

RAFAEL FREITAS PEREIRA COSTA

Transições de Fase Quânticas Dinâmicas na Cadeia XX
Desordenada

Uberlândia

2021

RAFAEL FREITAS PEREIRA COSTA

Transições de Fase Quânticas Dinâmicas na Cadeia XX Desordenada

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Física.

Área de concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. José Cândido Xavier

Uberlândia

2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C837 Costa, Rafael Freitas Pereira, 1996-
2021 Transições de Fase Quânticas Dinâmicas na Cadeia XX
Desordenada [recurso eletrônico] / Rafael Freitas
Pereira Costa. - 2021.

Orientador: José Cândido Xavier.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Física.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.351>
Inclui bibliografia.

1. Física. I. Xavier, José Cândido, 1970-, (Orient.).
II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em
Física. III. Título.

CDU: 53

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1A, Sala 213 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4309 - www.infis.ufu.br - cpqfisica@ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Física				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado				
Data:	10 de junho de 2021	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:	11:40
Matrícula do Discente:	11912FIS004				
Nome do Discente:	Rafael Freitas Pereira Costa				
Título do Trabalho:	Transições de Fase Quânticas Dinâmicas na Cadeia XX Desordenada				
Área de concentração:	Física				
Linha de pesquisa:	Física Estatística e Métodos Matemáticos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	N.A				

Reuniu-se por meio de vídeo conferência , a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Física, assim composta: Professores Doutores: George Balster Martins - INFIS/UFU, Francisco Castilho Alcaraz - IFSC-USP e José Cândido Xavier- INFIS/UFU orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Prof. Dr. José Cândido Xavier, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **José Candido Xavier, Professor(a) do Magistério Superior,**



em 10/06/2021, às 14:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **George Balster Martins, Professor(a) do Magistério Superior**, em 10/06/2021, às 15:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **francisco castilho alcaraz, Usuário Externo**, em 11/06/2021, às 09:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2824505** e o código CRC **355276B3**.

Waldeci das Graças de Freitas Pereira

In memoriam

*Uma mulher forte, nobre e honesta, que por capricho do destino e da circunstância não pôde
florescer todos os seus talentos, e ainda assim não se entregou completamente.*

Agradecimentos

- Primeiro aos meus pais, Simone e Valteir, que me deram asas quando eu quis voar, além de todo amor e toda instrução que eu nunca poderei retribuir à altura, ainda que ganhasse um prêmio Nobel por dia, daqui até o fim da minha vida. Vocês são o maior exemplo de vitória que eu tenho. Só vocês sabem o que foi preciso pra chegar até onde estão e onde estamos. Amo infinitamente.
- À minha companheira, Evelyn Prais, que me serviu de pedra angular todos os dias desde que aceitou meu coração. Mas, particularmente, agradeço pelo apoio sem paralelo que permitiu a colheita de tudo que semeei nos últimos 3 anos. Sem você eu não teria conseguido o que estou colhendo.
- Ao Prof. Dr. José C. Xavier, meu solícito e paciente orientador, que mesmo diante dos vários obstáculos - quase sempre devido às minhas limitações pessoais - soube manter a elegância e me guiar de volta aos trilhos. Toda e qualquer imperfeição na presente obra é exclusivamente um delito meu.
- Aos amigos, colegas e professores que me ajudaram a crescer enquanto pensador e ser humano. São tantos que seria uma grande injustiça escrever 3 ou 4 nomes e apenas acrescentar um “e muitos outros”.
- A cada contribuinte que proporcionou o financiamento das bolsas que me fomentaram.
- À CAPES pelo direcionamento dos investimentos acima ressaltados.

“History will be kind to me, for I intend to write it.”¹

Sir Winston Leonard Spencer Churchill

¹Tradução livre: “A História será gentil comigo, porque eu pretendo escrevê-la.”

Sumário

1	Introdução	1
2	Sistemas em equilíbrio	4
2.1	Transições de fase de equilíbrio	6
2.1.1	Ideias gerais das transições de fase clássicas	6
2.1.2	Transições de fase quânticas	9
2.2	Efeitos de desordem	11
2.2.1	Critério de Harris	12
2.2.2	Regiões raras	13
2.2.3	Fases de Griffiths quânticas,	15
2.2.4	Fase de Griffiths na cadeia dXX	16
3	Transições de fase quânticas dinâmicas	19
3.1	Amplitude de Loschmidt e DQPTs	19
3.2	Exemplo: a cadeia de Ising em campo transversal	20
4	Metodologia	24
4.1	Solução Geral	24
4.2	Soluções Analíticas	28
4.2.1	Têmpera genérica para o caso limpo	28
4.2.2	Ligando a desordem: um caso extremo porém instrutivo	32
4.2.3	Renormalizando o hamiltoniano final	36
5	Resultados	39
5.1	Sistema Limpo	39
5.2	Sistemas com Desordem Forte	43
5.2.1	Localizando picos	43
5.2.2	Superposição	44
5.2.3	Transições de ordem zero	46
5.2.4	Crescendo uma ilha	51
6	Considerações finais e perspectivas futuras	57
A	Transformação de Jordan-Wigner	59

Lista de Figuras

1	Diagrama de fase típico para uma transição de fase quântica. Retirado do capítulo 1 da Ref. [10].	11
2	Exemplificando as fases dimerizadas ímpar e par. Os acoplamentos ímpares estão em alaranjando enquanto os pares em coloração verde. Os acoplamentos representados por linhas pontilhadas devem ser interpretados como “fracos”, enquanto que as linhas cheias representam ligações “fortes”. As fases podem ser entendidas no sentido perturbativo: em ordem zero, a primeira (segunda) cadeia representada na imagem será descrita por dímeros entre os acoplamentos ímpares (pares) conforme sugerido pela notação das ligações representadas em cor cheia.	17
3	Diagrama de fase de equilíbrio para a cadeia aleatória - gap vs distância da criticalidade. As fases de Griffiths ímpar e par são destacadas pelas chaves em azul e verde respectivamente, enquanto o ponto crítico é evidenciado em coloração alaranjada. Nos extremos temos as fases dimerizadas, ímpar ou par.	18
4	O primeiro gráfico consiste em vários comportamentos de $r(w, t)$ para valores w fixados e tempos até $t = 2t^*$. O caso $w = 0$ corresponde à Loschmidt Echo, mas traços de seu comportamento podem ser vistos para $w > 0$, conforme se vê mais claramente no segundo gráfico. O segundo gráfico representa $r(w, t)$ para uma têmpera dupla através do ponto crítico quântico ($g_0 = 0, 5$, $g_1 = 2, 0$) para vários tempos e valores de w . A linha tracejada corresponde ao valor esperado do trabalho, isto é, $r(w, t) = 0$. Esta imagem foi retirada do artigo seminal [40] e corresponde à Fig. 2 no mesmo.	23
5	Diagrama de equilíbrio para hamiltonianos da forma 4.18.	30
6	Representação da têmpera correspondente à dinâmica avaliada nessa seção ($H_0 \rightarrow H$), mostrando a relação com o diagrama de fase quântica de equilíbrio.	32
7	Representação gráfica da têmpera no caso extremo. As linhas azuis (vermelhas) representam os acoplamentos do hamiltoniano inicial (final).	34
8	Ilustração de um ciclo desconexo de uma rede com tamanho $L = 16$. As linhas azuis (vermelhas) representam os acoplamentos do hamiltoniano inicial (final).	35
9	Em vermelho, temos J_2 ; acoplamentos azuis representam J_e^f e os verdes J_1^f	37
10	Representação dos acoplamentos do hamiltoniano efetivo H^{SDRG} obtido a partir do hamiltoniano ilustrado na Fig. (5). Em vermelho, temos J_2 , azul representa J_e^f e o acoplamento efetivo, J_{eff} , é mostrado em coloração cinza.	37

11	Representação do ciclo que deve ser considerado no cálculo da amplitude de Loschmidt na aproximação do SDRG. Em vermelho, temos J_2 , azul representa J_e^f e o acoplamento efetivo, J_{eff} , é mostrado em coloração cinza. Os acoplamentos referentes ao sistema inicial são representados de preto.	38
12	A energia livre dinâmica $f(t)$ vs Jt/π , dada pela Eq.(4.33) [caso limpo no limite termodinâmico] para $\delta = 1$ e $\tilde{\delta} = \delta_f$	40
13	Derivada da energia livre dinâmica $f'(t)$ vs Jt/π , na têmpera do caso extremo para $L \rightarrow \infty$, $\delta = 1$ e $\tilde{\delta} = -1$	41
14	Derivada segunda da energia livre dinâmica $f''(t)$ vs Jt/π , para $\delta = 1$ e $\tilde{\delta} = -1$. O estudo dos valores de f'' próxima aos instantes críticos serve para inferir numericamente assinaturas das transi�es: observa-se que a derivada segunda escala ao infinito conforme o tamanho L	42
15	Energia livre dinâmica $f(t)$ vs t/π para uma têmpera �par com 2 dímeros e $L = 20$. Os quadrados negros representam o resultado exato obtido pela Eq. (4.17). Nas cruces em cor indigo temos o resultado aproximado $f^{SDRG}(t) = -\frac{1}{L} \ln \mathcal{L}^{SDRG}(t)$ (veja texto).	43
16	Detalhe da energia livre dinâmica $f(t)$ vs t/π para uma têmpera �par com 2 dímeros e $L = 20$. Os quadrados negros representam o resultado exato obtido pela Eq. (4.17). Nas cruces em cor indigo temos o resultado aproximado $f^{SDRG}(t) = -\frac{1}{L} \ln \mathcal{L}^{SDRG}(t)$ (veja texto).	44
17	Superposi�o: as curvas negra (quadrados) e vermelha (círculos) se sobrepõem, como qualitativamente esperado pelo SDRG; duas ilhas idênticas, suficientemente afastadas e num sistema submetido a desordem alta comportam-se como uma mesma ilha cuja respectiva energia livre dinâmica � multiplicada por um fator 2 (cruces de cor indigo). Note como o detalhe indica a precisão da superposi�o, no <i>inset</i> � esquerda.	45
18	Superposi�o: as curvas negra (quadrados) e indigo (cruces) se sobrepõem, como qualitativamente esperado pelo SDRG; o comportamento somado de duas energias livres, para dois sistemas de mesmo tamanho de bulk e de ilha mas cujas escalas de energia se discriminam nas ilhas (5.005 e 4.985 no exemplo em cena), � o mesmo que um único sistema, de mesmo tamanho dos anteriores, nos quais há duas ilhas suficientemente afastadas com seus tamanhos e escalas de energia respectivamente iguais àquelas descritas na primeira situa�o. A curva avermelhada (círculos) mostra o valor da diferença entre as curvas preta e vermelha. Note como o detalhe indica a precisão da superposi�o, no inset � esquerda.	46

19	Comparação dos resultados obtidos pelo SDRG (Eq. (4.43)) e aplicação da Eq. (4.17). Sistema de tamanho $L = 22$, o que implica $L/2$ ímpar. Note a diferença dos picos entre esse gráfico e aquele representado na Fig. (21). Ainda, observe que aqui plotamos a diferença entre os resultados do determinante (quadrados) e da fórmula analítica (cruzes), resultado este representado pela linha verde-claro.	48
20	Comparação dos resultados obtidos pelo SDRG (Eq. (4.43)) e aplicação da Eq. (4.17). Sistema de tamanho $L = 24$, o que implica $L/4$ par. Temos $N_1 = N_2 = \frac{L}{4} = 6$. Note a diferença dos picos entre esse gráfico e aquele representado na Fig. (21).	49
21	Comparação dos resultados obtidos pelo SDRG (Eq. (4.43)) e aplicação da Eq. (4.17). Sistema de tamanho $L = 28$, o que implica $L/4$ ímpar. Temos $N_1 = N_2 = \frac{L}{4} = 7$. Note a diferença dos picos nesse gráfico para com os dois anteriores, principalmente de forma mais notável os detalhes dos “bicos” em \mathbf{d}	50
22	No eixo vertical temos a energia livre dinâmica, para simulação de vários sistemas com bulk grande em comparação à ilha, de tamanho fixo, no caso, 4 sítios. Os pontos preto, indigo e vermelho, correspondem a sistemas de tamanhos 300, 500 e 1000 sítios respectivamente. É apresentado o primeiro pico. Note o achatamento da curva conforme L aumenta.	53
23	No eixo vertical temos a energia livre, para simulação de sistemas com 20, 30, 36 e 40 sítios na região rara. É apresentado o primeiro pico. O tamanho dos sistemas é dado por $L = 4l_{RR}$. Note o achatamento da curva que se dá conforme a ilha aumenta quando precisão dupla é utilizada. Ainda não temos um entendimento satisfatório desse fenômeno da linguagem Julia.	54
24	No eixo vertical temos a derivada da energia livre dinâmica, para simulação de sistemas com $l_{RR} = 8, 14, 20, 30$ e 36 sítios na região rara. É apresentado o primeiro pico. O tamanho dos sistemas é dado por $L = 4l_{RR}$. Note que a curva parece ficar cada vez mais aguda conforme o tamanho da região rara é aumentado.	55
25	Esboço qualitativo de uma possível configuração construída mediante aplicação do princípio da superposição. Note que um contínuo pode se desenvolver conforme escalas de energia cada vez mais próximas entre si participem da dinâmica.	56
26	Esquema ilustrando o processo de renormalização do SDRG: os spin’s adjacentes ao par ligado pelo maior acoplamento são efetivamente ligados através de K_{eff} . Figura extraída da Ref. [72].	64

Resumo

Exploramos a teoria das Transições de Fases Quânticas Dinâmicas (DQPTs, do inglês **D**ynamical **Q**uantum **P**hase **T**ransitions), em busca de um análogo fora do equilíbrio para as Fases de Griffiths Quânticas. Isto é feito tomando a cadeia XX desordenada (dXX) como modelo exploratório. Aplicando uma transformação de Jordan-Wigner, tratamos o modelo equivalente: férmions livres com *hoppings* aleatórios. Obtemos uma solução geral para protocolos de têmpera a partir do estado fundamental entre hamiltonianos *free-fermion* em fases desordenadas arbitrárias, no regime de *half-filling*; o resultado é o determinante de uma matriz $\frac{L}{2} \times \frac{L}{2}$, sendo L o número de sítios da cadeia, o que inviabiliza em grande parte uma interpretação física dos mecanismos envolvidos na dinâmica, apesar de reduzir a complexidade do problema original, cujo espaço de Hilbert é de tamanho 2^L . Para dirimir a dificuldade interpretativa, dois resultados analíticos exatos são derivados: a têmpera (do inglês, *quench*) entre hamiltonianos XX, cada um deles caracterizados por dois acoplamentos alternados - mas de valores fixos - que ilumina o problema do sistema “limpo”, e um resultado particular do caso desordenado que se mostra útil em várias circunstâncias práticas. Nossos resultados numéricos sugerem a existência de uma DQPT de Primeira Ordem. A resposta positiva à existência dessas transições dinâmicas para este modelo desordenado é um dos poucos exemplos de tal natureza, quiçá o único, até então apresentado na literatura.

Palavras-chave: Elétrons fortemente correlacionados, amplitude de Loschmidt, SDRG, grupo de renormalização, dinâmica exata, modelo XX, desordem de ligação, sistemas críticos, fase de Griffiths, DQPT, transições de fase quânticas dinâmicas.

Abstract

The theory of Dynamical Quantum Phase Transitions (DQPTs) is explored in search of some nonequilibrium analogue for the so-called Quantum Griffiths Phases. That is done by taking the disordered XX chain (dXX) as exploratory model. This problem is equivalent to that of free-fermions with random hoppings, as can be obtained via Jordan-Wigner transformation. We obtain a general solution for quench protocols between arbitrary equilibrium phases with generic random free-fermion models whose ground state is given at half-filling; given that the result is given by a $\frac{L}{2} \times \frac{L}{2}$ matrix' determinant, where L is the number of chain sites, the immediate physical interpretation of the dynamical mechanisms is unclear, even though we have reduced the complexity of the original problem (a 2^L -sized Hilbert space). In order to suppress interpretational difficulties, two exact analytical results are derived: the quench between two XX chains, each of them characterized by two alternating - but fixed - couplings, shedding some light over the “clean” system; the other result is a particular case of the quench between disordered systems that turns out to be useful in various practical circumstances. Our numerical results suggest the existence of a First Order DQPT. The positive answer to the existence of such dynamical transitions for the chosen disordered model is but one of a few, if not the only, that were presented in the literature.

Keywords: Strongly correlated electrons, Loschmidt amplitude, SDRG, renormalization group, exact dynamics, XX model, bond disorder, critical phenomena, quantum Griffiths phase, DQPT, dynamical quantum phase transitions.

1 Introdução

A dinâmica de sistemas quânticos fechados com muitos corpos tem atingido patamares experimentais basilares para que o estudo de sistemas fora do equilíbrio possa florescer em um ritmo mais acelerado; tais feitos dos chamados *simuladores quânticos* [1–4] advêm da impressionante capacidade e precisão com que atualmente é possível controlar a matéria em nível quântico. Isto é salutar, pois a física dos fenômenos transientes é rica e ainda permanece consideravelmente desconhecida quando contrastada com os fenômenos de equilíbrio [5, 6]. Dito de outra forma: a mecânica estatística do equilíbrio se encontra em firmes fundações e grande parte da investigação do que está além do escopo da termodinâmica permanece pouco explorado. Estratégias convencionais não são aqui aplicáveis: funções de partição e princípios norteadores como a maximização de entropia ainda permanecem conceitos elusivos nessa área. Algumas perguntas são inevitáveis: de que características dinâmicas e parametrizáveis (i.e., propriedades do hamiltoniano em si) depende a termalização [7]? Poderão existir classes de universalidade [8–17]?

Dentro da termodinâmica usual, técnicas formidáveis como Grupo de Renormalização e o *Bootstrap* Conforme [18–24] servem como paradigmas direcionadores e ao mesmo tempo “explicam” o fenômeno de universalidade. Além das chamadas transições de fase clássicas, que ocorrem a temperaturas finitas, os últimos 40 anos viram a síntese de ideias de uma nova classe de transições - as chamadas transições de fase quânticas - que podem ocorrer a temperatura nula [9, 10, 14]. Nesse ínterim, muito foi feito no intuito de aproveitar essas noções nos fenômenos em regime transiente [25–30]. De fato, o entendimento da dinâmica pode contribuir para vários fenômenos modernos que certamente moldarão o futuro da sociedade: a hipótese de termalização, a questão da coerência quântica, os pulsos ultracurtos e a própria física dos gases ultrafrios [31–39]. Mas além de buscar entender como os fenômenos transientes enfim se desenrolam em situações de equilíbrio, temos fenômenos transientes (ou não) nos quais quantidades físicas tornam-se não analíticas ou singulares como função do tempo: essa classe de fenômenos formalizados pela primeira vez por Heyl e colaboradores [40] foi batizada de *Dynamical Quantum Phase Transition*, abreviada como DQPT, (em português, Transições de Fase Quânticas Dinâmicas). A figura central nas DQPTs é a chamada *Loschmidt Echo*, que como os autores pioneiros corretamente reconheceram², tem um papel dinâmico análogo ao da função de partição de fronteira [41], que é definida no equilíbrio, conforme discutiremos no capítulo 2.

Outro universo de grande progresso recente e de comparável beleza é o dos sistemas desordenados [42–44]. A física de baixas dimensões, em várias situações, é particularmente sensível à ação

²Não foram os primeiros, mas têm o mérito de haver explorado a analogia até suas últimas consequências.

de impurezas [42, 45, 46], sendo assim palco de comportamentos extremamente distintos quando comparados aos sistemas “limpos”. As transições de fase “termodinâmicas” para sistemas desordenados é ainda um tópico de grande interesse, mas suas principais ideias estão relativamente bem estabelecidas em vários cenários³. Um avanço fundamental na apreciação teórica desses sistemas, originalmente destinado à compreensão de modelos magnéticos desordenados (como os modelos de Ising e de Heisenberg [46, 47]), foi a introdução do *Strong Disorder Renormalization Group* (SDRG, em português: Grupo de Renormalização de Desordem Forte) [48] o qual serviu de base para inúmeros resultados na área. Particularmente, o SDRG orienta na compreensão dos vários fenômenos originados pela presença de *regiões raras*, sendo um dos mais importantes a emergência de uma Fase de Griffiths de equilíbrio [14, 44, 49], que tem como extraordinária característica a existência de uma *região de criticalidade* próxima à temperatura crítica do sistema - temos um contínuo de temperaturas que tornam a função de partição não-analítica.

Nosso trabalho objetiva contribuir com a teoria das DQPTs investigando a possibilidade de um análogo fora do equilíbrio para o fenômeno da Fase de Griffiths de equilíbrio, a partir da exploração do modelo unidimensional XX desordenado (dXX). O trabalho está dividido em 3 partes: 1) motivação e revisão dos assuntos-chaves [capítulos 2 e 3], 2) contribuições originais⁴ [capítulos 4 e 5] e 3) considerações finais. Conta ainda com dois apêndices expondo técnicas centrais. O capítulo 2 inicia com a noção de função de partição, seguido de uma breve exposição sobre Zeros de Fisher e finalizando com uma pequena digressão a respeito das transições de fase em equilíbrio. Ainda nesse capítulo, discutimos o papel da desordem e apresentamos noções gerais dos sistemas com desordem fixa⁵ além da Fase de Griffiths Quântica no contexto do modelo XX desordenado. No capítulo 3 tratamos dos conceitos centrais das Transições de Fase Quânticas Dinâmicas, primeiro definindo a ideia de modo geral e depois exemplificando com o modelo Ising unidimensional em campo transversal, conforme feito pelos pioneiros da área. O capítulo 4 traz resultados metodológicos basilares para nossa exploração, exibindo uma forma fechada geral para têmperas de sistemas de férmions livres⁶, apresentando a ideia dos *ciclos/loops* e finalizando com a aplicação do SDRG ao problema. O capítulo 5 apresenta resultados exatos para a cadeia XX “limpa”, bem como dados de simulações numéricas que indicam a existência de uma Fase de Griffiths Dinâmica. Os resultados são comparados ao modelo efetivo, obtido via SDRG, que é adotado para

³Ver Ref. [44] e artigos referenciados no trabalho.

⁴Os resultados originais foram obtidos em colaboração com o Prof. Dr. José Abel Hoyos Neto, e estão sendo finalizados. Pretendemos submetê-los para publicação, em breve.

⁵Em inglês, o que chamamos desordem fixa costuma ser denominado “*quenched disorder*” e traduz a ideia de uma desordem inerente à estrutura do sistema, que não se esvai com o tempo. Tipicamente isto significa que o hamiltoniano é dotado de aleatoriedade nas escalas de energia que definem sua estrutura.

⁶Isto exaure as nossas necessidades nesse trabalho, visto que a equivalência entre a cadeia dXX e um sistema de férmions livres é garantida pela já citada Transformação de Jordan-Wigner (veja Apêndice A).

iluminar o caso desordenado. No capítulo 6 delineamos as últimas considerações e sugerimos abordagens futuras para os problemas posto ou correlatos. O Apêndice A traz a aplicação da Transformação de Jordan-Wigner à cadeia dXX, enquanto o Apêndice B apresenta o SDRG no contexto desse mesmo modelo.

2 Sistemas em equilíbrio

A quantidade central em qualquer problema de mecânica estatística de equilíbrio é a função de partição $Z(\beta)$, que pode ser definida como a soma dos *pesos de Boltzmann* sobre todas configurações de energia do sistema [50, 51] i.e.,

$$Z(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta H}) = \sum_{\epsilon} \Omega(\epsilon) e^{-\beta\epsilon}, \quad (2.1)$$

sendo H o hamiltoniano do problema, $\beta = \frac{1}{k_B T}$ em que k_B é a constante de Boltzmann, $\Omega(\epsilon)$ a degenerescência de cada energia ϵ do sistema e $e^{-\beta\epsilon}$ os acima referidos pesos de Boltzmann. A função de partição contém toda informação observável possível a respeito do sistema que se deseja estudar em equilíbrio termodinâmico. Para alguns problemas em que estados de fronteira são essenciais, temos as funções de partição de fronteira

$$Z_{ab}(R) = \langle \Psi_a | e^{-RH} | \Psi_b \rangle, \quad (2.2)$$

que descreve uma teoria de campo definida por H com fronteiras dotadas de estados de borda $|\Psi_a\rangle$ e $|\Psi_b\rangle$ separados por R [41]. Observe que R substitui o fator β , e nesse caso pode representar uma distância espaço-temporal, conforme o formalismo relativístico.

De modo geral, a avaliação exata das funções de partição para a maioria dos sistemas interagentes é conhecida para um número limitado de casos particulares - usualmente envolvem hamiltonianos que possam ser colocados em equivalência com problemas não interagentes os quais são *diagonalizados* de forma exata. Isso motivou o surgimento de abordagens aproximadas em geral, como o já mencionado Grupo de Renormalização, mas também muitas vezes é possível obter resultados “indiretos” que conduzem a teoremas mais abrangentes. Nesse universo estão inseridos os celebrados Teoremas de Lee-Yang, sendo que um dos seus resultados [50–52] tem por consequência que a grande função de partição de um modelo estatístico dotado de interações ferromagnéticas, quando estudado como função do campo magnético externo, aplicado em particular para o Modelo Ising Clássico, prevê uma estrutura de zeros que sempre pode ser mapeada à circunferência unitária no plano complexo. Assim sendo, se a grande função de partição não tem zeros reais, a energia livre é analítica em todo seu domínio⁷- o que priva o sistema de uma transição de fase. No entanto, caso haja zeros reais positivos, cada um deles corresponderia a um parâmetro crítico em que há transição.

⁷A região de interesse, na termodinâmica, geralmente é a dos valores positivos reais.

No mesmo espírito de proceder com a extensão analítica e estudar as propriedades no plano complexo, Fisher [11, 53] continuou a temperatura inversa para todo o plano complexo; assim, digamos que Z seja a função de partição dependente da temperatura inversa β e z um número complexo: Fisher estudou a extensão $Z(\beta) \rightarrow Z(z)$. Conforme o tamanho do sistema cresce sem limites, os zeros dessa função, denominados zeros de Fisher, podem tocar o eixo real.

