq p, q \leq 2$ .

(c)  $(\mathcal{P}_{ms,p})^{\text{sur}} = (\mathcal{P}_{ms,q})^{\text{sur}}$  para todos  $1 \leq p, q \leq 2$ .

*Demonstração.* (a) Sejam  $p \geq 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$  e  $H$  um espaço de Hilbert de dimensão infinita. Para a demonstração deste item provaremos que

$$(\mathcal{P}_{d,p})^{\text{sur}}({}^m H; H) \not\subset \mathcal{P}_{d,p}({}^m H; H) \quad \text{e} \quad (\mathcal{P}_{ms,p})^{\text{sur}}({}^m H; H) \not\subset \mathcal{P}_{ms,p}({}^m H; H).$$

Para isso, dado um funcional linear contínuo não nulo  $\varphi: H \rightarrow \mathbb{K}$ , consideremos o operador:

$$P: H \rightarrow H, \quad P(x) = (\varphi(x))^{m-1}x.$$

Sabemos do Exemplo 1.2.23 que  $P$  é um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo. Como o operador identidade  $id: H \rightarrow H$  não é absolutamente  $p$ -somante (Proposição 4.2.14(b)), segue de [14, Example 1.14] e [14, Lemma 1.4] que  $P$  não é  $p$ -dominado. E segue de [14, Example 1.13] e [14, Lemma 1.4] que  $P$  não é múltiplo  $p$ -somante.

Finalmente, provemos que  $P \in (\mathcal{P}_{d,p})^{\text{sur}}({}^m H; H)$  e  $P \in (\mathcal{P}_{ms,p})^{\text{sur}}({}^m H; H)$ . Pelo Teorema de Grothendieck (Proposição 4.2.14(c)) e pela Proposição 4.2.14(a), temos que o operador  $Q_H: \ell_1(B_H) \rightarrow H$  é absolutamente  $p$ -somante. Segue da Proposição 4.2.15 que  $P \circ Q_H$  é um polinômio  $p$ -dominado e segue da Proposição 4.2.16 que  $P \circ Q_H$  é também

múltiplo  $p$ -somante. Assim,  $P \in (\mathcal{P}_{d,p})^{\text{sur}}(^m H; H)$  e  $P \in (\mathcal{P}_{ms,p})^{\text{sur}}(^m H; H)$ , provando que  $(\mathcal{P}_{d,p})_m$  e  $(\mathcal{P}_{ms,p})_m$  não são sobrejetivos.

(b) Sejam  $1 \leq p, q \leq 2$ . Dados  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma$  um conjunto não vazio e  $F$  um espaço de Banach, segue de [25, Theorem 16] que

$$\mathcal{P}_{d,p}(^m \ell_1(\Gamma); F) = \mathcal{P}_{d,q}(^m \ell_1(\Gamma); F).$$

Da Observação 4.2.17 decorre que  $(\mathcal{P}_{d,p})^{\text{sur}} = (\mathcal{P}_{d,q})^{\text{sur}}$ .

Agora é suficiente provar que  $(\mathcal{P}_{d,2})^{\text{sur}} = (\mathcal{P}^2)^{\text{sur}}$ . Dado  $P \in (\mathcal{P}^2)^{\text{sur}}(^m E; F)$ , o polinômio  $P \circ Q_E$  admite fatoração à direita através de um espaço de Hilbert, isto é,  $P \circ Q_E = Q \circ u$ , para algum espaço de Hilbert, algum operador  $u \in \mathcal{L}(\ell_1(B_E); H)$  e algum polinômio  $Q \in \mathcal{P}(^m H; F)$ . Segue do Teorema de Grothendieck (Proposição 4.2.14(c)) que  $u$  é absolutamente 1-somante, e daí segue da Proposição 4.2.14(a) que  $u$  é também absolutamente 2-somante. Pela Proposição 4.2.15 sabemos que  $P \circ Q_E = Q \circ u$  é 2-dominado, provando que  $P \in (\mathcal{P}_{d,2})^{\text{sur}}(^m E; F)$ .

Reciprocamente, dado  $P \in (\mathcal{P}_{d,2})^{\text{sur}}(^m E; F)$ , temos que  $P \circ Q_E$  é 2-dominado. Segue da Proposição 4.2.15 que existem um espaço de Banach  $G$ , um operador  $u \in \Pi_2(\ell_1(B_E); G)$  e um polinômio  $Q \in \mathcal{P}(^m G; F)$  tais que  $P \circ Q_E = Q \circ u$ . Como todo operador absolutamente 2-somante se fatora por um espaço de Hilbert (veja [17, Corollary 2.16]), existem um espaço de Hilbert  $H$  e operadores  $u_1 \in \mathcal{L}(\ell_1(B_E); H)$  e  $u_2 \in \mathcal{L}(H; G)$  tais que  $u = u_2 \circ u_1$ . Logo, a fatoração

$$P \circ Q_E = (Q \circ u_2) \circ u_1$$

prova que  $P \circ Q_E \in \mathcal{P}^2(^m \ell_1(B_E); F)$ , isto é,  $P \in (\mathcal{P}^2)^{\text{sur}}(^m E; F)$ .

(c) Sejam  $1 \leq p, q \leq 2$ . Dados  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma$  um conjunto não vazio e  $F$  um espaço de Banach, segue de [8, Theorem 4.6] que

$$\mathcal{P}_{ms,p}(^m \ell_1(\Gamma); F) = \mathcal{P}_{ms,q}(^m \ell_1(\Gamma); F).$$

Da Observação 4.2.17 decorre que  $(\mathcal{P}_{ms,p})^{\text{sur}} = (\mathcal{P}_{ms,q})^{\text{sur}}$ . □

### 4.3 Propriedades de levantamento para polinômios

Nosso objetivo nesta seção é provar duas propriedades de levantamento para polinômios (Teorema 4.3.7 e Teorema 4.3.9), os quais nos ajudarão a descrever a envoltória sobrejetiva de um ideal de composição, e também a estabelecer caracterizações de ideais sobrejetivos de composição na Seção 4.4. Para isso precisaremos de alguns resultados preparatórios.

Nesta seção também daremos uma descrição das aplicações  $m$ -lineares contínuas de  $\ell_1(\Gamma_1) \times \cdots \times \ell_1(\Gamma_m)$  a valores em um espaço de Banach (Proposição 4.3.5 e Corolário 4.3.6), onde  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  denotarão daqui em diante conjuntos não vazios quaisquer.

**Lema 4.3.1.** *Sejam  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma_1}$  e  $y = (\gamma_j)_{j \in \Gamma_2}$  conjuntos indexados de números não negativos tais que  $x \in \ell_1(\Gamma_1)$  e  $y \in \ell_1(\Gamma_2)$ . Então*

$$\sum_{(i,j) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2} \lambda_i \gamma_j = \left( \sum_{i \in \Gamma_1} \lambda_i \right) \cdot \left( \sum_{j \in \Gamma_2} \gamma_j \right).$$

*Demonstração.* Provemos primeiro que

$$\sum_{(i,j) \in I_1 \times I_2} \lambda_i \gamma_j = \left( \sum_{i \in I_1} \lambda_i \right) \cdot \left( \sum_{j \in I_2} \gamma_j \right), \quad (4.10)$$

para quaisquer  $I_1$  subconjunto finito de  $\Gamma_1$  e  $I_2$  subconjunto finito de  $\Gamma_2$ . Para isso sejam  $I_1 = \{i_1, \dots, i_n\}$  um subconjunto finito de  $\Gamma_1$  e  $I_2 = \{j_1, \dots, j_k\}$  um subconjunto finito de  $\Gamma_2$ . Consideremos a seguinte ordenação de  $I_1 \times I_2$ :

$$I_1 \times I_2 = \{(i_1, j_1), \dots, (i_1, j_k), \dots, (i_n, j_1), \dots, (i_n, j_k)\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in I_1 \times I_2} \lambda_i \gamma_j &= \lambda_{i_1} \gamma_{j_1} + \dots + \lambda_{i_1} \gamma_{j_k} + \dots + \lambda_{i_n} \gamma_{j_1} + \dots + \lambda_{i_n} \gamma_{j_k} \\ &= (\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_n}) \cdot (\gamma_{j_1} + \dots + \gamma_{j_k}) \\ &= \left( \sum_{i \in I_1} \lambda_i \right) \cdot \left( \sum_{j \in I_2} \gamma_j \right). \end{aligned}$$

Para o caso geral, sejam  $\lambda = \sum_{i \in \Gamma_1} \lambda_i$  e  $\gamma = \sum_{j \in \Gamma_2} \gamma_j$ . Segue da Proposição 2.2.3 que

$$\lambda = \sup \left\{ \sum_{i \in I_1} \lambda_i : I_1 \subset \Gamma_1 \text{ é finito} \right\} \quad \text{e} \quad \gamma = \sup \left\{ \sum_{j \in I_2} \gamma_j : I_2 \subset \Gamma_2 \text{ é finito} \right\}. \quad (4.11)$$

Provaremos que

$$\lambda \gamma = \sup \left\{ \sum_{(i,j) \in I} \lambda_i \gamma_j : I \subset \Gamma_1 \times \Gamma_2 \text{ é finito} \right\}. \quad (4.12)$$

Com efeito, seja  $I = \{(i_1, j_1), \dots, (i_l, j_l)\}$  um subconjunto finito de  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ . Consideremos os conjuntos finitos  $I_1 = \{i_1, \dots, i_l\} \subset \Gamma_1$  e  $I_2 = \{j_1, \dots, j_l\} \subset \Gamma_2$ . Logo  $I \subset I_1 \times I_2$  e consequentemente

$$\sum_{(i,j) \in I} \lambda_i \gamma_j \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{(i,j) \in I_1 \times I_2} \lambda_i \gamma_j \stackrel{(4.10)}{=} \left( \sum_{i \in I_1} \lambda_i \right) \cdot \left( \sum_{j \in I_2} \gamma_j \right) \stackrel{(4.11)}{\leq} \lambda \gamma,$$

onde  $(*)$  vale devido a que  $\lambda_i \gamma_j \geq 0$  para todos  $i \in \Gamma_1$  e  $j \in \Gamma_2$ . Isso prova que

$$\sup \left\{ \sum_{(i,j) \in I} \lambda_i \gamma_j : I \subset \Gamma_1 \times \Gamma_2 \text{ é finito} \right\} \leq \lambda \gamma. \quad (4.13)$$

Por outro lado, seja  $\varepsilon > 0$ . Segue das igualdades em (4.11) que existem conjuntos finitos  $I_1 \subset \Gamma_1$  e  $I_2 \subset \Gamma_2$  tais que

$$\lambda - \varepsilon < \sum_{i \in I_1} \lambda_i =: S_1 \quad \text{e} \quad \gamma - \varepsilon < \sum_{j \in I_2} \gamma_j =: S_2 \quad (4.14)$$

