

# **Sistemas Dinâmicos Caóticos, Teoria de Controle e Aplicações**

**Matheus Gonçalves Silva de Castro**

Instituto de Física  
Universidade Federal de Uberlândia  
Bacharelado em Física  
Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Jean Venato Santos

Uberlândia - MG  
2021



---

---

# AGRADECIMENTOS

---

Primeiramente, ao professor Jean Venato Santos (o qual me orientou na escrita e na apresentação deste trabalho assim como no desenvolvimento de vários projetos de iniciação científica ao longo da minha graduação) agradeço: a disposição para orientar a elaboração e a execução de um projeto de caráter multidisciplinar e, por isso, permeado de vários desafios; a presteza em me ajudar e em me acompanhar na empreitada de formatar este texto conciliando algumas temáticas completamente teóricas com outras de natureza inteiramente prática; todo o investimento feito tanto ao longo desse processo quanto em minha formação acadêmica.

Aos professores Antonino di Lorenzo e Marcel Novaes agradeço o aceite ao convite para compor a banca que avaliou o presente trabalho de conclusão de curso. Também lhes agradeço as várias sugestões e, em especial, a recomendação, feita por ambos, para complementar o texto com o fornecimento de exemplos e de ilustrações dos fatos matemáticos aqui apresentados, a fim de facilitar aos próximos leitores a compreensão deste material.



---

---

# RESUMO

---

Este trabalho aborda três temas: a teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias e dos sistemas dinâmicos que essas definem, a teoria de controle com feedback e sem feedback, uma importante aplicação de técnicas de controle em microscopia. Importantes resultados da área de sistemas dinâmicos (tais como o Teorema de Hartman-Grobman para fluxos, o Teorema de Poincaré-Bendixson e o Teorema da Bifurcação de Hopf) são enunciados e, posteriormente, fundamentam o controle via feedback de alguns sistemas não lineares de equações diferenciais ordinárias; técnicas de controle sem feedback também são então apresentadas em contraste com essas outras. Por fim, no intuito de se compreender como as estratégias de controle são implementadas na prática, estuda-se o funcionamento dos mecanismos controladores do microscópio de força atômica.



---

---

# ABSTRACT

---

This work deals with three themes: the qualitative theory of ordinary differential equations and the dynamical systems they define, the theory of control with feedback and without feedback, an important application of control techniques in microscopy. Important results from the field of dynamical systems (such as the Hartman-Grobman Theorem for flows, the Poincaré-Bendixson Theorem and the Hopf Bifurcation Theorem) are stated and, later, support the feedback control of some nonlinear systems of ordinary differential equations; non-feedback control techniques are then also presented in contrast to these others. Finally, in order to understand how control strategies are implemented in practice, the functioning of the controlling mechanisms of the atomic force microscope is studied.





---

# LISTA DE SÍMBOLOS

---

$D\{F\}$	Domínio de definição da aplicação $F$ .
$Im\{F\}$	Imagem da aplicação $F$ .
$JF(X)$	Matriz jacobiana da aplicação $F$ calculada no ponto $X$ .
$C^0, C^1, C^2, \dots, C^\infty$	Classes de diferenciabilidade.
$max(I)$	Maior elemento do conjunto $I \subset \mathbb{R}$
$Re(\lambda)$	Parte real do número $\lambda \in \mathbb{C}$ .
$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$	Vetor nulo ou, simplesmente, a origem de $\mathbb{R}^n$ .
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Espaço das matrizes quadradas de dimensão $n^2$ .
$\mathbb{I}_{n \times n}$	Matriz identidade de $\mathbb{R}^{n \times n}$ .
$det(A)$	Determinante da matriz quadrada $A$ .
$\Sigma(A)$	Conjunto dos autovalores, em $\mathbb{C}$ , da matriz quadrada $A$ .
$\mathbb{S}^n$	Conjunto de todos os pontos em $\mathbb{R}^{n+1}$ que distam 1 da origem.
$\langle a, b \rangle$	Produto interno usual de $\mathbb{R}^n$ entre os vetores $a, b \in \mathbb{R}^n$ .



---

---

# CONTEÚDO

---

<b>1</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>5</b>
1.1	Preliminares . . . . .	5
1.1.1	Análise Real . . . . .	5
1.1.2	Álgebra Linear . . . . .	9
1.1.3	Equações Diferenciais Ordinárias, Fluxos e Sistemas Dinâmicos . . . . .	12
1.1.4	Estabilidade . . . . .	18
1.1.5	Critérios de Estabilidade . . . . .	21
1.2	Bifurcações em uma Família de Sistemas Dinâmicos Contínuos . . . . .	23
1.2.1	Bifurcação Sela-Nó . . . . .	27
1.2.2	Bifurcação de Hopf . . . . .	28
1.3	Sistemas com Comportamento Caótico . . . . .	31
1.3.1	Fluxos Jamais Caóticos . . . . .	31
1.3.2	Sistemas Discretos, Contínuos e Caóticos . . . . .	32
1.4	O Sistema Caótico de Lorenz . . . . .	34
1.5	Expoentes de Lyapunov . . . . .	39

1.6	Rudimentos de Mecânica Clássica . . . . .	41
<b>2</b>	<b>Métodos e Técnicas de Controle de Caos: Uma Breve Revisão</b>	<b>45</b>
2.1	Estabilização do Sistema Caótico de Chen . . . . .	46
2.2	Controle do Sistema Dinâmico de Rössler . . . . .	50
2.3	Controle de Vibrações Caóticas em um Sistema Mecânico . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Algumas Aplicações da Teoria de Controle em Microscopia</b>	<b>55</b>
3.1	O Microscópio de Força Atômica (AFM) . . . . .	55
3.1.1	AFM, Microscopia de Alta Resolução e Controle por Feedback . . . . .	55
3.1.2	Os Componentes, o Funcionamento e o Controle de um AFM . . . . .	56
3.2	Oscilador Harmônico Amortecido Forçado, Ressonância e Controle de um AFM .	61
3.3	Um Modelo Matemático Para a Operação de um AFM . . . . .	65

---

---

# INTRODUÇÃO

---

O assunto que permeia este trabalho é a teoria de controle. A fim de fornecer uma visão abrangente sobre a teoria e sobre os mecanismos que permitem o controle dos mais variados sistemas mecânicos, elétricos, dentre outros, foi adotada uma subdivisão do texto em três capítulos. O primeiro desses aborda, sobretudo, os principais e mais básicos conceitos e métodos matemáticos empregados no estudo da teoria de controle. O capítulo seguinte, por sua vez, apresenta a definição do termo controle e reúne uma revisão de exemplos de aplicações de algumas técnicas de controle de sistemas dinâmicos contínuos (os fluxos). No último capítulo, é estudada a aplicação da teoria de controle em um sistema físico concreto; mais precisamente, a sua aplicação no controle da operação de um importante equipamento de análise de materiais em nano e em microescala: o microscópio de força atômica.

Logo no início do texto, são fornecidos os conceitos de álgebra linear e de análise matemática nos espaços euclidianos que serão amplamente empregados no restante do trabalho. Na sequência, inicia-se o estudo dos sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem lineares e não lineares, muitos dos quais definem sistemas denominados fluxos; é nessa parte que são apresentados os mais importantes teoremas matemáticos aqui presentes. Assim, são estudados os conceitos de estabilidade de equilíbrios de um fluxo, conjuntos atratores, ciclos limites, equilíbrios hiperbólicos e muitos outros; também os sistemas caóticos são então apresentados.

Quanto aos teoremas que seguem essa exposição preliminar e conceitual, são dignos de destaque os teoremas: de Poincaré-Bendixson, de Hartman-Grobman para fluxos, da variedade central, da bifurcação de Hopf. Esses resultados são fundamentais ao entendimento do conjunto do texto e perpassam (ou, ao menos, tangenciam) importantes tópicos da área de sistemas dinâmicos, tais como a linearização em torno de pontos de equilíbrio, a estabilidade estrutural de campos de vetores e a teoria de bifurcações.

Em acréscimo a esses vários resultados e métodos matemáticos, ainda no capítulo de fundamentação teórica, são apresentados os “atratores estranhos”, os expoentes de Lyapunov, bem como algumas noções elementares de mecânica clássica. O conceito de atrator estranho irá revelar a complexidade que pode atingir o estudo dos fluxos e exemplificará a essência do fenômeno do caos. Por sua vez, o estudo dos expoentes de Lyapunov permitirá a compreensão de uma

importante técnica de controle de sistemas dinâmicos. Finalmente, a apresentação dos primeiros conceitos físicos relevantes ao presente trabalho fornecerá terminologias, conceitos e resultados que serão úteis em momento posterior.

Uma vez que hajam sido apresentadas algumas importantes ferramentas para o estudo das soluções de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (as quais estão intimamente ligadas aos fluxos), o controle de sistemas dinâmicos será definido e exemplificado. Para isso, no capítulo subsequente à fundamentação teórica, é estabelecida a distinção entre controle via feedback (ou controle em malha fechada) e sem feedback (ou controle em malha aberta). Na sequência, são estudados artigos os quais efetuam a implementação teórica de estratégias de controle em alguns modelos matemáticos. Os modelos então explorados descrevem sistemas físicos bastante simplistas ou são modelos deliberadamente muito simplificados (modelos de brinquedo).

No capítulo que encerra este trabalho, é estudada uma importante aplicação dos métodos de controle em microscopia. Essencialmente, são descritos os métodos e os sistemas de controle empregados na operação de um microscópio de força atômica (AFM). Os mecanismos de controle de tal microscópio são introduzidos e classificados de acordo com o tipo de controle envolvido, isto é, por feedback ou sem feedback. Nesse contexto, são estudadas as maneiras pelas quais pode ser realizado o controle dos comportamentos não lineares (histerese ou fluência) apresentados por atuadores piezoelétricos presentes em um AFM. Também é visto que o princípio de funcionamento do AFM está direta e profundamente atrelado ao controle via feedback.

Resta, agora, fornecer uma contextualização histórica para o estudo qualitativo de equações diferenciais ordinárias. A teoria moderna de sistemas dinâmicos teve o seu desenvolvimento iniciado por Henri Poincaré (1854-1912), francês que foi prolífico matemático e filósofo das ciências. A matemática produzida por Poincaré alterou profundamente a maneira pela qual estudava-se os sistemas de equações diferenciais ordinárias e os sistemas dinâmicos que essas definem. Para esclarecer como isso ocorreu, é preciso dizer que quando o uso de equações diferenciais para a descrição de fenômenos físicos teve início com os trabalhos de Isaac Newton (1643-1727), o principal objetivo era a determinação das soluções analíticas e exatas dessas equações.

Uma vez iniciado, por ao menos mais dois séculos, o estudo de equações diferenciais ordinárias esteve restrito a um só objetivo: a obtenção de soluções analíticas e exatas. Todavia, os casos não lineares das equações diferenciais ordinárias são aqueles em que a obtenção de soluções nem sempre é possível (em geral, essa abordagem é impossível ou apenas inviável). Foi justamente para lidar com modelos matemáticos não lineares que Poincaré então introduziu uma nova estratégia: o emprego de métodos geométricos e topológicos no estudo de equações diferenciais ordinárias.

O objetivo do trabalho inicial de Poincaré foi investigar equações diferenciais ordinárias advindas da mecânica celeste, ou seja, do estudo dos astros e, mais precisamente, dos seus

movimentos. Todavia, como existem muitos sistemas físicos, químicos e biológicos passíveis de serem modelados por equações diferenciais ordinárias, inúmeros campos do conhecimento beneficiaram-se dessa nova abordagem. Mais ainda, o próprio uso de procedimentos de natureza geométrica e topológica na investigação de modelos matemáticos tornou-se um campo de grande interesse.

Essa nova abordagem no estudo dos sistemas dinâmicos foi bastante promissora e contribuiu para o estabelecimento de conexões com outros campos também recentes. Esse é o caso da interação entre as áreas de sistemas dinâmicos e os campos da topologia diferencial e da topologia algébrica. Exemplos dessa interação são vistos nos trabalhos, em sistemas dinâmicos, dos matemáticos Stephen Smale (estadunidense) e Maurício Peixoto (brasileiro); trabalhos nos quais ferramentas da topologia diferencial são amplamente empregadas. Nesse contexto histórico, cabe ainda mencionar o desenvolvimento da teoria KAM pelos matemáticos Kolmogorov, Arnold e Moser, a qual está ligada a um importante tópico da física: o estudo dos sistemas hamiltonianos.

Empregando algumas dentre as importantes técnicas da teoria moderna de sistemas dinâmicos desenvolvidas no último século, é possível propor e estudar ferramentas teóricas de controle e aplicá-las a alguns tipos de sistemas. Em particular, essa implementação pode ser feita em sistemas de equações diferenciais ordinárias, as quais modelem problemas concretos ou teóricos, com ou sem interpretação física. Porém, antes de descrever os métodos teóricos de controle aplicados a modelos matemáticos, é importante introduzir o conceito de controle.

Controle consiste em fazer um sistema ou um processo físico seguir uma trajetória ou assumir um estado pretendido, previamente determinado. Dessarte, a teoria de controle adquire amplo emprego, afinal, é implementada em processos como: o escoamento de um fluido no interior de uma tubulação, o voo de uma aeronave, a extração de petróleo em alto mar, os lançamentos de projéteis. Nesse sentido, o controle é alcançado por meio de dispositivos (lemes, propulsores, bombas) que atuam sobre variáveis (tais como pressão, velocidade, temperatura) que são então manipuladas e, por fim, controladas.

Uma vez que um dado sistema físico esteja equacionado, é possível investigar o modelo matemático associado e implementar estratégias de controle nesse modelo. Isso pode ser feito por meio da introdução, no sistema de interesse, de equilíbrios ou de órbitas estáveis e por intermédio da estabilização de equilíbrios pré-existentes. Essas estratégias são empregadas, particularmente, na técnica de controle denominada (na teoria clássica dos sistemas de controle) controle via feedback (ou controle por retroalimentação). Em outras situações, como é o caso do controle sem feedback, é possível aplicar, por exemplo, o estudo dos expoentes de Lyapunov. São essas as técnicas que serão mais frequentemente abordadas no texto subsequente.





---

# Fundamentação Teórica

---

Nesse capítulo, serão apresentados alguns rudimentos de tópicos da análise real e da área de sistemas dinâmicos selecionados com o propósito de possibilitar a compreensão da teoria de controle e a investigação de algumas de suas aplicações. Na sequência, o controle de sistemas descritos por equações diferenciais ordinárias será abordado sem a pretensão de exaurir a temática; ao contrário, as exposições serão bastante sintéticas e serão fornecidas referências para que o leitor interessado possa aprofundar seus conhecimentos sobre o assunto.

Levando em consideração que os leitores desse texto possam apresentar as mais diversas formações acadêmicas dentro da área das ciências exatas, objetivou-se: primar por uma linguagem clara, exemplificar e ilustrar os conceitos expostos sem pecar pelo excesso ou pela falta, realizar analogias que facilitem a apreensão das ideias mais abstratas. O autor espera, sinceramente, que tais pretensões hajam sido alcançadas.

Por fim, como é necessário durante a escrita de qualquer texto, alguns conceitos serão assumidos como de conhecimento prévio dos leitores. A escrita desse texto foi planejada de modo que, havendo cursado cálculo para funções de várias variáveis e um primeiro curso de álgebra linear, o leitor não venha a apresentar dificuldades durante a sua leitura.

## 1.1 Preliminares

### 1.1.1 Análise Real

Alguns dos conteúdos matemáticos essenciais ao estudo de sistemas dinâmicos (em particular, aqueles que são comumente vistos como parte de um curso de análise no  $\mathbb{R}^n$ ) serão listados, sem demonstração, na presente subsecção. O intuito, nesse momento, é introduzir algumas noções bastante elementares e primazes ao estudo de sistemas modelados por equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Na sequência, os homeomorfismos, as derivadas, os difeomorfismos serão definidos. Junta-

mente à apresentação dessas definições, explicações sucintas e analogias serão delineadas visando ao melhor entendimento da teoria e de sua posterior aplicação. Uma interessante referência para o estudo desses conceitos é [7].

**Definição 1.1 (Relações de Equivalência)** *Sejam  $a, b$  e  $c$  elementos de um mesmo conjunto. Uma relação de equivalência, indicada pelo símbolo  $\sim$ , é uma relação binária (isto é, entre dois elementos) que apresenta as seguintes propriedades:*

1. reflexiva, pela qual,  $a \sim a$ ;
2. simétrica, segundo a qual, se  $a \sim b$ , então  $b \sim a$ ;
3. transitiva, conforme a qual, se  $a \sim b$  e se  $b \sim c$ , então  $a \sim c$ .

O sinal de igualdade inserido entre duas expressões numéricas indica uma relação de equivalência. Os isomorfismos lineares podem ser usados para, por exemplo, definir uma relação de equivalência no conjunto dos espaço vetoriais, pela qual, espaços vetoriais isomorfos, são equivalentes. Esses exemplos esclarecem como relações de equivalência são úteis por permitirem a criação de subconjuntos (classes de equivalência) cujos elementos sejam profundamente similares (equivalentes).

**Definição 1.2 (Métricas)** *Dado um conjunto  $A$ , uma função  $d$  que assume valores reais e que esteja definida sobre  $A \times A$  é denominada uma métrica para  $A$  se satisfaz as relações abaixo para  $x, y, z \in A$  quaisquer.*

1.  $d[x, y] \geq 0$  e  $d[x, y] = 0$  se, e somente, se  $x = y$ .
2.  $d[x, y] = d[y, x]$ .
3.  $d[x, z] \leq d[x, y] + d[y, z]$  (desigualdade triangular).

Nas condições da definição anterior, diz-se que o par  $(A, d)$  é um espaço métrico. Em geral,  $A$  pode ser um conjunto bastante abstrato, mas, mesmo assim,  $d$  permite referir-se à distância entre elementos de um tal conjunto. Todavia, o restante desse texto pode ser lido ao considerar-se, exclusivamente, a métrica euclidiana, isto é,  $(\mathbb{R}^n, d)$ , em que  $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $d[(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)] = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ . Portanto, fixe-se, desde já, essa métrica.

**Definição 1.3** *A bola aberta de  $\mathbb{R}^n$  centrada em  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e de raio  $r \in \mathbb{R}$ , denotada por  $B(x_0, r)$ , é o subconjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d[x, x_0] < r\}$ .*

Alguns termos oriundos da topologia os quais serão frequentemente empregados no restante do texto estão definidos a seguir.

**Definição 1.4 (Conjuntos Abertos, Fechados, Limitados, Compactos)** *Por um lado, o conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é denominado aberto em  $\mathbb{R}^n$  (ou, simplesmente, aberto) se, em qualquer ponto  $x \in A$ , for possível centrar alguma bola aberta  $B(x, r)$ , de maneira que  $B(x, r) \subset A$ . Por outro lado, um conjunto  $B \subset \mathbb{R}^n$  é dito ser fechado em  $\mathbb{R}^n$  (ou, simplesmente, fechado) se o seu complementar em  $\mathbb{R}^n$ , denotado por  $B^C$ , é aberto. Além disso,  $C \subset \mathbb{R}^n$  é limitado se existe  $r' > 0$  tal que  $C \subset B(\vec{0}, r')$  e  $D \subset \mathbb{R}^n$  é compacto se é, simultaneamente, fechado e limitado.*

Um exemplo de subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  aberto é o conjunto  $A = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ ; afinal, dado um ponto qualquer  $x \in A$ , vê-se facilmente que  $B(x, \|x\|) \subset A$ . Além disso,  $A^C = \{(0, 0)\}$  é fechado porque é complementar de aberto. De modo inteiramente análogo, nota-se que  $\mathbb{R}^n - \{x_0\}$  (sendo  $x_0$  um ponto qualquer de  $\mathbb{R}^n$ ) é aberto e que qualquer subconjunto unitário de  $\mathbb{R}^n$  é fechado. Valem ainda duas importantes propriedades: toda união de conjuntos abertos é aberta e a intersecção finita de conjuntos abertos é aberta. Uma consequência dessa segunda propriedade é que  $\mathbb{R}^n$  menos um conjunto finito é aberto e, portanto, todo subconjunto finito de  $\mathbb{R}^n$  é fechado.

**Definição 1.5 (Conjuntos Abertos Relativos e Fechados Relativos)** *O conjunto  $B \subset \mathbb{R}^n$  é aberto relativamente a  $A \subset \mathbb{R}^n$  (ou, simplesmente, aberto em  $A \subset \mathbb{R}^n$ ) se existir  $C$  aberto em  $\mathbb{R}^n$  de modo que  $C \cap A = B$ . O conjunto  $B \subset \mathbb{R}^n$  é fechado relativamente a  $A \subset \mathbb{R}^n$  (ou, simplesmente, fechado em  $A \subset \mathbb{R}^n$ ) se existir  $D$  fechado em  $\mathbb{R}^n$  de modo que  $D \cap A = B$ .*

**Definição 1.6 (Conjuntos Denso e Denso Relativo)**  *$A \subset \mathbb{R}^n$  é chamado denso se, para todo  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $A \cap U \neq \emptyset$ . Além disso,  $A \subset \mathbb{R}^n$  é designado denso relativamente a  $V \subset \mathbb{R}^n$  (ou denso em  $V \subset \mathbb{R}^n$ ) se, para todo  $U \subset V$  e aberto em  $V$ ,  $A \cap U \neq \emptyset$ .*

O subconjunto dos número racionais  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ , assim como o seu complementar, o conjunto dos números irracionais, é um exemplo de conjunto denso. Isso é consequência imediata do seguinte fato: toda bola aberta de  $\mathbb{R}$  contém números racionais e irracionais.

**Definição 1.7 (Aplicações contínuas)** *Uma aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita ser contínua no ponto  $x_0$  se, para todo  $\epsilon > 0$ , existir  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que  $F(B(x_0, \delta(\epsilon))) \subset B(F(x_0), \epsilon)$ .*

A noção de continuidade acima apresentada é simplesmente uma generalização do conceito de continuidade visto em cálculo de funções com várias variáveis. Desse modo, apesar de haver sido dada uma aplicação entre espaços euclidianos e de haver sido anteriormente fixada a métrica euclidiana, enfatiza-se que a definição de aplicação contínua anterior é válida para um espaço métrico qualquer. Além disso, afirmar ser uma aplicação  $F$  contínua equivale a dizer que  $F$  é

contínua em todos os pontos de seu domínio e  $F$  ser contínua equivale à seguinte proposição: a pré-imagem, por  $F$ , de todo aberto de  $Im\{F\}$  (a imagem de  $F$ ) é aberta.

**Definição 1.8 (Homeomorfismos)**  $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow F(U) \subset \mathbb{R}^n$  é um homeomorfismo se possui inversa  $F^{-1}: F(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$  (ou seja, se é bijetiva), se é contínua e se sua inversa é também contínua. Assim, os conjuntos  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  são designados homeomorfos se existe uma aplicação  $G: A \rightarrow B$  que é um homeomorfismo.

Os homeomorfismos são relevantes por vários motivos. Um desses é a relação de equivalência topológica que um homeomorfismo estabelece entre dois objetos. Isso significa, resumidamente, que homeomorfismos preservam importantes propriedades topológicas detidas por subconjuntos de espaços métricos, propriedades estas que são então denominadas invariantes topológicos. Por exemplo, se dois conjuntos são homeomorfos e se um deles for aberto, o outro também será. Há, ainda, muitos outros invariantes topológicos, tais como a compacidade; porém, mais adiante, os invariantes que serão introduzidos e explorados em abundância são os invariantes dinâmicos.

Como os homeomorfismos assumem grande importância em muitos contextos, serão dados, agora, alguns exemplos de funções que são homeomorfismos e de conjuntos que são homeomorfos. A função identidade definida em um espaço métrico qualquer é um exemplo trivial de homeomorfismo. As translações, as reflexões e as rotações em  $\mathbb{R}^n$  são homeomorfismos. Toda homotetia (isto é, toda função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para algum  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  é da forma  $f(x) = x_0 + \lambda(x - x_0)$ , com  $\lambda \neq 0$  sendo um número real fixado) é um homeomorfismo. Duas bolas abertas quaisquer de  $\mathbb{R}^n$  podem ser relacionadas por uma homotetia seguida de uma translação; como composição de homeomorfismos é homeomorfismo, duas bolas abertas quaisquer de  $\mathbb{R}^n$  são homeomorfas.

Será exibida, agora, uma função contínua e bijetiva cuja inversa é descontínua (exemplo o qual justifica a exigência de continuidade da função inversa na definição de homeomorfismo). Para isso, considere-se a aplicação  $g: [0, 1) \subset \mathbb{R} \rightarrow g([0, 1)) \subset \mathbb{R}^2$  com a seguinte lei de formação  $g(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ . Não é difícil verificar a continuidade e a bijetiva de  $g$ . Entretanto, a aplicação inversa  $g^{-1}$  é descontínua no ponto  $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ , de modo que  $g$  não é um homeomorfismo, apesar de ser contínua e bijetiva. Um fato mais geral que esse e bastante intuitivo é o seguinte: não há subconjunto de  $\mathbb{R}$  homeomorfo a uma circunferência.

Nesse momento, é imprescindível dizer que todos os conceitos topológicos acima colocados estendem-se imediatamente a espaços métricos quaisquer. Mais adiante, inclusive, essa generalização será utilizada. Portanto, em lugar de definir subconjuntos abertos em  $\mathbb{R}^n$  ou homeomorfismos entre um subconjunto de  $\mathbb{R}^m$  e um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , é possível escrever as mesmas definições considerando-se subconjuntos de um espaço métrico qualquer. Isso dito, não serão feitos novos comentários a esse respeito se e quando forem escritas sentenças como “ $B$  é espaço métrico e  $A \subset B$  é aberto em  $B$ ”.