Em uma dimensão, a energia livre por partícula é

$$f(z) = -\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln Z(z)}{L}, \quad (2.3)$$

sendo L o tamanho do sistema⁸. Recordemos que para tamanhos finitos os zeros de Fisher não são reais⁹ - o limite termodinâmico é um ingrediente essencial para transições no equilíbrio. Dessa forma, lançando mão do Teorema da Fatoração de Weierstrass [54] para representar a função de partição como o produto entre um polinômio e a exponencial de uma função inteira, temos

$$f(z) = -\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \left(h(z) + \sum_j \ln \left(1 - \frac{z}{z_j} \right) \right), \quad (2.4)$$

sendo $h(z)$ uma função inteira e z_j 's são os zeros da função de partição, os chamados zeros de Fisher associados. No estudo de transições de fase, apenas a parte não analítica será de interesse, e quando passada ao contínuo teremos $z_j \rightarrow \tilde{z}$ uma variável contínua podendo assim escrever a parte singular $f^s(z)$ como

$$f^s(z) = -\int d\tilde{z} \rho(\tilde{z}) \ln \left(1 - \frac{z}{\tilde{z}} \right), \quad (2.5)$$

em que a função ρ é a densidade dos zeros na região $d\tilde{z}$ do plano complexo. É interessante notar a seguinte correspondência: defina

$$\phi(z) = -\int d\tilde{z} \rho(\tilde{z}) \ln \left| 1 - \frac{z}{\tilde{z}} \right| = \Re \{ f^s(z) \}, \quad (2.6)$$

e note que para $z = u + iv$ a função $\ln |z|$ é justamente a Função de Green para o problema eletrostático bidimensional

$$\nabla^2 \phi(z) = -2\pi \rho(z), \quad (2.7)$$

sendo $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$. Isto nos permite concluir que o comportamento da energia livre nos pontos

⁸Observe a ausência do fator $k_B T$, utilizado na termodinâmica “usual”. Fazemo-lo propositalmente, motivando de imediato a generalização adotada no tratamento de DQPTs.

⁹No entanto, no caso de transições dinâmicas veja o resultado obtido na seção 5.2.2 em que zeros *para qualquer tamanho* L da cadeia podem acontecer.

críticos é inteiramente equivalente àquele de um potencial eletrostático em, e.g., uma superfície de contorno. Tomando o limite termodinâmico, os zeros de Fisher agora não estão necessariamente restritos aos círculos de Lee-Yang conforme pode ser visto, e.g., na Ref. [55], e eles podem formar linhas ou ainda se adensar em áreas no plano complexo. Essas linhas e áreas, quando descontínuas, sinalizam o comportamento não-analítico da função de partição complexa: a indicação direta de uma transição de fase termodinâmica, como já sugerimos, é a aproximação dos zeros de Fisher ao eixo imaginário; no modelo Ising há um único zero dessa natureza: $z = \frac{1}{k_B T_c}$ [10]. A exploração de zeros que cruzam o eixo real leva à questão das transições dinâmicas, que definimos no capítulo 3. Antes porém, convém relembrar das transições de equilíbrio e sua classificação.

2.1 Transições de fase de equilíbrio

Transições de Fase são uma das principais maneiras pelas quais a natureza exhibe sua complexidade. Embora muito difícil de definir com generalidade e precisão, podemos dizer que uma transição de fase marca a diferenciação do comportamento de um sistema visto como um todo; geralmente esse sistema é composto por muitos corpos, agentes ou partículas, tornando natural buscar assinaturas de uma transição de fase no *comportamento coletivo* daquele sistema. Os exemplos vão desde fenômenos “triviais”, cotidianos, como a solidificação da água até conexões entre usuários de redes sociais [56]: toda essa ampla gama de problemas apresenta fenômenos emergentes e transições de fase encontradas no estudo desde altas energias até a Física da Matéria Condensada. O universo em seus primeiros instantes de vida passou por inúmeras transições de fase a fim de que toda a história que conhecemos pudesse enfim ser por nós conhecida. Quando estudamos as temperaturas muito baixas, comportamentos pouco convencionais dão origem a novas fases da matéria [10]. A fim de conceber uma teoria robusta que explicasse tais fenômenos, a comunidade científica desenvolveu metodologias que agora são basilares em praticamente toda a física contemporânea - como teoria de escala e grupo de renormalização. Por isso, discutiremos em linhas gerais os principais aspectos da teoria de transições de fase clássicas e quânticas.

2.1.1 Ideias gerais das transições de fase clássicas

Quando pensamos em termodinâmica, a mudança dos comportamentos emergentes que dá origem a fenômenos macroscópicos distintos pode ser registrada através da análise do *espaço de estados*. O exemplo mais simples possível é o diagrama P-V de um gás ideal [50], i.e., um gráfico no qual a cada valor de temperatura é possível associar por exemplo uma curva isotérmica na

qual a pressão e o volume se comportam de acordo com o vínculo de temperatura constante ou de ausência de trocas de calor (dando origem a curvas adiabáticas), podendo ser mutuamente alterados *continuamente*, tendo seus valores dispostos nos eixos x e y respectivamente. Imaginando que esse gás corresponda a vapor de água que se encontra a uma densidade baixa (ou quase equivalentemente, baixa pressão) e temperatura alta o suficiente para que esse vapor exista em primeiro lugar, podemos fazer o experimento mental de resfriar uniformemente todo o espaço que envolve o gás, até que esse gás comece a se transformar em um líquido. Se coletarmos os dados termodinâmicos desse sistema, algo notável será visto: após atingir uma certa temperatura, o vapor começa a expelir energia violentamente, sem no entanto variar aquela temperatura da transição. Essa transição, portanto, é dotada do que se chama *calor latente*, e a classificação moderna [57] das transições de fase denomina esse tipo de transição *transições de primeira ordem*. Podemos ainda mensurar o quão resistente à variação de temperatura é o nosso sistema, mediante um certo acréscimo de energia, sob condições as mais variadas, como pressão ou volume constantes - e isso nos dá as respectivas capacidades térmicas, e por consequência os calores específicos. Tudo isso nos diz, primeiro diretamente, como o sistema responde a certas perturbações *quase-estáticas* e em segundo lugar, de maneira indireta, como o sistema *se organiza internamente*. Afinal, se colocarmos um cubo de gelo em um plano inclinado sujeito à gravidade, e contrastarmos esse comportamento com o da água líquida escorrendo sobre o mesmo plano, poderemos inferir que as partículas constituintes daquelas substâncias, mesmo que idênticas, se arranjam e interagem coletivamente de formas bem distintas, respondendo diferentemente aos mesmos esforços externos.

Entretanto, existe um certo conjunto especial de valores de pressão e temperatura nos quais a transição líquido-vapor de água se comporta de outra forma; para uma temperatura $T_c = 647.096K$ e pressão $P_c = 22.064MPa$ temos um *ponto crítico* no diagrama $P - T$ da água [58]. Aqui não temos calor latente mas temos um calor específico divergente, e ao fim da transição (isto é, se prosseguirmos aumentando a temperatura ou a pressão) a distinção entre líquido e vapor é sutil¹⁰. O calor específico nessa transição é uma quantidade *não-analítica* e carrega uma assinatura de sua ocorrência. Para explicar esses e outros fenômenos dentro do que se convencionou chamar *fenômenos críticos* a comunidade científica se esforçou e contruiu um arcabouço teórico extremamente preciso para lidar com as dificuldades que esse tipo de problema carrega.

A Teoria de Landau das Transições de Fases [10, 51] foi um dos primeiros paradigmas fundacionais da teoria moderna das transições de fases e pode ser visto como uma versão melhorada das abordagens de campo médio devido a van-der-Waals e Curie-Weiss [51]. Uma ideia central

¹⁰Existe uma crença generalizada em muitos livros-texto que as diferenças não existem a partir de certos valores P e T. Porém, veja o trabalho de Fisher e Widom <https://doi.org/10.1063%2F1.1671624> para uma discussão mais refinada.

é a de *parâmetro de ordem*, uma grandeza termodinâmica que é zero na fase desordenada¹¹ e diferente de zero na fase ordenada. A Teoria de Landau consegue apreciar o fenômeno de *universalidade*, que é a observação que vários modelos com detalhes microscópicos diferentes dão origem aos mesmos comportamentos para grandezas termodinâmicas próximo a um ponto crítico [8, 51]. Tais comportamentos são governados por certos *expoentes críticos*, os quais descrevem os comportamentos assintóticos acima referidos, tipicamente mediante leis de potência, e.g., o calor específico $c \sim |T - T_c|^\alpha$ ¹² sendo α seu expoente crítico. O calor específico é um exemplo comum de comportamento divergente, e podemos argumentar que essas divergências denunciam o fato de *correlações* tornarem-se de longo alcance: isto é, o *comprimento de correlação espacial* ξ diverge como $\xi \propto |r|^{-\nu}$, onde $r = T - T_c$ é a distância do ponto crítico. Nesse sentido, uma correlação infinita faz com que o sistema pareça homogêneo mediante transformações de escala arbitrárias¹³, dando origem a um comportamento fractal [8]. Decorre daí que esperamos *ordem de longo alcance* para sistemas críticos, e isso pode ser apreciado pelo comportamento das *funções de correlação*, que iremos expor brevemente na próxima seção.

Mencionamos finalmente que a teoria de Landau falha quantitativamente em prever os valores dos expoentes críticos quando os sistemas tem dimensão inferior à chamada *dimensão crítica superior* [8, 51]. Se a dimensionalidade do sistema é superior a esse valor, as flutuações no parâmetro de ordem - que burlariam o sucesso da teoria de Landau - não são importantes para o comportamento crítico. Se a dimensionalidade está entre as chamadas dimensão crítica inferior e superior, ainda há transição mas a aproximação de campo médio também não descreve com acurácia. Para sistemas com dimensão inferior à crítica inferior, temos flutuações tão fortes que a fase ordenada é completamente apagada do “espaço de opções” do sistema - isso significa que não pode haver transição de fase a temperatura não nula para aquela dimensionalidade do sistema. Essa dependência dimensional pode ser apreciada através do Argumento de Landau-Peierls e entendida como uma competição entre as flutuações de energia e entropia do sistema. Seguindo Cardy [8], imagine que temos um sistema unidimensional ferromagnético com L sítios a uma temperatura T e suponha que o custo energético para inverter a orientação de qualquer spin (realizar um spin-flip e criar uma parede de domínio) seja da ordem de J , i.e., $O(J)$. As flutuações térmicas podem induzir um

¹¹Existe uma dificuldade no uso do termo “desordem” quando estamos abordando sistemas desordenados simultaneamente à teoria das transições de fases. O leitor pode usar a seguinte regra: se os termos “desordenado” e “sujo” puderem ser intercambiados sem prejuízo à sua compreensão, significa que estamos falando da “*quenched disorder*” e isto significa presença de impurezas; caso contrário, trata-se de uma fase de algum modelo/sistema que se encontra em discussão.

¹²Vale notar que o comportamento crítico depende da dimensionalidade do sistema, podendo ser o caso de apresentar divergências logarítmicas no lugar de leis de potência. Não nos debruçaremos a esse respeito no texto. Para mais informações, veja <https://doi.org/10.1016%2F0550-3213%2872%2990279-9> e Ref. [8].

¹³Na verdade, em muitos casos é mais forte do que isso, temos invariância conforme. Veja [8, 21].

spin-flip e assim a energia livre sofrerá uma variação $\Delta F \sim O(J) - k_B T \ln \Omega$. Mas o número de configurações compatíveis com esse spin-flip é justamente $\Omega = L$, devido à homogeneidade. Isto significa que para L suficientemente grande e T finita $\Delta F < 0$. Assim o ordenamento ferromagnético não poderia ser um mínimo da energia livre, tornando-se portanto um arranjo instável a temperaturas finitas. Dito de outra forma, *a entropia só pode perder se $T = 0$* . Em contraste, para duas dimensões, criar uma parede de domínio significa *flipar* uma cadeia de spin, fechada, de tamanho ℓ , e exige um custo $O(\ell J)$. O número de configurações corresponde ao número de caminhadas aleatórias autoevitantes, fechadas e de tamanho ℓ . Esse número é certamente menor do que 4^ℓ considerando uma rede quadrada ou, equivalentemente, supondo que a caminhada tenha número de coordenação 4^{14} , de modo que $\ln \Omega < \ell \ln 4$, donde podemos inferir (corretamente) que existe um número $\mu < 4$ tal que $\Delta F \sim O(J\ell) - k_B T \ell \ln \mu$. Dessa forma, para T suficientemente baixa vemos que essas paredes causam $\Delta F > 0$, o que significa que a fase ordenada de fato é estável, e deve haver uma transição a $T_c \sim O(J)/k_B$. Entretanto, a $T = 0$ podemos apreciar outro tipo de transição, as denominadas transições quânticas que exploramos brevemente a seguir.

2.1.2 Transições de fase quânticas

A presente seção é fortemente baseada na abordagem da Ref. [10]. Considere um hamiltoniano Ising quântico sujeito a um campo transverso, em dimensão d numa rede hipercúbica tal que

$$H = \frac{g}{2} \sum_i \sigma_i^x - \frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^z \sigma_j^z, \quad (2.8)$$

sendo $g > 0$. $\langle i, j \rangle$ vincula apenas sítios i e j que são primeiros vizinhos, e as matrizes de Pauli, na base diagonal de σ^z , são dadas por

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Vamos explorar alguns valores do parâmetro g a fim de evidenciar uma transição de fase quântica. Se $g = 0$ recuperamos o Ising livre de campos externos e naturalmente H será diagonal na base dos autovetores de σ^z . No entanto, para $g \neq 0$ os operadores σ^x provocarão *spin-flips* em um sítio.

Para $g = 0$ o estado fundamental é degenerado: uma função de onda com todos spin up ou todos spin down é igualmente boa. Para $|g| \neq 0 \ll 1$ haverá uma pequena perturbação, e a

¹⁴Isto é, estando em um ponto da rede quadrada, cada passo permitido se dá para cima, para baixo, esquerda ou direita.

correlação de longas distâncias é (para qualquer dos vetores no estado fundamental dubleto)

$$\lim_{|x_i - x_j| \rightarrow \infty} \langle 0 | \sigma_i^z \sigma_j^z | 0 \rangle = N_0^2, \quad (2.10)$$

sendo N_0 a magnetização espontânea do estado fundamental - que é 1 para $g = 0$.

Se agora $|g| \gg 1$ o termo transversal domina e, em ordem zero, o estado fundamental é

$$|0\rangle = \prod_j |\rightarrow\rangle_j, \quad (2.11)$$

sendo, na base longitudinal

$$|\rightarrow\rangle_j = \frac{(|\uparrow\rangle_j + |\downarrow\rangle_j)}{\sqrt{2}}, \quad (2.12)$$

$$|\leftarrow\rangle_j = \frac{(|\uparrow\rangle_j - |\downarrow\rangle_j)}{\sqrt{2}}, \quad (2.13)$$

os dois autoestados de σ_j^x com autovalores 1 e -1 respectivamente. Devido a essa falta de correlação total entre sítios distintos, o estado fundamental em ordem zero produz $\langle 0 | \sigma_i^z \sigma_j^z | 0 \rangle = \delta_{ij}$. De maneira mais precisa, esperamos que se $|0\rangle$ é o estado fundamental exato no regime $|g| \gg 1$, as correlações permaneçam de curto alcance e se comportem como

$$\langle 0 | \sigma_i^z \sigma_j^z | 0 \rangle \sim \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|}{\xi}\right), \quad (2.14)$$

sendo ξ o comprimento de correlação definido na seção anterior.

A mudança abrupta entre esses estados fundamentais sugere que não há uma transformação analítica em função de g que mapeie os mesmos entre si; deve existir um valor crítico g_c no qual o comportamento das correlações se modifique descontinuamente. De fato, para uma rede de tamanho infinito o *gap*¹⁵ é não nulo para todo $g \neq g_c$ e vai a zero para $g = g_c$, produzindo assim mais uma manifestação de criticalidade: um espectro de excitações *sem massa*¹⁶.

Após “sobrevoar” algumas características das transições quânticas, é preciso uma resposta mais clara: afinal, quê é uma transição de fase quântica? Estaremos particularmente interessados nas chamadas transições de *segunda ordem*, que basicamente são aquelas em que o *gap* vai a zero no

¹⁵Energia necessária para produzir excitações para estados vizinhos próximos, tipicamente contabilizada a partir do estado fundamental.

¹⁶O jargão “espectro sem massa” faz sentido posto que $\xi \sim \frac{1}{m}$, sendo m a escala de massa envolvida na teoria de campo. Se $m \rightarrow 0^+$, naturalmente $\xi \rightarrow \infty$, que é uma das assinaturas da criticalidade.

limite termodinâmico, conforme $g \rightarrow g_c$. Na verdade, se o *gap* é Δ , observa-se que nas vizinhanças de $g - g_c = 0$ o mesmo se comporta como

$$\Delta \sim |g - g_c|^{z\nu}, \quad (2.15)$$

sendo $z\nu$ mais um expoente crítico - que geralmente, como no caso clássico, é universal. Além do *gap* nulo, todas propriedades a respeito do comprimento de correlação que foram discutidas na seção anterior, correspondem a características definidoras das transições quânticas de segunda ordem.

Rigorosamente as Transições de Fase Quânticas ocorrem apenas a $T = 0$. No entanto, é possível capturar assinaturas e consequências desse ponto crítico em uma região de temperaturas finitas, analisadas para pequenos valores de $|g - g_c|$. Nesse sentido, há essencialmente dois cenários possíveis: a única transição se dá para $T = 0$ ou existe uma região na qual $T > 0$ em que há transições, sendo que essa região “morre” no ponto $T = 0$ e $g = g_c$. Note que a temperaturas finitas temos duas escalas relevantes de *energia*: Δ e $k_B T$. Comparando-as, o seguinte diagrama de fases é obtido:

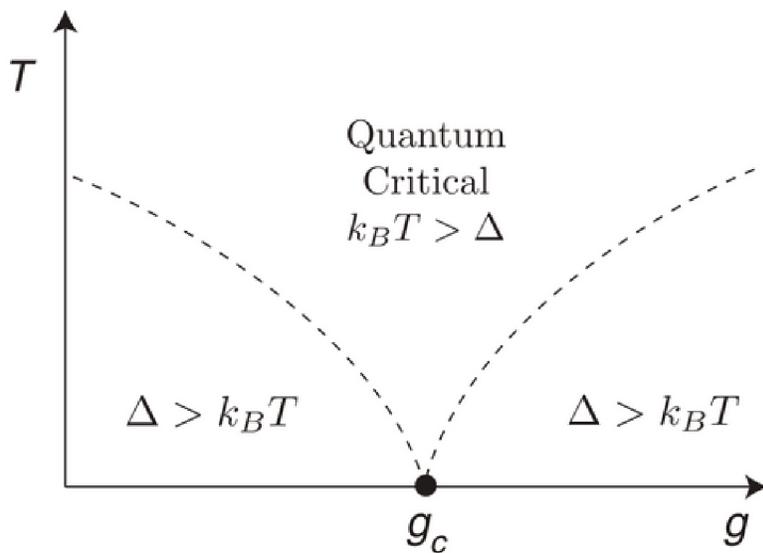


Figura 1: Diagrama de fase típico para uma transição de fase quântica. Retirado do capítulo 1 da Ref. [10].

2.2 Efeitos de desordem

A presença de impurezas traz grandes desafios na vida de físicos experimentais que desejam sintetizar um material cujos 99,999% de pureza são fundamentais para um determinado fim; mas ao mesmo tempo, a impureza (ou dopagem) [59] pode ser o ingrediente que faltava para dotar de alta condutividade um material até então isolante. O fato é que, por bem ou por mal, a natureza está saturada de ingredientes que contrariam alguns aspectos da “limpeza” dos sistemas que a compõem. Isso algumas vezes pode ser o fim de um estado da matéria, suprimido pela presença de aleatoriedades, e até mesmo o fim de uma transição de fase [14, 44]. Mas ao mesmo tempo, as impurezas surpreendem com características sem contrapartida num universo “limpo”: a Localização de Anderson [42], Localização de Muitos Corpos [7], os “Vidros de Spin”¹⁷ e a Fase de Singletos Aleatórios [60].

A fim de “encontrar ordem na desordem”, vamos discutir os efeitos de desordem que serão responsáveis por originar as chamadas Fases de Griffiths [44], primeiro apresentando e aplicando o Critério de Harris primeiro em um contexto clássico - o qual Griffiths abordou em seu trabalho seminal [49] - e em seguida no mundo de baixas temperaturas, um mundo de efeitos quânticos por excelência.

2.2.1 Critério de Harris

Uma recente e sucinta revisão a respeito de sistemas quânticos de muitos corpos e os efeitos de desordem é devido ao Prof. Dr. Thomas Vojta e pode ser encontrada na Ref. [44]¹⁸. Citamos esse trabalho dado que é do nosso interesse tratar apenas desordem fixa - como já mencionamos - especificamente falando, da desordem de ligação/acoplamento, que em alguns casos guarda correspondência com os efeitos de “massa aleatória”¹⁹. Esse tipo de desordem não destrói a estabilidade das fases do bulk, mas pode desestabilizar as transições devido à existência de domínios locais que possuem uma fase distinta daquela do *bulk* do sistema. Nossa física de interesse aqui é justamente essa dos domínios locais.

Para obter um critério norteador a respeito da influência que a desordem de massa aleatória ocasiona, seguimos o belo argumento devido a Harris [62]: imagine que o sistema é dividido em blocos cujos tamanhos são iguais ao comprimento de correlação ξ ; devido à presença de desordem,

¹⁷Em inglês, *Spin Glasses*. Veja o excelente texto introdutório de K. H. Fisher e J. A. Hertz “Spin Glasses” pela Cambridge University Press.

¹⁸A Tese de livre docência do Prof. Dr. José A. Hoyos Neto é uma ótima referência para uma breve síntese histórica da evolução das ideias aqui tratadas, além de abordar o interessantíssimo problema de sistemas com desordem e dissipação. O acesso é aberto e pode ser encontrado em <http://repositorio.ifsc.usp.br/handle/RIIFSC/5991>.

¹⁹Outro tipo de desordem, a de campo aleatório, não será do nosso interesse, mas vale recordar a existência do critério de Imry-Ma. Para mais detalhes veja a Ref. [61].

cada bloco tem sua própria temperatura crítica. O “truque” é comparar o desvio-padrão ΔT_c dessas flutuações de temperaturas críticas com a distância global $|T - T_c|$ ao ponto crítico do sistema limpo: desde que $\Delta T_c < |T - T_c|$ todos os blocos estarão na mesma fase e o sistema é aproximadamente uniforme, mas caso contrário haverá blocos em fases opostas aos “lados” da transição em T_c . Ora, mas como nossos blocos tem, por construção, desordens independentes, o teorema do limite central [50, 51] nos garante uma dispersão normal, a qual é da ordem da raiz do inverso do volume do sistema d-dimensional, i.e. $\Delta T_c \sim \xi^{-d/2}$; por outro lado, o sistema limpo tem um comprimento de correlação que diverge como $\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$ próximo à transição, sendo ν o expoente crítico do sistema limpo. A inconsistência do ponto crítico é garantida, portanto, no limite $T \rightarrow T_c$ desde que o Critério de Harris

$$\nu d > 2, \tag{2.16}$$

seja violado. Vale chamar atenção para dois fatos: (i) o critério de Harris é *necessário* mas não *suficiente* para garantir estabilidade, dado que o mesmo é “cego” para detalhes em escalas finitas que podem influenciar na transição²⁰ e (ii) esse argumento essencialmente clássico continua valendo para transições quânticas porque a desordem fixa varia apenas no espaço e não no eixo de tempo imaginário.

Vemos assim que para certos casos, a desordem é irrelevante no sentido de renormalização. Mas estamos justamente interessados nos casos em que ela é importante. O paradigma central que exemplifica essa relevância é justamente o de regiões raras.

2.2.2 Regiões raras

O critério de Harris sugere uma forma (natural) de classificar a “força” da desordem mediante um “zoom-out” ou *coarse graining*: observar o sistema em escalas cada vez maiores²¹ e ver o que acontece. A primeira opção é quando a desigualdade é satisfeita, e nada de novo acontece: a física macroscópica da transição é a mesma do sistema limpo. Se a desigualdade não é satisfeita temos os casos marginais - que fogem do nosso interesse - e os casos em que a desordem tem um papel finito²² ou infinito. Nossa física nesse trabalho está fortemente baseada na situação em que o coarse

²⁰Ver referências 74 a 76 da Ref. [44] para mais detalhes.

²¹É claro, no sentido da teoria de escala/grupo de renormalização.

²²Aqui as médias não convergem completamente no limite termodinâmico: a largura de suas curvas mantém um tamanho finito. Isso tem como consequência uma mudança nos expoentes críticos - mas o decaimento por lei de potência permanece. Esse assunto é melhor explorado no trabalho de Ibrahim e colaboradores, que pode ser encontrado em *Phys. Rev. E* 90:042132.

graining não consegue evitar a desordem: pelo contrário, ele aumenta a desordem, e a física do sistema passa a ser controlada por um ponto fixo de desordem infinita²³.

O que a literatura aponta [14, 44] é que várias transições em sistemas desordenados são dominadas por flutuações raras de desordem forte e as regiões raras em que as mesmas residem: elas causam singularidades fora do ponto crítico usual (do sistema limpo), e são costumeiramente chamadas Singularidades de Griffiths, mas para fazer jus à história do tema denomina-las-emos Singularidades de Griffiths-McCoy²⁴, devido aos trabalhos seminais de Griffiths [49] e McCoy (veja nota de rodapé número 22). Seguiremos mais ou menos de perto os argumentos originais de Griffiths ao tratar o modelo Ising clássico diluto/diluído.

