

RAFAEL LEAL LIMA

**UTILIZAÇÃO DE MATERIAL COM
CARACTERÍSTICAS PERIÓDICAS PARA REDUÇÃO
DE VIBRAÇÕES EM UM ROTOR EMBARCADO**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

2021

(Página Intencionalmente deixada em branco)

RAFAEL LEAL LIMA

**UTILIZAÇÃO DE MATERIAL COM CARACTERÍSTICAS
PERIÓDICAS PARA REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES EM UM ROTOR
EMBARCADO**

Dissertação apresentada ao
Programa de Pós-graduação em
Engenharia Mecânica da Universidade
Federal de Uberlândia, como parte dos
requisitos para a obtenção do título de
MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

Área de Concentração: Mecânica
dos Sólidos e Vibrações

Orientador: Prof. Dr. Aldemir Ap Cavalini Jr

UBERLÂNDIA – MG

2021

(Página Intencionalmente deixada em branco)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

L732u
2021 Lima, Rafael Leal, 1988-
 Utilização de material com características periódicas para redução de
 vibrações em um rotor embarcado [recurso eletrônico] / Rafael Leal Lima.
 - 2021.

 Orientador: Aldemir Aparecido Cavalini Junior.
 Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia.
 Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
 Modo de acesso: Internet.
 Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.5539>
 Inclui bibliografia.
 Inclui ilustrações.

 1. Engenharia mecânica. I. Cavalini Junior, Aldemir Aparecido,
 1983-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de
 Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU:621

(Página Intencionalmente deixada em branco)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4282 - www.posgrad.mecanica.ufu.br - secposmec@mecanica.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 584, COPEM				
Data:	30/04/2021	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:	11:30
Matrícula do Discente:	11822EMC008				
Nome do Discente:	Rafael Leal Lima				
Título do Trabalho:	UTILIZAÇÃO DE MATERIAL COM CARACTERÍSTICAS PERIÓDICAS PARA REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES EM UM ROTOR EMBARCADO				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se por meio de videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Professores Doutores: João Marcelo Vedovotto - FEMEC/UFU; Leopoldo Pisanelli Rodrigues de Oliveira - USP/São Carlos; e Aldemir Aparecido Cavalini Júnior - FEMEC/UFU, orientador do candidato. Ressalta-se que os Prof. Aldemir Aparecido Cavalini Júnior, João Marcelo Vedovotto e o Discente participaram da defesa por meio de videoconferência desde a cidade de Uberlândia/MG, e o Prof. Leopoldo Pisanelli Rodrigues de Oliveira desde a cidade de São Carlos/SP, em atendimento a Portaria nº 36, de 19 de março de 2020, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Júnior, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 30/04/2021, às 11:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Marcelo Vedovotto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 30/04/2021, às 11:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leopoldo Pisanelli Rodrigues de Oliveira, Usuário Externo**, em 30/04/2021, às 11:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2732779** e o código CRC **08DE49A7**.

(Página Intencionalmente deixada em branco)

Dedico essa dissertação de mestrado aos meus pais Olegário e Sandra, à minha noiva e futura esposa Layane, aos meus irmãos e a toda a minha família.

(Página Intencionalmente deixada em branco)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me guiado e me iluminado durante toda a minha trajetória.

Agradeço imensamente aos meus pais, Olegário e Sandra, por todo o amor, carinho, ensinamentos, apoio e incentivo que me deram para que eu conseguisse me tornar quem eu sou hoje. Agradeço aos meus irmãos Régis e Alex por todo o companheirismo que sempre tivemos.

A minha noiva e futura esposa Layane expresso a minha mais profunda e eterna gratidão, por todos os momentos de alegria, companheirismo, carinho e amor assim como todo o apoio que me deu para que conseguisse finalizar essa etapa do meu desenvolvimento acadêmico. Agradeço à minha sogra Lourdes que sempre nos apoiou em todos os momentos.

Agradeço aos meus avós Noé (*in memorian*), Maria, Juca e Geni por sempre terem me apoiado, me dado carinho e terem me ajudado a me desenvolver e moldar o meu caráter e os meus valores, me auxiliando a me tornar quem sou hoje.

Ao meu orientador Aldemir Ap Cavalini Jr expresso a minha mais sincera gratidão por todos os conselhos, ensinamentos, paciência, apoio e direcionamento em todos os momentos que necessitei. Muito obrigado por ter me auxiliado a conseguir finalizar mais uma etapa do meu desenvolvimento.

Agradeço aos meus tios, primos e a toda a minha família e amigos por todos os momentos felizes que compartilhamos, assim como por terem me ajudado a moldar os meus valores e o meu caráter e me ajudarem a me tornar em quem sou atualmente.

Aos meus colegas de pós graduação e graduação, em especial ao colega Marcelo Samora Sousa Júnior por todos os ensinamentos sobre rotores embarcados e dinâmica rotativa. Meus sinceros agradecimentos.

Aos professores e técnicos da Faculdade de Engenharia Mecânica que me ensinaram, auxiliaram e orientaram durante a minha graduação e pós graduação. Muito obrigado a todos vocês.

Agradeço ao apoio das pessoas do Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst) e do fornecimento de sua estrutura para utilização.

Agradeço à banca examinadora por auxiliar no desenvolvimento e evolução do desempenho dos trabalhos desenvolvidos.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia – Estruturas Inteligentes em Engenharia (INCT – EIE), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), agradeço pelo auxílio financeiro.

(Página Intencionalmente deixada em branco)

LIMA, R. L. **Utilização de material com características periódicas para redução de vibrações em um rotor embarcado**. 2021. 105 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

Resumo

Esta dissertação apresenta o modelo numérico da atenuação de ondas elásticas em um rotor embarcado com base de materiais periódicos fonônicos, materiais que possuem a propriedade de atenuar ondas mecânicas em bandas de frequência específicas. A utilização de bases periódicas em rotores embarcados visa controlar o nível de excitações externas aplicadas na base do rotor, como ocorre em motores aeronáuticos, reduzir os efeitos de excitações externas no acabamento de máquinas ferramentas e aumentar a durabilidade de sistemas rotativos. Nesse estudo foram avaliados dois tipos de materiais fonônicos, o primeiro deles utiliza o mecanismo de espalhamento de Bragg e é composto por malhas (*lattices*) de chumbo e epóxi, e o segundo utiliza o mecanismo de ressonância local sendo composto por malhas de chumbo e um conjunto massa mola (ressonador) em paralelo às suas células unitárias. O diagrama de dispersão do material periódico de Bragg apresentou uma banda proibida entre 448 a 2587 Hz, o material fonônico com ressonadores internos apresentou uma banda de atenuação nas proximidades da frequência de 60 Hz. No interior da banda de atenuação de ondas elásticas para cada um dos materiais periódicos calculados identificou-se uma redução significativa das vibrações causadas pelas excitações de base, no entanto, ainda foi encontrado um nível significativo de vibrações causado pelos componentes internos do rotor (massa de desbalanceamento, peso dos componentes, e deformação elástica do eixo) da ordem de 10^{-4} metros. Nas simulações realizadas estimou-se o comportamento vibratório de um rotor embarcado submetido a excitações de base em bases contínuas e periódicas que utilizam o mecanismo de espalhamento de Bragg e de ressonância local, nessas simulações foi verificada uma redução significativa das amplitudes das respostas de deslocamento do disco do rotor embarcado nas frequências que se encontram no interior da banda proibida das bases fonônicas.

Palavras chave: Material periódico; material fonônico; mecânica rotativa; rotor embarcado; método de elementos finitos; atenuação de vibrações.

(Página Intencionalmente deixada em branco)

LIMA, R. L. **Vibration control of onboard rotors using periodic materials**. 2021. 105 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia.

Abstract

This work presents an elastic wave attenuation numerical method for onboard rotors with periodic material bases, materials with the ability to attenuate mechanical waves within certain frequency bands (bandgaps). Periodic bases are used to reduce the effects of external forces within onboard rotors, such as in aeronautical turbines, and the quality of machine tools finishing. In this study, two kinds of phononic materials were studied, the first one uses the Bragg Scattering mechanism and is composed of layers (lattices) of lead and epoxy, and the other one uses the local resonance mechanism being composed of lead lattices and a parallel mass-spring assembly. The dispersion diagram of the Bragg scattering phononic material shows a bandgap between the frequencies of 448 and 2587 Hz, and the locally resonant material presents a bandgap in the neighborhood of 60 Hz. Within its bandgap the periodic materials presented a significant reduction of the displacement produced by the base, however, the periodic base cannot affect the vibration generated by the internal components of the rotor (imbalance mass, components weight and elastic deflection), the displacement produced by the components of the rotor is of 10^{-4} meters. The simulations evaluated the vibrating behavior of an embedded rotor submitted to base excitations in continuous and periodic bases using the Bragg scattering and locally resonant materials, and the simulation results showed a significant reduction in the displacement amplitude of the periodic onboard rotor disc within its bandgaps frequencies.

Keyword: Periodic material; phononic crystal; rotative dynamics; onboard rotor; finite element method; vibration attenuation.

(Página Intencionalmente deixada em branco)

Lista de Figuras

Figura 1: Rotor esquemático (PEREIRA, 2005)	2
Figura 2. (a) Estrutura de um material fotônico ternário; (b) Transmitância das ondas na estrutura periódica em função da frequência com uma banda proibida entre as frequências de 0,6 a 1,0 GHz. Adaptado de (JIANG, 2004; BANERJEE, 2009).....	4
Figura 3. (a) Exemplo de uma estrutura periódica de um material fonônico; (b) Transmissão da deformação produzida na estrutura, evidenciando a banda proibida. Adaptado de (HUSSEIN, 2014, apud BADREDDINE ASSOUAR, 2012).....	5
Figura 4. (a) Célula unitária e estrutura de um material com ressonância local; (b) Transmitância e refletância da onda em função da frequência. Adaptada de (HUSSEIN, 2014; HONG GANG, 2006).	6
Figura 5: Representação de um rotor	7
Figura 6: Diagrama de dispersão de uma malha diatômica. Adaptado de (RUZZENE, 2019)	12
Figura 7: Esquemática de uma estrutura periódica que possui como célula unitária a geometria básica mostrada à esquerda. Adaptado de (MALDOVAN, 2009)	13
Figura 8: Malha bidimensional pontual de cristal periódico. Adaptado de (MALDOVAN, 2009)	13
Figura 9: Diagrama de Dispersão (RUZZENE, 2019).	15
Figura 10: Representação de uma malha diatômica (HUSSEIN, 2014).	16
Figura 11: Diagrama de Dispersão de uma malha diatômica pelo método direto. Adaptado de (WEN, 2008).....	17
Figura 12: Diagrama de Dispersão de uma malha unidimensional bi-material obtido pelo método inverso. Adaptado de (RUZZENE, 2019).	18
Figura 13: Diagrama de Dispersão e resposta em frequência à uma excitação harmônica para um material periódico com três componentes. (a) Diagrama de dispersão. (b) Amplitude da resposta em frequência a uma excitação harmônica em dB. Adaptado de (WEN, 2008)	19
Figura 14. Propagação de ondas elásticas planas transversais e longitudinais em um sólido cristalino bidimensional, as ondas se propagam horizontalmente com vetor de onda (κ). (a) Distribuição dos átomos no material cristalino. (b) Propagação de onda elástica plana transversal. (c) Propagação de onda elástica plana longitudinal. (Maldovan, 2009)	20
Figura 15: Digramas de dispersão de banda (a) Material fonônico com bandas proibidas induzidos pelo mecanismo de espalhamento de Bragg e (b) material fonônico apresentando	

uma banda proibida induzida por ressonância interna antes de apresentar o espalhamento de Bragg. Adaptado de (FRAZIER, 2015).....	24
Figura 16: Comportamento de ondas em 3 situações diferentes no interior do material fonônico unidimensional. (a) Modo propagativo, (b) modo evanescente, (c) modo de não decaimento. Medições realizadas no tempo $t=0$ (curva em preto) e $t=T/5$ (curva em vermelho). (FRAZIER, 2015).....	25
Figura 19: Estrutura periódica massa mola infinita (WEN, 2008).	27
Figura 20: Discretização de um material fonônico unidimensional (WEN, 2008).....	29
Figura 21: Modelo representativo de um material periódico com amortecimento. (FRAZIER, 2015).....	30
Figura 22: Estrutura periódica utilizada (CAO,2009).	33
Figura 23: Modelo de estrutura periódica considerada para cálculo das bandas proibidas utilizada por Cao (2009) e Jensen (2003).	35
Figura 22: Representação de um material fonônico que utiliza um ressonador interno. Adaptado de (HUSSEIN, 2014).	36
Figura 23: Diagrama de dispersão de um material fonônico com ressonador interno. Curvas tracejadas representam um material não amortecido, curva em vermelho representa o efeito do amortecimento no fenômeno de ressonância interna.	37
Figura 24: Representação Esquemática do rotor (CAVALINI JR., 2017).	39
Figura 25: Representação do rotor embarcado com os eixos de referência utilizados para derivar a equação do movimento (DUCHEMIN,2006).....	40
Figura 26: Transformação de coordenadas do referencial R_s ao referencial R	40
Figura 27: Transformação de coordenadas do referencial R_0 ao referencial R_s	41
Figura 28: Graus de liberdade (GDLs) associados a um elemento de eixo (CAVALINI JR., 2016).....	43
Figura 29: Representação de um ponto arbitrário B na seção transversal do eixo (LALANNE; FERRARIS, 1998).	44
Figura 30: Representação do elemento de disco (CAVALINI JR., 2016).	45
Figura 31: Representação esquemática de um mancal de rolamento (CAVALINI JR., 2016).....	46
Figura 32: Massa de desbalanceamento em função do centro do eixo (CAVALINI JR., 2016).....	47
Figura 33: Representação do rotor embarcado com os eixos de referência utilizados para derivar a equação do movimento. Adaptado de (DUCHEMIN,2006).....	48
Figura 34: Rotor embarcado com base periódica esquemático que utiliza o fenômeno de espalhamento de Bragg.....	54

Figura 35: Rotor com base periódica em escala real	55
Figura 36: Rotor embarcado com base periódica com ressonador interno	56
Figura 37: Visão lateral de um rotor embarcado com base periódica com ressonadores internos.....	57
Figura 38: Rotor embarcada em base contínua de chumbo.....	57
Figura 39: Vista lateral do rotor embarcado a ser simulado com dimensões em milímetros.	59
Figura 40: Diagrama de Dispersão do material periódico calculado através do método de Frazier.	63
Figura 41: Deslocamento do material periódico em decibéis (m).	64
Figura 42: Diagrama de dispersão de um material fonônico com ressonância local. ..	65
Figura 43: Diagrama de dispersão de um material fonônico com ressonância local aproximado, mostrando a banda proibida em 60 Hz.....	65
Figura 44: Deslocamento do material com ressonador interno em decibéis (m).	66
Figura 45: Amplitude do deslocamento do material contínuo em decibéis (m).	67
Figura 46: Representação do rotor simulado	68
Figura 47: Diagrama de Campbell do rotor simulado	69
Figura 48: Direção x (u).....	70
Figura 49: Direção z (w)	70
Figura 50: Vibração de base do rotor com base contínua.	71
Figura 51: Vibração de base do rotor com base periódica de Bragg.	72
Figura 52: Vibração de base do rotor com base periódica com ressonância local.	73
Figura 53: Deslocamento (<i>u</i>) do disco do rotor com base contínua na direção x para a frequência de 60 Hz.....	74
Figura 54: Deslocamento (<i>w</i>) do disco do rotor com base contínua na direção z para a frequência de 60 Hz.....	74
Figura 55: Movimentação (<i>u</i>) do disco do rotor com base periódica de Bragg na direção x para a frequência de 60 Hz.	75
Figura 56: Deslocamento (<i>w</i>) do disco do rotor com base periódica de Bragg na direção z para a frequência de 60 Hz.	76
Figura 57: Deslocamento (<i>u</i>) do disco do rotor com base periódica com ressonância local na direção x para a frequência de 60 Hz.	77
Figura 58: Movimentação (<i>w</i>) do disco do rotor com base periódica com ressonância local na direção z para a frequência de 60 Hz.	77
Figura 59: Resposta da base contínua a uma excitação de 1000 Hz.....	79

Figura 60: Resposta a uma excitação de 1000 Hz do material fonônico de Bragg proposto.....	80
Figura 61: Resposta do material fonônico com ressonadores internos a uma frequência de 1000 Hz.	80
Figura 62: Deslocamento (u) do disco do rotor com base contínua na direção x para a frequência de 1000 Hz.....	81
Figura 63: Vibrações (w) do disco do rotor com base contínua na direção z para a frequência de 1000 Hz.....	82
Figura 64: Movimentações (u) do disco do rotor com base fonônica bimaterial na direção x para a frequência de 1000 Hz.	83
Figura 65: Deslocamentos (w) do disco do rotor com base fonônica bimaterial na direção z para a frequência de 1000 Hz.	83
Figura 66: Movimentações (u) do disco do rotor de base fonônica com ressonância local na direção x para a frequência de 1000 Hz.....	84
Figura 67: Vibrações (w) do disco do rotor de base fonônica com ressonância local na direção z para a frequência de 1000 Hz.....	85
Figura 68: Resposta da base de material contínuo a uma excitação na frequência de 2600 Hz.	86
Figura 69: Resposta do material fonônico bidimensional a uma excitação na frequência de 2600 Hz.	87
Figura 70: Resposta do material fonônico com ressonadores internos a uma frequência de 2600 Hz.	88
Figura 71: Vibrações (u) do disco do rotor de base contínua na direção x para a frequência de 2600 Hz.....	89
Figura 72: Movimentações (w) do disco do rotor de base contínua na direção z para a frequência de 2600 Hz.....	90
Figura 73: Deslocamento (u) do disco do rotor de base fonônica bimaterial na direção x para a frequência de 2600 Hz.....	91
Figura 74: Vibrações (w) do disco do rotor de base fonônica bimaterial na direção z para a frequência de 2600 Hz.....	91
Figura 75: Deslocamento (u) do disco do rotor de base fonônica com ressonância local na direção x para a frequência de 2600 Hz.....	92
Figura 76: Movimentações (w) do disco do rotor de base fonônica com ressonância local na direção z para a frequência de 2600 Hz.....	93
Figura 77: Deslocamento em dB do material periódico de Bragg em função da frequência (Hz) com um fator de amortecimento (ξ_s) de 5%.	96

(Página Intencionalmente deixada em branco)

Lista de Tabelas

Tabela 1: Propriedades do material fonônico longitudinal selecionado	58
--	----

(Página Intencionalmente deixada em branco)

Lista de Símbolos

m – massa

k – coeficiente de rigidez

ω – frequência angular

E - coeficiente de elasticidade do material

A - área de seção transversal da barra,

a - constante de malha

ρ - densidade do material

u_n - deslocamento na direção x

κ - constante de propagação.

Ω - frequência de rotação

ω_0 - frequência natural

c_T – velocidade transversal da onda

c_L – velocidade longitudinal da onda

λ e μ - coeficientes de Lamé,

ν - razão de Poisson

$V(x)$ – função energia potencial

$\psi(x)$ - função de onda independente do tempo em função da coordenada x

$E(\psi)$ - energia do sistema

M - matriz de massa

D - matriz de amortecimento

D_g – matriz do efeito giroscópico

K - matriz de rigidez

δ – vetor de deslocamentos generalizados

W - peso do sistema rotativo

F_u - forças de desbalanceamento

D_i – matriz de amortecimento interno

K_i - matriz de rigidez internas

ε – deformação

U – energia potencial

T_S – energia cinética do eixo

T_D – energia cinética do disco

σ - tensões

I_{Dx} - momento de inércia com relação ao eixo x

I_{Dy} - momento de inércia com relação ao eixo y

I_{Dz} - momento de inércia com relação ao eixo z

δW – trabalho virtual

F_{mu} – força generalizada de desbalanceamento

F_{mw} – força generalizada de desbalanceamento

ψ, θ e ϕ – ângulos do movimento relativo do sistema de referência **R_s** em relação ao referencial **R**

α, β e γ – ângulos do movimento relativo do sistema referência **R₀** para o sistema de coordenadas **R_s**.

I – matriz identidade

T – matriz de transferência

S – área de seção transversal

\vec{u}_1 - deslocamento longitudinal no domínio do tempo

x - posição espacial

t - tempo.

$i = \sqrt{-1}$ – coeficiente imaginário

P_m - coeficiente das séries de Fourier

R – refletância

A e **B** – matrizes de espaço de estados

C – matriz de amortecimento

c – coeficiente de amortecimento

ξ_s – fator de amortecimento

f – vetor de forças

$\varphi(r)$ - ângulo de torção do anel do disco,

$T(r, t)$ – torque

k_φ - número de onda torsional é $k_\varphi = \omega/c$

G – módulo de cisalhamento

D* e **K*** - matrizes do movimento de base

F* - vetor de forças do movimento de base

(Página Intencionalmente deixada em branco)

Sumário

CAPÍTULO I.....	1
Introdução.....	1
1.1. Contextualização.....	2
1.2. Objetivos.....	8
1.3. Escopo do Trabalho.....	9
1.4. Organização do Trabalho.....	9
CAPÍTULO II.....	11
<i>Conceitos básicos</i> em materiais periódicos	11
2.1. Materiais periódicos	11
2.2. Mecanismo de espalhamento de Bragg.	21
2.3. Mecanismo de ressonância local	22
2.4. Diagramas de dispersão em materiais fonônicos	22
CAPÍTULO III.....	26
Propagação de ondas elásticas em materiais fonônicos e características dinâmicas de rotores embarcados.....	26
3.1. Métodos de cálculo da propagação de vibrações ondas elásticas planas (vibrações) em materiais fonônicos.....	26
3.1.1. Estrutura de banda de vibrações e bandas proibidas de uma estrutura massa mola periódica infinita	27
3.1.2. Bandas proibidas vibracionais longitudinais e propriedades de atenuação de vibração de um material fonônico unidimensional.....	28
3.1.3. Propagação de ondas elásticas em cristais fonônicos unidimensionais não amortecidos	30
3.1.4. Cálculo da propagação de ondas elásticas longitudinais através de associação de massas e molas pelo método de elementos finitos.....	32
3.1.5. Propagação de ondas elásticas longitudinais através da utilização de material periódico com ressonadores locais	36

3.2.	Método matemático para cálculo de respostas a excitações em rotores embarcados.....	37
3.2.1.	Equação do movimento.....	38
3.2.2.	Máquinas rotativas com rotores embarcados.....	39
3.2.3.	Equações de Energia.....	42
3.2.3.1.	Eixo.....	43
3.2.3.2.	Disco.....	45
3.2.3.3.	Mancais.....	46
3.2.3.4.	Massa de desbalanceamento.....	47
3.2.3.5.	Rotores embarcados.....	48
3.2.4.	Método de Elementos Finitos aplicado em um rotor embarcado.....	50
CAPÍTULO IV.....		54
Simulação de um rotor embarcado com base de material fonônico.....		54
4.1.	Parâmetros de simulação das bases de material fonônico.....	58
4.2.	Parâmetros do rotor embarcado simulado.....	59
4.3.	Hipóteses.....	59
Capítulo V.....		61
Resultados.....		61
5.1.	Diagramas de dispersão e propriedades de atenuação nos materiais periódicos simulados.....	61
5.1.1.	Material fonônico construído com o fenômeno de espalhamento de Bragg.....	61
5.1.2.	Material fonônico com ressonadores internos.....	64
5.1.3.	Rotor embarcado com base contínua.....	66
5.2.	Simulações do rotor embarcado com bases periódicas.....	67
5.2.1.	Resposta do rotor sem excitações de base.....	68
5.2.2.	Frequência de atenuação do ressonador interno (60 Hz).....	71
5.2.3.	Frequência no interior da banda proibida do material fonônico de Bragg (1000 Hz).....	78
5.2.4.	Frequência no interior da zona ótica (2600 Hz).....	85

5.3. Discussão	94
CAPÍTULO VI	98
Conclusão.....	98
6.1. Perspectivas de Trabalhos Futuros	99
Referências bibliográficas.....	101

(Página Intencionalmente deixada em branco)

CAPÍTULO I

Introdução

O presente trabalho apresenta o efeito da atenuação de vibrações de base em rotores embarcados através da utilização de materiais periódicos fonônicos, que possuem a propriedade de atenuar a propagação de ondas elásticas ou acústicas em determinado intervalo de frequência.

A atenuação de ondas elásticas (vibrações) em máquinas rotativas, especialmente próximo as suas velocidades críticas, é essencial para garantir a durabilidade desses componentes. Os materiais fonônicos criam zonas de frequências de atenuação de vibrações (*bandgaps*) passivamente, possibilitando a redução do nível de vibrações em máquinas rotativas em faixas de frequência específicas, melhorando assim a sua durabilidade.

Durante a revisão bibliográfica realizada identificou-se uma grande utilização de materiais fonônicos para atenuação de vibrações em sistemas mecânicos, no entanto, quando se pesquisa sobre utilização de materiais fonônicos em sistemas rotativos, encontra-se uma quantidade pequena de trabalhos desenvolvidos, mostrando que existe uma ampla oportunidade de desenvolvimento de novas tecnologias para aplicação de cristais fonônicos em rotores.

Rotores são sistemas rotativos compostos por um eixo, um ou mais discos, mancais de suporte, uma massa de desbalanceamento e forças externas aplicadas, conforme mostrado pela Figura 1. Rotores embarcados permitem avaliar os efeitos das excitações sofridas pela base do sistema rotativo nos seus componentes. Segundo Samora (2017), existem poucas

publicações científicas que apresentam os efeitos de máquinas rotativas expostas a excitações de base.

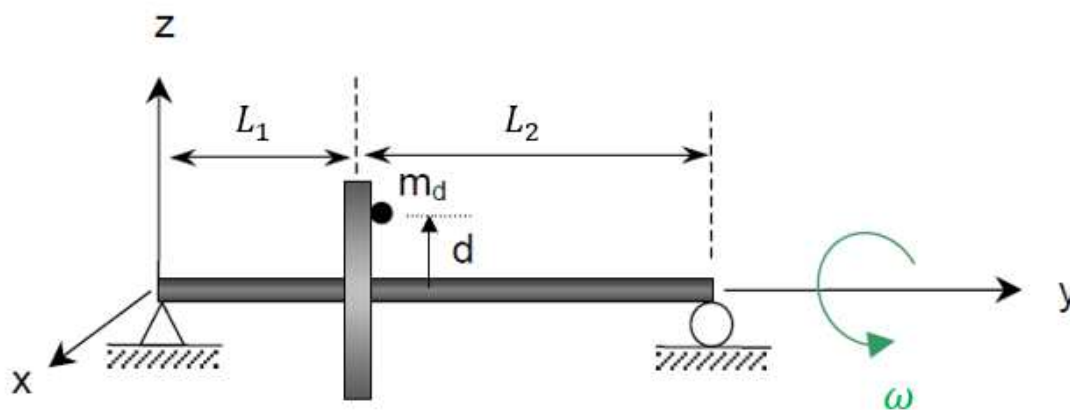


Figura 1: Rotor esquemático (PEREIRA, 2005)

Materiais periódicos fonônicos aplicados em bases de rotores permitem a atenuação de vibrações causadas por esforços externos indesejáveis e podem ser utilizados para a redução do impacto de esforços externos em motores aeronáuticos de propulsão a jato e a melhora do acabamento superficial em máquinas ferramentas através da redução dos níveis de vibração da base da máquina ferramenta.

Esse trabalho irá apresentar os conceitos e a formulação de materiais periódicos fonônicos, das bandas de propagação proibida (*bandgaps*) e da propagação de ondas nesses materiais para os mecanismos de ressonância local e de espalhamento de Bragg, os conceitos e formulação de rotores embarcados, os modelos de rotores embarcados com base de material fonônico desenvolvidos, as simulações realizadas, a discussão dos resultados e apresentar as conclusões do trabalho realizado.

1.1. Contextualização

Materiais periódicos são materiais que apresentam propriedades de inibir a propagação de ondas em determinadas frequências. Esses materiais se caracterizam por possuírem uma estrutura básica denominada de célula unitária que se repete

periodicamente no espaço, formando uma cadeia de células unitárias, chamadas de malha (*lattice*). As propriedades geométricas e físicas das células unitárias devem ser constantes no espaço (HUSSEIN, 2014).

Os materiais periódicos se dividem em materiais fonônicos e materiais fotônicos. Segundo Hussein et al. (2014) estes materiais inibem a propagação de ondas em faixas de frequências na qual uma onda é proibida de se propagar (bandas proibidas e de parada), os materiais fonônicos inibem a propagação de ondas mecânicas (elásticas ou acústicas) em frequências de 20 até 10^{12} Hz, os materiais fotônicos inibem a propagação de ondas eletromagnéticas em uma banda proibida (*bandgap*) em frequências de 10^9 a 10^{14} Hz.

Os materiais fonônicos são comumente divididos em duas categorias que são os materiais que utilizam os mecanismos de espalhamento de ondas de Bragg (*Bragg Scattering*) ou de ressonância local. (WEN, 2008)

As propriedades de atenuação de ondas nos materiais fotônicos são causadas pela incompatibilidade de impedância que ocorre nas fronteiras do material periódico, nas quais, parte das ondas incidentes são transmitidas ou refletidas e a interação entre essas ondas no interior de cada célula unitária produz interferências construtivas e destrutivas, gerando assim zonas de propagação proibida. (RUZZENE, 2019). A estrutura de um material fotônico ternário e a transmitância de ondas eletromagnéticas em um material fotônico binário são mostradas na Figura 2(a) e 2(b), respectivamente.

A Figura 2(a) apresenta a geometria de uma célula unitária ternária de um material periódico fotônico mostrando a repetição contínua no espaço dos 3 materiais presentes no material fotônico, e a Figura 2(b) mostra a transmitância das ondas eletromagnéticas em um cristal fotônico binário em função da sua frequência, mostrando regiões proibidas de propagação de ondas (*bandgaps*) entre 0,6 e 1,0 gigahertz devido à interação entre as ondas incidentes e refletidas nas interfaces entre os diferentes materiais.

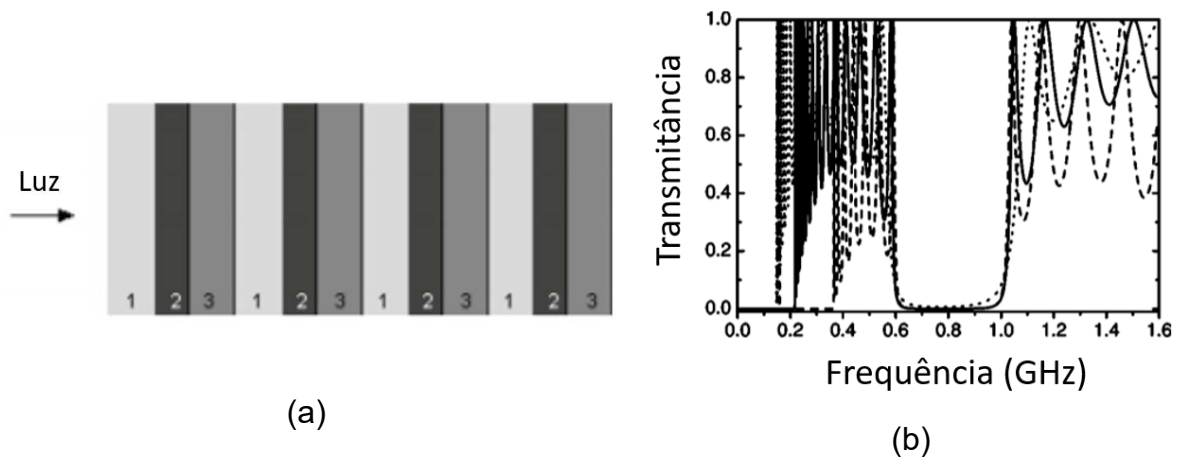
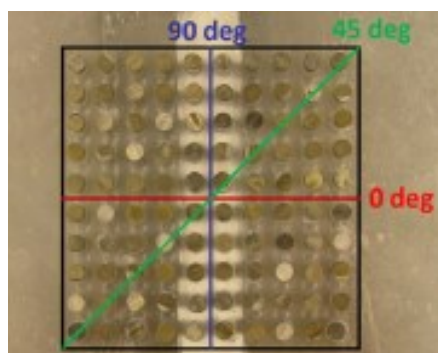
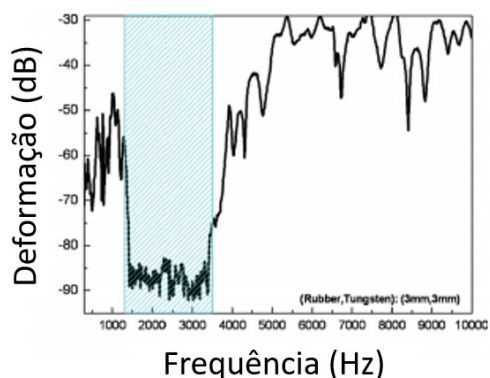


Figura 2. (a) Estrutura de um material fotônico ternário; (b) Transmitância das ondas na estrutura periódica em função da frequência com uma banda proibida entre as frequências de 0,6 a 1,0 GHz. Adaptado de (JIANG, 2004; BANERJEE, 2009).