Consideremos o conjunto finito  $I = I_1 \times I_2 \subset \Gamma_1 \times \Gamma_2$ . Logo

$$\begin{aligned} \lambda\gamma - \sum_{(i,j) \in I_1 \times I_2} \lambda_i \gamma_j &\stackrel{(4.10)}{=} \lambda\gamma - S_1 S_2 = \lambda\gamma - S_1 S_2 - S_1 \gamma + S_1 \gamma \\ &= (\lambda - S_1)\gamma + S_1(\gamma - S_2) \stackrel{(4.14)}{\leq} \gamma\varepsilon + S_1\varepsilon \stackrel{(4.11)}{\leq} \gamma\varepsilon + \lambda\varepsilon = (\gamma + \lambda)\varepsilon. \end{aligned}$$

Logo

$$\lambda\gamma - (\gamma + \lambda)\varepsilon \leq \sum_{(i,j) \in I_1 \times I_2} \lambda_i \gamma_j \leq \sup \left\{ \sum_{(i,j) \in I} \lambda_i \gamma_j : I \subset \Gamma_1 \times \Gamma_2 \text{ é finito} \right\}.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , temos

$$\lambda\gamma \leq \sup \left\{ \sum_{(i,j) \in I} \lambda_i \gamma_j : I \subset \Gamma_1 \times \Gamma_2 \text{ é finito} \right\}.$$

A igualdade (4.12) segue da desigualdade (4.13) e da desigualdade acima e, portanto, o resultado segue da Proposição 2.2.3.  $\square$

**Corolário 4.3.2.** *Sejam  $m \geq 2$  e  $x_1 = (\lambda_i^1)_{i \in \Gamma_1}, \dots, x_m = (\lambda_i^m)_{i \in \Gamma_m}$  conjuntos indexados de números não negativos tais que  $x_1 \in \ell_1(\Gamma_1), \dots, x_m \in \ell_1(\Gamma_m)$ . Então*

$$\sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_m} \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m = \left( \sum_{i_1 \in \Gamma_1} \lambda_{i_1}^1 \right) \cdots \left( \sum_{i_m \in \Gamma_m} \lambda_{i_m}^m \right).$$

*Demonstração.* Provaremos o resultado por indução. O caso  $m = 2$  já foi provado no Lema 4.3.1. Suponhamos que o corolário seja válido para  $m \geq 2$  e provemos que também é válido para  $m + 1$ . Para isso sejam  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{m+1}$  conjuntos não vazios e  $x_1 = (\lambda_i^1)_{i \in \Gamma_1}, \dots, x_{m+1} = (\lambda_i^{m+1})_{i \in \Gamma_{m+1}}$  conjuntos indexados de números não negativos tais que  $x_1 \in \ell_1(\Gamma_1), \dots, x_{m+1} \in \ell_1(\Gamma_{m+1})$ . Chamemos  $\lambda_1 = \sum_{i \in \Gamma_1} \lambda_i^1, \dots, \lambda_{m+1} = \sum_{i \in \Gamma_{m+1}} \lambda_i^{m+1}$  e  $\Gamma = \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_m$ . Segue da hipótese indutiva que a família indexada de números não negativos  $(\lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m)_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma}$  pertence a  $\ell_1(\Gamma)$  e

$$\sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma} \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m = \lambda_1 \cdots \lambda_m. \quad (4.15)$$

Como  $x_{m+1} \in \ell_1(\Gamma_{m+1})$ , segue do Lema 4.3.1 que

$$\begin{aligned} \sum_{((i_1, \dots, i_m), i_{m+1}) \in \Gamma \times \Gamma_{m+1}} (\lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m) \lambda_{i_{m+1}}^{m+1} &= \left( \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma} \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m \right) \cdot \left( \sum_{i_{m+1} \in \Gamma_{m+1}} \lambda_{i_{m+1}}^{m+1} \right) \\ &\stackrel{(4.15)}{=} \lambda_1 \cdots \lambda_m \lambda_{m+1}. \end{aligned}$$

Usando a função bijetiva:

$$\begin{aligned} (\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_m) \times \Gamma_{m+1} &\longleftrightarrow \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_m \times \Gamma_{m+1}, \\ ((i_1, \dots, i_m), i_{m+1}) &\longleftrightarrow (i_1, \dots, i_m, i_{m+1}) \end{aligned}$$

podemos garantir que também vale

$$\sum_{(i_1, \dots, i_{m+1}) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_{m+1}} \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_{m+1}}^{m+1} = \lambda_1 \cdots \lambda_{m+1},$$

provando que o enunciado é válido para  $m + 1$ .  $\square$

**Definição 4.3.3.** Sejam  $m \geq 2$  e  $E$  um espaço normado. Dizemos que a *soma iterada* da família indexada  $(x_{i_1, \dots, i_m})_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_m}$  de elementos de  $E$ , denotada por

$$\sum_{i_1 \in \Gamma_1} \left( \sum_{i_2 \in \Gamma_2} \cdots \left( \sum_{i_m \in \Gamma_m} x_{i_1, \dots, i_m} \right) \cdots \right) \quad \text{ou} \quad \sum_{i_1 \in \Gamma_1} \cdots \sum_{i_m \in \Gamma_m} x_{i_1, \dots, i_m},$$

converge a  $x \in E$  (ou que é igual a  $x$ ) se:

(1) Para todos  $i_1 \in \Gamma_1, \dots, i_{m-1} \in \Gamma_{m-1}$  fixos, a soma não ordenada  $\sum_{i_m \in \Gamma_m} x_{i_1, \dots, i_{m-1}, i_m}$  converge a um elemento  $y_{i_1, \dots, i_{m-1}} \in E$ .

(2) A soma  $\sum_{i_1 \in \Gamma_1} \left( \sum_{i_2 \in \Gamma_2} \cdots \left( \sum_{i_{m-1} \in \Gamma_{m-1}} y_{i_1, \dots, i_{m-1}} \right) \cdots \right)$  converge a  $x$ .

A definição por indução está completa pois no caso  $m = 1$  temos as somas não ordenadas usuais com as quais temos trabalhado até aqui. Em particular, para  $m = 2$  temos que a soma iterada  $\sum_{i_1 \in \Gamma_1} \left( \sum_{i_2 \in \Gamma_2} x_{i_1, i_2} \right)$  converge a um elemento  $x \in E$  se

(1) Para todo  $i_1 \in \Gamma_1$ , a soma não ordenada  $\sum_{i_2 \in \Gamma_2} x_{i_1, i_2}$  converge a um elemento  $y_{i_1} \in E$ .

(2)  $\sum_{i_1 \in \Gamma_1} y_{i_1} = x$ .

**Lema 4.3.4.** Sejam  $E_1, \dots, E_m$  e  $F$  espaços normados,  $A: E_1 \times \cdots \times E_m \rightarrow F$  uma aplicação  $m$ -linear e contínua,  $(x_i^1)_{i \in \Gamma_1}, \dots, (x_i^m)_{i \in \Gamma_m}$  conjuntos indexados de elementos de  $E_1, \dots, E_m$  respectivamente e  $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$ . Se  $x_1 = \sum_{i \in \Gamma_1} x_i^1, \dots, x_m = \sum_{i \in \Gamma_m} x_i^m$  então

$$A \left( \sum_{i_1 \in \Gamma_1} x_{i_1}^1, \dots, \sum_{i_m \in \Gamma_m} x_{i_m}^m \right) = \sum_{i_1 \in \Gamma_1} \cdots \sum_{i_m \in \Gamma_m} A(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m),$$

isto é,  $A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i_1 \in \Gamma_1} \cdots \sum_{i_m \in \Gamma_m} A(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m)$ .

*Demonstração.* Provaremos por indução. O caso  $m = 1$  já foi provado no Lema 2.2.24. Suponhamos que o enunciado vale para  $m \geq 1$  fixo e provemos que também vale para  $m+1$ . Com efeito, sejam  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{m+1}$  conjuntos não vazios,  $E_1, \dots, E_{m+1}$  e  $F$  espaços normados,  $A: E_1 \times \dots \times E_{m+1} \rightarrow F$  uma aplicação  $(m+1)$ -linear e contínua,  $(x_i^1)_{i \in \Gamma_1}, \dots, (x_i^{m+1})_{i \in \Gamma_{m+1}}$  conjuntos indexados de elementos de  $E_1, \dots, E_{m+1}$  respectivamente e  $x_1 \in E_1, \dots, x_{m+1} \in E_{m+1}$  tais que  $x_1 = \sum_{i \in \Gamma_1} x_i^1, \dots, x_{m+1} = \sum_{i \in \Gamma_{m+1}} x_i^{m+1}$ . Provaremos que

$$A(x_1, \dots, x_{m+1}) = \sum_{i_1 \in \Gamma_1} \dots \sum_{i_{m+1} \in \Gamma_{m+1}} A(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_{m+1}}^{m+1}).$$

Dados  $i_1 \in \Gamma_1, \dots, i_m \in \Gamma_m$ , considerando o operador linear contínuo

$$u: E_{m+1} \rightarrow F, \quad u(y) = A(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m, y),$$

temos

$$\begin{aligned} A(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m, x_{m+1}) &= u(x_{m+1}) = u\left(\sum_{i_{m+1} \in \Gamma_{m+1}} x_{i_{m+1}}^{m+1}\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{i_{m+1} \in \Gamma_{m+1}} u(x_{i_{m+1}}^{m+1}) = \sum_{i_{m+1} \in \Gamma_{m+1}} A(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m, x_{i_{m+1}}^{m+1}), \end{aligned}$$

onde  $(*)$  segue do Lema 2.2.24. Resta provar que

$$\sum_{i_1 \in \Gamma_1} \dots \sum_{i_m \in \Gamma_m} A(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m, x_{m+1}) = A(x_1, \dots, x_{m+1}).$$

Considerando a aplicação  $m$ -linear contínua

$$B: E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F, \quad B(y_1, \dots, y_m) = A(y_1, \dots, y_m, x_{m+1}),$$

temos

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) &= B(x_1, \dots, x_m) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{i_1 \in \Gamma_1} \dots \sum_{i_m \in \Gamma_m} B(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m) \\ &= \sum_{i_1 \in \Gamma_1} \dots \sum_{i_m \in \Gamma_m} A(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_m}^m, x_{m+1}), \end{aligned}$$

onde  $(*)$  segue da hipótese de indução. □

**Proposição 4.3.5.** *Sejam  $F$  um espaço de Banach e  $(y_{i_1, \dots, i_m})_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_m =: \Gamma}$  uma família indexada de elementos de  $F$  tal que  $s = \sup_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma} \|y_{i_1, \dots, i_m}\| < \infty$ .*

(a) *Definamos  $A: \ell_1(\Gamma_1) \times \dots \times \ell_1(\Gamma_m) \rightarrow F$  da seguinte forma: para  $x_1 = (\lambda_i^1)_{i \in \Gamma_1} \in \ell_1(\Gamma_1), \dots, x_m = (\lambda_i^m)_{i \in \Gamma_m} \in \ell_1(\Gamma_m)$ ,*

$$A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_m} \lambda_{i_1}^1 \dots \lambda_{i_m}^m y_{i_1, \dots, i_m}.$$