Como já dissemos, a desordem de ligação guarda analogia muito próxima ao caso de desordem de massa, e.g., defeitos nos quais há uma probabilidade p de que um determinado sítio seja preenchido com um spin - o exemplo tradicional é novamente um ferromagneto tipo Ising. Isso origina vacâncias, o que implica que amostras macroscópicas possuirão um número não nulo de regiões sem vacâncias - *clusters* sem desordem - tão raras quanto menor p . Essas regiões são, também, de uma raridade dependente do seu tamanho, e se pensarmos em um sistema próximo a transição mas, digamos, ainda na fase paramagnética, é possível que essas regiões localmente apresentem a “fase errada”, qual seja, ferromagnética. Tomando desordem descorrelacionada - grosso modo, independente das direções em que se observa o sistema através de escalas cada vez maiores - é imediato que a probabilidade $w(V_{RR})$ de se encontrar uma região sem vacâncias, de tamanho L_{RR} cujo volume associado é $V_{RR} \sim L_{RR}^d$ será exponencialmente pequena $w(V_{RR}) \sim \exp(-cV_{RR})$ ²⁵. No caso clássico, cada região rara ordenada age como um *superspin* com momento de dipolo proporcional a V_{RR} , fazendo com que a susceptibilidade da região rara se comporte como $\chi(V_{RR}) \sim \frac{V_{RR}^2}{T}$ ²⁶. Dessa forma, o decréscimo exponencial supera o aumento por lei de potência, e na média a contribuição dessas regiões é basicamente desprezível²⁷. O resultado é outro quando olhamos para sistemas quânticos a $T = 0$. No caso do próprio Ising quântico diluto em campo transversal, as excitações de uma certa região rara para os primeiros estados excitados (as combinações simétrica e antisimétrica de alinhamento paralelo e antiparalelo do *superspin* ao campo) são separadas por

²³Novamente, referimos aos trabalhos seminais de Fisher em *Phys. Rev. Lett.* 69:534 e Ref. [60] para mais detalhes desse conceito.

²⁴Veja mais a esse respeito na supracitada tese de livre docência do Prof. Hoyos. É importante lembrar que McCoy-Wu foram alguns dos primeiros a sugerir que desordem exerce um papel importante na “suavização” de algumas transições, fenômeno observado em meados dos anos 60 que até então carecia de explicações. Veja o primeiro de uma série importante de trabalhos dos autores Barry McCoy e Tai Wu em *Physical Review* 176, 2, 631-643, 1968.

²⁵A constante c pode ser interpretada como a concentração de vacâncias.

²⁶Esse resultado é obtido via Teoria de Resposta Linear (TRL). Veja por exemplo o texto de Mahan [63] para TRL em geral.

²⁷Veja referências 92 a 94 em [44].

um *gap* exponencialmente pequeno $\Delta \sim \exp(-aV_{RR})$ o qual contribui com uma susceptibilidade exponencialmente relevante!

Outros efeitos de desordem, correlação de desordem, consequências na dinâmica e etc podem ocorrer. Mencionamos apenas que para o sistema do nosso interesse, que pertence à mesma classe de universalidade dos magnetos de Ising, a dimensão crítica inferior é $d_c^- = 1$, a dimensão efetiva das regiões raras é $d_{RR} = 1$ e $d\nu < 2$, portanto o comportamento crítico é controlado pelo ponto fixo de desordem infinita²⁸. Prezaremos por alguma brevidade, concentrando-nos adiante na visão geral das Fases de Griffiths Quânticas, em seguida tecendo alguns comentários a respeito das Fases de Griffiths que aparecem na classe de universalidade da cadeia dXX.

2.2.3 Fases de Griffiths quânticas,

De uma forma que possa ser tão genérica e ao mesmo tempo precisa quanto possível, podemos dizer que uma Fase de Griffiths é uma região do diagrama de fases no qual a desordem permite a existência de regiões raras cujo comportamento tomado em conjunto difere de maneira importante daquele do bulk - e o paradigma mais simples é justamente pensar na inversão local de fases termodinâmicas, onde teríamos uma ordem ferromagnética na região rara, apesar do bulk se encontrar em fase paramagnética. Esse tipo de fenômeno acontece quando um sistema quântico de muitos corpos, desordenado, se encontra próximo a uma transição de fases, seja ela induzida por parâmetros termodinâmicos ou microscópicos. No nosso trabalho, é justamente a transição via modificação de parâmetros microscópicos que nos interessa - fundamentalmente, transições quânticas ($T = 0$).

Como já dissemos, a classe de Fases de Griffiths Quânticas a que o modelo XX desordenado pertence, conforme a classificação de Hoyos-Vojta , é denominada classe B - mais especificamente, o modelo pertence à classe B2. Fases de Griffiths de classe B são dotadas de singularidades de Griffiths-McCoy muito fortes devido à combinação/competição de dois efeitos exponencialmente pequenos: a probabilidade de ocorrência de uma região rara de dimensões L_{RR} e o *gap* no espectro de baixas excitações, que como vimos também decai exponencialmente. Quase por um “milagre”, o efeito total disso é uma densidade de estados governada por lei de potência, de comportamento: $g(\epsilon) \sim \epsilon^{\frac{d}{z}-1}$, não-universal devido ao expoente dinâmico z . Uma das evidências experimentais mais fortes para esse comportamento é observada na liga $Ni_{1-x}V_x$: o níquel é um ferromagneto de temperatura de Curie $T_c = 627K$, mas a mistura com vanádio leva a uma fase de Griffiths quando a concentração crítica x_c próxima de 11% é atingida. Vários resultados na literatura confirmam

²⁸Dentro do esquema de classificação de Vojta & Hoyos (veja [64]) a cadeia dXX está na classe B2.

as previsões de uma fase de Griffiths²⁹. A literatura é vasta e elenca vários exemplos de sistemas metálicos dotados de uma fase de Griffiths quântica³⁰.

2.2.4 Fase de Griffiths na cadeia dXX

Em nosso estudo, pretendemos identificar os tempos críticos da cadeia XX desordenada (dXX, por brevidade). Para tanto, precisamos entender primeiramente o diagrama de fases quânticas de equilíbrio para esse sistema.

A cadeia dXX é definida como:

$$H(\lambda) = \sum_j \lambda_j (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + h.c.), \quad (2.17)$$

sendo $0 < \lambda_j$ os acoplamentos, e “ λ ” na verdade é uma notação prática para indicar uma coleção $\lambda = (\lambda_1 \cdots \lambda_N)$ de acoplamentos e σ_j^+, σ_k^- os operadores “escada”, os quais são definidos pela álgebra das matrizes de Pauli:

$$[\sigma_j^\alpha, \sigma_j^\beta] = i2\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_j^\gamma, \quad (2.18)$$

sendo $\alpha, \beta, \gamma \in \{x, y, z\}$, $\sigma_j^+ = \sigma_j^x + i\sigma_j^y$ e $\sigma_j^- = \sigma_j^x - i\sigma_j^y$. Com isso, obtém-se as relações de comutação e anticomutação para os operadores escada

$$[\sigma_j^+, \sigma_k^-] = \delta_{jk}\sigma_j^z, \quad (2.19)$$

$$\{\sigma_j^+, \sigma_k^-\} = \delta_{jk}1 + (1 - \delta_{jk})2\sigma_j^+\sigma_k^-. \quad (2.20)$$

Sabe-se que o hamiltoniano definido na Eq. (2.21) é equivalente a um sistema de férmions livres sem spin, com termos de hopping aleatórios através de uma Transformação de Jordan-Wigner [65, 66]. Ou seja, temos um hamiltoniano do tipo

$$H(\lambda) = \sum_j \lambda_j (c_j^\dagger c_{j+1} + h.c.). \quad (2.21)$$

Indexamos os sítios presentes na cadeia de tamanho L , em leitura convencional da esquerda para a direita: imagine primeiro uma cadeia aberta; nela, o sítio 1 está na extremidade da esquerda, o sítio 2 é o primeiro sucessor à direita do sítio e assim por diante, até o sítio L (um número natural que consideraremos par) que se encontra na extremidade, à direita de todos os demais; por fim, é claro, fechamos a cadeia para garantir periodicidade. Os acoplamentos λ_j , como explicitado

²⁹Veja as referências 131 e 132 da Ref. [44].

³⁰Veja por exemplo as referências 19 e 79 de [44], bem como as referências lá citadas.

na Eq. (2.21), caracterizam os *hoppings* entre os sítios j e $j + 1$; neste contexto, referiremos aos λ_j em que j for um número par como *parâmetros/acoplamentos pares* e, analogamente, *parâmetros/acoplamentos ímpares* àqueles em que j é um número ímpar. Quando $\min\{\lambda_{2j+1}\} \gg \max\{\lambda_{2j}\}$, o sistema se encontra na *fase dímero ímpar*, já que o estado fundamental de 2.21 é descrito por dímeros ímpares [veja a Fig. (2)]. Semelhantemente, se $\min\{\lambda_{2j}\} \gg \max\{\lambda_{2j+1}\}$ o sistema se encontra na *fase dímero par*. Essas fases são o que denominaremos fases extremas. Quando a intensidade dos acoplamentos não puder ser discriminada desta forma, referiremos a uma fase mista.

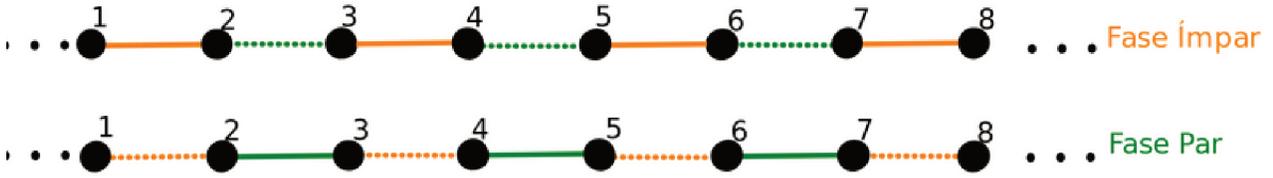


Figura 2: Exemplificando as fases dimerizadas ímpar e par. Os acoplamentos ímpares estão em alaranjando enquanto os pares em coloração verde. Os acoplamentos representados por linhas pontilhadas devem ser interpretados como “fracos”, enquanto que as linhas cheias representam ligações “fortes”. As fases podem ser entendidas no sentido perturbativo: em ordem zero, a primeira (segunda) cadeia representada na imagem será descrita por dímeros entre os acoplamentos ímpares (pares) conforme sugerido pela notação das ligações representadas em cor cheia.

Aproveitando o regime assintótico convergente para a fase de singletos aleatórios, utilizaremos um esquema de desordem conveniente para capturar a física do problema, descrito a seguir. Fixaremos os acoplamentos ímpares por meio de um sorteio binário³¹ no qual os valores admitidos serão J_2 e outro valor inferior, denotado J_1 . (Por exemplo, 1 e 0.1, 10 e 0.5 etc). Isto quer dizer que, quando realizarmos o mapa $H(\lambda_0) \mapsto H(\lambda_f)$ os parâmetros ímpares serão idênticos, modificando apenas o valor dos parâmetros pares. Mais genericamente, podemos também escolher os acoplamentos como variáveis independentes sorteadas de acordo com as distribuições P_o e P_e para os acoplamentos das ligações ímpares e pares respectivamente. É claro, no caso do sistema “limpo”, $P_{o,e}(J) = \delta(J - J_{o,e})$, o sistema está na fase dímero par (ímpar) para $J_e > J_o$ ($J_o > J_e$) e será crítico quando $J_e = J_o$. No caso desordenado, o ponto crítico se dá para $\prod_j J_{o,2j-1} = \prod_j J_{e,2j}$. A distância natural à criticalidade é definida como $\delta = \overline{\ln J_e} - \overline{\ln J_o}$, sendo que a notação da barra superior $\overline{\ln J}$ indica a média estatística.

Ao redor do ponto crítico [49] existe regiões às quais nos referiremos por *Fase de Griffiths Ímpar (FGI)* e *Fase de Griffiths Par (FGP)*. A FGP (FGI) acontece quando a maior parte do sistema se

³¹A escolha do sorteio binário é conveniente pois podemos obter resultados analíticos simples e de fácil entendimento, conforme veremos.

encontra dimerizada par (ímpar), ocorrendo porém algumas regiões - chamadas **Regiões Raras (RRs)** - nas quais ocorre a dimerização ímpar (par). Entre essas regiões, temos naturalmente paredes de domínio que são, grosso modo, spins indecisos sobre qual fase escolher. Esse fenômeno curioso, descrito pela física do SDRG [60], dá origem a um intervalo gapless no diagrama de fase, que pode ser qualitativamente representado como na imagem abaixo.

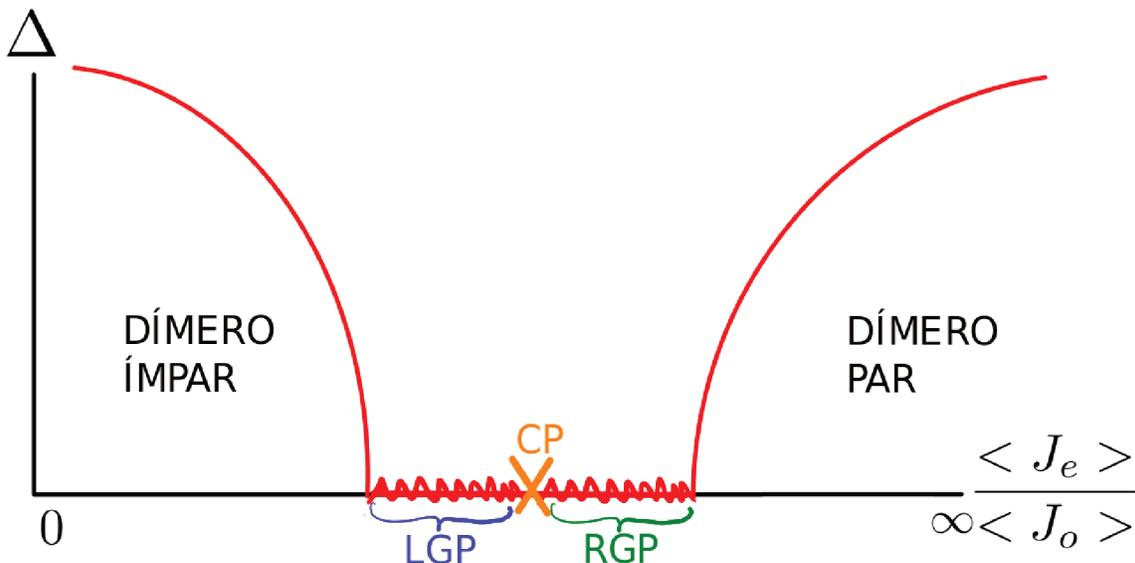


Figura 3: Diagrama de fase de equilíbrio para a cadeia aleatória - gap vs distância da criticalidade. As fases de Griffiths ímpar e par são destacadas pelas chaves em azul e verde respectivamente, enquanto o ponto crítico é evidenciado em coloração alaranjada. Nos extremos temos as fases dimerizadas, ímpar ou par.

Como já mencionamos, é conhecido que a Fase de Griffiths é responsável por induzir uma região *gapless* em que a função de partição é não analítica em um intervalo contínuo de temperaturas. O principal esforço do nosso trabalho, lembramos, é buscar uma *Fase de Griffiths Dinâmica (FGD)* que seria descrita por uma não-analiticidade da energia livre dinâmica em um intervalo de tempos críticos.

No próximo capítulo elencamos as definições fundamentais para tratar um problema de transições de fase quânticas dinâmicas e trazemos o exemplo da cadeia de Ising, seguindo o artigo inaugural de Heyl e colaboradores [40].

3 Transições de fase quânticas dinâmicas

3.1 Amplitude de Loschmidt e DQPTs

Estamos interessados em protocolos nos quais o nosso sistema de muitos corpos interage fracamente com o ambiente, de maneira que o desprezaremos e a dinâmica seja tratada satisfatoriamente como unitária nas escalas de tempo experimentalmente desejáveis. Esse cenário é rotineiramente criado por arranjos de átomos ultrafrios e armadilhas ópticas [1–4].

O protocolo fora do equilíbrio mais simples que pode ser vinculado a uma DQPT³² é o protocolo de *quench quântico/têmpera quântica*. Consiste em preparar um sistema inicial em um certo estado $|\psi_0\rangle$ (tipicamente o estado fundamental) de um hamiltoniano $H_0 = H(\lambda_0)$ tomando um valor particular λ_0 (ou um conjunto de valores, no interesse de sistemas desordenados) de um parâmetro λ ajustável que define uma família de hamiltonianos indexados pelo mesmo: $H(\lambda)$. Em seguida, há uma mudança abrupta $\lambda_0 \rightarrow \lambda_f$ e, para $t > 0$, o estado evoluído no tempo é dado por³³

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH(\lambda_f)t} |\psi_0\rangle, \quad (3.1)$$

dando origem a uma dinâmica não trivial desde que o estado inicial não seja autoestado de $H(\lambda_f) \equiv H_f$, o hamiltoniano final. É importante notar que estamos interessados nos chamados *quenches globais* nos quais essa mudança de parâmetros seja apreciada *extensivamente*, isto é da ordem da dimensão característica do sistema.

Em muitos cenários surgem tais protocolos, e é de interesse computar a *Amplitude de Loschmidt (AL)*

$$A(t) = \langle \psi_0 | \psi(t) \rangle = \langle \psi_0 | e^{-iH(\lambda_f)t} | \psi_0 \rangle, \quad (3.2)$$

cujos módulo quadrado é denotado *Loschmidt Echo (LE)*

$$\mathcal{L}(t) = |A(t)|^2. \quad (3.3)$$

Essas quantidades são denominadas amplitudes de retorno e fidelidades (no caso da AL) ou probabilidades de persistência do vácuo (no caso da LE) em seus mais distintos contextos como caos quântico, ressonância magnética nuclear e outros³⁴. Devido à clara analogia entre AL e funções de

³²A definição em si de uma DQPT não está necessariamente restrita a esse protocolo. Veja referências 29, 41-44 e a seção 6.5 de [5] para uma discussão desse assunto que foge do nosso escopo.

³³Por comodidade, estamos utilizando unidades nas quais $\hbar = 1$.

³⁴Veja as referências 45 e 46 citadas em [5].

partição de fronteira [41], existe uma relação de escala bem definida no limite termodinâmico (o tamanho L do sistema cresce indefinidamente, i.e. $L \rightarrow \infty$) $A(t) = e^{-L\ell(t)}$ para têmperas globais. Isso leva a

$$\ell(t) = -\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln(A(t)). \quad (3.4)$$

Mais precisamente, estaremos interessados em definir uma *Energia Livre Dinâmica*

$$f(t) = -\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln |A(t)|^2 = 2\Re\{\ell(t)\}. \quad (3.5)$$

A ideia básica é buscar não-analiticidades nessa grandeza. Tipicamente o que ocorre é que, na vizinhança de certos tempos t_c denominados *instantes críticos* temos,

$$f(t) \sim \left| \frac{t - t_c}{t_c} \right|^d, \quad (3.6)$$

sendo d um expoente crítico que pode depender do modelo e da dimensionalidade do mesmo. Outros comportamentos, como singularidades logarítmicas já foram reportadas na literatura em modelos Ising 2D [67]. Vale ressaltar que em 2010 [68] a estrutura não-analítica de ALs já havia sido apontada, mas como ressaltamos anteriormente, foi apenas em 2013 que Heyl e colaboradores interpretaram tal comportamento como indicativo de uma transição de fase dinâmica.

De um modo geral, DQPTs são esperadas sempre que o protocolo de têmpera é feito de maneira tal que os hamiltonianos final e inicial estejam separados por uma transição de equilíbrio, i.e., digamos que $H(\lambda_0)$ e $H(\lambda_\infty)$ estejam em fases termodinâmicas distintas: uma têmpera entre essas fases costuma aparecer. Mas há um número substancial de exceções³⁵ que indicam que *fundamentalmente, transições dinâmicas devem ser percebidas como um fenômeno crítico distinto das transições de equilíbrio*. No entanto, nem tudo está perdido, devido à conexão sugerida pelos zeros de Fisher³⁶.

3.2 Exemplo: a cadeia de Ising em campo transversal

Seguindo³⁷ a Ref. [40], considere novamente a cadeia de Ising em campo transversal, agora em

³⁵Veja as referências 56, 58 e 62-65 de [5].

³⁶Para artigos em que esses zeros são *experimentalmente* apreciados, veja as referências 70 e 71 idem referência nota 32.

³⁷Os resultados dessa seção provêm dos autores referenciados, e não originais de nossa parte.

uma dimensão, sujeito a condições de contorno periódicas (PBC)

$$H = \frac{g}{2} \sum_i \sigma_i^x - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z, \quad (3.7)$$

em que sabemos o que acontece para os vários valores de g : se $|g| < 1$ há ordem ferromagnética em $T = 0$, $g = g_c = 1$ apresenta uma transição quântica e se $|g| > 1$ temos um paramagneto. Como é amplamente conhecido, o hamiltoniano acima pode ser diagonalizado via Transformação de Jordan-Wigner [65], seguido de uma Transformada Discreta de Fourier e por fim uma Transformação de Bogolyubov [66]. No fim do dia, temos a seguinte dispersão [40]

$$\varepsilon_k(g) = \sqrt{(g - \cos k)^2 + \sin^2 k}, \quad (3.8)$$

e fazendo uma têmpera entre os parâmetros g_0 e g_1 temos que a energia livre dinâmica por partícula pode ser determinada, no limite termodinâmico, para qualquer têmpera [40]

$$f_{g_0, g_1}(z) = - \int_0^\pi \frac{dk}{2\pi} \ln(\cos^2 \phi_k + \sin^2 \phi_k e^{-2z\varepsilon_k(g_1)}), \quad (3.9)$$

sendo z uma varável complexa, $\phi_k = \theta_k(g_0) - \theta_k(g_1)$ e $\tan(2\theta_k(g)) \equiv \frac{\sin k}{g - \cos k}$, $\theta_k(g) \in [0, \frac{\pi}{2}]$. A equação acima ignora um termo “trivial”, proporcional à energia do estado fundamental de $H(g_1)$. Os zeros de Fisher nesse caso são [40]

$$z_n(k) = \frac{1}{2\varepsilon_k(g_1)} (\ln(\tan^2 \phi_k) + i\pi(2n + 1)), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.10)$$

Os limites infravermelho e ultravioleta ($k = 0$ e $k = \pi$) dos ângulos de Bogolyubov são respectivamente $\phi_{k=0}$ e $\phi_{k=\pi}$. No primeiro caso temos as possibilidades qualitativamente distintas são (i) $\phi_{k=0} = 0$, o que caracteriza uma têmpera na mesma fase do diagrama de equilíbrio; (ii) $\phi_{k=0} = \pi/4$, representando uma têmpera saindo do/chegando no ponto crítico; por fim, (iii) $\phi_{k=0} = \pi/2$, sinaliza uma têmpera atravessando o ponto crítico. No caso ultravioleta, sempre $\phi_{k=\pi} = 0$. Em particular, note que uma têmpera cruzando o ponto crítico necessariamente faz as linhas de Fisher cruzarem o eixo real. Assim, esses instantes dão origem a um comportamento não analítico da LE, análogo à impossibilidade de extensão analítica para expansões de altas temperaturas próximo a uma transição termodinâmica. Tais instantes são denominados *instantes críticos*

e para uma têmpera atravessando o ponto crítico obtem-se a seguinte expressão desses tempos

$$t_n^* = t^* \left(n + \frac{1}{2} \right), n \in \mathbb{Z}. \quad (3.11)$$

Temos que $t^* = \frac{\pi}{\varepsilon_{k^*}(g_1)}$, sendo k^* determinado pela condi o $\cos k^* = \frac{1+g_0g_1}{g_0+g_1}$. Existe um resultado devido a Pollman e colaboradores [68] em que se estuda a dinâmica adiabática para uma têmpera através do ponto crítico, nas imedia es do mesmo, e obt m-se que a escala de energia relevante   o gap de massa $m(g_1) = |g_1 - 1|$ do hamiltoniano final. Entretanto, vemos pelos resultados acima que para uma têmpera arbitrária *escalas de energia fora do equilíbrio são altamente relevantes*, pois note por exemplo que uma vez fixado g_0 e tomando $g_1 = 1 + \delta$, $|\delta| \ll 1$, então $\frac{\varepsilon_{k^*}(g_1)}{m(g_1)} \propto \frac{1}{\sqrt{|\delta|}}$, mostrando que as diferenças são substanciais.

Há uma interpreta o interessante do modo k^* , pensada a partir do fato que se $n(k)$   a ocupa o do estado excitado com modo k na base diagonal de $H_f(g_1)$ - o hamiltoniano final. Temos no caso $n(k^*) = \frac{1}{2}$; modos com $k > k^*$ possuem ocupa o térmica $n(k) < 1/2$ enquanto aqueles com $k < k^*$ representam uma inversão de popula o $n(k) > 1/2$, o que formalmente corresponde a temperatura efetiva infinita. O modo k^* corresponde assim a temperatura infinita [69].

A maior motiva o para conceber estes fenômenos enquanto *transi es de fase quânticas dinâmicas* vem de considerar a fun o distribui o de trabalho para uma têmpera dupla: o sistema   preparado no estado fundamental de $H(g_0)$ e a têmpera   feita para $H(g_1)$ no instante $t = 0$ e em seguida o sistema volta a ser $H(g_0)$ em um certo instante,   claro, $t > 0$. A distribui o de trabalho, então, definida como

$$P(W, t) = \sum_j \delta(W - (E_j - E_{GS}(g_0))) |\langle E_j | \psi_i(t) \rangle|^2, \quad (3.12)$$

sendo $|E_j\rangle$ os autoestados de $H(g_0)$,   uma quantidade que obedece uma forma $P(W, t) \sim e^{-Lr(w, t)}$ com uma fun o $r(w, t)$ que depende da densidade de trabalho $w = W/L$ e tem uma expressão exata no limite termodinâmico, pois conforme o teorema de G rtner-Ellis [70] $r(w, t) = \inf_{R \in \mathbb{R}} (c(R, t) - wR)$, ou seja,   a transformada de Legendre de $c(R, t) = -\frac{1}{L} \ln [\int dW P(W, t) e^{-RW}]$ que   por sua vez, no caso em pauta

$$c(R, t) = - \int_0^\pi \frac{dk}{2\pi} \ln (1 + \sin^2(2\phi_k) \sin^2(\varepsilon_k(g_1)t) (e^{-2\varepsilon_k(g_0)R} - 1)). \quad (3.13)$$

e naturalmente, $r(0, t)$ fornece a probabilidade de retorno ao estado fundamental. Isto significa que

o comportamento não-analítico dos zeros de Fisher aparecem como não-analiticidades de $P(W, t)$. Na figura a seguir, temos $r(w, t)$ para uma têmpera que atravessa o ponto crítico quântico.