Materiais fonônicos que utilizam o mecanismo de espalhamento de Bragg se comportam de maneira similar aos materiais fotônicos, nos quais a interação entre as ondas incidentes e as ondas refletidas nas fronteiras das estruturas fonônicas produz uma região proibida de propagação de ondas mecânicas. A Figura 3 (a) mostra um exemplo de material fonônico binário bidimensional composto por cilindros metálicos fixados em uma base polimérica que possui periodicidade nos planos x e y. Na Figura 3(b) é apresentado o gráfico transmissão de uma deformação na estrutura em função da frequência de excitação em um material periódico binário, o gráfico mostra em azul a região de frequências de propagação proibida da estrutura fonônica construída, na faixa de frequências de 1200 a 3500 Hz.



(a)



(b)

Figura 3. (a) Exemplo de uma estrutura periódica de um material fonônico; (b) Transmissão da deformação produzida na estrutura, evidenciando a banda proibida. Adaptado de (HUSSEIN, 2014, apud BADREDDINE ASSOUAR, 2012).

Estruturas periódicas fonônicas com ressonância local possuem ressonadores em paralelo a cada célula unitária do material, e inibem a propagação de ondas nas proximidades da frequência natural desses ressonadores, como ilustrado na Figura 4(a). A Figura 4(b) apresenta a transmitância (curva contínua) e a refletância (curva tracejada) de um material fonônico com ressonadores internos em função da frequência, mostrando uma pequena faixa de frequência, nas proximidades de 650 Hz, nas quais ondas elásticas são proibidas de se propagar. Neste tipo de estrutura pode-se utilizar materiais piezoelétricos para sintonizar a frequência da banda proibida, possibilitando assim a realização de um controle ativo da faixa de frequências de propagação proibida.

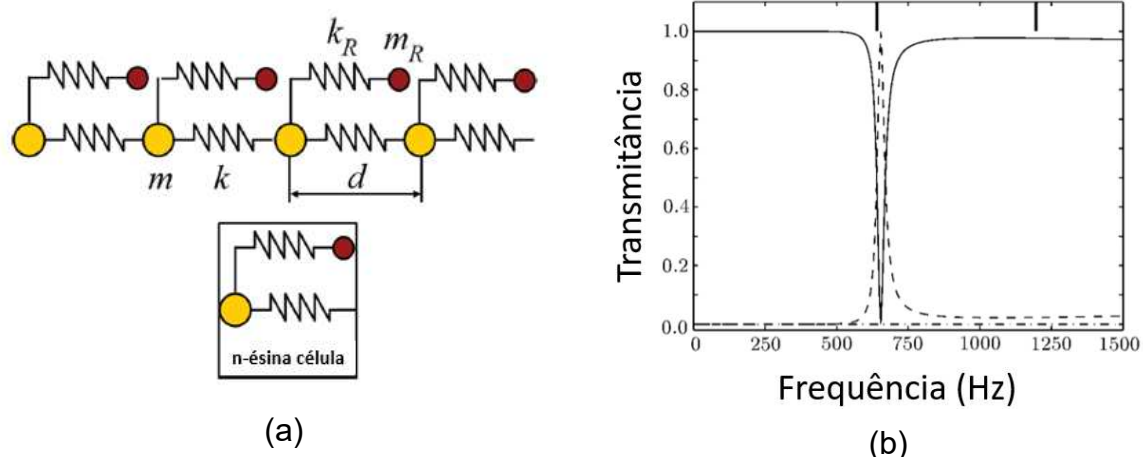


Figura 4. (a) Célula unitária e estrutura de um material com ressonância local; (b) Transmitância e refletância da onda em função da frequência. Adaptada de (HUSSEIN, 2014; HONG GANG, 2006).

Rotores são tipicamente compostos por um eixo circular, um disco circular, dois mancais, uma massa de desbalanceamento, o peso dos seus elementos e as forças externas aplicadas ao sistema, nesse modelo utiliza-se dois eixos de referência, o referencial inercial e um referencial fixo ao disco (LALANNE; FERRARIS, 1998), um rotor esquemático é ilustrado na Figura 5. O modelo matemático das equações de movimento de rotores é obtido através do balanço energético dos seus componentes, e é normalmente calculado numericamente através da análise de elementos finitos. Os rotores embarcados são formados pelos mesmos componentes, a diferença entre eles é que durante a análise dos seus movimentos considera-se um referencial adicional fixo a base do eixo do rotor, de forma a considerar as excitações sofridas pela base do sistema rotativo no cálculo das vibrações sofridas pelo conjunto (DUCHEMIN; BELIOZ; FERRARIS, 2006).

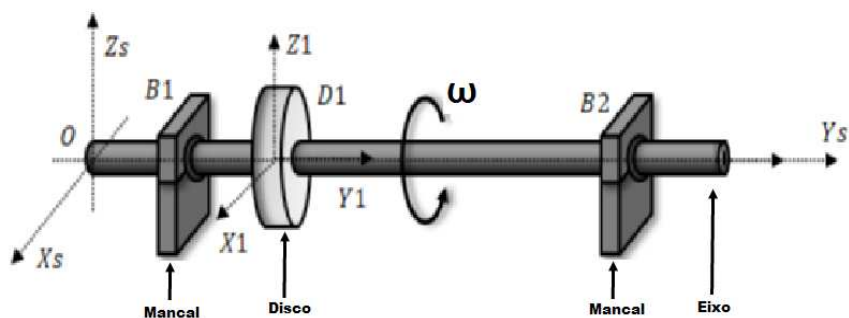


Figura 5: Representação de um rotor

Máquinas rotativas são utilizadas em várias aplicações industriais, como por exemplo: geradores elétricos, turbinas à vapor, turbocompressores, moendas de indústrias alimentícias, motores de navios, máquinas ferramentas, moinhos rotativos, dentre outros. Uma das principais aplicações da modelagem de sistemas rotativos como rotor embarcado se trata do motor aeronáutico de propulsão a jato, já que o seu comportamento é influenciado pelas excitações externas do avião.

Vibrações mecânicas produzem diversos tipos de problemas em máquinas rotativas, especialmente próximo ou sobre suas velocidades críticas (situações em que a velocidade de rotação se iguala às frequências naturais do rotor). O controle da amplitude dessas ondas é importante para melhorar a durabilidade dos equipamentos rotativos, assim como para assegurar que estes forneçam o desempenho adequado para as suas funções (ZHOU, 2001). Materiais periódicos possibilitam a criação de uma ou mais zonas de atenuação de vibrações (*bandgaps*), podendo solucionar de maneira passiva grande parte dos problemas produzidos pelas vibrações indesejadas nos equipamentos rotativos.

A utilização de materiais periódicos para a atenuação de ondas elásticas é relativamente recente, iniciou-se na década de 90, e é um campo em ampla expansão. Atualmente, encontra-se na literatura muitos trabalhos sobre definições teóricas e experimentais desse mecanismo, e a maioria das aplicações experimentais desse mecanismo na atenuação de ondas mecânicas elásticas está relacionada a movimentos translacionais.

Segundo Wen (2008) existiam poucos estudos experimentais nessa área no início do século XX, sendo raros os estudos que exploravam novas aplicações de materiais periódicos. No entanto, nos dias de hoje encontra-se uma grande variedade de trabalhos que utilizam as propriedades de materiais periódicos elásticos e acústicos para aplicações práticas. O trabalho de Ge (2017) afirma que a utilização de materiais fonônicos possui um grande potencial de desenvolvimento de novas aplicações práticas.

Na área de mecânica rotativa nota-se a presença de uma pequena quantidade de estudos científicos sobre a aplicação de materiais periódicos em máquinas rotativas. A maioria das pesquisas são voltadas para a atenuação de ondas elásticas em sistemas mecânicos translacionais e acústicos. Os artigos científicos que tratam da utilização de materiais periódicos em sistemas rotativos ou radiais mais relevantes encontrados foram: Basta; Ghommem & Emam (2020), Beli *et al.* (2018-a), Beli *et al.* (2018-b), Gao & Guan (2016), Li *et al.* (2018), Haisheng *et al.* (2014), Zhao *et al.* (2108) e Chai *et al.* (2016).

Nesse contexto, o presente trabalho apresenta o desenvolvimento conceitual de um absorvedor de vibrações periódico a ser aplicado em sistemas rotativos embarcados. Este sistema deve possuir a propriedade de atenuar as vibrações em faixas de frequências críticas para o equipamento, definindo assim o diagrama de dispersão necessário para o mesmo. Sendo assim, a principal contribuição deste trabalho é a determinação de um modelo de absorvedor de vibrações periódico a ser aplicado na base de sistemas rotativos embarcados, contribuindo assim para o aumento da durabilidade dos sistemas rotativos, melhora do acabamento superficial em máquinas ferramentas e reduzir os efeitos das vibrações causadas por interações externas em turbinas aeronáuticas.

1.2. Objetivos

O objetivo desta dissertação é desenvolver um mecanismo de atenuação de vibrações para sistemas rotativos embarcados através da utilização das propriedades das bandas proibidas (*bandgaps*) de materiais periódicos.

Para atingir esse objetivo será necessária a definição das frequências das respostas de vibração a serem atenuadas, bem como a geometria e as propriedades dos materiais a serem utilizados para obter-se as bandas proibidas adequadas, e a utilização de métodos numéricos para o cálculo das respostas de vibração do sistema rotativo embarcado, verificando-se assim a atenuação das excitações de base para as frequências de interesse.

1.3. Escopo do Trabalho

O presente trabalho possui como escopo as seguintes atividades: definir os conceitos básicos sobre materiais periódicos; definir os métodos para cálculo de diagramas de dispersão; apresentar um método numérico para cálculo da resposta de ondas elásticas longitudinais em materiais fonônicos através dos mecanismos de espalhamento de Bragg e de ressonância local, utilizar os conceitos de bandas proibidas para o controle passivo de vibrações de base em sistemas rotativos embarcados numericamente, e realizar a simulação das respostas de vibração de um rotor embarcado excitado por forças harmônicas aplicadas em uma base periódica.

1.4. Organização do Trabalho

Após a contextualização do problema a ser estudado, essa dissertação foi dividida em mais cinco capítulos, conforme descrito nesta subseção.

A Seção II discute os conceitos básicos de cristais fonônicos, explicando os fenômenos e teoremas que regem os materiais periódicos, assim como os métodos de cálculo dos diagramas de dispersão de materiais periódicos.

Os métodos numéricos que permitem estimar a atenuação de ondas elásticas longitudinais, transversais ou torcionais em um material fonônico através das propriedades de massa, rigidez e amortecimento dos sistemas são expostos na Seção III.

O equacionamento e o métodos de elementos finitos para estimar o comportamento dinâmico de um rotor embarcado também são mostrados na Seção III.

A seção IV e V apresentam os parâmetros de simulação do rotor embarcado com base periódica e os resultados das simulações numéricas realizadas com bases de material periódico e contínuo, mostrando a capacidade de atenuação de vibrações de um material

periódico em frequências que estejam no interior das bandas proibidas, e a influência dessa atenuação nas vibrações apresentadas no disco de um rotor embarcado.

O capítulo VI apresenta as conclusões do trabalho executado, assim como as perspectivas de trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

Conceitos básicos em materiais periódicos

Um material periódico é um material ou estrutura que exibe periodicidade espacial. Essa periodicidade pode ser criada por uma geometria específica, por uma composição de dois ou mais materiais, fases de materiais ou por condições de contorno que se repetem periodicamente no espaço. Essa unidade estrutural que se repete periodicamente no espaço é denominada de célula unitária (HUSSEIN, 2014).

Esse capítulo apresenta as definições sobre materiais periódicos e materiais fonônicos, assim como os teoremas, as propriedades físicas que regem o comportamento desses materiais e os fenômenos físicos que justificam as características desses materiais.

2.1. Materiais periódicos

Materiais periódicos possuem a propriedade de atenuar a propagação de ondas com frequências superiores a frequência de parada (*stop-band*) e em uma ou mais faixas de frequências proibidas (*bandgaps*). (HUSSEIN, 2014)

A Figura 6 ilustra um diagrama de dispersão mostrando os fenômenos de banda proibida e banda de parada. Ambos os conceitos são oriundos da física de estado sólido, que mostra que para estruturas periódicas infinitas qualquer onda plana que possua frequência no interior da banda proibida ou superior à banda de parada, não irá se propagar. O diagrama de dispersão apresentado apresenta as regiões com propagação proibida, a banda de parada e

as regiões com propagação permitida em função da frequência normalizada (Ω) na primeira zona de Brillouin, as linhas mostram as regiões de propagação permitida e os espaços vazios apresentam as regiões onde as ondas planas são proibidas de se propagar.

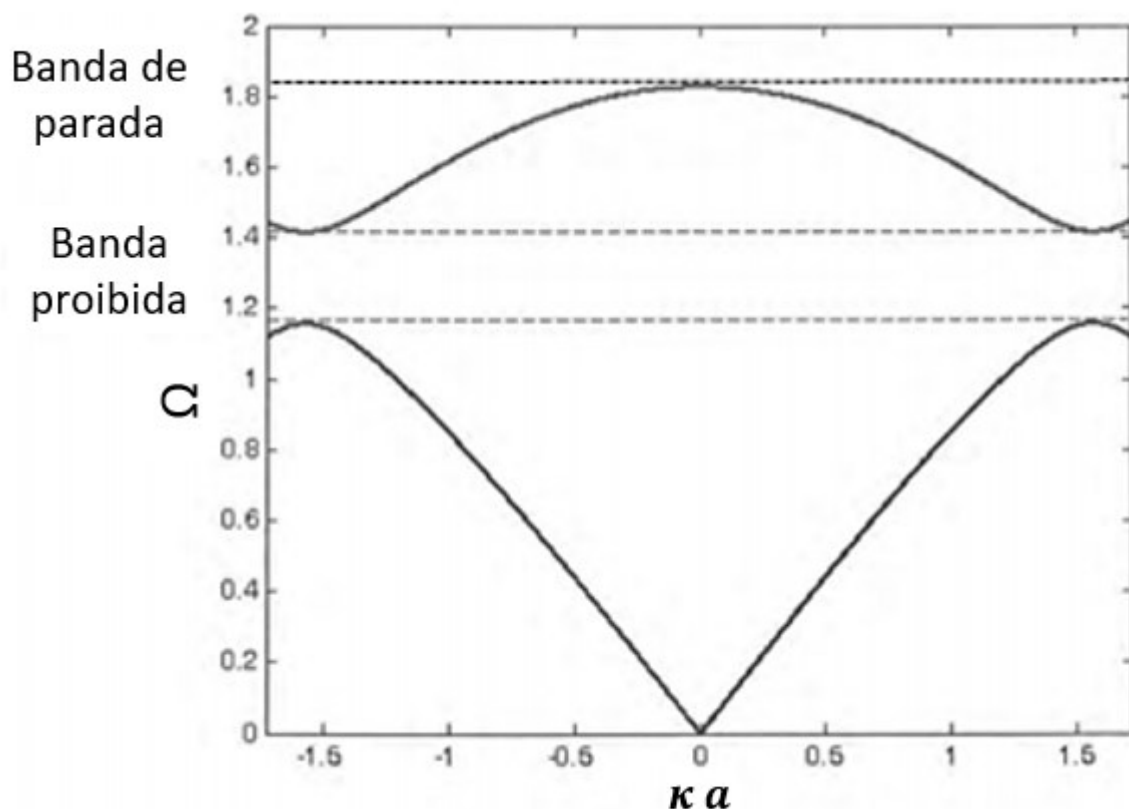


Figura 6: Diagrama de dispersão de uma malha diatômica. Adaptado de (RUZZENE, 2019)

A periodicidade desses materiais é uma fonte de incompatibilidade de impedância, produzindo interferências construtivas e destrutivas entre ondas incidentes e refletidas, gerando assim, bandas de frequências nas quais as ondas não se propagam (RUZZENE, 2019).

Toda estrutura periódica é composta por uma célula unitária, a estrutura básica do sistema periódico, que pode ser uma geometria específica, uma condição de contorno ou um conjunto de materiais que se repete periodicamente no espaço. Um exemplo de estrutura periódica bidimensional contendo quatro células unitárias é mostrado no lado direito da Figura 7, enquanto a célula unitária que compõe esse material periódico é mostrada à esquerda da Figura 7.

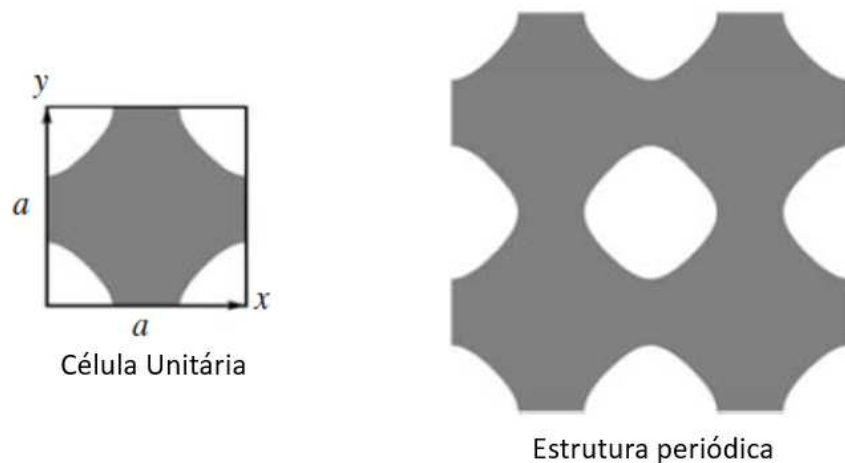


Figura 7: Esquematização de uma estrutura periódica que possui como célula unitária a geometria básica mostrada à esquerda. Adaptado de (MALDOVAN, 2009)

As células unitárias são dispostas espacialmente na estrutura periódica de tal maneira a respeitarem um padrão de posicionamento, sendo possível criar uma malha (*lattice*) que permita o cálculo das posições do centro de cada célula unitária na estrutura periódica, criando assim o conceito de frequência espacial ou número de onda (κ), ou seja, a repetição periódica de uma característica geométrica no espaço, podendo ser representada por pontos e definida através de uma equação que permita identificar a posição de cada um dos pontos centrais da malha pontual. A Figura 8 apresenta um exemplo de estrutura bidimensional e a sua malha pontual. (MALDOVAN, 2009)

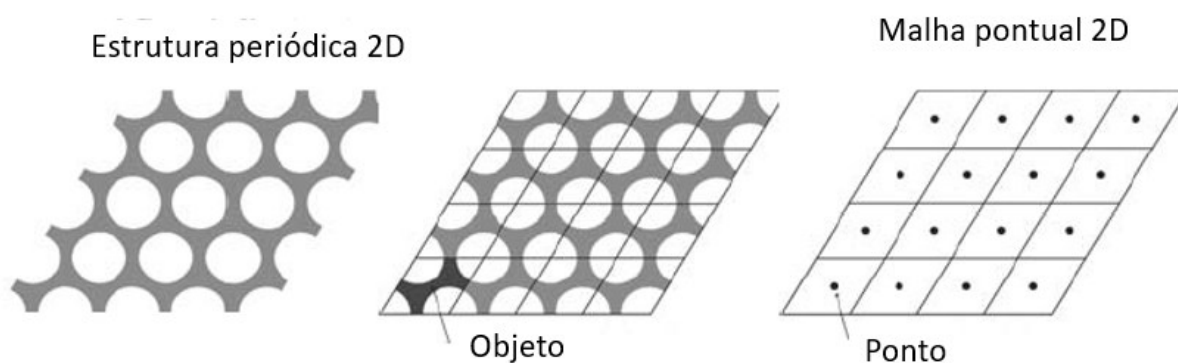


Figura 8: Malha bidimensional pontual de cristal periódico. Adaptado de (MALDOVAN, 2009)

A função periódica que representa a malha do material periódico pode ser reescrita como uma soma infinita de senos e cossenos, através da qual se realiza a expansão na série de Fourier da função periódica. Ao se aplicar a transformada de Fourier na malha pontual definida obtém-se o vetor da malha recíproca, que nos permite descrever ondas planas em função da sua frequência $\omega(\boldsymbol{\kappa})$. Em materiais periódicos as propriedades de dispersão da onda na malha recíproca são tais que uma frequência $\omega(\boldsymbol{\kappa}) = \omega(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{G})$, sendo \boldsymbol{G} um vetor de malha recíproco arbitrário, relacionado ao cristal periódico. (MALDOVAN, 2009)

A periodicidade das propriedades de dispersão permite que a maior parte das propriedades de propagação de ondas em materiais periódicos infinitos seja calculada apenas em um intervalo específico de vetores de onda ($\boldsymbol{\kappa}$), que é a chamada Zona Brillouin. (MALDOVAN, 2009)

A propagação de ondas em materiais periódicos segue os princípios do Teorema de Bloch. Esse teorema demonstra que nesses materiais um potencial periódico toma a forma de uma onda de propagação plana modulada pela periodicidade da malha, sendo assim definida a região fundamental do espaço $\boldsymbol{\kappa}$ que é $-\pi/a < \boldsymbol{\kappa} \leq \pi/a$, sendo a a constante da malha e $\boldsymbol{\kappa}$ o vetor de onda do material periódico. Essa região é conhecida como primeira zona de Brillouin. Esse teorema considera o material periódico como composto por infinitas malhas e demonstra que o espectro de frequências consiste em regiões com energia permitida, separadas por zonas evanescentes (GROSSO, 2014).

Os diagramas de dispersão de materiais periódicos se baseiam nessas definições, para definir as zonas de frequências nas quais a propagação de ondas será permitida.. A relação de dispersão é simétrica em $\boldsymbol{\kappa} = 0$ e periódica com um período 2π , contida na primeira zona de Brillouin, sendo este composto por uma parte real δ , que é a constante de atenuação, e por uma parte imaginária ϵ , que é a constante de fase (RUZZENE, 2019).

O diagrama de dispersão apresenta a frequência de propagação das ondas planas em função do seu vetor de onda ($\boldsymbol{\kappa}$), em materiais periódicos o diagrama de dispersão $\omega(\boldsymbol{\kappa})$ se repete periodicamente em função do vetor de onda, possuindo como região fundamental no espaço $\boldsymbol{\kappa}$ a região $-\pi/a < \boldsymbol{\kappa} \leq \pi/a$, como é mostrado na Figura 9. Esse gráfico apresenta a frequência normalizada do material periódico $\Omega = \omega/\omega_0$ em função do seu vetor de onda multiplicado pelo comprimento da malha em materiais periódicos unidimensionais e monomateriais.

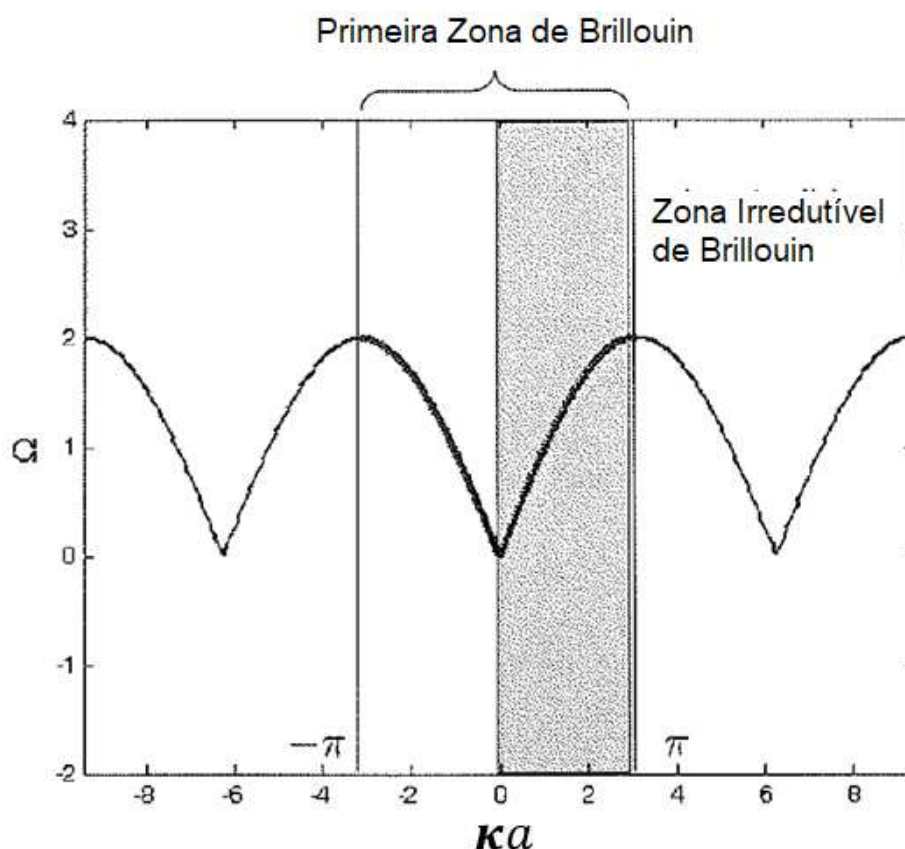


Figura 9: Diagrama de Dispersão (RUZZENE, 2019).

Na Figura 9 destacam- se também os conceitos da primeira zona de Brillouin, primeira região do espaço (κ) que descreve as propriedades de dispersão da onda em materiais periódicos, e a zona irredutível de Brillouin, menor região do espaço (κ) que descreve as principais propriedades de dispersão da onda em um material periódico.

Materiais periódicos podem ser uma repetição de estruturas idênticas no espaço de um mesmo material ou de dois ou mais materiais diferentes. Caso a célula unitária possua mais de um material, a propagação de ondas planas nesse material apresentará alguns fenômenos característicos de materiais periódicos, como a existência de uma zona proibida intermediária e de duas faixas de frequências nas quais as ondas são permitidas de se propagarem (ramo acústico e ramo ótico). A Figura 10 mostra um exemplo de um material periódico unidimensional composto por dois materiais.

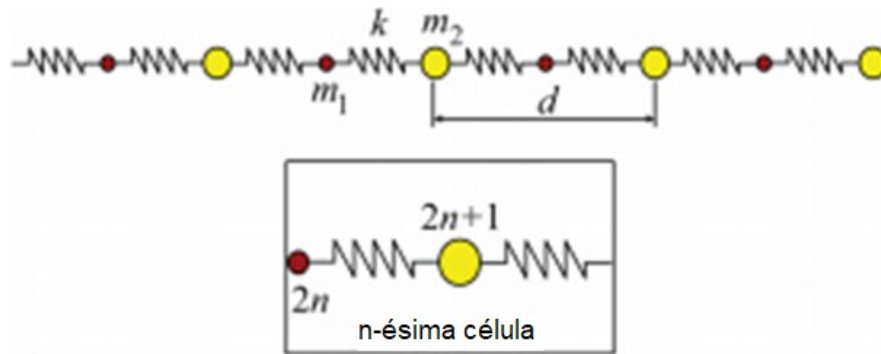


Figura 10: Representação de uma malha diatômica (HUSSEIN, 2014).

Materiais periódicos bimateriais possuem duas soluções não triviais para a sua equação de dispersão, ou seja, duas faixas de frequências distintas nas quais as ondas planas irão se propagar. Essas duas regiões são denominadas pela literatura como ramo acústico e ramo ótico. Elas definem as duas regiões onde a onda irá se propagar sem sofrer atenuação. Na faixa de frequências intermediárias à essas duas regiões aparecerá uma região de atenuação chamada de banda proibida, acima do ramo ótico encontra-se a região de atenuação conhecida como banda de parada. Essas regiões são ilustradas na Figura 11.

As regiões fundamentais de um diagrama de dispersão, que são as regiões com propagação permitida e proibida podem ser representadas de duas formas, através do método direto ou inverso.

O método direto ilustra apenas os valores reais da relação de dispersão, e representa o vetor de onda em todo o intervalo $-\pi/a < \kappa \leq \pi/a$, como ilustrado na Figura 11. Nesse gráfico as frequências com propagação permitida (ramo acústico e ótico) irão possuir valores reais associados no gráfico e as frequências com propagação proibida (banda proibida e banda de parada) não possuirão correspondentes.

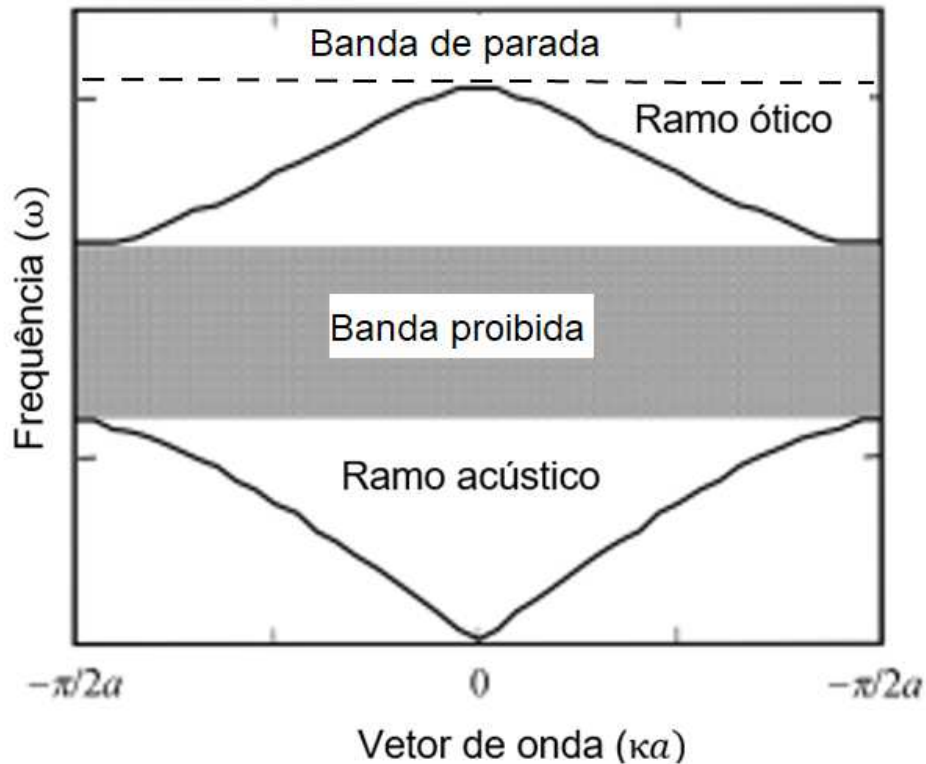


Figura 11: Diagrama de Dispersão de uma malha diatômica pelo método direto. Adaptado de (WEN, 2008).

O método inverso consiste na representação dos valores reais e imaginários do diagrama de dispersão, na parte direita do gráfico são mostradas as frequências nas quais o vetor de onda (κ) possui solução real, e na seção esquerda do gráfico são mostradas as regiões nas quais este possui solução imaginária. Ondas planas são permitidas de se propagar nas regiões de frequências nas quais o vetor de onda (κ) possui valor real (ramo acústico e ótico) e são proibidos em bandas nas quais o vetor de onda (κ) possui valor imaginário. O gráfico de dispersão inverso de um material periódico bimaterial unidimensional é mostrado na Figura 12. Para efeitos de comparação, este gráfico apresenta as regiões nas quais as ondas possuem propagação permitida (ramo acústico e ótico) e propagação proibida (banda de proibida e de parada).