As aplicações aqui estudadas serão todas, ao menos, de classe  $C^1$ , o que significa que todas

as derivadas parciais de suas funções componentes existem e são contínuas. No caso em que todas as funções componentes possuam derivadas parciais de ordem  $k$  contínuas, diz-se que a aplicação é de classe  $C^k$ . Se tal propriedade ocorrer para todo  $k$  natural, a aplicação é dita ser de classe  $C^\infty$ .

**Definição 1.9 (A Derivada)** *Seja  $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $U$  aberto, tal que  $F$  de classe  $C^1$ . Nesse caso, a derivada da aplicação  $F$  calculada no ponto  $p \in U$ , denotada por  $DF_p$ , é a transformação linear  $DF_p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  a qual associa, a cada vetor  $X \in \mathbb{R}^m$ , um vetor  $Y \in \mathbb{R}^n$  e que satisfaz a seguinte relação:  $DF_p(X) = JF(p)X = Y$ , onde  $JF(p)$  é a matriz jacobiana de  $F$  calculada no ponto  $p$ .*

**Definição 1.10 (Difeomorfismos)** *Sendo  $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow F(U) \subset \mathbb{R}^n$ , com  $U$  aberto, diz-se ser  $F$  um  $C^k$ -difeomorfismo se  $F$  for um homeomorfismo e se  $F, F^{-1}$  forem de classe  $C^k$ .*

Pelo Teorema da Função Inversa, havendo sido atestado que  $F: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow F(U) \subset \mathbb{R}^n$ , com  $U$  aberto, é um homeomorfismo e é de classe  $C^k$ , para que  $F$  seja um difeomorfismo, basta então verificar se  $DF_p$  é injetiva para todo  $p \in U$ . Além disso, vale que  $D(F^{-1})_{F(p)} = (DF_p)^{-1}$ . Por exemplo, a função  $f(x) = x^3$  definida em  $\mathbb{R}$  é um homeomorfismo pois é contínua, é bijetiva e possui inversa contínua. Todavia, a derivada de  $f$ , a transformação linear  $Df_p(x) = 3p^2x$ , com  $p \in D\{f\}$ , a qual associa, a cada vetor  $x \in \mathbb{R}$ , o vetor  $2px \in \mathbb{R}$ , é injetiva para todo  $p \in \mathbb{R}^*$ , mas não é injetiva em  $0 \in \mathbb{R}$ , pois  $Df_0$  é identicamente nula. Assim,  $f$  não é difeomorfismo, mas a restrição de  $f$  a  $\mathbb{R}^*$  aqui denotada por  $\tilde{f}: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  é um exemplo de difeomorfismo.

**Definição 1.11 (Variedades Diferenciáveis)** *Considere-se um conjunto  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  tal que, para qualquer  $p \in \mathcal{M}$  e para algum aberto  $V_p$  de  $\mathbb{R}^n$  contendo  $p$ , exista um homeomorfismo de classe  $C^k$   $F_p: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V_p \cap \mathcal{M}$ , com  $U$  aberto, com derivada injetiva em todos os pontos de seu domínio. Nesse caso:  $\mathcal{M}$  é denominado uma variedade diferenciável de classe  $C^k$  e de dimensão  $n$ ;  $\mathcal{M}$  pode ser denotada ainda por  $\mathcal{M}^n$ .*

É fácil intuir que, nas condições da definição anterior,  $m \geq n$ , pois, do contrário,  $F$  sequer seria um homeomorfismo. Há, ainda, uma outra importante observação relativa a essa definição: essa é uma maneira bastante simplista de se definir o termo variedade diferenciável e abrange somente o caso das variedades ditas mergulhadas no espaço euclidiano. Definições mais gerais podem ser encontradas em outras referências, contudo, a definição aqui apresentada é suficiente para o cumprimento dos propósitos do presente texto.

### 1.1.2 Álgebra Linear

A fundamentação matemática que se segue (álgebra linear, equações diferenciais e sistemas dinâmicos), salvo alguns resultados que serão referenciados de maneira particular, foram extraí-

dos de [5] ou de [12], sendo que, da última, retirou-se, sobretudo, os resultados que versam sobre a estabilidade de equilíbrios. Nestas referências, os leitores encontrarão maiores detalhamentos.

Em todo o texto subsequente, vários conceitos de álgebra linear serão empregados. Como o intuito é tornar o texto acessível a leitores que detenham apenas os conhecimentos transmitidos em um primeiro curso dessa disciplina, agora serão inseridos alguns resultados necessários à leitura das próximas secções e que só são abordados em cursos mais avançados de álgebra linear. Porém, a fim de simplificar o texto, será útil restringir agora esse estudo à álgebra dos operadores lineares invertíveis e com autovalores complexos todos distintos entre si (os quais são definidos na sequência).

**Definição 1.12 (Polinômio Característico)** *O polinômio característico  $p_A$  associado a uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é dado por  $p_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{I}_{n \times n} - A)$ , sendo as suas raízes denominadas autovalores da matriz  $A$ .*

A restrição da álgebra linear aqui abordada a uma compreensão dos operadores acima discriminados é perfeitamente justificável. Isso ocorre porque, no conjunto de todos os operadores lineares, predominam aqueles que são inversíveis e que possuem autovalores todos distintos. Tal fato é formalizado pelo próximo teorema e, para melhor compreendê-lo, repare-se que existe um isomorfismo linear natural ente o  $\mathbb{R}^{n \times n}$  e o conjunto dos operadores lineares com domínio e contradomínio dados por  $\mathbb{R}^n$ . Assim é possível enxergar  $\mathbb{R}^{n \times n}$  como conjunto de operadores lineares e, por conseguinte, muitas vezes não há necessidade de fazer distinção entre um operador linear e sua matriz associada. Denote-se, agora, por  $\Sigma(A)$  o conjunto dos autovalores da matriz  $A$ .

**Teorema 1.13 (Um Conjunto Genérico)** *O subconjunto de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  formado pelas matrizes  $A$  tais que  $\det(A) \neq 0$  e tais que  $\Sigma(A)$  possui  $n$  elementos diferentes entre si contém um aberto em  $\mathbb{R}^{n \times n}$  o qual é denso.*

Uma segunda restrição ainda é pertinente: nas aplicações posteriores, serão considerados, quase exclusivamente, os operadores pertencentes a  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ . A teoria referente a esses operadores será suficiente em quase todos os casos aqui tratados. Também poderá ser útil, em algumas ocasiões, ter em mente os operadores de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Contudo, o entendimento desses casos é consequência quase imediata da compreensão dos resultados relativos aos operadores definidos sobre espaços de dimensão igual a 3.

**Definição 1.14 (Forma Canônica de Jordan)** *Se  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  é uma matriz da forma*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix}$$

ou da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

onde  $\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , diz-se que  $A$  está na Forma Canônica de Jordan.

**Teorema 1.15 (Representação Canônica de uma Matriz)** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  uma matriz tal que  $\det(A) \neq 0$  e tal que  $\Sigma(A)$  possui 3 elementos distintos. Nessa situação, existe uma matriz  $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  satisfazendo  $\det(T) \neq 0$  de modo que  $T^{-1}AT$  esteja na Forma Canônica de Jordan.*

É importante dizer, em complemento ao teorema anterior, que as entradas da matriz  $T^{-1}AT$  (expressão, na Forma Canônica de Jordan, de uma matriz qualquer  $A$  que seja invertível e que possua apenas autovalores distintos) estão diretamente relacionadas aos autovalores de  $A$ . Mais precisamente, nos termos da Definição 1.14,  $\lambda, \mu, \nu$  ou  $\lambda, \alpha \pm i\beta$  são os autovalores de  $A$ .

Para não deixar lacunas: matrizes pertencentes a  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  e com autovalores todos distintos entre si estão na Forma Canônica de Jordan se são da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

ou se são da forma

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Aqui, as entradas das matrizes de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  que se encontram na Forma Canônica de Jordan também estão vinculadas aos autovalores da matriz original da mesma maneira que no caso de dimensão  $3 \times 3$ .

Uma vez que se saiba calcular os autovalores de uma matriz (ou, equivalentemente, do operador a ela associado), é possível definir os autoespaços generalizados. Há uma justificativa para essa nomenclatura, isto é, para o emprego do termo “generalizados”. Normalmente, os autoespaços são definidos em associação a um autovalor necessariamente real. Aqui, porém, será preciso considerar autoespaços em um sentido generalizado que permite a sua associação, por exemplo, com autovalores complexos. Para tanto, será apresentado agora o conceito de polinômio irredutível: um polinômio é irredutível se possui grau 1 ou se não pode ser reescrito como produto de polinômios com graus menores e com coeficientes todos reais.

**Definição 1.16 (Autoespaços Generalizados)** *Seja  $\mathcal{O}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um operador linear representado pela matriz  $A$  e seja  $p_A(\lambda) = [p_1(\lambda)]^{s_1} \dots [p_j(\lambda)]^{s_j}$ , em que cada polinômio  $[p_i(\lambda)]^{s_i}$ , para  $1 \leq i \leq j$ , é irredutível. Sendo  $\lambda^*$  uma raiz de  $p_i(\lambda)$ , o autoespaço generalizado de  $\mathcal{O}$  associado a  $\lambda^*$  é o conjunto formado por todos os vetores  $u \in \mathbb{R}^n$  tais que, para algum  $k \in \mathbb{N}$ ,  $[p_i(A)]^k u = \vec{0}$ . Ainda,*

se  $E^s$ ,  $E^u$ ,  $E^c$  são os conjuntos de todos os vetores pertencentes a algum autoespaço generalizado de  $\mathcal{O}$  associado a autovalor de  $A$  com parte real, respectivamente, negativa, positiva e nula, esses conjuntos serão denominados, também nessa ordem, autoespaço generalizado estável, autoespaço generalizado instável e autoespaço generalizado central.

### 1.1.3 Equações Diferenciais Ordinárias, Fluxos e Sistemas Dinâmicos

**Definição 1.17 (Fluxos)** *Um fluxo de classe  $C^k$  em  $\mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  tal que  $\phi(t, X) = \phi_t(X)$ , com  $X \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$  (sendo, fisicamente, a variável  $t$  o tempo), satisfazendo as seguintes condições:*

1.  $\phi_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a identidade, ou seja,  $\phi_0(X) = X$ ;
2. dadas  $\phi_a$  e  $\phi_b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , vale que  $\phi_a \circ \phi_b = \phi_{a+b}$ .

**Definição 1.18 (Sistemas Autônomos)** *Um sistema de equações diferenciais ordinárias autônomo, de primeira ordem, de classe  $C^k$  e com “n” componentes consiste em um sistema com “n” equações do tipo  $x'_l(t) = f_l(x_1(t), \dots, x_l(t), \dots, x_n(t))$ , em que  $f_l$  é de classe  $C^k$ , para todo  $1 \leq l \leq n$ .*

Tais sistemas serão denominados apenas “sistemas de equações diferenciais ordinárias”, pois somente o caso autônomo será diretamente abordado neste capítulo. Um sistema desse tipo pode ser representado simplesmente por  $X'(t) = F(X(t))$ , onde

$$F(x_1(t), \dots, x_n(t)) = (f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)))$$

e  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . De maneira ainda mais sintética, é possível empregar a seguinte notação a fim de representar um sistema definido como acima:  $X' = F(X)$ . Além disso, se for dado  $X' = F(X)$  respeitando à Definição 1.18 e se for fornecido um ponto  $X_0 = X(0)$  (tal ponto é designado uma condição inicial), existirá uma única solução de tal sistema vinculada a esse ponto. Esse fato é apresentado pelo teorema que se segue.

**Teorema 1.19 (Teorema de Existência e de Unicidade)** *Sejam  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$  e  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  uma condição inicial. Nesse caso, existe intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  contendo 0 e uma única curva  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de modo que  $\varphi(0) = X_0$  e de maneira que  $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$ , para todo  $t \in I$ .*

Agora, é importante comentar que muitos sistemas de equações diferenciais ordinárias autônomos, de primeira ordem, pertencente à classe de diferenciabilidade  $C^\infty$  e com “n” componentes encontram-se vinculados a um fluxo em  $\mathbb{R}^n$ . De fato, dada  $X' = F(X)$  e uma condição inicial qualquer  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ , a aplicação  $\phi(t, X_0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  verificando  $\phi(0, X_0) = X_0$  e



$\phi'(t, X_0) = F(\phi(t, X_0))$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , é um fluxo. Contudo, a solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias não está, necessariamente, definida para qualquer instante de tempo e, por isso, nem sempre é um fluxo.

Feita a ressalva anterior, cabe então pontuar que os objetivos desse trabalho restringem-se à compreensão de sistemas físicos determinísticos, cujos estados, por razões intrínsecas, estão bem definidos em todos os instantes de tempo. Por esse motivo, doravante, quando for feita referência a um sistema de equações diferenciais atendendo às condições já estabelecidas, será usado que há um fluxo associado a um sistema desse tipo, sem que novos comentários sejam feitos.

**Definição 1.20 (Classificação de Órbitas)** *Dado um sistema  $X' = F(X)$ , diz-se que  $X_0$  é ponto de equilíbrio ou ponto fixo se, por um lado,  $F(X_0) = \vec{0}$ . Se, por outro lado, o fluxo  $\phi$  associado, quando restrito a  $\mathbb{R} \times \{X_0\}$  (restrição a qual pode ser denotada por  $\phi_t(X_0)$ ), for uma aplicação periódica,  $X_0$  é dito ser ponto periódico.*

Além dos nomes “ponto de equilíbrio” e “ponto periódico”, alguns outros termos são úteis quando do estudo dos fluxos. Por exemplo, o conjunto orientado dos pontos atingidos, em algum instante do tempo, por uma solução que passa através de  $X_0$  é denominado a órbita de  $X_0$  (repare o leitor que existem somente duas orientações possíveis para as órbitas, uma associada ao avanço do tempo e a outra ligada ao seu retrocesso). Nesse sentido, ciclos (também designados órbitas fechadas) são órbitas que intersectam algum ponto periódico. Ademais, é preciso apresentar a definição de conjuntos  $\alpha$ -limites,  $\omega$ -limites e invariantes. Antes disso, considere-se como condições para as duas próximas definições:  $X \in \mathbb{R}^m$  e  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias tal que, para algum  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(t) = X$ .

**Definição 1.21 (Conjunto  $\alpha$ -limite)** *O conjunto  $\alpha$ -limite de  $X$ , denotado por  $\alpha(X)$ , é o conjunto formado por todos os pontos  $Y \in \mathbb{R}^m$  para os quais existe uma sequência decrescente e ilimitada de valores  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  de maneira que  $\lim_{t_n \rightarrow -\infty} \varphi(t_n) = Y$ .*

**Definição 1.22 (Conjunto  $\omega$ -limite)** *O conjunto  $\omega$ -limite de  $X$ , denotado por  $\omega(X)$ , é o conjunto formado por todos os pontos  $Y \in \mathbb{R}^m$  para os quais existe uma sequência crescente e ilimitada de valores  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  de maneira que  $\lim_{t_n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = Y$ .*

Considerem-se o sistema de equações diferenciais  $(x'(t), y'(t)) = (x(t), -y(t))$  e a condição inicial  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . A solução desse problema é dada por  $\varphi(t) = (x_0 e^t, y_0 e^{-t})$  e, para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha((x_0, 0)) = (0, 0)$ , pois, sendo  $y_0 = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = (0, 0)$ ; similarmente, para todo  $y_0 \in \mathbb{R}$ , ocorre que  $\omega((0, y_0)) = (0, 0)$ , afinal,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = (0, 0)$ , sempre que  $x_0 = 0$ . Esse exemplo mostra que um mesmo conjunto pode ser  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite de pontos distintos. Além

disso, é importante mencionar que um ponto pode apresentar um conjunto limite formado por infinitos elementos (exemplos desse caso serão vistos mais adiante).

No intuito de apresentar a próxima definição, será preciso, primeiro, considerar  $\phi$  um fluxo associado ao sistema  $X' = F(X)$  e  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.23 (Invariâncias Positiva, Negativa e Conjunto Invariante)** *Por um lado,  $A$  é dito ser um conjunto positivamente invariante pelo fluxo  $\phi$  se  $\phi_t(A) \subset A$  para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Por outro lado,  $A$  é denominado um conjunto negativamente invariante pelo fluxo  $\phi$  se  $\phi_t(A) \subset A$  para todo  $t \in \mathbb{R}_-$ . Finalmente,  $A$  é um conjunto invariante pelo fluxo  $\phi$  se  $A$  é tanto positiva quanto negativamente invariante por  $\phi$ , ou seja, se  $\phi_t(A) \subset A$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

Repare-se que qualquer intervalo  $I$  contendo a origem é positivamente invariante pelo fluxo unidimensional  $\phi_t^-(x_0) = x_0 e^{-t}$ , pois  $\phi_{\mathbb{R}_+}^-(I) \subset I$ , e é negativamente invariante pelo fluxo  $\phi_t^+(x_0) = x_0 e^t$ , porque  $\phi_{\mathbb{R}_-}^+(I) \subset I$ . Além disso, o complementar de um conjunto positivamente invariante por um fluxo dado é negativamente invariante pelo mesmo fluxo, sendo que a recíproca também é válida. Note-se também que, para qualquer fluxo  $\phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e para qualquer  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\phi_t(A) \subset \phi_{\mathbb{R}}(A)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , de modo que um conjunto da forma  $\phi_{\mathbb{R}}(A)$  é sempre invariante por  $\phi$ . Em particular, a imagem da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias associada a um fluxo  $\phi$  a qual satisfaz uma condição inicial  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ , que é da forma  $\phi_{\mathbb{R}}(X_0)$  é um conjunto invariante.

**Teorema 1.24** *Se  $A$  é um conjunto  $\alpha$ -limite ou  $\omega$ -limite de algum  $X \in \mathbb{R}^n$ , quando considerado um sistema  $X' = F(X)$  com um fluxo  $\phi$  associado, então  $A$  é um conjunto invariante por  $\phi$ .*

Continuando a listagem de resultados matemáticos, deve-se considerar o teorema de Hartman–Grobman para fluxos, o qual é muito importante no contexto do estudo da teoria de controle. Como esse teorema versa, exclusivamente, a respeito de sistemas condicionados a algum critério de hiperbolicidade, a seguir, uma noção bastante simplória acerca do conceito de hiperbolicidade relacionado a fluxos está delineada. Na sequência, define-se o conceito de conjugação, do qual depende o enunciado do referido teorema.

**Definição 1.25 (Sistemas Lineares e Hiperbólicos)** *O fluxo suave associado a  $X' = AX$ , em que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , é denominado hiperbólico se  $\Sigma(A)$  não contém nem números imaginários puros e nem o zero.*

Anteriormente foi feita uma restrição ao estudo de matrizes de um subconjunto aberto e denso de  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  e, conseqüentemente, de seus operadores lineares associados. Semelhantemente, a condição de hiperbolicidade imposta sobre um sistema dinâmico associado a um sistema linear tal qual acima estipulado é uma restrição adicional sobre a matriz associada  $A$ . Nessa situação, chama-se  $A$  de matriz hiperbólica.

**Definição 1.26 (Equilíbrios Hiperbólicos)** *Um equilíbrio  $X_0$  do fluxo associado a  $X' = F(X)$  é denominado hiperbólico se  $\Sigma(JF(X_0))$  não contém nem números imaginários puros e nem o zero.*

**Definição 1.27 (Conjugação Topológica Global - Caso Contínuo)** *Considere-se  $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\bar{\phi}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dois fluxos e suponha-se que exista  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um homeomorfismo tal que  $\phi_t \circ h = h \circ \bar{\phi}_t$ . Então,  $h$  é denominada uma conjugação topológica (global) e os fluxos  $\phi, \bar{\phi}$  são ditas ditos conjugados por  $h$ .*

Conjugações topológicas (globais) permitem estabelecer uma relação de equivalência pela qual: dois fluxos são equivalentes se são conjugados topologicamente. Havendo uma relação de equivalência no conjunto de todos os fluxos, é possível criar subconjuntos (ou classes de equivalência) cujos elementos são todos equivalentes (isto é, são conjugados topologicamente) entre si. Tal fato permite estabelecer a noção de invariantes dinâmicos: uma propriedade é um invariante dinâmico se é preservada por conjugações topológicas. Ou seja, se um fluxo manifesta uma propriedade a qual é um invariante dinâmico, todo fluxo de sua classe de equivalência também exibe essa tal propriedade.

Além de definir-se as conjugações topológicas globais, é possível apresentar um outro conceito similar, porém, mais abrangente: a conjugação topológica local. Esse conceito permite estudar, dentre outros sistemas, um fluxo na vizinhança de seus pontos de equilíbrio (a fim de, por exemplo, classificar-se tais pontos). Como ficará claro na definição a seguir, toda conjugação topológica é local; porém, a recíproca não é válida.

**Definição 1.28 (Conjugação Topológica Local - Caso Contínuo)** *Considere-se  $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\bar{\phi}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dois fluxos e suponha-se que exista  $h: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  (com  $U$  e  $V$  abertos) um homeomorfismo tal que  $(\phi_t \circ h)(X) = (h \circ \bar{\phi}_t)(X)$  sempre que  $X, \bar{\phi}_t(X) \in V$ . Então,  $h$  é denominada uma conjugação topológica local e as aplicações  $\phi_t|_U, \bar{\phi}_t|_V$  são ditas localmente conjugadas por  $h$ .*

Na sequência, será vista o Teorema de Hartman-Grobman, no qual se emprega o conceito de conjugação topológica local.

**Teorema 1.29 (Hartman–Grobman para Fluxos)** *Seja  $X_0$  um equilíbrio hiperbólico do fluxo  $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  associado ao sistema  $X' = F(X)$  (onde  $F$  é de classe  $C^1$ ) e seja  $\bar{\phi}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o fluxo vinculado ao sistema  $X' = \overrightarrow{JF}(X_0)X$ . Nessas condições, existem abertos  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  contendo, respectivamente,  $X_0$  e  $\vec{0}$  e existe um homeomorfismo  $h: U \rightarrow V$  o qual é conjugação topológica local entre  $\phi_t|_U$  e  $\bar{\phi}_t|_V$ .*

O teorema acima permite compreender o comportamento de um fluxo nas proximidades de um ponto de equilíbrio hiperbólico. De fato, a menos de uma deformação contínua (um

homeomorfismo), os fluxos  $\phi$  e  $\bar{\phi}$  (dito a linearização de  $\phi$  em  $X_0$ ) são iguais nas vizinhanças, respectivamente, do equilíbrio hiperbólico  $X_0$  e da origem do  $\mathbb{R}^n$ . Logo, o comportamento de um fluxo na vizinhança de um equilíbrio hiperbólico e sua linearização são similares ou, nos termos anteriormente estabelecidos, são dinamicamente equivalentes. Assim, por exemplo, sendo a origem ponto de equilíbrio atrator da linearização do equilíbrio hiperbólico  $X_0$ ,  $X_0$  será ponto atrator.

Para aplicar-se o teorema de Hartman–Grobman no estudo do equilíbrio de um fluxo, observe-se que é necessário um bom entendimento, ao menos, dos fluxos lineares. Desse modo, primeiramente, é importante conhecer as soluções admitidas pelo problema de valor inicial vinculado a um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares cuja matriz esteja na Forma Canônica de Jordan e satisfaça alguns outros critérios mínimos.

Sob a hipótese de hiperbolicidade do teorema de Hartman–Grobman para Fluxos, apenas os casos em que  $JF(X_0) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  possui, como imposição adicional, todos os seus autovalores distintos entre si serão agora melhor detalhados. Todavia, os resultados mais gerais, isto é, aqueles que englobam autovalores repetidos, ficam bem compreendidos, ao menos qualitativamente, após um atento estudo dos sistemas que possuem autovalores todos distintos (isso ficará claro mais adiante).

**Teorema 1.30 (Soluções de Sistemas Lineares e Canônicos)** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  uma matriz associada a um sistema linear hiperbólico  $X' = AX$  e seja  $X_0 \in \mathbb{R}^3$  uma condição inicial escrita como  $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Nesse caso, se  $A$  é dada por*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix},$$

então a solução para o problema de condição inicial acima é

$$X(t) = (x_0 e^{\lambda t}, y_0 e^{\mu t}, z_0 e^{\nu t})$$

e, se  $A$  é dada por

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

então a solução desejada é

$$X(t) = (x_0 e^{\lambda t}, [y_0 \cos(\beta t) + z_0 \sin(\beta t)] e^{\alpha t}, [-y_0 \sin(\beta t) + z_0 \cos(\beta t)] e^{\alpha t}).$$

Em seguida, é importante esclarecer por qual razão é suficiente, do ponto de vista qualitativo, conhecer as soluções de sistemas cujas matrizes estejam na forma canônica. Afinal, uma vez

entendida a dinâmica desses sistemas, os demais sistemas lineares podem ser qualitativamente descritos a partir de sua colocação na Forma Canônica de Jordan. Tudo isso ficará mais claro após a leitura dos próximos teoremas.