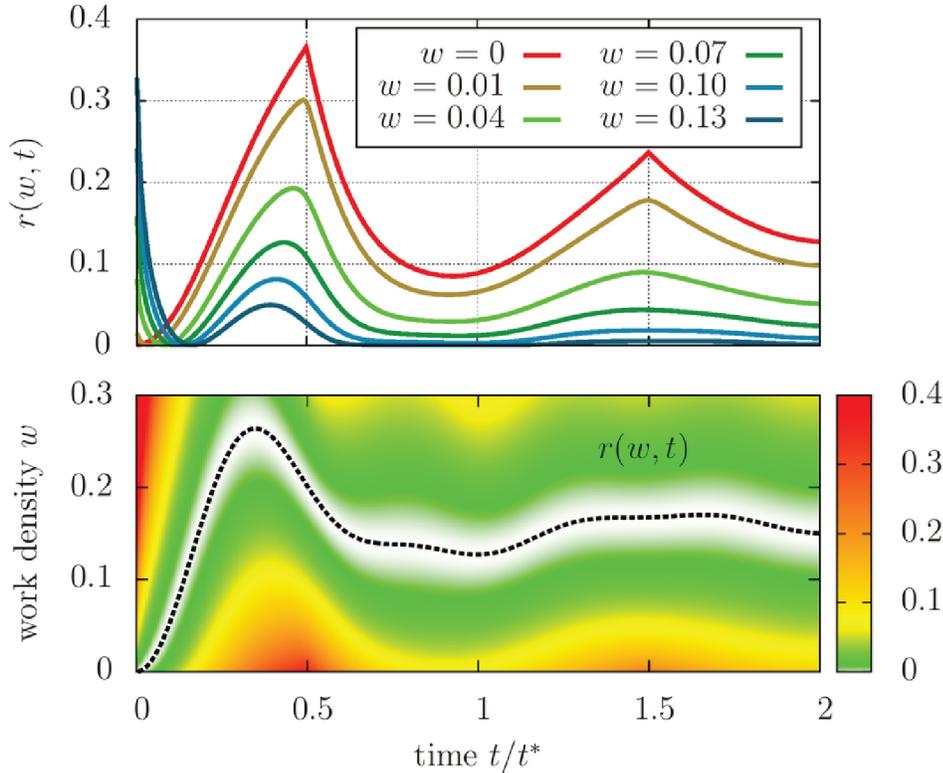


Figura 4: O primeiro gráfico consiste em vários comportamentos de $r(w, t)$ para valores w fixados e tempos até $t = 2t^*$. O caso $w = 0$ corresponde   Loschmidt Echo, mas traços de seu comportamento podem ser vistos para $w > 0$, conforme se v  mais claramente no segundo gráfico. O segundo gráfico representa $r(w, t)$ para uma têmpera dupla através do ponto crítico quântico ($g_0 = 0, 5$, $g_1 = 2, 0$) para vários tempos e valores de w . A linha tracejada corresponde ao valor esperado do trabalho, isto  , $r(w, t) = 0$. Esta imagem foi retirada do artigo seminal [40] e corresponde   Fig. 2 no mesmo.

  notável que as não-analiticidades em $w = 0$ têm dominado o comportamento para $w > 0$ em t_n^* , correspondendo a valores de trabalho mais prováveis. A similaridade desse diagrama   um diagrama de fase quântica dotado de criticalidade, com a temperatura substituída por densidade de trabalho foi a principal razão que levou os pioneiros a enfim denominar esse comportamento uma *transi o de fase quântica dinâmica*.

4 Metodologia

4.1 Solução Geral

É possível obter uma expressão genérica para $\mathcal{L}(t)$ para hamiltonianos do tipo definido na Eq. (2.21). Para tanto, note que estes hamiltonianos podem ser escritos na seguinte forma compacta

$$H = C^\dagger T C, \quad (4.1)$$

sendo

$$C \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{L-1} \\ c_L \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

em que os c'_j s são os operadores fermiônicos de aniquilação³⁸ e

$$T \equiv \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_L \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \lambda_{L-1} \\ \lambda_L & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{L-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Por construção a matriz T é real e simétrica, portanto diagonalizável. Buscamos uma transformação unitária A tal que $D = A^\dagger T A$, sendo D uma matriz diagonal e única a menos do ordenamento de suas colunas ou linhas. No caso em cena, A é a matriz cujas colunas são os autovetores de T .

Note que em vista de $A^\dagger A = A A^\dagger = I$, têm-se

$$H = C^\dagger A A^\dagger T A A^\dagger C = Z^\dagger D Z, \quad (4.4)$$

³⁸Os quais, juntamente aos operadores de criação $c_j^\dagger = (c_j)^\dagger$, são definidos pela álgebra $\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}$ e $\{c_i, c_j\} = 0$,

em que definimos

$$Z \equiv \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{L-1} \\ z_L \end{pmatrix} = A^\dagger C. \quad (4.5)$$

Vamos definir $H_1 = H(0) \equiv Y^\dagger D_1 Y$, $H_2 = H(\lambda) \equiv X^\dagger D_2 X$, sendo

$$X \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{L-1} \\ x_L \end{pmatrix} = A_1^\dagger C, \quad (4.6)$$

e

$$Y \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{L-1} \\ y_L \end{pmatrix} = A_2^\dagger C. \quad (4.7)$$

Destarte, obtemos que $C = A_1 X$, e então podemos escrever

$$Y = A_2^\dagger A_1 X. \quad (4.8)$$

Definindo $A = A_2^\dagger A_1$, segue que $A^\dagger A = A A^\dagger = I$, e $\det A = \det A_2^\dagger \det A_1 = 1$, isto é, Y e X estão conectados por uma transformação unitária; isto é esperado, posto que podemos obter H_1 de H_2 continuamente (e vice-versa). Em particular, as A_j 's são matrizes ortogonais ($A_j^\dagger = A_j^T$).

Note que o estado fundamental de $H(0)$ é

$$|GS\rangle = \prod_{m=1}^{\frac{L}{2}} y_m^\dagger |0\rangle, \quad (4.9)$$

mas $Y = AX \iff Y^\dagger = X^\dagger A^\dagger$, o que pode ser escrito como $y_m^\dagger = \sum_j^L x_j^\dagger a_{mj}^*$, e então

$$|GS\rangle = \prod_{m=1}^{\frac{L}{2}} \sum_j^L x_j^\dagger a_{mj}^* |0\rangle, \quad (4.10)$$

sendo, é claro, a base x_j^\dagger, x_j aquela que diagonaliza H_2 , isto é, $H_2 = \sum_{k=1}^L \omega_k x_k^\dagger x_k$. Esta é a representação mais conveniente para avaliar a Amplitude de Loschmidt $A(t) = \langle GS | \exp(-iH_2 t) | GS \rangle$ pois

$$\exp(-iH_2 t) |GS\rangle = \exp(-iH_2 t) \prod_{m=1}^{\frac{L}{2}} \sum_j^L x_j^\dagger a_{mj}^* |0\rangle. \quad (4.11)$$

Mas

$$\exp(-iH_2 t) \sum_j^L x_j^\dagger a_{mj}^* = \sum_j^L \exp(-i\omega_j t) x_j^\dagger \exp(-iH_2 t) a_{mj}^*, \quad (4.12)$$

ou seja

$$\exp(-iH_2 t) |GS\rangle = \prod_{m=1}^{\frac{L}{2}} \sum_{j=1}^L a_{mj}^* \exp(-i\omega_j t) x_j^\dagger |0\rangle. \quad (4.13)$$

Invertendo a relação entre x_j e y_n temos $x_j^\dagger = \sum_{n=1}^L y_n^\dagger a_{nj}$.

$$\therefore \exp(-iH_2 t) |GS\rangle = \prod_{m=1}^{\frac{L}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\frac{L}{2}} U_{mn}(t) y_n^\dagger \right) |0\rangle, \quad (4.14)$$

em que definimos

$$U_{mn}(t) = \sum_{j=1}^L a_{nj} \exp(-i\omega_j t) a_{mj}^* = (A \exp(-i\Omega t) A^\dagger)_{mn}, \quad (4.15)$$

sendo $\Omega = \text{diag} \left(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_L \right)$, e como deve ser, $U_{mn}(0) = \sum_{j=1}^L a_{mj}^* a_{nj} = \delta_{mn}$. Portanto, segue que

$$A(t) = \langle 0 | y_{\frac{L}{2}} y_{\frac{L}{2}-1} \cdots y_1 \sum_{n=1}^{\frac{L}{2}} U_{1n}(t) y_n^\dagger \cdots \sum_{n=1}^{\frac{L}{2}} U_{\frac{L}{2}n}(t) y_n^\dagger |0\rangle, \quad (4.16)$$

de que resulta

$$A(t) = \det \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) & \cdots & U_{1\frac{L}{2}}(t) \\ U_{21}(t) & U_{22}(t) & \cdots & U_{2\frac{L}{2}}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{\frac{L}{2}1} & U_{\frac{L}{2}2} & \cdots & U_{\frac{L}{2}\frac{L}{2}}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

o que fornece uma “forma fechada” para avaliação da Amplitude de Loschmidt, e a Echo $\mathcal{L}(t) = |A(t)|^2$ particularmente útil em simulações numéricas. No entanto, a expressão acima é de difícil compreensão, no sentido de que a Física envolvida não parece clara. Há portanto a necessidade de um modelo, possivelmente aproximado, a fim de compreender o que se passa nos processos estudados. Por isso, conduzimos abaixo o tratamento de expressões analíticas fechadas, um tanto mais palatáveis, começando com o caso “limpo” genérico; em seguida, discutimos um caso particular que se mostrará útil na exploração de resultados.

A Eq. (4.17) será a referência para ajustar a exatidão dos modelos empregados. No entanto, ressaltamos desde já a existência de limitações numéricas envolvendo a precisão de ponto flutuante - mesmo utilizando precisão quádrupla³⁹ - o que tipicamente ocorre em sistemas de desordem muito forte e com tamanhos de rede maiores que um certo valor dependente da desordem; sendo assim, como discutido na seção de resultados, os dados obtidos por esta metodologia devem ser avaliados com cautela. Utilizamos a linguagem Julia [71] em nossas rotinas de programação.

³⁹Veja a seção 5.2.4.

4.2 Soluções Analíticas

4.2.1 Têmpera genérica para o caso limpo

Consideremos agora que o sistema seja preparado no estado $|\psi_0\rangle$, o qual é o estado fundamental do hamiltoniano H_0 definido por

$$H_0 = \frac{1}{2} J_0 \left[\sum_{j=1}^{L-1} (1 + (-1)^j \delta) (c_j^\dagger c_{j+1} + h.c.) + (1 + \delta) (-1)^{N+1} (c_L^\dagger c_1 + h.c.) \right], \quad (4.18)$$

e depois evoluímos esse estado pelo hamiltoniano

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} J \left[\sum_{j=1}^{L-1} (1 + (-1)^j \tilde{\delta}) (c_j^\dagger c_{j+1} + h.c.) + (1 + \tilde{\delta}) (-1)^{N+1} (c_L^\dagger c_1 + h.c.) \right]. \quad (4.19)$$

Note que neste caso não há desordem: temos dois acoplamentos que se repetem alternadamente, para cada hamiltoniano. Nas expressões acima, δ ou $\tilde{\delta}$ parametriza a dimerização do sistema, sendo que valores positivos indicam a fase dímero par. N é o número de partículas no estado fundamental de H_0 (uma quantidade conservada por ambos hamiltonianos). Estes hamiltonianos podem ser diagonalizados via série de Fourier, por meio dos operadores η e γ definidos a seguir: $c_{2j} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_q e^{i2qj} \eta_q$ e $c_{2j-1} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_q e^{iq(2j-1)} \gamma_q$, sendo

$$q = \frac{2\pi}{L} \left(n - \frac{1 + (-1)^N}{4} \right), \quad (4.20)$$

tal que $n = 1, 2, \dots, \frac{L}{2}$. Fazendo essa mudança de base em H_0 , temos

$$H_0 = J_0 \sum_q \begin{pmatrix} \gamma_q^\dagger & \eta_q^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_q e^{-2i\theta_q} \\ \lambda_q e^{2i\theta_q} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_q \\ \eta_q \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$= J_0 \sum_q \lambda_q (\alpha_q^\dagger \alpha_q - \beta_q^\dagger \beta_q), \quad (4.22)$$

sendo os autovalores $\pm\lambda_q$, em que $\lambda_q = \sqrt{\cos^2 q + \delta^2 \sin^2 q}$, e os respectivos autovetores $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta_q} \\ \pm e^{i\theta_q} \end{pmatrix}$.

Temos ainda $\cos 2\theta_q = \frac{\cos(q)}{\lambda_q}$ e $\sin 2\theta_q = \delta \frac{\sin(q)}{\lambda_q}$. Os operadores α e β são dados por

$$\alpha_q = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\theta_q} \gamma_q + e^{-i\theta_q} \eta_q), \quad \beta_q = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\theta_q} \gamma_q - e^{-i\theta_q} \eta_q), \quad (4.23)$$

donde, é claro

$$|\psi_0\rangle = \prod_q \beta_q^\dagger |0\rangle. \quad (4.24)$$

De forma inteiramente análoga, podemos diagonalizar o hamiltoniano final

$$\tilde{H} = J \sum_q \tilde{\lambda}_q \left(\tilde{\alpha}_q^\dagger \tilde{\alpha}_q - \tilde{\beta}_q^\dagger \tilde{\beta}_q \right). \quad (4.25)$$

O segredo para avaliar $A(t)$ é relacionar os operadores α_q, β_q e $\tilde{\alpha}_q, \tilde{\beta}_q$ respectivamente. Para tanto, basta inverter as relações entre α_q, β_q e γ_q, η_q :

$$\begin{aligned} \beta_q^\dagger &= \frac{e^{-i\theta_q} \gamma_q^\dagger - e^{i\theta_q} \eta_q^\dagger}{\sqrt{2}} = \frac{e^{-i\theta_q} e^{i\tilde{\theta}_q} \left(\tilde{\alpha}_q^\dagger + \tilde{\beta}_q^\dagger \right) - e^{i\theta_q} e^{-i\tilde{\theta}_q} \left(\tilde{\alpha}_q^\dagger - \tilde{\beta}_q^\dagger \right)}{2}, \\ &= \cos \left(\tilde{\theta}_q - \theta_q \right) \tilde{\beta}_q^\dagger + i \sin \left(\tilde{\theta}_q - \theta_q \right) \tilde{\alpha}_q^\dagger = \cos \left(\Delta\theta_q \right) \tilde{\beta}_q^\dagger + i \sin \left(\Delta\theta_q \right) \tilde{\alpha}_q^\dagger. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} A(t) &= \langle 0 | \prod_{q\downarrow} \beta_q e^{-i\tilde{H}t} \prod_{k\downarrow} \beta_k^\dagger | 0 \rangle \\ &= \prod_q \langle 0 | \left(\cos \left(\Delta\theta_q \right) \tilde{\beta}_q - i \sin \left(\Delta\theta_q \right) \tilde{\alpha}_q \right) e^{-i\tilde{\lambda}_q Jt} \left(\tilde{\alpha}_q^\dagger \tilde{\alpha}_q - \tilde{\beta}_q^\dagger \tilde{\beta}_q \right) \left(\cos \left(\Delta\theta_q \right) \tilde{\beta}_q^\dagger + i \sin \left(\Delta\theta_q \right) \tilde{\alpha}_q^\dagger \right) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (4.27)$$

mas $e^{Ac^\dagger c} c^\dagger = e^A c^\dagger e^{Ac^\dagger c}$, sendo A escalar; portanto

$$\begin{aligned} A(t) &= \prod_q \langle 0 | \left(\cos \left(\Delta\theta_q \right) \tilde{\beta}_q - i \sin \left(\Delta\theta_q \right) \tilde{\alpha}_q \right) \left(\cos \left(\Delta\theta_q \right) \tilde{\beta}_q^\dagger e^{i\tilde{\lambda}_q Jt} + i \sin \left(\Delta\theta_q \right) \tilde{\alpha}_q^\dagger e^{-i\tilde{\lambda}_q Jt} \right) | 0 \rangle \\ &= \prod_q \left(\cos^2 \left(\Delta\theta_q \right) e^{i\tilde{\lambda}_q Jt} + \sin^2 \left(\Delta\theta_q \right) e^{-i\tilde{\lambda}_q Jt} \right) \\ &= \prod_q \left(\cos \left(\tilde{\lambda}_q Jt \right) + i \sin \left(\tilde{\lambda}_q Jt \right) \left(\frac{\cos^2 q + \delta \tilde{\delta} \sin^2 q}{\lambda_q \tilde{\lambda}_q} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

A Eq. (4.28) tem raízes quando

$$\left(\frac{\cos^2 q + \delta \tilde{\delta} \sin^2 q}{\lambda_q \tilde{\lambda}_q} \right) = 0, \quad (4.29)$$

e

$$\cos(\tilde{\lambda}_q J t) = 0. \quad (4.30)$$

É notável, e de certo modo esperado, que a primeira condição seja satisfeita apenas quando $\delta \tilde{\delta} \leq 0$, posto que se trata de uma têmpera em que o acoplamento $\tilde{\delta}$ cruza a transição de fase de equilíbrio.

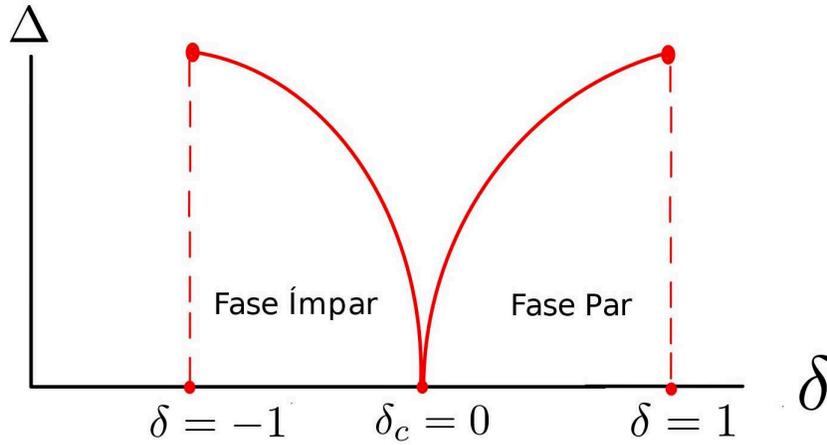


Figura 5: Diagrama de equilíbrio para hamiltonianos da forma 4.18.

A segunda condição fornece os instantes críticos, isto é, aqueles nos quais a transição de fase dinâmica ocorre:

$$\tilde{\lambda}_q J t_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.31)$$

Uma vez que a Eq. (4.30) depende apenas de $\tilde{\delta}$, fica claro que a têmpera inversa não é equivalente, de forma genérica: os casos de equivalência ocorrem somente para $\delta = -\tilde{\delta}$, como esperado pela simetria em relação ao diagrama de fase. Para o caso extremo em que a têmpera consiste em partir da fase par, com $\delta = 1$ e chegar à fase ímpar, com $\tilde{\delta} = -1$ (ou o contrário), temos pela Eq. (4.29)

$$\sin^2 q = \cos^2 q, \quad (4.32)$$

ou seja $q \in \{\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}\}$. Pela Eq. (4.20), isto é possível apenas no limite termodinâmico.

Por fim, utilizando que $\mathcal{L}(t) = |A(t)|^2$, no limite termodinâmico é possível escrever a energia livre

dinâmica como

$$f(t) = - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{L}(t))}{L} = - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi dq \ln \left| \cos^2(\tilde{\lambda}_q Jt) + \sin^2(\tilde{\lambda}_q Jt) \left(\frac{\cos^2 q + \delta \tilde{\delta} \sin^2 q}{\lambda_q \tilde{\lambda}_q} \right)^2 \right|. \quad (4.33)$$

O maior dos nossos interesses, *a priori*, está na derivada de $f(t)$, posto que é esperado uma descontinuidade do tipo “bico” nos instantes críticos, o que significa que $f'(t)$ deve exibir pelo menos uma descontinuidade do tipo “salto”.

4.2.2 Ligando a desordem: um caso extremo porém instrutivo

Vamos considerar nosso primeiro caso em que os acoplamentos gozam de um tipo de desordem; nesta situação particular e simplificada, temos (supomos L par, aqui como em todos sistemas estudados no texto)

$$H_0 = \sum_{j=1}^{L/2} J_{2j-1} (\sigma_{2j-1}^+ \sigma_{2j}^- + h.c.), \quad (4.34)$$

e

$$H = \sum_{j=1}^{L/2} J_{2j} (\sigma_{2j}^+ \sigma_{2j+1}^- + h.c.) = \sum_{j=1}^{L/2} H_{2j}. \quad (4.35)$$

Desta forma, estamos fazendo a *têmpera* a partir de um estado dimerizado na fase ímpar até outro na par, sendo os acoplamentos variáveis aleatórias estritamente positivas, como discutido na introdução. Em termos da relação entre os hamiltonianos no diagrama de fase, a *têmpera* corresponde à passagem súbita entre $\overline{J}_e = 0$ e $\overline{J}_o = 0$ [ou $\frac{\overline{J}_e}{\overline{J}_o} = \infty$, conforme Fig. (6)], conforme representado na figura abaixo.

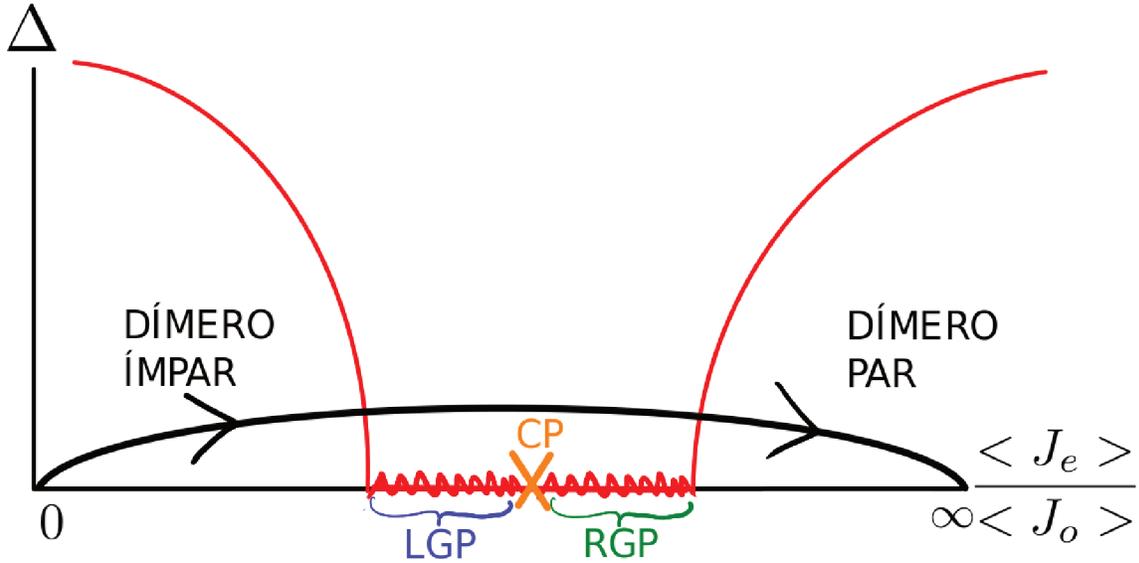


Figura 6: Representação da *têmpera* correspondente à dinâmica avaliada nessa seção ($H_0 \rightarrow H$), mostrando a relação com o diagrama de fase quântica de equilíbrio.

O resultado exato que demonstraremos a seguir é fundamental para nossos propósitos. É impor-

tante notar que, do estado inicial, nos importa apenas a topologia - os valores dos acoplamentos ímpares pouco nos importam. De fato, considerando o estado fundamental de H_0 temos um produto de *singletos isolados*:

$$|\psi_0\rangle = \bigotimes_j |s_{2j-1,2j}\rangle = |s_{1,2}\rangle \otimes |s_{3,4}\rangle \otimes \cdots \otimes |s_{L-3,L-2}\rangle \otimes |s_{L-1,L}\rangle, \quad (4.36)$$

sendo $|s_{i,j}\rangle = \frac{|\uparrow_i\downarrow_j\rangle - |\downarrow_i\uparrow_j\rangle}{\sqrt{2}}$, e, naturalmente, i, j simbolizam a localização espacial de um spin. Uma vez que $[H_{2j}, H_{2k}] = 0$, o hamiltoniano é composto por uma soma de subsistemas independentes H'_{2j} s o operador evolução temporal pode ser escrito como

$$e^{-iHt} = e^{-iH_L t} e^{-iH_{L-2} t} \dots e^{-iH_2 t}. \quad (4.37)$$

Para prosseguir, devemos avaliar primeiramente termos da forma

$$e^{A(\sigma_2^+ \sigma_3^- + h.c.)} = 1 + A(\sigma_2^+ \sigma_3^- + h.c.) + \frac{1}{2!} A^2 (\sigma_2^+ \sigma_3^- + h.c.)^2 + \dots \quad (4.38)$$

Note que $(\sigma_2^+ \sigma_3^- + h.c.)^2 = \frac{1}{2} (1 - \sigma_2^z \sigma_3^z)$, donde é fácil obter $(\sigma_2^+ \sigma_3^- + h.c.)^3 = \frac{1}{2} (1 - \sigma_2^z \sigma_3^z) (\sigma_2^+ \sigma_3^- + h.c.) = (\sigma_2^+ \sigma_3^- + h.c.)$, o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} e^{A(\sigma_2^+ \sigma_3^- + h.c.)} &= 1 + \left(A + \frac{1}{3!} A^3 + \dots \right) (\sigma_2^+ \sigma_3^- + h.c.) + \left(\frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{4!} A^4 + \dots \right) \frac{1}{2} (1 - \sigma_2^z \sigma_3^z) \\ &= 1 + (\sigma_2^+ \sigma_3^- + h.c.) \sinh A + (\cosh A - 1) \frac{1}{2} (1 - \sigma_2^z \sigma_3^z) \\ &= \frac{1}{2} (\cosh A + 1) + (\sigma_2^+ \sigma_3^- + h.c.) \sinh A + \frac{1}{2} \sigma_2^z \sigma_3^z (1 - \cosh A) \\ &= \cosh^2 \frac{A}{2} + (\sigma_2^+ \sigma_3^- + h.c.) \sinh A - \sigma_2^z \sigma_3^z \sinh^2 \frac{A}{2}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Utilizando a Eq. (4.14) podemos escrever

$$\begin{aligned} e^{-iH_{2j} t} &= e^{-itJ_2(\sigma_{2j}^+ \sigma_{2j+1}^- + h.c.)} = \cos^2 \left(\frac{J_{2j} t}{2} \right) + \sin \left(\frac{J_{2j} t}{2} \right) \sigma_2^z \sigma_3^z - i \sin (J_{2j} t) (\sigma_2^+ \sigma_3^- + h.c.) \\ &= \cos^2 \left(\frac{J_{2j} t}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{J_{2j} t}{2} \right) \sigma_2^z \sigma_3^z - i 2 \sin \left(\frac{J_{2j} t}{2} \right) \cos \left(\frac{J_{2j} t}{2} \right) (\sigma_2^+ \sigma_3^- + h.c.). \end{aligned} \quad (4.40)$$

O cálculo da Amplitude de Loschmidt para a situação em cena é, essencialmente, um processo de sucessiva integração dos graus de liberdade; conforme veremos, o diagrama a seguir introduz uma

notação gráfica de grande valor na simplificação dos cálculos, permitindo aplicação valiosa quando aliada ao SDRG, conforme veremos no próximo capítulo. Por isto, obteremos o principal resultado desta subseção.