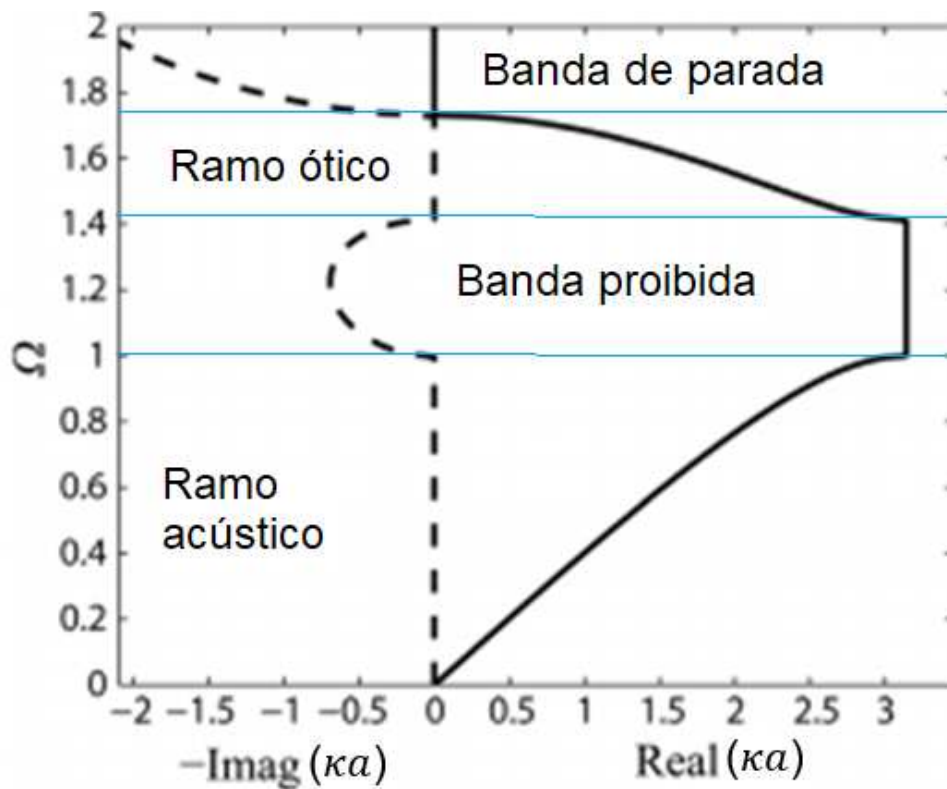


Figura 12: Diagrama de Dispersão de uma malha unidimensional bi-material obtido pelo método inverso. Adaptado de (RUZZENE, 2019).

Materiais periódicos compostos por uma quantidade superior à dois materiais na sua composição, apresentam mais de uma zona proibida de propagação de ondas. A Figura 13 (a) ilustra o diagrama de dispersão de uma estrutura periódica trimaterial e a parte (b) mostra a amplitude da resposta da onda em função da frequência. Nesse gráfico nota-se três regiões nas quais a onda se propaga normalmente e três regiões na qual a onda é atenuada durante a sua propagação.

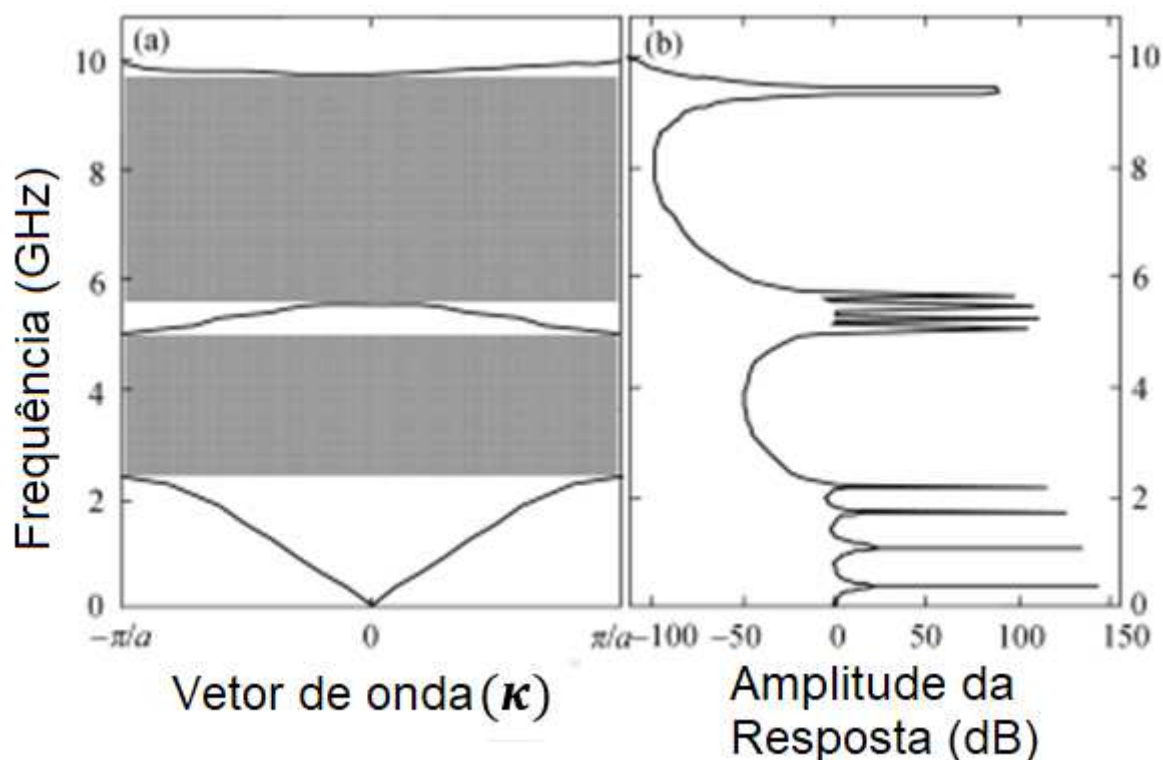


Figura 13: Diagrama de Dispersão e resposta em frequência à uma excitação harmônica para um material periódico com três componentes. (a) Diagrama de dispersão. (b) Amplitude da resposta em frequência a uma excitação harmônica em dB. Adaptado de (WEN, 2008)

Materiais fonônicos são estruturas periódicas construídas de dois ou mais materiais com diferentes propriedades mecânicas, que são utilizadas para controlar a propagação de ondas mecânicas (elásticas ou acústicas) em um determinado intervalo de frequência. As ondas mecânicas se propagam de forma diversa em materiais sólidos e líquidos. Caso essas ondas se propaguem em materiais sólidos elas são denominadas de ondas elásticas, e caso elas se propaguem em materiais fluidos elas são chamadas de ondas acústicas. (MALDOVAN, 2009)

Quando uma onda mecânica plana com vetor de onda (κ) se propaga em materiais sólidos homogêneos, como mostrado na Figura 14 (a), os átomos se movimentam de maneira coletiva e ordenada, como mostrado nas Figuras 14 (b) e (c). A quantidade na qual um átomo se desloca de sua posição de equilíbrio é representada pelo vetor deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Quando os átomos se movem perpendicularmente à direção de propagação da onda elástica plana ela é denominada de onda plana transversal como ilustrado na Figura 14(b). Caso eles se movam na direção de propagação da onda elástica plana, ela é chamada de onda plana longitudinal como apresentado na Figura 14(c). Ondas elásticas planas transversais e

longitudinais se propagam com diferentes velocidades, independentes uma da outra. (MALDOVAN, 2009)

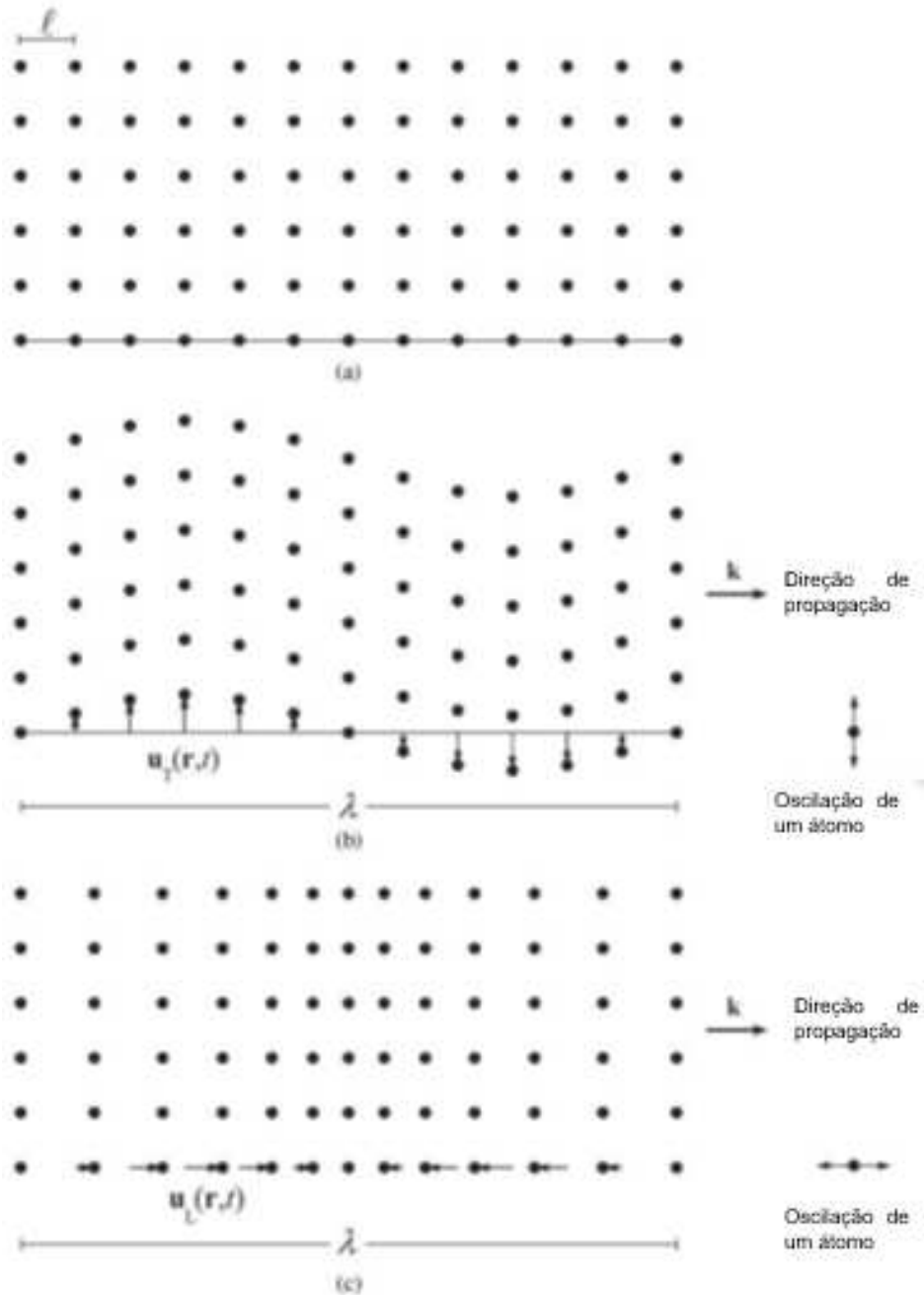


Figura 14. Propagação de ondas elásticas planas transversais e longitudinais em um sólido cristalino bidimensional, as ondas se propagam horizontalmente com vetor de onda (κ). (a) Distribuição dos átomos no material cristalino. (b) Propagação de onda elástica plana transversal. (c) Propagação de onda elástica plana longitudinal. (Maldovan, 2009)

Em materiais fluidos as ondas mecânicas se propagam como ondas acústicas, esses materiais não suportam deformações cisalhantes e por isso ondas mecânicas transversais não se propagam nesses materiais, permitindo a propagação apenas de ondas mecânicas longitudinais. (MALDOVAN, 2009)

Em estruturas periódicas fonônicas elásticas a origem das zonas de propagação proibida pode ocorrer principalmente por dois fenômenos, o mecanismo de espalhamento de Bragg e o mecanismo de ressonância local, como será explicado nas Seções 2.2 e 2.3.

2.2. Mecanismo de espalhamento de Bragg.

Na física do estado sólido quando uma determinada onda passa sobre um cristal ela é parcialmente refletida em todos os planos dos átomos. Expandindo esse conceito para as superfícies das interfaces em estruturas periódicas, nota-se que nesses materiais ondas propagantes e refletidas apresentam interferência destrutiva em algumas frequências definidas (bandas proibidas). Nesse caso, se a distância entre os planos for tal que a defasagem entre essas ondas se torne π , essas ondas irão se opor, proibindo a sua propagação no material. Esse fenômeno é chamado de mecanismo de espalhamento de Bragg. (FRAZIER, 2015).

O mecanismo de espalhamento de Bragg demonstra que interações entre materiais com variações periódicas de propriedades tornam as ondas elásticas incapazes de se propagar em certas frequências nesses materiais, ocorrendo o fenômeno das bandas proibidas. Nesse mecanismo, a frequência central da banda proibida de frequência mais baixa é aproximadamente o dobro da constante da malha (a). Isso é válido para materiais fonônicos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais (WEN, 2008).

Wen et al (2008) afirma que a ocorrência de bandas vibratórias proibidas através do mecanismo de espalhamento de Bragg estão relacionados aos parâmetros do material (densidade, módulo de elasticidade, rigidez a flexão, dentre outros) e parâmetros estruturais (constante da malha, fração de preenchimento, área de seção transversal, etc.). Segundo o autor, quanto mais distintos forem os parâmetros materiais mais fácil será a ocorrência de bandas proibidas, a frequência da banda proibida irá reduzir com o aumento da constante da malha, existe um valor de fator de preenchimento ideal para obter-se uma faixa de frequências mais extensa na banda proibida. Devido à alta velocidade das ondas elásticas em um meio comum, necessita-se de uma estrutura fonônica de grandes dimensões para produzir-se uma

zona proibida em baixas frequências, limitando a efetividade do mecanismo de espalhamento de Bragg para a atenuação de vibrações em baixas frequências.

Uma característica típica das zonas proibidas que seguem o mecanismo de espalhamento de Bragg é a variação suave do número de onda imaginário (κ_I) no espectro de frequências. Em razão da dependência do espaçamento dos constituintes na frequência da banda proibida, o tamanho de um material fonônico que apresenta uma banda proibida em baixas frequências se torna muito extenso. (FRAZIER, 2015)

2.3. Mecanismo de ressonância local

O mecanismo de ressonância local, consiste na utilização de um sistema massa mola, denominado de ressonador, em paralelo a cada célula unitária do material fonônico, nas frequências próximas à frequência natural do ressonador, este irá ressoar absorvendo energia da estrutura fonônica, proibindo assim a propagação de ondas elásticas planas nas redondezas da sua frequência natural.

Nesse mecanismo, ressonadores internos irão ressoar e reagir com longos comprimentos de ondas elásticas propagantes, e em certas frequências de estimulação levarão à restrição da propagação da onda. Como a frequência da banda proibida é muito próxima da frequência natural do dispersor ela pode levar a bandas proibidas de baixa frequência com certa facilidade (WEN, 2008). Esse mecanismo possibilita a utilização de materiais fonônicos para a atenuação de vibração de frequências mais baixas.

2.4. Diagramas de dispersão em materiais fonônicos

Os materiais fonônicos se diferenciam de materiais clássicos e compósitos pela habilidade de manipular ondas acústicas ou elásticas (vibração). Isso é obtido através de arranjos estruturais das fases materiais utilizando as interações fundamentais de ondas e materiais, incluindo interferência e ressonância. Devido à essas interações, um material fonônico é “transparente” para ondas vibracionais em certas bandas de frequências. A periodicidade é descrita pela célula unitária, um elemento estrutural fundamental repetitivo, sendo obtida com a repetição de uma característica comum, material ou geométrica, podendo ser unidimensional, bidimensional ou tridimensional (FRAZIER, 2015).

Os materiais fonônicos apresentam como característica bandas de frequência na qual ocorre a atenuação de ondas propagantes, devido à existência de zonas de incompatibilidade de impedância introduzidas periodicamente ao longo da estrutura. Essas zonas de incompatibilidade de impedância são denominadas de bandas proibidas (RUZZENE, 2019).

Interferência e ressonância são os dois mecanismos através dos quais materiais fonônicos exercem controle sobre a propagação de ondas de vibrações. Essas interações de onda-material servem como um meio de categorizar os materiais fonônicos em dois subgrupos: materiais fonônicos com espalhamento de Bragg ou com ressonador interno (FRAZIER, 2015).

Nesse contexto, as bandas proibidas no diagrama de dispersão de um material fonônico produzido devido ao mecanismo de espalhamento de Bragg é mostrado na Figura 15(a). Nessa situação, a dispersão consiste na distinção de regiões de frequência nas quais o vetor de onda (κ) é ou um valor real ou um valor complexo. Nos casos onde ele assume valor real, as bandas de frequência descrevem ondas vibracionais capazes de se propagar sobre o material fonônico, semelhante à luz com a presença de vidros. Nas bandas proibidas, o vetor de onda se torna complexo e retrata o fenômeno de interferência que proíbe a propagação de ondas elásticas nessas regiões de frequências, de maneira similar a um material opaco à luz. (FRAZIER, 2015)

Materiais fonônicos podem possuir uma combinação dos efeitos do espalhamento de Bragg e de ressonância local, nos quais a banda proibida mais baixa é tipicamente um resultado do fenômeno de ressonância local., como ilustrado na região em vermelho da Figura 15 (b), na qual um ressonador produz uma banda de ressonância que hibridiza a zona de frequência mais baixa, separando-a em duas bandas de propagação permitida e uma banda de propagação proibida. (FRAZIER, 2015).

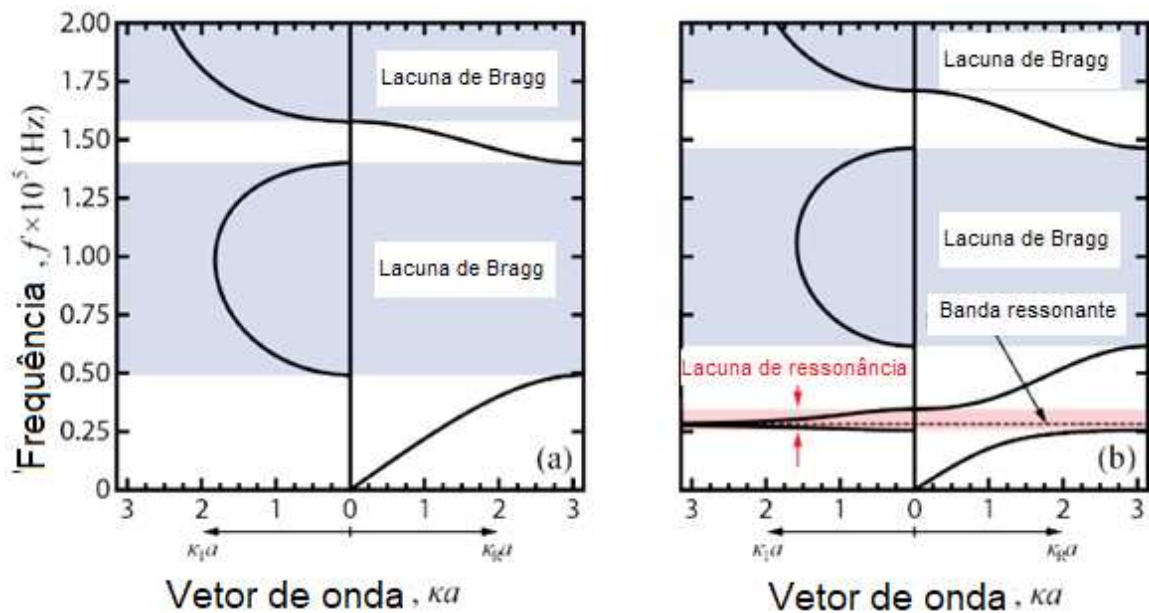


Figura 15: Diagramas de dispersão de banda (a) Material fonônico com bandas proibidas induzidos pelo mecanismo de espalhamento de Bragg e (b) material fonônico apresentando uma banda proibida induzida por ressonância interna antes de apresentar o espalhamento de Bragg. Adaptado de (FRAZIER, 2015)

Diversos métodos foram desenvolvidos para calcular os diagramas de dispersão de ondas elásticas, dentre os quais podemos destacar o método da matriz de transferência (TM), o método de expansão de onda plana (PWE), o método da teoria do espalhamento múltiplo (MST), o método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD), e o método variacional (VW). (YAN, 2007)

Essa dissertação irá utilizar o método direto para construir o diagrama de dispersão produzido pelo fenômeno de espalhamento de Bragg e o método inverso para o fenômeno de ressonância local, como será apresentado no capítulo IV.

A Figura 16 (a) mostra o perfil de deslocamento em um modo propagativo. A onda se propaga através do material fonônico de tal maneira que a diferença de fase não provoca proibição da propagação da onda. A Figura 16 (b) mostra o perfil de deslocamento de um modo evanescente, dentro da banda proibida. O decaimento espacial da amplitude da onda corresponde a $\kappa_I > 0$, os nós da onda, permanecem estacionários todo o tempo seguindo $\kappa_R = \pi/a$. Um caso especial de $(\kappa_R, \kappa_I) = (\frac{\pi}{a}, 0)$, ocorre em um valor na fronteira da banda proibida, como mostrado na Figura 16 (c), os resultados não se propagam como onda em modo propagativo, nem em modo de decaimento espacial de amplitude. A Figura 16

apresenta dois instantes de tempo diferentes $t=0$ s (curva em preto) e $t=T/5$ s (curva em vermelho), com T sendo o período temporal da onda. (FRAZIER, 2015).

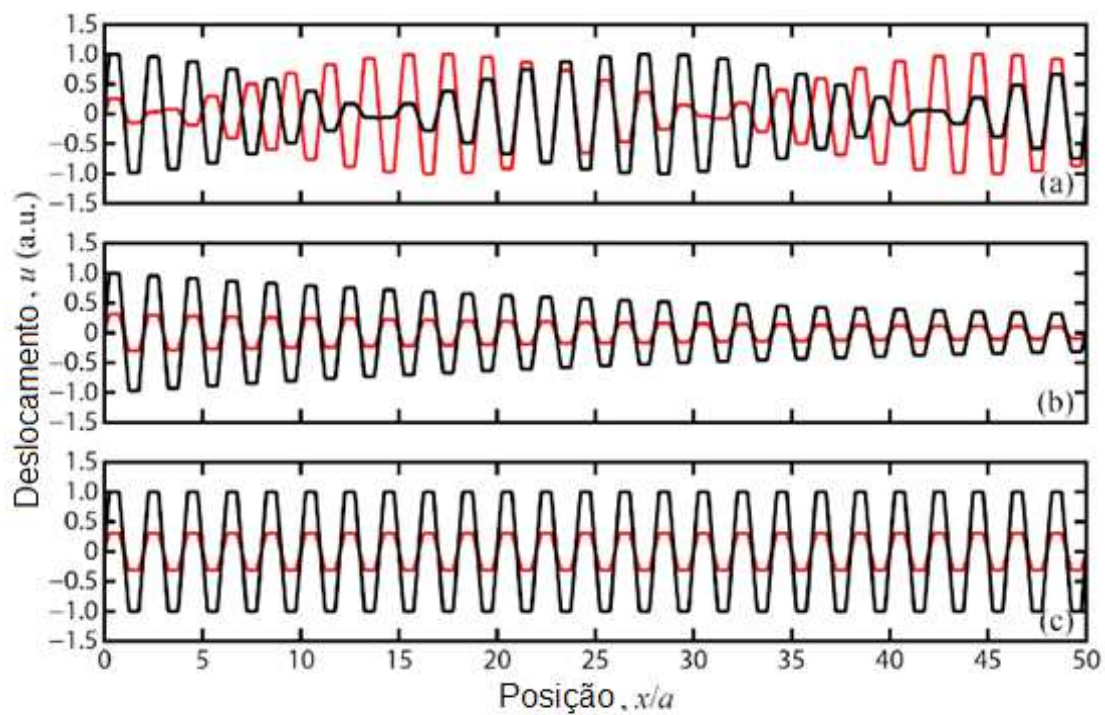


Figura 16: Comportamento de ondas em 3 situações diferentes no interior do material fonônico unidimensional. (a) Modo propagativo, (b) modo evanescente, (c) modo de não decaimento. Medições realizadas no tempo $t=0$ (curva em preto) e $t=T/5$ (curva em vermelho). (FRAZIER, 2015).

CAPÍTULO III

Propagação de ondas elásticas em materiais fonônicos e características dinâmicas de rotores embarcados

Esse capítulo irá tratar dos conceitos e da formulação da propagação de ondas elásticas longitudinais em materiais fonônicos unidimensionais, métodos de cálculo dos diagramas de dispersão, e a formulação dinâmica através de elementos finitos de rotores embarcados.

3.1. Métodos de cálculo da propagação de vibrações ondas elásticas planas (vibrações) em materiais fonônicos

Nessa seção serão apresentados os princípios e a formulação da atenuação de ondas elásticas em um material fonônico, iniciando-se do espectro de vibrações de uma cadeia atômica unidimensional infinita através dos princípios da física do estado sólido, posteriormente esse modelo será expandido para uma estrutura massa mola periódica infinita, que é uma forma simplificada de um material fonônico unidimensional, caracterizando o seu diagrama de dispersão e as suas propriedades de atenuação de vibração, conforme abordado em Wen *et al.* (2008), Frazier (2015), Cao (2009), Jensen (2003) e Hussein; Leamy & Ruzzene (2014). Posteriormente será apresentado o modelo de simulação de elementos finitos para estudo das bandas proibidas e da atenuação de vibrações longitudinais de materiais fonônicos unidimensionais finitos que seguem os fenômenos dos mecanismos de espalhamento de Bragg ou de ressonância local.

3.1.1. Estrutura de banda de vibrações e bandas proibidas de uma estrutura massa mola periódica infinita

Wen (2008) ilustra através da Figura 19 uma estrutura massa- mola periódica infinita. Cada período consiste em n conjuntos de mola (coeficientes elásticos k_1 a k_n) e osciladores (massas $m_1 - m_n$) alinhadas unidimensionalmente, a distância entre duas massas vizinhas é d , e o comprimento de uma célula unitária, ou seja, comprimento de malha é $a = nd$, nesse modelo considera-se que o deslocamento x_j de cada massa m_j é restrito à direção do eixo x .

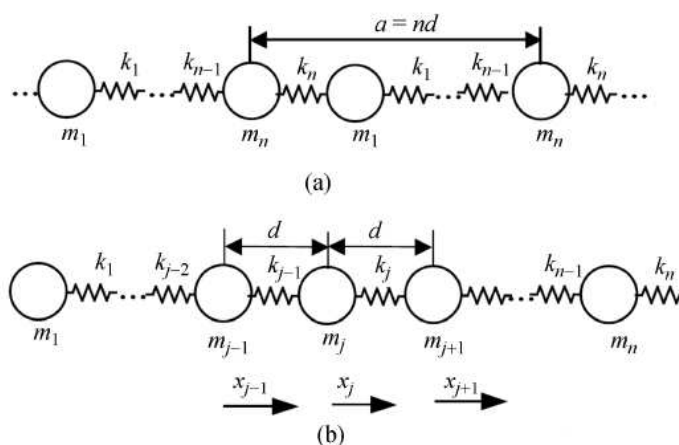


Figura 17: Estrutura periódica massa mola infinita (WEN, 2008).

A equação do movimento de um j -ésimo oscilador mostrado na Figura 15 (b) é apresentada pela Eq. (1)

$$m_j \ddot{x}_j = k_j(x_{j+1} - x_j) - k_{j-1}(x_j - x_{j-1}) \quad j = 1, \dots, n \quad (1)$$

Sendo x_1 a x_n , k_1 a k_n e m_1 a m_n os deslocamentos, coeficientes elásticos e massas dos componentes da célula unitária a ser calculada.

Baseando- se no teorema de Bloch e nas condições de contorno periódicas, a solução para a Eq. (1) é descrita como uma vibração harmônica de amplitude A_j e frequência angular ω , como mostrado na Eq. (2).

$$x_j = A_j e^{i(jkd - \omega t)} \quad (2)$$

Sendo d a distância entre dois elementos da célula unitária consecutivos.

Combinando as Eqs. (1) e (2) e considerando as condições de contorno periódicas pode-se deduzir um conjunto de equações lineares. Essas equações podem ser usadas para montar a estrutura de banda de vibração da estrutura massa mola periódica.

Para uma estrutura periódica massa mola finita, é possível calcular as propriedades de transmissão das vibrações com o método numérico a ser apresentado. Substituindo o tempo t por passos temporais p , a equação diferencial é mostrada na Eq. (3).

$$\begin{aligned} x_j^{(p+1)\Delta t} &= \frac{\Delta t^2}{m_j} [k_j(x_{j+1}^{p\Delta t} - x_j^{p\Delta t}) - k_{j-1}(x_j^{p\Delta t} - x_{j-1}^{p\Delta t})] - x_j^{(p-1)\Delta t} + 2x_j^{p\Delta t} \quad j = 2, \dots, nN-1 \\ x_{nN}^{(p+1)\Delta t} &= \frac{\Delta t^2}{m_{nN}} [-k_{nN}(x_{nN}^{p\Delta t} - x_{nN-1}^{p\Delta t})] - x_{nN}^{(p-1)\Delta t} + 2x_{nN}^{p\Delta t} \quad j = nN \end{aligned} \quad (3)$$

onde p é um número inteiro, Δt é o passo temporal discreto, n é o número de osciladores em um período e N é o número de períodos. Resolvendo-se a Eq. (3) produz-se as curvas de transmissão de vibração de uma estrutura periódica massa mola finita.

3.1.2. Bandas proibidas vibracionais longitudinais e propriedades de atenuação de vibração de um material fonônico unidimensional

Para simplificar os cálculos dos modos da vibração longitudinal em um material periódico será utilizada uma discretização do modelo por um sistema finito de múltiplos graus de liberdade, um método simples e muito utilizado é o método dos parâmetros concentrados (*lumped mass method*), no qual a massa de um sistema contínuo é centralizada em pontos ou seções finitas (WEN, 2008).

Utilizando esse método, cristais fonônicos unidimensionais podem ser simplificados como uma estrutura massa-mola periódica. Na qual pode-se calcular as bandas proibidas longitudinais e as propriedades de transmissão de vibração da estrutura periódica.

A Figura 20 ilustra um período de um material fonônico discretizado como uma estrutura massa- mola de n graus de liberdade.

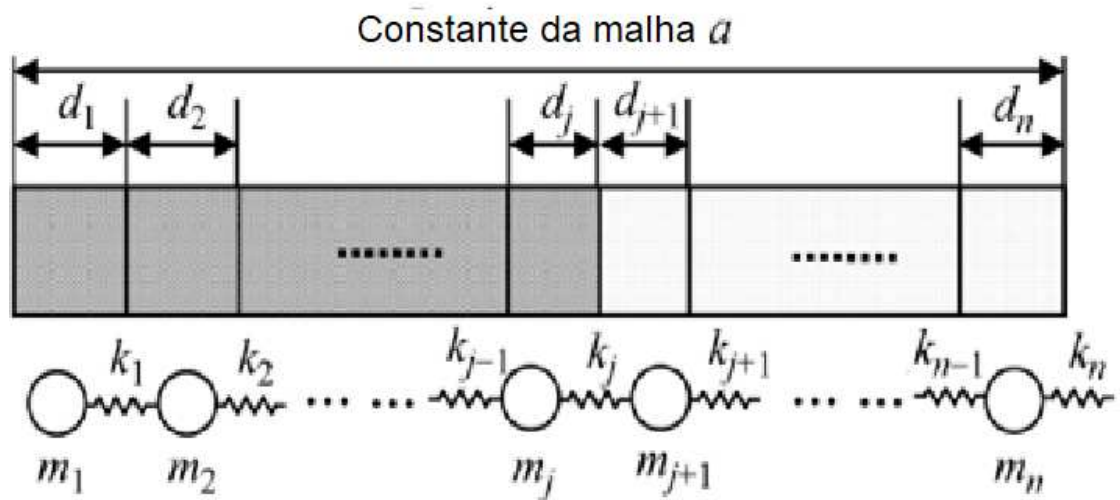


Figura 18: Discretização de um material fonônico unidimensional (WEN, 2008).