**Teorema 1.31 (Operadores Equivalentes)** *Considere-se as matrizes  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , sendo que:  $A$  é hiperbólica e possui todos os autovalores distintos e  $B$  é a expressão de  $A$  na Forma Canônica de Jordan. Sejam, ainda:  $\mathcal{O}_A$  e  $\mathcal{O}_B$  os operadores lineares associados, respectivamente, às matrizes  $A$  e  $B$ . Nesse caso, existe um operador linear inversível  $T$  tal que  $T \circ \mathcal{O}_A = \mathcal{O}_B \circ T$ . Nessas condições,  $T$  é um homeomorfismo e é chamado conjugação topológica entre as aplicações  $\mathcal{O}_A$  e  $\mathcal{O}_B$ .*

O resultado anterior motiva a definição de uma relação de equivalência no conjunto dos operadores hiperbólicos com autovalores todos distintos. Assim, diz-se que tais operadores são equivalentes se possuem a mesma expressão na Forma Canônica de Jordan.

**Teorema 1.32 (Fluxos Lineares Conjugados)** *Considere-se os sistemas hiperbólicos  $X' = AX$  e  $Y' = BY$ , em que  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  possuem o mesmo número de autovalores com parte real negativa. Sejam ainda  $\phi_t$  e  $\bar{\phi}_t$  os fluxos associados, respectivamente, aos sistemas  $X' = AX$  e  $Y' = BY$ . Nessas condições, existe um homeomorfismo  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o qual é conjugação topológica entre  $\phi_t$  e  $\bar{\phi}_t$ , isto é,  $F \circ \bar{\phi}_t = \phi_t \circ F$ .*

Atendidas as condições do teorema anterior e no caso particular em que  $A$  e  $B$  possuem operadores lineares associados que sejam equivalentes,  $F$  é um operador linear. Em geral, contudo,  $F$  não é sequer diferenciável (mesmo no caso linear).

Nesse instante, convém apresentar uma útil classificação para os equilíbrios hiperbólicos. Para tanto, suponha-se que  $X_0$  é equilíbrio hiperbólico do sistema  $X' = F(X)$ . Se  $JF_{X_0}$  possui:

1. somente autovalores com parte real positiva, então  $X_0$  é designado fonte;

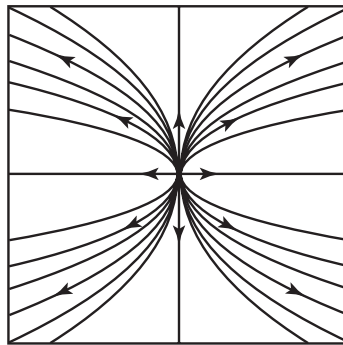


Figura 1.1: Representação de um equilíbrio do tipo fonte extraída de [5].

2. apenas autovalores com parte real negativa, então  $X_0$  é denominado sumidouro;

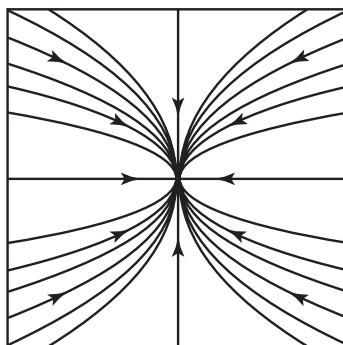


Figura 1.2: Representação de um equilíbrio do tipo sumidouro extraída de [5].

3. algum autovalor com parte real positiva bem como algum autovalor com parte real negativa, então  $X_0$  é equilíbrio do tipo sela.

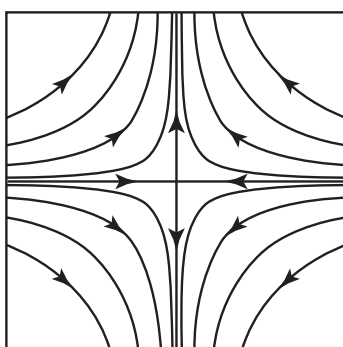


Figura 1.3: Representação de um equilíbrio do tipo sela extraída de [5].

#### 1.1.4 Estabilidade

Na intenção de, posteriormente, tratar-se da estabilização de um sistema, é necessário precisar, primeiro, a ideia de estabilidade. Para atingir esse objetivo, algumas definições são imprescindíveis e serão listadas abaixo. Para tanto, considere-se, daqui em diante, que um equilíbrio  $X_0$  é, simplesmente, um ponto fixo de um sistema  $X' = F(X)$  - onde  $X_0, X \in \mathbb{R}^n$  - o qual possui um fluxo  $\phi$  associado.

**Definição 1.33 (Equilíbrio Estável)** *Um equilíbrio  $X_0$  é denominado estável se, para todo  $\epsilon > 0$ , existir  $\delta(\epsilon)$  tal que:  $\|X - X_0\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|\phi(t, X) - X_0\| < \epsilon$ , para todo  $t > 0$ .*

Caso um equilíbrio não seja estável, esse é simplesmente denominado equilíbrio instável. Assim, por conta da maneira como definiu-se equilíbrio estável na Definição 1.33, órbitas que

atingem as proximidades de um equilíbrio estável não precisam se aproximar indefinidamente desse ponto fixo (ou seja, não precisam tender ao equilíbrio quando o tempo tende ao infinito). De fato, o fluxo linear dado por  $\phi_t(x_0, y_0) = (x_0 \cos(t), y_0 \sin(t))$  possui a origem como ponto de equilíbrio, o qual é evidentemente estável, pois  $\|\phi_t(x_0, y_0) - \vec{0}\| \equiv \|(x_0, y_0)\|$ . No propósito de elucidar essa questão, definições adicionais são requeridas.

**Definição 1.34 (Equilíbrio Atrator Local)** *Um equilíbrio  $X_0$  é designado atrator local se, para algum  $\epsilon > 0$ :  $\|X - X_0\| < \epsilon \Rightarrow \phi(t, X) \rightarrow X_0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .*

**Definição 1.35 (Equilíbrio Assintoticamente Estável)** *Um equilíbrio  $X_0$  é assintoticamente estável se for estável e se for atrator local.*

É interessante pontuar que a definição de estabilidade assintótica requer, simultaneamente, a verificação da estabilidade e da atratividade. Se apenas uma, dentre as duas, for verificada (não importando qual seja), a estabilidade assintótica tal como foi definido não está garantida. Isso significa que há equilíbrios estáveis que não são atratores locais, conforme já enfatizado, e também que há pontos fixos atratores locais e instáveis. Um exemplo de sistema com um equilíbrio atrator local e instável é apresentado em [12], nas páginas 141 e 142, e uma representação diagramática do seu comportamento em torno de tal equilíbrio é mostrada na Figura 1.4.

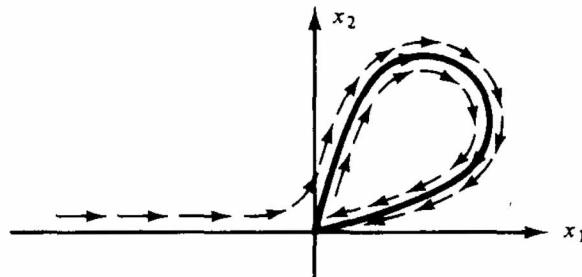


Figura 1.4: Representação de um equilíbrio atrator local e instável extraída de [12].

Um caso particular de equilíbrio atrator que merece menção é o de atrator global de um sistema. Afinal, em certo sentido, essa é a máxima condição de estabilidade que um sistema pode satisfazer.

**Definição 1.36 (Equilíbrio Atrator Global)** *Um equilíbrio  $X_0$  é denominado atrator global se, para todo  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $\phi(t, X) \rightarrow X_0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .*

A dinâmica de um sistema que possui um atrator global é qualitativamente bem compreendida. Todavia, se um atrator local não é atrator global, existe um outro conceito importante a ser considerado: o conceito de bacia de atração.

**Definição 1.37 (Bacia de Atração de um Equilíbrio)** *Se  $X_0$  é equilíbrio atrator local, diz-se que a bacia de atração de  $X_0$  é o conjunto*

$$B(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \phi(t, X) \rightarrow X_0, \text{ quando } t \rightarrow \infty\}.$$

Até aqui, foram dadas as definições de equilíbrios estável, atrator e/ou assintoticamente estável; também foi definido o termo bacia de atração de um equilíbrio atrator. Contudo, esses conceitos podem ser apresentados de uma maneira mais geral, não vinculada apenas a equilíbrios, podendo envolver conjuntos diversos (e, em especial, conjuntos que sejam  $\omega$ -limite). Na sequência, a generalização de algumas dessas definições será realizada.

**Definição 1.38 (Conjunto Atrator)** *Um conjunto  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  é denominado um atrator do fluxo  $\phi$  associado ao sistema  $X' = F(X)$  se:*

1.  $\Lambda$  é compacto e invariante;
2. existe  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e positivamente invariante por  $\phi$  tal que  $\Lambda \subset U$  e tal que

$$\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(U) = \Lambda;$$

3. (transitividade topológica) se são dados  $X_1, X_2 \in \Lambda$  e  $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$  abertos quaisquer satisfazendo  $X_i \in U_i$  para  $i = 1, 2$ , então existem  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  e uma solução  $\varphi(t)$  do sistema  $X' = F(X)$  de modo que  $\varphi(t_j) \in U_j$  para  $j = 1, 2$ .

Os dois primeiros critérios versam sobre a noção de atratividade, contudo, o terceiro não traduz essa ideia de atração. Em realidade, a condição de transitividade topológica presente na definição que aparece acima garante uma noção de irreduzibilidade do sistema. Ou seja, esse critério de transitividade evita que uma união de atratores que, do ponto de vista da dinâmica, possam ser estudados separadamente sejam reunidos sob a designação de um único atrator.

**Definição 1.39 (Bacia de Atração)** *Dado um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  atrator por um fluxo  $\phi$ , denomina-se bacia de atração de  $A$  por  $\phi$  o conjunto*

$$B(A) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \omega(X) \subset A\}.$$

**Definição 1.40** *Se  $A$  é um conjunto atrator por um fluxo  $\phi_t(X)$ , então  $A$  é um conjunto repulsor pelo fluxo  $\phi_{-t}(X)$ .*



### 1.1.5 Critérios de Estabilidade

No intuito de, posteriormente, estabilizar-se sistemas dinâmicos contínuos, suaves e originalmente caóticos, serão listados alguns critérios práticos e úteis na comprovação da estabilidade de órbitas fixas e periódicas.

**Definição 1.41 (Função Definida Positiva)** *Dado  $A \subset \mathbb{R}^n$  e sendo  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , essa função é dita ser definida positiva em  $\mathbb{R}^n - A$  se  $V(X) > 0$  para todo  $X \in \mathbb{R}^n - A$  e se  $V(X) \leq 0$  para todo  $X \in A$ .*

**Definição 1.42 (Função Localmente Definida Positiva)** *Uma função  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  é dita ser localmente definida positiva em torno de  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  se existir  $\epsilon > 0$  tal que  $V(X) > 0$  para todo  $X \in \mathbb{R}^n$  satisfazendo a desigualdade  $0 < \|X - X_0\| < \epsilon$ .*

Considere-se fornecido um sistema  $X' = F(X)$ , com  $F$  de classe  $C^1$  e  $X \in \mathbb{R}^n$ , o qual possui um certo ponto  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  como ponto de equilíbrio ( $F(X_0) = \vec{0}$ ) e um fluxo  $\phi$  associado. Sendo  $X_0$  assintoticamente estável, às vezes, é possível escrever explicitamente uma função  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  e localmente definida positiva em torno de  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  a qual irá auxiliar na comprovação da estabilidade assintótica de tal equilíbrio. Os próximos conceitos e resultados revelam como isso ocorre.

**Definição 1.43 (Função de Lyapunov Estrita Global)** *Uma função  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida positiva em  $\mathbb{R}^n - \{X_0\}$  é denominada função de Lyapunov estrita global vinculada ao equilíbrio  $X_0$  do sistema  $X' = F(X)$ , se  $\langle \nabla V(X), F(X) \rangle < 0$ , para todo  $X \in \mathbb{R}^n - \{X_0\}$ .*

**Definição 1.44 (Função de Lyapunov Estrita Local)** *Uma função  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  localmente definida positiva em torno de  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  é denominada função de Lyapunov estrita local vinculada ao equilíbrio  $X_0$  do sistema  $X' = F(X)$ , se existir  $\delta > 0$  de maneira que  $\langle \nabla V(X), F(X) \rangle < 0$ , para todo  $X \in \mathbb{R}^n$  tal que  $0 < \|X - X_0\| < \delta$ .*

**Definição 1.45 (Função de Lyapunov)** *Uma função  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  localmente definida positiva em torno de  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  é denominada função de Lyapunov vinculada ao equilíbrio  $X_0$  do sistema  $X' = F(X)$ , se existir  $\delta > 0$  de maneira que  $\langle \nabla V(X), F(X) \rangle \leq 0$ , para todo  $X \in \mathbb{R}^n$  tal que  $0 < \|X - X_0\| < \delta$ .*

É imediato ver que toda função de Lyapunov estrita global, em particular, é uma função de Lyapunov estrita local, a qual, por sua vez, é, ainda, função de Lyapunov. Também é fácil perceber que a proposição inversa não vale. Isto é, nem toda função de Lyapunov é função de Lyapunov estrita local e essa última nem sempre é função de Lyapunov estrita global. Tendo isso em vista, enuncia-se o importante critério de estabilidade de Lyapunov.

**Teorema 1.46 (Critério de Estabilidade de Lyapunov)** *Se existe uma função  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a qual é função de Lyapunov vinculada ao equilíbrio  $X_0$  do sistema  $X' = F(X)$ , então  $X_0$  é estável. Se, em particular,  $V$  é função de Lyapunov estrita local, então  $X_0$  é assintoticamente estável e se  $V$  ainda for função de Lyapunov estrita global, então  $X_0$  é também um atrator global.*

O critério acima é bastante útil, sobretudo quando se deseja provar que um certo equilíbrio é atrator global. Além disso, esse critério fornece alguma informação acerca da bacia de atração de um equilíbrio atrator local. Contudo, não está garantido que seja possível obter uma tal função  $V$  para um equilíbrio assintoticamente estável qualquer. Inclusive, sequer foi fornecida uma ideia acerca de como construir uma função de Lyapunov seja essa estrita ou não. Assim, esse critério possui várias limitações.

Limitado por semelhantes razões, porém mais abrangente, é o emprego de funções de Lyapunov generalizadas, as quais permitem, em alguns casos, fornecer alguma informação, a nível global, acerca de um dado sistema. Veja-se, a seguir, como são definidas essas funções e o que essas podem revelar a respeito de um dado sistema.

**Definição 1.47 (Função de Lyapunov Generalizada)** *Dado  $A \subset \mathbb{R}^n$ , uma função  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida positiva em  $\mathbb{R}^n - A$  é denominada função de Lyapunov generalizada vinculada ao conjunto  $A$  e associada ao sistema  $X' = F(X)$ , se  $\langle \nabla V(X), F(X) \rangle < c < 0$ , para todo  $X \in \mathbb{R}^n - A$  e para algum  $c \in \mathbb{R}$ .*

**Teorema 1.48 (Critério Geral de Estabilidade de Lyapunov)** *Seja  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Lyapunov generalizada vinculada ao conjunto  $A$  e associada ao sistema  $X' = F(X)$ . Seja, ainda,  $\phi$  um fluxo associado a esse mesmo sistema. Então,  $A$  é um conjunto positivamente invariante por  $\phi$  e existe uma função  $\tau: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que  $\phi_t(X) \in A$ , para todo  $t \geq \tau(X)$ .*

Levando em consideração a dificuldade de se obter funções de Lyapunov estritas globais, ou mesmo estritas locais, há um outro critério de estabilidade assintótica, ainda mais simples, o qual depende, em essência, de uma aplicação do Teorema de Hartman-Grobman para Fluxos. Porém, esse próximo critério não fornece qualquer informação acerca da extensão da bacia de atração de um equilíbrio (exceto que concede garantia de sua existência como um conjunto aberto, se forem satisfeitas certas condições). Na sequência, esse tal critério será fornecido.

**Definição 1.49 (Matriz Estável)** *Uma dada matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é denominada estável quando  $\max\{Re(\lambda) \mid \lambda \in \Sigma(A)\} < 0$ .*

Em geral, os fluxos aqui abordados serão bidimensionais ou tridimensionais, de modo que as matrizes associadas à linearização de seus pontos de equilíbrio serão pertencentes a  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

ou a  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Logo, estudar a estabilidade de tais matrizes, no presente contexto, se resume a estudar os coeficientes dos polinômios característicos de grau menor ou igual a 3. Entretanto, cabe uma ressalva: quando, mais adiante, for estudado algum fluxo definido em um espaço de dimensão mais alta, a teoria desenvolvida para esses casos de dimensão mais baixa será suficiente e, por isso, não haverá novos comentários a esse respeito. O critério algébrico a seguir pode ser encontrado em [1].

**Teorema 1.50 (Critério de Estabilidade de Matrizes)** *Se  $p_A$ , em que  $A$  é uma matriz quadrada de ordem 1, 2 ou 3, é dado por*

1.  $p_A(\lambda) = \lambda + a_1$ ,
2.  $p_A(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$
3. ou  $p_A(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ ,

*então  $A$  será estável se, e somente se, respectivamente:*

1.  $a_1 > 0$ ;
2.  $a_1 > 0$  e  $a_2 > 0$ ;
3.  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$  e  $a_1a_2 > a_3$ .

Como consequência do Teorema de Hartman-Grobman e do Critério de Estabilidade de Matrizes segue:

**Teorema 1.51 (Estabilidade de Equilíbrios)** *Se  $X_0$  é um equilíbrio hiperbólico do fluxo suave associado ao sistema de equações  $X' = F(X)$ , então:  $JF(X_0)$  é uma matriz estável se, e somente se,  $X_0$  é um ponto fixo assintoticamente estável; não sendo  $JF(X_0)$  uma matriz estável,  $X_0$  é equilíbrio instável.*

## 1.2 Bifurcações em uma Família de Sistemas Dinâmicos Contínuos

Esta seção está inteiramente baseada em [6] e visa apresentar algumas bifurcações que podem ocorrer em uma família de fluxos definida a partir de um parâmetro. Porém, para isso, primeiro é necessário definir o termo bifurcação, sendo que, antes disso, é preciso introduzir alguns outros importantes conceitos. O primeiro desses é o de equivalência topológica entre fluxos, o qual pode ser entendido como uma relaxação do conceito de conjugação topológica. Afinal, toda conjugação topológica determina uma equivalência topológica, mas a recíproca não se verifica.

**Definição 1.52 (Equivalência Topológica)** *Sejam  $\phi, \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dois fluxos. Havendo um homeomorfismo  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que, se  $O$  é uma órbita de  $\phi$ , então  $h(O)$  é uma órbita de  $\varphi$  com a orientação determinada por  $O$ , diz-se que  $\phi$  e  $\varphi$  são topologicamente equivalentes.*

Um exemplo que justifica porque nem todo homeomorfismo que traduz uma equivalência topológica entre dois fluxos é também uma conjugação topológica é o seguinte: dois fluxos que apresentem, cada um, uma única órbita fechada e que sejam topologicamente equivalentes não podem ser conjugados topologicamente por homeomorfismos se as referidas órbitas não detiverem um mesmo período.

**Definição 1.53 (Perturbação de Campos Vetoriais)** *Sejam  $F, G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que  $F$  e  $G$  são de classe  $C^1$ . Sendo, ainda,  $F(X) = G(X)$  para todo  $X \in \mathbb{R}^n - K$ , onde  $K \subset \mathbb{R}^n$  é compacto, e se, também,  $\max \{ \|F(X) - G(X)\| \mid X \in \mathbb{R}^n \} < \epsilon$  e  $\max \{ \|D_p(F - G)(Y)\| \mid p \in \mathbb{R}^n \text{ e } Y \in S^{n-1} \} < \epsilon$ , denomina-se  $G$  de uma  $\epsilon$ -perturbação do campo  $F$ .*

**Definição 1.54 (Estabilidade Estrutural de Fluxos)** *O fluxo  $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  associado ao sistema  $X' = F(X)$ , com  $F$  de classe  $C^1$ , será dito estruturalmente estável se existir  $\epsilon > 0$  tal que  $\phi$  seja topologicamente conjugado ao fluxo vinculado a  $X' = G(X)$ , em que  $G$  é uma  $\epsilon$ -perturbação qualquer de  $F$ .*

**Definição 1.55 (Uma Família de Fluxos a n-Parâmetros)** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto e  $\phi_\mu: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um fluxo para cada  $\mu \in A$ . Nesse caso, denomina-se  $\phi_\mu$  uma família de fluxos a n-parâmetros e  $A$  o espaço de parâmetros de  $\phi_\mu$ .*

Finalmente, é possível fornecer uma definição geral para o conceito de bifurcação, o qual será explorado em maiores detalhes na sequência, quando alguns casos particulares serão apresentados.

**Definição 1.56** *Sendo  $\phi_\mu$  uma família de fluxos a n-parâmetros, diz-se que  $\mu_0$  é um ponto de bifurcação se  $\phi_{\mu_0}$  não é estruturalmente estável e diz-se que  $\phi_\mu$  sofre uma bifurcação em  $\mu_0$  se, para todo  $\epsilon > 0$ , existirem  $\mu_1, \mu_2 \neq \mu_0$  tais que  $\mu_1, \mu_2 \in B(\mu_0, \epsilon)$  e tais que  $\phi_{\mu_1}$  e  $\phi_{\mu_2}$  não sejam topologicamente equivalentes.*

A seguir, serão consideradas bifurcações vinculadas a pontos de equilíbrio. Para se compreender como ocorrem essas bifurcações, considere-se um campo vetorial  $F_\mu$  de classe  $C^1$  (onde  $\mu$  é um parâmetro real) o qual possui um fluxo associado  $\phi_\mu$ . Essencialmente, quando a matriz jacobiana de  $F$  calculada em um equilíbrio  $X_0$  de  $\phi_{\mu_0}$  possui algum autovalor com parte real nula, é fácil notar que  $\phi_{\mu_0}$  não é estruturalmente estável, pois, nesse caso, é possível criar, ao menos, duas categorias de  $\epsilon$ -perturbações de  $F_\mu$  que tornem  $X_0$  hiperbólico. A primeira categoria

irá garantir um aumento apenas do número de autovalores com parte real positiva; a segunda aumentará apenas o número de autovalores com parte real negativa.

Se  $\phi_{\mu_0}$  é estruturalmente instável, então  $\phi_{\mu}$  está sujeita a uma eventual ocorrência de bifurcação no possível valor de bifurcação  $\mu_0$ . Logo, é interessante iniciar o estudo de bifurcações considerando-se fluxos com equilíbrios não hiperbólicos (os quais não são estáveis). Aqui, apenas algumas bifurcações de codimensão um relacionadas a equilíbrios não hiperbólicos de fluxos serão apresentadas. Nesse contexto, bifurcações de codimensão um são bifurcações as quais ocorrem quando  $JF(X_0)$  possui somente um autovalor 0 ou apenas um par de autovalores complexos com parte real nula. Para auxiliar na investigação de algumas bifurcações desse tipo, serão introduzidos, agora, mais alguns importantes resultados.

**Teorema 1.57 (Teorema da Variedade Central)** *Se  $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um fluxo de classe  $C^r$  e se  $X_0 = \vec{0}$  é equilíbrio de  $\phi$ , então existem duas variedades diferenciáveis de classe  $C^r$  invariantes por  $\phi$  e associadas a  $X_0$ :  $W^s$  (variedade estável) e  $W^u$  (variedade instável) as quais são tangentes, respectivamente, a  $E^s$  e a  $E^u$  (os autoespaços generalizados estável e instável de  $DF_{X_0}$ ). Além disso, nessas mesmas condições, há uma variedade  $W^c$  de classe  $C^{r-1}$ , também invariante por  $\phi$  e vinculada a  $X_0$ , que é tangente a  $E^c$ , o autoespaço generalizado central de  $DF_{X_0}$ .*

Uma vez que, no Teorema da Variedade Central, tenha sido estabelecida a relação entre as classes de diferenciabilidade às quais pertencem a aplicação  $F$  e as variedades  $W^s$ ,  $W^u$ ,  $W^c$ , no restante dessa seção sobre bifurcações, por simplicidade, será suposto que  $F$  é de classe  $C^\infty$ . Isso evitará a necessidade de especificar, em cada situação, a classe mínima de diferenciabilidade de cada sistema de equações.

Como um dos objetivos principais deste texto é estudar a teoria de controle e aplicá-la, deseja-se, em momento apropriado e via indução de bifurcações, estabilizar alguns sistemas. Isso pode ser feito de duas maneiras principais: por meio da introdução de equilíbrios ou de ciclos estáveis em fluxos ou por intermédio da estabilização de equilíbrios pré-existentes. Além disso, para estabilizar-se um certo sistema via bifurcações, é preciso que, para o valor de bifurcação  $\mu_0$ ,  $E^u$ , o autoespaço generalizado instável associado a  $DF_{X_0}$ , seja igual a  $\{\vec{0}\}$ . Do contrário, o equilíbrio ou o ciclo resultante (gerados logo após a ocorrência de algum dentre os tipos de bifurcações aqui vistos mais adiante) serão necessariamente instáveis. Por esses motivos, daqui em diante, será assumido que  $E^u = \{\vec{0}\}$ .