*Então  $A$  está bem definida no sentido de que a soma não ordenada acima é convergente em  $F$ . Além disso,  $A$  é  $m$ -linear, contínua e  $\|A\| \leq s$ .*

(b) Para todos  $x_1 = (\lambda_i^1)_{i \in \Gamma_1} \in \ell_1(\Gamma_1), \dots, x_m = (\lambda_i^m)_{i \in \Gamma_m} \in \ell_1(\Gamma_m)$ ,

$$\sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_m} \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m y_{i_1, \dots, i_m} = \sum_{i_1 \in \Gamma_1} \cdots \sum_{i_m \in \Gamma_m} \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m y_{i_1, \dots, i_m},$$

*Demonstração.* (a) Para verificar que  $A$  está bem definida, tomemos  $x_1 = (\lambda_i^1)_{i \in \Gamma_1} \in \ell_1(\Gamma_1), \dots, x_m = (\lambda_i^m)_{i \in \Gamma_m} \in \ell_1(\Gamma_m)$ . Vejamos que a soma não ordenada que define  $A(x_1, \dots, x_m)$  é absolutamente convergente:

$$\begin{aligned} \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma} \|\lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m y_{i_1, \dots, i_m}\| &= \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma} |\lambda_{i_1}^1| \cdots |\lambda_{i_m}^m| \cdot \|y_{i_1, \dots, i_m}\| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma} |\lambda_{i_1}^1| \cdots |\lambda_{i_m}^m| \cdot s \\ &\stackrel{(**)}{=} s \cdot \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma} |\lambda_{i_1}^1| \cdots |\lambda_{i_m}^m| \\ &\stackrel{(***)}{=} s \cdot \left( \sum_{i_1 \in \Gamma_1} |\lambda_{i_1}^1| \right) \cdots \left( \sum_{i_m \in \Gamma_m} |\lambda_{i_m}^m| \right) = s \cdot \|x_1\| \cdots \|x_m\|, \end{aligned}$$

onde (\*\*\*) segue do Corolário 4.3.2, (\*\*) segue do Lema 2.2.8 e (\*) segue do Lema 2.2.9. Da Proposição 2.2.25 decorre que a soma não ordenada  $A(x_1, \dots, x_m)$  é convergente em  $F$ , provando que  $A$  está bem definida. Segue também da Proposição 2.2.25 que

$$\|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq s \cdot \|x_1\| \cdots \|x_m\|. \quad (4.16)$$

Provemos que  $A$  é  $m$ -linear. Sejam  $j = 1, \dots, m$ ,  $x_1 = (\lambda_i^1)_{i \in \Gamma_1} \in \ell_1(\Gamma_1), \dots, x_j = (\lambda_i^j)_{i \in \Gamma_j}$  e  $x'_j = (\gamma_i)_{i \in \Gamma_j} \in \ell_1(\Gamma_j), \dots, x_m = (\lambda_i^m)_{i \in \Gamma_m} \in \ell_1(\Gamma_m)$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Então

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, \alpha x_j + x'_j, \dots, x_m) &= \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma} \lambda_{i_1}^1 \cdots (\alpha \lambda_{i_j}^j + \gamma_{i_j}) \cdots \lambda_{i_m}^m y_{i_1, \dots, i_m} \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma} (\alpha \cdot \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_j}^j \cdots \lambda_{i_m}^m y_{i_1, \dots, i_m} + \lambda_{i_1}^1 \cdots \gamma_{i_j} \cdots \lambda_{i_m}^m y_{i_1, \dots, i_m}) \\ &\stackrel{(*)}{=} \alpha \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma} \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_j}^j \cdots \lambda_{i_m}^m y_{i_1, \dots, i_m} + \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma} \lambda_{i_1}^1 \cdots \gamma_{i_j} \cdots \lambda_{i_m}^m y_{i_1, \dots, i_m} \\ &= \alpha A(x_1, \dots, x_j, \dots, x_m) + A(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_m), \end{aligned}$$

onde (\*) segue do Lema 2.2.8. Agora, da desigualdade (4.16) segue que  $A$  é contínua e  $\|A\| \leq s$ .

(b) Consideremos a aplicação  $m$ -linear contínua  $A: \ell_1(\Gamma_1) \times \dots \times \ell_1(\Gamma_m) \longrightarrow F$  do item (a). Vejamos que

$$A(e_{j_1}, \dots, e_{j_m}) = y_{j_1, \dots, j_m}, \quad (4.17)$$

para todos  $j_1 \in \Gamma_1, \dots, j_m \in \Gamma_m$ . Com efeito, dados  $j_1 \in \Gamma_1, \dots, j_m \in \Gamma_m$ , escrevamos  $e_{j_1} = (\lambda_{i_1}^1)_{i_1 \in \Gamma_1}, \dots, e_{j_m} = (\lambda_{i_m}^m)_{i_m \in \Gamma_m}$ . De

$$\lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m = \begin{cases} 1 & \text{se } i_1 = j_1, \dots, i_m = j_m, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$



segue que

$$A(e_{j_1}, \dots, e_{j_m}) = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma} \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m y_{i_1, \dots, i_m} = y_{j_1, \dots, j_m}.$$

provando assim a equação (4.17). Por outro lado, sejam  $x_1 = (\lambda_i^1)_{i \in \Gamma_1} \in \ell_1(\Gamma_1)$ ,  $\dots$ ,  $x_m = (\lambda_i^m)_{i \in \Gamma_m} \in \ell_1(\Gamma_m)$ . Pelo Lema 2.2.23 temos  $x_1 = \sum_{i_1 \in \Gamma_1} \lambda_{i_1}^1 e_{i_1}$ ,  $\dots$ ,  $x_m = \sum_{i_m \in \Gamma_m} \lambda_{i_m}^m e_{i_m}$ , portanto

$$\begin{aligned} \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma} \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m y_{i_1, \dots, i_m} &= A(x_1, \dots, x_m) = A\left(\sum_{i_1 \in \Gamma_1} \lambda_{i_1}^1 e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m \in \Gamma_m} \lambda_{i_m}^m e_{i_m}\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{i_1 \in \Gamma_1} \cdots \sum_{i_m \in \Gamma_m} A(\lambda_{i_1}^1 e_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}^m e_{i_m}) \\ &= \sum_{i_1 \in \Gamma_1} \cdots \sum_{i_m \in \Gamma_m} \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m A(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) \\ &= \sum_{i_1 \in \Gamma_1} \cdots \sum_{i_m \in \Gamma_m} \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m y_{i_1, \dots, i_m}, \end{aligned}$$

onde (\*) segue do Lema 4.3.4. □

**Corolário 4.3.6.** *Sejam  $F$  um espaço de Banach e  $A: \ell_1(\Gamma_1) \times \cdots \times \ell_1(\Gamma_m) \rightarrow F$  uma aplicação  $m$ -linear e contínua. Então*

$$A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_m} \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m A(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}),$$

para todos  $x_1 = (\lambda_i^1)_{i \in \Gamma_1} \in \ell_1(\Gamma_1)$ ,  $\dots$ ,  $x_m = (\lambda_i^m)_{i \in \Gamma_m} \in \ell_1(\Gamma_m)$ .

*Demonstração.* Denotemos o conjunto  $\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_m$  por  $\Gamma$  e consideremos a família indexada  $(A(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}))_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma}$  de elementos de  $F$ . Note que

$$\|A(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})\| \leq \|A\| \cdot \|e_{i_1}\| \cdots \|e_{i_m}\| = \|A\|,$$

para todo  $(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma$ . Logo

$$\begin{aligned} \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_m} \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m A(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) &\stackrel{(*)}{=} \sum_{i_1 \in \Gamma_1} \cdots \sum_{i_m \in \Gamma_m} \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m A(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) \\ &= \sum_{i_1 \in \Gamma_1} \cdots \sum_{i_m \in \Gamma_m} A(\lambda_{i_1}^1 e_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}^m e_{i_m}) \\ &\stackrel{(**)}{=} A\left(\sum_{i_1 \in \Gamma_1} \lambda_{i_1}^1 e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m \in \Gamma_m} \lambda_{i_m}^m e_{i_m}\right) \\ &= A(x_1, \dots, x_m), \end{aligned}$$

onde (\*) segue do item (b) da Proposição 4.3.5 e (\*\*) segue do Lema 4.3.4. □

Chegamos agora às propriedades de levantamento métrico para polinômios. Lembre-se que  $\Gamma(A)$  denota a envoltória absolutamente convexa de um subconjunto  $A$  de um espaço vetorial (Definição 1.1.24). Denotaremos também

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\},$$

onde  $\lambda \in \mathbb{K}$ . A partir de agora,  $\Gamma$  denotará um conjunto não vazio qualquer. Acreditamos não haver ambiguidade nas notações  $\ell_1(\Gamma)$ , onde  $\Gamma$  é um conjunto qualquer, e  $\Gamma(A)$ , onde  $A$  é um subconjunto de um espaço vetorial.

**Teorema 4.3.7.** *Sejam  $P: \ell_1(\Gamma) \rightarrow G$  um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo e  $u: F \rightarrow G$  um operador linear contínuo tais que  $P(B_{\ell_1(\Gamma)}) \subset u(B_F)$ . Então existe um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo  $\tilde{P}: \ell_1(\Gamma) \rightarrow F$  tal que  $P = u \circ \tilde{P}$  e  $\|\tilde{P}\| \leq \frac{m^m}{m!}$ .*

$$\begin{array}{ccc} \ell_1(\Gamma) & \xrightarrow{\tilde{P}} & F \\ & \searrow P & \downarrow u \\ & & G \end{array}$$

*Demonstração.* Consideremos a aplicação  $m$ -linear, contínua e simétrica  $\check{P}: \ell_1(\Gamma)^m \rightarrow F$  associada a  $P$ . Sejam  $i_1, \dots, i_m \in \Gamma$ . Segue da Fórmula de Polarização (Proposição 1.2.11) que

$$\begin{aligned} \check{P}(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) &= \frac{1}{m!2^m} \cdot \sum_{\delta_1, \dots, \delta_m \in \{-1, 1\}} \delta_1 \cdots \delta_m P(\delta_1 e_{i_1} + \cdots + \delta_m e_{i_m}) \\ &= \frac{m^m}{m!} \cdot \sum_{\delta_1, \dots, \delta_m \in \{-1, 1\}} \frac{\delta_1 \cdots \delta_m}{2^m} \cdot P\left(\frac{1}{m}(\delta_1 e_{i_1} + \cdots + \delta_m e_{i_m})\right). \end{aligned}$$