A Discretização resulta em uma estrutura massa mola na qual as massas (m) dos osciladores são calculados como mostrado na Eq. (4)

$$m_j = \rho S d_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

sendo S a área de seção transversal do material fonônico unidimensional, d_j a distância entre dois elementos consecutivos de uma célula unitária, a é a constante da malha ($a = \sum_{j=1}^n d_j$), e ρ a densidade do material.

Para um material fonônico unidimensional em forma de eixo, com as unidades discretas vizinhas sendo do mesmo material, a rigidez ao longo da direção da periodicidade é $2ES/(d_{j+1} + d_j)$. Para materiais diferentes a rigidez é $2E_A E_B S / (E_A d_{j+1} + E_B d_j)$, no qual E_A e E_B representam o módulo elástico dos materiais diferentes. Esse método de simplificação pode ser utilizado em materiais periódicos com múltiplos materiais (WEN, 2008).

O método dos parâmetros concentrados pode ser utilizado independentemente do número de materiais em um período. Os fatores e regras que afetam o valor da banda proibida inferior em termos da vibração longitudinal em um material fonônico unidimensional composto de um material metálico e não metálico são o aumento da densidade do material metálico,

redução da densidade do material não metálico, e definição de um módulo elástico adequado para o não-metal. As posições e dimensões das bandas proibidas são influenciados pela razão de preenchimento dos diferentes materiais, na qual existe um ponto ótimo (dependendo dos parâmetros dos materiais) para se obter uma banda proibida de baixa frequência para vibrações longitudinais.

Wen (2008) apresenta um comparativo experimental realizado em um material composto por uma borracha NBR (borracha nitrílica-butadieno) e aço com uma constante de malha de 20 mm e fração de preenchimento de 1, apresentando resultados similares, gerando variações devido ao amortecimento presente na borracha, fator este que não é considerado no modelo de parâmetros concentrados.

3.1.3. Propagação de ondas elásticas em cristais fonônicos unidimensionais não amortecidos

Frazier (2015) apresenta as técnicas de análise modal e de transformação de espaço de estados na dinâmica estrutural formuladas para o problema de propagação de onda de Bloch. O modelo produzido é mostrado na Figura 21.

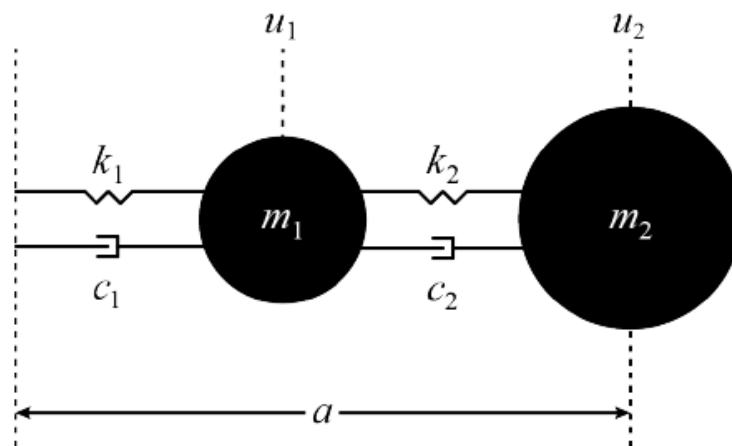


Figura 19: Modelo representativo de um material periódico com amortecimento. (FRAZIER, 2015)

Nessa seção os amortecimentos c_1 e c_2 serão desprezados, sendo assim, a equação do movimento desse sistema é mostrada na Eq. (5).

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1^n + (k_1 + k_2)u_1^n - k_2 u_2^n - k_1 u_2^{n-1} &= 0 \\ m_2 \ddot{u}_2^n + (k_1 + k_2)u_2^n - k_2 u_1^n - k_1 u_1^{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

onde u_1^n representa o deslocamento da massa (ℓ) na n -ésima célula unitária do material periódico.

Considerando uma solução para a onda plana como mostrado em (6).

$$u_\ell^n(x, \kappa, t) = \widetilde{u}_\ell e^{i\kappa x + \lambda t} \quad (6)$$

Para a massa ℓ no n -ésimo ponto da malha, no qual \widetilde{u}_ℓ , x , κ e t expressam a amplitude complexa da onda, posição, número de onda e o tempo, respectivamente. Deve-se notar que x não é contínuo refletindo o modelo do material discreto. Além disso, como a célula unitária encontra-se em cada ponto da malha, a onda deve ser amostrada nesses pontos, ou seja, $x = \{-na, \dots, -a, 0, a, \dots, na\}$. Através disso obtém-se a relação mostrada em (7).

$$u_\ell^{n+p}(x + pa, \kappa, t) = u_\ell^n(x, \kappa, t) e^{ip\kappa a} \quad (7)$$

onde o inteiro p representa posição da célula unitária em relação a n . Combinando a Eq. (7) com (5), obtém-se duas equações homogêneas para u_1 e u_2 , que podem ser representadas na forma de matriz como a Eq. (8).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (8)$$

na qual \mathbf{M} e \mathbf{K} representam as matrizes de massa e rigidez da célula unitária, e $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$ representa os deslocamentos da célula unitária. As matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} são mostradas nas Eqs. (9) e (10).

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -(e^{i\kappa a} k_1 + k_2) \\ -(e^{i\kappa a} k_1 + k_2) & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Aplicando-se as derivadas no tempo Eq. (8) se torna a Eq. (11)

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (11)$$

Nesse caso, o problema de autovalor aparece, com autovalor $\lambda^2 = -\omega^2$. A relação de dispersão para esse problema é mostrada na Eq. (12).

$$\omega_s(\kappa) = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)(m_1 + m_2) \pm \sqrt{[(k_1 + k_2)(m_1 + m_2)]^2 - 8(1 - \cos(\kappa a))k_1 k_2 m_1 m_2}}{2m_1 m_2}} \quad (12)$$

na qual o índice s se refere ao número do modo e pode representar o valor de 1 ou 2.

3.1.4. Cálculo da propagação de ondas elásticas longitudinais através de associação de massas e molas pelo método de elementos finitos

Na formulação apresentada por Jensen (2003) e Cao (2009), considera-se cada célula unitária como um conjunto de duas massas, duas molas no sentido longitudinal e duas molas que fazem a ligação do material periódico com a estrutura de base, representando as características inerciais e de rigidez da estrutura, como apresentado na Figura 22.

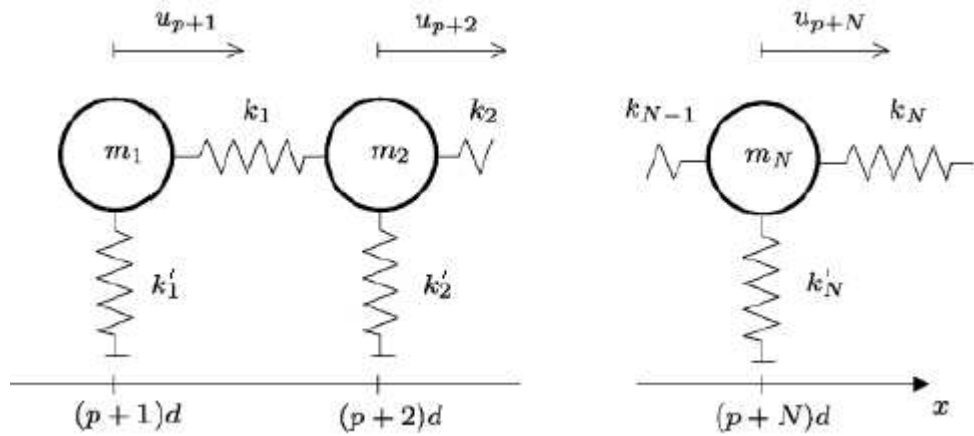


Figura 20: Estrutura periódica utilizada (CAO,2009).

Ambos os trabalhos apresentam uma formulação baseada em uma matriz, originada da equação geral do movimento mostradas na equação (13), em função do deslocamento u e da aceleração \ddot{u} , que representam as vibrações no sentido longitudinal de uma estrutura periódica.

$$m\ddot{u} + ku = f \quad (13)$$

onde f é a força aplicada.

Sabendo-se que $u(t)$ pode ser representado por $u(t) = Ae^{i\omega t}$, no qual A é a amplitude da onda de acordo com a frequência ω , a Eq. (13) foi transformada para o domínio das frequências obtendo-se a Eq. (14)

$$(-\omega^2 M + K)A = f \quad (14)$$

Trabalhando-se com a Eq. (14) e a expandindo de acordo com as interações entre os nós dos elementos finitos elaborados obtém-se as Eqs. (15) e (16).

$$\bar{T}u = f \quad (15)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & & & & \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & \dots & & \\ & -k_2 & k_2+k_3 & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & & -k_{MN-1} & k_{MN} & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega^2 m_1 \\ \omega^2 m_2 \\ \omega^2 m_3 \\ \vdots \\ \omega^2 m_{MN} \end{bmatrix} \mathbf{I} + \begin{bmatrix} k'_1 \\ k'_2 \\ k'_3 \\ \vdots \\ k'_{MN} \end{bmatrix} \mathbf{I} \quad (16)$$

Sendo \mathbf{I} a matriz identidade.

O método considera uma rigidez devido ao acoplamento entre a estrutura e a base da estrutura periódica, para as análises adotadas nessa dissertação essa rigidez k'_n será considerada 0 e removida das equações.

Jensen (2003) e Cao (2009) expandiram esse método para considerar um amortecimento proporcional na estrutura periódica, considerando um coeficiente de amortecimento (ζ_j) relacionados às suas propriedades de massa e rigidez, o método estabelecido é mostrado na Eq. (17).

$$\zeta_j = \frac{c_j}{2\sqrt{m_j^2 \omega_j^2}} \quad (17)$$

onde m_j é a j -ésima massa da estrutura periódica e ω_j é $\omega_j = \sqrt{\frac{k_j+k_{j-1}}{m_j}}$.

Com isso a equação do movimento mostrada pela Eq. (13) passa a apresentar os termos de amortecimento, transformando assim a Eq. (14) na Eq. (18).

$$(-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{A} = \mathbf{f} \quad (18)$$

A matriz \mathbf{T} passa a incluir o termo amortecimento se tornando a matriz mostrada na Eq. (19).

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & & & & \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & \dots & & \\ & -k_2 & k_2+k_3 & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & & -k_{MN-1} & k_{MN} & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega^2 m_1 \\ \omega^2 m_2 \\ \omega^2 m_3 \\ \vdots \\ \omega^2 m_{MN} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{I}} + i \begin{bmatrix} \omega c_1 \\ \omega c_2 \\ \omega c_3 \\ \vdots \\ \omega c_{MN} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{I}} \quad (19)$$

Jensen (2003) e Cao (2009) consideram uma estrutura similar à mostrada na Figura 23.

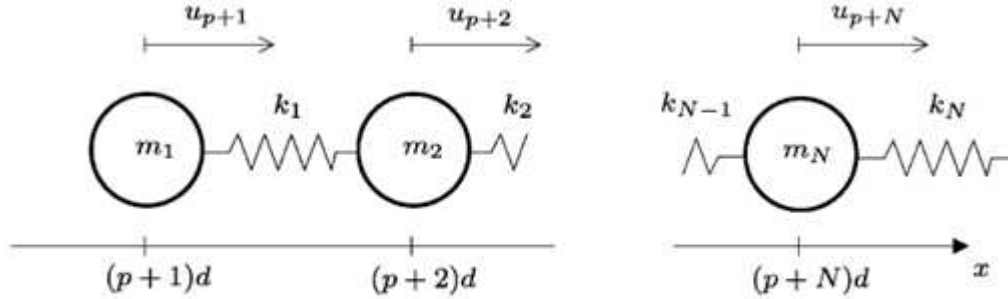


Figura 21: Modelo de estrutura periódica considerada para cálculo das bandas proibidas utilizada por Cao (2009) e Jensen (2003).

O deslocamento produzido por essa estrutura é mostrado na Eq. (20).

$$u_{p+j} = A_j e^{i((p+j)\kappa - \omega t)} \quad (20)$$

onde A_j é a amplitude da onda, κ é o número de onda e ω é a frequência da onda. A equação de dispersão para a identificação das bandas proibidas do material fonônico é mostrada na Eq. (21).

$$(\omega_j^2 - \omega^2)A_j = c_j^2 e^{i\kappa} A_{j+1} + ((\omega_j^2 - c_j^2) e^{-i\kappa} A_{j-1} \quad (21)$$

na qual $\omega_j^2 = \frac{k_j + k_{j+1}}{m_j}$ e $c_j^2 = \frac{k_j}{m_j}$ e $0 \leq \kappa a \leq \pi$. Para facilitar o cálculo dessa equação pode ser utilizado o método mostrado na Eq. (22) que utiliza a matriz S mostrada na Eq. (23)

$$(S(\kappa) - \omega^2 I)A = \mathbf{0} \quad (22)$$

$$S = \begin{bmatrix} \omega_1^2 + \frac{k'_1}{m_1} & c_1^2 e^{ik} & \dots & (\omega_1^2 + c_1^2) e^{-ik} \\ (\omega_2^2 + c_2^2) e^{-ik} & \omega_2^2 + \frac{k'_2}{m_2} & c_2^2 e^{ik} & \\ & (\omega_3^2 + c_3^2) e^{-ik} & \omega_3^2 + \frac{k'_3}{m_3} & c_3^2 e^{ik} \\ c_N^2 e^{ik} & \vdots & & \ddots \\ & & (\omega_N^2 + c_N^2) e^{-ik} & \omega_N^2 + \frac{k'_N}{m_N} \end{bmatrix} \quad (23)$$

3.1.5. Propagação de ondas elásticas longitudinais através da utilização de material periódico com ressonadores locais

Uma variação de uma malha monoatômica consiste na adição de um oscilador de segunda ordem com constante de rigidez k_R e massa m_R conectada à cada massa da base, como mostrado na Figura 24.

Esse tipo de estrutura produz um fenômeno chamado de ressonância interna centrado na frequência natural do ressonante ($\omega_R = \sqrt{k_R/m_R}$) que produz uma banda proibida na vizinhança dessa frequência. Esse fenômeno permite a obtenção de bandas proibidas em baixas frequências (HUSSEIN, 2014).

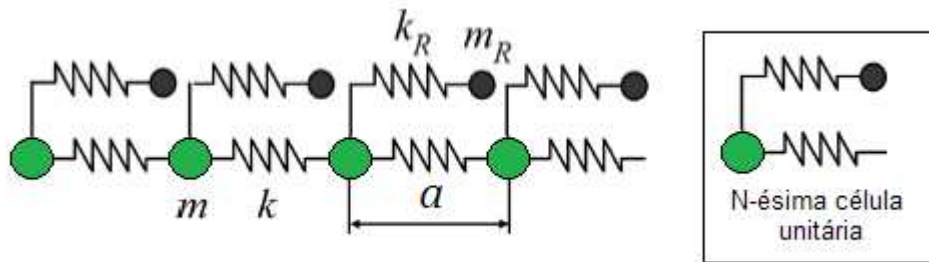


Figura 22: Representação de um material fonônico que utiliza um ressonador interno.

Adaptado de (HUSSEIN, 2014).

As equações de movimento e de dispersão desse fenômeno são mostradas na Eq. (24) e (25), respectivamente.

$$(-\omega^2 m + 2k)u_n - k(u_{n-1} + u_{n+1}) - k_R(u_{Rn} - u_n) = 0 \quad (24)$$

$$(-\omega^2 m_R + k_R)u_{Rn} - k_R u_n = 0$$

$$2(1 - \cos(\kappa a)) - \Omega^2 \left(1 + \frac{\bar{m}_R}{1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_R^2}} \right) = 0 \quad (25)$$

onde $\Omega = \omega/\omega_0$, $\Omega_R = \omega_R/\omega_0$ e $\bar{m}_R = m_R/m$ representam as razões de frequência e de massa, respectivamente, e κ representa o vetor de onda na primeira zona Brillouin $\kappa \in [-\pi/a, +\pi/a]$.

Utilizando a Eq. (25) é possível obter o diagrama de dispersão de um ressonador interno, esse diagrama de dispersão possui a forma mostrada na Figura 25.

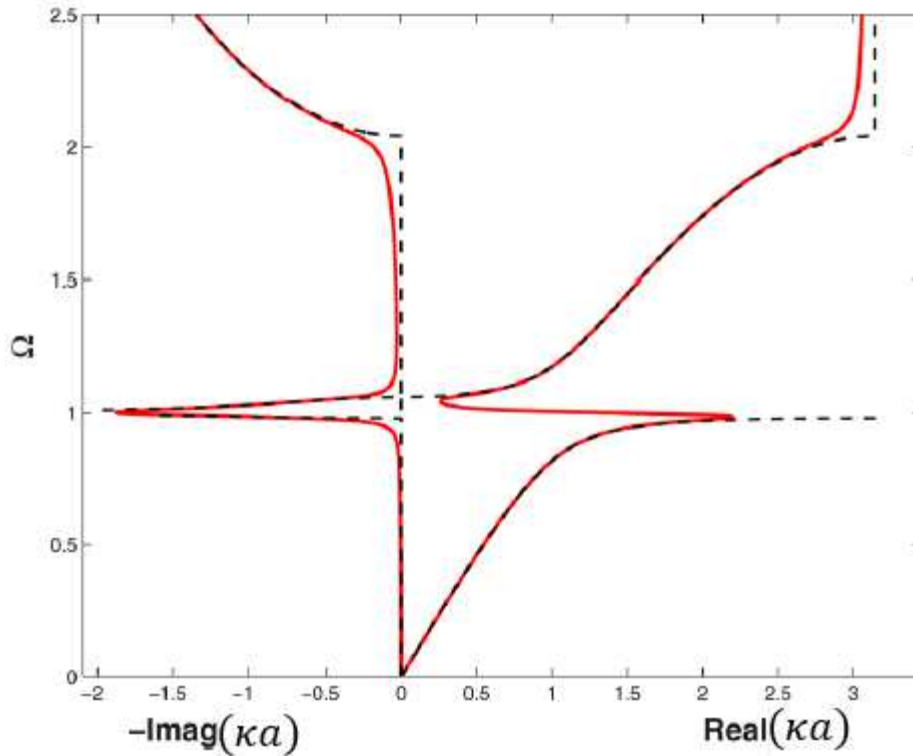


Figura 23: Diagrama de dispersão de um material fonônico com ressonador interno. Curvas tracejadas representam um material não amortecido, curva em vermelho representa o efeito do amortecimento no fenômeno de ressonância interna.

3.2. Método matemático para cálculo de respostas a excitações em rotores embarcados

Rotores embarcados são sistemas rotativos nos quais a vibração gerada é influenciada pelas excitações sofridas pela sua base. Motores de aeronaves e máquinas ferramentas, são rotores embarcados típicos já que o seu comportamento dinâmico é afetado diretamente pela excitação da base.

O modelo matemático de rotores é obtido através das energias cinética e de deformação do eixo flexível e das energias cinéticas do disco rígido e da massa desbalanceada, aplicando-se as equações de Lagrange ao sistema obtém-se a equação do movimento do sistema. Essas equações são utilizadas para calcular as respostas de vibração do rotor às excitações devido ao desbalanceamento e ao movimento de base.

Em seguida as equações do movimento são reescritas na forma de matrizes de massa, rigidez e amortecimento/efeito giroscópico através do método de elementos finitos, que em conjunto com o método de Newton-Raphson e com as regras trapezoidais de Newmark é aplicado para obter as respostas de vibração do sistema.

Nessa seção será apresentada a formulação das matrizes elementares do método dos elementos finitos que constituem o modelo matemático de sistemas rotativos embarcados. Utilizando-se esse modelo é possível avaliar o comportamento das máquinas rotativas numericamente.

3.2.1. Equação do movimento

A equação que representa o comportamento dinâmico de um rotor flexível é mostrada na Eq. (26) (LALANNE; FERRARIS, 1998).

$$\mathbf{M}\ddot{\delta} + [\mathbf{D} + \Omega\mathbf{D}_g]\dot{\delta} + \mathbf{K}\delta = \mathbf{W} + \mathbf{F}_u \quad (26)$$

na qual \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{D} a matriz de amortecimento, \mathbf{D}_g representa o efeito giroscópico, e \mathbf{K} a matriz de rigidez. Essas matrizes são relacionadas aos elementos do sistema rotativo, normalmente sendo considerados os eixos, discos e mancais. O vetor δ contém os deslocamentos generalizados e Ω é a velocidade de rotação do eixo. \mathbf{W} representa o peso do sistema rotativo e \mathbf{F}_u representa as forças de desbalanceamento (LALANNE; FERRARIS, 1998).

Em sistemas que possuem efeitos dissipativos associados a materiais com duas ou mais fases, como acontece nos materiais periódicos e nos materiais compostos, a Eq. (26) é modificada para a Eq. (27) (SINO, 2006).

$$\mathbf{M}\ddot{\delta} + [\mathbf{D} + \Omega\mathbf{D}_g + \mathbf{D}_i]\dot{\delta} + [\mathbf{K} + \dot{\Omega}\mathbf{K}_i]\delta = \mathbf{W} + \mathbf{F}_u \quad (27)$$

na qual \mathbf{D}_i e \mathbf{K}_i são as matrizes de amortecimento e rigidez internas, respectivamente.

A representação do rotor a ser simulado é mostrada na Figura 24, no qual, $0 \leq y \leq L$ representa o comprimento do eixo, l_1 a posição do disco, m a massa de desbalanceamento, Ω a velocidade de rotação do rotor, os mancais de rolamento estão presentes nos pontos A e B.

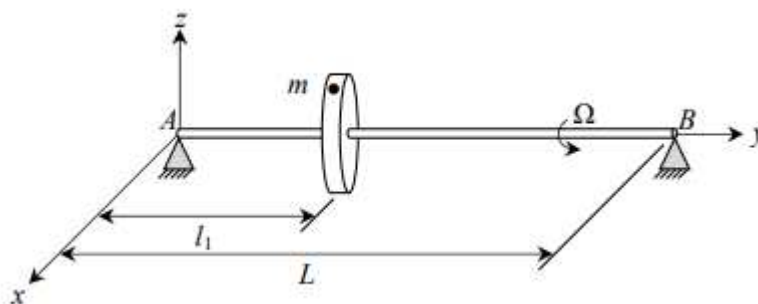


Figura 24: Representação Esquemática do rotor (CAVALINI JR., 2017).

Para a determinação dos termos da Eq. (26) cada componente do sistema deve ser analisado individualmente. O eixo será determinado pelas energias cinéticas e de deformação, o disco é determinado pela energia cinética, os mancais são caracterizados pelo princípio do trabalho virtual e a massa de desbalanceamento é descrita pela energia cinética (LALANNE; FERRARIS, 1998).

3.2.2. Máquinas rotativas com rotores embarcados

A maioria dos estudos de comportamento dinâmico de rotores se baseia em rotores fixos, como mostrado na Seção 3.2.1. Estudos de rotores embarcados analisam o comportamento dinâmico de uma máquina rotativa incluindo as excitações aplicadas à base

do sistema, através do eixo de referência $R_0(x_0, y_0, z_0)$ que é o sistema de coordenada inercial, o referencial $R_s(x_s, y_s, z_s)$ é fixo à base do rotor, e $R(x, y, z)$ é o referencial fixo ao disco, como mostrado na Figura 25. (DUCHEMIN, 2006)

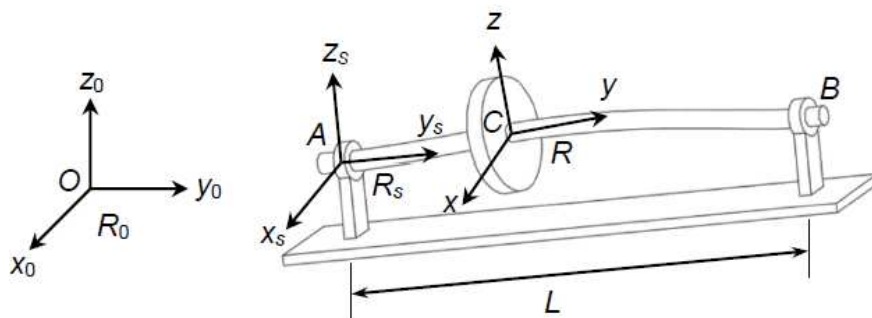


Figura 25: Representação do rotor embarcado com os eixos de referência utilizados para derivar a equação do movimento (DUCHEMIN,2006).

Nesta situação, o movimento relativo do sistema de referência R_s em relação ao referencial R é caracterizado pelos ângulos ψ, θ e ϕ . A orientação de R é obtida através das rotações mostradas na Figura 26.

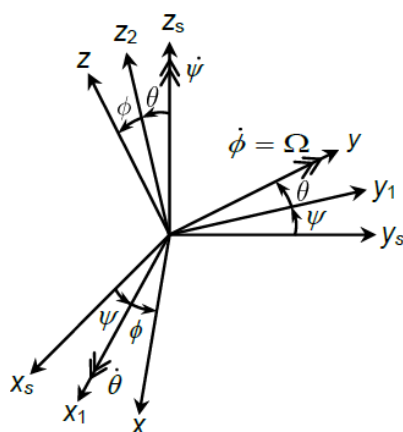


Figura 26: Transformação de coordenadas do referencial R_s ao referencial R (SAMORA, 2017).

Realizando as transformações, a velocidade instantânea de rotação do referencial R em relação a R_s é dada pela Eq. (28).

$$\Omega_R^{R_s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{R_s} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{Bmatrix} \quad (28)$$

na qual $[\dot{\cdot}]$ representa a derivada temporal da variável.

A transformação do movimento do sistema referência R_0 para o sistema de coordenadas R_s é realizada através dos ângulos α, β e γ , como mostrado na Figura 27.

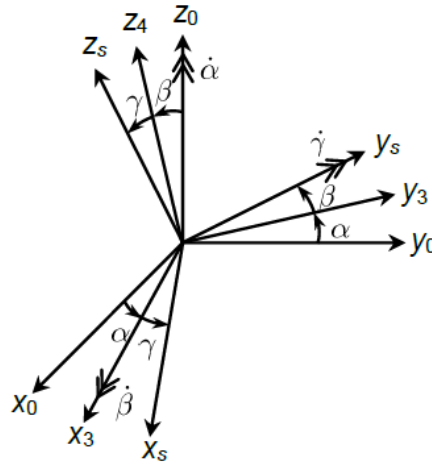


Figura 27: Transformação de coordenadas do referencial R_0 ao referencial R_s .

Através das movimentações dos eixos mostradas, identifica-se que a velocidade angular instantânea do sistema R_s em relação ao referencial R_0 é descrita pela Eq. (29)

$$\Omega_R^{R_s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix}_{R_0} + \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_3} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_s} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \cos \gamma - \dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\beta} \sin \gamma - \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma \end{Bmatrix}_{R_s} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta}_s \\ \dot{\gamma}_s \\ \dot{\alpha}_s \end{Bmatrix}_{R_0} \quad (29)$$

Logo, o vetor velocidade angular do referencial R em relação a R_0 é dado pela Eq. (30)

$$\begin{aligned}
\Omega_R^{R_s} &= \begin{Bmatrix} \dot{\beta}_s \\ \dot{\gamma}_s \\ \dot{\alpha}_s \end{Bmatrix}_{R_0} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{R_s} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{Bmatrix}_R \\
&= \begin{Bmatrix} (\dot{\alpha}_s \cos\psi + \dot{\beta}_s \sin\psi + \dot{\theta}) \cos\phi - ((\dot{\alpha}_s \sin\psi + \dot{\beta}_s \cos\psi) \sin\theta + (\dot{\gamma}_s + \dot{\psi}) \cos\theta) \sin\phi \\ -(\dot{\alpha}_s \sin\psi + \dot{\beta}_s \cos\psi) \cos\theta + (\dot{\gamma}_s + \dot{\psi}) \sin\theta + \dot{\phi} \\ (\dot{\alpha}_s \cos\psi + \dot{\beta}_s \sin\psi + \dot{\theta}) \sin\phi + ((\dot{\alpha}_s \sin\psi + \dot{\beta}_s \cos\psi) \sin\theta + (\dot{\gamma}_s + \dot{\psi}) \cos\theta) \cos\phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}_R
\end{aligned} \tag{30}$$

Para representar a influência dos movimentos de base no rotor (C), a posição do ponto C (vetor \overrightarrow{AC} , mostrado na Figura 23) no sistema de coordenadas R_s é descrita pela Eq. (31). Assim sendo, o vetor \overrightarrow{OC} que representa a posição de C no sistema de referência R_s é dado pela Eq. (32).

$$\overrightarrow{AC} = \begin{Bmatrix} u(y, t) \\ y \\ w(y, t) \end{Bmatrix}_{R_s} \tag{31}$$

$$\overrightarrow{OC} = \begin{Bmatrix} X + u(y, t) \\ Y + y \\ Z + w(y, t) \end{Bmatrix}_{R_s} \tag{32}$$

na qual a vibração lateral do eixo no ponto C é caracterizada através dos movimentos u e w nas direções x_s e z_s , respectivamente. As translações u e w são variáveis, e y é constante. Com essas informações e as transformações de coordenadas realizadas pelas Eqs. (28), (29) e (30) será realizado o cálculo das energias envolvidas em cada um dos componentes do rotor através do qual serão formuladas as equações para aplicação do método numérico dos elementos finitos, como será descrito posteriormente nesse capítulo, obtém-se a resposta do sistema a excitações de base.

3.2.3. Equações de Energia

Com o intuito de obter as equações de movimentos de rotores, será necessário primeiramente definir as equações de energia cinética e potencial do eixo flexível, e as energias cinéticas produzidas pelo disco rígido e pela massa de desbalanceamento. Na sequência, a equação do movimento do rotor será obtida aplicando-se a equação de Lagrange sobre as energias cinéticas e de deformação presentes no rotor.

3.2.3.1. Eixo

O eixo é um componente do sistema rotativo definido como uma viga de seção transversal circular com diâmetro constante. Cada elemento do eixo possui tamanho L , dois nós e oito graus de liberdade, como mostrado na Figura 28. (LALANNE; FERRARIS, 1998)

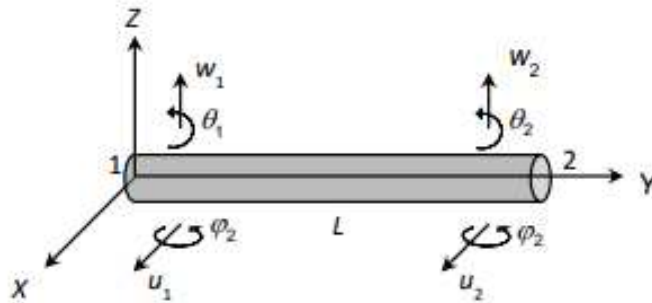


Figura 28: Graus de liberdade (GDLs) associados a um elemento de eixo (CAVALINI JR., 2016).

As rotações podem ser expressas em função dos deslocamentos, como mostrado na Eq. (33).

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varphi &= \frac{-\partial u}{\partial y}\end{aligned}\tag{33}$$

A energia cinética para o eixo é obtida através da Eq. (34).

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho L \Omega \int_0^L \dot{\varphi} \theta dy\tag{34}$$

na qual ρ é a densidade, S a área de seção transversal do eixo e I o momento de inércia de área para o eixo.

A energia de deformação do eixo é obtida através da análise de tensões (σ) e deformações (ε) no mesmo. Considerando o eixo simétrico, C o centro geométrico do mesmo, u e w são deslocamentos em coordenadas fixas, e u^* e w^* são deslocamentos para

coordenadas rotativas, como mostrado na Figura 29. Define-se assim, a deformação longitudinal de um ponto arbitrário B como a Eq. (35).