Assim, restam apenas os autoespaços generalizados estável e central. Porém, existe um resultado (formalmente apresentado em [6]) segundo o qual, nas proximidades de um equilíbrio  $X_0$  com  $E^u = \{\vec{0}\}$ , a tendência é que as órbitas aproximem-se da variedade central com o decorrer do tempo. Desse modo, a compreensão do comportamento de um fluxo em um aberto apropriado contendo  $X_0$  depende então do estudo do comportamento, próximo de  $X_0$ , da restrição do fluxo à variedade central. Porém, ainda não foi apresentado qualquer resultado

específico para a dinâmica de um fluxo restrito à  $W^c$  (a variedade central associada a um dos seus equilíbrios).

Logo adiante, serão investigados alguns dentre os principais fenômenos ocorrentes em variedades centrais: as bifurcações. Antes, porém, é preciso introduzir algumas técnicas as quais permitam obter aproximações para um fluxo  $\phi_t|_{W^c}$ . Para isso, são usadas estratégias tais como mudanças de variáveis (difeomorfismos) seguidas ou não de expansões em séries de potências.

Em algumas ocasiões, será útil transladar um equilíbrio até a origem do sistema de coordenadas e, por meio de uma transformação linear apropriada, obter um outro sistema de equações que possua as variedades  $W^s$ ,  $W^u$  e  $W^c$ , associadas a esse equilíbrio na origem, tangentes aos novos eixos coordenados. Essa transformação linear será, mais precisamente, uma conjugação topológica entre o fluxo associado ao sistema de equações original e aquele que será obtido por meio desse procedimento.

Para conhecer-se essa transformação linear a qual garante a tangência das variedades estável, instável e central com os eixos coordenados, considere-se agora um sistema da forma  $X' = F(X)$  com  $F(\vec{0}) = \vec{0}$  (do contrário, basta transladar o equilíbrio de interesse). Nesse caso, o operador linear  $\mathcal{O}$  o qual conjuga  $DF_{\vec{0}}$  com o operador associado à forma canônica de Jordan da matriz  $JF(\vec{0})$  permite obter o novo sistema  $Y' = (\mathcal{O}^{-1} \circ F \circ \mathcal{O})(Y)$ , com as variedades  $W^s$ ,  $W^u$  e  $W^c$ , associadas ao equilíbrio  $\vec{0}$  tangentes aos eixos coordenados. Esse fato está fundamentado, em grande parte, no Teorema 1.31.

Desse modo, sem perda de generalidade, é possível supor que um sistema  $X' = F(X)$  com um equilíbrio  $X_0 = \vec{0}$ ,  $X = (Y, Z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  pode ser escrito da seguinte maneira

$$\begin{cases} Y' = AY + f(Y, Z) \\ Z' = BZ + g(Y, Z) \end{cases},$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $E^c$  (o autoespaço generalizado central de  $DF_{X_0}$ ) é igual a  $\mathbb{R}^m \times \{\vec{0}\}$ . Nessas condições, existe um aberto  $V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  contendo a origem e uma função  $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que  $U \cap W^c = \{(Y, Z); h(Y) = Z\}$ . A restrição do sistema acima a  $U \cap W^c$  é dada então por

$$\begin{cases} Y' = AY + f(Y, h(Y)) \\ Dh_Y(Y') = Bh(Y) + g(Y, h(Y)) \end{cases}.$$

Agora, considere-se a aplicação  $\mathcal{N}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que:

$$\mathcal{N}(h(X)) := Dh_Y(AY + f(Y, h(Y))) - [Bh(Y) + g(Y, h(Y))].$$

$\mathcal{N}(h(X)) = 0$  fornece um sistema de equações diferenciais parciais cuja solução, para as condições de contorno  $h(\vec{0}) = \vec{0}$  e  $Jh(\vec{0}) = \vec{0}$  fornece  $h(X)$ . Porém, nem sempre é possível obter  $h$  explicitamente, de modo que convém aproximá-la por meio de um polinômio (uma parte da série

de Taylor para  $h$ , em torno de  $\vec{0}$ , com termos de grau menor ou igual a um certo número). Assim, para essas aplicações  $h$  e  $\mathcal{N}$ , enuncia-se o próximo teorema.

**Teorema 1.58** *Se  $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$  tal que a expansão em série de Taylor de  $\mathcal{N} \circ \phi$ , em torno de  $\vec{0}$ , possui apenas monômios de grau maior que  $p$ , com  $p > 1$ , então os monômios de grau menor ou igual a  $p$  das expansões de  $h$  e de  $\phi$  em série de Taylor, em torno de  $\vec{0}$ , coincidem.*

### 1.2.1 Bifurcação Sela-Nó

O primeiro e mais simples tipo de bifurcação que será aqui abordado é a bifurcação sela-nó. Para iniciar esse estudo, seja dada uma família de fluxos a 1-parâmetro associada a um sistema  $X' = F_\mu(X)$  (com  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $I$  aberto e  $F_\mu$  de classe  $C^2$  se  $\mu \in I$ ), um sistema do qual  $X_0$  é ponto de equilíbrio para algum  $\mu \in I$ . Seja também  $\mu_0$  um valor de bifurcação dessa família tal que  $JF_{\mu_0}(X_0)$  possui um único autovalor com parte real nula (e, portanto, igual a 0).

Agora, em lugar do sistema apresentado acima, considere-se o sistema anterior acrescido da equação  $\mu' = 0$ . Nesse caso, existe uma variedade central bidimensional  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  associada ao equilíbrio  $(X_0, \mu_0)$ . A partir daqui, será suposto que  $n = 1$ ; se isso não ocorrer, basta restringir o fluxo a variedade central e estudá-lo por meio de mudanças de variáveis e/ou de aproximações, tal como foi detalhado mais acima. Empregando todas essas condições, é possível enunciar o próximo teorema.

**Teorema 1.59 (Bifurcação Sela-Nó)** *Se  $F_{\mu_0}$  satisfaz  $\frac{\partial F_{\mu_0}}{\partial x} = 0$  e se valem as condições de transversalidade  $\frac{\partial F_{\mu_0}}{\partial \mu} \neq 0$  e  $\frac{\partial^2 F_{\mu_0}}{\partial x^2} \neq 0$ , então existe uma curva (variedade diferenciável de dimensão 1) formada por raízes de  $F_\mu$  a qual apresenta uma tangência quadrática com relação à reta  $\mu = \mu_0$  no ponto  $(X_0, \mu_0)$ .*

A propriedade de tangência quadrática do teorema anterior, apesar de possuir uma definição formal, aqui garante principalmente que, em um aberto suficientemente pequeno contendo  $(X_0, \mu_0)$ , todos os pontos de equilíbrios do fluxo associado a  $(X', \mu') = (F_\mu(X), 0)$  satisfaçam  $\mu \geq \mu_0$  (ou  $\mu \leq \mu_0$ ). Além disso, sendo  $\phi$  o fluxo associado a  $(X', \mu') = (F_\mu(X), 0)$  e sendo  $U$  um aberto apropriado contendo  $(X_0, \mu_0)$ ,  $\phi|_U$  é conjugado topológica e localmente ao fluxo  $\bar{\phi}|_V$ , onde  $\bar{\phi}$  é o fluxo associado a algum dentre os seguintes sistemas (denominados as formas normais da bifurcação sela-nó)

$$\begin{cases} Y' = \pm(\eta - \eta_0) \pm (Y - Y_0)^2 \\ \eta' = 0 \end{cases}.$$

(com  $\eta, Y \in \mathbb{R}$ ) e onde  $V$  é um aberto apropriado contendo  $(Y_0, \eta_0)$ .

### 1.2.2 Bifurcação de Hopf

A bifurcação de Hopf, quando ocorre em um fluxo, é responsável por originar um ciclo: se esse for um conjunto atrator, a bifurcação é chamada supercrítica; do contrário, a bifurcação é designada subcrítica. Quando se deseja estabilizar um determinado sistema, as bifurcações de Hopf de interesse são aquelas as quais originam ciclos atratores. Por isso, aqui, além de serem fornecidas condições suficientes para a ocorrência de uma bifurcação de Hopf, será apresentada uma ferramenta que permita a sua classificação (em supercrítica ou em subcrítica).

As bifurcações de Hopf ocorrem em famílias de sistemas de equações diferenciais nas proximidades de equilíbrios os quais satisfazem alguns critérios que serão apresentados logo à frente. Antes, porém, será dada uma família de equações a qual sofre bifurcação de Hopf quando um parâmetro real  $\mu$  varia passando por 0. É por meio do seguinte sistema de equações (a forma normal da bifurcação de Hopf) que a bifurcação de Hopf será definida:

$$\begin{cases} x' = [d\mu + a(x^2 + y^2)]x - [\omega + c\mu + b(x^2 + y^2)]y \\ y' = [\omega + c\mu + b(x^2 + y^2)]x + [d\mu + a(x^2 + y^2)]y \end{cases}, \quad (1.1)$$

onde  $a, b, c, d, \omega$  são constantes reais.

Na tentativa de compreender a família de fluxos  $\phi_\mu$  associada ao sistema anterior, será de grande utilidade conhecer uma outra família de fluxos:  $\bar{\phi}_\mu$ , família de fluxos associada à família de sistemas de equações

$$\begin{cases} r' = (d\mu + ar^2)r \\ \theta' = \omega + c\mu + br^2 \end{cases}.$$

O importante vínculo entre as famílias de fluxos  $\phi_\mu(x(t), y(t))$  e  $\bar{\phi}_\mu(r(t), \theta(t))$  é estabelecido por meio da aplicação, de classe  $C^\infty$ ,  $h: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$  cuja lei de formação é:

$$h(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Não é difícil verificar que a aplicação  $h$  é sobrejetora, de modo que apenas a origem de  $\mathbb{R}^2$  não encontra-se na imagem de  $h$ . Contudo, isso não ocasiona nenhuma dificuldade técnica para esta investigação, pois a origem é ponto de equilíbrio do sistema de equações (1.1). Fazendo  $h(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta))$ , chega-se a:

$$\begin{cases} [r \cos(\theta)]' = [d\mu + ar^2]r \cos(\theta) - [\omega + c\mu + br^2]r \sin(\theta) \\ [r \sin(\theta)]' = [\omega + c\mu + br^2]r \cos(\theta) + [d\mu + ar^2]r \sin(\theta) \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} r' \cos(\theta) - r \sin(\theta)\theta' = [d\mu + ar^2]r \cos(\theta) - [\omega + c\mu + br^2]r \sin(\theta) \\ r' \sin(\theta) + r \cos(\theta)\theta' = [\omega + c\mu + br^2]r \cos(\theta) + [d\mu + ar^2]r \sin(\theta) \end{cases}$$

e, isolando  $r'$  e  $\theta'$  no sistema anterior, de fato obtém-se

$$\begin{cases} r' = (d\mu + ar^2)r \\ \theta' = \omega + c\mu + br^2 \end{cases}.$$

Passe-se então ao estudo desse novo sistema com  $\omega \neq 0$ . Primeiramente, suponha-se  $a = 0$ , caso em que  $r(t) = e^{d\mu t}$ : quando  $d\mu > 0$ ,  $r(t) \rightarrow \infty$  se  $t \rightarrow \infty$  e a origem é repulsora (veja a Definição 1.40) pelo fluxo  $\phi_\mu$ ; quando  $d\mu < 0$ ,  $r(t) \rightarrow 0$  se  $t \rightarrow \infty$  e a origem é atratora pelo fluxo  $\phi_\mu$ . Supondo agora  $a \neq 0$  e  $-d\mu/a > 0$  (o que de fato ocorre para todo  $\mu > 0$  ou para todo  $\mu < 0$ ), repare-se que, para  $r = \sqrt{-d\mu/a}$ ,  $r(t) = \sqrt{-d\mu/a}$  e  $\theta(t) = [\omega + (c - bd/a)\mu]t$ , de modo que

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \sqrt{-d\mu/a}(\cos([\omega + (c - bd/a)\mu]t), \sin([\omega + (c - bd/a)\mu]t))$$

representa um ciclo de  $\phi_\mu$  se  $\omega + (c - bd/a)\mu \neq 0$ .

Considere-se, então, a aplicação  $V: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $V(r) = (r - \sqrt{-d\mu/a})^2$ . Nesse caso,

$$\frac{\partial V}{\partial r}(r) r'(t) = 2 \left( r - \sqrt{-\frac{d\mu}{a}} \right) (d\mu + ar^2)r, \quad (1.2)$$

cujo sinal é o mesmo de

$$\left( \frac{d\mu}{a} + r^2 \right) (d\mu + ar^2)r,$$

expressão obtida ao multiplicar-se (1.2) por  $(r + \sqrt{-d\mu/a})/2 > 0$ .

Finalmente, note-se que

$$a \left( \frac{d\mu}{a} + r^2 \right) (d\mu + ar^2)r = (d\mu + ar^2)^2 r > 0,$$

de modo que, para  $a < 0$ :

$$\frac{\partial V}{\partial r}(r) r'(t) < 0,$$

para todo  $r \neq \sqrt{-d\mu/a}$  pertencente ao domínio de  $V$ .  $V(r)$ , por sua vez, é função de Lyapunov estrita local vinculada ao equilíbrio  $r = \sqrt{-d\mu/a}$  de  $r' = (d\mu + ar^2)r$ . Se, em contrapartida,

$a > 0$ , então, para todo  $r \neq \sqrt{-d\mu/a}$  do domínio de  $V$ ,

$$\frac{\partial V}{\partial r}(r) r'(t) > 0,$$

e, portanto,  $r(t) = \sqrt{-d\mu/a}$  é equilíbrio de  $r' = -(d\mu + ar^2)r$  e  $V(r)$  é função de Lyapunov estrita local (veja a Definição 1.44) vinculada a esse equilíbrio, o qual é atrator por  $r' = -(d\mu + ar^2)r$  (aqui, repare-se que foi tomada uma nova equação para  $r'$ , na qual foi inserida um sinal negativo). Logo, se  $a > 0$ ,  $r = \sqrt{-d\mu/a}$  é equilíbrio repulsor por  $r' = (d\mu + ar^2)r$  (a expressão original de  $r'$  em função de  $r$ ). Para concluir: se  $a < 0$ ,  $\gamma(\mathbb{R})$  é ciclo atrator (veja a Definição 1.38) pelo sistema (1.1); se  $a > 0$ ,  $\gamma(\mathbb{R})$  é ciclo repulsor pelo fluxo associado ao sistema de equações (1.1).

**Teorema 1.60 (Bifurcação de Hopf)** *Considere-se um sistema de equações*

$$\begin{cases} X' = F_\mu(X) = F(X, \mu), X \in \mathbb{R}^n \\ \mu' = 0, \mu \in \mathbb{R} \end{cases},$$

com um equilíbrio  $(X_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  tal que:

1.  $JF_{\mu_0}(X_0)$  possui apenas um par de autovalores com parte real nula e suas partes imaginárias são não nulas;
2. exista  $\lambda(\mu)$  de classe  $C^1$  uma função tal que  $\lambda(\mu)$  é a parte real de algum autovalor de  $JF_\mu(X(\mu))$  para todo  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda(\mu_0) = 0$  e

$$\frac{d}{d\mu}(\lambda(\mu))|_{\mu=\mu_0} \neq 0,$$

onde  $X(\mu)$  de classe  $C^1$  satisfaz  $X(\mu_0) = X_0$  e  $F_\mu(X(\mu)) = \vec{0}$ .

Nessas condições, existe uma única variedade central  $W^c$  tangente a  $p = (X_0, \mu_0)$  com dimensão três e existe também um difeomorfismo  $f$  de classe  $C^\infty$  com a forma  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ : satisfazendo  $f(\mathbb{R}^n \times \{\mu\}) = \mathbb{R}^n \times \{\mu\}$  para cada  $\mu \in \mathbb{R}$ ; tal que o sistema  $(Y', \mu') = (Jf(Y)(F(f^{-1}(Y, \mu))), 0) = (G(Y, \mu), 0)$  (onde  $(Y, \mu) = f(X, \mu)$ ), quando restrito à  $f(W^c)$  e aproximado por uma soma de potências com monômios de grau até 3 (vide teorema 1.58), resulta nas equações (1.1) juntamente com  $(Z', \mu') = \vec{0}$  (onde  $Z \in \mathbb{R}^{n-2}$ ). Se, nas equações com a forma de (1.1) aqui obtidas, a constante análoga ao parâmetro  $a$  for não nula, então existe, em  $f(W^c)$ , uma superfície  $S$  (variedade diferenciável de dimensão 2) de classe  $C^2$  formada por ciclos de  $(Y', \mu') = (G(Y, \mu), 0)$  e por  $p$ , a qual apresenta tangência quadrática com respeito ao plano contendo  $p$  que é paralelo ao autoespaço generalizado associado aos autovalores  $\pm i\omega$  de  $JG(f(X_0, \mu_0))$ . Além disso, o conjunto das raízes da equação  $\mu + (a/d)(x^2 + y^2) = 0$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  fornece uma aproximação de segunda ordem para  $S$  em torno do equilíbrio  $e$ , dado um ciclo que

compõe  $S$ , há um valor  $\bar{\mu}$  constante e dado pela coordenada  $\mu$  desse ciclo o qual é então atrator pelo sistema  $(Y', \mu) = (G(Y, \mu), \bar{\mu})$  se  $a < 0$ . Se  $a > 0$ , os ciclos que compõem  $S$  são repulsores pelo sistema  $(Y', \mu) = (G^*)(Y, \mu), \bar{\mu}$ , onde  $G^* = G|_{f(W^c)}$ .

O cálculo do parâmetro  $a$ , o qual aparece no teorema acima e que é determinante para a determinação da estabilidade dos ciclos que ocorrem em bifurcações de Hopf, pode ser feito sem que o sistema  $(Y', \mu') = (G(Y, \mu), 0)$ , quando restrito à  $f(W^c)$  e aproximado por uma soma de potências com monômios de grau até 3 (vide teorema 1.58), resulte exatamente nas equações (1.1) juntamente com  $(Z', \mu') = \vec{0}$  (onde  $Z \in \mathbb{R}^{n-2}$ ). De fato, seja a aproximação, por monômios de grau até 3 da série de Taylor em torno de  $(X_0, \mu_0)$ , de  $(Y', \mu') = (G(Y, \mu), 0)$  restrita a  $f(W^c)$  da forma

$$\begin{cases} x' = -\omega y + m(x, y) \\ y' = \omega x + n(x, y) \\ (Z', \mu') = \vec{0} \end{cases},$$

com  $Z \in \mathbb{R}^{n-2}$  e com  $x, y \in \mathbb{R}$  e onde  $m$  e  $n$  são funções tais que, quando expandidas em série de Taylor em torno do equilíbrio  $(x_0, y_0)$ , apresentam apenas termos de ordem maior ou igual a 2. Nesse caso, o valor do parâmetro  $a$  que aparece no teorema da Bifurcação de Hopf é dado por:

$$\begin{aligned} a = & \frac{1}{16} \left[ \frac{\partial^3 m}{\partial^3 x}(x_0, y_0) + \frac{\partial^3 m}{\partial x \partial^2 y}(x_0, y_0) + \frac{\partial^3 n}{\partial^2 x \partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial^3 n}{\partial^3 y}(x_0, y_0) \right] + \\ & + \frac{1}{16\omega} \left[ \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \left( \frac{\partial^2 m}{\partial^2 x}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 m}{\partial^2 x}(x_0, y_0) \right) + \frac{\partial^2 m}{\partial^2 y}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 n}{\partial^2 y}(x_0, y_0) \right] + \\ & - \frac{1}{16\omega} \left[ \frac{\partial^2 n}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \left( \frac{\partial^2 n}{\partial^2 x}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 n}{\partial^2 x}(x_0, y_0) \right) + \frac{\partial^2 m}{\partial^2 x}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 n}{\partial^2 x}(x_0, y_0) \right]. \end{aligned}$$

## 1.3 Sistemas com Comportamento Caótico

### 1.3.1 Fluxos Jamais Caóticos

Antes de se abordar o fenômeno do caos, será apresentado um resultado que garante a ausência do caos em fluxos dos tipos  $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Nesse propósito, poderia ser mais conveniente apresentar primeiro uma definição para o termo caos, a fim de, depois, comprovar-se a inexistência de comportamento caótico nos dois casos acima. Isso não será feito, todavia.

Para provar-se o comportamento não caótico dos fluxos de dimensão um e dois, será apresentada uma classificação para os conjuntos  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite dos pontos dos domínios de todos os fluxos uni e bidimensionais. Afinal, tendo em vista que o caos é um fenômeno complexo, ao

apresentar-se uma tal classificação, obtém-se um argumento segundo o qual esses fluxos não podem manifestar o caos. Não é difícil notar que, no caso dos fluxos unidimensionais, o conjunto  $\omega$ -limite (ou  $\alpha$ -limite) de um ponto, quando existe, é simplesmente um ponto. Assim, resta apenas classificar os conjuntos  $\omega$ -limite e  $\alpha$ -limite relacionados a fluxos bidimensionais. Para tanto serão definidas, agora, as soluções homoclínicas e heteroclínicas.

Antes de ler as próximas definições, repare-se que não é preciso fazer distinção entre  $\varphi(t)$ , a solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias para a condição inicial  $X_0$ , e  $\phi_t(X_0)$ , a restrição a  $\mathbb{R} \times \{X_0\}$  do fluxo  $\phi$  associado a tal sistema de equações. Desse modo, é correto também chamar  $\phi_t(X_0)$  de solução para a condição inicial  $X_0$ .

**Definição 1.61 (Solução Homoclínica)** *Sejam  $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um fluxo e  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  um equilíbrio de  $\phi$ . Havendo  $Y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi(t) = X_0$ , onde  $\varphi(t) = \phi_t(Y)$ ,  $\varphi$  é denominada solução homoclínica e sua imagem (ou seja, a órbita de  $Y$  por  $\phi$ ) é dita uma órbita homoclínica associada a  $X_0$ .*

**Definição 1.62 (Solução Heteroclínica)** *Sejam  $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um fluxo e  $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$  equilíbrios de  $\phi$ . Havendo  $Y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = X_1$  e tal que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = X_2$ , onde  $\varphi(t) = \phi_t(Y)$ ,  $\varphi$  é denominada solução heteroclínica e a sua imagem (ou seja, a órbita de  $Y$  por  $\phi$ ) é designada uma órbita heteroclínica associada a  $X_1$  e a  $X_2$ .*

De posse dessas definições e de todos os outros resultados anteriormente enumerados, é possível, agora, enunciar o Teorema de Poincaré-Bendixson.

**Teorema 1.63 (Poincaré-Bendixson)** *Dados  $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um fluxo e  $X_0 \in \mathbb{R}^2$ , se  $\omega(X_0)$  é não vazio (assim como também  $\alpha(X_0)$ ) então  $\omega(X_0)$  é um dentre os seguintes possíveis conjuntos:*

1. órbita periódica (ou fechada);
2. um equilíbrio;
3. união entre: dois ou mais equilíbrios, possivelmente as órbitas homoclínicas associadas a alguns desses equilíbrios, as órbitas heteroclínicas que interligam esses equilíbrios.

### 1.3.2 Sistemas Discretos, Contínuos e Caóticos

A finalidade principal dessa seção é dizer em que consiste um fluxo caótico. Primeiramente, contudo, é preciso estabelecer o conceito de caos no contexto dos sistemas dinâmicos discretos e contínuos. Somente quando esse estiver bem compreendido, será adequado apresentar a noção de atratores caóticos (também conhecidos como atratores estranhos) os quais existem em fluxos que

exibem comportamento dito caótico. Para tanto, serão definidos na sequência os conceitos de sistema dinâmico discreto, órbita, órbita periódica e conjugação topológica para o caso discreto.

**Definição 1.64 (Órbita Discreta)** *Se  $A$  é um espaço métrico, se  $F : A \rightarrow A$  é uma aplicação e se  $x \in A$ , então a sequência  $(x, F(x), F^2(x), F^3(x), \dots)$  é a órbita de  $x$  por  $F$ . Além disso, uma tal órbita é intitulada periódica se, para algum  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $F^n(x) = x$ .*

**Definição 1.65 (Órbita Densa)** *Dado um sistema dinâmico  $(A, F)$  e um ponto  $x \in A$ , a órbita de  $x$  por  $F$  é dita densa em  $A$  se, para qualquer  $U \subset A$  aberto,  $\{x, F(x), F^2(x), \dots\} \cap U \neq \emptyset$ .*

**Definição 1.66 (Sistemas Dinâmicos Discretos)** *Se  $A$  é um espaço métrico e se  $F : A \rightarrow A$  é uma aplicação, então o sistema dinâmico discreto denotado pelo par  $(A, F)$  é o conjunto das órbitas de todos os elementos de  $A$ .*

**Definição 1.67 (Conjugação Topológica - Caso Discreto)** *Sejam  $A$  e  $B$  espaços métricos,  $F : A \rightarrow A$  e  $G : B \rightarrow B$  aplicações contínuas. Existindo um homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  tal que  $h \circ F = G \circ h$ ,  $(A, F)$  e  $(B, G)$  são ditas conjugadas topologicamente e  $h$  é denominada uma conjugação topológica entre esses sistemas dinâmicos discretos.*

Uma vez apresentado o conceito de sistema dinâmico discreto, é possível exibir a primeira definição rigorosa para o caos, dentre aquelas que aqui serão exploradas. Entretanto, é imprescindível esclarecer, desde já, que, mesmo em um contexto específico como o caso dos sistemas dinâmicos discretos, não há uma única definição para caos. Em geral, as definições existentes para o termo caos envolvem, em algum sentido, a noção de sensibilidade às condições iniciais (ideia que melhor transmite o fenômenos do caos), a qual pode ser definida também de maneiras bastante distintas (sendo uma dessas maneiras escrita logo abaixo).