Como

$$\|\delta_1 e_{i_1} + \cdots + \delta_m e_{i_m}\| \leq \|e_{i_1}\| + \cdots + \|e_{i_m}\| = m$$

para todos  $\delta_1, \dots, \delta_m \in \{-1, 1\}$ , segue que  $P\left(\frac{1}{m}(\delta_1 e_{i_1} + \cdots + \delta_m e_{i_m})\right) \in P(B_{\ell_1(\Gamma)})$ . Por outro lado, como

$$\sum_{\delta_1, \dots, \delta_m \in \{-1, 1\}} \left| \frac{\delta_1 \cdots \delta_m}{2^m} \right| = \sum_{\delta_1, \dots, \delta_m \in \{-1, 1\}} \frac{1}{2^m} = 1,$$

segue da Proposição 1.1.25 que  $\check{P}(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) \in \frac{m^m}{m!} \Gamma(P(B_{\ell_1(\Gamma)}))$ . Além disso,

$$\Gamma(P(B_{\ell_1(\Gamma)})) \subset \Gamma(u(B_F)) = u(B_F),$$

onde a inclusão segue da Proposição 1.1.26 e a igualdade segue da Proposição 1.1.23. Consequentemente,  $\check{P}(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) \in \frac{m^m}{m!} u(B_F)$ , isto é, existe  $y_{i_1, \dots, i_m} \in B_F$  tal que

$$\check{P}(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) = \frac{m^m}{m!} u(y_{i_1, \dots, i_m}). \quad (4.18)$$

Como

$$\left\| \frac{m^m}{m!} y_{i_1, \dots, i_m} \right\| \leq \frac{m^m}{m!}$$

para todos  $i_1, \dots, i_m \in \Gamma$ , segue da Proposição 4.3.5 que a aplicação  $A: \ell_1(\Gamma)^m \rightarrow F$  dada por

$$A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma^m} \lambda_{i_1}^1 \cdots \lambda_{i_m}^m \cdot \frac{m^m}{m!} y_{i_1, \dots, i_m},$$

onde  $x_1 = (\lambda_i^1)_{i \in \Gamma}, \dots, x_m = (\lambda_i^m)_{i \in \Gamma}$  em  $\ell_1(\Gamma_1)$ , está bem definida, é  $m$ -linear e contínua e

$$\|A\| \leq \sup_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma^m} \left\| \frac{m^m}{m!} y_{i_1, \dots, i_m} \right\| \leq \frac{m^m}{m!}. \quad (4.19)$$

Definamos  $\tilde{P} = \hat{A} \in \mathcal{P}(^m \ell_1(\Gamma); F)$  e provemos que  $\|\tilde{P}\| \leq \frac{m^m}{m!}$  e  $P = u \circ \tilde{P}$ . Por um lado,

$$\|\tilde{P}\| = \|\hat{A}\| \stackrel{(*)}{\leq} \|A\| \stackrel{(4.19)}{\leq} \frac{m^m}{m!},$$

onde  $(*)$  segue da Proposição 1.2.15. Por outro lado, para todo  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma_1} \in \ell_1(\Gamma)$ ,

$$\begin{aligned} (u \circ \tilde{P})(x) &= u(\hat{A}(x)) = u(A(x, \dots, x)) \\ &= u \left( \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma^m} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_m} \cdot \frac{m^m}{m!} y_{i_1, \dots, i_m} \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma^m} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_m} \cdot \frac{m^m}{m!} u(y_{i_1, \dots, i_m}) \\ &\stackrel{(4.18)}{=} \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Gamma^m} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_m} \cdot \check{P}(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) \\ &\stackrel{(**)}{=} \check{P} \left( \sum_{i_1 \in \Gamma_1} \lambda_{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m \in \Gamma_m} \lambda_{i_m} e_{i_m} \right) \\ &= \check{P}(x, \dots, x) = P(x), \end{aligned}$$

onde  $(*)$  segue do Lema 2.2.24 e  $(**)$  segue do Corolário 4.3.6. Isso prova que  $u \circ \tilde{P} = P$ .  $\square$

Podemos agora provar uma versão polinomial do Teorema 2.2.26.

**Corolário 4.3.8.** *Sejam  $P: \ell_1(\Gamma) \rightarrow G$  um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo,  $s: F \rightarrow G$  uma sobrejeção métrica e  $\varepsilon \geq 0$ . Então existe um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo  $\tilde{P}: \ell_1(\Gamma) \rightarrow F$  tal que  $P = s \circ \tilde{P}$  e*

$$\|\tilde{P}\| \leq (1 + \varepsilon) \frac{m^m}{m!} \|P\|.$$

$$\begin{array}{ccc} \ell_1(\Gamma) & \xrightarrow{\tilde{P}} & F \\ & \searrow P & \downarrow s \\ & & G \end{array}$$

*Demonstração.* Se  $P = 0$  consideramos  $\tilde{P} = 0$  e as propriedades acima são satisfeitas. Suponhamos agora que  $P \neq 0$  e consideremos o operador linear contínuo  $\|P\|(1 + \varepsilon) \cdot s$ . Logo

$$\begin{aligned} P(B_{\ell_1(\Gamma)}) &\subset \|P\|B_G \subset \|P\|(1 + \varepsilon) \cdot \mathring{B}_G \\ &\stackrel{(*)}{=} \|P\|(1 + \varepsilon) \cdot s(\mathring{B}_F) \subset (\|P\|(1 + \varepsilon) \cdot s)(B_F), \end{aligned}$$

onde  $(*)$  segue da Proposição 2.2.13. Aplicando o Teorema 4.3.7 para o operador  $\|P\|(1 + \varepsilon) \cdot s$ , existe um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo  $\tilde{Q}: \ell_1(\Gamma) \rightarrow F$  tal que

$$P = (\|P\|(1 + \varepsilon) \cdot s) \circ \tilde{Q} \quad \text{e} \quad \|\tilde{Q}\| \leq \frac{m^m}{m!}. \quad (4.20)$$

Definindo  $\tilde{P} = \|P\|(1 + \varepsilon) \cdot \tilde{Q}$ , é claro que  $\tilde{P}: \ell_1(\Gamma) \rightarrow F$  é um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo. Devemos provar que  $P = s \circ \tilde{P}$  e  $\|\tilde{P}\| \leq (1 + \varepsilon) \frac{m^m}{m!} \|P\|$ . Por um lado,

$$P \stackrel{(4.20)}{=} (\|P\|(1 + \varepsilon) \cdot s) \circ \tilde{Q} \stackrel{(*)}{=} s \circ (\|P\|(1 + \varepsilon) \cdot \tilde{Q}) = s \circ \tilde{P},$$

onde  $(*)$  segue da linearidade de  $s$ . Por outro lado,

$$\|\tilde{P}\| = \|P\|(1 + \varepsilon) \cdot \|\tilde{Q}\| \stackrel{(4.20)}{\leq} \|P\|(1 + \varepsilon) \cdot \frac{m^m}{m!}.$$

□

**Teorema 4.3.9.** *Sejam  $P: \ell_1(\Gamma) \rightarrow G$  e  $Q: F \rightarrow G$  dois polinômios  $m$ -homogêneos contínuos tais que existe uma família indexada  $(y_i)_{i \in \Gamma}$  de elementos de  $B_F$  com  $\check{P}(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) = \check{Q}(y_{i_1}, \dots, y_{i_m})$  para todos  $i_1, \dots, i_m \in \Gamma$ . Então existe um operador linear contínuo  $u_P: \ell_1(\Gamma) \rightarrow F$  tal que  $\|u_P\| \leq 1$  e  $P = Q \circ u_P$ .*

$$\begin{array}{ccc} \ell_1(\Gamma) & \xrightarrow{u_P} & F \\ & \searrow P & \downarrow Q \\ & & G \end{array}$$

*Demonstração.* Segue do item (a) da Proposição 4.3.5 que

$$u_P: \ell_1(\Gamma) \rightarrow F, \quad u_P(x) = \sum_{i \in \Gamma} \lambda_i y_i,$$

onde  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$ , é um operador linear contínuo bem definido e

$$\|u_P\| \leq \sup_{i \in \Gamma} \|y_i\| \leq 1.$$

Provemos finalmente que  $P = Q \circ u_P$ . Para  $x = (\lambda_i)_{i \in \Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$ ,

$$\begin{aligned}
(Q \circ u_P)(x) &= Q(u_P(x)) = \check{Q}(u_P(x), \dots, u_P(x)) \\
&= \check{Q}\left(\sum_{i_1 \in \Gamma} \lambda_{i_1} y_{i_1}, \dots, \sum_{i_m \in \Gamma} \lambda_{i_m} y_{i_m}\right) \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{i_1 \in \Gamma} \cdots \sum_{i_m \in \Gamma} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_m} \check{Q}(y_{i_1}, \dots, y_{i_m}) \\
&\stackrel{(**)}{=} \sum_{i_1 \in \Gamma} \cdots \sum_{i_m \in \Gamma} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_m} \check{P}(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) \\
&\stackrel{(*)}{=} \check{P}\left(\sum_{i_1 \in \Gamma} \lambda_{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m \in \Gamma} \lambda_{i_m} e_{i_m}\right) = \check{P}(x, \dots, x) = P(x),
\end{aligned}$$

onde  $(*)$  segue do Lema 4.3.4 e  $(**)$  segue da hipótese.  $\square$

## 4.4 Polinômios $\mathcal{I}$ -limitados e ideais de composição

Nesta seção final da dissertação estudaremos generalizações de uma condição que caracteriza os ideais sobrejetivos de operadores lineares. Em seguida provaremos que essas generalizações caracterizam os ideais sobrejetivos de composição. Estudaremos também os chamados *polinômios  $\mathcal{I}$ -limitados*, os quais serão úteis para descrever a envoltória sobrejetiva de um ideal de composição. Finalmente daremos aplicações dessa descrição.

Lembre-se que  $\mathcal{I}^{\text{sur}}$  denota a envoltória sobrejetiva de um ideal de operadores  $\mathcal{I}$  (Observação 4.2.6). Os ideais sobrejetivos de operadores são caracterizados pela propriedade a seguir.

**Proposição 4.4.1.** [43, pag. 13] *Um ideal de operadores  $\mathcal{I}$  é sobrejetivo se, e somente se, para todos operadores  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  e  $v \in \mathcal{I}(G; F)$  tais que*

$$u(B_E) \subset v(B_G),$$

*tem-se  $u \in \mathcal{I}(E; F)$ .*

O resultado a seguir é também bem conhecido e pode ser provado usando a Proposição 4.4.1.

**Corolário 4.4.2.** *Seja  $\mathcal{I}$  um ideal de operadores e  $u \in \mathcal{L}(E; F)$ . Então  $u \in \mathcal{I}^{\text{sur}}(E; F)$  se, e somente se,  $u(B_E) \subset v(B_G)$  para algum espaço de Banach  $G$  e algum operador  $v \in \mathcal{I}(G; F)$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $u \in \mathcal{I}^{\text{sur}}(E; F)$ . Então  $u \circ Q_E \in \mathcal{I}(\ell_1(B_E); F)$  e segue do Corolário 2.2.29 que

$$u(B_E) = (u \circ Q_E)(B_{\ell_1(B_E)}).$$

Isso prova a primeira implicação.

