

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Matheus Freitas Santos

**Identificação paramétrica de sistemas a partir
da resposta em frequência empregando
evolução diferencial**

Uberlândia, Brasil

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Matheus Freitas Santos

**Identificação paramétrica de sistemas a partir da
resposta em frequência empregando evolução diferencial**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, como requisito exigido parcial à obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecatrônica.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Augusto Queiroz de Assis

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Faculdade de Engenharia Mecânica

Bacharelado em Engenharia Mecatrônica

Uberlândia, Brasil

2021

Matheus Freitas Santos

Identificação paramétrica de sistemas a partir da resposta em frequência empregando evolução diferencial

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, como requisito exigido parcial à obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecatrônica.

Trabalho aprovado. Uberlândia, Brasil, ____ de _____ de ____:

Prof. Dr. Pedro Augusto Queiroz de Assis
Orientador

Prof. Dr. Fran Sérgio Lobato

Prof. Dr. Rogério Sales Gonçalves

Uberlândia, Brasil

2021

Esse trabalho é dedicado à minha família. Elson de Jesus Santos, meu pai. Elisângela Marques de Freitas Santos, minha mãe. Gabriel Freitas Santos, meu irmão. A minha namorada, Renata Costa Lopes. Todas essas pessoas estiveram diretamente envolvidas na construção do meu caráter e conhecimento. Agradeço todo o apoio e a força que sempre me deram. Se hoje estou onde estou, e sou quem eu sou, devo tudo a vocês.

Esse trabalho é também dedicado a todos os professores da Universidade Federal de Uberlândia, dos quais tiveram papel preponderante na minha formação como Engenheiro Mecatrônico e ser humano.

Dedico também a grandiosa Equipe de Desenvolvimento em Robótica Móvel (EDROM) por possibilitar a aplicação dos conhecimentos adquiridos na graduação e na aprendizagem de diversas outras habilidades que não poderia adquirir em nenhum outro lugar. Sou grato as emoções, das alegrias às frustrações. As lembranças e competições.
Obrigado.

Agradecimentos

O desenvolvimento desse trabalho de conclusão de curso contou com a ajuda de diversas pessoas, dentre as quais especialmente agradeço:

Ao Prof. Dr. Fran Sérgio Lobato por ceder seu tempo e o conhecimento necessário para a realização desse trabalho.

Ao Prof. Dr. Pedro Augusto Queiroz de Assis. Do qual as excelentes aulas, fez com que eu e centenas de outros alunos tivéssemos satisfação em aprender a teoria de controle – o que não é uma tarefa fácil. Por ceder seu tempo, dedicação e conhecimento para me orientar e fazer com que esse trabalho fosse possível.

“Eu não quero acreditar, eu quero saber”.

Carl Segan

Resumo

O algoritmo de Evolução Diferencial (ED) pode ser empregado na resolução de problemas de otimização mono e multiobjetivos. No entanto, podem ocorrer estagnação e a convergência prematura para um ótimo local. Para evitar que isso ocorra, o presente trabalho propõe a introdução de dois novos operadores: O de controle de diversidade e o de busca caótica. O primeiro operador objetiva manter a diversidade na população. Já o segundo visa ampliar o espaço de busca. O algoritmo de ED com esses novos operadores foi denominado de Evolução Diferencial associado a Modelos Caóticos de Busca e Diversidade (ED-MCBD). Ambos algoritmos (ED e ED-MCBD) foram empregados na identificação de funções de transferência com atraso incerto a partir de dados da resposta em frequência. Cabe salientar que a presença de atraso incerto torna o problema de otimização envolvido na identificação não convexo, o que justifica o emprego de ED. Os resultados mostraram que, em sistemas com mínimo global bem definido, o algoritmo de ED-MCBD foi capaz de identificar funções de transferência com maior representatividade. Contudo, os novos operadores podem atrapalhar a convergência do algoritmo em sistemas com múltiplos mínimos locais. Isso ocorre devido à reinícios na população, o que gera a dependência de um número maior de gerações. Os resultados também evidenciaram que a ED-MCBD pode apresentar resultados melhores do que outras técnicas de otimização, como algoritmos genéticos e o método dos mínimos quadrados.

Palavras-chave: Identificação, Resposta em Frequência, Evolução Diferencial, Modelo Caótico de Busca, Aumento de Diversidade, Atraso Incerto.

Abstract

The Differential Evolution (DE) algorithm can be used to solve mono and multiobjective optimization problems. However, stagnation and premature convergence to a local optimum can occur. To avoid this, the introduction of two new operators: Diversity control and chaotic search to original algorithm are proposed. The first operator aims to maintain diversity in the population. The second aims to expand the search space. The DE algorithm with these new operators was called Differential Evolution associated with Chaotic Search Models and Diversity (DE-CSMD). Both algorithms (DE and DE-CSMD) were used to identify transfer functions with uncertain delay from frequency response data. It should be noted that the presence of an uncertain delay makes the optimization problem involved in the identification non-convex, which justifies the use of DE. The results showed that, in systems with well-defined global minimum, the DE-CSMD algorithm was able to identify transfer functions with greater representation. However, new operators can hinder the convergence of the algorithm in systems with multiple local minima. This occurs due to restarts in the population, which generates the dependence of a greater number of generations. The results also showed that DE-CSMD can present better results than other optimization techniques, such as genetic algorithms and the least squares method.

Palavras-chave: Identification, Frequency Response, Differential Evolution, Chaotic Search Model, Increased Diversity, Uncertain Delay.

Lista de figuras

Figura 1 – Ilustração das operações envolvidas no cálculo do vetor doador θ_D . . .	19
Figura 2 – Fluxograma do algoritmo de ED	20
Figura 3 – Evolução dos parâmetros F e CR por geração para valores iniciais $F_1 = 0,6$, $CR_1 = 0,9$ com $\mu = 3,57$	26
Figura 4 – Fluxograma do algoritmo de ED-MCBD	27
Figura 5 – Comparação dos diagramas de Bode do Exemplo 1 com os resultados produzidos com a ED e a ED-MCBD	34
Figura 6 – Comparação dos diagramas de Bode do Exemplo 2 com os resultados produzidos com a ED e ED-MCBD	37
Figura 7 – (a) Vista lateral do helicóptero (b) Vista frontal do helicóptero	38
Figura 8 – Comparação dos diagramas de Bode do Exemplo 3 com os resultados produzidos com a ED e ED-MCBD	40
Figura 9 – Comparação diagramas de Bode do Exemplo 4 com os resultados pro- duzidos com a ED, ED-MCBD e <i>GA Pulse-2</i>	43

Lista de tabelas

Tabela 1 – Dados de resposta em frequência do Exemplo 1	32
Tabela 2 – Parâmetros adotados nos algoritmos de ED-MCBD e ED para o Exemplo 1	33
Tabela 3 – Parâmetros identificados para o Exemplo 1	33
Tabela 4 – Desempenho dos algoritmos na identificação do Exemplo 1	34
Tabela 5 – Dados de resposta em frequência do Exemplo 2	35
Tabela 6 – Parâmetros adotados nos algoritmos de ED-MCBD e ED para o Exemplo 2	36
Tabela 7 – Parâmetros identificados para o Exemplo 2	36
Tabela 8 – Desempenho dos algoritmos na identificação do Exemplo 2	37
Tabela 9 – Dados experimentais de resposta em frequência da atitude de um helicóptero de bancada com três graus de liberdade	38
Tabela 10 – Parâmetros adotados nos algoritmos de ED-MCBD e ED para o Exemplo 3	39
Tabela 11 – Parâmetros identificados para o Exemplo 3	39
Tabela 12 – Desempenho dos algoritmos na identificação do Exemplo 3	40
Tabela 13 – Somatório dos erros absolutos de magnitude dos algoritmos na identificação do Exemplo 3	40
Tabela 14 – Dados de resposta em frequência do Exemplo 4	41
Tabela 15 – Parâmetros adotados nos algoritmos para o Exemplo 4	42
Tabela 16 – Parâmetros identificados para o Exemplo 4	42
Tabela 17 – Desempenho dos algoritmos na identificação do Exemplo 4	43
Tabela 18 – Somatório dos erros absolutos de magnitude dos algoritmos na identificação do Exemplo 4	43

Lista de abreviaturas e siglas

ED	Evolução Diferencial
ED-MCBD	Evolução Diferencial associado a Modelos Caóticos de Busca e Diversidade
GA	<i>Genetic Algorithm</i> - Algoritmo Genético
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados

Lista de símbolos

a	Parâmetro de polo
α	Tolerância de reinício da população
\subset	Está contido
CR	Probabilidade de ocorrência de recombinação
CR_n	Probabilidade de ocorrência de recombinação da geração atual
CR_{n-1}	Probabilidade de ocorrência de recombinação da geração anterior
\times	Cruzamento
\in	Pertence
e	Exponencial
ϵ	Tolerância de $J^*(\omega)$ para critério de parada
F	Taxa de perturbação
F_n	Taxa de perturbação da geração atual
F_{n-1}	Taxa de perturbação da geração anterior
$ G(j\omega) $	Magnitude da resposta em frequência conhecida
$\angle G(j\omega)$	Fase da resposta em frequência conhecida
$G_m(s)$	Função de transferência do modelo
$ G_m(j\omega) $	Magnitude da resposta em frequência do modelo
$\angle G_m(j\omega)$	Fase da resposta em frequência do modelo
$J(\omega)$	Função de custo ou função objetivo
$J^*(\omega)$	Valor do custo associado ao melhor indivíduo da população
$J^P(\omega)$	Valor do custo associado ao pior indivíduo da população
J_C	Custo associado a θ_C
K	Parâmetro de ganho

$>$	Maior que
$<$	Menor que
\leq	Menor ou igual
μ	Constante de evolução caótica
\bar{x}	Média
N_p	Número de parâmetros
N_{GEN}	Número máximo de gerações realizadas na minimização
n	Iteração atual do algoritmo
ω	Frequência
ω_n	Frequência natural
ω_l	Frequência inferior do intervalo
ω_u	Frequência superior do intervalo
p	Número aleatório
p_1	Parâmetro de polo
p_2	Parâmetro de polo
ξ	Fator de amortecimento
\mathbb{R}	Conjunto dos reais
s	Domínio da frequência, $s \in \mathbb{C}$, $s = \beta + j\omega$
σ	Desvio padrão
$ $	Tal que
\top	Matriz transposta
Θ	Vetor de restrições associada aos parâmetros
θ	Vetor indivíduo
θ_i	Indivíduo da população
$\bar{\theta}_i$	Vetor/Indivíduo alvo
θ_p	Genitor principal

θ_q	Genitor secundário
θ_r	Genitor secundário
θ_s	Resultado da subtração dos genitores secundários
θ_f	Resultado da multiplicação da taxa de perturbação com θ_s
θ_D	Vetor doador
θ_C	Indivíduo candidato
θ^*	Solução ótima
t_d	Parâmetro de atraso
T_p	Quantidade de indivíduos na população
$W_f(\omega)$	Peso associado à fase
$W_m(\omega)$	Peso associado à magnitude
z_1	Parâmetro de zero

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	17
2.1	Algoritmo de evolução diferencial clássico	18
2.2	Evolução diferencial associada a modelos caóticos de busca e diver- sidade	24
3	RESULTADOS EM MODELOS NUMÉRICOS	31
3.1	Exemplo 1 - Sistema de fase não mínima com polos reais	31
3.2	Exemplo 2 - Sistema de fase não mínima com um par de polos complexos conjugados	35
3.3	Exemplo 3 - Identificação a partir de dados experimentais	38
3.4	Exemplo 4 - Redução de ordem	41
4	CONCLUSÃO	44
	REFERÊNCIAS	46

1 Introdução

Um modelo consiste em uma representação de um processo. Em particular, modelos matemáticos são formados por um conjunto de equações que permitem descrever o comportamento estático e dinâmico do sistema (CORRÊA, 2001). O processo de obtenção desse tipo de modelo é conhecido como modelagem e pode ser realizado de diferentes formas. Por exemplo, na estratégia conhecida como caixa-transparente, faz-se o uso de equações que descrevem a dinâmica dos processos. Assume-se que, os parâmetros são conhecidos (ALVES, 2004). Por consequência, em geral as variáveis do modelo têm significado físico. A dificuldade estratégia consiste na comum falta de conhecimento da totalidade dos processos e/ou dos parâmetros, sobretudo em sistemas mais complexos (CORRÊA; AGUIRRE, 2004). Já na modelagem do tipo caixa-opaca, caracteriza-se o modelo com base apenas em dados de entrada e saída do sistema (CORRÊA; AGUIRRE, 2004). Como principais vantagens, destacam-se a facilidade de obtenção e a possibilidade de adequação do modelo ao projeto de sistemas de controle. Contudo, tipicamente as variáveis do modelo não possuem significado físico e há um número excessivo de parâmetros (PEARSON; POTTMANN, 2000).