**Definição 1.68 (Caos Segundo Devaney para Aplicações)** *Sejam  $A$  um espaço métrico, com métrica  $d[\cdot, \cdot]$ , e  $(A, F)$  um sistema dinâmico discreto.  $(A, F)$  é denominado caótico se as condições seguintes são satisfeitas.*

1. *Densidade de órbitas periódicas: as órbitas periódicas de  $(A, F)$  formam um conjunto o qual é denso em  $A$ .*
2. *Transitividade topológica: dados  $x, y \in A$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , existem  $n \in \mathbb{N}$  e  $z \in A$  tais que  $d[x, z] < \varepsilon$  e  $d[y, F^n(z)] < \varepsilon$ .*
3. *Sensibilidade às condições iniciais: existe  $\beta > 0$ , tal que, para todo  $x \in A$  e para todo  $\varepsilon > 0$ , existem  $n \in \mathbb{N}$  e  $y \in A$  satisfazendo  $d[x, y] < \varepsilon$ , de modo que  $d[F^n(x), F^n(y)] > \beta$ .*

Considerando a complexidade da definição acima, é esperado que uma demonstração direta da caoticidade de um sistema qualquer nem sempre seja viável (ou mesmo possível). Dessarte, para provar que um dado sistema é caótico, convém, frequentemente, verificar que um outro sistema inteiramente similar ao primeiro (ou seja, conjugado a ele) é caótico e, finalmente, fazer uso direto do teorema enunciado a seguir a fim de se comprovar a caoticidade do sistema inicial.

**Teorema 1.69 (Caos Como Invariante Dinâmico)** *Sejam  $A$  e  $B$  espaços métricos,  $F: A \rightarrow A$  e  $G: B \rightarrow B$  aplicações contínuas. Se  $(A, F)$  e  $(B, G)$  são conjugadas entre si por um homeomorfismo, então  $(A, F)$  é caótica se, e somente se,  $(B, G)$  também o for.*

## 1.4 O Sistema Caótico de Lorenz

A fim de exemplificar alguns dentre os principais conceitos vistos até aqui, agora será fornecido um sistema de equações diferenciais que apresenta comportamento caótico (isto é, sensibilidade às condições iniciais): o Sistema de Lorenz. Um outro motivo pelo qual esse sistema será estudado na sequência é histórico, afinal, esse foi o primeiro exemplo de sistema caótico a ser divulgado - a publicação, por Edward Lorenz, do artigo que dá início ao estudo do comportamento caótico ocorreu em 1963.

As equações

$$\begin{cases} x'(t) = \sigma(y(t) - x(t)) \\ y'(t) = rx(t) - y(t) - x(t)z(t), \\ z'(t) = x(t)y(t) - bz(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

onde  $\sigma$ ,  $r$  e  $b$  são constantes positivas e onde  $\sigma > b + 1$ , constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias o qual apresenta um fluxo associado. Esse fluxo é denominado sistema de Lorenz e as equações diferenciais acima serão aqui denotadas por  $X' = \mathcal{L}(X)$ .

A fim de encontrar os equilíbrios do sistema de Lorenz, basta determinar a solução de  $\mathcal{L}(X) = \vec{0}$  ao impor-se que  $r > 1$ . Nessa situação, os equilíbrios são a origem de  $\mathbb{R}^3$  e os pontos

$$Q_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

Se não for imposto que  $r > 1$ , a origem será o único ponto fixo garantido para o sistema de Lorenz. A fim de estudar esse sistema quando  $0 \leq r < 1$ , calcule-se a matriz jacobina do campo vetorial  $\mathcal{L}$  em  $\vec{0}$ . Essa matriz possui como autovalores os números  $-b$  e

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)} \right)$$

os quais são todos negativos. Assim, pelo Teorema 1.46, a origem é um equilíbrio assintoticamente estável se  $0 \leq r < 1$ . Para ver que, além disso, a origem, nessas mesmas condições, é um atrator global, veja-se que

$$L(x, y, z) = x^2 + \sigma(y^2 + z^2)$$

é uma função de Lyapunov global (veja a Definição 1.43) vinculada ao equilíbrio  $\vec{0}$  do sistema de equações  $X' = \mathcal{L}(X)$  e aplique-se o Teorema 1.46. De fato,  $L$  é de classe  $C^\infty$ ,  $L(X) > 0$  e

$$\langle \nabla L(X), \mathcal{L}(X) \rangle = -2\sigma(x^2 + y^2 - (1+r)xy) - 2\sigma bz^2 < 0,$$

para todo  $X \neq \vec{0}$ .

Quando  $r = 1$ , a origem é um equilíbrio não hiperbólico e, para  $r > 1$  é um equilíbrio do tipo sela. Assim, convém, agora, discriminar o caso em que

$$1 < r < r^* = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1},$$

situação na qual existem também os equilíbrios  $Q_\pm$  e na qual esses pontos são sumidouros. Para  $r = r^*$ , os pontos fixos  $Q_\pm$  são não hiperbólicos e, para  $r > r^*$ , esses mesmos pontos são equilíbrios de tipo sela. Isso é facilmente percebido a partir do estudo do polinômio característico associado à matriz  $J\mathcal{L}(Q_\pm)$  e da aplicação direta dos teoremas 1.50 e 1.51. Quando  $r$  varia continuamente em sentido crescente, atinge o valor  $r^*$  e continua a aumentar, exatamente em  $r^*$ , ocorre uma bifurcação de Hopf (veja o Teorema 1.60).

Agora, será visto que existe um conjunto compacto  $A$  ao qual está vinculada uma função de Lyapunov generalizada (veja a Definição 1.47) e associada ao sistema  $X' = \mathcal{L}(X)$ . Essa tal função é dada por

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 - \mu$$

(onde  $\mu > br^2$ ) e está vinculada ao conjunto  $A = \{X \in \mathbb{R}^3 | V(X) \leq 0\}$ . Para confirmar isso, veja-se que

$$\langle \nabla V(X), \mathcal{L}(X) \rangle = -2\sigma(rx^2 + y^2 + b(z - 2r)^2 - br^2) < 0,$$

para todo  $X \in A$ . Então, segundo o Teorema 1.48, isso significa que existe uma função  $\tau: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que  $\phi_t(X) \in A$ , para todo  $t \geq \tau(X)$ .

Denote-se, então, por  $\Lambda$ , o conjunto dos pontos  $X \in \mathbb{R}^3$  tais que  $\phi_t(X) \in A$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Claramente, esse conjunto é não vazio, uma vez que contém, ao menos, os três equilíbrios do sistema de Lorenz. Além disso, ele é invariante, pois é união de órbitas as quais são, sempre, conjuntos invariantes. Sobre  $\Lambda$ , também sabe-se que seu volume é zero. A fim de formalizar isso, será necessário definir o conceito de volume de um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , bem como apresentar um importante teorema o qual diz como evolui, por um fluxo, o volume de um conjunto, ao longo do tempo.

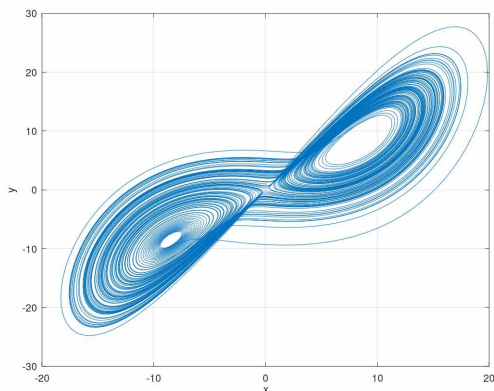


Figura 1.5: Projeção, no plano  $xy$ , da imagem do intervalo  $[0; 150]$  pela solução do sistema de Lorenz (com parâmetros  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = 8/3$ ) a qual satisfaz a condição inicial  $(1, 0, 0)$ .

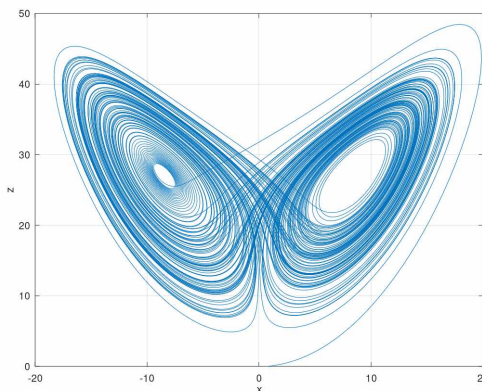


Figura 1.6: Projeção, no plano  $xz$ , da imagem do intervalo  $[0; 150]$  pela solução do sistema de Lorenz (com parâmetros  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = 8/3$ ) a qual satisfaz a condição inicial  $(1, 0, 0)$ .

Na continuação do estudo do sistema de Lorenz, será mostrado que esse é dissipativo. Isso significa que se  $B \subset \mathbb{R}^3$  e se  $v(B)$ , definido por

$$v(B) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

onde

$$f(X) = \begin{cases} 1 & (X \in B) \\ 0 & (X \notin B) \end{cases},$$

é um número, então  $v(\phi_t(B)) < v(B)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . Para ver isso, será preciso utilizar o Teorema de Liouville, segundo o qual,

$$\frac{dv}{dt}(\phi_t(B)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi_t(B)) \nabla \cdot \mathcal{L}(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Calculando-se o divergente de  $\mathcal{L}$ , encontra-se o valor constante  $-(\sigma + b + 1)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt}(\phi_t(B)) &= -(\sigma + b + 1) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi_t(B)) \, dx dy dz \\ &= -(\sigma + b + 1)v(\phi_t(B)) \end{aligned}$$



e, portanto,

$$v(\phi_t(B)) = e^{-(\sigma+b+1)t}v(\phi_0(B)).$$

Com isso, em decorrência da invariância de  $\Lambda$ ,  $v(\Lambda) = 0$ . Um outro importante fato acerca de  $\Lambda$  (porém, de prova mais difícil) é que o conjunto  $\Lambda$  é um atrator do sistema de Lorenz (veja [5, 11]). Falta agora apresentar, de maneira formal, a mais marcante característica do conjunto atrator  $\Lambda$  (isto é, a sensibilidade às condições iniciais constatadas por Lorenz). Antes, porém, será descrita, sucintamente e em perspectiva histórica, a sequência de avanços que culminou na comprovação dessa propriedade para o sistema (1.3) com os valores  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = 8/3$ . Todos os fatos que serão listados a seguir e até o final dessa seção foram extraídos de [11].

A fim de se compreender o contexto em que teve início a investigação do sistema de Lorenz, é crucial mencionar a introdução, por Stephen Smale, do conceito de Sistemas Dinâmicos Hiperbólicos. A principal propriedade de um fluxo hiperbólico é a sua estabilidade estrutural (conceito apresentado na Definição 1.54), a qual torna esses sistemas relevantes, motivando a sua investigação. Entretanto, o sistema de Lorenz é comprovadamente não hiperbólico e não estruturalmente estável; todavia, o comportamento desse sistema é robusto, ou seja, é preservado, em algum sentido, por  $\epsilon$ -perturbações para  $\epsilon > 0$  apropriado.

Ruelle and Takens introduziram o termo “strange attractor” (ou “atrator estranho”), mas não fizeram uma tentativa de defini-lo. Eventualmente, colocaram a condição de sensibilidade para caracterizá-los. É comum relacionar atratores estranhos a comportamentos caóticos uma vez que neles está presente a sensibilidade às condições iniciais, que é a propriedade central na teoria dos sistemas caóticos.

Na sequência, pontua-se um importante avanço na investigação especificamente do sistema de Lorenz feito, independentemente, por dois grupos de colaboradores: de um lado, V. Afraimovich, V. Bykov, L. Shil’nikov e, por outro lado, J. Guckenheimer, R. Williams. Esses pesquisadores, inspirados no comportamento do sistema de Lorenz, introduziram o modelo geométrico de Lorenz, estabelecendo propriedades as quais, se satisfeitas por um fluxo, implicariam a existência de um atrator estranho (conceito formalmente definido logo abaixo).

As propriedades do modelo geométrico de Lorenz apresentadas em [11], resumidamente, são dadas pela existência de um atrator robusto com: ponto de equilíbrio, seção transversal  $\Sigma$ , folheação contrativa (de  $\Sigma$ ), aplicação expansiva no intervalo (“horizontal”)  $I$  em  $\Sigma$ . Dessas propriedades resulta que o modelo geométrico de Lorenz induz uma dinâmica discreta na seção transversal  $\Sigma$  que é caótica segundo Devaney (veja a Definição 1.68), motivo pelo qual o estudo do caos em dinâmica discreta é crucial para o entendimento do caos no contexto dos fluxos. Um curioso fato é que o modelo geométrico de Lorenz preserva a similaridade entre o atrator do sistema de Lorenz e uma borboleta; semelhança evidenciada na projeção no plano  $xy$  vista na Figura 1.6.

**Definição 1.70 (Atrator Estranho)** *Sejam  $\phi$  o fluxo associado a  $X' = F(X)$ ,  $\Lambda$  um conjunto*

atrator de  $\phi$ . Considere-se que, além disso,  $\Lambda$  é sensível às condições iniciais, isto é: que existe  $\beta > 0$  tal que, para todos  $X \in \Lambda$  e  $\varepsilon > 0$ , existem  $Y \in \Lambda$  e  $t \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $d[X, Y] < \varepsilon$ , de modo que  $d[\phi_t(X), \phi_t(Y)] > \beta$ . Nesse caso,  $\Lambda$  é dito um atrator estranho e  $\phi$  é um sistema tipo Lorenz.

Cabe enfatizar aqui que, apesar do modelo geométrico de Lorenz ter sido criado com inspiração no sistema de Lorenz, o sistema definido por (1.3) não foi provado ser do tipo Lorenz pelos autores que introduziram esse modelo. C. Morales, M. J. Pacífico e E. Pujals realizaram o próximo passo de grande relevância na investigação do sistema de Lorenz, ao demonstrarem que qualquer atrator robusto (conceito explicado na sequência) contendo algum equilíbrio possui todas as propriedades do modelo geométrico de Lorenz e é, portanto, do tipo Lorenz.

**Definição 1.71 (Atrator Robusto)** *Um conjunto compacto invariante  $\Lambda$  é dito robusto para um fluxo  $\varphi_t$  se admite uma vizinhança  $U$  tal que:*

1.  $\Lambda$  consiste dos pontos cujas trajetórias por  $\varphi_t$  nunca deixam  $U$ , ou seja,

$$\Lambda = \{x; \varphi_t(x) \in U, \forall t \in \mathbb{R}\};$$

2. dado qualquer campo vetorial  $Y$  (suficientemente)  $C^1$ -próximo do campo  $X$  (induzido por  $\varphi_t$ ), o fluxo  $\varphi_t^Y$ , associado a  $Y$ , é transitivo no conjunto

$$\Lambda_Y := \{x; \varphi_t^Y(x) \in U, \forall t \in \mathbb{R}\},$$

a união das trajetórias de  $\varphi_t^Y$  que nunca deixam  $U$ .

Aqui,  $C^1$ -próximo significa que os campos  $X$  e  $Y$  e suas primeiras derivadas são uniformemente próximos em  $M$ , a variedade onde estão definidos. Finalmente,  $\Lambda$  é um atrator robusto se a vizinhança  $U$  pode ser tomada positivamente invariante, ou seja,  $\varphi_t(U) \subset U$  para todo  $t > 0$ .

O desenvolvimento destes estudos está associado ao seguinte relevante fato: verificar a existência de um atrator estranho para um sistema específico, em geral, não é tarefa fácil. Com efeito, uma demonstração de que o sistema (1.3) com os parâmetros  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  e  $b = 8/3$  propostos originalmente por Lorenz em 1963, apresenta um atrator estranho só veio a ser completada em 1999, quando W. Tucker, com auxílio de algoritmos computacionais, estabeleceu que tal sistema possui um atrator robusto contendo um equilíbrio e, portanto, pelo resultado de C. Morales, M. J. Pacífico e E. Pujals, satisfaz as condições do modelo geométrico de Lorenz e conseqüentemente apresenta um atrator estranho. É com base na sensibilidade às condições iniciais verificada por atratores estranhos que o sistema de Lorenz é chamado caótico.

Esta dificuldade prática em estabelecer a existência de atratores estranhos, para sistemas explícitos, induziu pesquisadores a considerar outras noções de caos as quais, em geral, estão associadas à propriedade central de sensibilidade às condições iniciais. Alguns destes outros conceitos pretendem captar a rapidez dos movimentos de separação ou de aproximação entre órbitas do sistema. Na próxima seção será apresentada uma destas noções.

## 1.5 Expoentes de Lyapunov

Logo abaixo, será dada a definição de “expoente característico de Lyapunov” no contexto dos fluxos, a qual foi extraída (juntamente com todos os outros fatos relativos aos expoentes de Lyapunov que serão descritos a seguir) do livro [14]. Para tanto, considere-se um sistema  $X' = F(X)$ , com  $X \in \mathbb{R}^n$  e  $F$  de classe  $C^r$  para  $r \geq 1$ . Dado um ponto  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ , seja  $X(t)$  a solução de  $X' = F(X)$  tal que  $X(0) = X_0$ . A equação variacional ao longo de  $X(t)$  é definida como

$$U'(t) = JF(X(t))U(t).$$

Seja agora  $\{U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)\}$  um conjunto de  $n$  soluções da equação variacional ao longo de  $X(t)$  tal que, para  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ ,  $c_1U_1(t) + c_2U_2(t) + \dots + c_nU_n(t) = \vec{0}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  implica  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ . Defina-se agora a matriz fundamental solução da equação variacional ao longo de  $X(t)$ :  $\Psi(t)$ , função matricial com  $n$  linhas e  $n$  colunas e cuja coluna  $j$  (com  $1 \leq j \leq n$ ) é  $U_j(t)$ . É imediato verificar que a função  $\Psi(t)$  satisfaz a identidade:

$$\Psi'(t) = JF(X(t))\Psi(t).$$

Considerando-se a notação aqui introduzida, será apresentado, logo abaixo, o conceito que é título desta seção. Para tanto, antes será definido o limite superior de uma função real quando sua variável tende ao infinito. Sejam  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  uma sequência qualquer tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : nesse caso, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ , então  $c$  é valor de aderência de  $f$  em  $\infty$  (em particular, se  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ , então  $c$  é o único valor de aderência de  $f$  em  $\infty$ ). Denote-se  $VA(f; \infty)$  o conjunto dos valores de aderência de  $f$  em  $\infty$ . Assim,  $VA(f; \infty)$  pode ser todo  $\mathbb{R}$  ou pode ser um intervalo da forma  $[b, \infty)$  com  $b \in \mathbb{R}$  ou pode possuir um valor máximo  $a \in \mathbb{R}$ . Nos dois primeiros casos, diz-se que  $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  (o limite superior de  $f$  em  $\infty$  é  $\infty$ ) e, no último caso, diz-se que  $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$  (o limite superior de  $f$  em  $\infty$  é  $a$ ).

**Definição 1.72 (Expoente Característico de Lyapunov)** *Se  $v \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ , o coeficiente de expansão na direção  $v$  ao longo da órbita de  $X_0$  é dado por*

$$\lambda_t(X_0, v) = \frac{\|\Psi(t)v\|}{\|v\|}.$$

Por sua vez, o expoente característico de Lyapunov (ou expoente de Lyapunov) na direção  $v$  e ao longo da órbita de  $X_0$  é o número

$$\mathcal{X}(X_0, v) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \lambda_t(X_0, v).$$

Considere-se um conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de  $n$  elementos de  $\mathbb{R}^n$  tais que  $\langle v_i, v_j \rangle$  é igual a 0 se  $i \neq j$  e igual a 1 se  $i = j$  (onde  $1 \leq i, j \leq n$ ); tal conjunto é chamado uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . Se a soma

$$\sum_{k=1}^n \mathcal{X}(X_0, v_k)$$

atinge seu valor mínimo, no conjunto de todas as bases ortonormais de  $\mathbb{R}^n$ , em  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , então  $\mathcal{B}$  é chamada uma base normal associada a  $X_0$ .

Uma matriz fundamental solução da equação variacional ao longo de  $X(t)$  denotada por  $\Psi(t)$  é chamada regular quando  $t \rightarrow \infty$  se:

1.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\det \Psi(t)|$  existe e é finito;
2. para cada base ortonormal  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\sum_{k=1}^n \mathcal{X}(X_0, v_k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\det \Psi(t)|$ .

Mantendo essa notação, enuncia-se o teorema seguinte.

**Teorema 1.73** *Se  $\Psi(t)$  é regular quando  $t \rightarrow \infty$ , então*

$$\mathcal{X}(X_0, v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \lambda_t(X_0, v)$$

*existe e é finito para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ .*

Devido ao caráter assintótico presente na definição dos expoentes de Lyapunov, esses não variam ao longo de uma mesma órbita, ou seja, para  $v \in \mathbb{R}^n$  e para  $\tau \in \mathbb{R}$  quaisquer, existe  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\mathcal{X}(X(0), v) = \mathcal{X}(X(\tau), \bar{v}).$$

É ainda possível que os expoentes de Lyapunov variem descontinuamente com respeito às condições iniciais quando se varia também a órbita. A fim de se compreender como os expoentes de Lyapunov traduzem a essência do comportamento de um fluxo, serão calculados certos expoentes de Lyapunov associados a alguns sistemas lineares.

Considere-se o sistema  $(x'(t), y'(t)) = (ax(t), bx(t))$  e o seu equilíbrio  $X_0 = \vec{0}$ . Nesse caso, a equação variacional ao longo de  $X(t) = X_0$  é  $(u'_1(t), u'_2(t)) = (au_1(t), bu_2(t))$ , de modo que

$\Psi(t)$  pode ser adotada como

$$\begin{bmatrix} x_0 e^{at} & 0 \\ 0 & y_0 e^{bt} \end{bmatrix}$$

e, portanto:

1.  $\mathcal{X}(X_0, (1, 0)) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\|\Psi(t)(1, 0)\|}{\|(1, 0)\|} \right) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|(x_0 e^{at}, 0)\| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\ln |x_0| + \ln e^{at}) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln e^{at} = a;$
2.  $\mathcal{X}(X_0, (0, 1)) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\|\Psi(t)(0, 1)\|}{\|(0, 1)\|} \right) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|(0, y_0 e^{bt})\| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\ln |y_0| + \ln e^{bt}) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln e^{bt} = b.$

Seja agora  $(x'(t), y'(t)) = (-\omega y(t), \omega x(t))$  com equilíbrio  $X_0 = \vec{0}$ . Então, a equação variacional ao longo de  $X(t) = X_0$  é  $(u'_1(t), u'_2(t)) = (-\omega u_2(t), \omega u_1(t))$ , de modo que  $\Psi(t)$  pode ser adotada como

$$\begin{bmatrix} x_0 \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & y_0 \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(X_0, (v_1, v_2)) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\|\Psi(t)(v_1, v_2)\|}{\|(v_1, v_2)\|} \right) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\|(v_1 x_0 \cos(\omega t), v_2 y_0 \sin(\omega t))\|}{\|(v_1, v_2)\|} \right) = \\ &= \frac{1}{\|(v_1, v_2)\|} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{v_1^2 x_0^2 [\cos(\omega t)]^2 + v_2^2 y_0^2 [\sin(\omega t)]^2} = 0, \end{aligned}$$

pois  $\ln \sqrt{v_1^2 x_0^2 [\cos(\omega t)]^2 + v_2^2 y_0^2 [\sin(\omega t)]^2}$  é limitada superiormente por um valor positivo o qual repete-se periodicamente.

De modo geral, vale que se  $\Psi(0)v$  pertence ao autoespaço generalizado de  $JF(X_0)$  com autovalor associado  $\lambda$  então  $\mathcal{X}(X_0, v)$  coincide com a parte real de  $\lambda$ .

## 1.6 Rudimentos de Mecânica Clássica

A fim de, mais a frente, aplicar-se os conceitos precedentes ao estudo de modelos de um sistema real, será introduzida, agora, a teoria que permite descrever o movimento de corpos físicos. Mais precisamente, o interesse aqui é estudar a dinâmica de pontos materiais (sistemas que podem ser aproximados por pontos em movimento somente de translação no espaço euclidiano tridimensional) que interagem por meio de forças de campo.

Pela razão acima dada, apresentam-se agora os conceitos de posição, de velocidade e de aceleração. Na sequência, muitos outros termos serão estabelecidos a fim de auxiliar a modelagem

de sistemas físicos concretos. Todavia, apesar da finalidade prática do conteúdo subsequente, não apenas o nível do formalismo será mantido, como também, frequentemente, questões de teor meramente conceitual serão pontuadas.

**Definição 1.74 (Posição, Trajetória, Velocidade e Aceleração)** *Considere-se um corpo puntiforme (ou, equivalentemente, uma partícula) em movimento; sua posição, em um sistema de coordenadas fixado, descrita para cada instante de tempo, é uma aplicação  $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$  denotada, simplesmente, por  $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . O conjunto  $X(\mathbb{R})$  orientado no sentido do avanço do tempo é chamado a trajetória da partícula. Finalmente,  $v(t) = X'(t)$  e  $a(t) = X''(t)$ , as derivadas de ordens primeira e segunda de  $X(t)$  são, respectivamente, a velocidade e a aceleração da partícula considerada.*

Observe-se que não foi dada, ainda, qualquer justificativa para a consideração das derivadas de  $X(t)$  na definição anterior, a qual pretendia fornecer um meio para descrever o movimento de uma partícula: o meio em questão é uma aplicação sobre a qual foi feita uma exigência de diferenciabilidade até ordem dois. Não está clara, ainda, a motivação para a diferenciabilidade pedida ou para as definições de velocidade e de aceleração porque ainda não se considerou, em momento algum, a causa do movimento; ao contrário, a posição  $X(t)$  fornece uma descrição bastante completa do movimento em si, porém, sem informar sua origem.