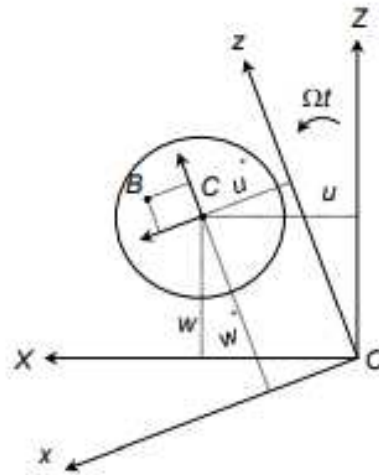


Figura 29: Representação de um ponto arbitrário B na seção transversal do eixo (LALANNE; FERRARIS, 1998).

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (35)$$

A energia de deformação para o eixo desprezando o esforço axial no mesmo é dada na Eq. (36) (LALANNE; FERRARIS, 1998).

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^t \varepsilon dV \quad (36)$$

Através das Eqs. (35) e (36) obtém-se a equação de energia de deformação mostrada na Eq. (37).

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (37)$$

Utilizando as funções de forma do sistema, obtém-se a matriz de rigidez do eixo do sistema rotativo.

3.2.3.2. Disco

O disco é considerado rígido e possui sistema de coordenadas fixo $R_0 (X,Y,Z)$ e um sistema de coordenadas móveis (x,y,z) posicionado no centro do disco. O elemento possui 8 GDLs, sendo 4 GDLs por nó, dois deslocamentos (u e w) e duas rotações (θ e ϕ). A representação do disco é apresentada na Figura 30 e os deslocamentos nodais na Eq. (38) (LALANNE; FERRARIS, 1998).

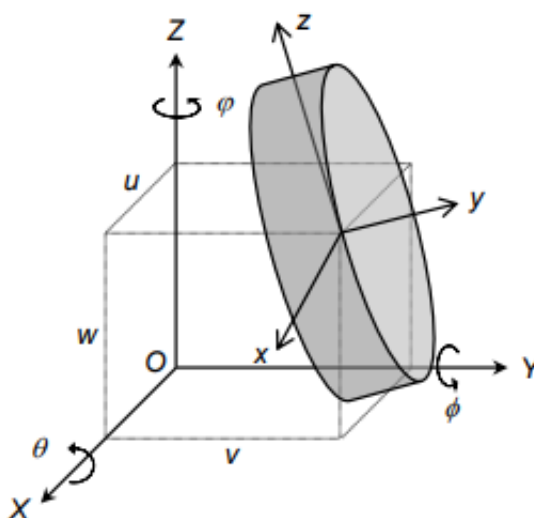


Figura 30: Representação do elemento de disco (CAVALINI JR., 2016).

$$q_D = \{uw\theta\phi\}^t \quad (38)$$

A energia cinética do elemento de disco é calculada através da Eq. (39) (LALANNE; FERRARIS, 1998).

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (39)$$

na qual M_D representa a massa do disco, I_{Dx} , I_{Dy} e I_{Dz} os momentos de inércia com relação aos eixos x , y , z , respectivamente, e ω_x , ω_y e ω_z são as velocidades instantâneas em relação aos eixos x , y e z , respectivamente.

Deslocando as coordenadas ω de R para R_0 , obtém-se a energia cinética do eixo em função das coordenadas fixas, mostrada na Eq. (40), e aplicando a energia cinética obtida nas equações de Lagrange obtém-se as matrizes de massa e efeito giroscópico do disco.

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\varphi}\theta) \quad (40)$$

3.2.3.3. Mancais

Neste trabalho, foram utilizados mancais de rolamento representados por coeficientes de rigidez e amortecimento viscoso, como ilustrado na Figura 31. (LALANNE; FERRARIS, 1998)

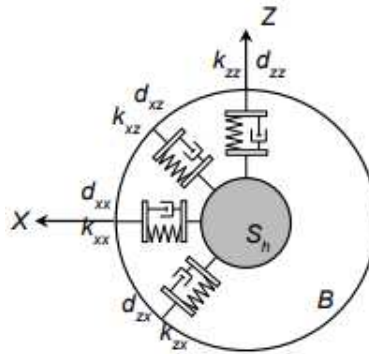


Figura 31: Representação esquemática de um mancal de rolamento (CAVALINI JR., 2016).

O trabalho virtual das forças dos mancais atuantes sobre o eixo é mostrado na Eq. (41).

$$\delta W = F_{mu} \delta u + F_{mw} \delta w \quad (41)$$

Reescrevendo-se a Eq. (41) na forma matricial, obtém-se a Eq. (42), na qual F_{mu} e F_{mw} são as forças generalizadas.

$$\begin{bmatrix} F_{mu} \\ F_{mw} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xz} \\ K_{zx} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xz} \\ d_{zx} & d_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Escrevendo-se a Eq. (42) na forma matricial de forma expandida com os GDLs utilizados na formulação do elemento finito do eixo obtém-se as matrizes de rigidez e amortecimento do sistema.

3.2.3.4. Massa de desbalanceamento

A força de desbalanceamento é representada por uma massa m_u situada a uma distância d do centro geométrico do eixo, como ilustrado na Figura 32. (LALANNE; FERRARIS, 1998)

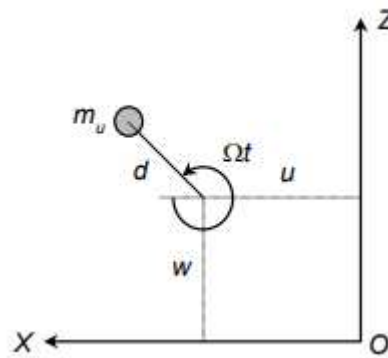


Figura 32: Massa de desbalanceamento em função do centro do eixo (CAVALINI JR., 2016).

A Eq. (43) mostra o cálculo da energia cinética da massa de desbalanceamento.

$$T_u = \frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \sin(\Omega t) - 2\Omega d \dot{w} \cos(\Omega t)) \quad (43)$$

Através da Eq. (43), obtém-se as forças de desbalanceamento mostradas na Eq. (44).

$$\begin{bmatrix} F_{unbx} \\ F_{unbz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_u d\dot{\Omega} \cos(\Omega t) + m_u d\Omega^2 \sin(\Omega t) \\ m_u d\dot{\Omega} \sin(\Omega t) + m_u d\Omega^2 \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (44)$$

3.2.3.5. Rotores embarcados

Através das transformações de sistemas de coordenadas mostradas na Seção 3.2.2., e dos conceitos de cálculo de energia nos componentes de uma máquina rotativa ilustrados na seção 3.2.3., constrói-se as equações do sistema em um rotor embarcado, mostrado na Figura 33.

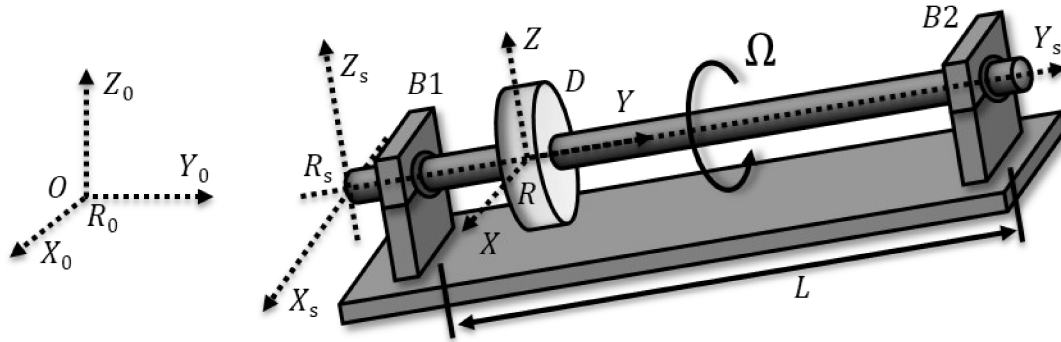


Figura 33: Representação do rotor embarcado com os eixos de referência utilizados para derivar a equação do movimento. Adaptado de (DUCHEMIN,2006)

A energia cinética T_D do disco é definida através da Eq. (45). (SAMORA, 2017)

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\vec{V}_{C R_S}^{R_0})^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_R^{R_0} I_D \vec{\Omega}_R^{R_0} \quad (45)$$

na qual $\vec{V}_{C R_S}^{R_0}$ é a velocidade de translação do disco em relação a R_0 expressa em R_S M_D é a massa do disco, $\vec{\Omega}_R^{R_0}$ é o vetor velocidade angular do eixo de coordenada R em relação ao referencial R_0 , e I_D é tensor de momentos de inércia de massa. As equações representativas de $\vec{V}_{C R_S}^{R_0}$ e I_D são mostradas nas Eqs. (46) e (47), respectivamente. (SAMORA, 2017)

$$\begin{aligned} \vec{V}_{C R_S}^{R_0} &= \left(\frac{d\vec{OC}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{OC}}{dt} \right)_{R_S} + \vec{\Omega}_R^{R_0} \times (\vec{OC})_{R_S} = \begin{Bmatrix} \dot{X} + \dot{u} + \dot{\beta}_s(Z+w) - \dot{\gamma}_s(Y+y) \\ \dot{Y} + \dot{\gamma}_s(X+u) - \dot{\alpha}_s(Z+w) \\ \dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_s(Y+y) - \dot{\beta}_s(X+u) \end{Bmatrix}_{R_S} \\ &= \begin{Bmatrix} \dot{u}_c \\ \dot{v}_c \\ \dot{w}_c \end{Bmatrix}_{R_S} \end{aligned} \quad (46)$$

$$I_D = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (47)$$

onde I_{Dx} , I_{Dy} e I_{Dz} são os momentos de inércia de massa do disco nas direções x , y e z , X , Y e Z são as posições dos componentes em relação aos eixos de referência do eixo, e α_s , β_s e γ_s são os ângulos de transformação de coordenadas do sistema do disco R para o referencial R_s do eixo.

As equações da energia cinética para o eixo (T_s) e para a massa desbalanceada (T_u) são mostradas na Eq. (48). (SAMORA, 2017)

$$T_s = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L (u_E^2 + v_E^2 + w_E^2) dy + \frac{1}{2} \rho \int_0^L (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) dy \quad (48)$$

$$T_u = \frac{1}{2} m_u (\vec{V}_{D R_s}^{R_0})^2$$

na qual as velocidades de translação u_E , v_E e w_E são derivadas a partir de uma formulação similar à mostrada na Eq. (46), relativamente a uma posição y qualquer ao longo do eixo. I_x , I_y e I_z são os momentos de inércia de área do eixo nas direções x , y e z , respectivamente. S é a área de seção transversal, L é o comprimento do eixo e ρ é a densidade do material. $\vec{V}_{D R_s}^{R_0}$ é representado pela Eq. (49). (SAMORA, 2017)

$$\begin{aligned} \vec{V}_{D R_s}^{R_0} &= \left(\frac{d\vec{OD}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{OD}}{dt} \right)_{R_s} + \vec{\Omega}_{R_s}^{R_0} \times (\vec{OD})_{R_s} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \dot{X} + \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t + \dot{\beta}_s (Z + w + d\Omega \cos \Omega t) - \dot{\gamma}_s (Y + y) \\ \dot{Y} + \dot{y}_s (X + u + d\Omega \sin \Omega t) - \dot{\alpha}_s (Z + w + d\Omega \cos \Omega t) \\ \dot{Z} + \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t + \dot{\alpha}_s (Y + y) - \dot{\beta}_s (X + u - d\Omega \sin \Omega t) \end{array} \right\}_{R_s} \end{aligned} \quad (49)$$

sendo $\vec{V}_{D R_s}^{R_0}$ a velocidade de translação do ponto D expressa em R_s em relação ao eixo de coordenadas R_0 , d a distância da massa de desbalanceamento m_u ao centro geométrico do eixo (C), conforme mostrado na Figura 32. (SAMORA, 2017)

Sendo assim, a posição do ponto D no eixo de referência R_s é definido pela Eq. (50)

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \begin{cases} X + U(y, t) + d \sin \Omega t \\ Y + y \\ Z + w(y, t) + d \cos \Omega t \end{cases}_{R_s} \quad (50)$$

Conforme descrito por Duchemin (2003), a energia de deformação U do eixo não é afetada pelo movimento de base do sistema rotativo por depender apenas das restrições adotadas (mancais), nessa formulação os efeitos de cisalhamento também são desprezados. A energia de deformação U do eixo é mostrada na Eq. (51) (SAMORA, 2017).

$$U = \frac{EI_m}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (51)$$

onde $I_m = \frac{I_x + I_z}{2}$ e E é o módulo de Young do eixo.

Os mancais são um conjunto de coeficientes de amortecimento (d_{xx} , d_{xz} , d_{zx} e d_{zz}) e rigidez (k_{xx} , k_{xz} , k_{zx} e k_{zz}) obtidos através do trabalho virtual das forças do mancal que atuam no eixo. Esses coeficientes foram mostrados na Figura 31 (SAMORA, 2017).

O trabalho virtual das forças dos mancais atuantes sobre o eixo foi mostrado na Seção 3.2.3.3 e segue as Eqs. (41) e (42).

3.2.4. Método de Elementos Finitos aplicado em um rotor embarcado

Para a formulação em elementos finitos o disco é modelado por um único elemento de massa m_D e é considerado rígido (com centro de massa C), possuindo quatro graus de liberdade, dois associados à translação ao longo das direções x e z do referencial R (deslocamentos u e w) e dois de rotação (θ e ψ), como foi mostrado na Figura 30. (SAMORA, 2017)

O vetor \overrightarrow{q}_D associado ao disco é representado pela Eq. (52).

$$\vec{q}_D = [u \ w \ \theta \ \psi]^T \quad (52)$$

O disco é considerado rígido e por isso não é considerada a energia potencial elástica, sendo considerada apenas a sua energia cinética. Aplicando-se as equações de Lagrange ao vetor \vec{q}_D , obtém-se a Eq. (53).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{\vec{q}}_D} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \vec{q}_D} = \mathbf{M}_D \ddot{\vec{q}}_D + (\mathbf{D}_D + \mathbf{D}_D^*) \dot{\vec{q}}_D + \mathbf{K}_D^* \vec{q}_D - \vec{F}_D^* \quad (53)$$

sendo \mathbf{M}_D e \mathbf{D}_D as matrizes de massa e efeito giroscópico do disco, \mathbf{D}_D^* e \mathbf{K}_D^* as matrizes geradas pelo movimento de base e o vetor \vec{F}_D^* é o vetor de forças relacionado ao movimento de base. As matrizes e vetores representativos são mostrados em Samora (2017).

A modelagem do eixo utiliza a teoria de elementos finitos de viga de Euler-Bernoulli com diâmetro e área de seção transversal circular constante, a Figura 28 expõe um elemento finito de viga adotada para o eixo. Um elemento finito do eixo possui comprimento L , dois nós, cada um deles com quatro graus de liberdade, sendo dois de translação (u_1 , u_2 , w_1 e w_2) e dois de rotação (θ_1 , θ_2 , ψ_1 e ψ_2).

O vetor de deslocamentos do eixo é descrito pela Eq. (54):

$$\vec{q}_E = [u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ \psi_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2 \ \psi_2] \quad (54)$$

que pode ser dividido conforme a Eq. (55).

$$\begin{aligned} \vec{q}_u &= [u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ \psi_1] \\ \vec{q}_w &= [u_2 \ w_2 \ \theta_2 \ \psi_2] \end{aligned} \quad (55)$$

A partir da Eq. (55) elabora-se a equação do elemento finito do eixo da forma mostrada na Eq. (56).

$$\begin{aligned} u &= \vec{N}_1(y)\vec{q}_u \\ w &= \vec{N}_2(y)\vec{q}_w \end{aligned} \quad (56)$$

sendo que \vec{N}_1 e \vec{N}_2 representam as funções de forma do elemento de viga em flexão e seus valores são mostrados pela Eq. (57).

$$\begin{aligned} \vec{N}_1(y) &= \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \\ \vec{N}_2(y) &= \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \end{aligned} \quad (57)$$

Aplicando-se as funções de forma (Eq. 57) mostradas na equação de energia cinética do eixo, e aplicando a equação de Lagrange obtém-se a Eq. (58).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_E}{\partial \dot{\vec{q}}_E} \right) - \frac{\partial T_E}{\partial \vec{q}_E} = \mathbf{M}_E \ddot{\vec{q}}_E + \mathbf{D}_E \dot{\vec{q}}_E + \mathbf{K}_E \vec{q}_E - \vec{F}_E^* \quad (58)$$

As matrizes \mathbf{M}_E , \mathbf{D}_E , \mathbf{K}_E são as matrizes de massa, amortecimento/ efeito giroscópico e rigidez do eixo, e o vetor \vec{F}_E^* é o vetor de forças geradas pela movimentação de base no eixo. Essas matrizes e vetores seguem a formulação apresentada em Samora (2017).

Aplicando-se as funções de forma (Eq. 57) mostradas na equação de energia potencial do eixo, e aplicando a equação de Lagrange obtém-se a Eq. (59).

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{q}_E} = EI_m \mathbf{K}_{u1} \vec{q}_E \quad (59)$$

sendo \mathbf{K}_{u1} a matriz de rigidez relacionada a energia potencial, sua formulação é mostrada por Samora (2017).

Como mostrado na Eq. (49) o desbalanceamento é incorporado na energia cinética do rotor, aplicando-se as equações de Lagrange obtém-se a Eq. (60):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_u}{\partial \dot{q}_u} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial q_u} = m_u d \begin{bmatrix} (\ddot{\beta}_s + \gamma_s \dot{\alpha}_s) \cos(\Omega t + \mu) - [(\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + \gamma_s^2] \sin(\Omega t + \mu) \\ (-\ddot{\beta}_s + \gamma_s \dot{\alpha}_s) \sin(\Omega t + \mu) - [(\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + \dot{\alpha}_s^2] \cos(\Omega t + \mu) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

O desbalanceamento irá produzir as forças F_{du} e F_{dw} a serem aplicadas em um nó do modelo de elementos finitos nas direções x e z para uma massa situada na posição angular μ , conforme apresentado no equacionamento elaborado por Samora (2017).

Os mancais são representados por coeficientes de amortecimento (d_{xx} , d_{xz} , d_{zx} e d_{zz}) e rigidez (k_{xx} , k_{xz} , k_{zx} e k_{zz}) obtidos através do trabalho virtual das forças do mancal que atuam no eixo. Esses coeficientes foram mostrados na Figura 31.

O trabalho virtual das forças dos mancais atuantes sobre o eixo foi mostrado na Seção 3.2.3.3. e segue as Eqs. (41) e (42). Sendo assim, a equação de movimento de um rotor embarcado é mostrada na Eq. (61).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{D}^*)\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}^*)\mathbf{q} = \mathbf{W} + \mathbf{F} + \mathbf{F}^* \quad (61)$$

No qual \mathbf{M} , \mathbf{D} e \mathbf{K} são as matrizes de massa, rigidez e do efeito giroscópico do sistema rotativo, respectivamente. As matrizes do disco e do eixo são agrupadas para formar as matrizes globais apresentadas na Eq. (61). As matrizes \mathbf{D}^* e \mathbf{K}^* e o vetor \mathbf{F}^* são incorporados pelos termos associados ao movimento de base. Os vetores \mathbf{F} e \mathbf{W} são compostos pelas forças de desbalanceamento e o peso dos componentes do sistema, respectivamente. Considere, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_E$.

Para obter a solução numérica da Eq. (61) foi utilizado o método de Newton-Raphson em conjunto com as regras trapezoidais de Newmark. Este processo de integração é apresentado em detalhes por Cavalini Jr et al. (2015).

CAPÍTULO IV

Simulação de um rotor embarcado com base de material fonônico

Essa dissertação de mestrado tem como objetivo simular a atenuação de vibrações (ondas elásticas) de base em um rotor embarcado com base de material periódico utilizando os conceitos de espalhamento de Bragg e ressonância local, como ilustrado nas Figuras 34, 35, 36 e 37, respectivamente.

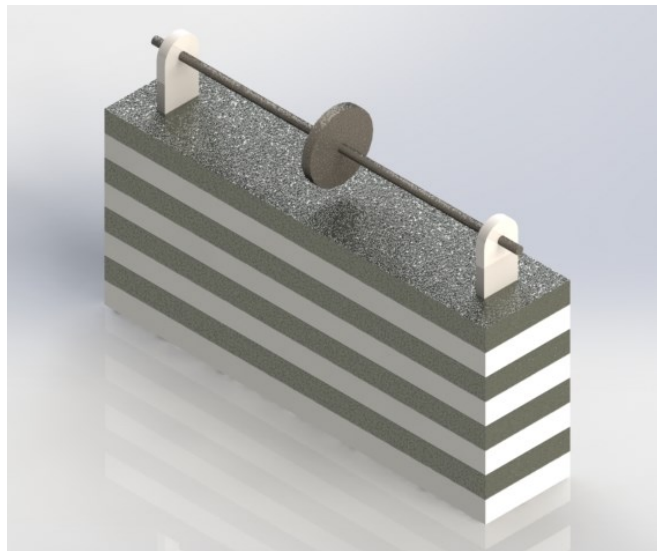


Figura 34: Rotor embarcado com base periódica esquemático que utiliza o fenômeno de espalhamento de Bragg.

A Figura 34 apresenta uma representação esquemática do rotor embarcado sob uma base periódica unidimensional bimatéria que utiliza o fenômeno de espalhamento de Bragg,

essa base periódica é composta por quatro malhas compostas por duas camadas de materiais (chumbo e epoxy) com base de comprimento de 0,8 metros e largura de 0,2 metros, cada malha possui uma altura de 0,8 metros, sendo 04 metros a altura de cada camada de material. A Figura 35 apresenta as dimensões em escala real da base periódica rotor embarcado simulado, com o intuito de facilitar a visualização dos parâmetros geométricos do rotor embarcado com base periódica de Bragg. Essa base periódica possui uma altura total de 3,2 metros e uma massa de 3680 kg.

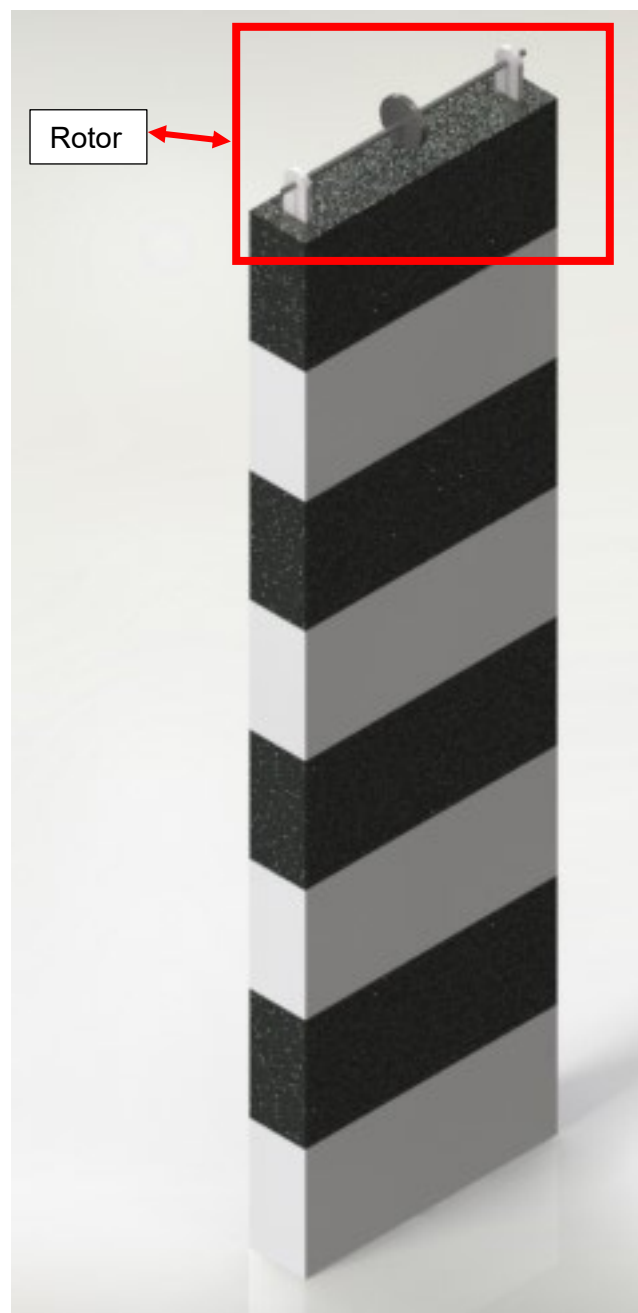


Figura 35: Rotor com base periódica em escala real

Para o cálculo do diagrama de dispersão do material fonônico que utiliza o fenômeno de espalhamento de Bragg mostrado nas Figuras 34 e 35 foi utilizada a formulação de Frazier mostrada na seção 3.1.3. através da Eq. (12).

Posteriormente, foi realizado o cálculo da atenuação longitudinal da amplitude da onda elástica após a passagem na base periódica do rotor, como mostrado na seção 3.1.4, e por fim os efeitos da vibração produzida pela excitação de base do rotor embarcado foi calculada conforme ilustrado na Seção 3.2. O material fonônico utilizado na base desse rotor é composto de quatro malhas de comprimento unitário a de 0,8 metros, sendo composta pelos materiais chumbo e epóxi com propriedades mostradas na Tabela 1.

A base periódica com propriedades de ressonância local ilustrada nas Figuras 36 e 37 possui quatro malhas, que possui uma base de chumbo com comprimento de 0,8 metros e largura de 0,2 metros, e altura da malha de 0,1 metros, composta pelo material chumbo e com ressonadores locais de massa de 100 kg e coeficiente de rigidez de $1,421 \cdot 10^7$ N/m. A base periódica com ressonadores internos possui 4 malhas, totalizando uma altura de 0,4 metros e uma massa total de 1235,2 kg, a frequência natural dos ressonadores internos é de 60Hz. A formulação utilizada é apresentada na Seção 3.1.5.

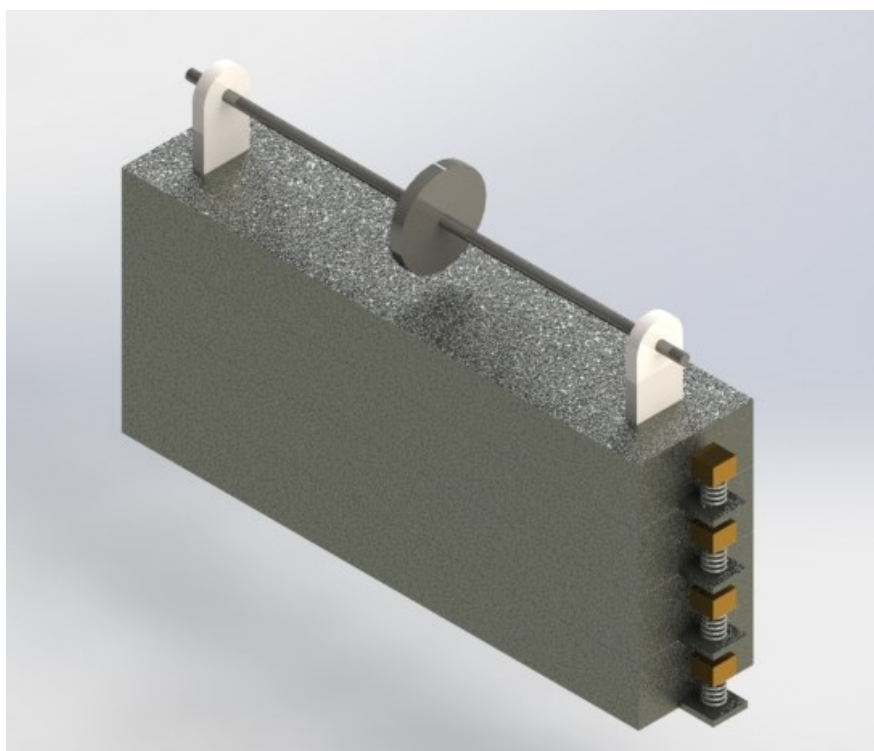


Figura 36: Rotor embarcado com base periódica com ressonador interno

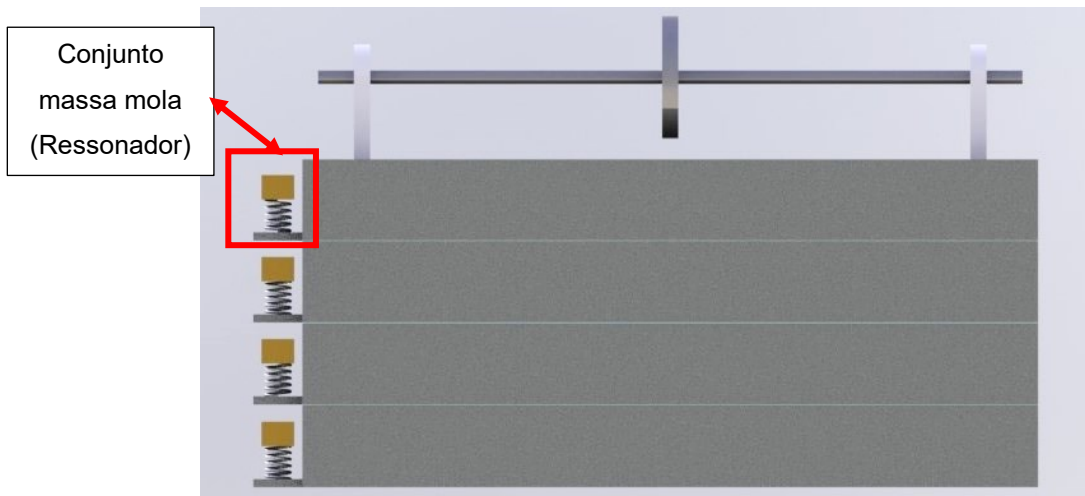


Figura 37: Visão lateral de um rotor embarcado com base periódica com ressonadores internos

Com o intuito de visualizar e comparar os efeitos da atenuação de ondas mecânicas em um rotor embarcado com base periódica, também serão realizadas simulações em uma base contínua composta pelo material chumbo ($\rho=11600$, $E=42,3$ GPa e $\nu=0,44$), com base de comprimento de 0,8 metros, largura de 0,2 metros e altura de 0,1 metros. O rotor embarcado simulado montado sob uma base de material homogêneo e contínuo é mostrada na Figura 38.

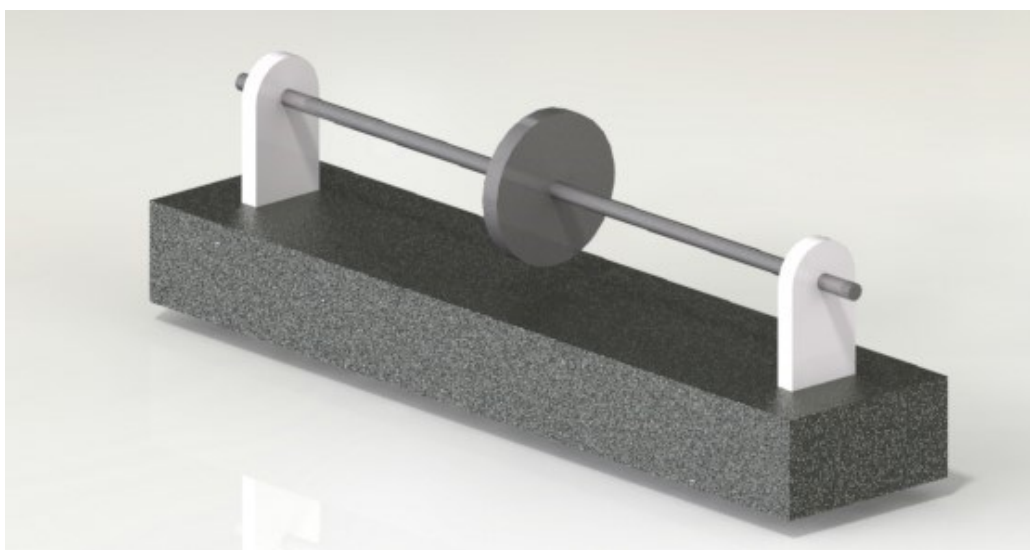


Figura 38: Rotor embarcada em base contínua de chumbo

As 3 bases simuladas foram sujeitas a uma força de vibração de 10^6 N em um intervalo de frequências de 0 a 10^4 Hz, avaliando a amplitude da vibração em função da frequência aplicada e obtendo assim o gráfico da amplitude de vibrações em função da frequência na extremidade superior das bases periódicas e da base contínua.