Reciprocamente, suponhamos que  $u(B_E) \subset v(B_G)$  para algum espaço de Banach  $G$  e algum operador  $v \in \mathcal{I}(G; F)$ . Como  $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}^{\text{sur}}$  então  $v \in \mathcal{I}^{\text{sur}}(G; F)$ . Como  $\mathcal{I}^{\text{sur}}$  é um ideal sobrejetivo de operadores, segue da Proposição 4.4.1 que  $u \in \mathcal{I}^{\text{sur}}(E; F)$ .  $\square$

O melhor análogo polinomial da Proposição 4.4.1 que conhecemos é o seguinte resultado.

**Proposição 4.4.3.** *Seja  $\mathcal{Q}$  um ideal de polinômios. Consideremos as seguintes condições:*

- (1)  $\mathcal{Q}$  é sobrejetivo.
- (2) Dados polinômios  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  e  $R \in \mathcal{Q}(^m G; F)$ , se para cada  $x \in B_E$  existe  $z_x \in B_G$  tal que  $\check{P}(x_1, \dots, x_m) = \check{R}(z_{x_1}, \dots, z_{x_m})$  para todos  $x_1, \dots, x_m \in B_E$ , então  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$ .
- (2') Dados polinômios  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  e  $R \in \mathcal{Q}(^m G; F)$  tais que  $P(B_E) \subset R(B_G)$ , então  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$ .
- (3) Dados um polinômio  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  e um operador  $u \in \mathcal{Q}(^1 G; F)$  tais que  $P(B_E) \subset u(B_G)$ , então  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$ .

Então (1)  $\implies$  (2) e (2')  $\implies$  (1), em particular (2')  $\implies$  (2). Se  $\mathcal{Q}_1 \circ \mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$  então (1)  $\implies$  (3).

*Demonstração.* (1)  $\implies$  (2) Suponhamos que  $\mathcal{Q}$  seja sobrejetivo e sejam  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  e  $R \in \mathcal{Q}(^m G; F)$  tais que para cada  $x \in B_E$  existe  $z_x \in B_G$  tal que  $\check{P}(x_1, \dots, x_m) = \check{R}(z_{x_1}, \dots, z_{x_m})$  para todos  $x_1, \dots, x_m \in B_E$ . Sabemos da Proposição 1.2.27(a) que  $(P \circ Q_E)^\vee = \check{P} \circ (Q_E, \dots, Q_E)$ . Logo,

$$\begin{aligned} (P \circ Q_E)^\vee(e_{x_1}, \dots, e_{x_m}) &= \check{P}(Q_E(e_{x_1}), \dots, Q_E(e_{x_m})) \\ &= \check{P}(x_1, \dots, x_m) = \check{R}(z_{x_1}, \dots, z_{x_m}) \end{aligned}$$

para todos  $x_1, \dots, x_m \in B_E$  (para a definição de  $e_{x_j}$  veja o parágrafo que antecede o Lema 2.2.23). Aplicando o Teorema 4.3.9 para  $\Gamma = B(E)$ , existe um operador linear contínuo  $u: \ell_1(B_E) \rightarrow G$  tal que  $P \circ Q_E = R \circ u$ .

$$\begin{array}{ccc} \ell_1(B_E) & \xrightarrow{Q_E} & E & \xrightarrow{P} & F \\ & \searrow u & & \nearrow R & \\ & & G & & \end{array}$$

Como  $R \in \mathcal{Q}(^m G; F)$ , segue da propriedade de ideal de  $\mathcal{Q}$  que  $P \circ Q_E \in \mathcal{Q}(^m \ell_1(B_E); F)$ . Da sobrejetividade de  $\mathcal{Q}$  concluímos que  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$ .

(2')  $\implies$  (1) Suponhamos (2') e provemos que  $\mathcal{Q}$  é sobrejetivo usando o Corolário 4.2.4(1). Para isso seja  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  tal que  $P \circ Q_E \in \mathcal{Q}(^m \ell_1(B_E); F)$ . Logo,  $P(B_E) = (P \circ Q_E)(B_{\ell_1(B_E)})$  (Corolário 2.2.29), donde segue, por hipótese, que  $P \in \mathcal{Q}(^m E; F)$ .

(1)  $\implies$  (3) Suponhamos que  $\mathcal{Q}$  seja sobrejetivo e que  $\mathcal{Q}_1 \circ \mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ . Devemos provar (3). Sejam  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  e  $u \in \mathcal{Q}(^1 G; F)$  tais que  $P(B_E) \subset u(B_G)$ . Logo,

$$(P \circ Q_E)(B_{\ell_1(B_E)}) = P(B_E) \subset u(B_G),$$

onde a igualdade segue do Corolário 2.2.29. Segue do Teorema 4.3.7 que existe um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo  $R: \ell_1(B_E) \longrightarrow G$  tal que  $P \circ Q_E = u \circ R$ . Combinando isso com a hipótese, temos

$$P \circ Q_E = u \circ R \in (\mathcal{Q}_1 \circ P)^{(m)\ell_1(B_E); F} \subset \mathcal{Q}^{(m)\ell_1(B_E); F}.$$

Segue da sobrejetividade de  $\mathcal{Q}$  que  $P \in \mathcal{Q}^{(m)E; F}$ . □

Não é conhecido se as condições da Proposição 4.4.3 são equivalentes para qualquer ideal de polinômios. Porém, essas condições são equivalentes para o caso particular dos ideais de composição. Provaremos isso na Proposição 4.4.13

Passamos agora a estudar os conjuntos  $\mathcal{I}$ -limitados. Este conceito foi introduzido por Stephani em [43].

**Definição 4.4.4.** Sejam  $\mathcal{I}$  um ideal de operadores e  $F$  um espaço de Banach. Dizemos que um subconjunto  $A$  de  $F$  é  $\mathcal{I}$ -limitado se  $A \subset u(B_E)$  para algum espaço de Banach  $E$  e algum operador  $u \in \mathcal{I}(E; F)$ . Denotamos por  $C_{\mathcal{I}}(F)$  a coleção de todos os subconjuntos  $\mathcal{I}$ -limitados de  $F$ .

Note que conjuntos  $\mathcal{I}$ -limitados são limitados.

O resultado a seguir já anuncia a estreita relação de conjuntos  $\mathcal{I}$ -limitados com a envoltória sobrejetiva, e portanto com ideais sobrejetivos.

**Proposição 4.4.5.** *Sejam  $\mathcal{I}$  um ideal de operadores e  $F$  um espaço de Banach. Então*

$$C_{\mathcal{I}}(F) = C_{\mathcal{I}^{\text{sur}}}(F).$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $A \in C_{\mathcal{I}}(F)$ . Por definição temos  $A \subset u(B_E)$  para algum espaço de Banach  $E$  e algum operador  $u \in \mathcal{I}(E; F)$ . Como  $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}^{\text{sur}}$  segue que  $u \in \mathcal{I}^{\text{sur}}(E; F)$ . Isto prova que  $A$  é também  $\mathcal{I}^{\text{sur}}$ -limitado, isto é,  $A \in C_{\mathcal{I}^{\text{sur}}}(F)$ .

Reciprocamente, suponhamos  $A \in C_{\mathcal{I}^{\text{sur}}}(F)$ . Por definição temos  $A \subset v(B_G)$  para algum espaço de Banach  $G$  e algum operador  $v \in \mathcal{I}^{\text{sur}}(G; F)$ . Logo,  $v \circ Q_G \in \mathcal{I}(\ell_1(B_G); F)$  e

$$(v \circ Q_G)(B_{\ell_1(B_G)}) = v(Q_G(B_{\ell_1(B_G)})) = v(B_G) \supset A,$$

onde a segunda igualdade segue do Corolário 2.2.29. Isso prova que  $A$  é um conjunto  $\mathcal{I}$ -limitado, isto é,  $A \in C_{\mathcal{I}}(F)$ . □

A seguir estudaremos os polinômios  $\mathcal{I}$ -limitados, que foram introduzidos por Aron e Rueda [2]. A definição de polinômio  $\mathcal{I}$ -limitado é uma generalização da condição que aparece no Corolário 4.4.2.

**Definição 4.4.6.** (a) Seja  $\mathcal{I}$  um ideal de operadores. Dizemos que um polinômio  $P \in \mathcal{P}^{(m)E; F}$  é  $\mathcal{I}$ -limitado se  $P(B_E) \in C_{\mathcal{I}}(F)$ , isto é,  $P(B_E) \subset u(B_G)$  para algum espaço de Banach  $G$  e algum operador  $u \in \mathcal{I}(G; F)$ . Denotamos por  $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}^{(m)E; F}$  o conjunto de todos os polinômios  $m$ -homogêneos  $\mathcal{I}$ -limitados de  $E$  em  $F$ . No caso  $m = 1$ , denotaremos  $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}(E; F) = \mathcal{P}_{\mathcal{I}}^{(1)E; F}$ .

(b) Seja  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  um ideal normado de operadores. Definimos a função  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}}: \mathcal{P}_{\mathcal{I}}^{(m)E; F} \longrightarrow [0, +\infty)$  por

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}} = \inf\{\|u\|_{\mathcal{I}} : u \in \mathcal{I}(G; F) \text{ e } P(B_E) \subset u(B_G)\}.$$

**Observação 4.4.7.** Notar que do Corolário 4.4.2 temos

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = \mathcal{I}^{\text{sur}}.$$

**Proposição 4.4.8.** *Seja  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  um ideal normado de operadores. Então  $(\mathcal{P}_{\mathcal{I}}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}})$  é um ideal normado de polinômios.*

*Demonstração.* Veja [2, Proposition 3.3]. □

**Proposição 4.4.9.** *Seja  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  um ideal normado de operadores. Então*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}} = \mathcal{P}_{\mathcal{I}^{\text{sur}}} \quad e \quad \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}} = \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}^{\text{sur}}}}.$$

*Demonstração.* A primeira afirmação segue da Proposição 4.4.5. Provemos a segunda afirmação. Seja  $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^m E; F) = \mathcal{P}_{\mathcal{I}^{\text{sur}}}({}^m E; F)$  fixo. Dado um operador  $u \in \mathcal{I}(G; F)$  com  $P(B_E) \subset u(B_G)$ , temos que  $u \in \mathcal{I}^{\text{sur}}(G; F)$ . Logo,

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}^{\text{sur}}}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}^{\text{sur}}} = \|u \circ Q_E\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|Q_E\| = \|u\|_{\mathcal{I}},$$

onde a primeira desigualdade segue da definição de  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}^{\text{sur}}}}$ . Segue da arbitrariedade do operador  $u$  em  $\mathcal{I}$  com  $P(B_E) \subset u(B_G)$  que

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}^{\text{sur}}}} \leq \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}}.$$

Provemos a desigualdade inversa. Dado um operador  $v \in \mathcal{I}^{\text{sur}}(H; F)$  com  $P(B_E) \subset v(B_H)$ , temos  $v \circ Q_H \in \mathcal{I}({}^m \ell_1(B_H); F)$  e

$$(v \circ Q_H)(B_{\ell_1(B_H)}) = v(B_H) \supset P(B_E),$$

onde a igualdade segue do Corolário 2.2.29. Logo,

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}} \leq \|v \circ Q_H\|_{\mathcal{I}} = \|v\|_{\mathcal{I}^{\text{sur}}},$$

onde a desigualdade segue da definição de  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}}$ . Segue da arbitrariedade do operador  $v$  em  $\mathcal{I}^{\text{sur}}$  com  $P(B_E) \subset v(B_H)$  que

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}} \leq \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}^{\text{sur}}}}.$$

□

Nosso próximo objetivo é provar que  $\mathcal{P}_{\mathcal{I}} = \mathcal{I}^{\text{sur}} \circ \mathcal{P} = (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}$ . Para isso precisamos do seguinte lema.