De fato, o movimento das partículas em um referencial arbitrário e fixado respeita certas leis e, mais ainda, comumente é ditado por interações de campo entre, ao menos, duas partículas. As equações que permitem descrever tais movimentos a partir de relações causais, em geral, envolvem as derivadas primeira e segunda de  $X(t)$ . Desse modo, como ficará evidente a seguir, o movimento de partículas pode ser previsto, modelado e/ou estipulado por intermédio de equações diferenciais ordinárias.

**Definição 1.75 (Segunda Lei de Newton)** *Um campo de força  $f_i$  é uma aplicação de classe  $C^1$   $f_i: \mathbb{R} \times V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com uma causa de índice  $i$ , definido sobre o aberto  $V$  (por exemplo, o campo elétrico gerado por uma partícula discriminada pelo índice  $i$ ). O campo de forças resultante que age sobre uma partícula de massa  $m$  é uma aplicação  $f: \mathbb{R} \times V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$  tal que*

$$mX'' = f(t, X), \quad (1.4)$$

onde  $X(t)$  é a posição da referida partícula no instante  $t$  e onde  $f$  é a soma  $f_0 + f_1 + \dots$  de todos os campos de forças  $f_j$  (cada um com uma causa) que afetam a tal partícula.

A teoria precedente foi feita para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, de modo que seria útil, se possível fosse, reescrever a equação (1.4) como um tal sistema. Em verdade, isso é possível. Como  $X'(t) = v(t)$ , é possível escrever  $v'(t) = f(t, X)/m$  e, além disso, pode-se definir  $\tilde{X}'(t) = 1$ , de modo que se tenha o seguinte sistema:

$$\begin{cases} X'(t) = v(t) \\ v'(t) = f(\tilde{X}(t), X(t))/m. \\ \tilde{X}'(t) = 1 \end{cases}$$

Aqui, falta comentar que, tal como foi definido antes,  $\tilde{X}(t) = t + a$ , com  $a$  constante. Assim, para recuperar o sistema anterior, basta impor  $\tilde{X}(0) = a = 0$ . Contudo, um fator  $a \neq 0$  não impede que uma interpretação física seja dada. A única diferença é que, nesse último caso, a rigor,  $t$  é a variável tempo transladada por um fator  $a$ .

**Definição 1.76 (Espaços de Configuração e de Fase)** *De um lado, o conjunto  $V \subset \mathbb{R}^3$  sobre o qual o campo de forças  $f$  encontra-se definido, quando visto como o conjunto dos vetores que  $X(0)$  pode assumir (ou como o conjunto que contém todas as soluções de  $mX'' = f(t, X)$ ), é chamado espaço de configurações. Por outro lado, o conjunto  $V \times \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  visto como o conjunto dos vetores que  $(X(0), v(0))$  pode assumir (ou como o conjunto que contém todas as soluções do sistema formado por  $X'(t) = v(t)$  e por  $v'(t) = f(t, X(t))/m$ ), é chamado espaço de fase (ou espaço de estados).*

Uma vez que o movimento é descrito como tendo uma causa (um campo de forças resultante), é imprescindível efetuar um estudo mais detalhado dessas causas e desses campos. Para tanto, o caso particular dos campos de forças da forma  $f(t, X) = f(X)$ , os quais originam sistema autônomos (por não haver dependência explícita de  $f$  com respeito ao tempo), será considerado a partir de agora.

**Definição 1.77 (Campo de Forças Central)** *Dado  $p \in \mathbb{R}^3$ , um campo de forças  $f: \mathbb{R}^3 - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  que pode ser escrito como  $f(X) = g(\|X - p\|^2)(X - p)$ , onde  $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$ , é chamado um campo de forças central.*

**Definição 1.78 (Campo de Forças do Tipo Gradiente)** *Se  $f$  é um campo de forças  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que pode ser escrito como  $f(X) = -\nabla U(X)$ , onde  $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$ , então  $f$  é chamado um campo de forças do tipo gradiente e a aplicação  $U$  é denominada ou uma função potencial ou um potencial escalar (mais simplesmente,  $U$  também pode ser dito um potencial).*

Repare agora o leitor que todo campo de forças central é também um campo de forças do tipo gradiente com um potencial associado. Nos termos da definição 1.77, esse potencial é dado por  $U(X) = -G(\|X - p\|^2)/2$ , em que  $G' = g$  e  $X \in \mathbb{R}^3 - \{p\}$ .

**Definição 1.79 (Campos de Forças Centrais Atrativo e Repulsivo)** *Um campo de forças central  $f: \mathbb{R}^3 - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  que pode ser escrito como  $f(X) = g(\|X - p\|^2)(X - p)$ , é dito atrativo se  $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_-^*$  e é dito repulsivo se  $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ .*

Há, ainda, outro caso que merece atenção especial: os campos de forças do tipo  $f(X, X') = f(X, v)$  e, mais exatamente, do tipo  $f(X, v) = a(X) + b(X, v)$ , onde  $a: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  (em que  $V$  é o espaço de configurações) e onde  $b: V \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  são aplicações de classe  $C^1$  sendo  $b(X, v) = -h(X)v$ , com  $h(V) \subset \mathbb{R}_+^*$ . Campos desse tipo são denominados campos de forças dissipativas, pois não preservam volume no espaço de estados, ao contrário, o reduzem. Por sua vez, o termo  $b(X, v) = -h(X)v$  de  $X'' = f(X, X')$  é designado termo dissipativo.

A fim de colocar a afirmação anterior em termos mais formais, considere-se definido o volume em  $V \times \mathbb{R}^n$  de maneira inteiramente análoga ao modo como se definiu volume em  $\mathbb{R}^3$  quando do estudo do sistema de Lorenz. Ou seja, dado  $B \subset V \times \mathbb{R}^n$ , o volume de  $B$  é definido por

$$v(B) = \int_{V \times \mathbb{R}^n} \mu(X, v) dX dv,$$

em que

$$\mu(X, v) = \begin{cases} 1 & ((X, v) \in B) \\ 0 & ((X, v) \notin B) \end{cases},$$

quando essa integral resultar em um número e, do contrário, diz-se que  $B$  não possui volume.

Fixado o conjunto  $B$ , também será preciso definir o conjunto  $B_\tau$  da seguinte maneira:  $w \in B$  se, e somente se,  $(X(\tau), v(\tau)) \in B_\tau$ , onde  $(X(t), v(t))$  é a solução do sistema formado pelas equações  $X' = v$  e  $v' = f(X, v)$  tal que  $(X(0), v(0)) = w$ . Nessas condições, um campo  $f(X, v) = a(X) - h(X)v$  é tal que  $v(B_t)$  visto como uma função real  $v(B_t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , a qual associa a cada  $t \in \mathbb{R}$  um valor  $v(B_t) \in \mathbb{R}_+$ , é decrescente, conforme constata-se a partir da aplicação do Teorema de Liouville, afinal,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (v, f(X, v)) &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial v_x} + \frac{\partial f_2}{\partial v_y} + \frac{\partial f_3}{\partial v_z} = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial v_x} + \frac{\partial f_2}{\partial v_y} + \frac{\partial f_3}{\partial v_z} = -3h(X) < 0, \end{aligned}$$

onde foi usado que  $f = (f_1, f_2, f_3)$ ,  $X = (x, y, z) \in V$  e  $v = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ . Essa é a justificativa para que tais sistemas sejam designados dissipativos.



# Métodos e Técnicas de Controle de Caos: Uma Breve Revisão

---

Controle é aquilo que, de modo geral, distingue os fenômenos inerentemente naturais dos eventos causados e projetados pelo ser humano. O controle de um sistema (seja este físico, mecânico, biológico ou outro qualquer) consiste na governança de seu comportamento, a fim de garantir a sua otimalidade ou, simplesmente, a melhoria de suas condições. Introduzir modificações em um equipamento, em uma lavoura ou em um experimento realizado em laboratório, para o alcance de uma dada finalidade, são ações as quais podem ser realizadas de inúmeras maneiras. A teoria de controle investiga tais processos, visando, sobretudo, a otimização.

Para aplicar-se a teoria de controle, alguns fluxos tridimensionais que exibem comportamento caótico e seus respectivos recíprocos estabilizados foram escolhidos. Mais precisamente, agora os sistemas de Chen e de Rössler, bem como um sistema mecânico apresentado mais a frente, serão investigados; isso será feito sob o ponto de vista da teoria de controle de caos.

Antes de, efetivamente, apresentar-se os sistemas listados acima, enfatiza-se que, nessa etapa, somente irão ser efetuadas exposições de resultados já obtidos e já divulgados, em periódicos científicos internacionais, nas três últimas décadas, os quais serão referenciados já no início de cada apresentação. Destarte, a originalidade do conteúdo desta seção reside apenas nas interpretações e nas explicações que serão fornecidas a respeito dos procedimentos e das técnicas apresentados.

Os métodos de controle são bastante diversificados e possuem aplicações diversas. Assim, no objetivo de prosseguir no estudo do controle de sistemas, é importante dividir a teoria de controle clássica em suas duas abordagens: controle via feedback (ou controle em malha fechada) e controle sem feedback (ou controle em malha aberta).

No primeiro caso, há a influência de atuadores (ou controladores) que guiam o sistema de interesse à sua condição ótima (ou condição desejada) de operação e, basicamente, a ação dos atuadores é programada de maneira a considerar, a todo instante, as informações fornecidas por

sensores os quais colhem dados sobre esse mesmo sistema. Nessa situação, supõe-se, geralmente, que a leitura da condição real do sistema ocorre simultaneamente à operação dos controladores. Na ausência de feedback, os atuadores são pré-programados e controlam o sistema de interesse sem dispor, para tanto, de informações a respeito do comportamento real do sistema.

## 2.1 Estabilização do Sistema Caótico de Chen

O sistema dinâmico contínuo e suave de Chen é o fluxo associado ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x'(t) = a(y(t) - x(t)) \\ y'(t) = (c - a)x(t) - x(t)z(t) + cy(t), \\ z'(t) = x(t)y(t) - bz(t) \end{cases}$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes.

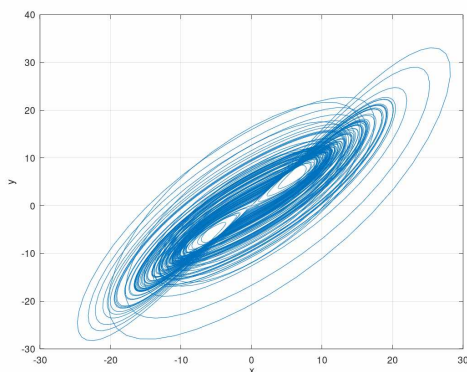


Figura 2.1: Projeção, no plano  $xy$ , da imagem do intervalo  $[0; 75]$  pela solução do sistema de Chen (com parâmetros  $a = 35$ ,  $b = 3$  e  $c = 28$ ) a qual satisfaz a condição inicial  $(1, 0, 20)$ .

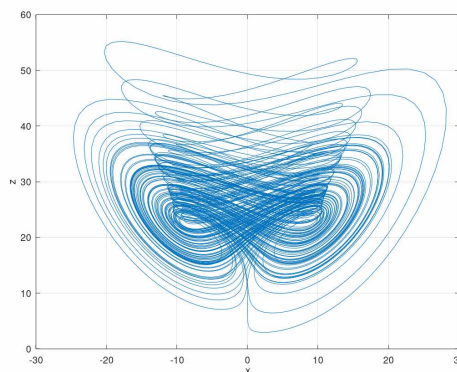


Figura 2.2: Projeção, no plano  $xz$ , da imagem do intervalo  $[0; 75]$  pela solução do sistema de Chen (com parâmetros  $a = 35$ ,  $b = 3$  e  $c = 28$ ) a qual satisfaz a condição inicial  $(1, 0, 20)$ .

No artigo [16], Yassen faz uso do critério de estabilidade de Lyapunov apresentado pelo Teorema 1.46 e do critério de estabilidade matricial fornecido no Teorema 1.50 a fim de comprovar a estabilização de equilíbrios inicialmente instáveis existentes no sistema de Chen. Para iniciar a tentativa de controle do sistema em questão a partir da estabilização de equilíbrios, é preciso determinar tais pontos fixos, os quais poderão depender de alguns dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Efetuado esse cálculo, obtém-se que  $F(x, y, z) = (a(y - x), (c - a)x - xz + cy, xy - bz)$  é vetor nulo somente para  $X_0 = (0, 0, 0)$ , para  $X_1 = (\gamma, \gamma, 2c - a)$  e para  $X_2 = (-\gamma, -\gamma, 2c - a)$ , onde  $X_i = (x_i, y_i, z_i)$  com  $i = 0, 1, 2$  e onde  $\gamma = \sqrt{b(2c - a)}$ .

Os valores considerados e fixados em [16] são  $a = 35$ ,  $b = 3$  e  $c = 28$ , números, para os quais, o sistema de Chen possui um atrator caótico. A fim de classificar os equilíbrios  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  quanto à sua estabilidade, considere-se agora os autovalores das matrizes  $JF(X_0)$ ,  $JF(X_1)$  e  $JF(X_2)$ , os quais serão listados na sequência. Os autovalores de  $JF(X_0)$  são dados por  $-b < 0$ ,

$$\frac{c-a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(c-a)^2 + 4a(2c-a)} > 0,$$

$$\frac{c-a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(c-a)^2 + 4a(2c-a)} < 0.$$

Os autovalores de  $JF(X_1)$  e de  $JF(X_2)$  coincidem e são dados por  $a + b - c$ ,  $bc$  e  $2ab(2c - a)$ , sendo todos esses positivos para os valores adotados acima para os parâmetros do sistema. Nessas condições,  $X_0$ ,  $X_1$  e  $X_2$  são equilíbrios hiperbólicos e instáveis, conforme se depreende do estudo de  $JF(X_i)$ , para  $i = 0, 1, 2$ , a partir do critério apresentado no Teorema 1.50 em conjunto com o fato enunciado no Teorema 1.51.

Agora, para promover a esperada estabilização dos pontos fixos, considere-se um sistema de Chen modificado pelo acréscimo de funções  $f_1(x(t), \bar{x}) = -k_1(x(t) - \bar{x})$ ,  $f_2(y(t), \bar{y}) = -k_2(y(t) - \bar{y})$  e  $f_3(z(t), \bar{z}) = -k_3(z(t) - \bar{z})$ , em que  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  é um ponto de equilíbrio do sistema de Chen original e que, note-se, permanecerá sendo equilíbrio após o acréscimo de  $f := (f_1, f_2, f_3)$  da seguinte maneira

$$\begin{cases} x'(t) = a(y(t) - x(t)) + f_1(x(t), \bar{x}) \\ y'(t) = (c - a)x(t) - x(t)z(t) + cy(t) + f_2(y(t), \bar{y}) \\ z'(t) = x(t)y(t) - bz(t) + f_3(z(t), \bar{z}) \end{cases}$$

isso, utiliza-se as condições de estabilidade indicadas acima na Subsecção 1.1.5. Em geral, não é preciso adicionar os três novos termos  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  para se obter essa estabilização. Por exemplo, conforme calculou Yassen, o equilíbrio  $X_1$  do sistema de Chen é originalmente instável e torna-se assintoticamente estável para  $k_1 = k_3 = 0$  e  $k_2 > 0$ , valores, para os quais,  $J(F + f)(X_1)$  possui apenas autovalores negativos. De fato, para  $k_1 = k_3 = 0$  e  $k_2 > 0$ ,

$$J(F + f)(X_1) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c - k_2 & -\gamma \\ \gamma & \gamma & -b \end{bmatrix},$$

matriz cujos autovalores são as raízes de

$$\lambda^3 + \lambda^2(k_2 + a + b - c) + \lambda[b(k_2 + a - c) + ak_2 + \gamma^2] + abk_2 + 2a\gamma^2 = 0,$$

as quais, pelo Teorema 1.50, são todas negativas. De maneira inteiramente similar, calcula-se os

autovalores de  $J(F + f)(X_2)$  e prova-se a estabilização de  $X_2$  (equilíbrio originalmente também instável para os mesmos valores). A fim de confirmar esses resultados, basta aplicar-se ainda o Teorema 1.51.

Yassen ainda faz uso de uma função de Lyapunov global para, empregando o Teorema 1.46, modificar o sistema de Chen de modo a preservar o equilíbrio  $X_0 = \vec{0}$  e torná-lo estável em um sistema modificado. O autor mostra que, se  $k_1, k_3 \geq 0$  e se  $k_2 \geq c$ ,  $X_0$  é assintoticamente estável e é atrator global. Para verificar isso, observe-se que a função de classe  $C^1$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} \left( \frac{(a-c)}{a} x^2 + y^2 + z^2 \right),$$

satisfaz os seguintes critérios:

1.  $V(X_0) = 0$ ;
2.  $V(X) > 0$ , para todo  $X \in \mathbb{R}^3 - X_0$ ;
3. para  $k_1, k_3 \geq 0$ ,  $k_2 \geq c$ ,  $X \neq X_0$ ,

$$\langle \nabla V(X), (F + f)(X) \rangle = -(a + k_1) \frac{(a-c)}{a} x^2 - (k_2 - c)y^2 - (b + k_3)z^2 < 0.$$

Uma outra maneira pela qual Yassen estabiliza o equilíbrio  $X_0$  será agora indicada. Considere-se, para isso, a introdução de funções  $f_1, f_2, f_3$  tal como antes. Porém, agora sejam essas funções dadas por  $f_1(x(t), 0), f_3(z(t), 0) = 0$  e  $f_2(y(t), 0) = -k_1 a(y(t) - x(t)) - k_2 y(t)$ , onde já foi utilizado que  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = X_0 = (0, 0, 0)$ . Nesse caso, sendo  $k_1 < 1 - c/a$ , a função

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} \left( x^2 + \frac{a(y^2 + z^2)}{a(1 - k_1) - c} \right),$$

verifica:

1.  $V(X_0) = 0$ ;
2.  $V(X) > 0$ , para todo  $X \in \mathbb{R}^3 - X_0$ ;
3. para  $k_1 < 1 - c/a$ ,  $ak_1 + k_2 \geq c$ ,  $X \neq X_0$ ,

$$\langle \nabla V(X), (F + f)(X) \rangle = -ax^2 - \frac{a}{a(1 - k_1) - c} (k_1 a + k_2 - c)y^2 - \frac{ab}{a(1 - k_1) - c} z^2 < 0.$$

Logo, novamente,  $X_0$  é assintoticamente estável e é atrator global.

Repare-se que, para valores de  $k_1, k_2$  e  $k_3$  os quais tornem  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  assintoticamente estável

e para  $(x(t), y(t), z(t))$  tal que  $(x(0), y(0), z(0))$  esteja contido na bacia de atração de  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t), y(t), z(t), \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \vec{0}. \quad (2.1)$$

Essa é uma interessante vantagem da estabilização de um equilíbrio de um sistema por meio do controle com feedback: a interferência do mecanismo controlador reduz-se com o passar do tempo e tende a zero quando o tempo tende ao infinito.

Após os primeiros exemplos, é cabível, agora, interpretar os métodos de controle acima empregados. Para tanto, recorde-se de que um sistema de equações diferenciais ordinárias, tais como o de Chen, consistem, no presente contexto, em modelos matemáticos de sistemas concretos, sejam esses mecânicos, elétricos ou outros quaisquer. Assim, uma solução de uma tal equação diz como se dá a evolução temporal do sistema físico o qual modela; isso ocorre por meio da indicação de como as variáveis (por exemplo,  $x$ ,  $y$  e  $z$ ) do processo físico modelado se comportam ao longo do tempo.

Em suma, até aqui, esteve subentendido que as ditas condições do sistema eram, em realidade, as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Essas variáveis são, simplesmente, as grandezas físicas escolhidas a fim de se estabelecer o monitoramento do sistema estudado. Se o acompanhamento de tais variáveis, ou ao menos de alguma variável, é feito a todo instante, é possível realizar, então, o controle via feedback.

Mais especificamente, na estabilização de equilíbrios do sistema de Chen, as funções  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  consistem na programação dos atuadores, a qual se dá por meio da escolha do equilíbrio  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  e dos valores  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ . Quando essas funções são somadas ao sistema de equações original, fica representada a atuação dos controladores. Finalmente, uma solução do novo sistema de equações consiste em uma representação do sistema originalmente caótico e, agora, controlado.

Considere-se, nesse momento, as funções  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  presentes em  $f_1(x(t), \bar{x})$ ,  $f_1(y(t), \bar{y})$  e em  $f_1(z(t), \bar{z})$ . Por conta das considerações feitas nos parágrafos anteriores, o leitor pode intuir, assertivamente, que  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ , quando estão nos termos somados ao sistema inicial, representam a leitura feita por sensores que monitoram o comportamento de um sistema real. Mas, de maneira simultânea,  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ , se for fornecida uma condição inicial, podem ser vistas como uma solução do sistema de equações diferenciais modificado pela aplicação do controle.

Uma equivocada conclusão tida após a leitura do parágrafo anterior seria o entendimento de que há uma ambiguidade atrelada aos termos  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ . Para perceber onde situa-se o equívoco, recorde-se o leitor como foi apresentado o controle via feedback: foi dito que a leitura da condição real do sistema ocorre simultaneamente à operação dos controladores. Contudo, não é exato (apesar de poder ser uma boa aproximação) afirmar que a leitura feita por sensores é concomitante à ação de controle e que essa resposta às medições feitas é instantânea.

De fato, suponha-se que transcorra, entre a leitura efetuada por um sensor e a resposta de

um atuador que considera essa leitura em sua ação, um intervalo de tempo  $\delta$ . Sob essa hipótese, o sistema de equações adequado para modelar a situação seria esse:

$$\begin{cases} x'(t) = a(y(t) - x(t)) + f_1(x(t - \delta), \bar{x}) \\ y'(t) = (c - a)x(t) - x(t)z(t) + cy(t) + f_2(y(t - \delta), \bar{y}) \\ z'(t) = x(t)y(t) - bz(t) + f_3(z(t - \delta), \bar{z}) \end{cases}$$

Aqui, não há risco de confusão.  $(x(t - \delta), y(t - \delta), z(t - \delta))$  representa a leitura da condição real do sistema no instante  $t - \delta$ ,  $f(x(t - \delta), y(t - \delta), z(t - \delta))$  remete à atuação dos controladores no instante  $t$  (tendo como base os dados colhidos pelos sensores no instante  $t - \delta$ ) e  $(x(t), y(t), z(t))$  descreve a situação do sistema no instante  $t$ .

## 2.2 Controle do Sistema Dinâmico de Rössler

O artigo [4] aplica a teoria de controle ao sistema de Rössler, o qual consiste no fluxo associado ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) - z(t) \\ y'(t) = x(t) + ay(t) \\ z'(t) = c + (x(t) - b)z(t) \end{cases},$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes. Sendo que esse sistema possui dois equilíbrios:  $(a\sigma_+, -\sigma_+, \sigma_+)$  e  $(a\sigma_-, -\sigma_-, \sigma_-)$ , onde

$$\sigma_{\pm} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Uma técnica de controle proposta em [4] para a estabilização desse sistema efetua a adição das funções  $u_1(y(t)) = -2ay(t)$  e  $u_2(x(t), z(t)) = -z(t)x(t) - c$  da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) - z(t) \\ y'(t) = x(t) + ay(t) + u_1(y(t)) \\ z'(t) = c + (x(t) - b)z(t) + u_2(x(t), z(t)) \end{cases}.$$

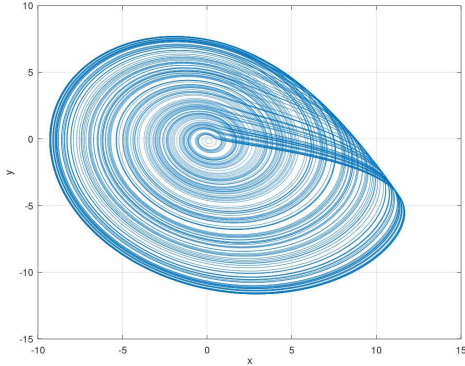


Figura 2.3: Projeção, no plano  $xy$ , da imagem do intervalo  $[0; 1000]$  pela solução do sistema de Rössler (com parâmetros  $a = 0.25$ ,  $b = 7$  e  $c = 1$ ) a qual satisfaz a condição inicial  $(0, 0, 0)$ .

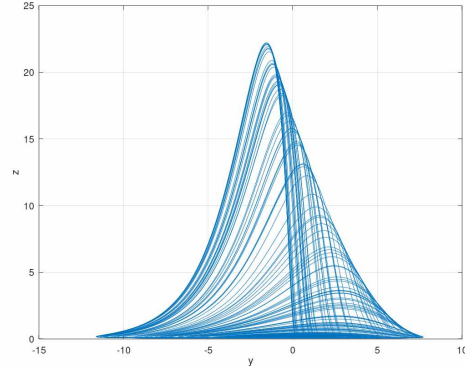


Figura 2.4: Projeção, no plano  $yz$ , da imagem do intervalo  $[0; 1000]$  pela solução do sistema de Rössler (com parâmetros  $a = 0.25$ ,  $b = 7$  e  $c = 1$ ) a qual satisfaz a condição inicial  $(0, 0, 0)$ .