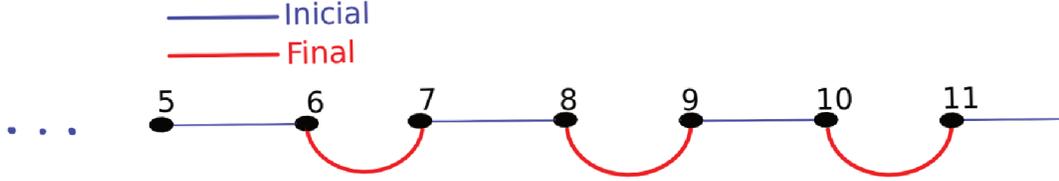


Figura 7: Representação gráfica da têmpera no caso extremo. As linhas azuis (vermelhas) representam os acoplamentos do hamiltoniano inicial (final).

Observe, por exemplo, que o dímero formado entre os sítios 7 e 8 será afetado pelos componentes de evolução temporal correspondentes às exponenciais de H_6 e de H_8 . Estes operadores são os únicos que atuam nos graus de liberdade do dímero $|s_{7,8}\rangle$. Por isso, é de interesse avaliar expressões da forma $e^{-itH_{2j}}e^{-itH_{2j+2}}$. Por simplicidade, consideremos $e^{-itH_6}e^{-itH_8}$. Defina $A_{2j} = \cos^2\left(\frac{J_{2j}t}{2}\right)$, $B_{2j} = \sin^2\left(\frac{J_{2j}t}{2}\right)$ e $C_{2j} = -i2\sin\left(\frac{J_{2j}t}{2}\right)\cos\left(\frac{J_{2j}t}{2}\right)$; assim

$$\begin{aligned}
e^{-itH_6}e^{-itH_8} &= (A_6 + B_6\sigma_6^z\sigma_7^z + C_6(\sigma_6^+\sigma_7^- + h.c.))(A_8 + B_8\sigma_8^z\sigma_9^z + C_8(\sigma_8^+\sigma_9^- + h.c.)) \\
&= A_6A_8 + B_6B_8\sigma_6^z\sigma_7^z\sigma_8^z\sigma_9^z + C_6C_8(\sigma_6^+\sigma_7^-\sigma_8^+\sigma_9^- + h.c.) \\
&\quad + A_8B_6\sigma_6^z\sigma_7^z + A_6B_8\sigma_8^z\sigma_9^z + C_6C_8(\sigma_6^+\sigma_7^-\sigma_8^-\sigma_9^+ + h.c.) \\
&\quad + A_6C_8(\sigma_8^+\sigma_9^- + h.c.) + A_8C_6(\sigma_6^+\sigma_7^- + h.c.) \\
&\quad + B_6C_8\sigma_6^z\sigma_7^z(\sigma_8^+\sigma_9^- + h.c.) + B_8C_6\sigma_8^z\sigma_9^z(\sigma_6^+\sigma_7^- + h.c.). \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Assim, ao computar a amplitude, podemos ir “integrando” dímero a dímero; nesse caso, ao projetar o resultado sobre $|\psi_0\rangle$ o termo que interessa a esse par de operadores exponenciais será $|s_{7,8}\rangle$, donde se obtém

$$\begin{aligned}
\langle s_{7,8}|e^{-itH_6}e^{-itH_8}|s_{7,8}\rangle &= A_6A_8 - B_6B_8\sigma_6^z\sigma_9^z - \frac{1}{2}C_6C_8(\sigma_6^+\sigma_9^- + h.c.) \\
&= A'_{6,9} + B'_{6,9}\sigma_6^z\sigma_9^z + C'_{6,9}(\sigma_6^+\sigma_9^- + h.c.) \equiv e^{-itH'_{6,9}}. \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Note que o resultado como que dá origem a um hamiltoniano efetivo, obtido pela decimação dos sítios 7 e 8, conectando 6 a 9; resta agora projetar nos demais singletos, sem o termo $|s_{7,8}\rangle$. O processo é repetido até que o ciclo/loop se complete⁴⁰, por exemplo, em $|s_{L-1,L}\rangle$, fornecendo

⁴⁰Lembre-se que estamos utilizando condições periódicas de contorno (PBC).

$$\begin{aligned}
\langle \psi_0 | e^{-iHt} | \psi_0 \rangle &= \langle \psi_0 | e^{-iH_L t} e^{-iH_{L-2} t} \dots e^{-iH_2 t} | \psi_0 \rangle \\
&= \langle s_{L-1,L} | e^{-itH'_{L,L-1}} | s_{L-1,L} \rangle = A'_{L-1,L} - B'_{L-1,L} - C'_{L-1,L} \\
&= \prod_{j=1}^{L/2} A_{2j} + (-1)^{L/2} \prod_{j=1}^{L/2} B_{2j} + 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^{L/2} \prod_{j=1}^{L/2} C_{2j} \\
&= \prod_{j=1}^{L/2} \cos^2 \left(\frac{J_{2j} t}{2} \right) + (-1)^{L/2} \prod_{j=1}^{L/2} \sin^2 \left(\frac{J_{2j} t}{2} \right) + 2i^{L/2} \prod_{j=1}^{L/2} \sin \left(\frac{J_{2j} t}{2} \right) \cos \left(\frac{J_{2j} t}{2} \right) \\
&= \left[\prod_{j=1}^{L/2} \cos \left(\frac{J_{2j} t}{2} \right) + i^{L/2} \prod_{j=1}^{L/2} \sin \left(\frac{J_{2j} t}{2} \right) \right]^2. \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Este resultado, inocente em princípio, se mostrará de grande importância, pelo menos qualitativa, mesmo nos casos interagentes; isto fica mais claro quando analisamos a simples transposição do diagrama representado na Fig. (7) para sua forma algébrica - o resultado da AL - bastando reconhecer que cada acoplamento vermelho corresponde a um certo J_{2j} , os quais devem ser inseridos nos produtórios da Eq. (4.43).

Para exemplificar mais precisamente a aplicação da notação gráfica e da Eq. (4.43), note como várias estruturas de ciclos podem aparecer naturalmente quando observamos e.g. a Echo para $L = 16$ correspondendo a uma têmpera para uma fase “mista”.

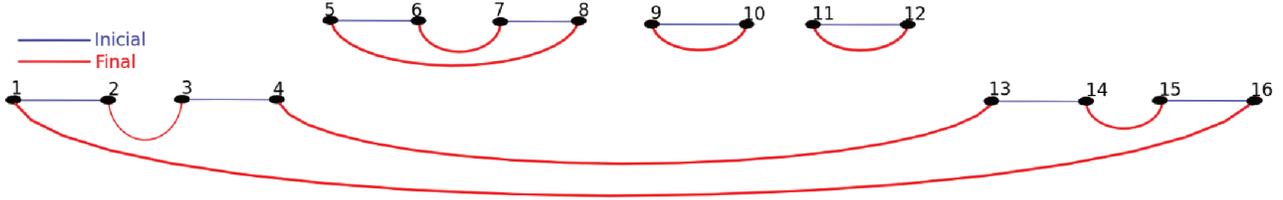


Figura 8: Ilustração de um ciclo desconexo de uma rede com tamanho $L = 16$. As linhas azuis (vermelhas) representam os acoplamentos do hamiltoniano inicial (final).

Neste exemplo, podemos obter o resultado

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}_1(t) \mathcal{L}_2(t), \tag{4.44}$$

sendo

$$\mathcal{L}_1(t) = \left| \left(\prod_{J \in S_1} \cos\left(\frac{Jt}{2}\right) + \prod_{J \in S_1} \sin\left(\frac{Jt}{2}\right) \right) \right|^2, \quad (4.45)$$

em que definimos

$$S_1 = \{J_{2,3}, J_{4,13}, J_{14,15}, J_{16,1}\},$$

e

$$\mathcal{L}_2(t) = \left| \left(\prod_{J \in S_2} \cos\left(\frac{Jt}{2}\right) - \prod_{J \in S_2} \sin\left(\frac{Jt}{2}\right) \right) \right|^2, \quad (4.46)$$

sendo

$$S_2 = \{J_{6,7}, J_{8,5}\}.$$

Conforme discutiremos a respeito das evidências na seção 5, esperamos que a amplitude de Loschmidt para uma têmpera cujo hamiltoniano final seja dotado de m regiões raras desconexas (na aproximação do SDRG) seja da forma

$$A^{SDRG}(t) = \prod_{j=1}^m A_j^{SDRG}(t), \quad (4.47)$$

sendo A_j^{SDRG} a amplitude obtida considerando o ciclo da j -ésima região rara.

4.2.3 Renormalizando o hamiltoniano final

Considere mais uma vez a Fig. (8); temos dois tipos de segmentos vermelhos: os que conectam dímeros distintos e os que partem de e chegam a um mesmo dímero; o que aprendemos na seção anterior é que, para fins de cálculo da energia livre dinâmica, somente os do primeiro tipo interessam, e que eles fornecem as escalas de energia presentes na Eq. (4.43). Esta é uma primeira observação-chave. A segunda, consiste em aplicar o SDRG para obter uma estrutura efetiva de singletos isolados na tentativa de melhor compreender as origens de uma possível criticalidade dinâmica para a cadeia XX interagente⁴¹ ao longo do diagrama de fases. Para simplificar a análise, vamos iniciar tratando uma têmpera na qual o hamiltoniano final é dotado de uma única ilha na qual l_{RR} representa o número de sítios que contribuem efetivamente na formação da região rara, isto é, $l_{RR} = 2(d_{RR} + 1)$ onde d_{RR} é o número de dímeros na fase contrária à do *bulk*. Considerando $l_{RR} = 6$ e $L = 16$, a seguinte imagem ilustra a fase final do sistema estudado ($J_2 \gg J_e^f \gg J_1^f$ para

⁴¹Observe que até então, no caso extremo, estudamos a têmpera entre duas fases não interagentes.

desordem forte).

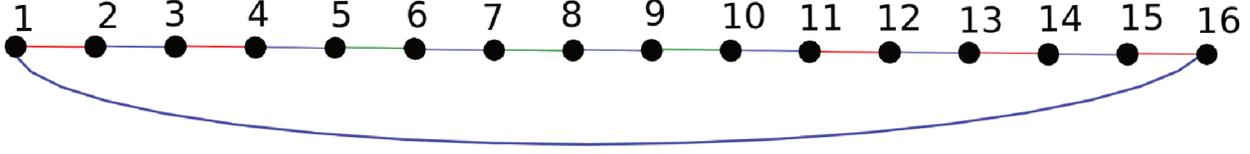


Figura 9: Em vermelho, temos J_2 ; acoplamentos azuis representam J_e^f e os verdes J_1^f .

Aplicando o SDRG [veja Fig. (10)], resulta uma coleção de dímeros ímpares no *bulk*, d_{RR} dímeros pares na ilha e um dímero formado pelas paredes de domínio que separam a ilha do bulk, cujo acoplamento efetivo é dado por

$$J_{eff} = J_1^f \left(\frac{J_1^f}{J_e^f} \right)^{d_{RR}} + J_e^f \left(\frac{J_e^f}{J_2} \right)^{L_{bulk}/2}, \quad (4.48)$$

sendo

$$L_{bulk} = L - l_{RR} = L - 2d_{RR} - 2, \quad (4.49)$$

mostrando haver dois tipos de contribuição no acoplamento efetivo entre as paredes de domínio: o primeiro depende das escalas de energia internas à ilha, enquanto o segundo daquelas presentes no *bulk*; nos casos de forte desordem, o segundo termo vai a zero muito mais rapidamente que o primeiro, levando a aproximações naturais. O sistema efetivo do exemplo em pauta está representado na figura a seguir:

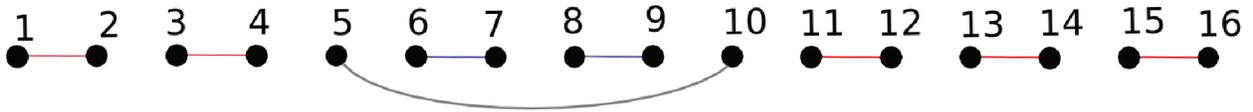


Figura 10: Representação dos acoplamentos do hamiltoniano efetivo H^{SDRG} obtido a partir do hamiltoniano ilustrado na Fig. (5). Em vermelho, temos J_2 , azul representa J_e^f e o acoplamento efetivo, J_{eff} , é mostrado em coloração cinza.

Sobrepondo os sistemas, a estrutura de ciclos será conforme Fig. (7)

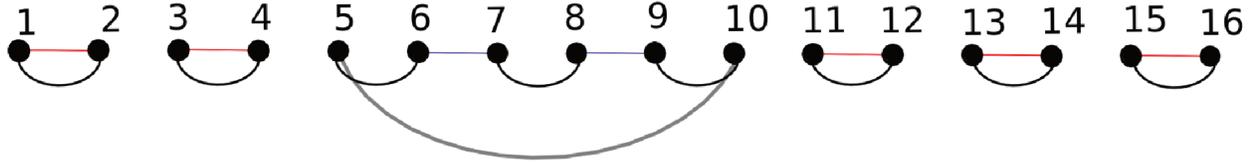


Figura 11: Representação do ciclo que deve ser considerado no cálculo da amplitude de Loschmidt na aproximação do SDRG. Em vermelho, temos J_2 , azul representa J_e^f e o acoplamento efetivo, J_{eff} , é mostrado em coloração cinza. Os acoplamentos referentes ao sistema inicial são representados de preto.

Note que os dímeros na ilha são formados pelos pares (6,7) e (8,9); as paredes de domínio são formadas pelo par (5,10) que se acopla efetivamente conforme Eq. (4.48) e o bulk é dotado dos dímeros formados pelos pares (1,2), (3,4), (11,12), (13,14) e (15,16). Aplicando as regras diagramáticas ao sistema efetivo, vemos que a Loschmidt Echo será dada, pela aproximação do SDRG, por

$$\mathcal{L}^{SDRG}(t) = \left| \left(\cos^2 \left(\frac{J_e^f t}{2} \right) \cos \left(\frac{J_{eff} t}{2} \right) - i \sin^2 \left(\frac{J_e^f t}{2} \right) \sin \left(\frac{J_{eff} t}{2} \right) \right)^2 \right|^2. \quad (4.50)$$

No próximo capítulo apresentaremos comparações entre o resultado exato de $\mathcal{L}(t)$ e a aproximação $\mathcal{L}^{SDRG}(t)$.

5 Resultados

5.1 Sistema Limpo

Vamos explorar algumas consequências dos resultados obtidos na seção 4.2.1. A primeira destas consiste nas restrições impostas pelas Eqs. (4.20) e (4.29); considere, por exemplo, o caso em que $\delta = -1$, e que os acoplamentos de \tilde{H} sejam [veja a Eq. (4.19)]

$$\frac{J}{2} (1 - \tilde{\delta}) = 5, \quad (5.1)$$

e

$$\frac{J}{2} (1 + \tilde{\delta}) = 10, \quad (5.2)$$

assim, temos $J = 15$ e $\tilde{\delta} = \frac{1}{3}$. Mas, pela Eq. (4.29) é preciso que

$$\cos^2 q = \frac{1}{3} \sin^2 q, \quad (5.3)$$

ou seja

$$|\sin q| = \frac{\sqrt{3}}{2} \leftrightarrow q = \pm \frac{\pi}{3}. \quad (5.4)$$

Ora, dado que a Eq. (4.20) requer $q = \frac{2\pi}{L} \left(n - \frac{1+(-1)^N}{4} \right)$, deve existir $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n = \frac{1 + (-1)^N}{4} + \frac{L}{3}, \quad (5.5)$$

uma impossibilidade, dado que consideramos L par em nossos estudos. Este resultado é importante, uma vez que as considerações de paridade não desaparecem no limite termodinâmico e também porque, muito embora no caso em cena uma forma fechada pôde ser obtida para $L \rightarrow \infty$, evidencia que algumas dificuldades podem incorrer quando tratando do crescimento de sistemas finitos - no exemplo acima, em particular, para qualquer L que não seja da forma $L = 2 * 3^m$, $m \in \mathbb{N}$, o instante crítico é “evitado”.

A segunda consequência de interesse é a assimetria com relação a uma têmpera partindo de ou chegando ao ponto crítico. Primeiro, considere $\delta = -1$ e $\tilde{\delta} = 0$: tal situação impossibilita a existência de tempos finitos que mantenham a consistência entre as Eqs. (4.29) e (4.30). No entanto, caso $\delta = 0$ e $\tilde{\delta} = -1$ a consistência é facilmente obtida desde que $q = \frac{\pi}{2}$.

Os dois resultados acima discutidos sugerem cautela para situações análogas quando tratarmos do

sistema desordenado.

Na figura 12, apresentamos a energia livre dinâmica, Eq. (4.33) para $\delta = 1$ e alguns valores de $\tilde{\delta}$.

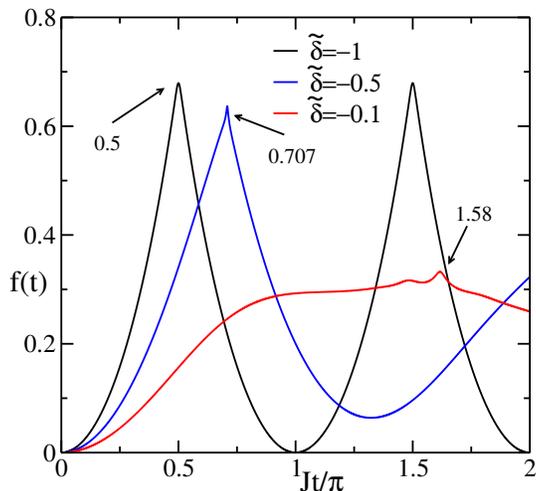


Figura 12: A energia livre dinâmica $f(t)$ vs Jt/π , dada pela Eq.(4.33) [caso limpo no limite termodinâmico] para $\delta = 1$ e $\tilde{\delta} = \delta_f$.

A presença de “bicos” sugere fortemente que a derivada de $f(t)$ é descontínua. De fato, conforme vimos anteriormente $f'(t)$ é descontínua nos tempos críticos. Para $\tilde{\delta} \neq -1$ podemos fazer uma análise numérica da derivada, avaliando seu comportamento para um dado L a cada instante t , e também através da análise de tamanhos finitos - comparando $f'(t \approx t_c)$ para vários valores de L .

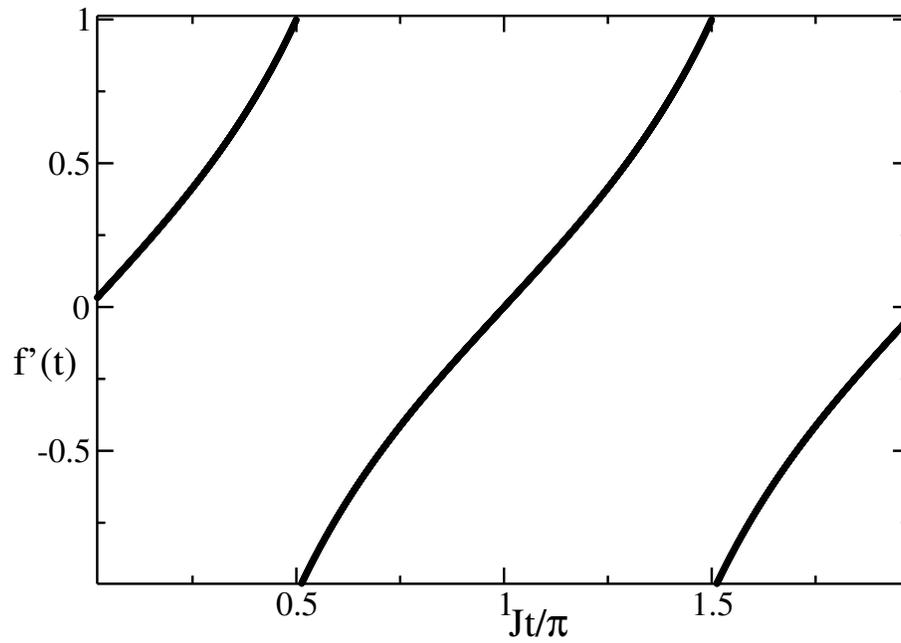


Figura 13: Derivada da energia livre dinâmica $f'(t)$ vs Jt/π , na têmpera do caso extremo para $L \rightarrow \infty$, $\delta = 1$ e $\tilde{\delta} = -1$.

Uma forma de obter assinaturas das transi es dinâmicas consiste em estudar os maiores valores da derivada segunda, nas imedia es do tempo crítico, e comparar seu comportamento em fun o do tamanho do sistema. Segue exemplo do caso extremo em que essa rela o de tamanhos finitos   evidenciada.

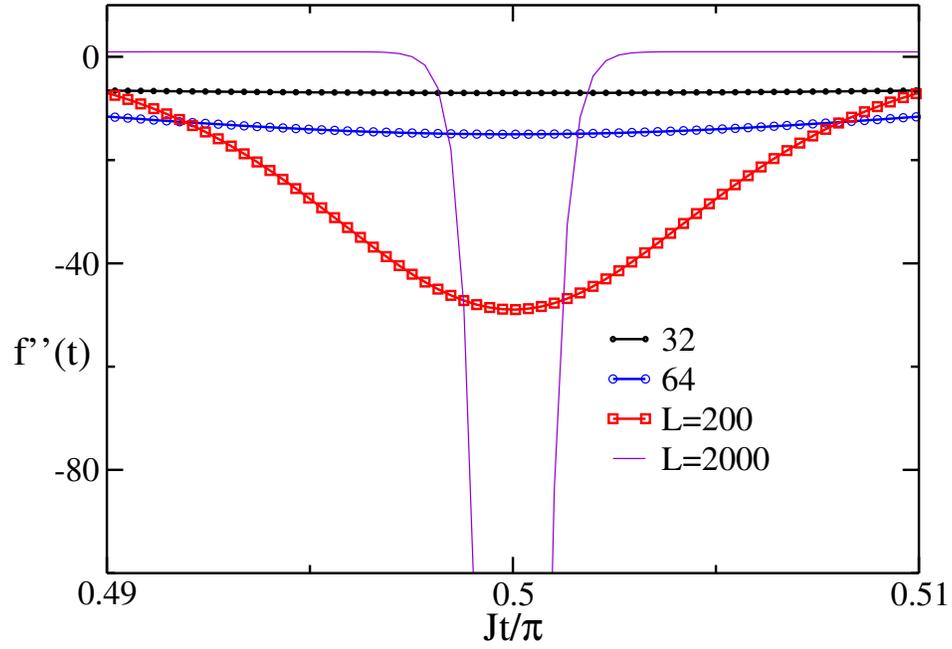


Figura 14: Derivada segunda da energia livre dinâmica $f''(t)$ vs Jt/π , para $\delta = 1$ e $\tilde{\delta} = -1$. O estudo dos valores de f'' próxima aos instantes críticos serve para inferir numericamente assinaturas das transições: observa-se que a derivada segunda escala ao infinito conforme o tamanho L .

De fato, a descontinuidade na função original pode ser inferida mediante uma não analiticidade na derivada que, por sua vez, pode ser vista no comportamento divergente da derivada segunda no ponto de descontinuidade em questão.

5.2 Sistemas com Desordem Forte

5.2.1 Localizando picos

Considere novamente o resultado do exemplo descrito na seção 4.2.3 dado pela Eq. (4.50). Tomando $J_2 = 100$, $J_1^f = 0.1$ e $J_e^f = 50.05$ segue que o tempo crítico previsto pelo modelo efetivo conforme equação acima referida, é aproximadamente $\frac{t_c}{\pi} \approx \frac{1}{50} = 0.02$ - dado que para os parâmetros escolhidos $J_{eff} \sim 4.10^{-6}$. Na figura adiante segue comparação entre a solução analítica aproximada e o resultado numérico obtido aplicando a Eq. (4.17).

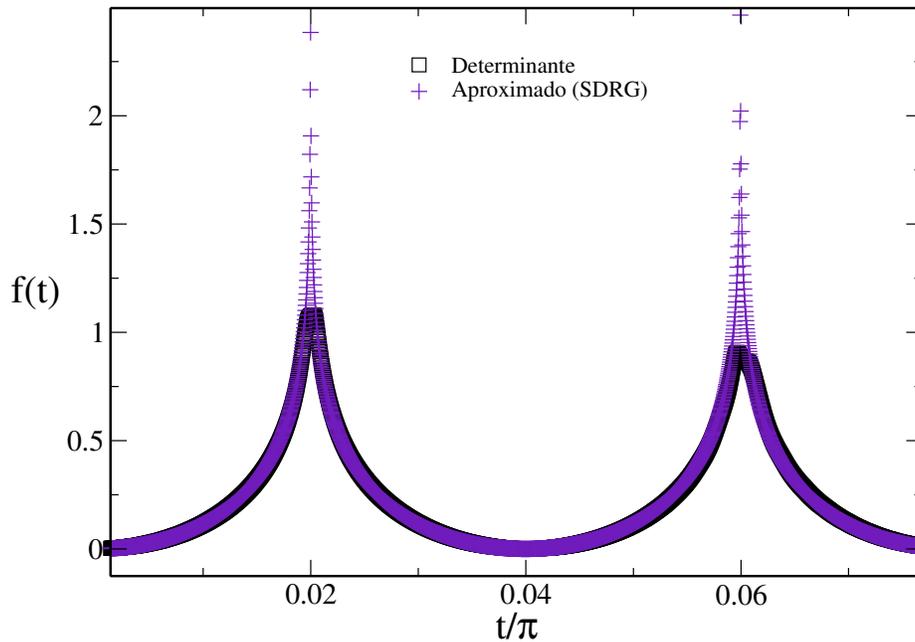


Figura 15: Energia livre dinâmica $f(t)$ vs t/π para uma têmpera ímpar com 2 dímeros e $L = 20$. Os quadrados negros representam o resultado exato obtido pela Eq. (4.17). Nas cruces em cor indigo temos o resultado aproximado $f^{SDRG}(t) = -\frac{1}{L} \ln \mathcal{L}^{SDRG}(t)$ (veja texto).