**Lema 4.4.10.** *Sejam  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  e  $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_{\mathcal{J}})$  ideais normados de operadores tais que  $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ . Se  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  ou  $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_{\mathcal{J}})$  é sobrejetivo, então  $(\mathcal{J} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}} \subset \mathcal{I} \circ \mathcal{P}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{P}} \leq \|\cdot\|_{(\mathcal{J} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}}$ .*



*Demonstração.* Seja  $P \in (\mathcal{J} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}({}^m E; F)$ . Por definição temos  $P \circ Q_E \in (\mathcal{J} \circ \mathcal{P})({}^m \ell_1(B_E); F)$ . Segue da Proposição 1.5.16 que  $(P \circ Q_E)_{L,s} \in \mathcal{J}(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} \ell_1(B_E); F)$ . Por outro lado, consideremos o operador linear contínuo

$$\otimes^{m,s} Q_E: \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} \ell_1(B_E) \longrightarrow \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E$$

tal que  $(\otimes^{m,s} Q_E)(\otimes^m y) = \otimes^m Q_E(y)$  para todo  $y \in \ell_1(B_E)$ , cuja existência é garantida pelo Corolário 1.3.10. Pela Proposição 1.3.11 temos

$$(P \circ Q_E)_{L,s} = P_{L,s} \circ \otimes^{m,s} Q_E.$$

$$\begin{array}{ccccc} \ell_1(B_E) & \xrightarrow{Q_E} & E & \xrightarrow{P} & F \\ \delta_{m,s} \downarrow & & \nearrow (P \circ Q_E)_{L,s} & & \uparrow P_{L,s} \\ \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} \ell_1(B_E) & \xrightarrow{\otimes^{m,s} Q_E} & \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E & & \end{array}$$

Como  $Q_E$  é uma sobrejeção métrica, segue da Proposição 2.2.30 que  $\otimes^{m,s} Q_E$  é também uma sobrejeção métrica.

Façamos primeiramente o caso em que  $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_{\mathcal{J}})$  é sobrejetivo. Como  $P_{L,s} \circ \otimes^{m,s} Q_E = (P \circ Q_E)_{L,s}$  pertence a  $\mathcal{J}$  e  $\otimes^{m,s} Q_E$  é uma sobrejeção métrica, segue da sobrejetividade de  $\mathcal{J}$  que

$$P_{L,s} \in \mathcal{J}(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E; F) \subset \mathcal{I}(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E; F).$$

Pela Proposição 1.5.16 temos  $P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}({}^m E; F)$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \|P\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{P}} &\stackrel{(*)}{=} \|P_{L,s}\|_{\mathcal{I}} \leq \|P_{L,s}\|_{\mathcal{J}} \stackrel{(**)}{=} \|P_{L,s} \circ \otimes^{m,s} Q_E\|_{\mathcal{J}} = \|(P \circ Q_E)_{L,s}\|_{\mathcal{J}} \\ &\stackrel{(*)}{=} \|P \circ Q_E\|_{\mathcal{J} \circ \mathcal{P}} = \|P\|_{(\mathcal{J} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}}, \end{aligned}$$

onde  $(*)$  segue da Proposição 1.5.19(c) e  $(**)$  segue da sobrejetividade de  $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_{\mathcal{J}})$  e do fato de  $\otimes^{m,s} Q_E$  ser uma sobrejeção métrica.

Suponhamos agora que  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  seja sobrejetivo. De

$$P_{L,s} \circ \otimes^{m,s} Q_E = (P \circ Q_E)_{L,s} \in \mathcal{J}(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} \ell_1(B_E); F) \subset \mathcal{I}(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} \ell_1(B_E); F)$$

e da sobrejetividade de  $\mathcal{I}$  segue que  $P_{L,s} \in \mathcal{I}(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E; F)$ . Novamente, pela Proposição 1.5.16, concluímos que  $P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}({}^m E; F)$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \|P\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{P}} &\stackrel{(*)}{=} \|P_{L,s}\|_{\mathcal{I}} \stackrel{(**)}{=} \|P_{L,s} \circ \otimes^{m,s} Q_E\|_{\mathcal{I}} = \|(P \circ Q_E)_{L,s}\|_{\mathcal{I}} \leq \|(P \circ Q_E)_{L,s}\|_{\mathcal{J}} \\ &\stackrel{(*)}{=} \|P \circ Q_E\|_{\mathcal{J} \circ \mathcal{P}} = \|P\|_{(\mathcal{J} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}}, \end{aligned}$$

onde  $(*)$  segue da Proposição 1.5.19(c) e  $(**)$  segue da sobrejetividade de  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  e do fato de  $\otimes^{m,s} Q_E$  ser uma sobrejeção métrica.  $\square$

Chegamos agora ao resultado mais importante desta seção: a descrição da envoltória sobrejetiva de um ideal de composição, o qual é a versão análoga do Teorema 3.4.1.

**Teorema 4.4.11.** *Seja  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  um ideal normado de operadores. Então*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}} = \mathcal{I}^{\text{sur}} \circ \mathcal{P} = (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}. \quad (4.21)$$

*Em particular, o ideal de polinômios  $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$  é sobrejetivo. Além disso,*

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}} \leq \|P\|_{\mathcal{I}^{\text{sur}} \circ \mathcal{P}} \leq \|P\|_{(\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}} \leq \frac{m^m}{m!} \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}},$$

*para todo  $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^m E; F)$ . Em particular, as normas  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}}$ ,  $\|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{sur}} \circ \mathcal{P}}$  e  $\|\cdot\|_{(\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}}$  são equivalentes.*

*Demonstração.* Para as duas igualdades da equação (4.21), provaremos as inclusões

$$\mathcal{I}^{\text{sur}} \circ \mathcal{P} \subset \mathcal{P}_{\mathcal{I}}, \quad (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}} \subset \mathcal{I}^{\text{sur}} \circ \mathcal{P} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_{\mathcal{I}} \subset (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}.$$

Para a primeira inclusão, seja  $P \in (\mathcal{I}^{\text{sur}} \circ \mathcal{P})({}^m E; F)$ . Por definição,  $P = u \circ Q$  para algum espaço de Banach  $G$ , algum polinômio  $Q \in \mathcal{P}({}^m E; G)$  e algum operador  $u \in \mathcal{I}^{\text{sur}}(G; F)$ . Logo  $\|Q\|u \in \mathcal{I}^{\text{sur}}(G; F)$  e

$$P(B_E) = u(Q(B_E)) \subset u(\|Q\|B_G) = (\|Q\|u)(B_G).$$

Portanto,  $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}^{\text{sur}}}({}^m E; F) = \mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^m E; F)$  (Proposição 4.4.9) e

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}} = \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}^{\text{sur}}}} \leq \|(\|Q\|u)\|_{\mathcal{I}^{\text{sur}}} = \|Q\| \cdot \|u\|_{\mathcal{I}^{\text{sur}}},$$

onde a primeira igualdade segue também da Proposição 4.4.9. Para a definição da norma de um ideal de composição, veja a Definição 1.5.18. Segue da arbitrariedade da fatoração  $P = u \circ Q$  com  $u$  em  $\mathcal{I}^{\text{sur}}$  que

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}} \leq \|P\|_{\mathcal{I}^{\text{sur}} \circ \mathcal{P}}.$$

Quanto à segunda inclusão, como  $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}^{\text{sur}}$  e  $\mathcal{I}^{\text{sur}}$  é sobrejetivo, do Lemma 4.4.10 sabemos que  $(\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}} \subset \mathcal{I}^{\text{sur}} \circ \mathcal{P}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{sur}} \circ \mathcal{P}} \leq \|\cdot\|_{(\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}}$ .

Finalmente, para a terceira inclusão, seja  $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^m E; F)$ . Por definição,  $P(B_E) \subset u(B_G)$  para algum espaço de Banach  $G$  e algum operador  $u \in \mathcal{I}(G; F)$ . Logo,

$$(P \circ Q_E)(B_{\ell_1(B_E)}) = P(Q_E(B_{\ell_1(B_E)})) = P(B_E) \subset u(B_G),$$

onde a segunda igualdade segue do Corolário 2.2.29. Pelo Teorema 4.3.7 existe um polinômio  $R \in \mathcal{P}({}^m \ell_1(B_E); G)$  tal que  $\|R\| \leq \frac{m^m}{m!}$  e  $P \circ Q_E = u \circ R$ .

$$\begin{array}{ccccc} \ell_1(B_E) & \xrightarrow{Q_E} & E & \xrightarrow{P} & F \\ & \searrow R & & \nearrow u & \\ & & G & & \end{array}$$

Como  $u \in \mathcal{I}(G; F)$ ,

$$P \circ Q_E = u \circ R \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}({}^m \ell_1(B_E); F),$$

donde segue que  $P \in (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}({}^m E; F)$ . Além disso,

$$\|P\|_{(\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}} = \|P \circ Q_E\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{P}} = \|u \circ R\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{P}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|R\| \leq \frac{m^m}{m!} \cdot \|u\|_{\mathcal{I}}.$$

Segue da arbitrariedade do operador  $u$  em  $\mathcal{I}$  com  $P(B_E) \subset u(B_G)$  que

$$\|P\|_{(\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}} \leq \frac{m^m}{m!} \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}}.$$

□

**Corolário 4.4.12.** *Seja  $\mathcal{I}$  um ideal de operadores. Então*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}} = \mathcal{I}^{\text{sur}} \circ \mathcal{P} = (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}.$$

*Demonstração.* Basta considerar o ideal normado de operadores  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|)$  e aplicar o Teorema 4.4.11. □

Nos ocuparemos agora de algumas consequências do Teorema 4.4.11, que nos fornecerá entre outras coisas, alguns exemplos interessantes.