Isso resulta em

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) - z(t) \\ y'(t) = x(t) - ay(t) \\ z'(t) = -bz(t) \end{cases},$$

sistema o qual, para  $a, b > 0$ , possui a origem como equilíbrio assintoticamente estável. Para chegar a essa conclusão, basta calcular os autovalores da matriz associada a esse sistema linear e ver que a parte real de todos eles é negativa.

Observe-se que, diferentemente do caso em que o controle por feedback era executado de maneira a conservar-se e a estabilizar-se um dentre os pontos de equilíbrio originais de um sistema:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_2(x(t), z(t)) = -c \neq 0,$$

quando  $c \neq 0$ . Isso demanda um maior trabalho dos atuadores, o qual nunca se reduz assintoticamente a zero. Assim, fica evidente o quão diversos são os métodos possíveis para a estabilização de um sistema e como é imprescindível, quando da implementação de estratégias de controle, realizar-se uma análise do caso em particular.

Para exemplificar a afirmação anterior, recorde-se que a estabilização de equilíbrios pré-existent em um sistema de interesse possui a vantagem evidenciada em (2.1). Todavia, esse método não permite a escolha de um comportamento arbitrário para o sistema a ser estabilizado (a escolha limita-se aos equilíbrios presentes no sistema). Em contrapartida, ao efetuar-se a introdução de um equilíbrio o qual não estava presente no sistema original, é possível escolher uma condição arbitrária para o comportamento do sistema controlado, mas existe a desvantagem

pontuada logo acima a se considerar.

### 2.3 Controle de Vibrações Caóticas em um Sistema Mecânico

Até aqui, foram investigados apenas "toy models", isto é, sistemas demasiadamente simplistas os quais visam elucidar um determinado mecanismo, processo ou fenômeno, sem, entretanto, consistirem em modelos matemáticos robustos e fidedignos. Na intenção de introduzir o controle de caos em sistemas com uma interpretação física realística (e, conseqüentemente, sistemas que são pouco idealizados, não autônomos, não polinomiais) será estudado, agora, o artigo [15].

Na referência [15], os autores investigam os modelos matemáticos de dois sistemas mecânicos: um arco elástico não linear e um regulador de volante centrífugo. Em ambos os casos, as equações diferenciais que modelam esses fenômenos são não autônomas. Quanto ao arco elástico não linear, a equação proposta para a modelagem do problema é a seguinte:

$$x''(t) = -2\xi x'(t) - x(t) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2(t) + \alpha^2}} \right) + f_0 \cos(\omega t).$$

Na obtenção desse modelo para o arco elástico não linear, faz-se uso da Segunda Lei de Newton (dada pela Definição 1.75). Nessa última equação,  $-2\xi x'(t)$  é um termo dissipativo o qual representa as forças viscosas (tais como o atrito e a resistência do ar), dissipativas. Por sua vez, o termo o qual envolve  $x(t)$  representa a força elástica do arco, a qual, enfatiza-se, é não linear. Finalmente,  $f_0 \cos(\omega t)$ , termo dependente do tempo de modo explícito, remete a uma força periódica, aplicada sobre o sistema, mas causada por um agente externo.

Como feito antes, deve-se, agora, obter um sistema de equações diferenciais ordinárias autônomo, tal como já foi feito na Seção 1.6. Fazendo-se então a substituição  $x'(t) = y(t)$  e adotando-se  $z'(t) = 1$  juntamente com a condição de valor inicial  $z(0) = 0$ , chega-se a

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -2\xi y(t) - x(t) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2(t) + \alpha^2}} \right) + f_0 \cos(\omega z(t)) \\ z'(t) = 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Em [2], foi divulgado que esse sistema apresenta comportamento caótico para os parâmetros  $\xi = 0,01\sqrt{2}$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $f_0 = 0,8$  e  $\omega = 0,75\sqrt{2}$ . A conclusão pelo comportamento caótico para tais valores ocorreu a partir da obtenção de um expoente de Lyapunov positivo associado a uma órbita desse sistema e a alguma direção apropriadamente escolhida. Logo abaixo, na Figura



2.5, está exibida parte da imagem de uma solução de tais equações, de maneira a evidenciar a caoticidade do sistema.

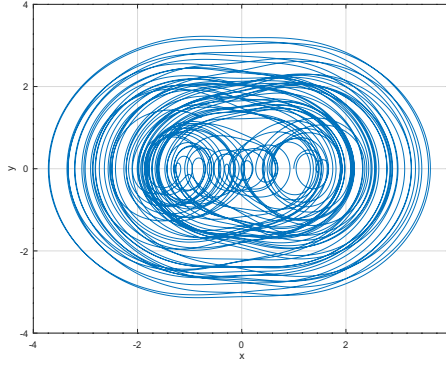


Figura 2.5: Projeção, no plano  $xy$ , da imagem do intervalo  $[0; 500]$  pela solução  $(x(t), y(t), z(t))$  do sistema de equações 2.2 para os valores  $\xi = 0,01\sqrt{2}$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $f_0 = 0,8$  e  $\omega = 0,75\sqrt{2}$  e para a condição inicial  $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 0)$ .

Quanto ao regulador de volante centrífugo, aplicando-se a Segunda Lei de Newton e o método que reescreve sistemas de segunda ordem não autônomos como sistemas de primeira ordem autônomos, escreve-se, agora, o sistema de equações que o modela:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = (e + n^2 z^2(t)) \sin(x(t)) \cos(x(t)) - (e + \frac{g}{l}) \sin(x(t)) - by(t) \\ z'(t) = \frac{\alpha \cos(x(t)) - F}{I} - a \sin(\varphi) \\ \varphi'(t) = \Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

Para os valores  $n = 3,0$ ,  $l = 0,5$ ,  $a = 0,8$ ,  $\Omega = 1,0$ ,  $b = 0,4$ ,  $F = 0,35$ ,  $I = 1,2$ ,  $e = 0,3$ ,  $g = 9,8$  e  $\alpha = 0,432$ , esse sistema é comprovadamente caótico. Isso está ilustrado, logo a seguir, pela Figura 2.6.

No artigo [15], também é proposta uma técnica de controle via feedback a qual se dá a partir da soma do termo de controle  $sy(t)$  ao segundo membro da terceira equação do sistema 2.6, que fica

$$z'(t) = \frac{\alpha \cos(x(t)) - F}{I} - a \sin(\varphi) + sy(t).$$

O cálculo de alguns expoentes de Lyapunov associados a esse sistema para os parâmetros acima especificados e para  $s \in [-1; 1]$  permite concluir que, para alguns valores de  $s$  desse intervalo,

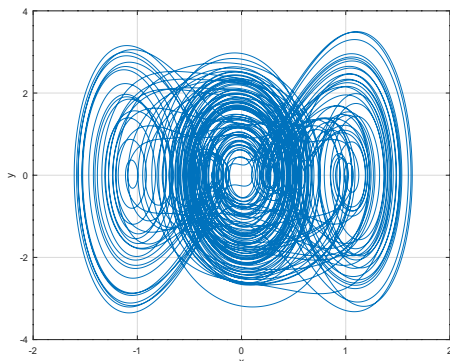


Figura 2.6: Projeção, no plano  $xy$ , da imagem do intervalo  $[0; 250]$  pela solução  $(x(t), y(t), z(t), \varphi(t))$  do sistema de equações 2.6 para os valores  $\xi = 0,01\sqrt{2}$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $f_0 = 0,8$  e  $\omega = 0,75\sqrt{2}$  e para a condição inicial  $(x(0), y(0), z(0), \varphi(0)) = (1, 0, 1, 0)$ .

o sistema é não caótico. Por exemplo, a estabilização do sistema ocorre para  $s = 0,045$  e para  $s = 0,54$ , quando todos os expoentes de Lyapunov associados a uma órbita do sistema foram calculados e comprovados como negativos.

---

# Algumas Aplicações da Teoria de Controle em Microscopia

---

## 3.1 O Microscópio de Força Atômica (AFM)

### 3.1.1 AFM, Microscopia de Alta Resolução e Controle por Feedback

No intento de aplicar parte da teoria precedente ou, mais exatamente, revelar a importância dos mecanismos de controle (e, em especial, dos mecanismos de controle via feedback), um importante instrumento será agora estudado: o microscópio de força atômica. Essa técnica de microscopia não faz uso direto nem de fótons, nem de elétrons. Baseada nas forças de atração e de repulsão entre uma sonda rígida e afiada e um objeto alvo de estudo, a técnica, em algumas de suas etapas (as quais serão discriminadas mais adiante), exige a atuação de um controle via feedback.

São várias as vantagens oferecidas pelo AFM em relação às demais técnicas de microscopia, sejam essas ópticas ou sejam essas eletrônicas. Dentre as referidas vantagens, merecem destaque a sensibilidade e as resoluções nanométrica e, até mesmo, atômica proporcionadas por tal instrumento, a um custo baixo (em relação ao custo de outros microscópios que ofereçam uma resolução comparável). Além disso, o AFM destaca-se por: também comparativamente, apresentar pequenas dimensões; ser uma técnica de fabricação por nanolitografia de baixo custo; consistir em uma ferramenta de controle de movimento preciso em escala nanométrica.

Um aspecto que ainda distingue o AFM de outros instrumentos é a habilidade de medir distâncias verticais. Outros equipamentos que atendam a essa finalidade de medir distâncias verticais em microescala e em nanoescala e que permitem uma resolução similar apresentam maiores custos de operação e maiores dificuldades de instalação. Contudo, microscópios, em geral, oferecem apenas imagens planas e horizontais, sem nenhuma indicação de profundidade (dimensões verticais) ou com baixa resolução na direção vertical. Assim, o AFM permite o estudo topográfico da superfície de interesse e o executa oferecendo uma nitidez e um nível

de detalhamento fornecidos apenas por essa técnica; porém, não é útil, por exemplo, para a determinação de composições químicas.

Sendo empregado em áreas tão diversas como a engenharia genética e a nanorrobótica, esse tipo de microscopia possui evidente relevância. Porém, como finalmente cabe enfatizar, os níveis de precisão e de sensibilidade acima detalhados requerem um mecanismo controlador eficaz, com parâmetros de controle por feedback bem determinados. Nesse fato, reside a justificativa para o estudo, no presente contexto, do AFM, isto é, o estudo dos seus modos de operação e de suas ferramentas de controle. Para tanto, no devido momento, será apresentado um modelo matemático o qual permitirá ilustrar o aparato controlador de um AFM, bem como revelar como se aplicam alguns dentre os vários conceitos expostos em capítulos anteriores.

### 3.1.2 Os Componentes, o Funcionamento e o Controle de um AFM

Um AFM possui, em essência, três componentes: uma base, um computador e um controlador eletrônico. A base é o local em que se posiciona a amostra a ser analisada, assim como também um microscópio ótico o qual auxilia a seleção da área a ser investigada pelo AFM (a varredura pelo AFM de toda a extensão superficial de uma amostra seria dispendiosa e desnecessária). No computador, os dados são processados, as imagens são geradas e podem ser visualizadas pelo operador. Por sua vez, é o controlador eletrônico que movimentam a sonda em relação à amostra durante o processo de varredura da superfície da amostra, efetivando o controle e garantindo a obtenção de imagens com excelente resolução.

O aparato controlador de um AFM é composto por transdutores piezoelétricos, um transdutor de força e um circuito controlador. Antes de detalhar cada um desses componentes, cabe dizer que: transdutores são dispositivos que convertem diferentes tipos de energia entre si; materiais piezoelétricos são materiais os quais sofrem expansão quando aplica-se uma diferença de potencial entre suas extremidades.

No controle de um AFM, o transdutor de força mede a força resultante da interação entre a sonda e a amostra, correspondendo a um tipo de sensor. Por sua vez, o circuito eletrônico interpreta a informação lida e envia comandos para o mecanismo atuador, de maneira a efetivar o controle por feedback. Finalmente, o controle é aplicado quando os transdutores piezoelétricos (que são os atuadores nesse caso) movimentam a sonda com respeito à amostra.

É crucial frisar agora que todo esse processo de controle demanda grande precisão e uma série de cuidados. Por exemplo: de um lado, a sonda deve ser afiada para garantir uma adequada resolução; por outro lado, uma sonda mais afiada é mais propícia à quebra. Complementarmente a tudo isso, o mecanismo controlador deve ser rápido o bastante para garantir uma boa operação do AFM.

Outro ponto a ser considerado é que os materiais piezoelétricos, em geral, não se deformam linearmente com respeito ao potencial aplicado. Basicamente, existem dois tipos de comporta-

mentos não lineares e indesejados de um piezoelétrico: histerese e fluência. A histerese ocorre quando a configuração de um material é determinada por toda a sua história; isto é, a geometria atual do componente piezoelétrico sofre influência não apenas da diferença de potencial aplicada agora, mas também do histórico da aplicação de diferenças de potencial em suas extremidades. Por sua vez, a fluência se dá quando uma súbita variação de diferenças de potencial é aplicada e gera deformação permanente.

Do ponto de vista da teoria de controle, um mecanismo controlador pode envolver feedback ou pode ser implementado sem feedback. Ambas as estratégias podem ser utilizadas em um AFM para o contorno de comportamentos não lineares dos materiais piezoelétricos presentes nos motores que movimentam a amostra. Todavia, no caso de não feedback: é preciso que as condições de operação sejam pré-estabelecidas; aplica-se apenas à ocorrência de histereses. Se houver fluência, apenas um mecanismo de controle por feedback será capaz de efetivar o controle do sistema. Esse feedback: pode ser fornecido por sensores externos que, em tempo real, indiquem a posição da amostra; pode ser calibrado e garante alta controlabilidade; requer expressivo tempo para a sua calibração.

O emprego de um mecanismo de controle via feedback sobre a atuação dos transdutores piezoelétricos apresenta ainda outras vantagens, tais como uma mais fácil e mais rápida aplicação de zoom. Isso ocorre porque varreduras intermediárias da superfície de um material pela sonda (requeridas por um controle sem feedback), são necessárias quando há uma transição da análise de uma área mais larga para uma área menor com subseqüentes aumentos do zoom e da resolução da imagem gerada.

Finalmente, cabe expressar uma das poucas limitações do emprego de técnicas de controle via feedback em um AFM: na correção de histereses e de fluências, o controle via feedback só pode atuar sobre o movimento horizontal da sonda em relação à amostra, o qual é pré-definido. O controle de fluências e de histereses que afetem especificamente o material piezoelétrico do motor de movimento vertical, por sua vez, não pode ser feito com feedback. Assim, imposta essa restrição, como o controle de não feedback só se aplica a histereses, resta garantir que o AFM opere em uma faixa de parâmetros que evite a fluência dos componentes desse motor.

Com respeito, agora, à mensuração das forças de interação entre a sonda e a amostra, é preciso dizer que não há um meio único para isso. Todavia, dentre os medidores disponíveis para a determinação dessas forças, há um aparato empregado há mais tempo e mais amplamente e cujo funcionamento se dá a partir da incidência de um feixe de luz produzido por um laser, na extremidade do microcantilever que sustenta a amostra. Esse feixe de luz, então, é refletido pelo microcantilever (estrutura que suporta a sonda) e, finalmente, é direcionado a um fotodetector.

É importante ressaltar aqui que o sistema descrito imediatamente acima deve apresentar alta sensibilidade pois, como já foi dito, é necessária uma alta precisão na medida da força aplicada pela sonda sobre a amostra. Isso é imprescindível porque essa força de interação deve ser mínima, assim como deve ser mínima a pressão (razão entre a força e a sua área de aplicação)

que gera; afinal, uma grande pressão quebraria a sonda, a qual deve ser afiada a fim de garantir alta resolução ao AFM.

Um microcantilever, estrutura acima citada, é um cantilever em microescala e um cantilever é uma estrutura com uma extremidade fixada e com a outra extremidade livre para apoiar algum objeto e para, eventualmente, sofrer deflexão. Em um AFM, o microcantilever está afixado e apoia a sonda; suas deflexões são ditadas pela força de interação entre a sonda e a amostra. O laser refletido pela superfície do microcantilever é portanto desviado conforme essas deflexões ocorrem. Assim, o fotodetector, quando calibrado, ao revelar o desvio sofrido pela luz que lhe atinge, permite inferir a magnitude dessa força de interação.

Uma vez que haja sido apresentado o mecanismo de suporte da sonda, é importante descrever como ocorre o controle do movimento relativo entre a sonda e a amostra. Em alguns casos, é desejado que o microcantilever que apoia a sonda vibre ou em uma fase constante ou em uma amplitude constante durante a varredura da superfície da amostra. Também pode ser útil, em alguns tipos de análises, manter constante a força de interação entre a sonda e a amostra. Esses diferentes modos de operação de um AFM serão mais bem compreendidos à frente. Porém, desde já se esclarece que, em todos esses casos, o controle via feedback é indispensável.

Na tarefa de guiar a sonda até o contato com a amostra, emprega-se controle de não feedback. Esse mecanismo o qual posiciona a sonda é crucial, pois impede a sua quebra (inicialmente a vários milímetros acima da amostra, a sonda deve mover-se e parar a poucos nanômetros de distância dessa). Então, exatamente quando é estabelecida a interação entre sonda e amostra, o controle via feedback é ativado.

A forma da sonda utilizada em um AFM, em conjunto à topografia da superfície da amostra analisada e a outros fatores mais, irá determinar, criticamente, não só a imagem gerada pelo computador do microscópio, como também o quão fielmente essa imagem representa a topografia da superfície investigada. Dessarte, a definição da geometria da sonda e do microcantilever dependerá da finalidade de implemento dessa técnica de microscopia. Comumente, o microcantilever é retangular ou é triangular, a sonda é piramidal ou é cônica, mas esses formatos podem ser tão diversos quanto são variadas as aplicações de um AFM.

Os demais fatores que influenciam a qualidade e a representatividade das imagens obtidas com o AFM incluem a ocorrência de contaminação e as oscilações térmicas, mecânicas e acústicas. A presença de material contaminante na superfície da amostra pode afetar de múltiplas maneiras a obtenção das imagens e pode ser evitada, por exemplo, a partir da manutenção de um ambiente de vácuo no qual irá operar o AFM. Variações de temperatura, as quais geram dilatação térmica da amostra, interferem nas medições; as vibrações acústicas ou mecânicas que também interferem nas análises feitas por um AFM podem ser evitadas ao manter-se o AFM sobre uma base com baixa transmissão de vibrações.

Cabe agora compreender como é implementado o controle (invariavelmente, via feedback)

responsável por garantir que a ponta da sonda acompanhe a superfície da amostra durante a varredura. Uma tal estratégia de controle bastante prática e intuitiva é a otimização dos parâmetros PID, a ser feita para cada amostra escaneada pelo AFM. A fim de introduzir esse método, define-se agora a função (ou o sinal) erro,  $Z_{err}(t)$ , a qual consiste em uma comparação (cálculo da diferença) entre a leitura do sensor de força e as condições de operação pré-selecionadas. Além do sinal erro, também se define o sinal a ser enviado ao motor de movimento vertical para a efetivação do controle, a função  $Z_v(t)$ .

A relação entre os sinais  $Z_{err}$  e  $Z_v$  é dada por:

$$Z_v(t) = PZ_{err}(t) + I \int_0^t Z_{err}(t) dt + D \frac{dZ_{err}}{dt}(t), \quad (3.1)$$

em que  $P$ ,  $I$  e  $D$  são as constantes a serem determinadas de maneira a se otimizar o controle via feedback, por intermédio da minimização da integral do módulo da função erro. O termo integral da equação (3.1) é responsável por garantir que, em maior escala, a sonda acompanhe as ondulações superficiais. Em contrapartida, o termo diferencial garante a observação das características superficiais de menor escala. Uma vez que hajam sido combinados e otimizados, esses parâmetros permitem delinear, de maneira mais fidedigna, a topografia da superfície. A otimização dos parâmetros PID propriamente dita é feita de modo intuitivo e fica por conta do operador do AFM, que a executa, no laboratório, quando iniciam-se as primeiras varreduras da amostra pela sonda.

Apesar da finalidade inicial do desenvolvimento do AFM, isto é, a medição de características topográficas das superfícies de materiais, muitas outras propriedades físicas mensuráveis em escala nanométrica podem ser estudadas por meio desse microscópio. Para isso, é suficiente o desenvolvimento de sensores específicos para essa finalidade que possam ser posicionados na ponta da sonda e que sejam aptos a mensurar alguma propriedade ou característica de interesse, tal como, por exemplo, dureza, campos elétricos e magnéticos, temperatura.

No intuito de compreender, agora, os modos de funcionamento de um AFM, ou seja, as maneiras pelas quais a sonda interage com a amostra, é preciso distinguir três regiões. O espaço livre, região compreendida pelas distâncias entre sonda e amostra nas quais não existe qualquer interação entre ambas é a primeira região. A segunda, uma região à qual correspondem distâncias intermediárias, seria a região atrativa, na qual sonda e amostra experimentam uma força atrativa. Em terceiro lugar, há a região repulsiva, que compreende as menores distâncias possíveis entre sonda e amostra.

Também no intuito de compreender a interação entre a sonda e a amostra, é preciso considerar que as deflexões sofridas pelo microcantilever em decorrência das forças atrativas e repulsivas acima especificadas depende da geometria dessa estrutura. As forças elásticas associadas a essas deflexões podem então ser determinadas por meio do cálculo das dimensões do microcantilever

feito com o auxílio de um microscópio óptico ou eletrônico. Esse cálculo é importante quando as forças de interação são medidas indiretamente, por meio, por exemplo, do mecanismo anteriormente descrito, o qual emprega um feixe de laser refletido pelo microcantilever, na análise dessas forças. Afinal, as deflexões do feixe de luz serão ditadas não apenas pelas forças de interação entre a sonda e a amostra, mas também pela geometria do microcantilever.

Quanto aos modos de operação, é preciso distinguir entre o modo de contato e o modo vibratório. No modo de contato, o microcantilever varre a amostra com deflexão constante e em interação repulsiva com a amostra. Desde que os parâmetros PID sejam otimizados, essa força de interação será, idealmente, constante. Nesse modo, a força entre sonda e amostra será ditada pela deflexão do cantilever segundo a Lei de Hooke, pela qual, a distância orientada e vertical  $D$  correspondente à deflexão do microcantilever relaciona-se à força elástica  $F$ , que se opõe à interação repulsiva, conforme a equação seguinte:

$$F(D) = -kD,$$

onde  $k$  é uma constante elástica a ser determinada a partir do tipo de material que compõe o microcantilever, bem como por meio do estudo da geometria dessa estrutura, da maneira como foi antes descrito.

O modo de contato é particularmente importante na investigação de superfícies duras e/ou quando uma resolução superior a 50 nanômetros é desejada. Além disso, as frequências ressonantes do microcantilever que opera nesse modo encontram-se, normalmente, abaixo dos 50 KHz e a constante elástica fica abaixo de 1 N/m.

No modo vibratório, existem três grandezas de interesse: frequência, fase e amplitude. Nesse caso, a sonda é vibrada (por um sistema piezoelétrico) em uma faixa de distâncias superior àquela na qual se dá o modo de contato. Assim, as forças de interação, aqui, são menores; isso propicia o emprego desse modo em superfícies de menor dureza. Além disso, o modo vibratório é crucial quando a resolução requerida for menor que 50 nm; afinal, nesse caso, o ruído dos sinais captados será inferior ao inverso da frequência de vibração do microcantilever. Isso torna possível, portanto, alcançar uma capacidade de resolução (ao menos sob esse primeiro ponto de vista) arbitrariamente alta, ao empregar-se maiores frequências na vibração da sonda.

Quando opera em modo de contato, a sonda do AFM mantém a distância com respeito à amostra aproximadamente constante (de fato, é a força de interação que, efetivamente, deve ser preservada). No modo vibratório, entretanto, ou a fase, ou a amplitude de vibração é mantida constante. Assim, por meio da variação da frequência de excitação do microcantilever pelo sistema piezoelétrico, o controle via feedback atua preservando a fase ou a amplitude das oscilações.

Idealmente, a vibração do microcantilever deve ocorrer em sua frequência natural de ressonância  $\omega_0$ , que depende da constante elástica envolvida. Assim, essa frequência ressonante é



melhor descrita como uma função  $\omega_0(k)$ , dada por

$$\omega_0(k) = c\sqrt{k},$$

onde  $k$  é uma constante de proporcionalidade a ser determinada experimentalmente.

Apesar da possibilidade de operar o AFM em vácuo, essa é mais difícil e onerosa, sendo sua principal vantagem determinada pelo seguinte fato: materiais imersos no ar atmosférico apresentam uma contaminação de sua superfície, por exemplo, por vapores de água e por hidrocarbonetos. Essa contaminação afeta, principalmente, o modo vibratório de operação, quando a operação nesse modo ocorre no ar atmosférico.

O modo vibratório pode ser dividido em três regimes. O primeiro regime consiste em vibrar a sonda, com pequenas amplitude e força média, na superfície da camada de contaminação. A imagem assim gerada apresenta qualidade inferior, pois a contaminação preenche as nanoestruturas da superfície. No segundo caso, a sonda deve ser rígida e vibrar, com pequena amplitude e maior força média, dentro da camada de contaminação, interagindo diretamente com a superfície. No último regime, denominado regime de contato intermitente, a sonda é vibrada tanto no espaço livre quanto no interior da camada de contaminação. O terceiro regime é de fácil implementação, porém, torna mais frequente a quebra da sonda, a qual colide sucessivas vezes com a amostra.