O rotor utilizado nas simulações possui um eixo de aço ($E=205$ GPa, $\rho=7850$ kg/m³ e $\nu=0,29$) com comprimento de 862 mm e diâmetro d de 17 mm, um disco rígido de aço de 2,637 kg com diâmetro de 150 mm de diâmetro e 20 mm de espessura, dois mancais de rolamento e uma massa de desbalanceamento.

As seções 4.1. e 4.2. irão apresentar os parâmetros do material fonônico utilizado como base e do rotor embarcado, respectivamente.

4.1. Parâmetros de simulação das bases de material fonônico

A base fonônica de Bragg será composta por quatro células unitárias bimateriais, compostas por chumbo e epóxi conforme proposto Zheng (2008), foi selecionada uma estrutura unidimensional com periodicidade na direção z , possuindo base com comprimento de 0,8 metros e 0,2 metros de largura, com tamanho de malha de 0,8 metros, sendo 0,4 metros a altura de cada um dos dois materiais da célula unitária. A altura total da base fonônica é de 3,2 metros e a sua massa é de 3680 kg. As propriedades dos materiais utilizados na análise são mostradas na Tabela 1.

Tabela 1: Propriedades do material fonônico longitudinal selecionado

Material	Densidade (kg/m ³)	Módulo elástico (GPa)	Coefficiente de Poisson
Chumbo	11600	42,3	0,44
Epóxi	1180	4,43	0,35

Para a simulação do material fonônico com ressonadores internos foram utilizadas quatro malhas de chumbo (propriedades mecânicas na Tabela 1), com comprimento de malha unitária de 0,1 metros, base com comprimento de 0,8 metros e largura de 0,2 metros, cada célula unitária possui um ressonador em paralelo com massa de 100 kg e coeficiente de rigidez de $1,421 \cdot 10^7$ N/m. A altura total da estrutura periódica é 0,4 metros e a sua massa total é 1235,2 kg

4.2. Parâmetros do rotor embarcado simulado

O rotor utilizado é representado no modelo por 33 elementos finitos. possui um eixo flexível de aço de comprimento L de 862 mm e diâmetro d de 17 mm ($E=205$ GPa, $\rho=7850$ kg/m³ e $\nu=0,29$), um disco rígido de aço, com diâmetro de 150 mm de diâmetro, 20 mm de espessura e massa de 2,637 kg, dois mancais de rolamento localizados nos nós 4 e 31, uma massa de desbalanceamento de 487,5 g.mm / 0° aplicada ao disco do rotor, a velocidade de rotação do rotor (Ω) é de 1200 rpm, um sensor de deslocamento disposto ortogonalmente no nó 16 para medir a vibração do disco do rotor. O modelo de EF foi otimizado por Samora (2017) obtendo- se os parâmetros dos mancais de rolamento e alguns ajustes aos demais parâmetros do rotor. As dimensões e geometria do rotor simulado são mostradas na Figura 39.

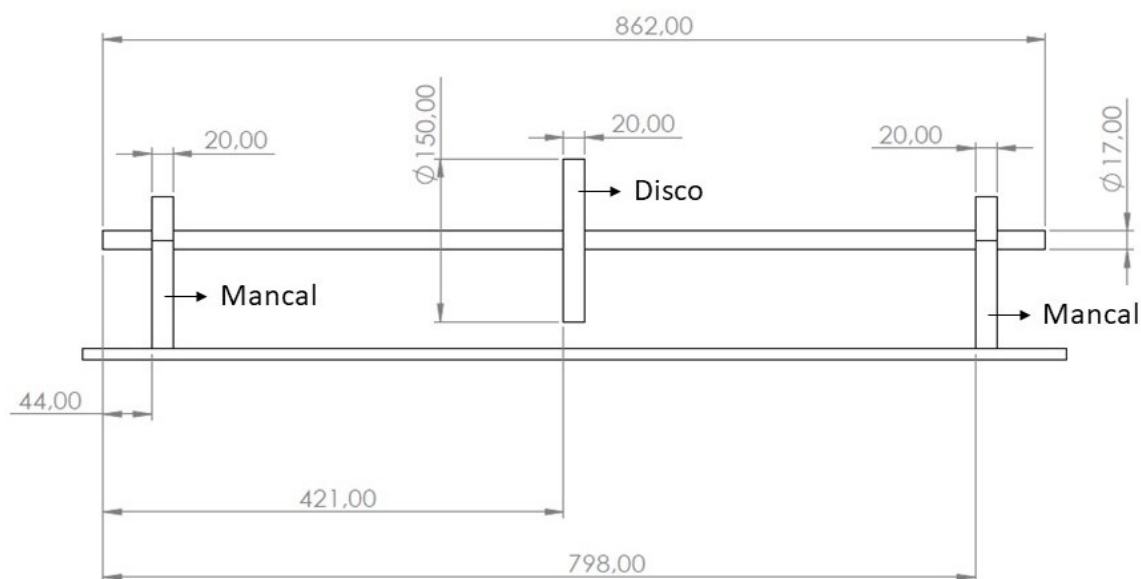


Figura 39: Vista lateral do rotor embarcado a ser simulado com dimensões em milímetros.

4.3. Hipóteses

As hipóteses definidas para o modelo de simulação do sistema rotativo e do material periódico são mostradas abaixo:

- (H0) As energias dissipadas na forma de calor e som serão desconsideradas;
- (H1) Os contornos presentes nas interfaces do material periódico serão considerados perfeitos, com a inexistência de variações de forma e propriedades mecânicas;
- (H2) Na análise será desconsiderada a atenuação presente nas ondas elásticas transversais devido às propriedades do material periódico;
- (H3) Superfícies e massas consideradas constantes.

Capítulo V

Resultados

Esta seção apresenta os resultados da amplitude do deslocamento da face superior das estruturas periódicas e da estrutura contínua em função da frequência, os diagramas de dispersão das estruturas fonônicas de Bragg e de ressonância local. Posteriormente são apresentadas as velocidades críticas do rotor através do diagrama de Campbell, e a vibração produzida nas direções x e z do disco do rotor isento de vibrações de base.

Na sequência são realizadas as simulações das vibrações produzidas no rotor embarcado apresentado no capítulo IV, montado sobre os 3 modelos de base apresentados, base fonônica de Bragg, base fonônica com ressonador interno e base de material contínuo. Em todas as situações uma força harmônica igualmente distribuída é aplicada na superfície inferior da base.

5.1. Diagramas de dispersão e propriedades de atenuação nos materiais periódicos simulados

Essa seção apresenta os diagramas de dispersão e a amplitude do deslocamento em função da frequência calculados para os materiais fonônicos de Bragg e com ressonância local apresentados na seção IV.

5.1.1. Material fonônico construído com o fenômeno de espalhamento de Bragg

O material fonônico elaborado de acordo com os princípios do fenômeno do espalhamento de Bragg, construído por 4 malhas unidimensionais na direção z, com 2 camadas em cada malha, uma de chumbo e uma de epóxi, como apresentado no Capítulo IV, esse material fonônico foi apresentado nas Figuras 34 e 35.

Para a simulação da atenuação de ondas longitudinais no material fonônico que utiliza o fenômeno de espalhamento de Bragg foi utilizada a equação de dispersão desenvolvida por (FRAZIER,2010), mostrada através da Eq. (12). O diagrama de dispersão obtido é mostrado na Figura 40.

O diagrama de dispersão do material fonônico de Bragg produziu um diagrama padrão para materiais fonônicos, apresentando duas regiões bem distintas de propagação, a região de propagação em frequências menores, denominada de ramo acústico, e a região de propagação em frequências maiores, chamada de ramo ótico, e duas regiões de propagação proibida, a banda proibida e a banda de parada. O ramo acústico calculado se encontra abaixo da frequência de 448 Hz, uma faixa proibida aparece entre as frequências de 448 e 2587 Hz, o ramo ótico ocorre entre as frequências de 2587 a 2626 Hz, e acima da frequência de 2626 Hz é mostrada a região da banda de parada. A linha inferior em vermelho da Figura 40 apresenta o ramo acústico, a linha superior em azul apresenta o ramo ótico, o espaço entre o ramo acústico e o ramo ótico apresenta a banda proibida, e acima do ramo ótico é apresentada a banda de parada.

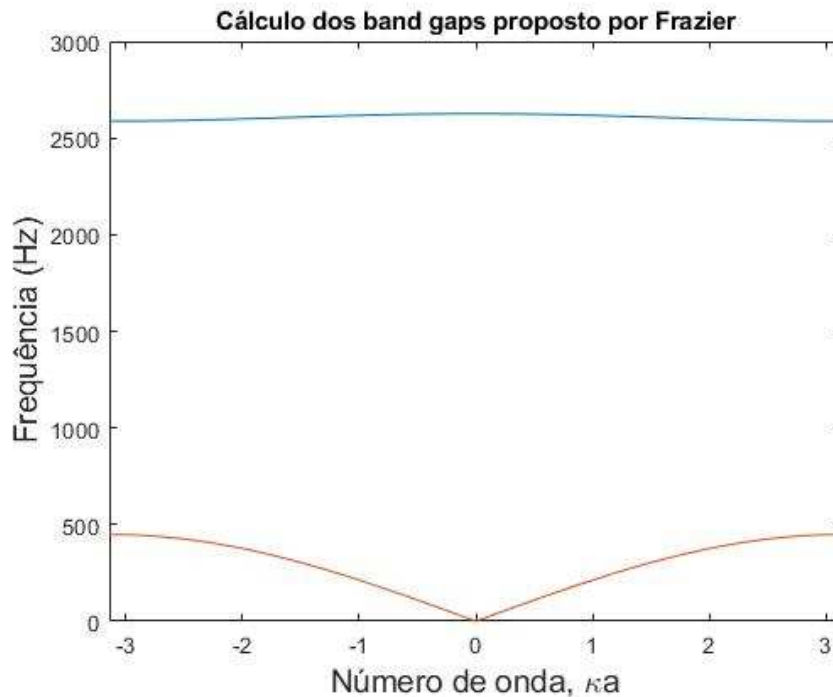


Figura 40: Diagrama de Dispersão do material periódico calculado através do método de Frazier.

Posteriormente à construção dos diagramas de dispersão, a amplitude do deslocamento em resposta a uma força no domínio das frequências foi calculada como apresentado na Figura 41. Esse gráfico apresenta a amplitude do deslocamento, na extremidade superior da base, em relação a uma força de excitação 10^6 N aplicada homoganeamente na parte inferior da base fonônica em função da frequência da excitação. O deslocamento em função da frequência, mostra claramente faixas de frequência nas quais ocorre atenuação das ondas elásticas, essas regiões são a banda proibida e a banda de parada. Nas proximidades da frequência de 2500 a 2600 Hz percebe-se uma elevação rápida do nível de vibração, conforme era esperado por se tratar da região do ramo ótico. Importante destacar que a banda proibida obtida possui as mesmas faixas de frequências calculadas na Figura 40, conforme era esperado.

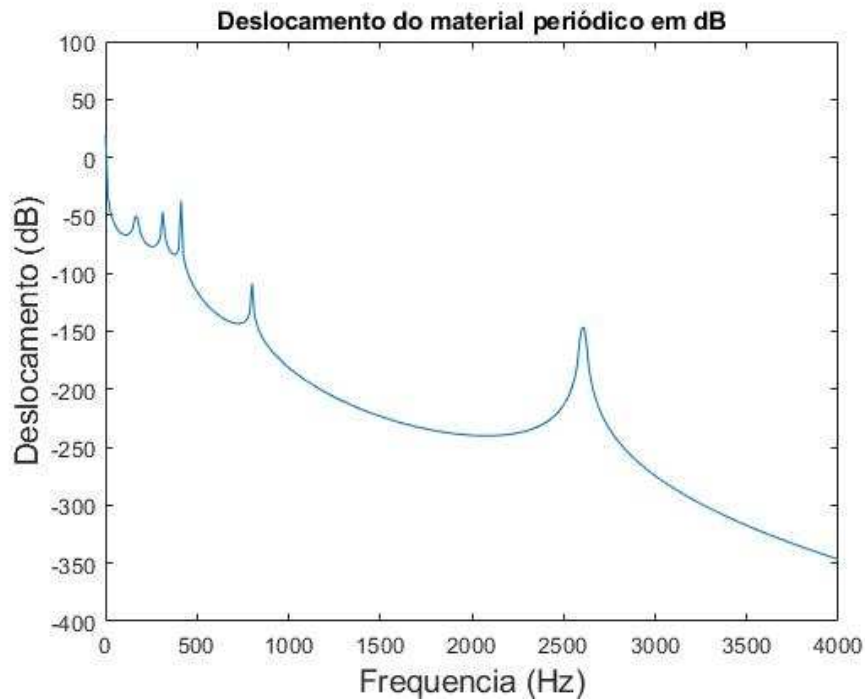


Figura 41: Deslocamento do material periódico em decibéis (m).

5.1.2. Material fonônico com ressonadores internos

A estrutura fonônica que segue os princípios do fenômeno de ressonância local, é constituída por 4 malhas unidimensionais na direção z , na qual cada malha possui um ressonador em paralelo, como apresentado no Capítulo IV, essa estrutura periódica foi apresentada nas Figuras 36 e 37.

Para simulação de uma estrutura fonônica com ressonadores internos foi utilizado o método apresentado por (HUSSEIN, 2014) na seção 3.1.5. O primeiro passo dessa simulação foi a construção do diagrama de dispersão seguindo a Eq. (25), o diagrama de dispersão do material periódico com ressonador interno simulado é mostrado nas Figuras 42 e 43.

A Figura 42 apresenta o diagrama de dispersão da estrutura periódica apresentada, deve-se notar que na frequência de 60 Hz surgem valores imaginários no diagrama, como pode ser visto na visão ampliada do diagrama de dispersão apresentada na Figura 43, nas redondezas dessa frequência é produzida uma região de propagação proibida, atenuando a propagação de ondas mecânicas. Ainda na Figura 42, nota-se que acima da frequência de 6079 Hz começam a surgir valores imaginários no gráfico de dispersão, indicando o início da banda de parada do material fonônico.



Figura 42: Diagrama de dispersão de um material fonônico com ressonância local.

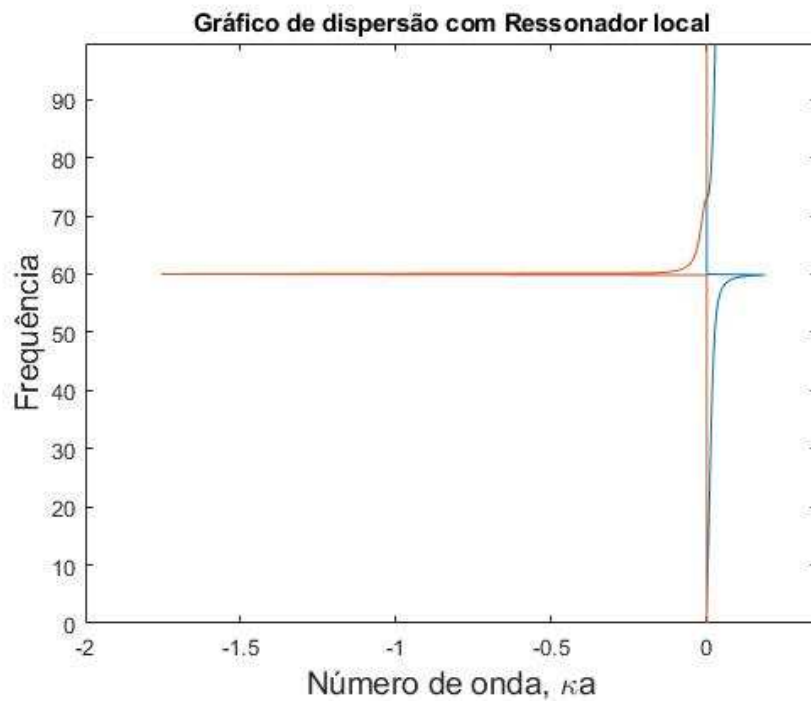


Figura 43: Diagrama de dispersão de um material fonônico com ressonância local aproximado, mostrando a banda proibida em 60 Hz

Na sequência, foi calculada a resposta do deslocamento a uma força harmônica no intervalo de frequências de 0 4000 Hz, utilizando-se o método de elementos finitos elaborado em função da equação de movimento do material periódico com ressonância local mostrada na Eq. (24) na Seção 3.1.5. Através dessas equações obteve-se a amplitude do deslocamento da face superior da base fonônica em resposta a uma força harmônica de 10^6 N aplicada homogeneamente a face inferior da base fonônica, a amplitude do deslocamento obtida em função da frequência da excitação aplicada é apresentada na Figura 44. Nesse gráfico identifica-se uma atenuação significativa da amplitude do deslocamento nas proximidades da frequência de 60 Hz como havia sido projetado, e apresentado na Figura 42. Também é importante ressaltar a ocorrência de uma ressonância na proximidade de 2400 Hz.

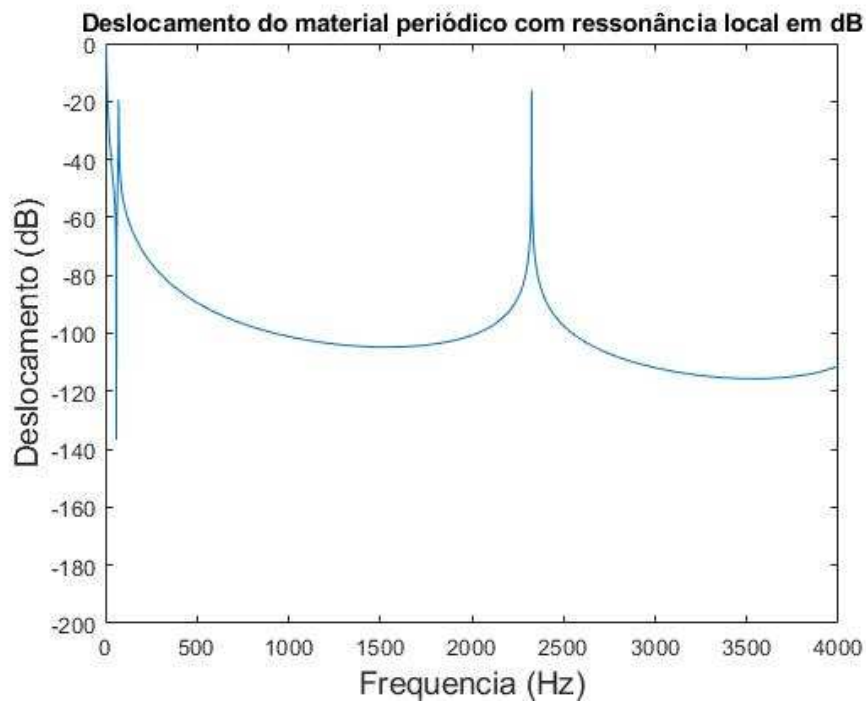


Figura 44: Deslocamento do material com ressonador interno em decibéis (m).

5.1.3. Rotor embarcado com base contínua

Para facilitar a visualização e comparação dos efeitos da dissipação de energia nas bases fonônicas foi realizada a simulação da resposta de uma base contínua de chumbo, apresentada na Figura 38, a uma força harmônica de 10^6 N aplicada na sua base inferior, o gráfico de amplitude do deslocamento em função da frequência de excitação calculada é mostrada na Figura 45. É importante destacar a existência de uma ressonância nas proximidades de 2900 Hz.

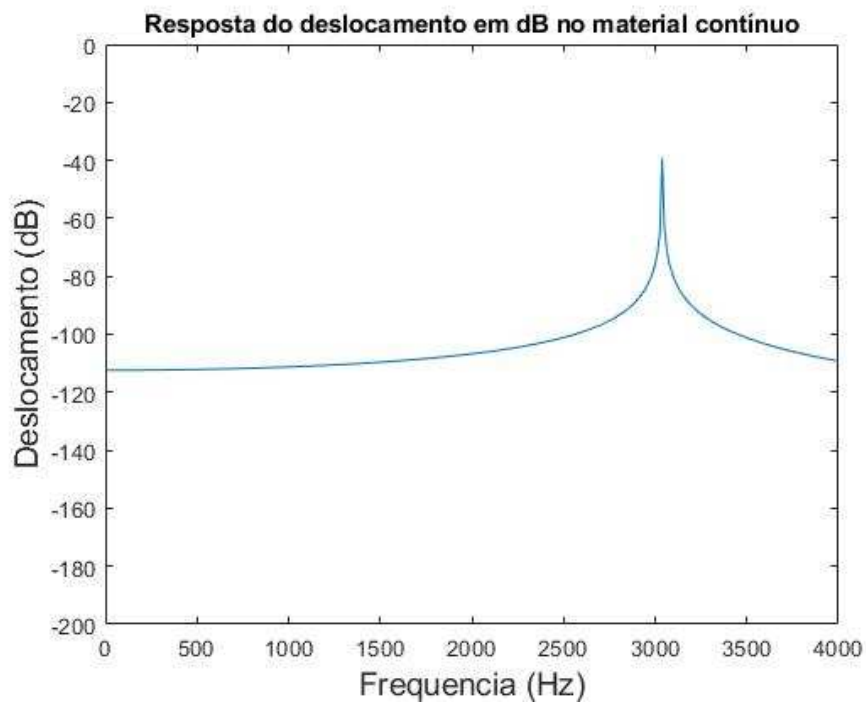


Figura 45: Amplitude do deslocamento do material contínuo em decibéis (m).

5.2. Simulações do rotor embarcado com bases periódicas

Nessa seção são mostrados os resultados das simulações da resposta vibracional do disco do rotor embarcado descrito na seção 4.2. aos deslocamentos de base calculado para cada um dos 3 tipos de base selecionadas, base fonônica de Bragg, base com ressonador interno e base contínua, nas frequências de 60 Hz (frequência de atenuação do ressonador interno), 1000 Hz (dentro da banda proibida do material periódico) e 2600 Hz (dentro da zona ótica do material periódico).

O rotor simulado está operando a uma frequência de 1200 rpm (20 Hz) e os parâmetros de simulação do rotor são apresentados na Seção 4.2. As características do rotor embarcado simulado e as suas propriedades dinâmicas considerando uma excitação de base nula são mostradas na seção 5.2.1.

5.2.1. Resposta do rotor sem excitações de base

As dimensões e características do rotor embarcado a ser simulado são apresentadas nas Seção 4.2., o sistema rotativo utilizado nas simulações foi apresentado na Figura 39. Para realizar os cálculos da resposta de vibração foi considerado um rotor composto de um disco rígido, um eixo de aço flexível, dois mancais de rolamento e uma massa de desbalanceamento, esse rotor foi discretizado em um modelo de 33 elementos finitos, como mostrado na Figura 46, para a realização da simulação das vibrações apresentadas em função das suas características rotativas e das suas excitações de base.

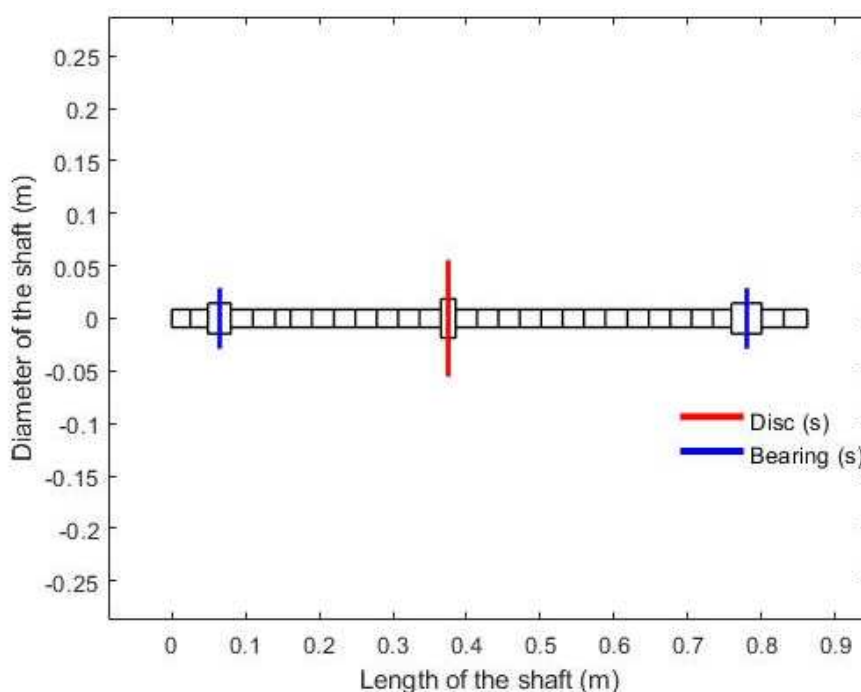


Figura 46: Representação do rotor simulado

As velocidades críticas do rotor simulado foram calculadas através do diagrama de Campbell apresentado na Figura 47, as velocidades críticas desse rotor são 2503.21 rpm (FW) e 2279.92 rpm (BW), a velocidade crítica representa a frequência na qual a resposta devido ao desbalanceamento de massa é máxima, podendo gerar vibrações de amplitudes elevadas no rotor.

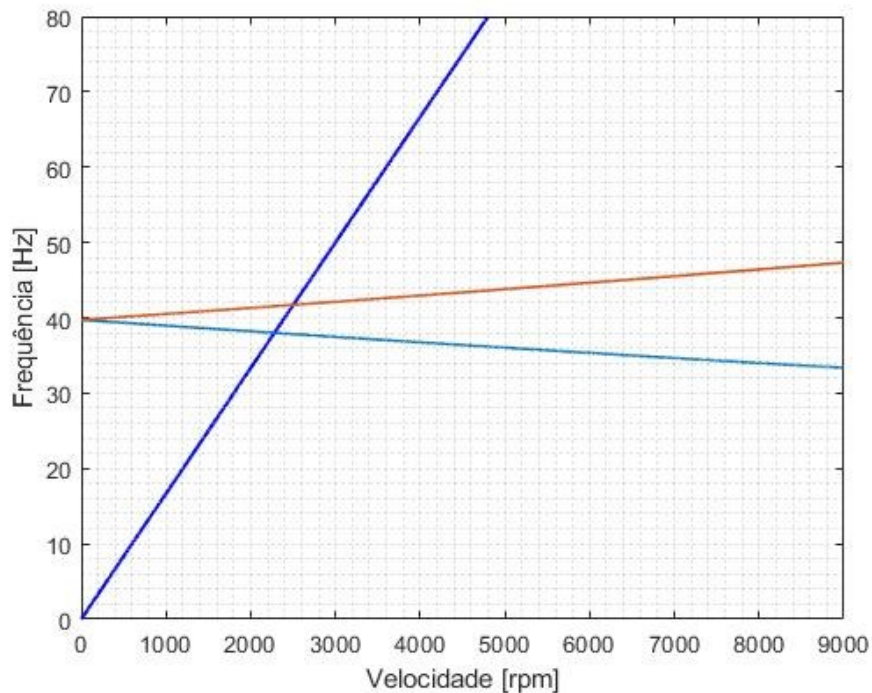


Figura 47: Diagrama de Campbell do rotor simulado

Para realizar a comparação dos efeitos das excitações de base na vibração global de um rotor embarcado é necessário realizar a separação entre dois tipos de resposta, a resposta às vibrações produzidas pelo rotor através da massa de desbalanceamento e dos demais componentes do rotor e a vibração produzida pela excitação da base periódica. Com o intuito de separar essas duas respostas nesta seção a amplitude do deslocamento do disco do rotor nas direções x e z foi simulada, considerando uma excitação de base nula, identificando assim os parâmetros de vibração do disco do rotor nas direções x e z produzido pelos componentes internos do rotor, como mostrado nas Figuras 48 e 49.

O nível de vibração apresentado em ambos os casos é harmônico em uma frequência de 20 Hz, frequência de rotação do rotor embarcado, em ambos os sentidos a amplitude do deslocamento no disco é da ordem de 10^{-4} m, como mostrado nos gráficos das Figuras 48 e 49. Esses valores serão utilizados para facilitar a visualização e comparação do impacto das excitações de base no comportamento vibratório do rotor.

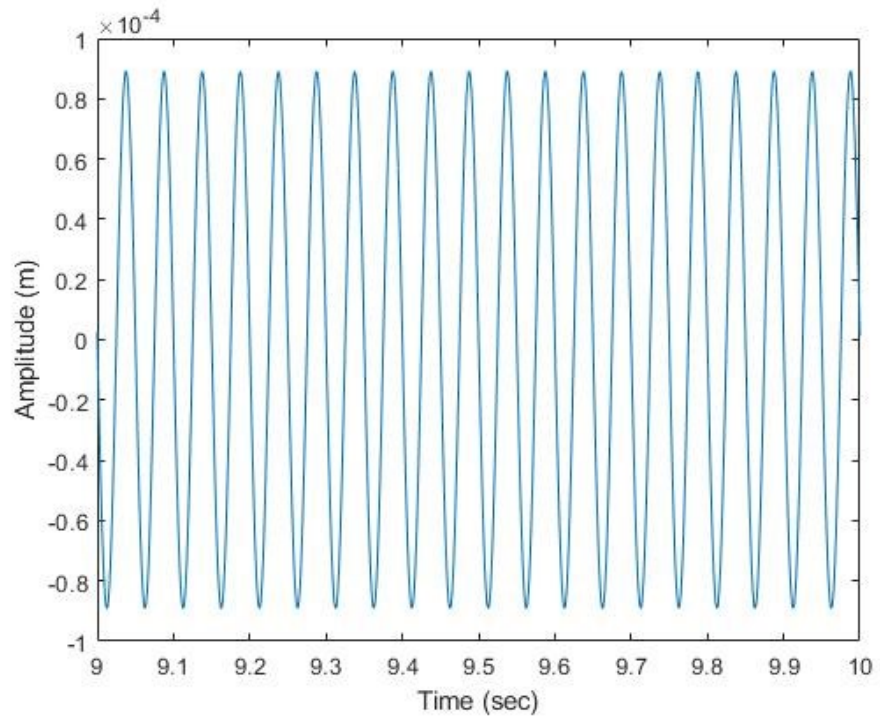


Figura 48: Direção x (**u**)

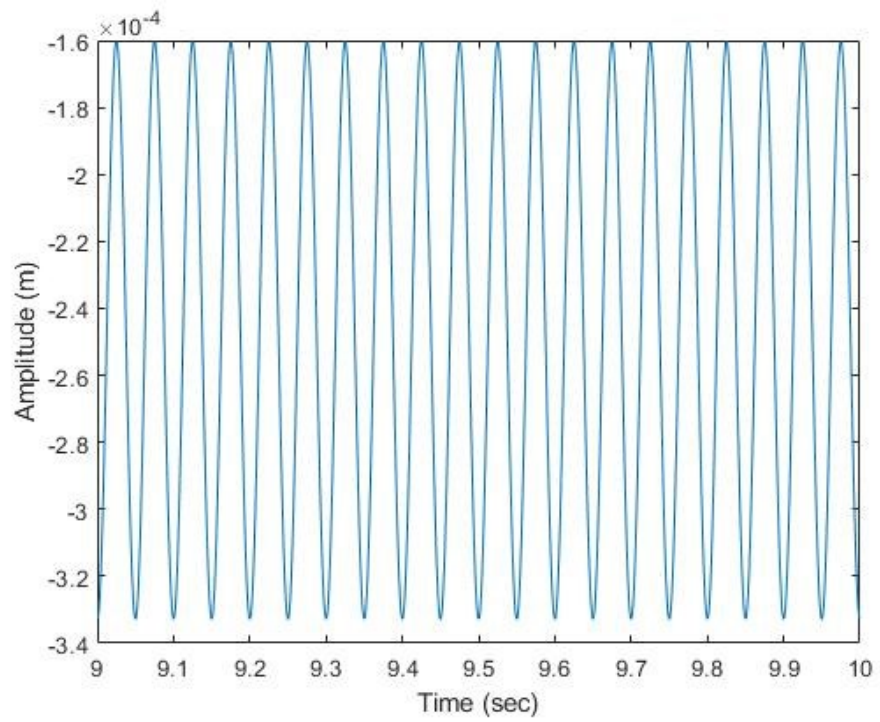


Figura 49: Direção z (**w**)

5.2.2. Frequência de atenuação do ressonador interno (60 Hz)

Nessa subseção, será realizada a simulação da vibração de um rotor embarcado na região do disco do rotor, sujeito a uma excitação na área inferior da sua base através de uma força harmônica igualmente distribuída de 10^6 N com 60 Hz de frequência. A frequência de 60 Hz foi escolhida por estar na banda de atenuação da base periódica com ressonador interno, conforme foi apresentado nas Figuras 42 e 43.