Como podemos ver acima, muito embora a intensidade do pico seja superestimada pela nossa aplicação do SDRG, a posição do mesmo, pelo menos para os primeiros instantes, é encontrada com certa precisão. Perceba a tendência de formação dos platôs a partir de aproximadamente 0,02 unidades de tempo no gráfico. Estes são discutidos na seção 5.2.4, e as evidências parecem apontá-los como instabilidades numéricas. De fato, esse “achatamento” já está presente no primeiro pico, conforme detalhe na figura abaixo.

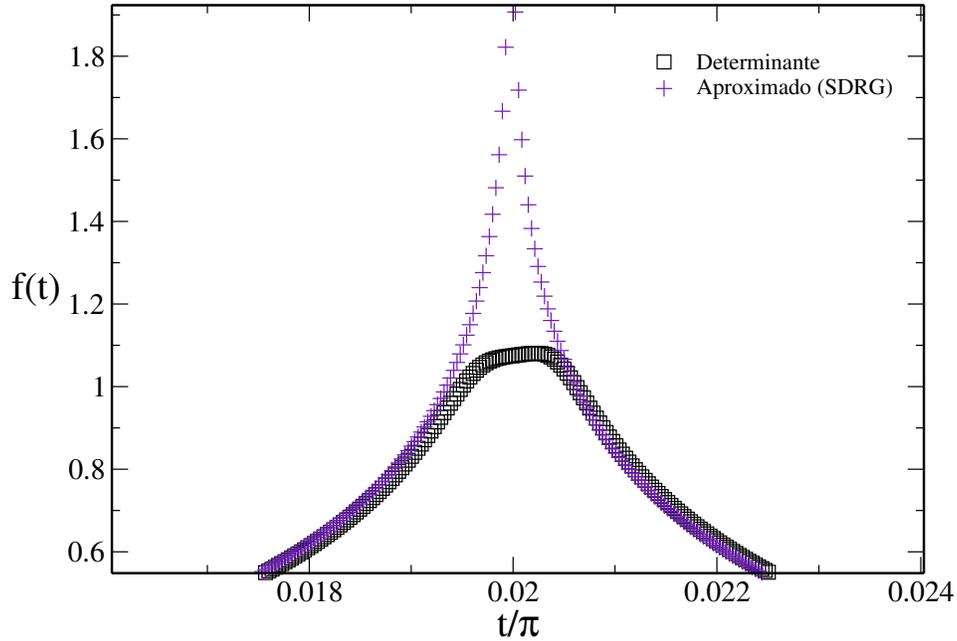


Figura 16: Detalhe da energia livre dinâmica $f(t)$ vs t/π para uma têmpera ímpar com 2  mmeros e $L = 20$. Os quadrados negros representam o resultado exato obtido pela Eq. (4.17). Nas cruces em cor indigo temos o resultado aproximado $f^{SDRG}(t) = -\frac{1}{L} \ln \mathcal{L}^{SDRG}(t)$ (veja texto).

5.2.2 Superposi o

Mais uma vez, observe a Fig. (8) e as Eq. (4.45) e (4.46).   interessante que temos dois ciclos completos, sendo um formado pelos sítios 1 a 4, este último conectado ao sítio 13 que então continua até o 16 . O outro loop   formado pelos sítios 5 a 8. Cada um dá origem a contribui es distintas e independentes na Echo, resultando em uma aditividade da energia livre din mica⁴². Uma observa o importante   que aquela estrutura de ciclos poderia muito bem ter sido obtida mediante aplica o do SDRG⁴³! Isto nos permite generalizar facilmente que, de maneira geral, o SDRG prevê um princípio de superposi o linear para as ilhas.   claro que, como o SDRG fornece a física de baixas energias do sistema, não precisamos esperar concordância com a soluço exata para tempos suficientemente longos, o que nos leva a estudar os primeiros picos em busca de evidências das transi es baseados no modelo efetivo e nos cálculos numéricos. De fato, podemos verificar a consistência dessa previsão a partir da soluço exata dada pela Eq. (4.17) para casos bastante simples, conforme Figs. (17) e (18). As simula es foram conduzidas utilizando-se sistemas de

⁴²Lembre-se que a energia livre dinâmica   dada, essencialmente, pelo logaritmo natural do módulo quadrado da amplitude de Loschmidt.

⁴³Vide se o 4.2.3 e apêndice B.

tamanho $L = 20$ e ilhas de tamanho $l_{RR} = 4$. Vemos que o princípio da superposição figura de fato nos dados reais, muito embora a singularidade prevista pelo SDRG seja “amortecida”, pelo menos para os tempos iniciais.

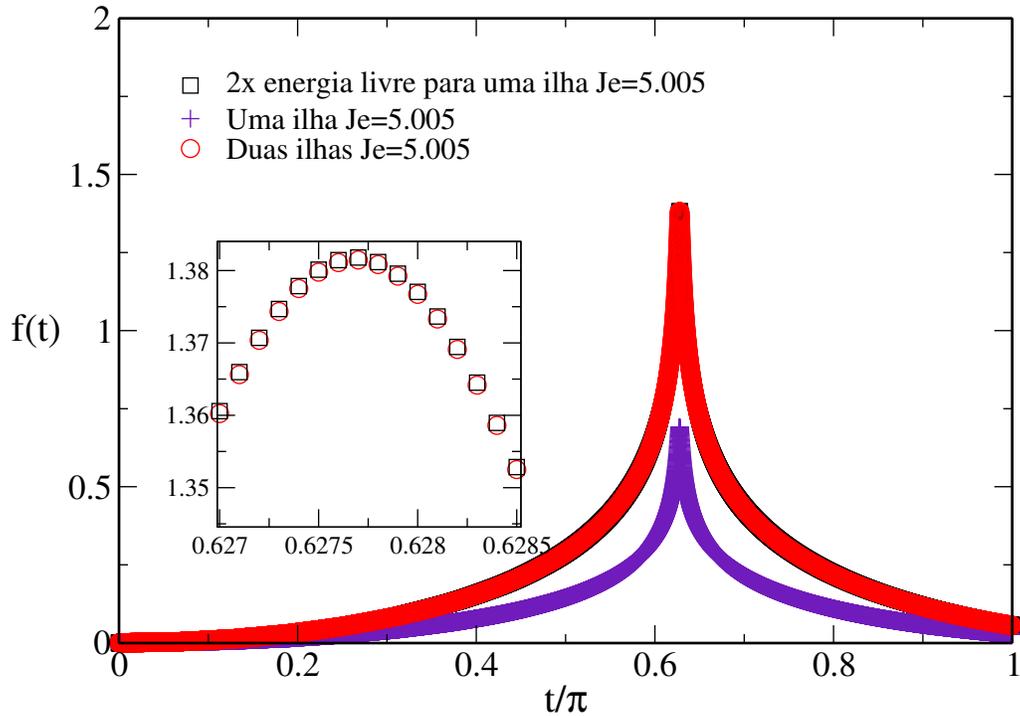


Figura 17: Superposição: as curvas negra (quadrados) e vermelha (círculos) se sobrepõem, como qualitativamente esperado pelo SDRG; duas ilhas idênticas, suficientemente afastadas e num sistema submetido a desordem alta comportam-se como uma mesma ilha cuja respectiva energia livre dinâmica é multiplicada por um fator 2 (cruzes de cor indigo). Note como o detalhe indica a precisão da superposição, no *inset* à esquerda.

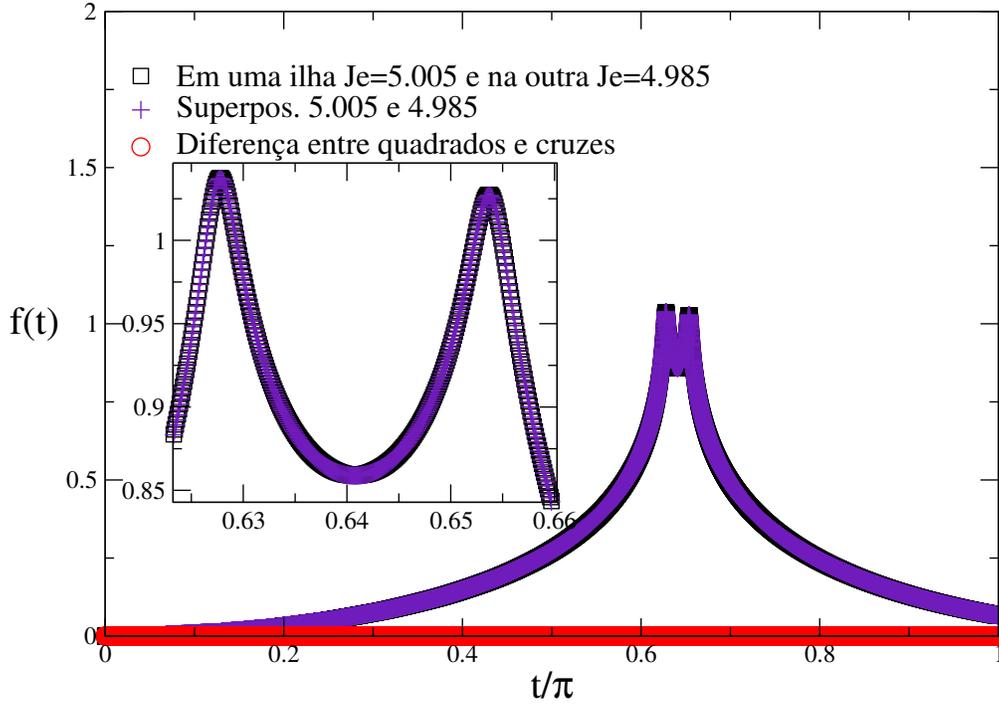


Figura 18: Superposição: as curvas negra (quadrados) e indigo (cruzes) se sobrepõem, como qualitativamente esperado pelo SDRG; o comportamento somado de duas energias livres, para dois sistemas de mesmo tamanho de bulk e de ilha mas cujas escalas de energia se discriminam nas ilhas (5.005 e 4.985 no exemplo em cena), é o mesmo que um único sistema, de mesmo tamanho dos anteriores, nos quais há duas ilhas suficientemente afastadas com seus tamanhos e escalas de energia respectivamente iguais àquelas descritas na primeira situação. A curva avermelhada (círculos) mostra o valor da diferença entre as curvas preta e vermelha. Note como o detalhe indica a precisão da superposição, no inset à esquerda.

5.2.3 Transições de ordem zero

Vamos agora discutir os zeros da Echo, identificando os instantes críticos das *singularidades fortes* às quais associamos “transições dinâmicas de ordem zero”. Muito embora o argumento seja geral para outros tipos de têmpera, dentro da aproximação do SDRG, vamos retomar o caso do quench extremo, em que as regiões do diagrama de fase são a fase dímero par, a qual fornece o estado fundamental, e a fase dímero ímpar no final - exatamente o problema que resolvemos na seção 4.2.1, em que H_0 é dado pela Eq. (4.34) e H pela (4.35). A única hipótese simplificadora será que teremos apenas dois valores de acoplamentos ímpares, sendo N_1 o número de ocorrências do acoplamento J_1 e N_2 o de J_2 , em que naturalmente $N_1 + N_2 = \frac{L}{2}$. L é o tamanho do sistema e definiremos $J_1 \leq J_2$. As fases de equilíbrio, recordamos, são relacionadas conforme Fig. (6).

Abaixo, comparamos a solução exata do *quench* extremo com a avaliação do determinante [veja Eq. (4.17) para o mesmo protocolo, i.e., sair da fase par e evoluir o sistema na fase ímpar]. As respectivas imagens dispõem os casos em que L assume os valores 22, 24 e 28, correspondendo a $L/2$ ímpar, $L/4$ par e $L/4$ ímpar, respectivamente. Nos casos em que $L/2$ é um número par, fizemos $N_1 = N_2 = \frac{L}{4}$ por corresponder ao caso mais provável em um sorteio binário. No caso de $L/2$ ímpar teremos $N_1 = \lfloor L/4 \rfloor$ e $N_2 = L/2 - \lfloor L/4 \rfloor$. Utilizamos $J_1 = 0.1$, $J_2 = 10$ e $J_e^f = 1000$ em todas realizações discriminadas a seguir. Em cada das 3 figuras subsequentes, temos também o seguinte padrão: 4 figuras indexadas de **a** a **d**, sendo que a figura **a** apresenta o perfil geral de um período da dinâmica; **b** dá o detalhe do pico em $t = \pi$; **c** traz sempre um “zoom” no primeiro pico da dinâmica, a fim de que apreciemos em quais casos, se algum, ali observeremos não-analiticidades. Finalmente, o gráfico **d** essencialmente mostra o detalhe dos demais picos entre 0 e π .

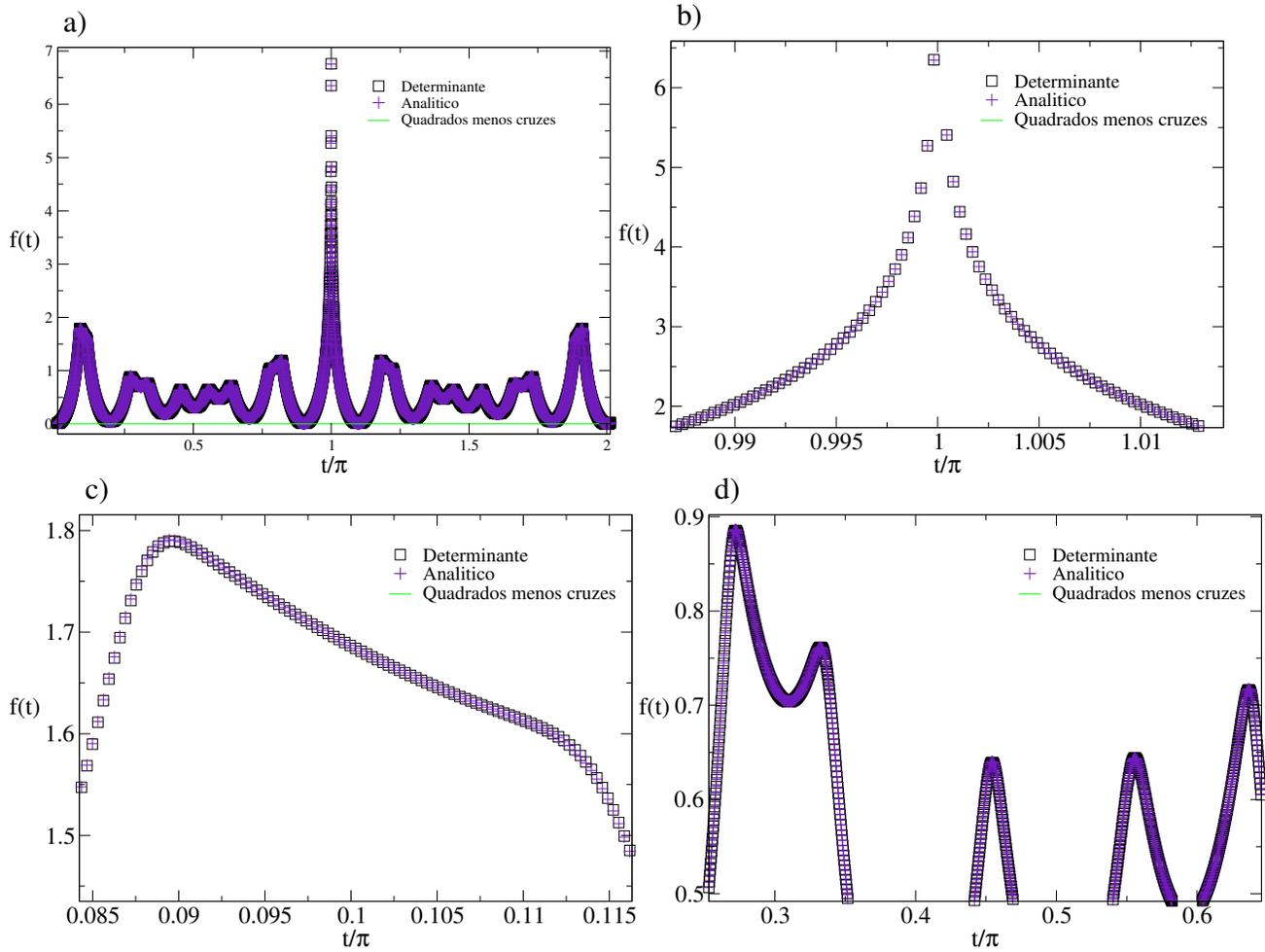


Figura 19: Comparação dos resultados obtidos pelo SDRG (Eq. (4.43)) e aplicação da Eq. (4.17). Sistema de tamanho $L = 22$, o que implica $L/2$ ímpar. Note a diferença dos picos entre esse gráfico e aquele representado na Fig. (21). Ainda, observe que aqui plotamos a diferença entre os resultados do determinante (quadrados) e da fórmula analítica (cruzes), resultado este representado pela linha verde-claro.

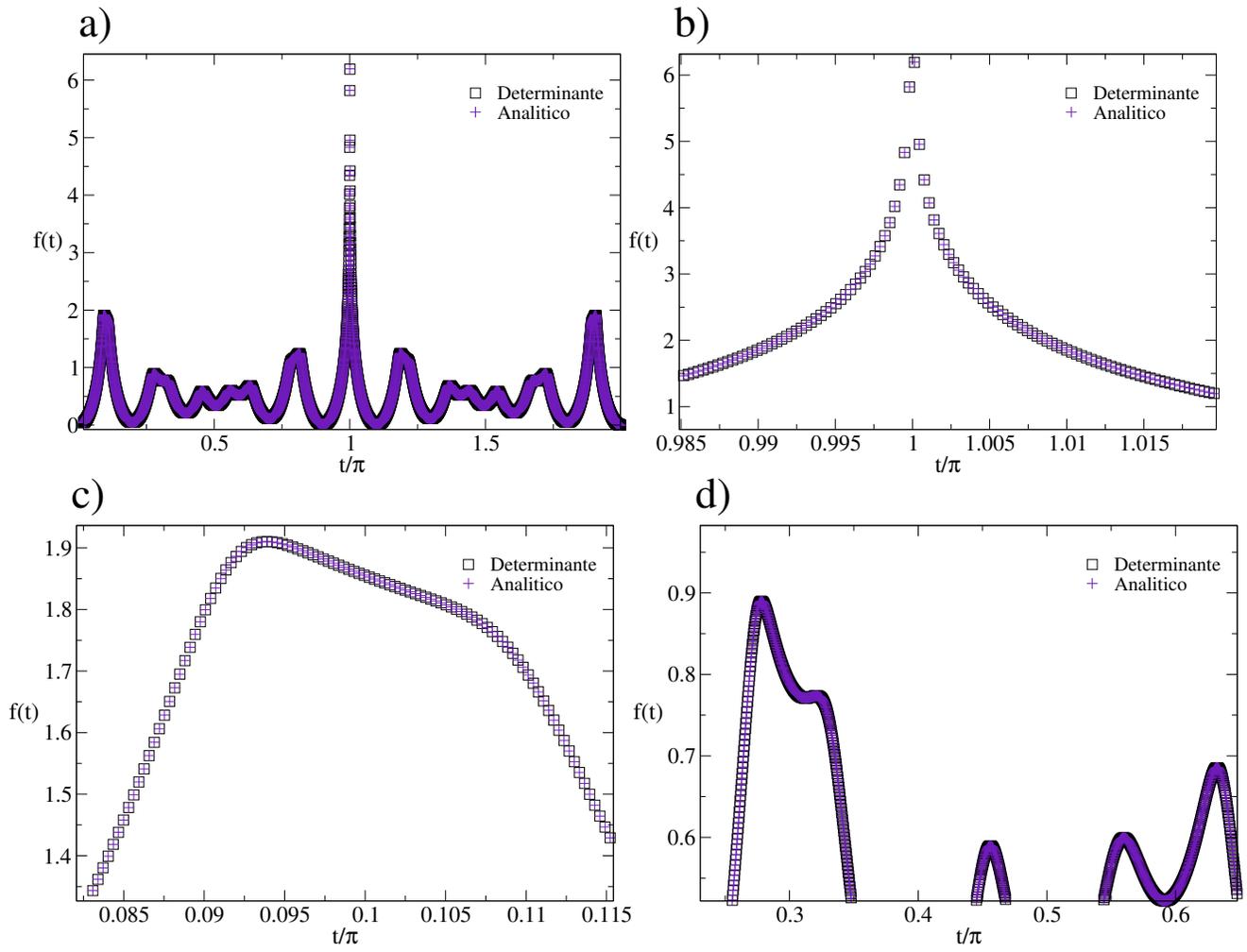


Figura 20: Comparação dos resultados obtidos pelo SDRG (Eq. (4.43)) e aplicação da Eq. (4.17). Sistema de tamanho $L = 24$, o que implica $L/4$ par. Temos $N_1 = N_2 = \frac{L}{4} = 6$. Note a diferença dos picos entre esse gráfico e aquele representado na Fig. (21).

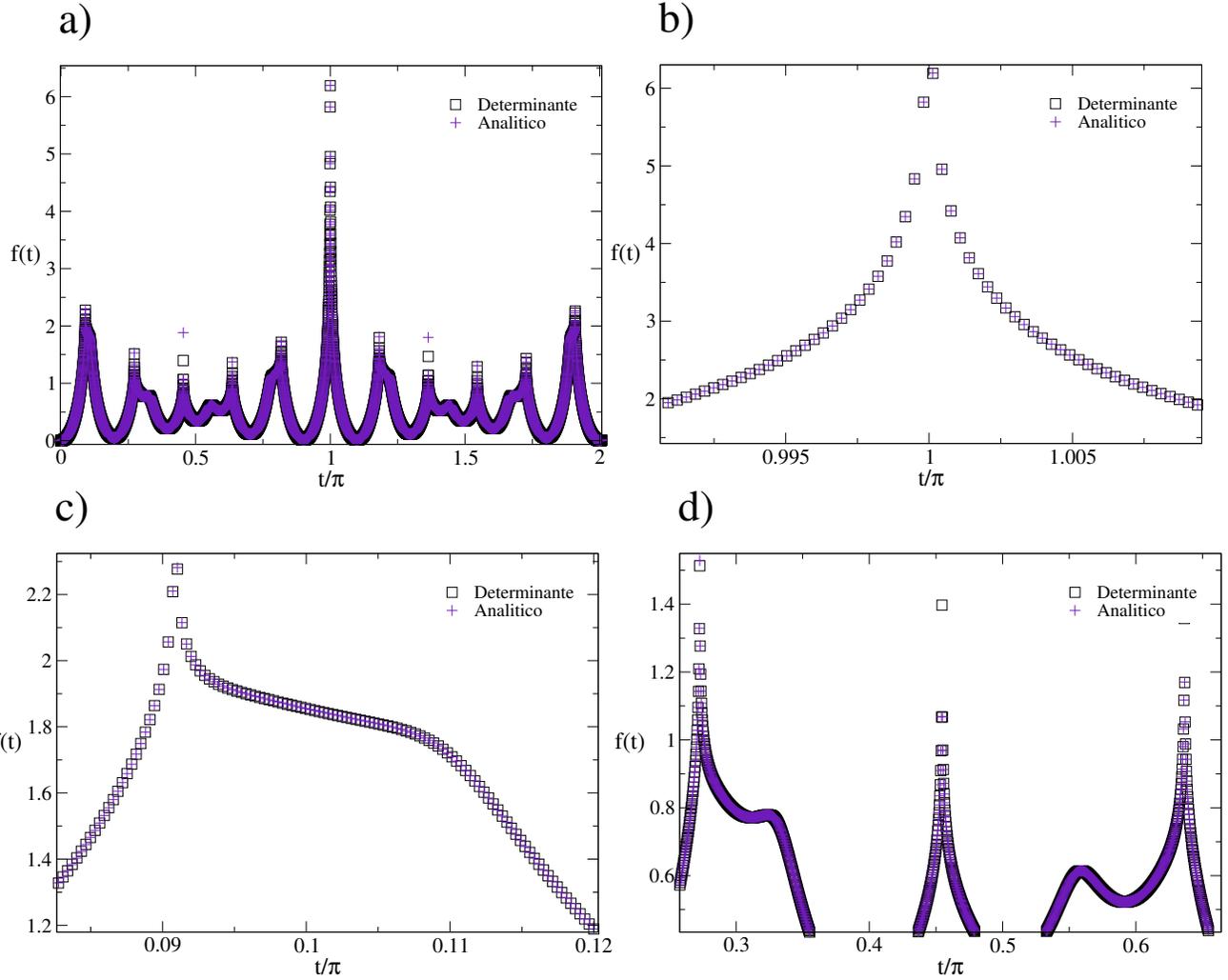


Figura 21: Comparação dos resultados obtidos pelo SDRG (Eq. (4.43)) e aplicação da Eq. (4.17). Sistema de tamanho $L = 28$, o que implica $L/4$ ímpar. Temos $N_1 = N_2 = \frac{L}{4} = 7$. Note a diferença dos picos nesse gráfico para com os dois anteriores, principalmente de forma mais notável os detalhes dos “bicos” em **d**.