Na modelagem denominada caixa-translúcida (ou identificação), conciliam-se as vantagens das estratégias descritas anteriormente. Em particular, qualquer técnica de modelagem na qual se faz o uso de dados de entrada-saída, e de conhecimento auxiliar sobre o sistema, pode ser classificada como identificação caixa-translúcida (CORRÊA; AGUIRRE, 2004). O emprego dessa estratégia não requer um extenso conhecimento da física dos processos e possibilita a obtenção de modelos representativos e fisicamente significativos (AGUIRRE, 1998).

O conhecimento *a priori* pode ser utilizado para definir a estrutura do modelo (i.e. a quantidade de polos e zeros, e/ou a presença de atraso). Então, os dados experimentais são empregados para estimar os parâmetros do modelo. Os parâmetros podem ser estimados através da resolução de um problema de otimização que envolve a minimização da diferença entre o comportamento esperado a partir do modelo e o comportamento real do sistema. Em particular, quando o modelo matemático possui um atraso a ser determinado, o problema de otimização é não-convexo (BJORKLUND; LJUNG, 2003). Com efeito, a solução do problema pode incorrer um mínimo local associado a um modelo com baixa representatividade. Para contornar esse problema, diferentes trabalhos propuseram a resolução desse tipo de problema de otimização por meio de algoritmos evolutivos, como a Otimização Colônia de Formigas, Algoritmo Genético (GA - *Genetic Algorithm*) e Evolução Diferencial (ED) (LEI; QIDI, 2001; YANG; SEESTED, 2013; YOUSEFI; HANDROOS; SOLEYMANI, 2008). O emprego desse tipo de algoritmo traz

como vantagens simplicidade de implementação, possibilidade de paralelização, e não necessidade da função de custo (objetivo) ser diferenciável, suave e/ou contínua (LUNDH; OLSSON; NARAYANAN, 1997). Como desvantagens da utilização de algoritmos evolutivos, é comum a dificuldade de encontrar o mínimo global, e em geral, demandam um número elevado de avaliações da função objetivo (RAIMANN, 2007). Em algoritmos como a ED e GA, é possível que ocorra a estagnação da população e a convergência prematura em torno de um ótimo local. Então, o algoritmo não é mais capaz de encontrar a melhor solução para o problema (LAMPINEN; ZELINKA, 2000).

Nesse contexto, o presente trabalho tem por objetivo implementar o algoritmo de evolução diferencial e uma versão modificada da ED, denominada Evolução Diferencial associada a Modelos Caóticos de Busca e Diversidade (ED-MCBD), na identificação de parâmetros a partir de um modelo previamente definido. Mais precisamente, a modificação consistiu na associação de modelos caóticos de busca e um operador de reinício da população. Isso foi realizado para prevenir a convergência prematura e aumentar a diversidade da população ao longo das gerações, respectivamente (LOBATO; STEFFEN JR.; OLIVEIRA-LOPES, 2007).

Cabe salientar que essa metodologia para identificação paramétrica foi publicada no XXIII Congresso Brasileiro de Automática realizado em 2020 (SANTOS; LOBATO; ASSIS, 2020). Devido ao espaço disponível, aqui detalha-se mais a abordagem e apresentam-se resultados experimentais.

O restante do trabalho é organizado da seguinte forma. O Capítulo 2 descreve como é feita a identificação paramétrica por meio de otimização e os algoritmos utilizados nesse trabalho. O Capítulo 3 apresenta os resultados obtidos com algoritmos através de exemplos sistemas teóricos e experimentais, bem como as discussões. O Capítulo 4 se encontra as conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

2 Identificação paramétrica por meio da resolução de problema de otimização

Problemas de otimização envolvem determinação de mínimos ou máximos de uma função objetivo. A resolução desse tipo de problema consiste em encontrar o vetor de variáveis que minimizam/maximizam a referida função objetivo (MARTINEZ; SANTOS, 1995). Neste trabalho, um problema de otimização será formulado para obtenção dos parâmetros de uma função de transferência $G_m(s)$ a partir de dados da resposta em frequência. Seja $\omega \in [\omega_l \ \omega_u]$ uma frequência na qual os valores de magnitude $|G(j\omega)|$ e fase $\angle G(j\omega)$ da resposta em frequência da planta são conhecidos, em que ω_l e ω_u denotam os limitantes inferior e superior, respectivamente. Os parâmetros de $G_m(s)$ serão calculados minimizando-se a seguinte função de custo:

$$J(\omega) = \sum_{\omega=\omega_l}^{\omega_u} W_m(\omega) \left\| |G(j\omega)| - |G_m(j\omega)| \right\|_2 + W_f(\omega) \left\| \angle G(j\omega) - \angle G_m(j\omega) \right\|_2 \quad (2.1)$$

em que $W_m(\omega)$ e $W_f(\omega)$ são pesos de ajuste.

Considera-se que a estrutura de $G_m(s)$ em (2.1) seja previamente definida. Por exemplo, devido às características de um dado processo, pode-se supor um sistema de primeira ordem com atraso, isto é,

$$G_m(s) = \frac{K}{s + a} e^{-st_d} \quad (2.2)$$

sendo K , a e t_d parâmetros desconhecidos do modelo. Nesse cenário, $\boldsymbol{\theta} = [K \ a \ t_d]^\top$ é um vetor de variáveis de busca que é calculado resolvendo-se

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} J(\omega) \quad (2.3)$$

sujeito a

$$\boldsymbol{\theta} \in \Theta, \ \Theta \subset \mathbb{R}^{N_p} \quad (2.4)$$

sendo que $\boldsymbol{\theta}$ e Θ representam o vetor de variáveis de busca composto por N_p parâmetros e o conjunto admissível para tais parâmetros, respectivamente.

O problema de otimização (2.3)-(2.4) será resolvido utilizando a evolução diferencial. Esse método de otimização é descrito a seguir.

2.1 Algoritmo de evolução diferencial clássico

A Evolução Diferencial (ED) é um algoritmo de otimização baseado nos mecanismos de seleção natural e na genética populacional. Em particular, a partir de um conjunto de soluções iniciais (denominado população) gerado aleatoriamente, empregam-se operadores de mutação, cruzamento e seleção na geração de novas soluções candidatas (i.e. novos indivíduos para a população) (CARVALHO et al., 2016).

No algoritmo convencional, primeiramente deve-se escolher a estratégia que determina as etapas de mutação e cruzamento, neste trabalho foi utilizado a estratégia básica (STORN; PRICE, 1997). Logo após, ajustam-se quatro parâmetros: A taxa de perturbação ($F > 0$), a probabilidade de ocorrência de recombinação, ou probabilidade de cruzamento (CR), a quantidade de indivíduos na população (T_p) e o número máximo de gerações realizadas durante a minimização (N_{GEN}) (CARVALHO et al., 2016). Uma vez definido o problema de otimização, a estratégia de mutação e cruzamento, e ajustados esses parâmetros, o procedimento de otimização é realizado por meio das seguintes etapas (STORN; PRICE, 1997):

1. Geração de uma população inicial de forma aleatória com soluções factíveis (de acordo com Θ) para o problema em questão;
2. Avaliação da aptidão (valor da função de custo) de cada indivíduo;
3. Escolha de indivíduo alvo. Cada indivíduo da população ($\theta_i, i = 1, 2, \dots, T_p$) será um vetor alvo $\bar{\theta}_i$ passível de substituição;
4. Geração de indivíduo doador. Nessa etapa, selecionam-se (aleatoriamente) três indivíduos $\{\theta_p, \theta_q \text{ e } \theta_r\} \neq \bar{\theta}_i$. O primeiro vetor (θ_p) é denominado como genitor principal, os outros dois são os genitores secundários (θ_q e θ_r). Os genitores secundários são subtraídos ($\theta_s = \theta_q - \theta_r$). O resultado dessa subtração é multiplicado pela taxa de perturbação, obtendo-se $\theta_f = F \cdot \theta_s$. Então, calcula-se o vetor doador fazendo-se $\theta_D = \theta_p + \theta_f$. O procedimento anterior representa o operador de mutação no algoritmo de ED. A Figura 1 ilustra essa etapa. Vale salientar que, nessa operação é possível que os componentes do vetor θ_D resulte em valores fora do intervalo determinado por Θ . Nesses casos é feita uma aproximação para o valor do limite do intervalo mais próximo, afim de manter o θ_D dentro das restrições;
5. Na sequência constrói-se um indivíduo candidato θ_C a partir de $\bar{\theta}_i$ e θ_D . Mais especificamente, cada componente de θ_C é tomada de $\bar{\theta}_i$ ou de θ_D . Com esse propósito, para cada componente $j \in \{1, 2, \dots, N_p\}$, gera-se um número aleatório p , que é comparado a CR . Caso $p < CR$, tal componente é proveniente de θ_D . Senão, toma-se da componente de $\bar{\theta}_i$. Essa etapa é denominada cruzamento.

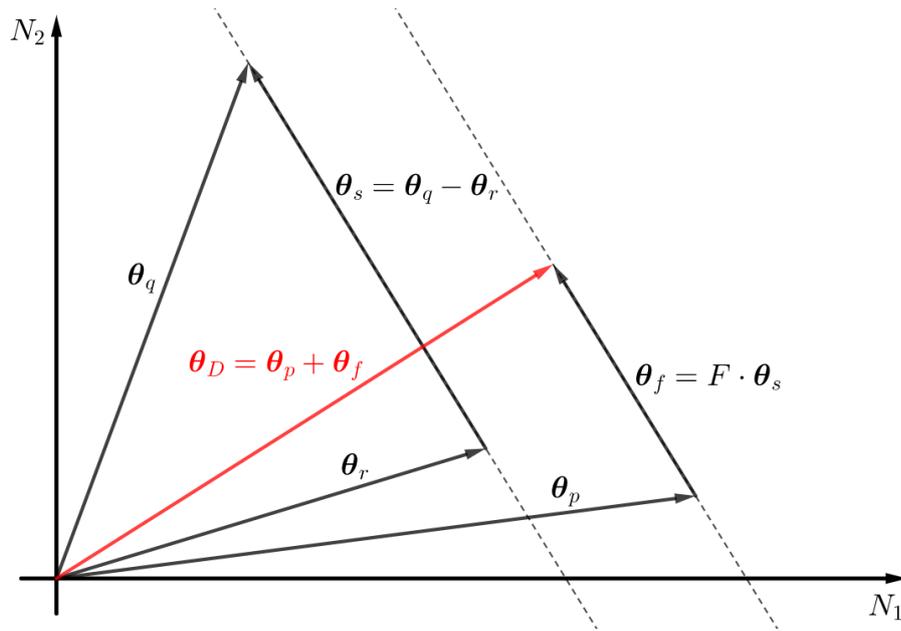


Figura 1 – Ilustração das operações envolvidas no cálculo do vetor doador θ_D .