Uma importante vantagem do modo vibratório é que a influência de forças horizontais (que prejudicam a mensuração das forças verticais e, conseqüentemente, das dimensões verticais ou das características topográficas) é amenizada com o seu emprego. Contudo, quando altas resoluções são exigidas e o modo vibratório é utilizado, o monitoramento da integridade da sonda é imprescindível. Em geral, imagens com elevada resolução, quando obtidas em meio ambiente, são feitas em modo vibratório.

Todos os fatos aqui descritos acerca do princípio de funcionamento de um AFM, assim como a respeito dos métodos de controle envolvidos na operação de tal microscópio, podem ser encontrados em [13].

### 3.2 Oscilador Harmônico Amortecido Forçado, Ressonância e Controle de um AFM

No intuito de melhor compreender o modo de operação vibratório da sonda de um AFM, será visto, a seguir, o modelo matemático para o oscilador harmônico amortecido e forçado. Antes, porém, considere-se o oscilador harmônico amortecido, comumente estudado em física básica, dado pela equação

$$mx''(t) = -cx'(t) - kx(t),$$

em que:  $m$  é a massa de uma partícula, sendo positiva;  $c$  é positiva e está presente no termo dissipativo, o qual representa a ação de forças viscosas;  $k$  é também positiva e está vinculada a um campo de força central atrativo, o qual pode representar forças elásticas, por exemplo. Adotando-se  $x'(t) = v(t)$  e, por simplicidade, supondo-se  $m = 1$ , é possível reescrever a equação anterior como um sistema de primeira ordem autônomo e linear:

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -kx(t) - cv(t) \end{cases}.$$

Calculando-se, então, os autovalores da matriz associada ao sistema anterior, encontra-se

$$\lambda_{\pm} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4k}}{2}.$$

Então, aplicando-se o Teorema 1.32, conclui-se ser o fluxo  $\phi$  determinado pelas equações acima topologicamente conjugado ao fluxo dado por

$$\phi^*(t, x_0, y_0) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^{-t}).$$

Em ambos os casos, a origem é equilíbrio assintoticamente estável e todas as soluções de valor inicial tendem à origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

Agora, o oscilador harmônico amortecido e forçado será brevemente explorado. Para tanto, será suposto que a força externa atuante sobre o sistema (ou seja, o termo que depende explicitamente do tempo  $t$ ) é periódica e modelada por uma função cosseno. A equação não autônoma correspondente é

$$x''(t) = -cx'(t) - kx(t) + f_0 \cos(\omega t), \quad (3.2)$$

na qual se supôs  $m = 1$ . Além disso, nessa equação,  $c$ ,  $k$ ,  $f_0$  e  $\omega$  são adotados como sendo positivos.

É fato conhecido que as soluções de tal equação podem ser expressas como uma soma entre  $\phi_t(x(0), x'(0))$ , solução do modelo para o oscilador harmônico amortecido, e uma solução particular da equação (3.2). Nesse caso,  $(x(0), x'(0))$  deve ser tomado de modo que as condições iniciais impostas sobre (3.2) sejam respeitadas pela soma anterior. Uma vez que o comportamento de  $\phi$  é conhecido e, a longo prazo, é desprezível para o entendimento do oscilador forçado (pois, quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\phi_t(x(0), x'(0)) \rightarrow \vec{0}$ ), a compreensão desse último sistema fica reduzida à obtenção de qualquer uma de suas soluções.

Será empreendida, então, a tentativa de obter-se uma função a qual satisfaça a equação

(3.2). Para tanto, será suposta uma solução periódica da forma

$$\tilde{x}(t) = A(\omega) \cos(\omega t - \theta(\omega)),$$

onde  $A$  e  $\theta$  são funções positivas do parâmetro  $\omega$  as quais, representam, respectivamente, a amplitude das oscilações (valor máximo de  $\tilde{x}(t)$ ) e a fase entre a força externa e a solução  $\tilde{x}(t)$ . Note-se que, pela periodicidade de  $\tilde{x}(t)$ , se, para cada  $\omega > 0$ , houver um valor para  $\theta(\omega)$  o qual torne  $\tilde{x}(t)$  solução da equação (3.2), então existirão infinitos outros valores possíveis para  $\theta(\omega)$ , para cada  $\omega > 0$ . Assim, além de assumir-se  $\theta(\omega) > 0$ , para que  $\theta(\omega)$  esteja bem definida, adote-se  $\theta(\omega) > 0$  como o menor valor dentre todos aqueles os quais atendem a condição anterior.

Substituindo-se  $\tilde{x}(t)$  em (3.2), chega-se a

$$-A(\omega)\omega^2 \cos(\omega t - \theta(\omega)) = cA(\omega)\omega \sin(\omega t - \theta(\omega)) - kA(\omega) \cos(\omega t - \theta(\omega)) + f_0 \cos(\omega t),$$

que pode ser reescrita como

$$(k - \omega^2)A(\omega) \cos(\omega t - \theta(\omega)) - c\omega A(\omega) \sin(\omega t - \theta(\omega)) = f_0 \cos(\omega t). \quad (3.3)$$

Nesse momento, será determinada  $\theta(\omega)$ . Com tal propósito, derive-se ambos os membros da equação anterior com respeito ao tempo:

$$-(k - \omega^2)A(\omega) \sin(\omega t - \theta(\omega)) - c\omega A(\omega) \cos(\omega t - \theta(\omega)) = -f_0 \sin(\omega t).$$

Fazendo-se então  $t = 0$ :

$$-(k - \omega^2)A(\omega) \sin(-\theta(\omega)) - c\omega A(\omega) \cos(-\theta(\omega)) = 0$$

$$\Rightarrow (k - \omega^2) \sin(\theta(\omega)) = c\omega \cos(\theta(\omega))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan(\theta(\omega)) = \frac{c\omega}{k - \omega^2}, & k \neq \omega^2 \\ \cos(\theta(\omega)) = 0, & k = \omega^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta(\omega) = \arctan\left(\frac{c\omega}{k - \omega^2}\right), & k \neq \omega^2 \\ \theta(\omega) = \frac{\pi}{2}, & k = \omega^2 \end{cases},$$

onde a função arco tangente (denotada por  $\arctan$ ) é a inversa da função tangente restrita ao conjunto  $[0; \pi/2) \cup (\pi/2; \pi)$ .

Agora é imediato notar que

$$\begin{cases} \sin(\theta(\omega)) = \frac{c\omega}{\sqrt{(k-\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \\ \cos(\theta(\omega)) = \frac{k-\omega^2}{\sqrt{(k-\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \end{cases} \quad (3.4)$$

e, na intenção de calcular  $A(\omega)$ , adote-se  $t = 0$  em (3.3):

$$(k - \omega^2)A(\omega) \cos(\theta(\omega)) + c\omega A(\omega) \sin(\theta(\omega)) = f_0;$$

na sequência, faça-se as substituições dos valores do sistema (3.4) na equação anterior, de modo a se encontrar

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(k - \omega^2)^2 + (c\omega)^2}}.$$

Para  $c = 0$ ,  $A(\omega)$  aumenta ilimitadamente quando  $\omega$  se aproxima de  $\sqrt{k}$ . Se  $2k > c^2 \neq 0$ , o valor de  $\omega$  para o qual a amplitude das oscilações é máxima é  $\omega_0 = \sqrt{k - c^2/2}$ , porém, será considerado aqui apenas o caso em que  $c^2$  é muito menor que  $k$ , de modo que  $\omega_0 \approx \sqrt{k}$ . Assim, o valor  $\omega_0 = \sqrt{k}$  origina um comportamento especial quando assumido por  $\omega$ . Como já foi dito antes,  $\omega_0$  é a frequência natural de oscilação do sistema (sendo também chamada frequência de ressonância) e, quando ocorre, o ângulo da fase, calculado mais acima, é  $90^\circ$ .

Finalmente, é possível compreender o controle de feedback do modo vibratório de um AFM, caso em que vale a aproximação  $\omega_0 = \sqrt{k}$ . As irregularidades da superfície de um material e as consequentes variações das distâncias entre sonda e amostra são análogas a variações de  $k$  para o modelo simples que se adotou acima, pois ambas representam variações da intensidade de interação entre sonda e amostra. Essas variações de  $k$  (ou seja, as variações da distância entre sonda e amostra) ocorreriam se o motor vertical da sonda estivesse desligado. Contudo, a mínima alteração de  $k$  implica uma modificação também de  $\omega_0$  e, portanto, de  $\theta(\omega)$ ; isso gera um sinal de erro, com base no qual atuará o mecanismo de controle anteriormente equacionado em conjunto com os parâmetros PID.

Assim, o mecanismo de feedback, estando ligado, mantém o ângulo de fase constante e igual a  $90^\circ$  por meio da indução de movimentos verticais do microcantilever e garante que a trajetória da sonda acompanhe a topografia da superfície, tal como é desejado. É então a informação acerca dos movimentos verticais induzidos pelo mecanismo de controle que será utilizada pelo computador do AFM para criar uma imagem representando a topografia da superfície analisada. Além disso, como  $\theta'(\omega)$  assume seu valor máximo em  $90^\circ$ , é para esse valor do ângulo de fase que o mecanismo de feedback apresentará máxima sensibilidade às características topográficas da superfície da amostra.

Outra maneira pela qual o controle via feedback do modo vibratório pode ser realizado é a manutenção da amplitude de vibração da sonda constante, caso, no qual, o mecanismo é

inteiramente similar. Abaixo, alguns gráficos de  $A(\omega)$  e de  $\theta(\omega)$  (para regimes em que  $k$  é maior que  $c^2$ ) estão plotados, para diferentes valores dos parâmetros  $k$  e  $c$ , a fim de auxiliar a compreensão do funcionamento do controle de um AFM operante em modo vibratório.

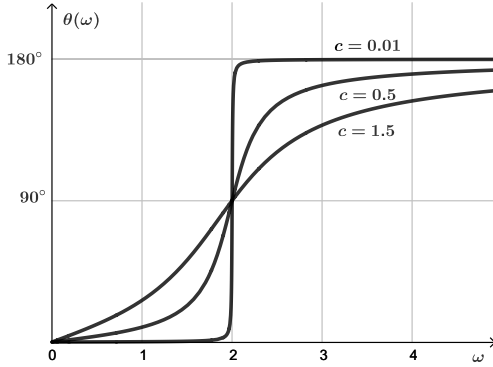


Figura 3.1: Gráficos de  $\theta(\omega)$  para  $k = 4$  e para diferentes valores de  $c$ .

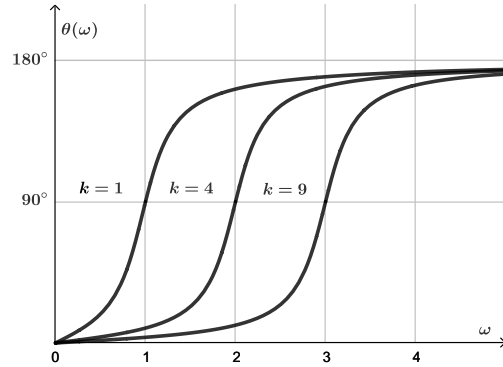


Figura 3.2: Gráficos de  $\theta(\omega)$  para  $c = 0.5$  e para diferentes valores de  $k$ .

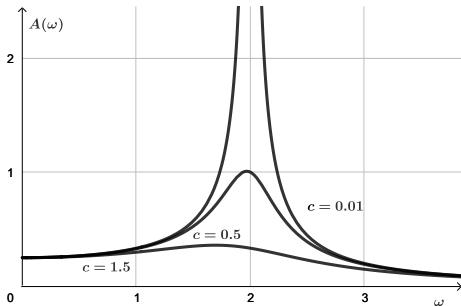


Figura 3.3: Gráficos de  $A(\omega)$  para  $f_0 = 1$ , para  $k = 4$  e para diferentes valores de  $c$ .

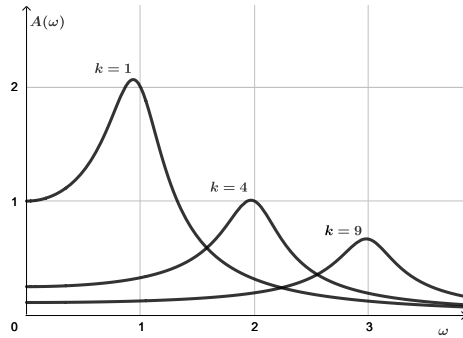


Figura 3.4: Gráficos de  $A(\omega)$  para  $f_0 = 1$ , para  $c = 0.5$  e para diferentes valores de  $k$ .

### 3.3 Um Modelo Matemático Para a Operação de um AFM

Agora, será feito um estudo da referência [9], na qual é exibida e explorada uma equação diferencial ordinária que modela o funcionamento de um AFM. Abaixo será apresentado tal modelo matemático; será descrito também o significado físico de cada um dos termos dessa equação. Todos os desenvolvimentos que serão apresentados nesta subsecção assim como os seus correspondentes detalhamentos podem ser encontrados no artigo supracitado.

Inicialmente, apresenta-se um modelo de potencial de Lennard-Jones (energia potencial) associado às interações atrativas e repulsivas entre dois átomos, o qual é dado pela equação (3.5). Tal como são os potenciais de Lennard-Jones, esse é um potencial com simetria esférica.

Restringido o estudo desse sistema a uma única direção e, em particular, à direção principal em que oscila o microcantilever de um AFM, assim como representando esse eixo pela variável  $x$  e a posição de equilíbrio da sonda afixada ao microcantilever por  $z_0$ , os autores de [9] propõem o seguinte potencial:

$$U(x, z_0) = \frac{A_1 R}{1260(z_0 + x)^7} - \frac{A_2 R}{6(z_0 + x)}. \quad (3.5)$$

Dado o termo de energia potencial, obtém-se o campo de forças de Van der Waals associado  $F_{VdW}$ :

$$F_{VdW}(x, z_0) = -\frac{\partial U}{\partial x}(x, z_0) = \frac{A_1 R}{180(z_0 + x)^8} - \frac{A_2 R}{6(z_0 + x)^2},$$

onde  $A_1$ ,  $A_2$  e  $R$  são constantes positivas.

Esse campo de forças, derivado de um potencial simétrico, é central (veja o leitor a Definição 1.77) e apresenta dois termos, os quais são, de acordo com a Definição 1.79, repulsivo e atrativo. Nessa interação, que é dada pelas forças de Van der Waals, há o predomínio de forças atrativas em grandes distâncias e o predomínio de forças repulsivas a curtas distâncias.

Outra interação (considerada com menor frequência em trabalhos que estudam ou que simulam o funcionamento de um AFM) também considerada em [9] é o efeito Casimir. A então designada força de Casimir, que pode ser atrativa ou repulsiva e que será denotada por  $F_{cas}$ , é então representada pela equação

$$F_{cas}(x, z_0) = \pm \frac{hc_l \pi^2}{240(z_0 + x)^4},$$

em que  $h$  é a constante de Planck e onde  $c_l$  é a velocidade da luz.

A elasticidade do microcantilever (a estrutura que apoia a sonda e que sofre oscilações) é devida a uma força elástica, conservativa, a qual será representada por

$$F_k(x) = -k_l x - k_{nl} x^3,$$

com  $k_l$  e  $k_{nl}$  sendo constantes positivas. Nessa equação observa-se um termo linear (Lei de Hooke), juntamente com um termo não linear, que melhor aproxima o comportamento real de uma estrutura mecânica com uma extremidade livre para oscilar.

Falta agora estabelecer os campos de forças dissipativas os quais são de interesse nesse problema. O conceito de campos de forças dissipativas foram definidos e discutidos ao final da Secção 1.6. Esses correspondem à dissipação de energia do sistema e são de dois tipos: o primeiro tipo é devido ao amortecimento estrutural do microcantilever e será dado por

$$F_c(x) = -c_d x',$$

com  $c_d$  constante e positivo; o segundo está relacionado à interação entre a sonda e a superfície

da amostra e é equacionado por

$$F_{cs}(x, x', z_0) = -\frac{\mu_{eff}\eta^3 l}{(z_0 + x)^3} x',$$

em que  $\mu_{eff}$  é o coeficiente de viscosidade efetiva e onde  $\eta$  e  $l$  são a largura e o comprimento do microcantilever.

Resta considerar, agora, a força externa periódica aplicada sobre o microcantilever a qual faz essa estrutura vibrar e que faz o AFM operar em modo vibratório. Para tanto, será introduzido agora um termo não autônomo, isto é, uma função dependente do tempo de maneira explícita. Esse termo periódico será dependente das constantes  $\omega$  (atrelada à frequência) e  $f_0$  (a amplitude) e será dado por  $f_0 \cos(\omega t)$ .

Finalmente, aplicando a Segunda Lei de Newton, apresentada na Definição 1.4, chega-se à expressão

$$\begin{aligned} mx''(t) = & F_k(x(t)) + F_c(x'(t)) + F_{cs}(x(t), x'(t), z_0(t)) + \\ & + F_{VDW}(x(t), z_0(t)) + F_{cas}(x(t), z_0(t)) + f_0 \cos(\omega t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} mx''(t) = & -k_l x(t) - k_{nl} x(t)^3 - c_d x'(t) - \frac{\mu_{eff}\eta^3 l}{(z_0(t) + x(t))^3} x'(t) + \frac{A_1 R}{180(z_0 + x)^8} + \\ & - \frac{A_2 R}{6(z_0 + x)^2} \pm \frac{hc_l \pi^2}{240(z_0(t) + x(t))^4} + f_0 \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Supondo que  $z_0(t)$  é constante, a equação anterior pode ser reescrita, de maneira mais simples, com adimensionalização e como equação diferencial ordinária autônoma de primeira ordem do seguinte modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -bx(t) - cx(t)^3 - ry(t) - \frac{p}{(a+x(t))^3} y(t) + \frac{e}{(a+x)^8} + \\ \quad - \frac{d}{(a+x)^2} + \frac{\beta}{(a+x(t))^4} + \Gamma \cos(\Omega z(t)) \\ z'(t) = 1 \end{array} \right., \quad (3.6)$$

onde  $a, b, c, r, p, e, d, \Gamma$  e  $\Omega$  são constantes positivas e onde  $\beta$  é uma constante real.

Fixando-se  $a = 1,6$ ,  $b = 0,05$ ,  $c = 0,35$ ,  $r = 0,1$ ,  $p = 0,009$ ,  $e = 0,0001$ ,  $d = 4/27$ ,  $\Gamma = 0,2$  e  $\Omega = 1$ , em [9], é feito o estudo dos expoentes máximos de Lyapunov para o sistema acima

ao variar-se  $\beta$ . Em particular, para  $\beta = 0.01818$ , esse expoente é positivo, de maneira que o sistema em questão apresenta comportamento caótico para esses valores dos parâmetros. Em contrapartida, para  $\beta = 0.15$ , observa-se um comportamento periódico e controlado para este sistema.

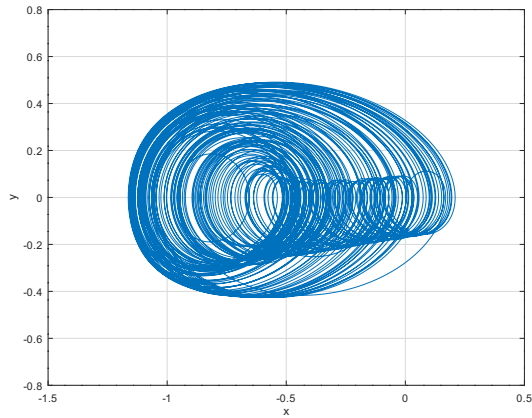


Figura 3.5: Projeção, no plano  $xy$ , da imagem do intervalo  $[0; 1000]$  pela solução do sistema de equações 3.6, para os parâmetros anteriormente fixados, para  $\beta = 0,01818$  e para a condição inicial  $(0, 0, 0)$ .

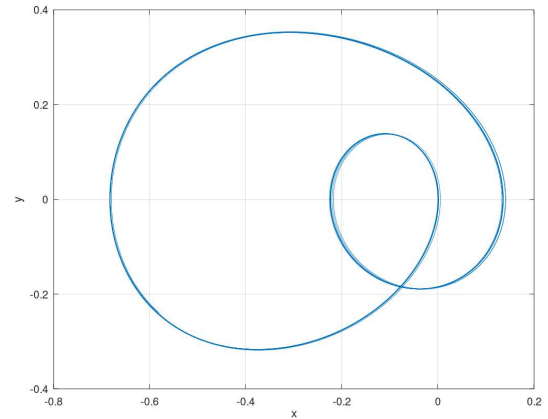


Figura 3.6: Projeção, no plano  $xy$ , da imagem do intervalo  $[0; 500]$  pela solução do sistema de equações 3.6, para os parâmetros anteriormente fixados, para  $\beta = 0,15$  e para a condição inicial  $(-0, 58; -0, 24; 200)$ .



---

---

# CONCLUSÃO

---

Neste trabalho, foram introduzidos os conceitos primordiais da teoria moderna de equações diferenciais ordinárias e da teoria clássica de controle, assim como algumas técnicas de controle. O estudo da primeira foi feito a partir do enunciado dos resultados qualitativos fundamentais sobre equações diferenciais ordinárias. No caso da segunda, os conceitos e as técnicas de controle foram explorados e ilustrados por meio do estudo de artigos os quais realizam aplicações de ferramentas de controle em alguns sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. No processo, ficou evidente como os principais resultados sobre estabilidade de equilíbrios e de ciclos da moderna teoria qualitativa para equações diferenciais ordinárias podem ser empregados no controle de sistemas que sejam modelados por equações diferenciais ordinárias.

Também foi mostrado como o estudo dos expoentes máximos de Lyapunov permite determinar os parâmetros e as condições para os quais um dado sistema é estabilizado e controlado ou para os quais apresenta comportamento caótico (traduzido pela noção de sensibilidade às condições iniciais). Assim, foi explicitado como a noção de comportamento caótico é verificada ou evidenciada, na prática, a partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov, pois o formalismo matemático não é facilmente empregável na caracterização do caos.

Como uma maneira de aproximar a teoria clássica de controle do estudo de um sistema físico real, foi introduzido e detalhado o funcionamento de um microscópio de força atômica. Ao longo do estudo dos mecanismos de controle desse importante equipamento com aplicações sobretudo em nanotecnologia, foi possível constatar como a teoria clássica de controle permite classificar e melhor compreender as etapas e as estratégias de controle comumente empregadas na operação de um AFM.

Assim, os vários sistemas de controle de um AFM puderam ser classificados conforme o emprego de controle por feedback ou sem feedback (as duas categorias propostas pela teoria clássica de controle). Depois do detalhamento do funcionamento de um AFM, também foi estudado um artigo no qual os autores propuseram um modelo matemático simplificado para estudar o funcionamento de tal tipo de microscópio. Desse artigo, enfatizou-se o emprego do estudo dos expoente de Lyapunov na caracterização, a partir da variação de parâmetros, do comportamento desse sistema como caótico ou como estabilizado.



---

---

# BIBLIOGRAFIA

---

- [1] J. Baumaister e A. Leitão, *Introdução à teoria de controle e programação dinâmica*, IMPA (Projeto Euclides), 2014.
- [2] Q. Cao, M. Wiercigroch, E. E. Pavlovskaya, C. Grebogi e J. M. T. Thompson, *Archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics*, PHYSICAL REVIEW E, v. 74(4), 046218(5), 2006.
- [3] R. L. Devaney, *A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory And Experiment*. Westview Press, 1992.
- [4] A. Hegazi, H. N. Agiza e M. M. El-Dessoky, *Controlling chaotic behaviour for spin generator and Rossler dynamical systems with feedback control.*, Chaos, Solitons and Fractals, v. 12(4), 631-658.
- [5] M. W. Hirsch, S. Smale e R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Elsevier Academic Press, 2ed, 2004.
- [6] J. Holmes e P. Guckenheimer, *Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag New York Inc., 2002.
- [7] E. L. Lima, *Análise Real Vol. 2*, 8a ed. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, 2006.
- [8] E. Ott, C. Grebogi e J. A. Yorke, *Controlling chaos*, Physical Review Letters, v. 64(11), 1196-1199, 1990.
- [9] M. A. Ribeiro, J. M. Balthazar, W. B. Lenz, R. T. Rocha, A. M. Tusset, *Stability, Numerical Exploratory Analysis of Dynamics and Control of an Atomic Force Microscopy in Tapping Mode with Fractional Order*, Shock and Vibration, 2020.
- [10] C. Robinson, *Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, 1994.
- [11] M. Viana, *What's new on Lorenz strange attractors?*, Mathematical Intelligencer, v. 22(3), 6-19, 2000.

- [12] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall, 2ed, 1993.
- [13] P. E. West, *Introduction to Atomic Force Microscopy: Theory, Practice, Applications*. Disponível em: [https://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/physik-fpraktikum/\\_imported/fileadmin/11999999/AFM/AFM\\_TheoryPracticeApplications\\_TEXT.pdf](https://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/physik-fpraktikum/_imported/fileadmin/11999999/AFM/AFM_TheoryPracticeApplications_TEXT.pdf). Acesso em 21/05/2021 às 15:45.
- [14] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer-Verlag New York, 3ed, 1996.
- [15] D. Yang e J. Zhou, *Connections among several chaos feedback control approaches and chaotic vibration control of mechanical systems*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, v. 19(11), 3954-3968, 2014.
- [16] M. T. Yassen, *Chaos control of Chen chaotic dynamical system*, Chaos, Solitons and Fractals, v. 15(2), 271-283, 2003.