Os exemplos acima servem para ilustrar algumas características gerais. Quando $\frac{L}{2}$ ímpar, a única forma de zerar a amplitude⁴⁴ dá-se por meio de pelo menos dois valores distintos de acoplamentos pares - uma vez que é condição suficiente para transição as partes real e imaginária irem a zero simultaneamente - relacionados como $\frac{J_2}{J_1} = \frac{2n+1}{2m}$ ou o recíproco, em que $J_2 > J_1$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Devido à especificidade, estes são chamados também de *zeros acidentais*. Notamos assim que existência de dois acoplamentos distintos é essencial para existência desse tipo de transição,

⁴⁴Lembre-se que estamos interessados nos zeros **reais**!

dado que pressupõe zerar um termo de seno e outro de cosseno, simultaneamente, fato tal que ocorre apenas quando estas funções tem períodos distintos comensuráveis (donde a razão racional). Se $\frac{L}{2}$ par esses zeros podem ainda existir, desde que respeitado o acima exposto; no entanto, se $\frac{L}{4}$ for ímpar e o sistema limpo ($J_{2j} = J\forall j$) podemos obter imediatamente $|\cos \frac{Jt}{2}| = |\sin \frac{Jt}{2}|$, recuperando a Eq. (4.29) para o caso $\delta = 1 = -\tilde{\delta}$. O último caso que pode ser discriminado com facilidade é quando $L/4$ é ímpar e, na presença de dois acoplamentos, fazemos $N_1 = N_2$. Desta forma, a Amplitude de Loschmidt será

$$A^{SDRG}(t) = \left(\left[\cos \left(\frac{J_1 t}{2} \right) \cos \left(\frac{J_2 t}{2} \right) \right]^{L/4} - \left[\sin \left(\frac{J_1 t}{2} \right) \sin \left(\frac{J_2 t}{2} \right) \right]^{L/4} \right)^2,$$

mas lembrando que

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b)),$$

e

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)),$$

temos⁴⁵ a seguinte família de tempos críticos

$$t(m) = \frac{\pi}{J_2 + J_1} (2m + 1) \equiv \frac{\pi}{J} (2m + 1), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (5.6)$$

que proporcionam singularidades fortes, originando uma transição dinâmica de ordem zero e servem para explicar as estruturas “pontiagudas” que aparecem na Fig. (21) mas que não ocorrem nas duas figuras anteriores à mesma.

A análise dos demais casos exige abordagens numéricas e é sensível de modo geral à desordem, impossibilitando um tratamento genérico. O que permanece, entretanto, em todos casos, é a possibilidade dos zeros acidentais - os picos em $t = \pi$ e $t = 3\pi$ nas três figuras correspondem aos zeros acidentais. Ressaltamos ainda que essa transição dinâmica de ordem zero ocorre para tamanhos *finitos* e não tem análogo nas transições de fase de equilíbrio⁴⁶.

5.2.4 Crescendo uma ilha

Para estudar o comportamento da Loschmidt Echo em um protocolo de têmpera na qual $|\psi_0\rangle$

⁴⁵Estamos definindo $J \equiv J_2 + J_1$

⁴⁶Rigorosamente, as transições de fase de equilíbrio só acontecem por um efeito coletivo que é manifestado no limite termodinâmico. Neste sentido pode-se interpretar que a transição dinâmica de ordem zero não se caracteriza como uma “transição genuína”.

corresponde ao estado fundamental da fase ímpar e H_{final} corresponde a um sistema na FGI⁴⁷ contendo uma ou mais regiões raras/ilhas, é preciso tomar cuidado no ajuste do nosso *tuning parameter*, no caso o acoplamento par J_e . Como de praxe, os acoplamentos ímpares são fixados: têm os mesmos valores e mesma localização tanto no hamiltoniano final quanto no inicial. Seus possíveis valores são J_1 ou J_2 , sendo $J_1 < J_2$. Como já vimos na seção anterior (5.2.3) o número de ocorrências de J_1 , denotado N_1 e o número de ocorrências de J_2 , denotado N_2 satisfazem

$$N_1 + N_2 = \frac{L}{2} = N_e, \quad (5.7)$$

onde é claro N_e corresponde ao número de ocorrências de J_e . Recordando da distância à criticalidade $\delta = \langle \ln J_e \rangle - \langle \ln J_o \rangle$ que para nosso caso particular torna-se $\delta = \frac{1}{2} \ln J_e - \frac{N_1}{L} \ln J_1 - \frac{N_2}{L} \ln J_2$, obtemos o valor crítico para J_e (fixado, por definição, impondo $\delta = 0$)

$$J_e^{critico} \equiv J_c = J_1^{\frac{2N_1}{L}} J_2^{\frac{2N_2}{L}}. \quad (5.8)$$

Mas, pela Eq. (5.7) temos $N_2 = \frac{L}{2} - N_1$, donde

$$J_c = J_2 \left(\frac{J_1}{J_2} \right)^{\frac{2N_1}{L}} = J_2 \left(\frac{J_1}{J_2} \right)^{\frac{l_{RR}}{L}}. \quad (5.9)$$

Note que, se o tamanho da região rara, l_{RR} , é um número finito, no limite termodinâmico temos $J_c \rightarrow J_2$. Podemos ver na imagem a seguir que, de fato, a transição está ausente para sistemas com uma ilha finita cujo tamanho é fixado enquanto o bulk cresce:

⁴⁷Fase de **G**riffiths **Í**mpar, conforme definimos na seção 2.2.3.

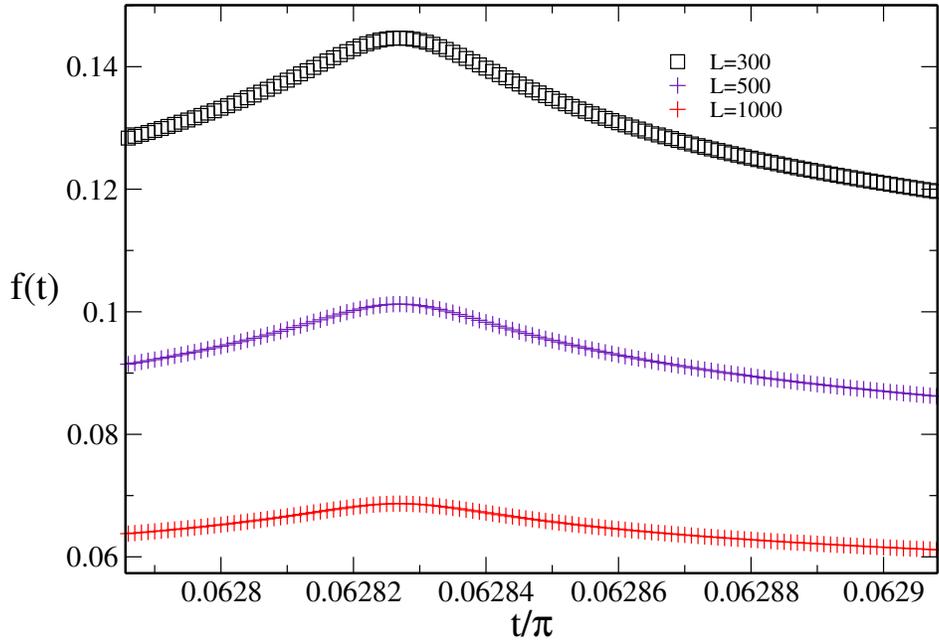


Figura 22: No eixo vertical temos a energia livre dinâmica, para simulação de vários sistemas com bulk grande em comparação à ilha, de tamanho fixo, no caso, 4 sítios. Os pontos preto, indigo e vermelho, correspondem a sistemas de tamanhos 300, 500 e 1000 sítios respectivamente. É apresentado o primeiro pico. Note o achatamento da curva conforme L aumenta.

Isto nos mostra que, a fim de garantir que a região crítica do diagrama de fases estático esteja presente, é necessário satisfazer pelo menos uma das seguintes condições: (i) a cadeia deve possuir uma região rara de extensão l_{RR} infinita onde, digamos $l_{RR} = \frac{L}{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}$ e $\alpha > 1$; (ii) Deve ocorrer um número infinito de encadeamentos de regiões raras suficientemente grandes e suficientemente próximas para que o algoritmo do SDRG gere acoplamentos efetivos que conectem suas paredes de domínio externas, até que estes acoplamentos se anulem para $L \rightarrow \infty$ ⁴⁸; em ambos os casos teremos $N_1 \rightarrow \infty$. Por simplicidade, abordaremos somente o caso (i) neste trabalho. Ressaltamos ainda que nos resultados apresentados na Fig. (22), no intuito de confirmar se as candidatas a descontinuidades de tipo “bico” eram reais ou meros efeitos de baixa resolução, obtivemos curvas suaves utilizando um passo de tempo de pelo menos $\Delta t = 10^{-7}$, em que empregamos precisão quádrupla de ponto flutuante. E muito embora essa pequeníssima escala seja utilizada, não há presença de ruídos/instabilidades numéricas perceptíveis; o que contrasta fortemente com os resultados obtidos para ilhas maiores, ainda que o sistema como um todo não seja tão grande⁴⁹: segue

⁴⁸Observe que mediante aplicação do SDRG, um singleto de ligação exponencialmente pequena será construído ao fim desse processo.

⁴⁹O que evidencia que as escalas de energia fundamentais para a dinâmica estão presentes nas regiões de “inversão de ordem” - justamente onde figuram as regiões raras, por definição. Uma previsão, pelo menos qualitativamente

uma comparação para simulações de sistemas idênticos em que se toma precisão dupla e depois quádrupla para o cômputo da dinâmica do mesmo, para 4 tamanhos de ilha

Comparação precisão quádrupla e dupla

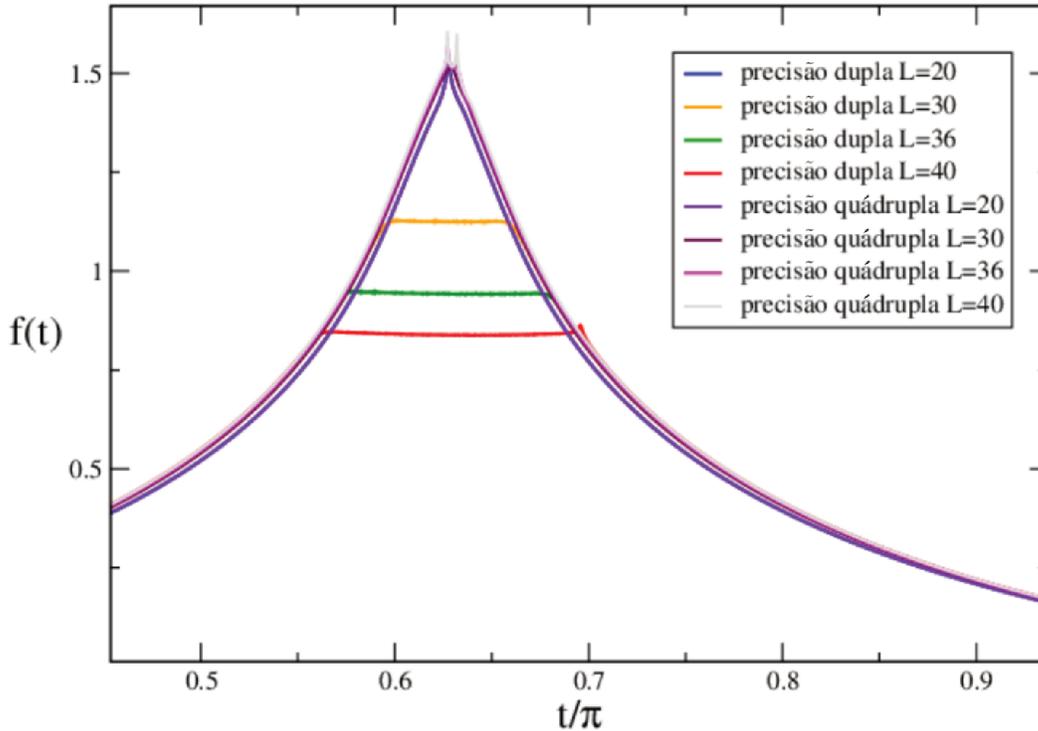


Figura 23: No eixo vertical temos a energia livre, para simulação de sistemas com 20, 30, 36 e 40 sítios na região rara. É apresentado o primeiro pico. O tamanho dos sistemas é dado por $L = 4l_{RR}$. Note o achatamento da curva que se dá conforme a ilha aumenta quando precisão dupla é utilizada. Ainda não temos um entendimento satisfatório desse fenômeno da linguagem Julia.

Observe que os tamanhos são modestos, comparativamente àqueles avaliados na Fig. (22): a maior rede é de tamanho $L = 160$, e ainda sim há instabilidades numéricas - eles já aparecem em $l_{RR} = 30$ no uso de precisão dupla. Registramos ainda que instabilidades fatalmente ocorrem, mesmo em precisão quádrupla, conforme aumentamos l_{RR} para além de 38.

Ora, uma vez que regiões raras são originadas por sítios nos quais há dimerização oposta à fase dominante na maioria do sistema, é preciso haver 2 ou mais acoplamentos J_1 separados por um único acoplamento J_e ; dito da forma como já sabemos: a menor “ilha” possível é da forma $J_1 - J_e - J_1$, i.e., $N_1 = 2$. Importante também é a condição $N_2 > 0$, o que implica $N_1 < \frac{L}{2}$, necessário

correta, do SDRG.

para haver desordem e uma criticalidade não-trivial (i.e., a existência da Fase de Griffiths). Apesar de inocente à primeira vista, o limitante superior para N_1 surge naturalmente da condição $J_c > J_1$, e esta possibilita fixar um parâmetro J_e que garante um H_{final} na FGI: $J_1 < J_e < J_c$; deste modo, fazendo por exemplo $J_e = \frac{1}{2}(J_1 + J_c)$ temos a certeza de não cruzar a transição e estudar a têmpera conforme desejado⁵⁰.

A seguir, considere um protocolo de crescimento mútuo: o tamanho da ilha será $l_{RR} = \frac{L}{4}$. O gráfico da derivada primeira, obtida numericamente, para alguns tamanhos de ilha está discriminado a seguir.

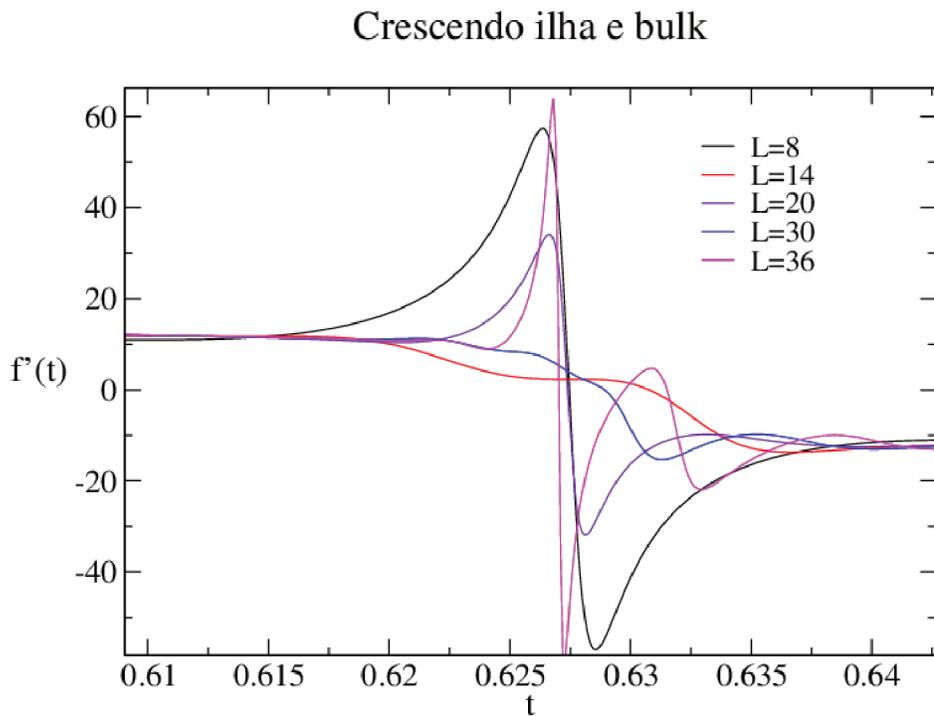


Figura 24: No eixo vertical temos a derivada da energia livre dinâmica, para simulação de sistemas com $l_{RR} = 8, 14, 20, 30$ e 36 sítios na região rara. É apresentado o primeiro pico. O tamanho dos sistemas é dado por $L = 4l_{RR}$. Note que a curva parece ficar cada vez mais aguda conforme o tamanho da região rara é aumentado.

Observe que há um súbito achatamento da derivada em torno do ponto candidato a crítico (conforme previsão do SDRG) para $l_{RR} = 14$ e 30 , comparando com os demais tamanhos. Vemos que

⁵⁰Ressaltamos que esta receita foi seguida para gerar todos os gráficos desta seção.

o fenômeno aqui gravita em torno dos efeitos de paridade que já apreciamos na circunstância do *quench* extremo.

Por fim, mencionamos que o acúmulo dos resultados por nós obtidos nesse trabalho permite inferir a existência de curvas de Energia Livre como aquela representada na Fig. (25) abaixo, originando assim uma forte candidata ao título de Fase de Griffiths Dinâmica:

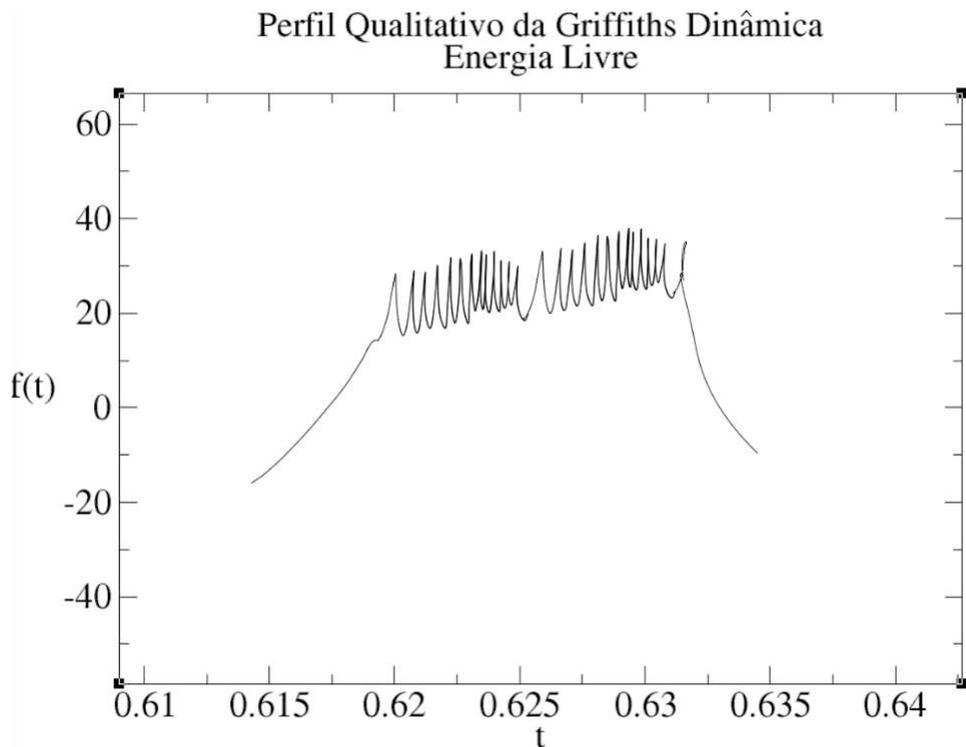


Figura 25: Esboço qualitativo de uma possível configuração construída mediante aplicação do princípio da superposição. Note que um contínuo pode se desenvolver conforme escalas de energia cada vez mais próximas entre si participem da dinâmica.

6 Considerações finais e perspectivas futuras

Neste trabalho, deixamos nossa contribuição na esperança de descortinar novos horizontes na dinâmica de *quench* de sistemas desordenados, com consequências que esperamos se generalizem para além do caso unidimensional. Trouxemos, se não o primeiro, um dos poucos modelos em que a introdução de desordem não anula uma transição de fases dinâmica. Além disso, emerge no jogo um fenômeno desconhecido, dentro do melhor que pudemos apreciar na literatura, que denominamos *transições de fase quânticas dinâmicas de ordem zero*. Muito embora as limitações numéricas tenham sido um desafio, acreditamos que as assinaturas do fenômeno são claras: a aplicação do princípio de superposição e os comportamentos das derivadas sugerem que mesmo na presença de interação é possível haver uma Fase de Griffiths Dinâmica, pelo menos de Primeira Ordem, isto é, uma na qual um contínuo de transições é caracterizada por descontinuidades na derivada primeira da Energia Livre Dinâmica. Mostramos como o resultado da têmpera no caso extremo pode ser obtido pela introdução de uma notação gráfica simplificadora, e que além desse resultado isolado, sua avaliação permite uma orientação no entendimento geral das propriedades da dinâmica das regiões raras e suas contribuições na Loschmidt Echo (LE). Vimos também os efeitos de paridade, e. g. a forma como o tamanho de uma ilha influencia no comportamento da sua LE, além das assimetrias entre os protocolos de têmpera - para além da mera distinção das escalas de energia [ver por exemplo seção 5.1].

Ainda em curso de ajustes finais, planejamos agregar outros resultados a um ou mais artigos que pretendemos submeter⁵¹ e que, dados os prazos, não puderam ser incluídos nessa dissertação: (i) uma condição suficiente para periodicidade da Amplitude de Loschmidt, acrescido a conjecturas no tocante às condições de necessidade e suficiência desse objeto matemático, (ii) um paralelo entre nosso modelo e o modelo Ising unidimensional, (iii) um estudo mais aprofundado a respeito dos limites do nosso modelo efetivo, atestando se o mesmo consegue capturar todas nuances numéricas qualitativas essenciais na assinatura da Fase de Griffiths, (iv) alguns resultados assintoticamente exatos no limite termodinâmico, nos quais são derivadas várias formas explícitas de obtenção de um contínuo de transições de ordem zero, (v) a prova de que uma única ilha infinita com desordem uniforme não apresenta transições no caso extremo e (vi) um paralelo final entre a relação de dispersão da Fase de Griffiths do equilíbrio e a “susceptibilidade” generalizada devido às contribuições das regiões raras no caso do *quench*, conforme estudamos. Além disso, algumas conjecturas e planos futuros passam por técnicas genéricas para solucionar problemas de evolução temporal utilizando transformações canônicas bem como utilizando uma abordagem baseada na

⁵¹Ainda se encontram em escrita.

Regra de Ouro de Fermi. Por fim, observamos que talvez a ideia e os mecanismos da Fase de Griffiths Dinâmica possam servir na elucidação da física de vidros de spin, materiais vítreos como um todo e do fenômeno da metaestabilidade em geral.

Uma palavra a respeito de extensões dos nossos resultados: esperamos que protocolos análogos para maiores dimensões incorram em consequências dinâmicas similares, ao menos qualitativamente, e também não acreditamos que a dinâmica obtida possua nuances meramente particulares à cadeia dXX. Seria natural pensar, e.g., em uma têmpera “extrema” no modelo Ising 2D em rede quadrada no qual o estado fundamental advenha de uma “fase horizontal” (isto é, apenas os acoplamentos ao longo da direção X são ativados) e o sistema é evoluído na “fase vertical” (acoplamentos não nulos apenas ao longo de Y). Nos parece bem possível que a ideia diagramática dos ciclos/loops pode ser adaptada e aplicada também neste caso. De fato, outro resultado bastante imediato mas que não pudemos registrar foi uma quase equivalência entre a dinâmica do modelo Ising 1D e o nosso resultado do caso extremo.

Ressaltamos que nossa denominação ingênua das transições dinâmicas não poderia sequer pretender esgotar o assunto da classificação das transições dinâmicas. Há outros critérios que poderiam ser considerados - como por exemplo, parâmetros de ordem de dimerização, parâmetros topológicos etc - e que não foram mencionados no texto. Nosso esforço que não exaure mas, esperamos, abre novos caminhos, foi qual o do marceneiro que se dedica à construção do cavalete para que também outros artistas ali possam trabalhar.

A Transformação de Jordan-Wigner

A transformação de Jordan-Wigner consiste em mapear uma cadeia de spin em uma cadeia de férmions livres sem spin. Isto se faz da seguinte forma: definimos os operadores fermiônicos c_m e c_m^\dagger como

$$c_m = \exp\left(i\pi \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_k^+ \sigma_k^-\right) \sigma_m^-, \quad (\text{A.1})$$

$$c_m^\dagger = \exp\left(-i\pi \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_k^+ \sigma_k^-\right) \sigma_m^+, \quad (\text{A.2})$$

$$m = \{1, 2, \dots, L\}.$$

Como $A = i\pi \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_k^+ \sigma_k^- = -A^\dagger$, é óbvio que $\exp\left(i\pi \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_k^+ \sigma_k^-\right) \exp\left(-i\pi \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_k^+ \sigma_k^-\right) = 1$. Temos também $[A, \sigma_m^-] = [A^\dagger, \sigma_m^+] = 0$ e assim

$$c_m^\dagger c_m = \sigma_m^+ \sigma_m^-.$$

Utilizando as propriedades dos operadores levantamento e abaixamento, é fácil ver que

$$\{c_j, c_{j'}\} = 0 = \{c_j^\dagger, c_{j'}^\dagger\}, \quad (\text{A.3})$$

e

$$\{c_j, c_j^\dagger\} = \delta_{j,j'}. \quad (\text{A.4})$$

Essas relações de comutação definem operadores fermiônicos no espaço de Fock [65, 66]. Vamos mapear um hamiltoniano do tipo

$$\begin{aligned} H_{dXX} &= \sum_{j=1}^L \frac{K_j}{2} (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + h.c.) = \sum_{j=1}^{L-1} \frac{K_j}{2} (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + h.c.) + \frac{K_L}{2} (\sigma_L^+ \sigma_1^- + h.c.) \\ &= \sum_{j=1}^{L-1} \frac{K_j}{2} (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + h.c.) + H_s, \end{aligned}$$

em uma cadeia de férmions livres sem spin. Note que o hamiltoniano está sujeito a condições de contorno periódicas.

Primeiro, invertendo as Eq. (7.1) e (7.2) temos

$$\sigma_m^- = \exp\left(-i\pi \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_k^+ \sigma_k^-\right) c_m, \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_m^+ = \exp\left(-i\pi \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_k^+ \sigma_k^-\right) c_m^\dagger. \quad (\text{A.6})$$

Assim, temos $\sigma_m^+ \sigma_{m+1}^- = c_m^\dagger \exp(-i\pi \sigma_m^+ \sigma_m^-) c_{m+1}$; percebendo que $(\sigma_m^+ \sigma_m^-)^n = \sigma_m^+ \sigma_m^-$, $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever⁵²

$$\exp(i\pi \sigma_m^+ \sigma_m^-) = \sigma_m^+ \sigma_m^- \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!} - 1 \right) + I_{2^L} = (I - 2\sigma_m^+ \sigma_m^-) = (-\sigma_m^z),$$

$$\therefore \exp(-i\pi \sigma_m^+ \sigma_m^-) = \exp(-i\pi c_m^\dagger c_m) = (I - 2c_m^\dagger c_m)$$

$$\therefore \sigma_m^+ \sigma_{m+1}^- = c_m^\dagger (I - 2c_m^\dagger c_m) c_{m+1} = c_m^\dagger c_{m+1}. \quad (\text{A.7})$$

$$\therefore H_{dXX} = \sum_{j=1}^{L-1} \frac{K_j}{2} (c_j^\dagger c_{j+1} + h.c.) + H_s, \quad (\text{A.8})$$

sendo que o termo H_s torna-se

$$(-1)^{n_\uparrow+1} \frac{K_L}{2} (c_L^\dagger c_1 + h.c.), \quad (\text{A.9})$$

onde n_\uparrow é o número de partículas - equivalentemente, o número de spins apontando para cima $(+\frac{1}{2})$ - na cadeia. Em todo nosso trabalho, estudamos a física do *half-filling*: $n_\uparrow = \frac{L}{2}$.