Com o intuito de avaliar a efetividade desse tipo de base para atenuação de vibrações em um rotor embarcado, foram calculados os deslocamentos na extremidade superior da base de material contínuo, material periódico de Bragg e material periódico com ressonadores internos, os gráficos que apresentam o deslocamento produzido por cada uma dessas bases são mostrados nas Figuras 50 a 52, respectivamente.

Através desses gráficos é possível perceber uma menor amplitude de vibração apresentada na face superior da base periódica com ressonância local, como era esperado por essa frequência estar no interior da banda proibida do material.

A Figura 50 apresenta o deslocamento da face superior base contínua na direção Z_0 em função do tempo, essa base será utilizada como objeto de comparação, para avaliar as características de atenuação das bases fonônicas simuladas. A amplitude do deslocamento apresentado é da ordem de 10^{-5} metros.

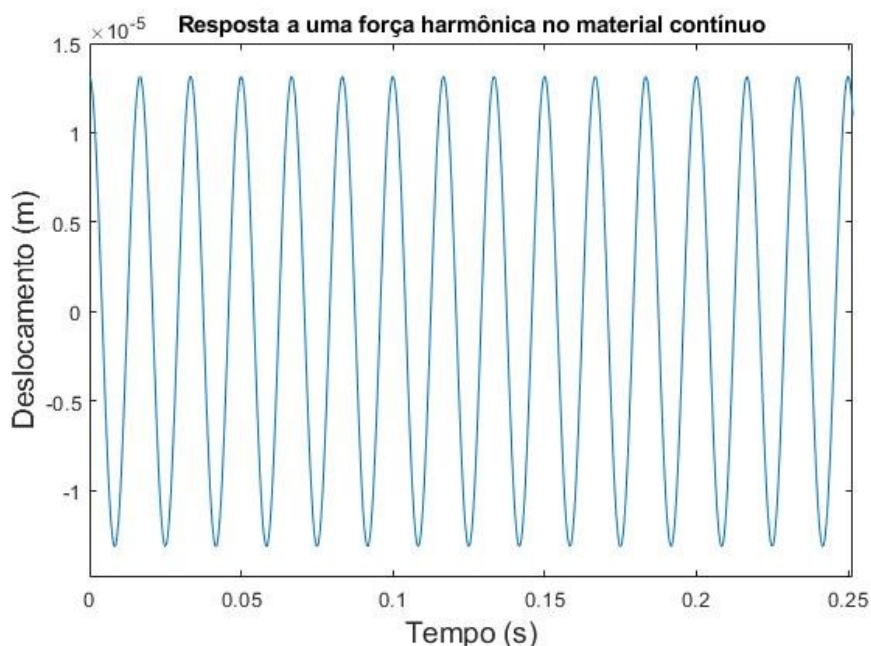


Figura 50: Vibração de base do rotor com base contínua.

O deslocamento na direção Z_0 na face superior da base fonônica de Bragg em função do tempo é mostrado na Figura 51, vale destacar que na frequência de 60 Hz essa estrutura periódica se encontra em uma região de energia permitida, o ramo acústico, e por isso não apresenta efeitos de atenuação de ondas, apresentando deslocamentos de amplitude elevada, da ordem de 10^{-3} metros.

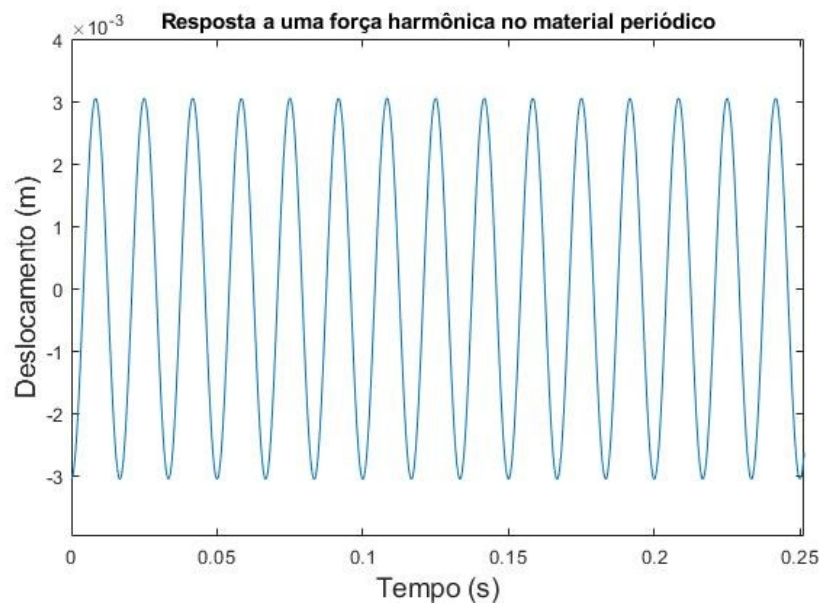


Figura 51: Vibração de base do rotor com base periódica de Bragg.

O deslocamento da face superior da base fonônica com ressonadores internos, apresenta um gráfico de deslocamento na direção Z_0 em função do tempo conforme mostrado na Figura 52. Através desse gráfico identifica-se a capacidade de absorção de ondas elásticas nas frequências no interior da banda de atenuação da estrutura fonônica com ressonadores internos, a amplitude do deslocamento nesse material foi da ordem de 10^{-6} metros, enquanto foi de 10^{-5} e $4 \cdot 10^{-3}$ metros nas bases contínua e fonônica de Bragg, respectivamente, provando a hipótese inicial de redução do nível de vibrações na frequência natural do ressonador paralelo à estrutura periódica.

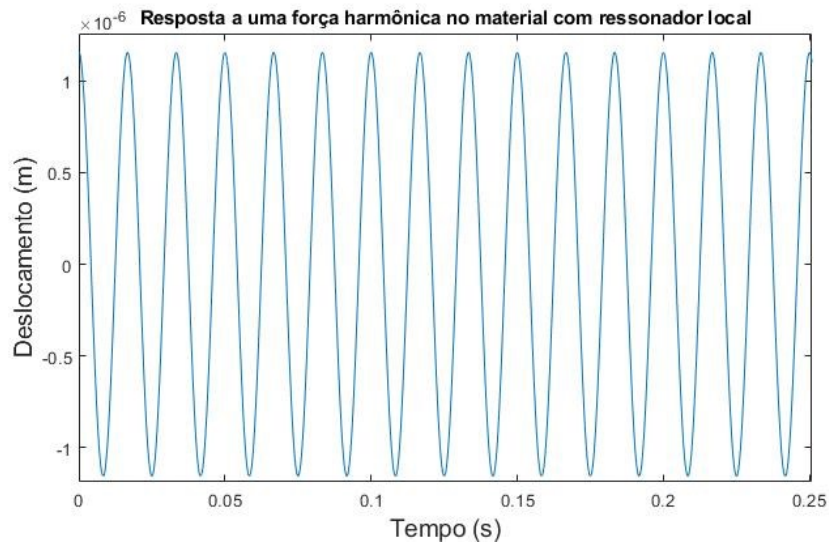


Figura 52: Vibração de base do rotor com base periódica com ressonância local.

Os deslocamentos (u e w) presentes nas direções X e Y do disco do rotores embarcados com base contínua, base periódica bimaterial de Bragg e base periódica com ressonador local, na frequência de 60 Hz, são mostrados nas Figuras 53 a 58, respectivamente.

Os gráficos apresentados nessa seção mostram 2 tipos de sinais, as linhas de vermelho apresentam o deslocamento gerado exclusivamente pelos componentes do rotor e as linhas em azul apresentam o deslocamento produzido pelos efeitos combinados das excitações de base e dos componentes do rotor. A Figura 58 demonstra o eficiência da atenuação de vibrações do material fonônico com ressonador interno na direção z para a frequência de 60 Hz, já que as amplitudes de vibração são bem menores que nos outros casos.

As Figuras 53 e 54 apresentam a resposta do rotor embarcado sobre uma base contínua nas direções x e z , respectivamente. Na direção x , percebe-se uma influência praticamente nula da excitação de base provocada na direção z , já que se identifica no gráfico apenas a excitação causada pelos componentes do rotor, curva em vermelho, como mostrado na Figura 53. Na direção z , que é a mesma da excitação percebe-se uma influência considerável da excitação de base, já que a curva em azul (esforços combinados da excitação de base e dos componentes do rotor) é significativamente maior que a curva em vermelho (deslocamento causado pelos componentes do rotor), conforme é visto na Figura 54.

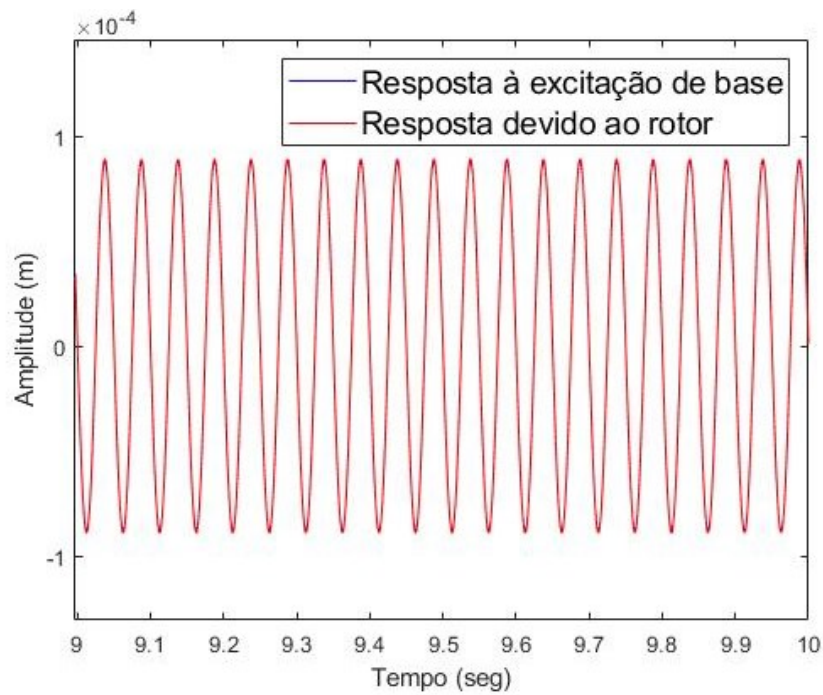


Figura 53: Deslocamento (u) do disco do rotor com base contínua na direção x para a frequência de 60 Hz.

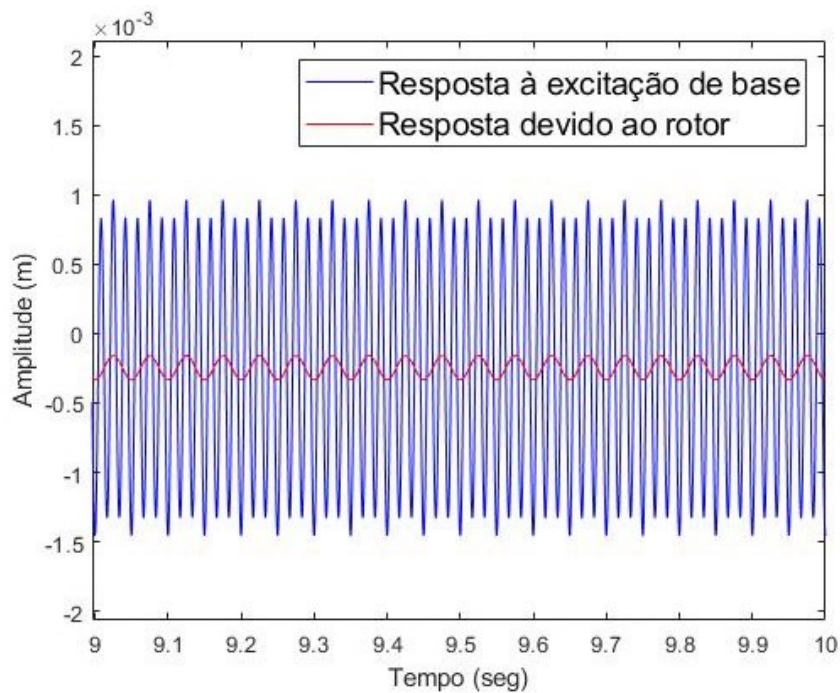


Figura 54: Deslocamento (w) do disco do rotor com base contínua na direção z para a frequência de 60 Hz.

Analisando-se a resposta da vibração no disco em um rotor embarcado com uma base periódica de Bragg, na frequência de atenuação do ressonador local proposto (60 Hz), frequência na qual a base fonônica se encontra no ramo acústico, identifica-se um grande impacto da excitação de base no deslocamento do disco do rotor tanto na direção x quanto na direção z, conforme mostrado na Figuras 55 e 56. A Figura 56 mostra que o deslocamento causado pelos componentes do rotor (curva em vermelho) é muito menor que o causado pela excitação de base no material periódico de Bragg (curva em azul), mostrando que o principal responsável pela excitação do disco é causada pela base fonônica de Bragg. Devido ao efeito giroscópico gerado pelas elevadas excitações na direção z, o deslocamento do disco na direção x, como mostrado na Figura 55, apresenta também um valor superior ao deslocamento causado pelos componentes do rotor (curva em vermelho).

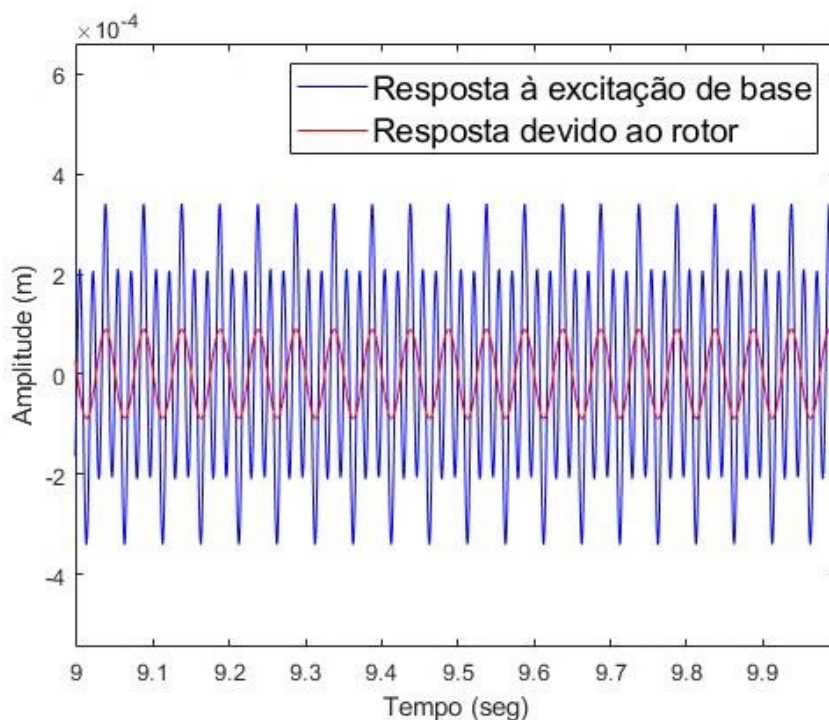


Figura 55: Movimentação (u) do disco do rotor com base periódica de Bragg na direção x para a frequência de 60 Hz.

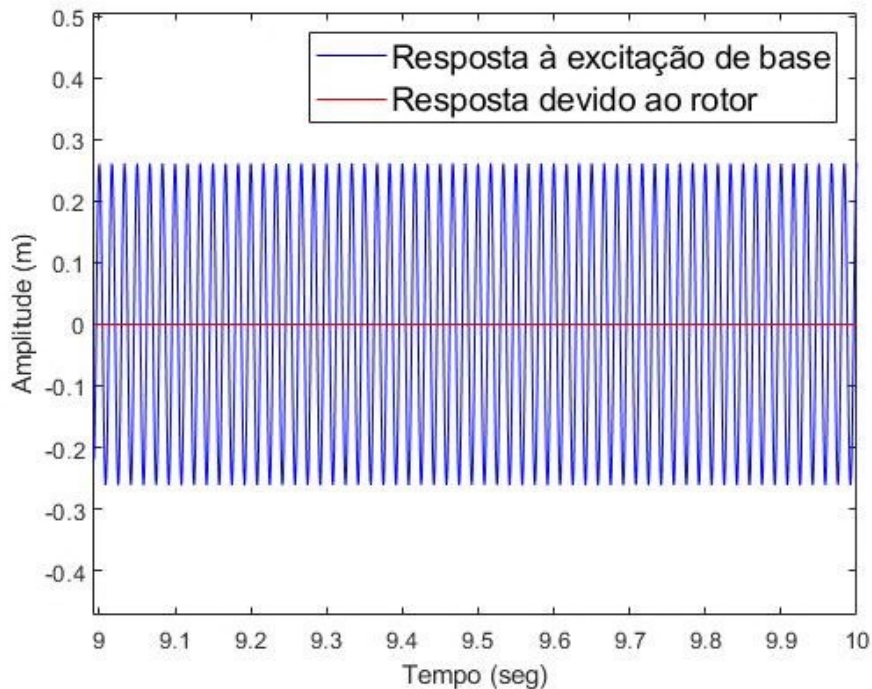


Figura 56: Deslocamento (w) do disco do rotor com base periódica de Bragg na direção z para a frequência de 60 Hz.

O rotor embarcado com base periódica com ressonância local na frequência de 60 Hz, demonstra que essa base periódica é efetiva na redução do nível de vibração na direção da excitação, tanto na direção da excitação z , quanto na direção transversal x , como mostrado nas Figuras 57 e 58. A Figura 57 mostra que o deslocamento do disco na direção x é totalmente causado pelos componentes do rotor, tendo uma influência mínima da excitação na direção z aplicada na base periódica. O deslocamento produzido no disco do rotor na direção z , apresentado na Figura 58, demonstra que o deslocamento total do disco rígido causado pela excitação de base e os componentes do rotor (curva em azul), é pouco maior do que o produzido apenas pelos componentes do rotor em vermelho, apresentado um deslocamento inferior ao ocorrido na base contínua e na base periódica de Bragg, mostradas nas Figuras 56 e 54, respectivamente, demonstrando assim a efetividade da base fonônica com ressonadores internos para atenuação de ondas elásticas na frequência natural do ressonador interno.

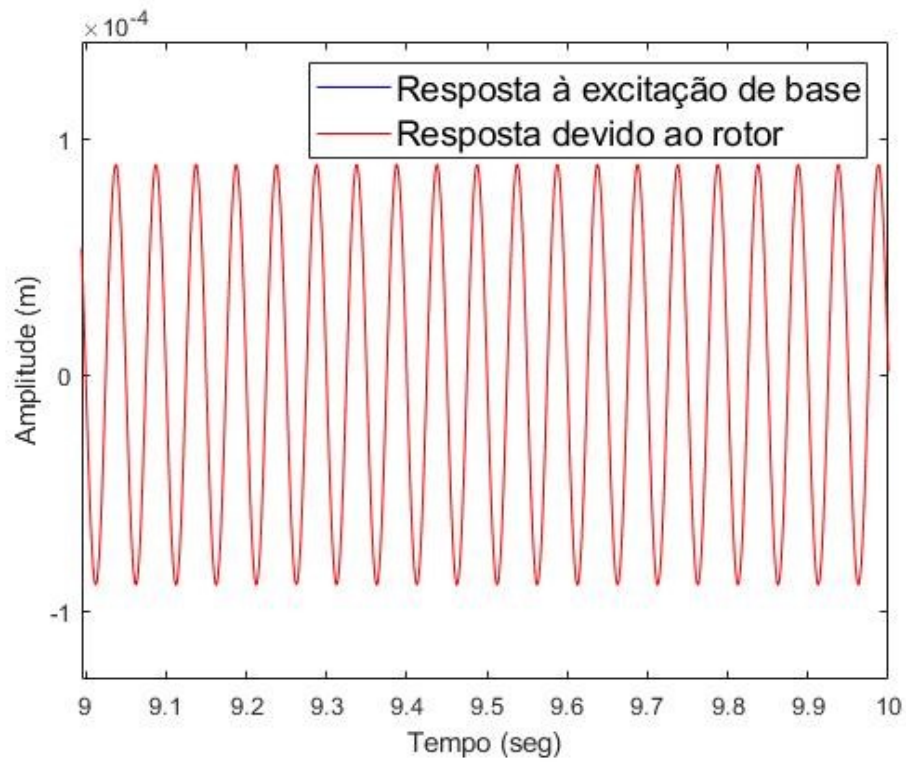


Figura 57: Deslocamento (u) do disco do rotor com base periódica com ressonância local na direção x para a frequência de 60 Hz.

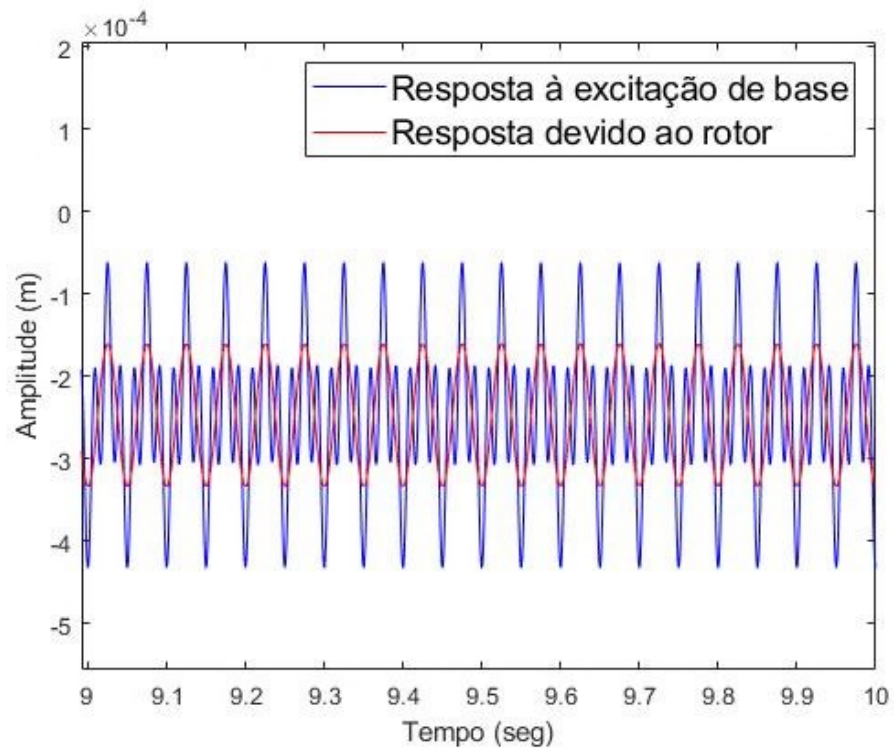


Figura 58: Movimentação (w) do disco do rotor com base periódica com ressonância local na direção z para a frequência de 60 Hz.

Concluindo, essa subseção demonstrou a efetividade da base fonônica com ressonadores internos para atenuação de vibrações na sua banda proibida, conforme apresentado na Figura 58, quando comparado com a base contínua e base periódica de Bragg, mostradas nas Figuras 54 e 56.

5.2.3. Frequência no interior da banda proibida do material fonônico de Bragg (1000 Hz)

Na sequência, foram calculados os deslocamentos apresentados pelas bases do rotor devido a uma excitação na frequência de 1000 Hz que se encontra no interior da banda proibida do material fonônico que utiliza o fenômeno de espalhamento de Bragg. As bases de material contínuo, material periódico com mecanismo de espalhamento de Bragg e de material fonônico com ressonadores locais apresentaram a resposta de deslocamento mostrada nas Figuras 59 a 61.

Os gráficos apresentados nas Figuras 59 a 61 mostram uma menor amplitude de vibração no material periódico de Bragg, como era esperado por essa frequência estar dentro da sua banda proibida.

A Figura 59 mostra o deslocamento da face superior da base contínua na direção Z_0 em função do tempo, a base contínua é utilizada como objeto de comparação, para avaliar os efeitos de atenuação das bases fonônicas simuladas. A amplitude do deslocamento apresentado pela base contínua na frequência de 1000 Hz é da ordem de 10^{-5} metros.

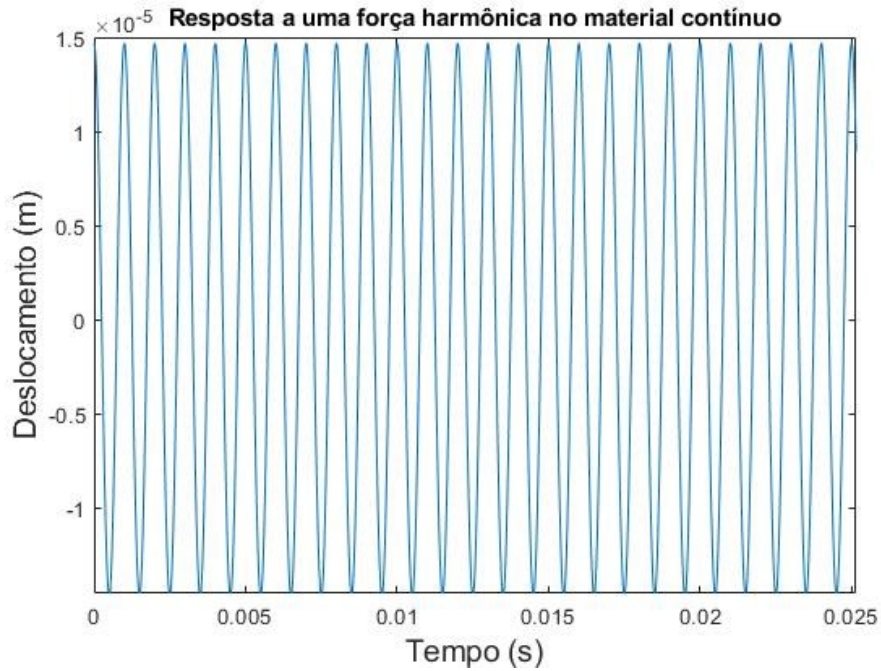


Figura 59: Resposta da base contínua a uma excitação de 1000 Hz.

O deslocamento obtido na face superior da base periódica de Bragg na direção Z_0 é mostrado na Figura 60, vale destacar que na frequência de 1000 Hz essa base se encontra na sua banda proibida e por conta disso apresentou uma atenuação considerável da propagação de ondas elásticas, atingindo uma amplitude de deslocamento da ordem de 10^{-8} metros, sendo inferior ao deslocamento apresentado na base contínua e na base periódica com ressonadores internos.

A base periódica com ressonadores internos apresentou o gráfico de deslocamento na sua face superior na direção Z_0 apresentado na Figura 61, para uma excitação na frequência de 1000 Hz. Vale notar que nessa frequência a propagação das ondas elásticas irá ocorrer normalmente, por não se tratar de uma banda proibida. A amplitude do deslocamento nesse caso foi da ordem de 10^{-5} metros.

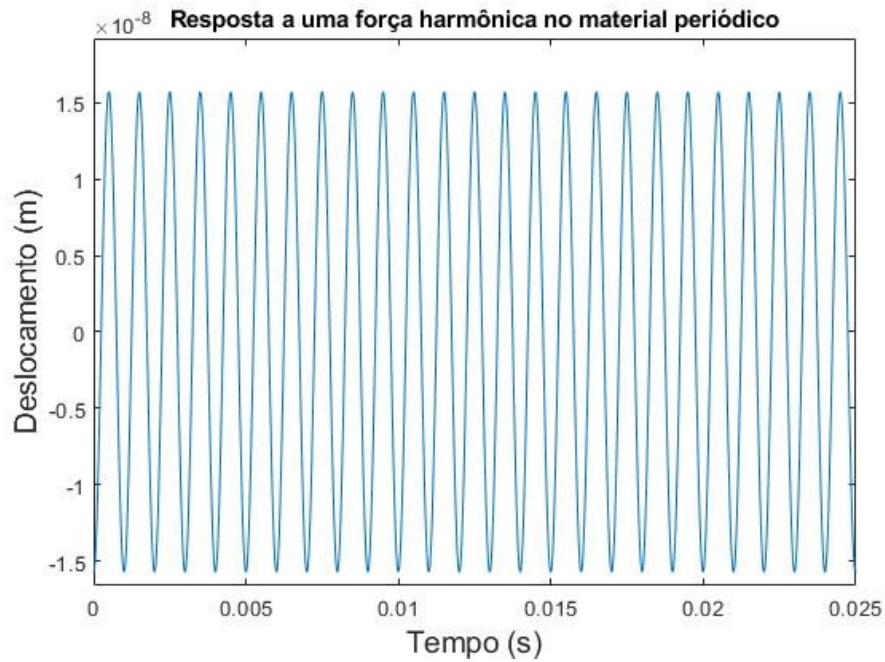


Figura 60: Resposta a uma excitação de 1000 Hz do material fonônico de Bragg proposto.

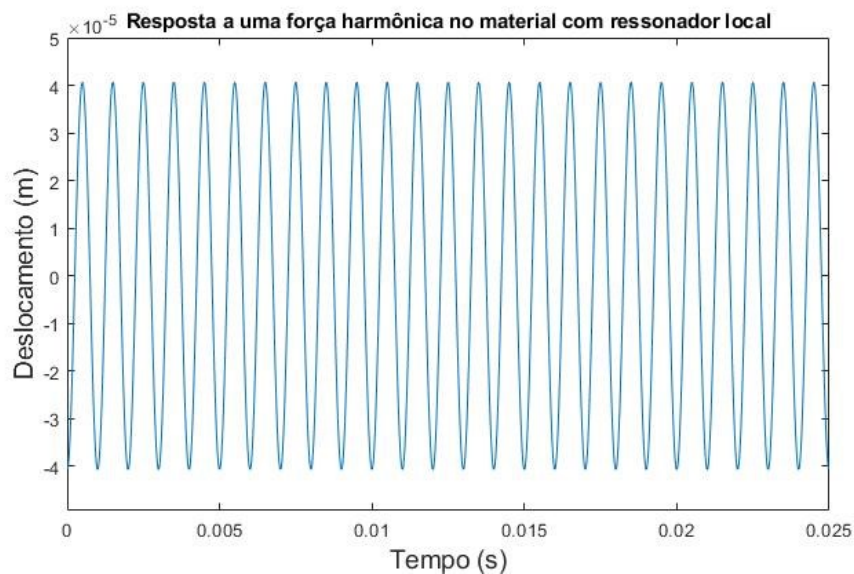


Figura 61: Resposta do material fonônico com ressonadores internos a uma frequência de 1000 Hz.

Posteriormente, foi realizada uma simulação da resposta de vibração do disco do rotor nas direções x e z a uma excitação de base na frequência de 1000 Hz, que se encontra na região da banda proibida da base fonônica binária que utiliza o conceito de espalhamento de Bragg, as excitações aplicadas na base são mostradas nas Figuras 59 a 61. As respostas de

deslocamento do disco do rotor nas direções x e z para as bases de material contínuo, material fonônico de Bragg e material periódico com ressonadores internos são mostradas nas Figuras 62 a 67, respectivamente.

Os deslocamentos apresentados no disco do rotor embarcado com base contínua para as direções x e z são mostrados nas Figuras 62 e 63, respectivamente. As linhas em vermelho apresentam o deslocamento provocado exclusivamente pelos componentes do rotor e a linha em azul mostra o deslocamento produzido pela combinação dos efeitos dos componentes do rotor e das excitações de base.