Vale comentar que idealmente, não se deve constituir θ_C com apenas elementos de θ_D ou de $\bar{\theta}_i$ ¹. Caso θ_C possua somente elementos de $\bar{\theta}_i$, substitui-se um elemento de θ_C por um do vetor θ_D .

6. Se o custo J_C associado a θ_C for menor que o custo relativo a $\bar{\theta}_i$, faz-se a substituição. Caso contrário, o vetor alvo se mantém na população. Essa etapa é chamada de seleção;
7. Este procedimento é repetido até que um critério de parada previamente estabelecido seja satisfeito. Então, o indivíduo de menor custo é a melhor solução encontrada para o problema de otimização.

O algoritmo de Evolução Diferencial com os passos descritos anteriormente é representado no fluxograma mostrado na Figura 2.

¹ Em geral, a probabilidade de $\theta_C = \theta_D$ é alta devido ao fato de se recomendar CR próximo a 1.

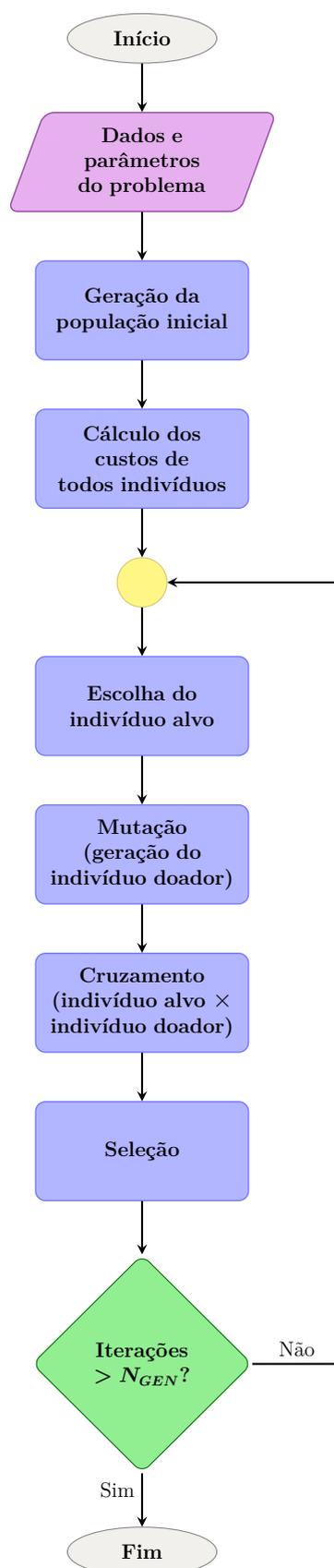


Figura 2 – Fluxograma do algoritmo de ED.

Para fins de ilustração, apresenta-se na sequência um exemplo numérico.

Suponhamos um problema no qual os indivíduos da população possuam três componentes, ou seja, $N_p = 3$, e que os conjuntos de valores admissíveis para essas componentes sejam dados por $\Theta_i = \{\theta_i \in \mathbb{R} | 0 \leq \theta_i \leq 10\}$, $i = 1, 2, 3$.

Por simplicidade, assume-se que a solução ótima do problema seja $\theta^* = [2,3 \ 8,4 \ 7,1]^\top$ e que

$$J(\theta) = |2,3 - x_1| + |8,4 - x_2| + |7,1 - x_3| \quad (2.5)$$

Mais ainda, sejam os seguintes parâmetros de ajuste:

- $F = 0,6$;
- $CR = 0,9$;
- $T_p = 10$;
- $N_{GEN} = 10$.

De acordo com as etapas 1 e 2, foi gerada uma população inicial e calcularam-se os custos de cada indivíduo da população, obtendo-se

$$\left[\begin{array}{l} \theta_1 = [6,1 \ 0,4 \ 5,3]^\top \quad J(\theta_1) = 13,6 \\ \theta_2 = [7,4 \ 3,7 \ 3,4]^\top \quad J(\theta_2) = 13,5 \\ \theta_3 = [1,9 \ 4,0 \ 1,8]^\top \quad J(\theta_3) = 10,1 \\ \theta_4 = [9,8 \ 7,8 \ 3,0]^\top \quad J(\theta_4) = 12,2 \\ \theta_5 = [3,8 \ 3,8 \ 5,4]^\top \quad J(\theta_5) = 7,8 \\ \theta_6 = [1,7 \ 5,7 \ 4,1]^\top \quad J(\theta_6) = 6,3 \\ \theta_7 = [5,6 \ 3,9 \ 5,1]^\top \quad J(\theta_7) = 9,8 \\ \theta_8 = [3,7 \ 7,9 \ 6,5]^\top \quad J(\theta_8) = 2,5 \\ \theta_9 = [2,0 \ 2,7 \ 5,1]^\top \quad J(\theta_9) = 8,0 \\ \theta_{10} = [7,6 \ 2,6 \ 8,2]^\top \quad J(\theta_{10}) = 12,2 \end{array} \right]$$

Na primeira execução do algoritmo ($n = 1$), o vetor alvo será o primeiro vetor da população, ou seja, $\bar{\theta}_i = \theta_1$ (etapa 3). Os genitores principal e secundário são escolhidos aleatoriamente para realização da etapa 4. Admitindo $[p \ q \ r]^\top = [7 \ 9 \ 2]^\top$, ou seja, $[\theta_p \ \theta_q \ \theta_r]^\top = [\theta_7 \ \theta_9 \ \theta_2]^\top$, a operação de mutação é dada por

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Indivíduo Doador} & = & \text{Genitor Principal} & + & \overbrace{\text{Taxa de Perturbação}} & \cdot & \overbrace{\left(\begin{array}{cc} \text{Primeiro Genitor Secundário} & - & \text{Segundo Genitor Secundário} \\ \theta_9 & & \theta_2 \end{array} \right)}^{\theta_f} \\
 \theta_D & = & \theta_7 & + & F & \cdot & \theta_s
 \end{array}$$

$$\theta_D = \begin{bmatrix} 5,6 \\ 3,9 \\ 5,1 \end{bmatrix} + 0,6 \cdot \left(\begin{bmatrix} 2,0 \\ 2,7 \\ 5,1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7,4 \\ 3,7 \\ 3,4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2,36 \\ 3,3 \\ 6,12 \end{bmatrix}$$

Para realização do cruzamento (etapa 5), assume-se o seguinte vetor de probabilidades: $\mathbf{p} = [0,21 \ 0,98 \ 0,70]^\top$. Comparando-se cada componente de \mathbf{p} com CR , o vetor resultante do cruzamento do vetor alvo com o vetor doador é

$$\theta_C = \begin{bmatrix} 2,36 \\ 0,4 \\ 6,12 \end{bmatrix}, \text{ com custo associado } J(\theta_C) = 9,04.$$

Na etapa 6 (seleção) compara-se os custos $J(\theta_C)$ e $J(\bar{\theta}_i)$. O indivíduo com o menor custo associado é mantido na população. Nesse exemplo, $J(\theta_C) < J(\bar{\theta}_i)$, então θ_C tomará o lugar de $\bar{\theta}_i = \theta_1$ na população. A população atualizada com o respectivo custo é

$$\left[\begin{array}{l}
 \theta_1 = [2,36 \ 0,4 \ 6,12]^\top \quad J(\theta_1) = 9,04 \\
 \theta_2 = [7,4 \ 3,7 \ 3,4]^\top \quad J(\theta_2) = 13,5 \\
 \theta_3 = [1,9 \ 4,0 \ 1,8]^\top \quad J(\theta_3) = 10,1 \\
 \theta_4 = [9,8 \ 7,8 \ 3,0]^\top \quad J(\theta_4) = 12,2 \\
 \theta_5 = [3,8 \ 3,8 \ 5,4]^\top \quad J(\theta_5) = 7,8 \\
 \theta_6 = [1,7 \ 5,7 \ 4,1]^\top \quad J(\theta_6) = 6,3 \\
 \theta_7 = [5,6 \ 3,9 \ 5,1]^\top \quad J(\theta_7) = 9,8 \\
 \theta_8 = [3,7 \ 7,9 \ 6,5]^\top \quad J(\theta_8) = 2,5 \\
 \theta_9 = [2,0 \ 2,7 \ 5,1]^\top \quad J(\theta_9) = 8,0 \\
 \theta_{10} = [7,6 \ 2,6 \ 8,2]^\top \quad J(\theta_{10}) = 12,2
 \end{array} \right]$$

Isso conclui a primeira iteração. Esse procedimento é repetido até que o critério de parada seja atingido (etapa 7). Em particular, adotou-se como critério de parada um número máximo de gerações.

O algoritmo de ED possui boas propriedades de convergência e pode ser empregado para minimização/maximização funções de custo não lineares e/ou não diferenciáveis, e

multimodais (OLIVEIRA, 2006). No entanto, a técnica é passível de estagnação e convergência prematura (ZAHARIE, 2002). Para reduzir tais problemas, este trabalho propõe a adição de dois operadores que buscam aumentar a capacidade de exploração do espaço de busca do algoritmo de ED clássico (LOBATO; STEFFEN JR.; OLIVEIRA-LOPES, 2007). A técnica resultante, denominada Evolução Diferencial associada a Modelos Caóticos de Busca e Diversidade (ED-MCBD), é detalhada na próxima seção.

2.2 Evolução diferencial associada a modelos caóticos de busca e diversidade

Os parâmetros de ajuste F e CR do algoritmo de ED clássico são tipicamente constantes durante toda a execução. Para um desempenho adequado, é necessário realizar uma análise de sensibilidade de tais parâmetros, mesmo que exista uma faixa recomendada pela literatura (STORN; PRICE, 1997). Alternativamente pode-se atualizar F e CR ao longo da otimização empregando Modelos Caóticos de Busca (LOBATO; STEFFEN JR.; OLIVEIRA-LOPES, 2007). Essa atualização previne a ocorrência de convergência prematura e aumenta a diversidade da população. Essa técnica foi implementada com sucesso na solução de problema de engenharia (COELHO; MARIANI, 2006). Em particular, os parâmetros F e CR são atualizados seguindo os seguintes modelos:

$$F_n = \mu \cdot F_{n-1}(1 - F_{n-1}) \quad (2.6)$$

$$CR_n = \mu \cdot CR_{n-1}(1 - CR_{n-1}) \quad (2.7)$$

sendo $0 < F_1 < 1$, $0 < CR_1 < 1$ e $3,57 \leq \mu \leq 4$. Mais ainda os subíndices n e $n - 1$ indicam valores atuais e anteriores, respectivamente. Ressalta-se que a faixa adotada para o valor μ garante que a evolução seja caótica (OTT, 2002).