Finalmente, portanto, podemos escrever

$$H_{dXX} \equiv H_F = \sum_{j=1}^{L-1} \frac{K_j}{2} (c_j^\dagger c_{j+1} + h.c.) + (-1)^{n_\uparrow+1} \frac{K_L}{2} (c_L^\dagger c_1 + h.c.). \quad (\text{A.10})$$

Nosso hamiltoniano apresenta simetria de *gauge* para a transformação $c_j \rightarrow e^{i\alpha j/L} c_j$, em que impomos $\alpha = 0$ se n_\uparrow é ímpar e $\alpha = \pi$ se n_\uparrow par a fim de garantir **PBC**. Com isto, obtemos um hamiltoniano tipo *free-fermions*, *spinless* com termos de *hopping* complexos e aleatórios; para uma

⁵² $I_{2^L} \equiv I$ é a matriz identidade em dimensão 2^L .

cadeia fechada cuja hamiltoniana original estava sob PBC, temos

$$H_F = \sum_{j=1}^L \frac{K_j}{2} \left(e^{i\alpha/L} c_j^\dagger c_{j+1} + h.c. \right). \quad (\text{A.11})$$

B Decimação da Cadeia XX Desordenada

Considere o hamiltoniano

$$\hat{H}_{dXX} = \sum_{i=1}^{L-1} \frac{K_i}{4} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y). \quad (\text{B.1})$$

Suponha que inicialmente a configuração de acoplamentos de uma cadeia de L sítios seja $(\dots, K_l, K_m, K_r, \dots)_L$ sendo K_m o maior acoplamento desta distribuição arbitrária. Seja H_0 o hamiltoniano que descreve o par de spins com acoplamento K_m

$$H_0 = \frac{K_m}{4} (\sigma_m^x \sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y \sigma_{m+1}^y),$$

e W uma perturbação, associada com a interação do sítios com seus vizinhos adjacentes,

$$W = \frac{K_l}{4} (\sigma_{m-1}^x \sigma_m^x + \sigma_{m-1}^y \sigma_m^y) + \frac{K_r}{4} (\sigma_{m+1}^x \sigma_{m+2}^x + \sigma_{m+1}^y \sigma_{m+2}^y), \quad (\text{B.2})$$

sendo $\sigma_k^x = \frac{1}{2} (\sigma_k^+ + \sigma_k^-)$ e $\sigma_k^y = \frac{1}{i2} (\sigma_k^+ - \sigma_k^-)$.

Denotamos $|0\rangle = \frac{|\uparrow_m \downarrow_{m+1}\rangle - |\downarrow_m \uparrow_{m+1}\rangle}{\sqrt{2}}$, $|1\rangle = |\uparrow_m \uparrow_{m+1}\rangle$, $|2\rangle = \frac{|\uparrow_m \downarrow_{m+1}\rangle + |\downarrow_m \uparrow_{m+1}\rangle}{\sqrt{2}}$ e $|3\rangle = |\downarrow_m \downarrow_{m+1}\rangle$ os autoestados de H_0 associados às energias $E_0 = -\frac{K_m}{2}$, $E_1 = 0$, $E_2 = \frac{K_m}{2}$ e $E_3 = 0$ respectivamente. Note que as energias E_1 e E_3 são iguais, o que caracteriza um subespaço duplamente degenerado. Entretanto, não será necessário utilizar o aparato da teoria de perturbação degenerada pois (i) o estado fundamental é não degenerado e (ii) definindo $S_{T_0}^z = \sum_{j=m}^{m+1} \frac{1}{2} \sigma_j^z$, então $S_{T_0}^z |1\rangle = |1\rangle = -S_{T_0}^z |3\rangle = -|3\rangle$ e $S_{T_0}^z |2\rangle = 0 |2\rangle$. Uma vez que $[H_0, S_{T_0}^z] = 0$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$ permanecem bons estados para o problema [32].

O hamiltoniano efetivo será obtido via teoria de perturbação de segunda ordem

$$H_{eff} = H_0 + \langle 0 | W | 0 \rangle + \sum_{j=1}^3 \frac{|\langle 0 | W | j \rangle|^2}{E_0 - E_j}.$$

É fácil ver que $\langle 0 | W | 0 \rangle = 0$. Na verdade, podemos interpretar essa anulação fisicamente: devido ao efeito de desordem magnética, em uma primeira aproximação os *spin* não interagem entre si. Obtemos

$$H_{eff} = H_0 - \frac{1}{K_m} |\langle 0 | W | 2 \rangle|^2 - \frac{2}{K_m} \sum_{j=\{1,3\}} |\langle 0 | W | j \rangle|^2. \quad (\text{B.3})$$

É fácil ver que

$$\begin{aligned}\langle 0|W|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{8}} (K_l\sigma_{m-1}^+ - K_r\sigma_{m+2}^+), \\ \langle 0|W|2\rangle &= 0,\end{aligned}$$

$$\langle 0|W|3\rangle = -\frac{1}{\sqrt{8}} (K_l\sigma_{m-1}^- - K_r\sigma_{m+2}^-) = -\langle 1|W|0\rangle,$$

o que nos leva a

$$|\langle 0|W|1\rangle|^2 = \frac{1}{8} [K_l^2 (\sigma_{m-1}^+\sigma_{m-1}^-) + K_r^2 (\sigma_{m+2}^+\sigma_{m+2}^-) - K_lK_r (\sigma_{m-1}^+\sigma_{m+2}^- + h.c.)], \quad (\text{B.4})$$

e obviamente

$$|\langle 0|W|2\rangle|^2 = 0, \quad (\text{B.5})$$

em que foi utilizado o fato $(\sigma^z)^2 = I$, sendo I o operador identidade. Por fim,

$$|\langle 0|W|3\rangle|^2 = |\langle 0|W|1\rangle|^2.$$

Inserindo os resultados acima na Eq. (B.3) e utilizando das identidades $\{\sigma^+, \sigma^-\} = I$ e $\sigma_{m-1}^+\sigma_{m+2}^- + h.c. = \frac{1}{2} (\sigma_{m-1}^x\sigma_{m+2}^x + \sigma_{m-1}^y\sigma_{m+2}^y)$, obtemos

$$H_{eff} = H_0 + \tilde{E}_0 + \frac{K_lK_r}{K_m} \left[\frac{1}{4} (\sigma_{m-1}^x\sigma_{m+2}^x + \sigma_{m-1}^y\sigma_{m+2}^y) \right], \quad (\text{B.6})$$

em que definimos $\tilde{E}_0 = -\frac{K_l^2 + K_r^2}{K_m^4}$. Escrevendo de maneira mais sucinta, temos

$$H_{eff} = H_0 + \tilde{E}_0 + \frac{K_lK_r}{K_m} \vec{S}_{m-1} \cdot \vec{S}_{m+2}, \quad (\text{B.7})$$

de tal maneira que nesses casos é possível construir uma hamiltoniana efetiva, que tem a mesma forma da hamiltoniana original, obtida eliminando os graus de liberdade associados com H_0 criando um acoplamento efetivo entre os *spins* $m-1$ e $m+2$ dado por

$$\frac{K_lK_r}{K_m} = K_{eff} \quad (\text{B.8})$$

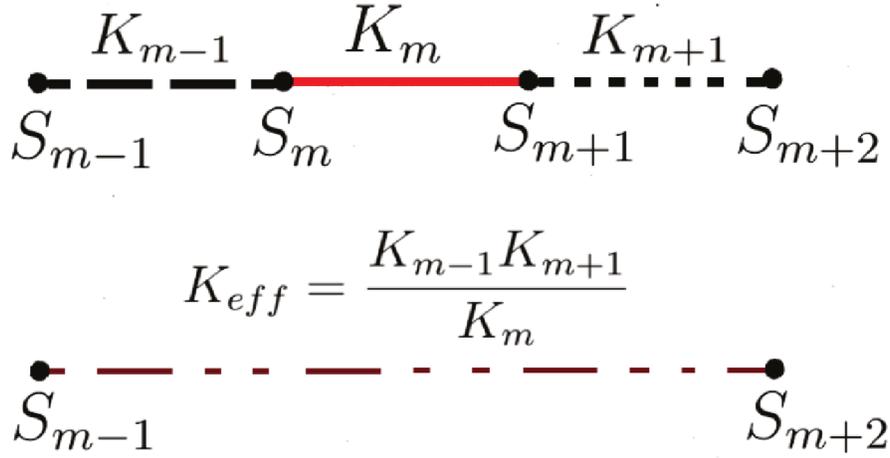


Figura 26: Esquema ilustrando o processo de renormalização do SDRG: os spin's adjacentes ao par ligado pelo maior acoplamento são efetivamente ligados através de K_{eff} . Figura extraída da Ref. [72].

Findo este procedimento, renormalizamos o sistema para uma cadeia com $L - 2$ sítios e um singleto isolado. Agora obtém-se uma configuração do tipo $(\dots, K_{m-2}, K_{eff}, K_{m+3}, \dots)_{L-2}$. Na Fig. (26) ilustramos o procedimento de renormalização obtido pela teoria de perturbação para o sistema de interesse no trabalho, qual seja, a cadeia dXX. O algoritmo é executado até que o hamiltoniano efetivo final seja uma soma de dímeros isolados, isto é, de termos do tipo H_0 .

Referências

- [1] I. Bloch, J. Dalibard e W. Zwerger, “Many-body physics with ultracold gases,” *Rev. Mod. Phys.*, v. 80, pp. 885–964, 3 jul. de 2008. DOI: 10.1103/RevModPhys.80.885. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.885>.
- [2] I. Bloch, J. Dalibard e S. Nascimbène, “Quantum simulations with ultracold quantum gases,” *Nature Physics*, v. 8, n. 4, pp. 267–276, 2012, ISSN: 1745-2481. DOI: 10.1038/nphys2259.
- [3] R. Blatt e C. F. Roos, “Quantum simulations with trapped ions,” *Nature Physics*, v. 8, n. 4, pp. 277–284, 2012, ISSN: 1745-2481. DOI: 10.1038/nphys2252.
- [4] I. M. Georgescu, S. Ashhab e F. Nori, “Quantum simulation,” *Rev. Mod. Phys.*, v. 86, pp. 153–185, 1 mar. de 2014. DOI: 10.1103/RevModPhys.86.153. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [5] M. Heyl, “Dynamical quantum phase transitions: a review,” *Rep. Prog. Phys.*, v. 81, p. 054001, 2018.
- [6] A. A. Zvyagin, “Dynamical quantum phase transitions (Review Article),” *Low Temperature Physics*, v. 42, n. 11, pp. 971–994, 2016, doi: 10.1063/1.4969869, ISSN: 1063-777X.
- [7] J. Eisert, M. Friesdorf e C. Gogolin, “Quantum many-body systems out of equilibrium,” *Nature Physics*, v. 11, n. 2, pp. 124–130, 2015, ISSN: 1745-2481. DOI: 10.1038/nphys3215.
- [8] J. Cardy, *Phase transitions and critical phenomena*, C. Domb e J. L. Leibowitz, ed. London: Academic Press, 1987, vol. 11.
- [9] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems*, B. Holland, ed., sér. The Advanced Book Program. Adisson Wesley Publishing Company, 1991.
- [10] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, 2nd. Cambridge University Press, 2011.
- [11] M. E. Fisher, “The renormalization group in the theory of critical behavior,” *Rev. Mod. Phys.*, v. 46, pp. 597–616, 4 out. de 1974. DOI: 10.1103/RevModPhys.46.597. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.46.597>.
- [12] D. R. Nelson e M. E. Fisher, “Soluble renormalization groups and scaling fields for low-dimensional Ising systems,” *Annals of Physics*, v. 91, n. 1, pp. 226–274, 1975, ISSN: 0003-4916. DOI: 10.1016/0003-4916(75)90284-5. endereço: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491675902845>.

- [13] J. Levelt Sengers, “From Van der Waals’ equation to the scaling laws,” *Physica*, v. 73, n. 1, pp. 73–106, 1974, ISSN: 0031-8914. DOI: 10.1016/0031-8914(74)90227-4. endereço: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031891474902274>.
- [14] D. Belitz, T. R. Kirkpatrick e T. Vojta, “How generic scale invariance influences quantum and classical phase transitions,” *Rev. Mod. Phys.*, v. 77, pp. 579–632, 2 jul. de 2005. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.579. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.77.579>.
- [15] A. M. Tsvelik, *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*, 2^a ed. Cambridge University Press, 2003. DOI: 10.1017/CB09780511615832.
- [16] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 1995, vol. 1. DOI: 10.1017/CB09781139644167.
- [17] S. El-Showk, M. F. Paulos, D. Poland, S. Rychkov, D. Simmons-Duffin e A. Vichi, “Solving the 3d Ising Model with the Conformal Bootstrap II. c-Minimization and Precise Critical Exponents,” *Journal of Statistical Physics*, v. 157, n. 4, pp. 869–914, 2014, ISSN: 1572-9613. DOI: 10.1007/s10955-014-1042-7.
- [18] A. Migdal, “Conformal invariance and bootstrap,” *Physics Letters B*, v. 37, n. 4, pp. 386–388, 1971, ISSN: 0370-2693. DOI: 10.1016/0370-2693(71)90211-5. endereço: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269371902115>.
- [19] G. Parisi, “On self-consistency conditions in conformal covariant field theory,” *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)*, v. 4, n. 15, pp. 777–780, 1972, ISSN: 1827-613X. DOI: 10.1007/BF02757039.
- [20] S. Ferrara, A. Grillo e R. Gatto, “Tensor representations of conformal algebra and conformally covariant operator product expansion,” *Annals of Physics*, v. 76, n. 1, pp. 161–188, 1973, ISSN: 0003-4916. DOI: 10.1016/0003-4916(73)90446-6. endereço: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491673904466>.
- [21] A. Polyakov, “Nonhamiltonian approach to conformal quantum field theory,” 1974.
- [22] A. Belavin, A. Polyakov e A. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory,” *Nuclear Physics B*, v. 241, n. 2, pp. 333–380, 1984, ISSN: 0550-3213. DOI: 10.1016/0550-3213(84)90052-X. endereço: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032138490052X>.

- [23] R. Rattazzi, V. S. Rychkov, E. Tonni e A. Vichi, “Bounding scalar operator dimensions in 4D CFT,” *Journal of High Energy Physics*, v. 2008, n. 12, pp. 031–031, dez. de 2008. DOI: 10.1088/1126-6708/2008/12/031. endereço: <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2008/12/031>.
- [24] S. El-Showk, M. F. Paulos, D. Poland, S. Rychkov, D. Simmons-Duffin e A. Vichi, “Solving the 3D Ising Model with the Conformal Bootstrap,” *Phys. Rev. D*, v. 86, p. 025022, 2012. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.025022. arXiv: 1203.6064 [hep-th].
- [25] M. Eckstein, M. Kollar e P. Werner, “Thermalization after an Interaction Quench in the Hubbard Model,” *Phys. Rev. Lett.*, v. 103, p. 056403, 5 jul. de 2009. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.056403. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.056403>.
- [26] J. P. Garrahan e I. Lesanovsky, “Thermodynamics of Quantum Jump Trajectories,” *Phys. Rev. Lett.*, v. 104, p. 160601, 16 abr. de 2010. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.160601. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.160601>.
- [27] S. Diehl, A. Tomadin, A. Micheli, R. Fazio e P. Zoller, “Dynamical Phase Transitions and Instabilities in Open Atomic Many-Body Systems,” *Phys. Rev. Lett.*, v. 105, p. 015702, 1 jul. de 2010. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.015702. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.015702>.
- [28] M. Schiró e M. Fabrizio, “Time-Dependent Mean Field Theory for Quench Dynamics in Correlated Electron Systems,” *Phys. Rev. Lett.*, v. 105, p. 076401, 7 ago. de 2010. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.076401. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.076401>.
- [29] B. Sciola e G. Biroli, “Quantum Quenches and Off-Equilibrium Dynamical Transition in the Infinite-Dimensional Bose-Hubbard Model,” *Phys. Rev. Lett.*, v. 105, p. 220401, 22 nov. de 2010. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.220401. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.220401>.
- [30] J. Zhang, G. Pagano, P. W. Hess, A. Kyprianidis, P. Becker, H. Kaplan, A. V. Gorshkov, Z.-X. Gong e C. Monroe, “Observation of a many-body dynamical phase transition with a 53-qubit quantum simulator,” *Nature*, v. 551, n. 7682, pp. 601–604, 2017, ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/nature24654.
- [31] M. Rigol, V. Dunjko e M. Olshanii, “Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems,” *Nature*, v. 452, n. 7189, pp. 854–858, 2008, ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/nature06838.

- [32] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2011.
- [33] T. Fukuhara, P. Schauß, M. Endres, S. Hild, M. Cheneau, I. Bloch e C. Gross, “Microscopic observation of magnon bound states and their dynamics,” *Nature*, v. 502, n. 7469, pp. 76–79, 2013, ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/nature12541.
- [34] T. Kinoshita, T. Wenger e D. S. Weiss, “A quantum Newton’s cradle,” *Nature*, v. 440, n. 7086, pp. 900–903, 2006, ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/nature04693.
- [35] R. Huber, F. Tauser, A. Brodschelm, M. Bichler, G. Abstreiter e A. Leitenstorfer, “How many-particle interactions develop after ultrafast excitation of an electron–hole plasma,” *Nature*, v. 414, n. 6861, pp. 286–289, 2001, ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/35104522.
- [36] B. E. Cole, J. B. Williams, B. T. King, M. S. Sherwin e C. R. Stanley, “Coherent manipulation of semiconductor quantum bits with terahertz radiation,” *Nature*, v. 410, n. 6824, pp. 60–63, 2001, ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/35065032.
- [37] B. Ferguson e X.-C. Zhang, “Materials for terahertz science and technology,” *Nature Materials*, v. 1, n. 1, pp. 26–33, 2002, ISSN: 1476-4660. DOI: 10.1038/nmat708.
- [38] T. Kampfrath, A. Sell, G. Klatt, A. Pashkin, S. Mährlein, T. Dekorsy, M. Wolf, M. Fiebig, A. Leitenstorfer e R. Huber, “Coherent terahertz control of antiferromagnetic spin waves,” *Nature Photonics*, v. 5, n. 1, pp. 31–34, 2011, ISSN: 1749-4893. DOI: 10.1038/nphoton.2010.259.
- [39] S. Wall, D. Brida, S. R. Clark, H. P. Ehrke, D. Jaksch, A. Ardavan, S. Bonora, H. Uemura, Y. Takahashi, T. Hasegawa, H. Okamoto, G. Cerullo e A. Cavalleri, “Quantum interference between charge excitation paths in a solid-state Mott insulator,” *Nature Physics*, v. 7, n. 2, pp. 114–118, 2011, ISSN: 1745-2481. DOI: 10.1038/nphys1831.
- [40] M. Heyl, A. Polkovnikov e S. Kehrein, “Dynamical Quantum Phase Transitions in the Transverse-Field Ising Model,” *Phys. Rev. Lett.*, v. 110, p. 135704, 13 mar. de 2013. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.135704. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.135704>.
- [41] A. LeClair, G. Mussardo, H. Saleur e S. Skorik, “Boundary energy and boundary states in integrable quantum field theories,” *Nuclear Physics B*, v. 453, n. 3, pp. 581–618, 1995, ISSN: 0550-3213. DOI: 10.1016/0550-3213(95)00435-U. endereço: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139500435U>.

- [42] P. W. Anderson, “Absence of Diffusion in Certain Random Lattices,” *Phys. Rev.*, v. 109, pp. 1492–1505, 5 mar. de 1958. DOI: 10.1103/PhysRev.109.1492. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.109.1492>.
- [43] F. Igloi e C. Monthus, “Strong disorder RG approach of random systems,” *Physics Reports*, v. 412, fev. de 2005. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.02.006.
- [44] T. Vojta, “Disorder in Quantum Many-Body Systems,” *Annual Review of Condensed Matter Physics*, v. 10, n. 1, pp. 233–252, 2019. DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-031218-013433. eprint: <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031218-013433>. endereço: <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031218-013433>.
- [45] J. Voit, “One-dimensional Fermi liquids,” *Rep. Prog. Phys.*, v. 58, n. 9, p. 977, 1995.
- [46] A. Auerbach, *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*, J. Birman, H. Faissner e J. Lynn, ed., sér. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [47] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Academic Press, 1982.
- [48] S. K. Ma, C. Dasgupta e C. K. Hu, “Random Antiferromagnetic Chain,” *Phys. Rev. Lett.*, v. 43, p. 1434, 1979.
- [49] R. Griffiths, “Nonanalytic Behavior Above the Critical Point in a Random Ising Ferromagnet,” *Phys. Rev. Lett.*, v. 23, p. 17, 1969.
- [50] S. R. A. Salinas, *Introdução à Física Estatística*. EdUSP, 1997.
- [51] E. Brézin, *Introduction to Statistical Field Theory*. Cambridge University Press, 2010. DOI: 10.1017/CB09780511761546.
- [52] T. D. Lee e C. N. Yang, “Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model,” *Phys. Rev.*, v. 87, pp. 410–419, 3 ago. de 1952. DOI: 10.1103/PhysRev.87.410. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.87.410>.
- [53] M. E. Fisher, *The Nature of Critical Points*, sér. Lectures in Theoretical Physics. University of Colorado Press, 1965, vol. VII.
- [54] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*. New York: Springer, 1995, vol. I.
- [55] C. M. Newman, “Zeros of the partition function for generalized Ising systems,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 27, n. 2, pp. 143–159, 1974. DOI: 10.1002/cpa.3160270203. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cpa.3160270203>. endereço: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.3160270203>.

- [56] C. Castellano, S. Fortunato e V. Loreto, “Statistical physics of social dynamics,” *Rev. Mod. Phys.*, v. 81, pp. 591–646, 2 mai. de 2009. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.591. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.591>.
- [57] G. Jaeger, “The Ehrenfest Classification of Phase Transitions: Introduction and Evolution,” *Archive for History of Exact Sciences*, v. 53, pp. 51–81, mai. de 1998. DOI: 10.1007/s004070050021.
- [58] W. Wagner e A. Pruß, “The IAPWS Formulation 1995 for the Thermodynamic Properties of Ordinary Water Substance for General and Scientific Use,” *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, v. 31, n. 2, pp. 387–535, 2002. DOI: 10.1063/1.1461829. eprint: <https://doi.org/10.1063/1.1461829>. endereço: <https://doi.org/10.1063/1.1461829>.
- [59] H. Grahm, *Introduction To Semiconductor Physics*. World Scientific Publishing Company, 1999, ISBN: 9789813105157. endereço: <https://books.google.com.br/books?id=oWdIDQAAQBAJ>.
- [60] D. S. Fisher, “Random antiferromagnetic quantum spin chains,” *Phys. Rev. B*, v. 50, p. 3799, 1994.
- [61] Y. Imry e S.-k. Ma, “Random-Field Instability of the Ordered State of Continuous Symmetry,” *Phys. Rev. Lett.*, v. 35, pp. 1399–1401, 21 nov. de 1975. DOI: 10.1103/PhysRevLett.35.1399. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.35.1399>.
- [62] A. B. Harris, “Effect of random defects on the critical behaviour of Ising models,” *Journal of Physics C: Solid State Physics*, v. 7, n. 9, pp. 1671–1692, mai. de 1974. DOI: 10.1088/0022-3719/7/9/009. endereço: <https://doi.org/10.1088/0022-3719/7/9/009>.
- [63] G. D. Mahan, *Many Particle Physics, Third Edition*. New York: Plenum, 2000.
- [64] T. Vojta e J. A. Hoyos, “Criticality and Quenched Disorder: Harris Criterion Versus Rare Regions,” *Phys. Rev. Lett.*, v. 112, p. 075702, 7 fev. de 2014. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.075702. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.075702>.
- [65] P. Jordan e E. Wigner, “Über das Paulische Äquivalenzverbot,” *Zeitschrift für Physik*, v. 47, n. 9, pp. 631–651, 1928, ISSN: 0044-3328. DOI: 10.1007/BF01331938.
- [66] E. Lieb, T. Schultz e D. Mattis, “Two soluble models of an antiferromagnetic chain,” *Annals of Physics*, v. 16, n. 3, pp. 407–466, 1961, ISSN: 0003-4916. DOI: 10.1016/0003-4916(61)90115-4. endereço: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491661901154>.

- [67] M. Heyl, “Scaling and Universality at Dynamical Quantum Phase Transitions,” *Phys. Rev. Lett.*, v. 115, p. 140602, 14 out. de 2015. DOI: 10.1103/PhysRevLett.115.140602. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.140602>.
- [68] F. Pollmann, S. Mukerjee, A. G. Green e J. E. Moore, “Dynamics after a sweep through a quantum critical point,” *Phys. Rev. E*, v. 81, p. 020101, 2 fev. de 2010. DOI: 10.1103/PhysRevE.81.020101. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.81.020101>.
- [69] M. Kolodrubetz, B. K. Clark e D. A. Huse, “Nonequilibrium Dynamic Critical Scaling of the Quantum Ising Chain,” *Phys. Rev. Lett.*, v. 109, p. 015701, 1 jul. de 2012. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.015701. endereço: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.015701>.
- [70] H. Touchette, “The large deviation approach to statistical mechanics,” *Physics Reports*, v. 478, n. 1, pp. 1–69, 2009, ISSN: 0370-1573. DOI: 10.1016/j.physrep.2009.05.002. endereço: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157309001410>.
- [71] J. Bezanson, A. Edelman, S. Karpinski e V. B. Shah, “Julia: A Fresh Approach to Numerical Computing,” *SIAM Review*, v. 59, n. 1, pp. 65–98, 2017. DOI: 10.1137/141000671. eprint: <https://doi.org/10.1137/141000671>. endereço: <https://doi.org/10.1137/141000671>.
- [72] R. F. P. Costa, *A cadeia XXZ desordenada*, <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/24310>: Universidade Federal de Uberlândia, 2018.