Em [2, Corollary 4.6], Aron e Rueda provaram que se um ideal de operadores  $\mathcal{I}$  é sobrejetivo e satisfaz a chamada *condição*  $\Gamma$ , então  $\mathcal{P}_{\mathcal{I}} = \mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ . A primeira aplicação do Teorema 4.4.11, além de dar algumas caracterizações de ideais de composição sobrejetivos, é mostrar que a condição  $\Gamma$  não é necessária nesse resultado.

**Proposição 4.4.13.** *As seguintes afirmações são equivalentes para um ideal de operadores  $\mathcal{I}$ :*

- (a)  $\mathcal{I}$  é sobrejetivo.
- (b)  $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$  é um ideal sobrejetivo de polinômios.
- (c)  $(\mathcal{I} \circ \mathcal{P})_m$  é um ideal sobrejetivo de polinômios  $m$ -homogêneos para algum  $m \in \mathbb{N}$ .
- (d)  $\mathcal{P}_{\mathcal{I}} = \mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ .
- (e) Dados polinômios  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  e  $R \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^m G; F)$  tais que  $P(B_E) \subset R(B_G)$ , então  $P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^m E; F)$ .
- (f) Dados um polinômio  $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$  e um operador  $u \in \mathcal{I}(G; F)$  tais que  $P(B_E) \subset u(B_G)$ , então  $P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^m E; F)$ .

*Demonstração.* Provaremos primeiramente que os itens (a), (b) e (c) são equivalentes.

(a)  $\implies$  (b) Suponhamos que  $\mathcal{I}$  seja um ideal sobrejetivo de operadores. Então  $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{sur}}$ , e portanto

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{P} = \mathcal{I}^{\text{sur}} \circ \mathcal{P} = (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}},$$

onde a segunda igualdade segue do Corolário 4.4.12. Portanto,  $\mathcal{I} \circ \mathcal{P} = (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}$  e pelo Corolário 4.2.4(1) segue que  $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$  é sobrejetivo.

(b)  $\implies$  (c) Essa implicação é imediata.

(c)  $\implies$  (a) Suponhamos que  $(\mathcal{I} \circ \mathcal{P})_m$  seja um ideal sobrejetivo de polinômios  $m$ -homogêneos para algum  $m \in \mathbb{N}$ . Então

$$(\mathcal{I}^{\text{sur}} \circ \mathcal{P})_m = ((\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}})_m = ((\mathcal{I} \circ \mathcal{P})_m)^{\text{sur}} = (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})_m,$$

onde a primeira igualdade segue do Corolário 4.4.12, a segunda igualdade segue das definições e a terceira segue da sobrejetividade de  $(\mathcal{I} \circ \mathcal{P})_m$ . Logo,  $(\mathcal{I}^{\text{sur}} \circ \mathcal{P})_m = (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})_m$ . Segue da Proposição 1.5.17(b) que  $\mathcal{I}^{\text{sur}} = \mathcal{I}$ , isto é,  $\mathcal{I}$  é um ideal sobrejetivo.

(b)  $\iff$  (d) Esta equivalência segue da igualdade  $\mathcal{P}_{\mathcal{I}} = (\mathcal{I} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}}$  (Corolário 4.4.12).

Finalmente provemos que os itens (b), (e) e (f) são equivalentes.

(b)  $\implies$  (f) Como  $(\mathcal{I} \circ \mathcal{P})_1 = \mathcal{I}$ , então  $(\mathcal{I} \circ \mathcal{P})_1 \circ \mathcal{P} \subset \mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ . Portanto, a implicação desejada segue da Proposição 4.4.3.

(f)  $\implies$  (e) Sejam  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  e  $R \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}({}^m G; F)$  tais que  $P(B_E) \subset R(B_G)$ . Consideremos o polinômio  $m$ -homogêneo canônico  $\delta_{m,s}: G \rightarrow \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} G$ . Temos

$$\begin{aligned} P(B_E) \subset R(B_G) &= (R_{L,s} \circ \delta_{m,s})(B_G) = R_{L,s}(\delta_{m,s}(B_G)) \\ &\subset R_{L,s} \left( \|\delta_{m,s}\| \cdot B_{\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} G} \right) = R_{L,s} \left( B_{\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} G} \right). \end{aligned}$$

Da Proposição 1.5.16 sabemos que  $R_{L,s} \in \mathcal{I}(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} G; F)$ , e daí segue de (f) que  $P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}({}^m E; F)$ .

A implicação (e)  $\implies$  (b) segue da Proposição 4.4.3, o que completa a demonstração.  $\square$

Já vimos que o ideal  $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  dos polinômios que são aproximáveis, na norma usual, por polinômios de posto finito não é sobrejetivo. Calcularemos agora sua envoltória sobrejetiva.

**Corolário 4.4.14.**  $(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^{\text{sur}} = \mathcal{P}_{\mathcal{K}}$ .

*Demonstração.* Com efeito,

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^{\text{sur}} = (\mathcal{A} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}} = \mathcal{A}^{\text{sur}} \circ \mathcal{P} = \mathcal{K} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{K}},$$

onde a primeira igualdade segue do Exemplo 1.5.20, a segunda segue do Corolário 4.4.12, a terceira segue de [22, Proposição 19.2.3] e a quarta segue também do Exemplo 1.5.20.  $\square$

Nossa próxima aplicação é sobre o dual polinomial de um ideal de operadores (veja Definição 1.5.21). De [33, Theorem 4.7.16] sabemos que  $(\mathcal{I}^{\text{dual}})^{\text{sur}} = (\mathcal{I}^{\text{inj}})^{\text{dual}}$  para todo ideal de operadores  $\mathcal{I}$ . A seguir veremos a versão polinomial desse resultado.

**Proposição 4.4.15.** *Seja  $\mathcal{I}$  um ideal de operadores. Então*

$$(\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}})^{\text{sur}} = (\mathcal{I}^{\text{inj}})^{\mathcal{P}\text{-dual}}.$$

*Em particular, se o ideal de operadores  $\mathcal{I}$  é injetivo, então o ideal de polinômios  $\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}$  é sobrejetivo.*

*Demonstração.* Com efeito,

$$(\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}})^{\text{sur}} = (\mathcal{I}^{\text{dual}} \circ \mathcal{P})^{\text{sur}} = (\mathcal{I}^{\text{dual}})^{\text{sur}} \circ \mathcal{P} = (\mathcal{I}^{\text{inj}})^{\text{dual}} \circ \mathcal{P} = (\mathcal{I}^{\text{inj}})^{\mathcal{P}\text{-dual}},$$

onde a primeira igualdade segue da Proposição 1.5.22, a segunda do Corolário 4.4.12, a terceira de [33, Theorem 4.7.16] e a última também da Proposição 1.5.22.  $\square$

De [33, Theorem 4.7.16] sabemos também que  $(\mathcal{I}^{\text{dual}})^{\text{inj}} \subset (\mathcal{I}^{\text{sur}})^{\text{dual}}$  para todo ideal de operadores  $\mathcal{I}$  (e, que essa continência é estrita). Vejamos agora a versão polinomial desse resultado.

**Proposição 4.4.16.** *Seja  $\mathcal{I}$  um ideal de operadores. Então*

$$(\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}})^{\text{inj}} \subset (\mathcal{I}^{\text{sur}})^{\mathcal{P}\text{-dual}}.$$

*Em particular, se o ideal de operadores  $\mathcal{I}$  é sobrejetivo, então o ideal de polinômios  $\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}$  é injetivo.*

*Demonstração.* Com efeito,

$$(\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}})^{\text{inj}} = (\mathcal{I}^{\text{dual}} \circ \mathcal{P})^{\text{inj}} = (\mathcal{I}^{\text{dual}})^{\text{inj}} \circ \mathcal{P} \subset (\mathcal{I}^{\text{sur}})^{\text{dual}} \circ \mathcal{P} = (\mathcal{I}^{\text{sur}})^{\mathcal{P}\text{-dual}},$$

onde a primeira igualdade segue da Proposição 1.5.22, a segunda do Teorema 3.4.1, a terceira de [33, Theorem 4.7.16] e da Proposição 1.5.15(c), e a última segue também da Proposição 1.5.22.

Para segunda afirmação, suponhamos que  $\mathcal{I}$  seja um ideal sobrejetivo de operadores. Então

$$(\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}})^{\text{inj}} \subset (\mathcal{I}^{\text{sur}})^{\mathcal{P}\text{-dual}} = \mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}},$$

onde a inclusão segue da primeira afirmação e a igualdade da sobrejetividade de  $\mathcal{I}$ . Logo,  $(\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}})^{\text{inj}} = \mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}$ , isto é,  $\mathcal{I}^{\mathcal{P}\text{-dual}}$  é um ideal injetivo de polinômios.  $\square$

Nossa próxima aplicação é a descrição dos polinômios  $\Pi_1$ -limitados, onde  $\Pi_1$  é o ideal dos operadores absolutamente somantes (Exemplo 1.4.11). Para isso faremos um breve estudo sobre a componente linear do ideal de polinômios  $\mathcal{P}_2$ .

**Definição 4.4.17.** Dizemos que um operador  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  admite uma fatoração através de um espaço de Hilbert se existem um espaço de Hilbert  $H$  e operadores  $u_1 \in \mathcal{L}(E; H)$  e  $u_2 \in \mathcal{L}(H; F)$  tais que  $u = u_2 \circ u_1$ .

Denotamos por  $\mathcal{L}_2(E; F)$  o conjunto de todos os operadores de  $E$  em  $F$  que admitem fatoração através de um espaço de Hilbert. É bem conhecido que a classe  $\mathcal{L}_2$  dos operadores que admitem fatoração através de um espaço de Hilbert é um ideal de operadores.

**Observação 4.4.18.** Segue imediatamente da definição que se  $E$  ou  $F$  é um espaço de Hilbert, então  $\mathcal{L}_2(E; F) = \mathcal{L}(E; F)$ .

**Definição 4.4.19.** Um polinômio  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  pertence a  $\mathcal{P}_2({}^m E; F)$  se admite uma fatoração à esquerda através de um espaço de Hilbert no sentido que existem um espaço de Hilbert  $H$ , um polinômio  $Q \in \mathcal{P}({}^m E; H)$  e um operador  $u \in \mathcal{L}(H; F)$  tais que  $P = u \circ Q$ .

**Proposição 4.4.20.**  $\mathcal{P}_2 = \mathcal{L}_2 \circ \mathcal{P}$ . *Em particular,  $\mathcal{P}_2$  é um ideal de polinômios.*

*Demonstração.* Seja  $P \in \mathcal{P}_2({}^m E; F)$ . Por definição,  $P = u \circ Q$  para algum espaço de Hilbert  $H$ , algum polinômio  $Q \in \mathcal{P}({}^m E; H)$  e algum operador  $u \in \mathcal{L}(H; F)$ . Segue da Observação 4.4.18 que  $u \in \mathcal{L}_2(H; F)$ . Isso prova que  $P \in (\mathcal{L}_2 \circ \mathcal{P})({}^m E; F)$ .