Como a população inicial é gerada de forma aleatória, não há garantia de que a solução ótima será encontrada. Isso pode ocorrer caso os indivíduos forem semelhantes entre si e próximos a um mínimo local. Com efeito, todos os indivíduos têm o mesmo problema e o espaço de busca é limitado. Esse problema é conhecido por convergência prematura.

Para reduzir as chances de ocorrência desse fenômeno e aumentar as chances do algoritmo ED escapar de um ótimo local, este trabalho propõe um operador de controle de diversidade da população. O controle é feito através da diferença entre os valores da função objetivo do melhor e do pior indivíduo da população, denotados respectivamente por $J^*(\omega)$ e $J^P(\omega)$. Caso essa diferença for menor do que a tolerância de reinício α , a população é gerada novamente. Nesse processo, o menor custo encontrado $J^*(\omega)$ e o indivíduo associado são mantidos na população. Como resultado, há um aumento de diversidade. Por outro lado, pode ser que o algoritmo demore a convergir devido a um excessivo número de reinicializações. Para evitar esse problema a reinicialização da população é suspensa quando $J^*(\omega) < 1$. Verificou-se empiricamente que a reinicialização pode prejudicar a convergência nas proximidades do mínimo global que no caso de (2.1) ser igual a zero. Nas margens do mínimo global é natural que os indivíduos se assemelhem.

Além do número de gerações, no ED-MCBD também adotou-se um critério de parada uma tolerância do ϵ para $J^*(\omega)$. Após a definição do problema de otimização e

ajustados os parâmetros: T_p , N_{GEN} , os valores iniciais F e CR , e os parâmetros adicionais do algoritmo de ED-MCBD, α e ϵ . O processo de otimização é realizado de acordo com seguintes etapas:

1. Geração de uma população inicial de forma aleatória com soluções factíveis (de acordo com Θ) para o problema em questão;
2. Avaliação da aptidão (valor da função de custo) de cada indivíduo;
3. Atualização dos valores dos parâmetros F e CR de acordo com (2.6) e (2.7), para todas as iterações (n) posteriores à primeira execução ($n > 1$). A Figura 3 apresenta a evolução desses parâmetros ao longo de 30 gerações. Nessa figura é possível observar a flutuação destes parâmetros, o que em tese, introduzir diversidade a população e, conseqüentemente, aumentar a chance de se chegar ao ótimo global;
4. Escolha de indivíduo alvo. Cada indivíduo da população ($\theta_i, i = 1, 2, \dots, T_p$) será um vetor alvo $\bar{\theta}_i$ passível de substituição;
5. Geração de indivíduo doador. Nessa etapa, selecionam-se (aleatoriamente) três indivíduos $\{\theta_p, \theta_q \text{ e } \theta_r\} \neq \bar{\theta}_i$. O primeiro vetor (θ_p) é denominado como genitor principal, os outros dois são os genitores secundários (θ_q e θ_r). Os genitores secundários são subtraídos ($\theta_s = \theta_q - \theta_r$). O resultado dessa subtração é multiplicado pela taxa de perturbação, obtendo-se $\theta_f = F \cdot \theta_s$. Então, calcula-se o vetor doador fazendo-se $\theta_D = \theta_p + \theta_f$. O precedente anterior representa o operador de mutação no algoritmo de ED e no ED-MCBD. A Figura 1 ilustra essa etapa. Ressalta-se que, nessa operação é possível que os componentes do vetor θ_D resulte em valores fora do intervalo determinado por Θ . Nesses casos é feita uma aproximação para o valor do limite do intervalo mais próximo, afim de manter o θ_D dentro das restrições;
6. Na sequência constrói-se um indivíduo candidato θ_C a partir de $\bar{\theta}_i$ e θ_D . Mais especificamente, cada componente de θ_C é tomada de $\bar{\theta}_i$ ou de θ_D . Com esse propósito, para cada componente $j \in \{1, 2, \dots, N_p\}$, gera-se um número aleatório p , que é comparado a CR . Caso $p < CR$, tal componente é proveniente de θ_D . Senão, toma-se da componente de $\bar{\theta}_i$. Essa etapa é denominada cruzamento.

Vale comentar que idealmente, não se deve constituir θ_C com apenas elementos de θ_D ou de $\bar{\theta}_i$. Caso θ_C possua somente elementos de $\bar{\theta}_i$, substitui-se um elemento de θ_C por um do vetor θ_D .
7. Se o custo J_C associado a θ_C for menor que o custo relativo a $\bar{\theta}_i$, faz-se a substituição. Caso contrário, o vetor alvo se mantém na população. Essa etapa é chamada de seleção;

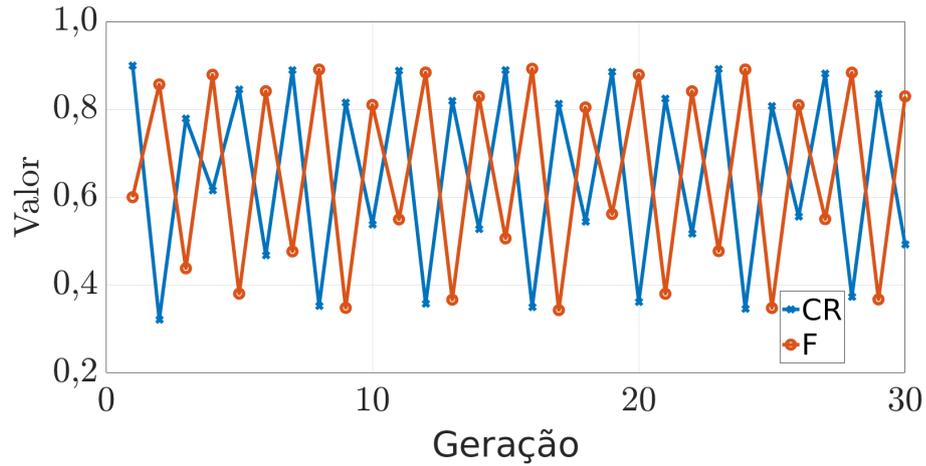


Figura 3 – Evolução dos parâmetros F e CR por geração para valores iniciais $F_1 = 0,6$, $CR_1 = 0,9$ com $\mu = 3,57$.

8. Avaliação da diferença entre os valores da função objetivo do pior $J^P(\omega)$ e do melhor $J^*(\omega)$ indivíduo da população, caso menor que α , a população é gerada novamente (retornando para etapa 1) mantendo o melhor indivíduo e o custo associado. Lembrando que, esse operador é desligado quando $J^*(\omega) < 1$;
9. Caso $J^*(\omega)$ seja menor do que tolerância do erro ϵ , o algoritmo encerra tendo como solução o indivíduo associado ao $J^*(\omega)$;
10. Se o número de iterações (n) for igual ao número máximo de iterações (N_{GEN}), o algoritmo é finalizado e retorna como solução o indivíduo associado a $J^*(\omega)$. Caso contrário, retorna-se para a etapa 3 iniciando uma nova iteração.

O fluxograma da Figura 4 ilustra as etapas envolvidas no procedimento de minimização.

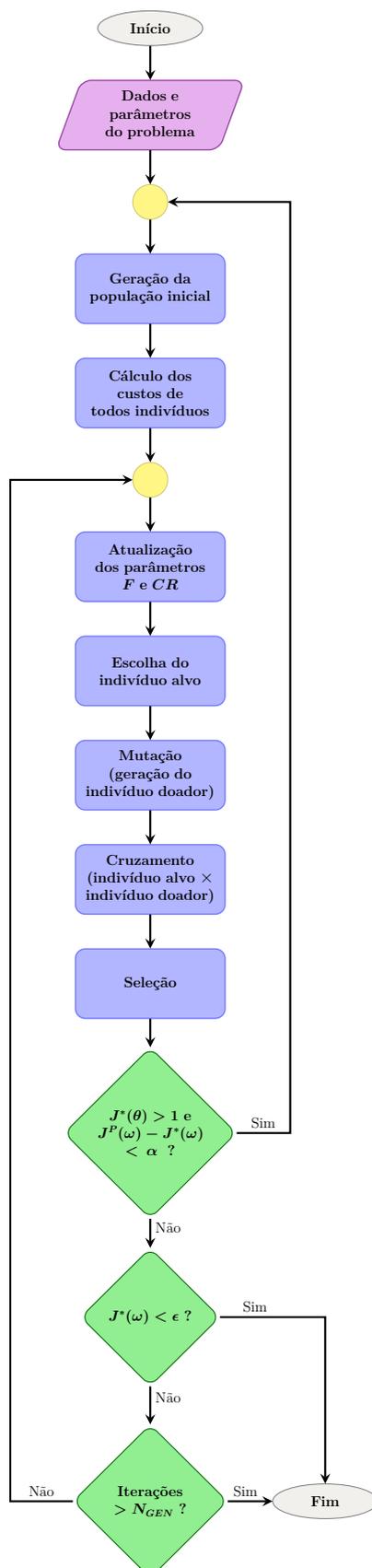


Figura 4 – Fluxograma do algoritmo de ED-MCBD.

Para ilustrar o algoritmo anterior, será feita a continuação do exemplo numérico apresentado no final da Seção 2.1 adicionando as etapas de atualização de F e CR e reinício da população, caso as condições para isso sejam satisfeitas.

No início da segunda iteração ($n = 2$), tem-se a seguinte população, com os respectivos custos:

$$\left[\begin{array}{l} \boldsymbol{\theta}_1 = [2,36 \ 0,4 \ 6,12]^\top \ J(\boldsymbol{\theta}_1) = 9,04 \\ \boldsymbol{\theta}_2 = [7,4 \ 3,7 \ 3,4]^\top \ J(\boldsymbol{\theta}_2) = 13,5 \\ \boldsymbol{\theta}_3 = [1,9 \ 4,0 \ 1,8]^\top \ J(\boldsymbol{\theta}_3) = 10,1 \\ \boldsymbol{\theta}_4 = [9,8 \ 7,8 \ 3,0]^\top \ J(\boldsymbol{\theta}_4) = 12,2 \\ \boldsymbol{\theta}_5 = [3,8 \ 3,8 \ 5,4]^\top \ J(\boldsymbol{\theta}_5) = 7,8 \\ \boldsymbol{\theta}_6 = [1,7 \ 5,7 \ 4,1]^\top \ J(\boldsymbol{\theta}_6) = 6,3 \\ \boldsymbol{\theta}_7 = [5,6 \ 3,9 \ 5,1]^\top \ J(\boldsymbol{\theta}_7) = 9,8 \\ \boldsymbol{\theta}_8 = [3,7 \ 7,9 \ 6,5]^\top \ J(\boldsymbol{\theta}_8) = 2,5 \\ \boldsymbol{\theta}_9 = [2,0 \ 2,7 \ 5,1]^\top \ J(\boldsymbol{\theta}_9) = 8,0 \\ \boldsymbol{\theta}_{10} = [7,6 \ 2,6 \ 8,2]^\top \ J(\boldsymbol{\theta}_{10}) = 12,2 \end{array} \right]$$

Consideram-se os parâmetros de ajuste a seguir.

- $F_1 = 0,6$;
- $CR_1 = 0,9$;
- $T_p = 10$;
- $N_{GEN} = 10$;
- $\alpha = 10^{-3}$;
- $\epsilon = 10^{-5}$.