Reciprocamente, seja  $P \in (\mathcal{L}_2 \circ \mathcal{P})({}^m E; F)$ . Por definição,  $P = v \circ Q$  para algum espaço de Banach  $G$ , algum polinômio  $Q \in \mathcal{P}({}^m E; G)$  e algum operador  $v \in \mathcal{L}_2(G; F)$ .

Então  $v = u_2 \circ u_1$  para algum espaço de Hilbert  $H$  e alguns operadores  $u_1 \in \mathcal{L}(G; H)$  e  $u_2 \in \mathcal{L}(H; F)$ . Logo,

$$P = u_2 \circ (u_1 \circ Q).$$

Como  $u_1 \circ Q: E \rightarrow H$  é um polinômio  $m$ -homogêneo contínuo, temos  $P \in \mathcal{P}_2({}^m E; F)$ .  $\square$

Em [16, 20.17], Defant e Floret provam a igualdade  $\Pi_1^{\text{sur}} = \mathcal{L}_2$  e a chamam de *desigualdade de Grothendieck na forma de operadores*. Dessa igualdade segue que

$$\mathcal{L}_{\Pi_1} = \Pi_1^{\text{sur}} = \mathcal{L}_2,$$

onde a primeira igualdade segue da Observação 4.4.7. A seguir veremos a versão polinomial desse resultado.

**Proposição 4.4.21.**  $\mathcal{P}_{\Pi_1} = \mathcal{P}_2$ , isto é, um polinômio homogêneo é  $\Pi_1$ -limitado se, e somente se, admite fatoração à esquerda através de um espaço de Hilbert.

*Demonstração.* Com efeito,

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{L}_2 \circ \mathcal{P} = \Pi_1^{\text{sur}} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\Pi_1},$$

onde a primeira igualdade segue da Proposição 4.4.20, a segunda da desigualdade de Grothendieck na forma de operadores e a terceira do Corolário 4.4.12.  $\square$

A seguir descreveremos os polinômios  $\Pi_p$ -limitados para  $p > 1$ . A classe dos polinômios fortemente fatoráveis  $p$ -somantes, definida a seguir, foi introduzida em [30] para caracterizar o ideal de composição  $\Pi_p \circ \mathcal{P}$ .

**Definição 4.4.22.** Seja  $1 \leq p < \infty$ . Um polinômio  $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$  é *fortemente favorável  $p$ -somante*, em símbolos  $P \in \mathcal{P}_{FSt,p}({}^m E; F)$ , se existe  $C > 0$  tal que para quaisquer  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , quaisquer  $x_j^i \in E$  e quaisquer escalares  $\lambda_j^i \in \mathbb{K}$  com  $1 \leq j \leq n_1$ ,  $1 \leq i \leq n_2$ , tem-se

$$\left( \sum_{j=1}^{n_1} \left\| \sum_{i=1}^{n_2} \lambda_j^i P(x_j^i) \right\|^p \right)^{1/p} \leq C \cdot \sup_{q \in B_{\mathcal{P}({}^m E)}} \left( \sum_{j=1}^{n_1} \left| \sum_{i=1}^{n_2} \lambda_j^i q(x_j^i) \right|^p \right)^{1/p}.$$

De [30, Proposition 4.2] sabemos que a classe  $\mathcal{P}_{FSt,p}$  dos polinômios fortemente fatoráveis  $p$ -somantes é um ideal de polinômios. Mais ainda:

**Proposição 4.4.23.** [30, Corollary 4.6]  $\mathcal{P}_{FSt,p} = \Pi_p \circ \mathcal{P}$  para todo  $1 \leq p < \infty$ .

Combinando a proposição acima com o Corolário 4.4.12 temos o seguinte resultado:

**Corolário 4.4.24.**  $\mathcal{P}_{\Pi_p} = (\Pi_p \circ \mathcal{P})^{\text{sur}} = (\mathcal{P}_{FSt,p})^{\text{sur}}$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] T. R. ALVES, *Polinômios dominados entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2011.
- [2] R. M. ARON E P. RUEDA, *Ideals of homogeneous polynomials*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **48**(4), 957–969 (2012). <https://doi.org/10.2977/PRIMS/93>.
- [3] R. M. ARON E M. SCHOTTENLOHER, *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property*, J. Funct. Anal. **21**, 7–30 (1976). [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(76\)90026-4](https://doi.org/10.1016/0022-1236(76)90026-4).
- [4] S. BERRIOS, G. BOTELHO E P. RUEDA, *The surjective hull of a polynomial ideal*, Math. Nachr. **290**(5–6), 687–698 (2017). <https://doi.org/10.1002/mana.201600118>.
- [5] F. BLASCO, *Complementation in spaces of symmetric tensor products and polynomials*, Studia Math. **123**, 165–173 (1997). <https://doi.org/10.4064/sm-123-2-165-173>.
- [6] G. BOTELHO, J. CAMPOS E J. SANTOS, *Operator ideals related to absolutely summing and Cohen strongly summing operators*, Pacific J. Math. **287**(1), 1–17 (2017). <https://doi.org/10.2140/pjm.2017.287.1>.
- [7] G. BOTELHO, E. ÇALIŞKAN E G. MORAES, *The polynomial dual of an operator ideal*, Monatsh. Math. **173**, 161–174 (2014). <https://doi.org/10.1007/s00605-013-0569-z>.
- [8] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO E C. MICHELS, *Complex interpolation and summability properties of multilinear operators*, Rev. Mat. Complut. **23**, 139–161 (2010). <https://doi.org/10.1007/s13163-009-0001-3>.
- [9] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO E P. RUEDA, *Pietsch’s factorization theorem for dominated polynomials*, J. Funct. Anal. **243**, 257–269 (2007). <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2006.10.001>.
- [10] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO E P. RUEDA, *On composition ideals of multilinear operators and homogeneous polynomials*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43**, 1139–1155 (2007). <https://doi.org/10.2977/primis/1201012383>.
- [11] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO E E. TEIXEIRA, *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2<sup>a</sup> edição, 2015.

- [12] G. BOTELHO E L. POLAC, *A polynomial Hutton theorem with applications*, J. Math. Anal. Appl. **415**, 294–301 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.01.056>.
- [13] G. BOTELHO E L. A. TORRES, *Injective polynomial ideals and the domination property*, Results Math. **75**, 24 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00025-019-1150-4>.
- [14] D. CARANDO, V. DIMANT E S. MURO, *Coherent sequences of polynomial ideals on Banach spaces*, Math. Nachr. **282**, 1111–1133 (2009). <https://doi.org/10.1002/mana.200610791>.
- [15] J. S. COHEN, *Absolutely  $p$ -summing,  $p$ -nuclear operators and their conjugates*, Math. Ann. **201**, 177–200 (1973). <https://doi.org/10.1007/BF01427941>.
- [16] A. DEFANT E K. FLORET, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [17] J. DIESTEL, H. JARCHOW E A. TONGE, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, 1995. <https://doi.org/10.1017/CB09780511526138>.
- [18] S. DINEEN, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer, London, 1999. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0869-6>.
- [19] K. FLORET, *Natural norms on symmetric tensor product of normed spaces*, Note di Matematica **17** (1997), 153–188 (1999).
- [20] J. K. HUNTER, *Notes on Unordered Sums*, 2007, disponível em [https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/m201b\\_old/sums.pdf](https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/m201b_old/sums.pdf).
- [21] J. K. HUNTER E B. NACHTERGAELE, *Applied Analysis*, World Scientific, 2001. <https://doi.org/10.1142/4319>.
- [22] H. JARCHOW, *Locally Convex Spaces*, BG Teubner, Stuttgart, 1981. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-90559-8>.
- [23] J. P. LUIZ, *A propriedade de Schur em espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2017. <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2017.178>.
- [24] R. E. MEGGINSON, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, 1998. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0603-3>.
- [25] Y. MELÉNDEZ AND A. TONGE, *Polynomials and the Pietsch domination theorem*, Math. Proc. R. Ir. Acad. **99A**, 195–212 (1999).
- [26] F. R. MOURA, *Ideais algébricos de aplicações multilineares e polinômios homogêneos*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2014.
- [27] J. MUJICA, *Complex Analysis in Banach spaces*, North-Holland, 1986.



- [28] L. NARICI E E. BECKENSTEIN, *Topological Vector Spaces*, CRC Press, Second Edition, 2010. <https://doi.org/10.1201/9781584888673>.
- [29] D. F. NOGUEIRA, *Espaços de sequências vetoriais e ideais de operadores*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2016. <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2016.128>.
- [30] D. PELLEGRINO, P. RUEDA E E. A. SÁNCHEZ-PÉREZ, *Surveying the spirit of absolute summability on multilinear operators and homogeneous polynomials*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fs. Nat. Ser. A Math. RACSAM **110**(1), 285–302 (2016). <https://doi.org/10.1007/s13398-015-0224-8>.
- [31] D. PÉREZ-GARCÍA, *Comparing different classes of absolutely summing multilinear operators*, Arch. Math. (Basel) **85**, 258–267 (2005). <https://doi.org/10.1007/s00013-005-1125-4>.
- [32] D. PÉREZ-GARCÍA E I. VILLANUEVA, *Multiple summing operators on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **285**, 86–96 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0022-247X\(03\)00352-4](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00352-4).
- [33] A. PIETSCH, *Operators Ideals*, North-Holland, 1980.
- [34] A. PIETSCH, *Ideals of multilinear functionals (designs of a theory)*, Proceedings of the second international conference on operator algebras, ideals, and their applications in theoretical physics (Leipzig, 1983), 185–199, Teubner-Texte Math., 67, Teubner, Leipzig, 1984.
- [35] A. PIETSCH, *The ideal of  $p$ -compact operators and its maximal hull*, Proc. Amer. Math. Soc. **142**, 519–530 (2013). <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2013-11758-2>.
- [36] L. G. POLAC, *O adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2013.
- [37] R. RYAN, *Applications of Topological Tensor Products to Infinite Dimensional Holomorphy*, Thesis, Trinity College, 1980.
- [38] R. RYAN, *Introduction to tensor products of Banach spaces*, Springer, London, 2002. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-3903-4>.
- [39] A. S. SANTIAGO, *Associatividade nos produtos tensoriais projetivo e injetivo*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2020. <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2020.161>.
- [40] B. SCHNEIDER, *On absolutely  $p$ -summing and related multilinear mappings*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Brandemburger Landeshochschule **35**, 105–117 (1991).
- [41] A. A. F. SILVA, *Extensões ideais de classes de operadores multilineares e polinômios homogêneos entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2018. <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.163>.

- [42] A. R. SILVA, *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2010.
- [43] I. STEPHANI, *Generating systems of sets and quotients of surjective operator ideals*, Math. Nachr. **99**, 13–27 (1980). <https://doi.org/10.1002/mana.19800990103>.
- [44] L. A. TORRES, *Adjuntos generalizados e germes de ideias de operadores lineares e polinômios homogêneos*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 2019.