O passo subsequente corresponde à etapa 3, na qual os valores de F e CR são atualizados, com $\mu = 3,57$. De (2.6) e (2.7) e dos valores iniciais, segue que

$$\begin{aligned} F_2 &= 3,57 \cdot 0,6(1 - 0,6) = 0,86 \\ CR_2 &= 3,57 \cdot 0,9(1 - 0,9) = 0,32 \end{aligned}$$

Como o algoritmo está na segunda execução ($n = 2$), o vetor alvo será o segundo vetor da população, ou seja, $\bar{\boldsymbol{\theta}}_i = \boldsymbol{\theta}_2$ (etapa 4). Para a realização da etapa 5, os genitores

são escolhidos aleatoriamente. Considerando $[\theta_p \ \theta_q \ \theta_r]^\top = [\theta_8 \ \theta_4 \ \theta_5]^\top$, a operação de mutação é dada por

$$\theta_D = \begin{bmatrix} 3,7 \\ 7,9 \\ 6,5 \end{bmatrix} + 0,86 \cdot \left(\begin{bmatrix} 9,8 \\ 7,8 \\ 3,0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3,8 \\ 3,8 \\ 5,4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 8,9 \\ 11,3 \\ 4,4 \end{bmatrix}$$

Como o segundo componente de θ_D excedeu a restrição Θ , o componente é então aproximado ao limitante mais próximo.

$$\theta_D = \begin{bmatrix} 8,9 \\ 10 \\ 4,4 \end{bmatrix}$$

No cruzamento (etapa 6), assume-se o seguinte vetor de probabilidades: $\mathbf{p} = [0,72 \ 0,66 \ 0,48]^\top$. Fazendo a comparação de cada componente de \mathbf{p} com CR_2 , o vetor resultante seria igual ao vetor alvo $\bar{\theta}_i = \theta_2$, pois todos os componentes de \mathbf{p} são maiores do que CR_2 . Como isso não pode ocorrer, o terceiro componente de θ_C foi selecionado aleatoriamente para ser substituído pelo o terceiro componente de θ_D . O vetor resultante é

$$\theta_C = \begin{bmatrix} 7,4 \\ 3,7 \\ 4,4 \end{bmatrix}, \text{ com custo associado } J(\theta_C) = 12,5.$$

Como $J(\theta_C) < J(\bar{\theta}_i)$, θ_C tomará o lugar de $\bar{\theta}_i = \theta_2$ na população, o que corresponde à etapa 7. A população atualizada com o respectivo custo é

$$\left[\begin{array}{l} \theta_1 = [2,36 \ 0,4 \ 6,12]^\top \ J(\theta_1) = 9,04 \\ \theta_2 = [7,4 \ 3,7 \ 4,4]^\top \ J(\theta_2) = 12,5 \\ \theta_3 = [1,9 \ 4,0 \ 1,8]^\top \ J(\theta_3) = 10,1 \\ \theta_4 = [9,8 \ 7,8 \ 3,0]^\top \ J(\theta_4) = 12,2 \\ \theta_5 = [3,8 \ 3,8 \ 5,4]^\top \ J(\theta_5) = 7,8 \\ \theta_6 = [1,7 \ 5,7 \ 4,1]^\top \ J(\theta_6) = 6,3 \\ \theta_7 = [5,6 \ 3,9 \ 5,1]^\top \ J(\theta_7) = 9,8 \\ \theta_8 = [3,7 \ 7,9 \ 6,5]^\top \ J(\theta_8) = 2,5 \\ \theta_9 = [2,0 \ 2,7 \ 5,1]^\top \ J(\theta_9) = 8,0 \\ \theta_{10} = [7,6 \ 2,6 \ 8,2]^\top \ J(\theta_{10}) = 12,2 \end{array} \right]$$

O próximo passo (etapa 8) corresponde ao operador de controle de diversidade da população. Como $J^*(\boldsymbol{\theta}) > 1$ e $J^P(\boldsymbol{\theta}) - J^*(\boldsymbol{\theta}) > \alpha$, a população atual é mantida.

Então, procede-se para verificação dos critérios de parada (etapa 9 e 10). Como nenhum desses critérios é atendido, prosseguir-se-ia para a etapa 3, iniciando uma nova iterações.

3 Resultados em modelos numéricos

Para comparação, os algoritmos de ED-MCBD e ED foram submetidos a quatro estudos de caso com diferentes números de parâmetros a serem identificados. Cada algoritmo foi executado 50 vezes para estabelecer uma base de comparação. O primeiro exemplo consiste na identificação de um sistema de fase não mínima com polos reais e atraso desconhecido. O segundo exemplo é também um sistema de fase não mínima e atraso desconhecido com a adição de um par de polos complexos conjugados. O terceiro consiste na identificação de um sistema a partir de dados experimentais. Já o quarto envolve uma redução de ordem. Em todos os problemas, os dois algoritmos (ED-MCBD e ED) tiveram os mesmos critérios de parada ($J^*(\omega) < \epsilon$ e $n > N_{GEN}$) e os seguintes parâmetros de ajuste: $F = 0,6$, $CR = 0,9$ e $\mu = 3,57$. No caso do ED-MCBD tais valores de F e CR representam os ajustes iniciais.

3.1 Exemplo 1 - Sistema de fase não mínima com polos reais

O modelo de simulação desse exemplo é dado por

$$G(s) = \frac{10,5(s - 7)}{s(s + 3)}e^{-2s} \quad (3.1)$$

A identificação paramétrica foi feita com base na seguinte estrutura:

$$G_m(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)}e^{-st_d} \quad (3.2)$$

Então, o vetor de otimização é $\boldsymbol{\theta} = [p_1 \ p_2 \ z_1 \ K \ t_d]^\top$.

Os dados de resposta em frequência do modelo (3.1) são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Dados de resposta em frequência do Exemplo 1.

ω (rad/s)	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)^\circ$	ω (rad/s)	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)^\circ$
0,1000	244,8890	75,8132	⋮	⋮	⋮
0,1099	222,9011	74,4154	1,0481	22,3133	-57,8785
0,1207	202,8836	72,8799	1,1514	20,1326	-72,2776
0,1326	184,6594	71,1932	1,2649	18,1373	-88,0454
0,1456	168,0675	69,3404	1,3895	16,3117	-105,3036
0,1600	152,9612	67,3051	1,5264	14,6416	-124,1832
0,1758	139,2070	65,0694	1,6768	13,1146	-144,8249
0,1931	126,6833	62,6137	1,8421	11,7200	-167,3799
0,2121	115,2795	59,9162	2,0236	10,4482	-192,0109
0,2330	104,8947	56,9534	2,2230	9,2908	-218,8934
0,2560	95,4373	53,6991	2,4421	8,2405	-248,2169
0,2812	86,8235	50,1248	2,6827	7,2905	-280,1873
0,3089	78,9774	46,1993	2,9471	6,4347	-315,0286
0,3393	71,8295	41,8882	3,2375	5,6672	-352,9857
0,3728	65,3169	37,1538	3,5565	4,9821	-394,3277
0,4095	59,3820	31,9551	3,9069	4,3738	-439,3503
0,4498	53,9724	26,2470	4,2919	3,8361	-488,3803
0,4942	49,0405	19,9800	4,7149	3,3633	-541,7782
0,5429	44,5428	13,1004	5,1795	2,9492	-599,9429
0,5964	40,4399	5,5493	5,6899	2,5880	-663,3156
0,6551	36,6959	-2,7376	6,2506	2,2738	-732,3843
0,7197	33,2779	-11,8300	6,8665	2,0010	-807,6892
0,7906	30,1564	-21,8042	7,5431	1,7646	-889,8283
0,8685	27,3043	-32,7427	8,2864	1,5597	-979,4629
0,9541	24,6973	-44,7352	9,1030	1,3820	-1077,3251
⋮	⋮	⋮	10,0000	1,2276	-1184,2243

Os parâmetros considerados nos algoritmos (ED-MCBD e ED) são mostrados na Tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros adotados nos algoritmos de ED-MCBD e ED para o Exemplo 1.

Parâmetro	ED-MCBD	ED
T_p	50	50
N_p	5	5
N_{GEN}	10^4	10^4
ϵ	10^{-5}	10^{-5}
α	10^{-3}	-
$W_m(\omega)$	1	1
$W_f(\omega)$	1	1
p_1 e p_2	[0 100]	[0 100]
ω_n	[0 100]	[0 100]
ξ	[0 1]	[0 1]
z_1	[-100 100]	[-100 100]
K	[-1000 1000]	[-1000 1000]
t_d	[0 50]	[0 50]

A Tabela 3 apresenta os valores dos parâmetros identificados pelos algoritmos. Nessa mesma tabela, verifica-se que a metodologia proposta convergiu constantemente para a solução ótima. Isto é, as médias (\bar{x}) dos valores utilizando ED-MCBD correspondem aos valores reais e os desvios padrão (σ) são significativamente baixos. O que corrobora com a taxa de convergência² de 100% apresentada pelo algoritmo. A contraponto que as médias e desvios padrões da ED convencional mostram um desempenho inadequado e uma taxa de convergência de 88%. Isso pode ser verificado comparando-se os valores estimados a partir da ED com os valores dos parâmetros reais.

Tabela 3 – Parâmetros identificados para o Exemplo 1.

Parâmetro	Valor real	$\bar{x}_{ED-MCBD}$	\bar{x}_{ED}	$\sigma_{ED-MCBD}$	σ_{ED}
p_1	0	0	0,53	0	2,17
p_2	3	3	8,04	$3,27 \cdot 10^{-8}$	19,69
z_1	-7	-7	-4,32	$2,27 \cdot 10^{-7}$	14,99
K	10,5	10,5	58,21	$4,38 \cdot 10^{-7}$	180,73
t_d	2	2	2	$2,18 \cdot 10^{-9}$	0,03

A Tabela 4 apresenta informações sobre o desempenho dos algoritmos. O número de gerações final corresponde à quantidade de gerações até algum critério de parada ser atingido. O número de avaliações da função objetivo $J(\omega)$ é uma métrica comumente adotada na literatura para comparação na avaliação de técnicas de otimização e está associado com o tempo computacional (MENDES, 2013; BRANDÃO, 2014; NASCENTES, 2013). O número de reinícios indica a quantidade de vezes que a população foi gerada novamente no ED-MCBD. A geração de convergência apresenta a geração na qual o algoritmo convergiu e o valor de custo ótimo ($J^*(\omega)$).

² Foi considerado que o algoritmo convergiu caso $J^*(\omega) < 10$.

Analisando a Tabela 4, constata-se que a ED-MCBD envolveu números de gerações final e de avaliações da função objetivo significativamente menores em relação à ED convencional. Tal fato também foi observado no valor do menor valor da função objetivo encontrado. Isso demonstra a vantagem produzida pelo operador de busca caótica no algoritmo, já que o operador de controle de diversidade praticamente não foi acionado. Em contrapartida, o operador de busca caótica resulta em um número maior de gerações para convergência.

Tabela 4 – Desempenho dos algoritmos na identificação do Exemplo 1.

Parâmetro	$\bar{x}_{ED-MCBD}$	\bar{x}_{ED}	$\sigma_{ED-MCBD}$	σ_{ED}
Número de gerações final	1329,7	1839,98	186,57	3015,54
Número de avaliações de $J(\omega)$	66487	91999	9339,99	$1,51 \cdot 10^5$
Número de reinícios	0,06	-	0,31	-
Geração de convergência	1103,72	592,11	184,18	125,55
Valor de custo ótimo ($J^*(\omega)$)	$7,58 \cdot 10^{-6}$	214,97	$1,87 \cdot 10^{-6}$	846,73

A Figura 5 compara os diagramas de Bode dos sistemas obtidos no Exemplo 1. Conforme discutido anteriormente, utilizando a ED-MCBD é possível identificar a resposta em frequência original, enquanto que adotando a ED convencional isso não foi alcançado.

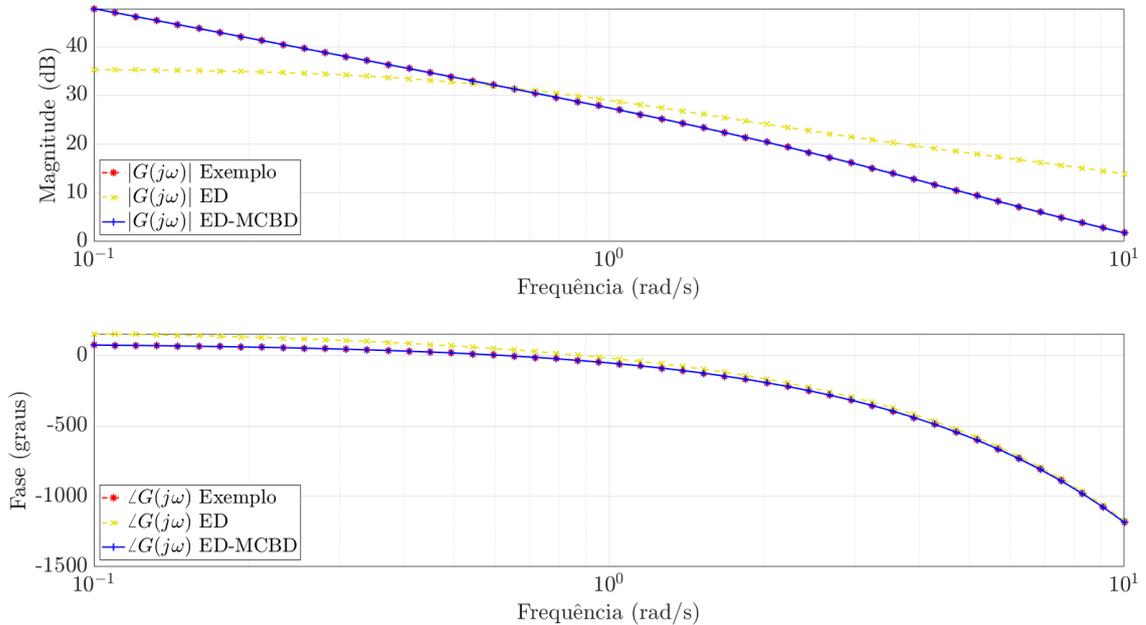


Figura 5 – Comparação dos diagramas de Bode do Exemplo 1 com os resultados produzidos com a ED e a ED-MCBD.

3.2 Exemplo 2 - Sistema de fase não mínima com um par de polos complexos conjugados

Nesse exemplo, adotou-se o seguinte modelo teórico:

$$G(s) = \frac{1512(s - 7)}{s(s + 3)(s^2 + 8,16s + 144)}e^{-2s} \quad (3.3)$$

A identificação paramétrica foi realizada levando em conta a seguinte estrutura:

$$G_m(s) = K \frac{s + z_1}{(s + p_1)(s + p_2)(s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2)}e^{-st_d} \quad (3.4)$$

Sendo assim, tem-se $\theta = [p_1 \ p_2 \ \omega_n \ \xi \ z_1 \ K \ t_d]^T$.

Os dados de resposta em frequência do modelo (3.3) são mostrados na Tabela 5.

Tabela 5 – Dados de resposta em frequência do Exemplo 2.

ω (rad/s)	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)^\circ$	ω (rad/s)	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)^\circ$
0,1000	244,9021	75,4885	⋮	⋮	⋮
0,1099	222,9155	74,0587	1,0481	22,4447	-61,3036
0,1207	202,8993	72,4881	1,1514	20,2758	-76,0452
0,1326	184,6767	70,7627	1,2649	18,2931	-92,1909
0,1456	168,0865	68,8675	1,3895	16,4809	-109,8666
0,1600	152,9821	66,7856	1,5264	14,8252	-129,2077
0,1758	139,2299	64,4987	1,6768	13,3134	-150,3603
0,1931	126,7085	61,9867	1,8421	11,9349	-173,4818
0,2121	115,3072	59,2274	2,0236	10,6799	-198,7422
0,2330	104,9251	56,1966	2,2230	9,5402	-226,3254
0,2560	95,4707	52,8677	2,4421	8,5083	-256,4315
0,2812	86,8602	49,2115	2,6827	7,5777	-289,2786
0,3089	79,0176	45,1959	2,9471	6,7421	-325,1059
0,3393	71,8737	40,7857	3,2375	5,9958	-364,1776
0,3728	65,3654	35,9426	3,5565	5,3333	-406,7865
0,4095	59,4351	30,6243	3,9069	4,7489	-453,2595
0,4498	54,0307	24,7847	4,2919	4,2371	-503,9633
0,4942	49,1045	18,3733	4,7149	3,7925	-559,3122
0,5429	44,6130	11,3348	5,1795	3,4095	-619,7774
0,5964	40,5168	3,6090	5,6899	3,0826	-685,8999
0,6551	36,7801	-4,8700	6,2506	2,8064	-758,3077
0,7197	33,3701	-14,1738	6,8665	2,5753	-837,7395
0,7906	30,2572	-24,3806	7,5431	2,3825	-925,0759
0,8685	27,4145	-35,5751	8,2864	2,2186	-1021,3725
0,9541	24,8177	-47,8495	9,1030	2,0686	-1127,8693
⋮	⋮	⋮	10,0000	1,9069	-1245,8901

Os parâmetros considerados nos algoritmos encontram-se na Tabela 6.

Tabela 6 – Parâmetros adotados nos algoritmos de ED-MCBD e ED para o Exemplo 2.

Parâmetro	ED-MCBD	ED
T_p	50	50
N_p	7	7
N_{GEN}	15000	15000
ϵ	10^{-5}	10^{-5}
α	10^{-3}	-
$W_m(\omega)$	1	1
$W_f(\omega)$	1	1
p_1 e p_2	[0 100]	[0 100]
ω_n	[0 100]	[0 100]
ξ	[0 1]	[0 1]
z_1	[-100 100]	[-100 100]
K	[-2000 2000]	[-2000 2000]
t_d	[0 50]	[0 50]

O resultado da otimização de ambos os métodos (ED e ED-MCBD) é exibido nas Tabelas 7 e 8.

A Tabela 7 mostra que a ED-MCBD obteve resultados similares entre si e próximos do ótimo global (i.e. dos valores reais do parâmetros). Já as médias dos valores encontrados empregando a ED convencional possuem erro considerável. Na realização dos testes, a taxa de convergência da ED-MCBD foi de 100% contra 40% da ED.

Tabela 7 – Parâmetros identificados para o Exemplo 2.

Parâmetro	Valor real	$\bar{x}_{ED-MCBD}$	\bar{x}_{ED}	$\sigma_{ED-MCBD}$	σ_{ED}
p_1	0	$1,14 \cdot 10^{-11}$	0	$7,85 \cdot 10^{-11}$	0
p_2	3	3	59,26	$1,2 \cdot 10^{-4}$	47,88
ω_n	12	12	7,74	$5,53 \cdot 10^{-3}$	3,65
ξ	0,34	0,34	0,72	$6,11 \cdot 10^{-4}$	0,33
z_1	-7	-7	-24,59	$3,71 \cdot 10^{-3}$	14,86
K	1512	1512,1	1446,43	0,65	65,29
t_d	2	2	2,03	$2,08 \cdot 10^{-4}$	0,02

Na Tabela 8 percebe-se que, mesmo com a reinicialização da população, o número médio de gerações final e o número de avaliações da função objetivo foram menores na ED-MCBD. Em virtude das dificuldades de convergência do algoritmo de ED, o valor médio de $J^*(\omega)$ foi superior ao encontrado pelo algoritmo proposto no presente trabalho. Por outro lado, a convergência da ED, quando ocorreu, se deu em um menor número de gerações.

Tabela 8 – Desempenho dos algoritmos na identificação do Exemplo 2.

Parâmetro	$\bar{x}_{ED-MCBD}$	\bar{x}_{ED}	$\sigma_{ED-MCBD}$	σ_{ED}
Número de gerações final	8542,98	10119,16	1888,31	5982,02
Número de avaliações de $J(\omega)$	427229	505958	94539,61	299101
Número de reinícios	1,6	-	3,92	-
Geração de convergência	7944,26	2513,65	1896,75	357,38
Valor de custo ótimo ($J^*(\omega)$)	$5,9 \cdot 10^{-3}$	53,79	0,04	45,20

A Figura 6 compara os diagramas de bode dos resultados obtidos no Exemplo 2.

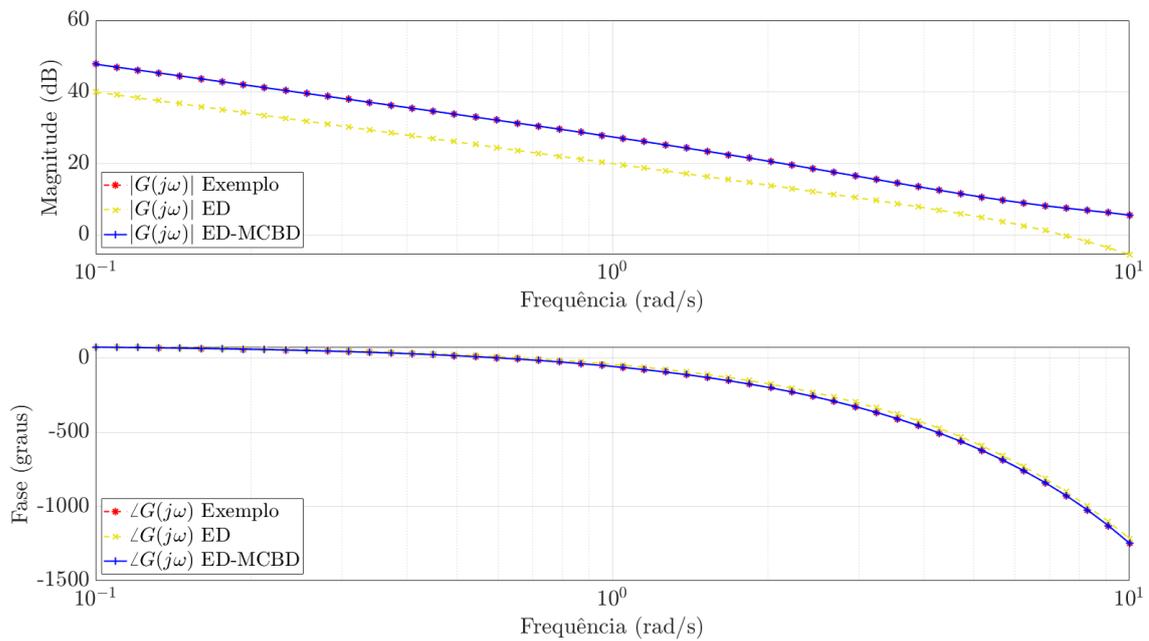


Figura 6 – Comparação dos diagramas de Bode do Exemplo 2 com os resultados produzidos com a ED e ED-MCBD.

3.3 Exemplo 3 - Identificação a partir de dados experimentais

Os algoritmos ED e ED-MCBD foram aplicados na identificação de um sistema real. Mais precisamente, na dinâmica de atitude de um helicóptero de bancada com três graus de liberdade mostrado na Figura 7. Os dados da resposta em frequência desse sistema foram retirados do trabalho de Caregnato (2018), cuja identificação foi baseada na resposta em frequência realizada com base no Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). Vale destacar que a dinâmica da planta é instável em malha aberta e os dados da resposta são de malha fechada. Tais dados são descritos na Tabela 9.



(a)



(b)

Figura 7 – (a) Vista lateral do helicóptero. (b) Vista frontal do helicóptero. Retirado de Caregnato (2018).

Tabela 9 – Dados experimentais de resposta em frequência da atitude de um helicóptero de bancada com três graus de liberdade (CAREGNATO, 2018).

ω (rad/s)	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)^\circ$
0,126	0,9450	-5,758
0,251	0,9223	-11,66
0,377	0,8613	-12,74
0,503	0,9492	-13,25
0,628	0,8512	-15,48
0,943	0,8770	-21,60
1,257	0,8525	-25,20
2,513	0,7647	-44,64
5,027	0,7295	-84,67
6,283	0,8771	-101,88
7,540	0,8262	-144,29
10,05	0,4043	-194,69

Para realizar a identificação do sistema adotou-se a estrutura de modelo sugerida em Caregnato (2018):

$$G_m(s) = \frac{K}{(s + p_1)(s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2)} \quad (3.5)$$

Logo, na otimização, o vetor a ser determinado é $\theta = [p_1 \ \omega_n \ \xi \ K]^T$.

Os parâmetros considerados nos algoritmos (ED-MCBD e ED) estão descritos na Tabela 10. Cabe salientar que o peso da identificação da fase $W_f(\omega)$ foi definido como zero conforme realizado em Caregnato (2018). Portanto, a identificação é realizada com base exclusivamente nos dados de magnitude de resposta em frequência.

Tabela 10 – Parâmetros adotados nos algoritmos de ED-MCBD e ED para o Exemplo 3.

Parâmetro	ED-MCBD	ED
T_p	100	100
N_p	4	4
N_{GEN}	5000	5000
ϵ	10^{-5}	10^{-5}
α	10^{-3}	-
$W_m(\omega)$	1	1
$W_f(\omega)$	0	0
p_1	[0 100]	[0 100]
ω_n	[0 100]	[0 100]
ξ	[0 1]	[0 1]
z	[-100 100]	[-100 100]
K	[-1000 1000]	[-1000 1000]
t_d	[0 50]	[0 50]

As Tabelas 11 e 12 apresentam os resultados da otimização com ambos os métodos. A Tabela 11 mostra que ambos os algoritmos tiveram resultados praticamente iguais na identificação dos parâmetros. As taxas de convergência também foram semelhantes, com ambos algoritmos convergindo em todos os testes.

Tabela 11 – Parâmetros identificados para o Exemplo 3.

Parâmetro	MMQ	$\bar{x}_{ED-MCBD}$	\bar{x}_{ED}	$\sigma_{ED-MCBD}$	σ_{ED}
p_1	3,46	3,41	3,41	$2,22 \cdot 10^{-15}$	$2,22 \cdot 10^{-15}$
ω_n	8,12	8,32	8,32	$5,33 \cdot 10^{-15}$	$5,33 \cdot 10^{-15}$
ξ	0,23	0,23	0,23	$8,1 \cdot 10^{-17}$	$1,13 \cdot 10^{-16}$
K	205,9	212,2	212,2	$2,84 \cdot 10^{-14}$	$2,84 \cdot 10^{-14}$

Na Tabela 12 a única diferença perceptível entre o desempenho dos algoritmos é a geração média de convergência. Como não houve reinícios da população do algoritmo ED-MCBD, esse operador não teve influência sobre a convergência do algoritmo. Verifica-se

que o operador de busca caótica contribuiu para encontrar a solução ótima do problema em um número menor de gerações do que o algoritmo de ED.

Tabela 12 – Desempenho dos algoritmos na identificação do Exemplo 3.

Parâmetro	$\bar{x}_{ED-MCBD}$	\bar{x}_{ED}	$\sigma_{ED-MCBD}$	σ_{ED}
Número de gerações final	5000	5000	0	0
Número de avaliações de $J(\omega)$	500000	500000	0	0
Número de reinícios	0	-	0	-
Geração de convergência	14,52	17,02	7,05	6,4
Valor de custo ótimo ($J^*(\omega)$)	0,328	0,328	$1,11 \cdot 10^{-16}$	$1,11 \cdot 10^{-16}$

Na Tabela 13 compara-se o somatório dos erros absolutos de magnitude a partir do modelo identificado utilizando o MMQ e os algoritmos de ED e ED-MCBD.

Tabela 13 – Somatório dos erros absolutos de magnitude dos algoritmos na identificação do Exemplo 3.

Algoritmo	$\sum_{\omega=\omega_l}^{\omega_u} G(j\omega) - G_m(j\omega) $
ED-MCBD	0,328
ED	0,328
MMQ	0,386

Nota-se que ambos os algoritmos de Evolução Diferencial resultaram em uma função de transferência com uma representatividade ligeiramente maior do que a obtida em Caregnato (2018).

A Figura 8 mostra a magnitude dos sistemas obtidos no Exemplo 3. Cabe salientar que as curvas de magnitude da ED e da ED-MCBD estão sobrepostas.

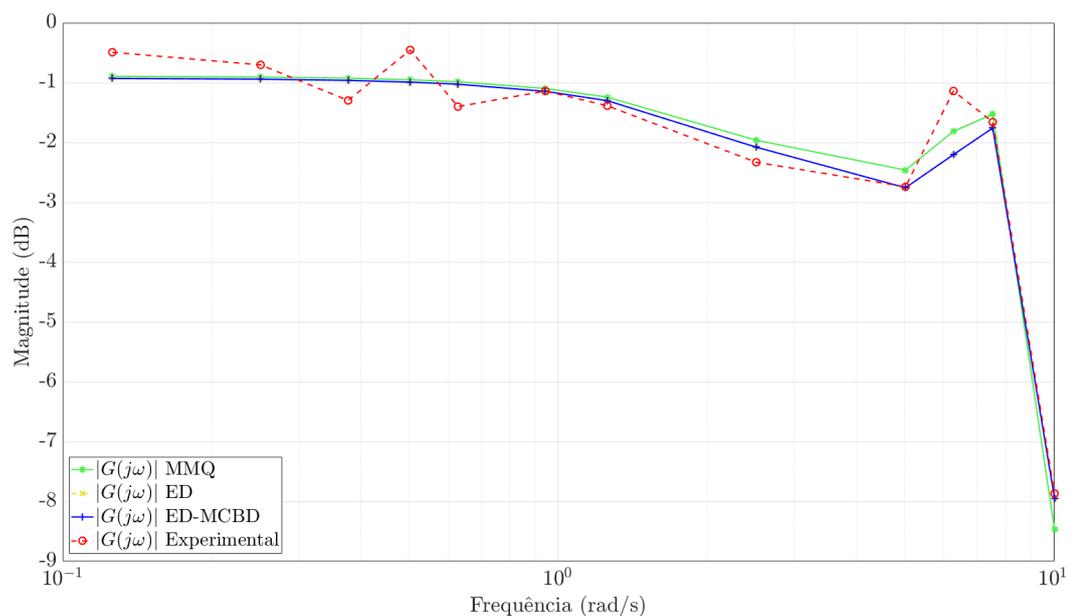


Figura 8 – Comparação dos diagramas de Bode do Exemplo 3 com os resultados produzidos com a ED e ED-MCBD.

3.4 Exemplo 4 - Redução de ordem

Seja o seguinte sistema de sétima ordem com fase não mínima (SKOGESTAD, 2003):

$$G_m(s) = \frac{(-0,3s + 1)(0,08s + 1)}{(2s + 1)(s + 1)(0,4s + 1)(0,2s + 1)(0,05s + 1)^3} \quad (3.6)$$

Em Yang e Seested (2013), propõe-se o emprego de algoritmo genético (*Genetic Algorithm* - GA) para redução de ordem com base na resposta em frequência. Naquele trabalho, a redução de ordem foi realizada com base no seguinte modelo:

$$G_m(s) = \frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)} e^{-st_d} \quad (3.7)$$

Portanto, o vetor a ser determinado é $\theta = [p_1 \ p_2 \ K \ t_d]^\top$. Um procedimento similar será realizado aqui para a ED-MCBD e a ED.

Os dados de resposta em frequência do modelo (3.7) são mostrados na Tabela 14.

Tabela 14 – Dados de resposta em frequência do Exemplo 4.

ω (rad/s)	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)^\circ$
0,0010	1,0000	-0,2275
0,0500	0,9937	-11,3516
0,1000	0,9752	-22,5763
0,1500	0,9460	-33,5602
0,2000	0,9084	-44,2117
0,2500	0,8647	-54,4662
0,3000	0,8173	-64,2855
0,3500	0,7680	-73,6538
0,4000	0,7187	-82,5726
0,4500	0,6704	-91,0552
0,5000	0,6239	-99,1220

Na Tabela 15 se encontra os parâmetros considerados nos algoritmos (ED-MCBD e ED).

Tabela 15 – Parâmetros adotados nos algoritmos para o Exemplo 4.

Parâmetro	ED-MCBD	ED
T_p	50	50
N_p	4	4
N_{GEN}	10^4	10^4
ϵ	10^{-5}	10^{-5}
α	10^{-3}	-
$W_m(\omega)$	100	100
$W_f(\omega)$	1	1
p_1 e p_2	[0 100]	[0 100]
ω_n	[0 100]	[0 100]
ξ	[0 1]	[0 1]
z	[-100 100]	[-100 100]
K	[-1000 1000]	[-1000 1000]
t_d	[0 50]	[0 50]

Os resultados obtidos pela otimização com ambos os métodos (ED e ED-MCBD) são resumidos nas Tabelas 16 e 17. A Tabela 16 mostra que o algoritmo de ED convergiu de forma constante para uma mesma solução, enquanto o algoritmo de ED-MCBD convergiu para soluções distintas. A Tabela 17 mostra que o algoritmo de ED-MCBD apresentou problemas de convergência. Uma análise criteriosa dos dados, o elevado número de reinícios da população e a maior complexidade da função objetivo associado. Indicam que ambos os algoritmos de ED se depararam com um número considerável de mínimos locais. Ao passo que, o algoritmo de ED canônico conseguiu escapar desses mínimos locais (o que pode não acontecer dependendo do problema), o ED-MCBD, por meio do operador de controle de diversidade, reiniciou a população para que nas próximas gerações tivesse uma chance maior de escapar desse mínimo local, o que pode ocasionar na dependência de um maior número de gerações para atingir a solução ótima. Os maiores valores médios de custo ótimo e de geração de convergência quando se comparado a ED, nos mostram que o operador de diversidade nem sempre obteve êxito em escapar dos mínimos locais.

Tabela 16 – Parâmetros identificados para o Exemplo 4.

Parâmetro	<i>GA Pulse-2</i>	$\bar{x}_{ED-MCBD}$	\bar{x}_{ED}	$\sigma_{ED-MCBD}$	σ_{ED}
p_1	0,56	0,49	0,51	0,03	$9,06 \cdot 10^{-14}$
p_2	0,78	7,88	0,91	17,75	$3,59 \cdot 10^{-13}$
K	1	3,37	0,46	7,42	$1 \cdot 10^{-13}$
t_d	0,85	1,01	0,9	0,27	$1,44 \cdot 10^{-13}$

Tabela 17 – Desempenho dos algoritmos na identificação do Exemplo 4.

Parâmetro	$\bar{x}_{ED-MCBD}$	\bar{x}_{ED}	$\sigma_{ED-MCBD}$	σ_{ED}
Número de gerações final	10000	10000	0	0
Número de avaliações de $J(\omega)$	500263	500000	484,65	0
Número de reinícios	5,26	-	9,69	-
Geração de convergência	1993,28	778,18	1447,51	116,5
Valor de custo ótimo ($J^*(\omega)$)	1,48	0,08	3,47	$2,63 \cdot 10^{-13}$

A Tabela 18 permite uma comparação do somatório dos erros absolutos de magnitude dos algoritmos de Evolução Diferencial com o modelo identificado em Yang e Seested (2013), denominado *GA Pulse-2*. A redução de ordem do sistema realizada pelo algoritmo de ED clássico obteve uma representatividade significativamente melhor quando comparado aos outros algoritmos.

Tabela 18 – Somatório dos erros absolutos de magnitude dos algoritmos na identificação do Exemplo 4.

Algoritmo	$\sum_{\omega=\omega_l}^{\omega_u} G(j\omega) - G_m(j\omega) $
ED-MCBD	0,94
ED	$3,16 \cdot 10^{-4}$
<i>GA Pulse-2</i>	0,2

A Figura 9 mostra a magnitude dos sistemas obtidos no Exemplo 4.

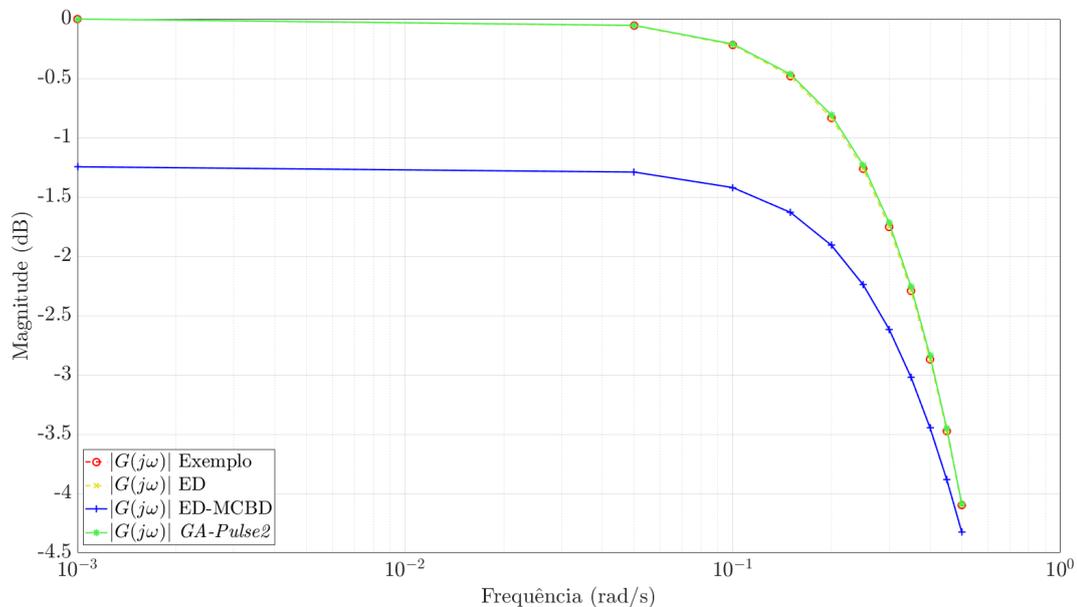


Figura 9 – Comparação diagramas de Bode do Exemplo 4 com os resultados produzidos com a ED, ED-MCBD e *GA Pulse-2*.

4 Conclusão

Este trabalho objetivou a identificação paramétrica de funções de transferência a partir de dados da resposta em frequência. Para isso, foi proposta uma modificação no tradicional algoritmo de ED. Esta consiste na inclusão de dois operadores ao algoritmo original, o de controle de diversidade e o de busca caótica. De forma geral, pode-se concluir que tais operadores proporcionam uma maior diversidade à população, o que, por consequência, amplia o espaço de busca possibilitando a obtenção de soluções melhores.

Em um contexto de funções objetivo com mínimo global bem definido como nos Exemplos 1 e 2. É possível observar que, mesmo o algoritmo de ED-MCBD levando mais gerações para convergir, o custo mínimo encontrado foi menor do que o obtido com a ED clássica. Os operadores resultaram em uma taxa de convergência de 100% da ED-MCBD nos dois exemplos, contra 88% da ED no Exemplo 1 e 40% no Exemplo 2.

No Exemplo 3, os desempenhos de ambos os algoritmos foram similares, sendo que o ED-MCBD demandou um menor número de gerações para convergir. Vale ressaltar que, a ED, e a ED-MCBD obtiveram uma representatividade ligeiramente melhor se comparadas ao Método dos Mínimos Quadrados.

O Exemplo 4 mostrou dificuldades do algoritmo de ED-MCBD em resolver problemas de otimização mais complexos, possivelmente com múltiplos mínimos locais. O operador de controle de diversidade provavelmente fez que com o algoritmo de ED-MCBD tivesse um elevado número de gerações para obtenção da solução ótima, sendo que, em alguns testes, o algoritmo foi interrompido ao atingir o número máximo de gerações previamente definido. Por isso, nesse exemplo, a média do custo mínimo encontrado pela ED foi significativamente menor em relação ao obtido com o ED-MCBD. O modelo obtido pelo algoritmo de ED canônico teve inclusive uma representatividade melhor que o algoritmo *GA Pulse-2*, proposto por Yang e Seested (2013).

Após a análise dos resultados do Exemplo 4, foi feita uma alteração no operador de controle de diversidade. Ao invés de somente guardar melhor indivíduo encontrado dentre todas as população geradas, o melhor indivíduo da população anterior é reintroduzido na nova população gerada. Os resultados preliminares dessa modificação mostraram convergência do ED-MCBD em todas as execuções do Exemplo 4. Um trabalho futuro poderá revisar os exemplos aqui apresentado com essa atualização da ED-MCBD comparando-se com a ED.

Trabalhos futuros também podem investigar procedimentos para atualizar dinamicamente o tamanho da população, reduzindo o número de indivíduos na população à medida que o algoritmo se aproxima da convergência. Isso auxilia na redução do custo

computacional. Também sugere-se emprego de técnicas de meta-heurística para a solução do problema de otimização (2.3)-(2.4), comparando com os resultados aqui obtidos.

Referências

- AGUIRRE, L. A. Identificação de sistemas não-lineares utilizando modelos NARMAX polinomiais - uma revisão e novos resultados. *SBA Controle & Automação*, v. 9, n. 2, p. 90–106, 1998.
- ALVES, G. B. *Propriedades das funções de base radiais aplicadas à identificação de sistemas dinâmicos não-lineares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.
- BJORKLUND, S.; LJUNG, L. A review of time-delay estimation techniques. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, p. 2502–2507, 2003.
- BRANDÃO, M. A. L. *Evolução diferencial melhorada implementada em processamento paralelo*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2014.
- CAREGNATO, A. *Multirate Control of 3DOF Helicopter*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2018. Disponível em: <<http://www.bdata.bibl.ita.br>>.
- CARVALHO, L. de et al. Evolução diferencial: Características dos métodos de solução para a programação da produção em ambientes *flow shop* permutacional. *XXXVI Encontro Nacional de Engenharia de Produção*, v. 39, 2016.
- COELHO, L. S.; MARIANI, V. C. Combining of chaotic differential evolution and quadratic programming for economic dispatch optimization with valve-point effect. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 21, n. 2, p. 989–996, 2006.
- CORRÊA, M. V. *Identificação caixa-cinza de sistemas não lineares utilizando representações narmax racionais e polinomiais*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2001.
- CORRÊA, M. V.; AGUIRRE, L. A. Identificação não-linear caixa-cinza: Um revisão e novos resultados. *Revista Controle e Automação*, v. 15, n. 2, p. 109–126, 2004.
- LAMPINEN, J.; ZELINKA, I. On stagnation of the differential evolution algorithm. *Proceedings of MENDEL 2000, 6th International Mendel Conference on Soft Computing*, p. 76–83, 2000.
- LEI, W.; QIDI, W. Linear system parameters identification based on ant system algorithm. *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications (CCA'01) (Cat. No.01CH37204)*, p. 401–406, 2001.
- LOBATO, F. S.; STEFFEN JR., V.; OLIVEIRA-LOPES, L. C. Uma abordagem evolutiva baseada em modelos caóticos de busca associado ao algoritmo de evolução diferencial. *17º Simpósio do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica*, p. 1–9, 2007.
- LUNDH, D.; OLSSON, B.; NARAYANAN, A. *Biocomputing and Emergent Computation*. Skövde: WORLD SCIENTIFIC, 1997.

- MARTINEZ, J. M.; SANTOS, S. A. *Metodos Computacionais De Otimizações*. Rio De Janeiro: Colóquio Brasileiro de Matemática, Apostilas, 1995. v. 20.
- MENDES, J. B. *Uma Abordagem Multiobjetivo para o Problema de Despacho de Caminhões em Minas a Céu Aberto*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2013.
- NASCENTES, C. L. *Avaliação do Desempenho do Algoritmo de Evolução Diferencial na Solução de Problemas de Otimização Dinâmica*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2013.
- OLIVEIRA, G. T. da S. *Estudo e aplicações da evolução diferencial*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2006.
- OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- PEARSON, R. K.; POTTMANN, M. Gray-box identification of block-oriented nonlinear models. *Journal of Process Control*, v. 10, n. 4, p. 301–315, 2000.
- RAIMANN, E. *Geração de Rotas Urbanas Virtuais usando Algoritmos Genéticos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2007.
- SANTOS, M. F.; LOBATO, F. S.; ASSIS, P. A. Q. de. Implementação de evolução diferencial modificada para identificação de sistemas a partir da resposta em frequência. *XXIII Congresso Brasileiro de Automática*, v. 2, n. 1, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.48011/asba.v2i1.1423>>.
- SKOGESTAD, S. Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *Journal of Process Control*, v. 13, n. 4, p. 291 – 309, 2003.
- STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution: A simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, v. 11, p. 341–359, 1997.
- YANG, Z.; SEESTED, G. T. Time-delay system identification using genetic algorithm - part one: Precise FOPDT model estimation. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 45, n. 20, p. 561–567, 2013.
- YOUSEFI, H.; HANDROOS, H.; SOLEYMANI, A. Application of differential evolution in system identification of a servo-hydraulic system with a flexible load. *Mechatronics*, v. 18, n. 9, p. 513 – 528, 2008.
- ZAHARIE, D. Critical values for the control parameters of differential evolution algorithms. *Proceedings of the 8th International Mendel Conference on Soft Computing*, v. 2, p. 62–67, 2002.