A Figura 52 mostra o gráfico do deslocamento do disco do rotor embarcado de base contínua na direção x, nesse gráfico identifica-se que o deslocamento do disco na direção x é causado principalmente pelos componentes do rotor, já que a curva azul e a curva vermelha são muito próximas, demonstrando que nesse caso o efeito giroscópio do rotor apresentou pouca influência na direção x.

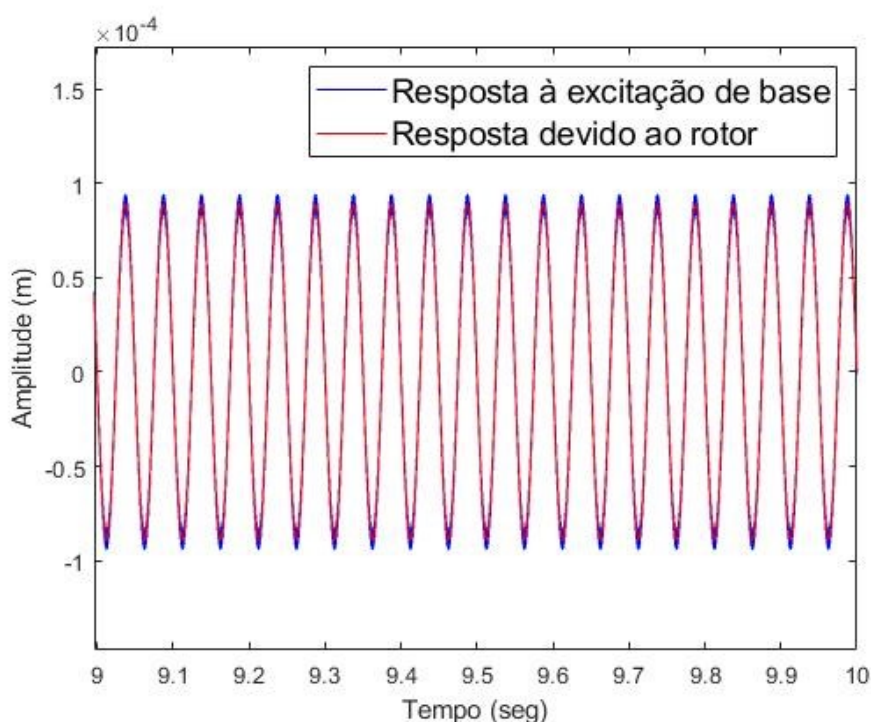


Figura 62: Deslocamento (u) do disco do rotor com base contínua na direção x para a frequência de 1000 Hz.

O gráfico de deslocamento na direção z do disco do rotor embarcado com base contínua é exposto na Figura 63. Nesse gráfico identifica-se uma influência considerável das excitações de base no deslocamento do disco do rotor embarcado, já que a curva em azul (efeito

combinado dos componentes do rotor e das excitações de base) é significativamente maior que a curva em vermelho (efeito isolado dos componentes do rotor).

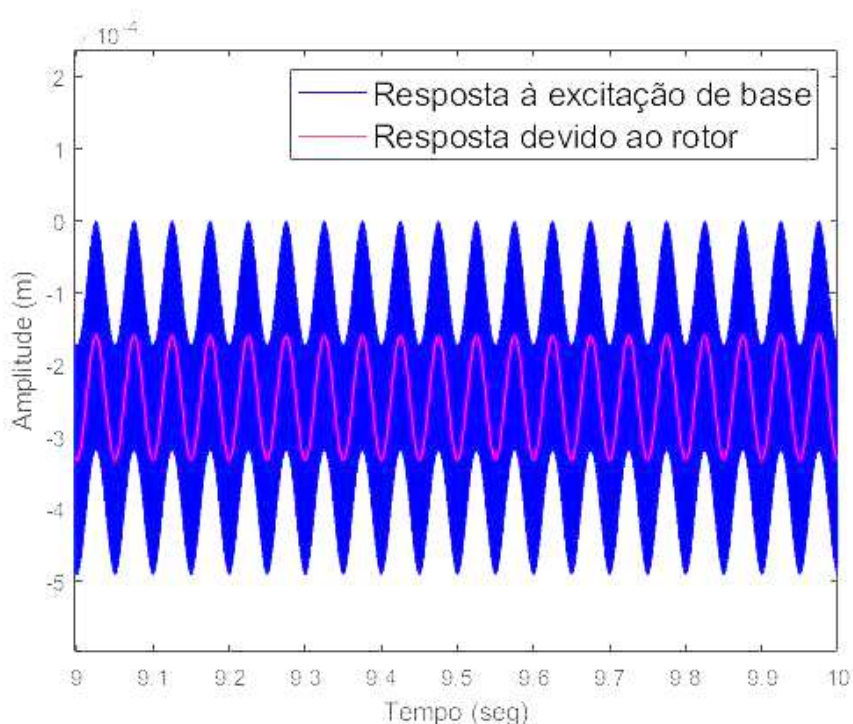


Figura 63: Vibrações (w) do disco do rotor com base contínua na direção z para a frequência de 1000 Hz.

Os deslocamentos em função do tempo do disco do rotor embarcado com base periódica de Bragg apresentado nas direções x e z são mostrados nas Figuras 64 e 65, respectivamente. Nesses gráficos nota-se que o deslocamento produzido no disco nas direções x e z é causado quase que totalmente pelos componentes do rotor, tendo uma influência mínima das excitações de base aplicadas, mostrando claramente a eficiência dessa base fonônica para atenuação de vibrações em frequências no interior de sua banda proibida.

Os gráficos de deslocamento da base fonônica de Bragg nas direções x e z , apresentados nas Figuras 64 e 65, respectivamente, apresentaram uma atenuação considerável das excitações de base, o deslocamento produzido por esses rotores é causado principalmente pelo efeito dos componentes internos do rotor, já que em ambos os casos, a curva em vermelho, que representa o deslocamento causado pelos componentes do rotor isoladamente, se sobrepõe sobre a curva em azul, que apresenta o deslocamento causado pelo efeito combinado das excitações de base e dos componentes do rotor.

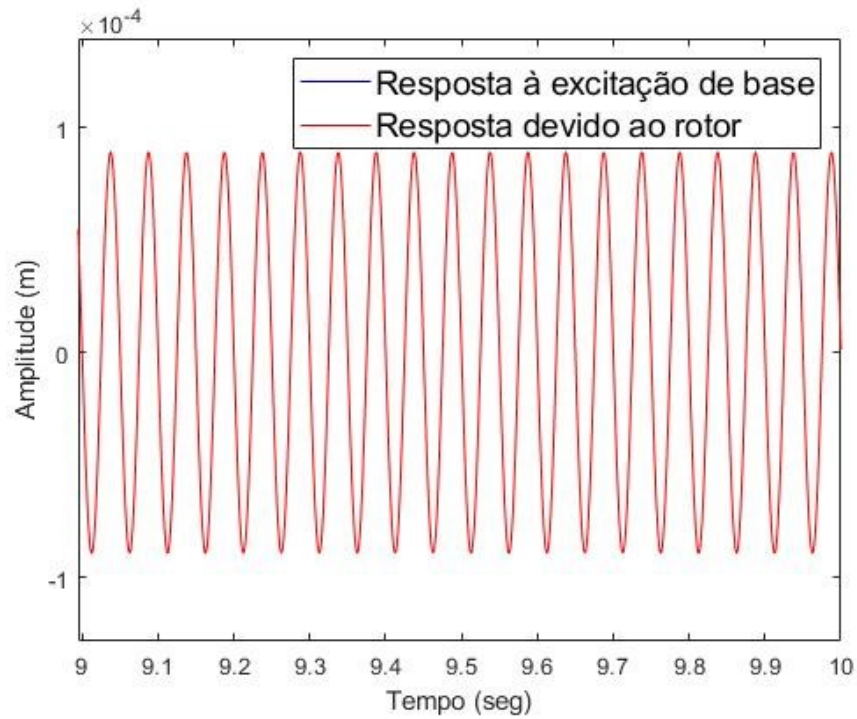


Figura 64: Movimentações (u) do disco do rotor com base fonônica bimaterial na direção x para a frequência de 1000 Hz.

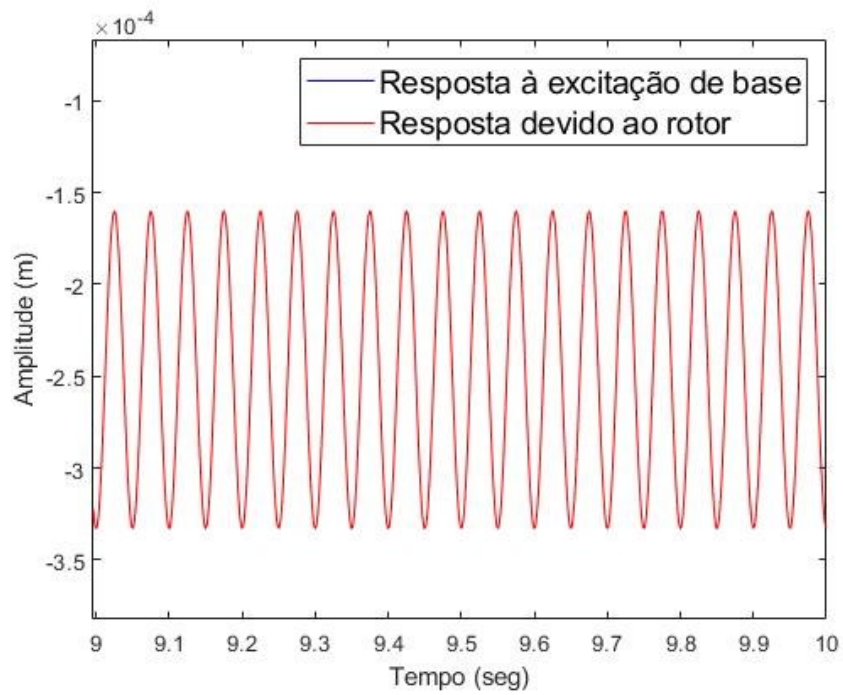


Figura 65: Deslocamentos (w) do disco do rotor com base fonônica bimaterial na direção z para a frequência de 1000 Hz.

O disco do rotor embarcado com base fonônica com ressonadores internos apresentou os gráficos de deslocamento nas direções x e z em função do tempo mostrados nas Figuras 66 e 67. Na direção x nota-se uma pequena influência da excitação de base na amplitude do deslocamento produzido, comparando-se a curva em vermelho (efeito dos componentes do rotor) com a curva em azul (efeito combinado dos componentes do rotor e da excitação de base). No gráfico que mostra o deslocamento do disco na direção z apresentado na Figura 67, identifica-se uma influência elevada da excitação de base no padrão de deslocamento do disco do rotor na direção z.

Na direção x identifica-se a presença de um pequeno acoplamento com a direção z devido ao efeito giroscópico do rotor, isso pode ser visto na curva em azul da Figura 66 que apresenta um padrão de uma senoide secundária em alta frequência (1000 Hz) em torno da frequência de vibração causada pelos componentes do rotor (20 Hz) na curva em vermelho.

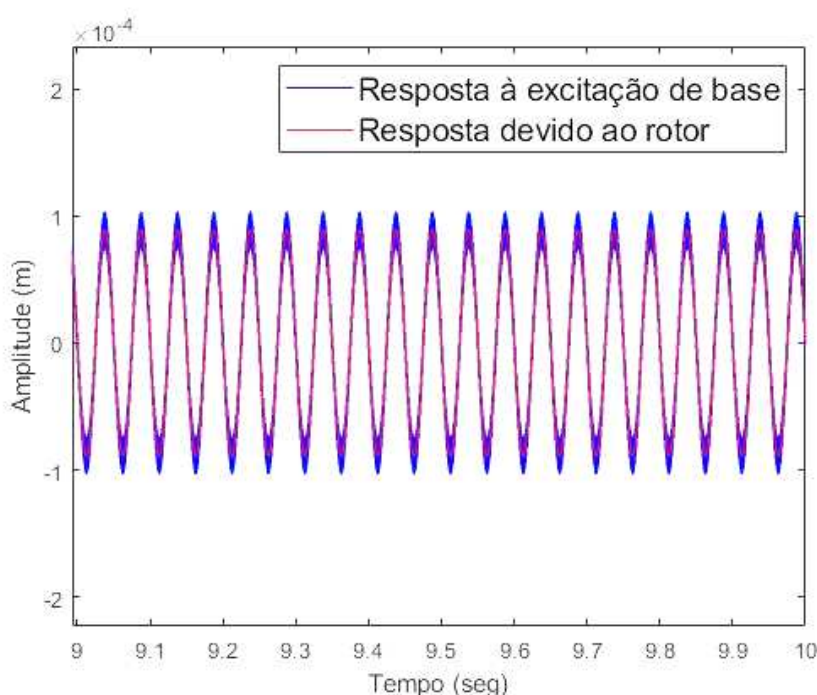


Figura 66: Movimentações (u) do disco do rotor de base fonônica com ressonância local na direção x para a frequência de 1000 Hz.

O deslocamento em função do tempo do disco do rotor embarcado com base periódica com ressonadores internos na direção z mostra uma influência considerável das excitações de base, já que a curva em azul (efeitos combinados do rotor e excitações de base) apresenta um deslocamento maior que a curva em vermelho (efeito dos componentes do rotor), como apresentado na Figura 67.

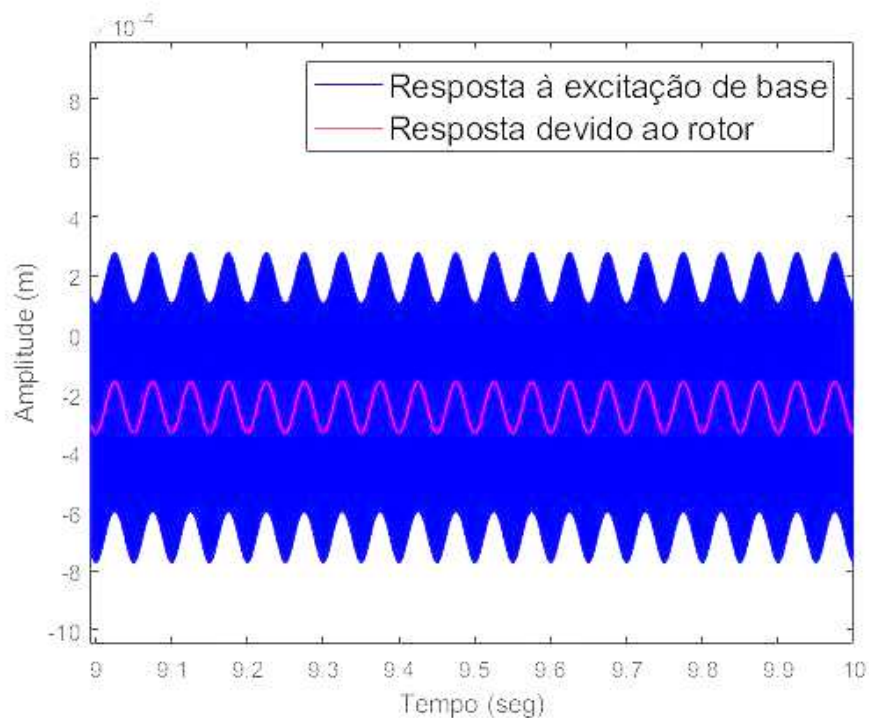


Figura 67: Vibrações (w) do disco do rotor de base fonônica com ressonância local na direção z para a frequência de 1000 Hz.

Na frequência de 1000 Hz, que se encontra no interior da banda proibida do material fonônico de Bragg, nota-se que para as condições simuladas o efeito da excitação de base no gráfico de deslocamento do motor foi praticamente inexistente para o rotor embarcado com base periódica de Bragg, validando assim a eficácia desse modelo de base para atenuação de frequências no interior da sua banda de propagação proibida.

5.2.4. Frequência no interior da zona ótica (2600 Hz)

Por fim, foi simulado o deslocamento das bases do rotor sendo submetidas a uma excitação na frequência de 2600 Hz, que se encontra na zona ótica do material fonônico binário que utiliza o fenômeno de espalhamento de Bragg. As bases de material contínuo, material periódico de Bragg e de material fonônico com ressonadores locais apresentaram as respostas de deslocamento mostradas nas Figuras 68 a 70.

A zona ótica é uma região de frequências importante para cristais fonônicos de Bragg, já que nessa região podem ocorrer pontos nos quais as ondas elásticas apresentem altas

amplitudes, vindo a causar problemas diversos para esse tipo de estruturas, normalmente a zona ótica ocorre em frequências mais altas, que não são comuns ao se trabalhar com máquinas rotativas, mas pensando-se em rotores aeronáuticos que são expostos a diversas frequências de excitação de base, conforme as condições do ambiente em que estejam trabalhando é importante conhecer o comportamento dos materiais fonônicos em várias condições.

O deslocamento em função do tempo na face superior de uma base contínua excitada por uma força harmônica na frequência de 2600 Hz é apresentado na Figura 68, esse gráfico apresenta amplitude de deslocamento da ordem de $5 \cdot 10^{-5}$ metros. Esse deslocamento será utilizado como parâmetro para calcular os efeitos da excitação de base no rotor embarcado com base contínua. O valor de deslocamento obtido para a frequência de 2600 Hz se tornou elevado devido à proximidade dessa frequência com a frequência de ressonância do material, como apresentado na Figura 45.

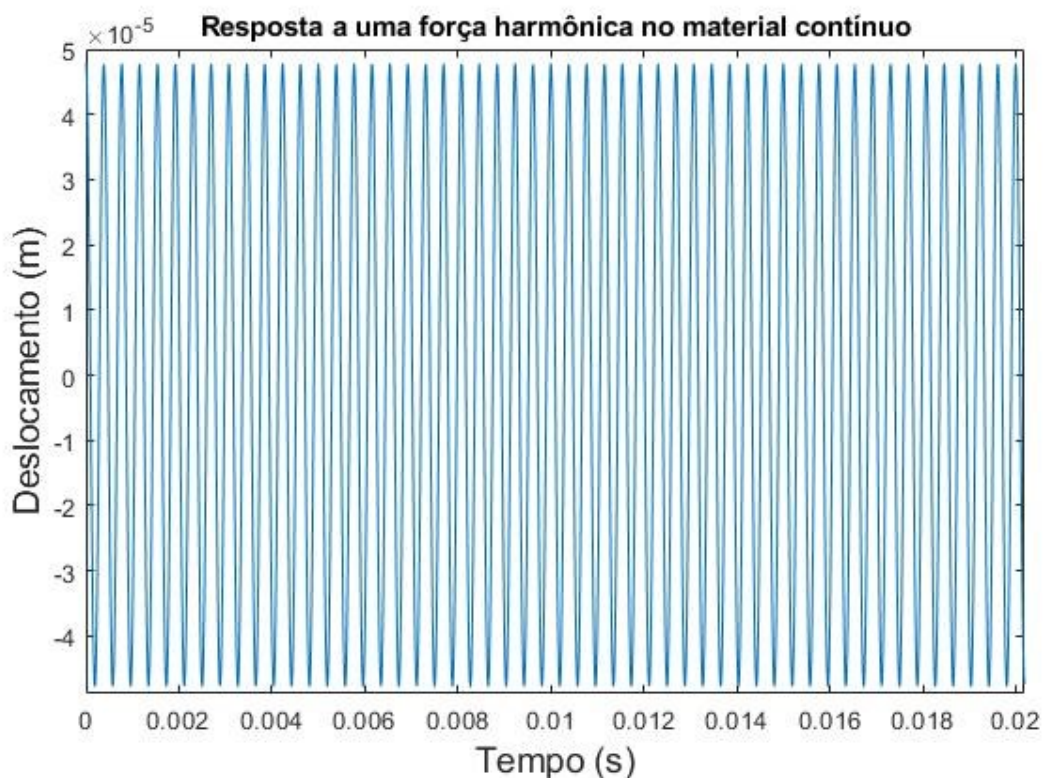


Figura 68: Resposta da base de material contínuo a uma excitação na frequência de 2600 Hz.

A Figura 69 apresenta o deslocamento na direção z da face superior da base fonônica de Bragg na frequência de 2600 Hz, ou seja, no ramo ótico do material, nesse gráfico

identifica-se que para o material selecionado a amplitude do deslocamento produzido é da ordem de 10^{-7} metros, apresentando um nível de deslocamento satisfatório.

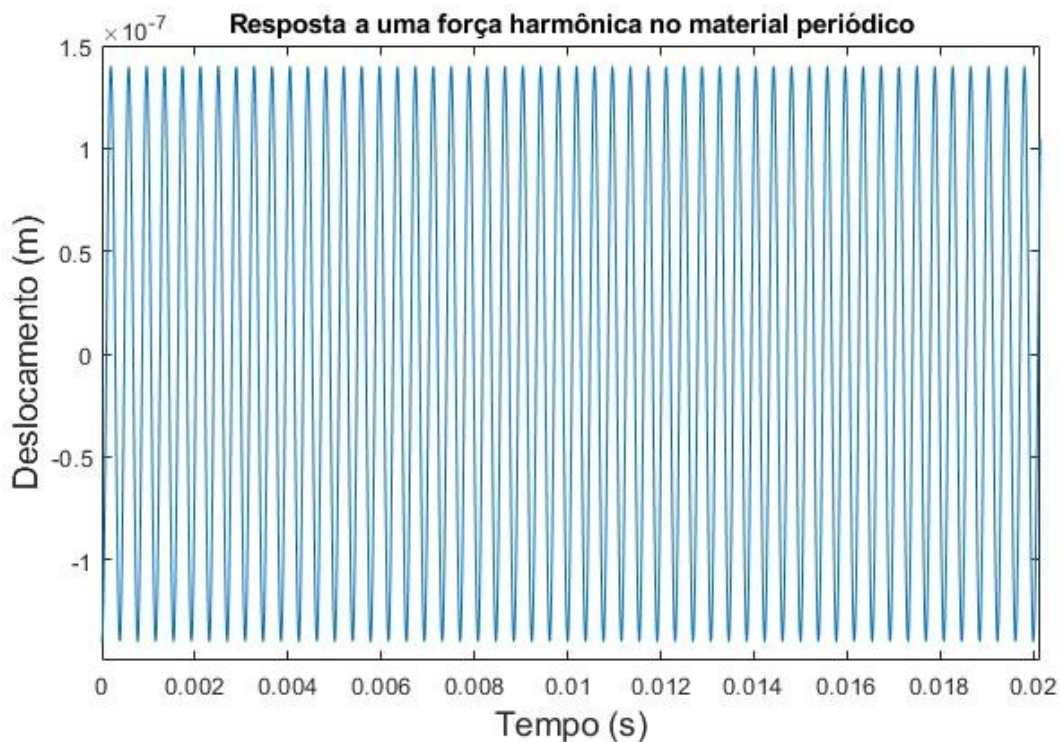


Figura 69: Resposta do material fonônico bidimensional a uma excitação na frequência de 2600 Hz.

A base periódica com ressonadores internos apresentou a resposta de deslocamento na sua face superior em função do tempo mostrada pela Figura 70. Esse deslocamento é da ordem $3 \cdot 10^{-5}$ metros para a frequência de 2600 Hz. O valor desse deslocamento é relativamente elevado para o material periódico com ressonância local devido à proximidade da frequência de 2600 Hz com uma frequência de ressonância do material como pode ser visto na Figura 44.

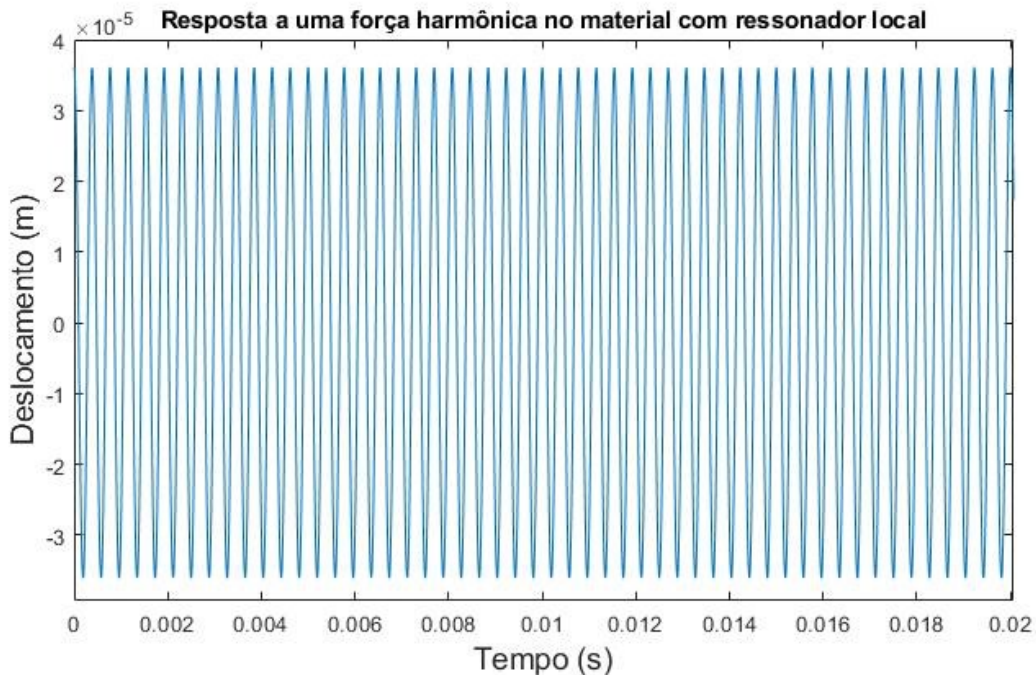


Figura 70: Resposta do material fonônico com ressonadores internos a uma frequência de 2600 Hz.

Na sequência, foram efetuadas as simulações da resposta de vibração do disco do rotor embarcado nas direções x e z com vibrações de base geradas por excitações na frequência de 2600 Hz, que se encontra na região ótica do material fonônico binário de Bragg, os deslocamentos de base aplicados foram apresentados nas Figuras 68 a 70.

As movimentações do disco do rotor nas direções x e z através da utilização de bases de material contínuo, material fonônico bimaterial de Bragg e material periódico com ressonadores internos são mostradas nas Figuras 71 a 76, respectivamente.

Os gráficos de deslocamento do disco do rotor embarcado com base contínua na frequência de 2600 Hz em função do tempo para as direções x e z são mostrados nas Figuras 71 e 72. As excitações de base do rotor embarcado produziram um efeito significativo no deslocamento produzido na direção z, e um pequeno efeito na direção x produzido pelo efeito giroscópico do rotor.

O gráfico do deslocamento do disco do rotor em função do tempo apresentado na Figura 71 demonstra que o deslocamento do disco na direção de x é quase que integralmente produzido pelos elementos do rotor, já que a curva em azul é muito próxima à curva em vermelho, apresentando algumas diferenças devido ao efeito giroscópico presente no rotor.

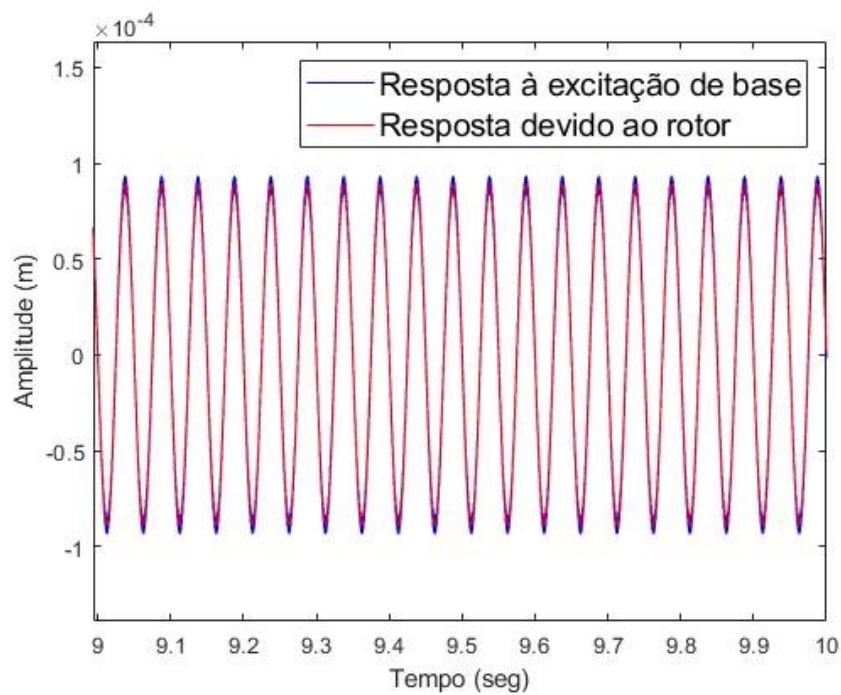


Figura 71: Vibrações (u) do disco do rotor de base contínua na direção x para a frequência de 2600 Hz.

A Figura 72 apresenta o gráfico do deslocamento do disco do rotor embarcado com base contínua na direção z , nesse gráfico identifica-se que o efeito causado pela excitação de base no deslocamento do disco é significativo já que a curva em azul, que representa a soma dos efeitos dos componentes do rotor e da excitação de base, apresenta uma amplitude bem maior que a curva em vermelho, que representa o efeito dos componentes do rotor isoladamente. Esse fenômeno pode ser justificado devido à proximidade da frequência de 2600 Hz com a frequência de ressonância do material contínuo.

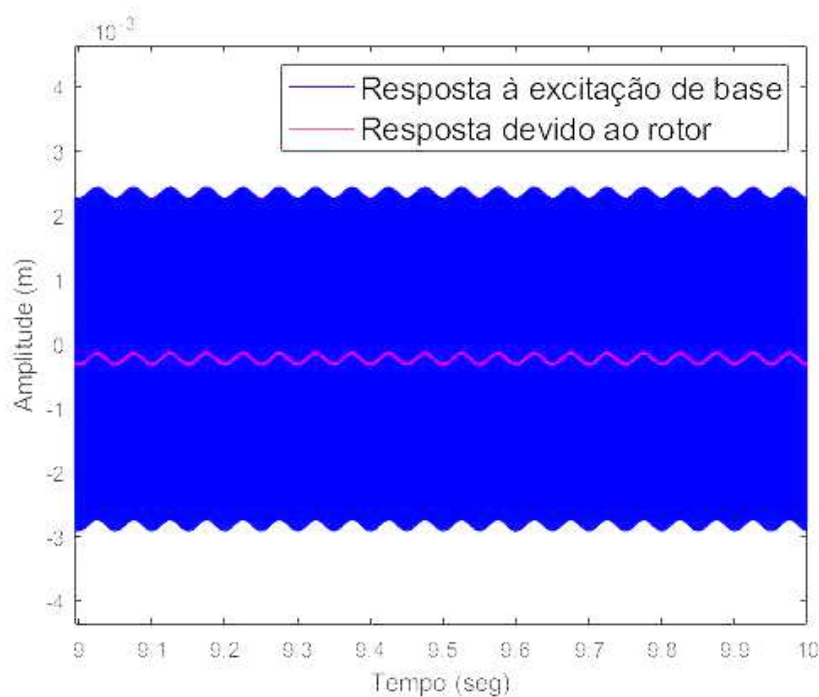


Figura 72: Movimentações (w) do disco do rotor de base contínua na direção z para a frequência de 2600 Hz.

Na frequência de 2600 Hz, os deslocamentos apresentados pelo disco do rotor embarcado com base periódica de Bragg nas direções x e z são mostrados nas Figuras 73 e 74, em ambos os casos se percebe que os deslocamentos produzidos nos discos são causados pelos componentes do rotor, sendo pouco afetados pela excitação de base.

A Figura 73 apresenta o gráfico do deslocamento do disco do rotor embarcado na direção x , nesse gráfico identifica-se que os deslocamentos produzidos são produzidos pelos componentes internos do rotor, já que a curva em vermelho se sobrepõe à curva em azul.

O gráfico do deslocamento na direção z do disco do rotor em função do tempo, apresentado na Figura 74, mostra que mesmo na direção longitudinal de excitação da base para a frequência de 2600 Hz o efeito das excitações de base no rotor embarcado com base periódica de Bragg é pequeno, já que a curva do deslocamento total do disco (azul) é muito próxima da curva do deslocamento do disco considerando apenas os efeitos dos componentes do rotor (vermelho).

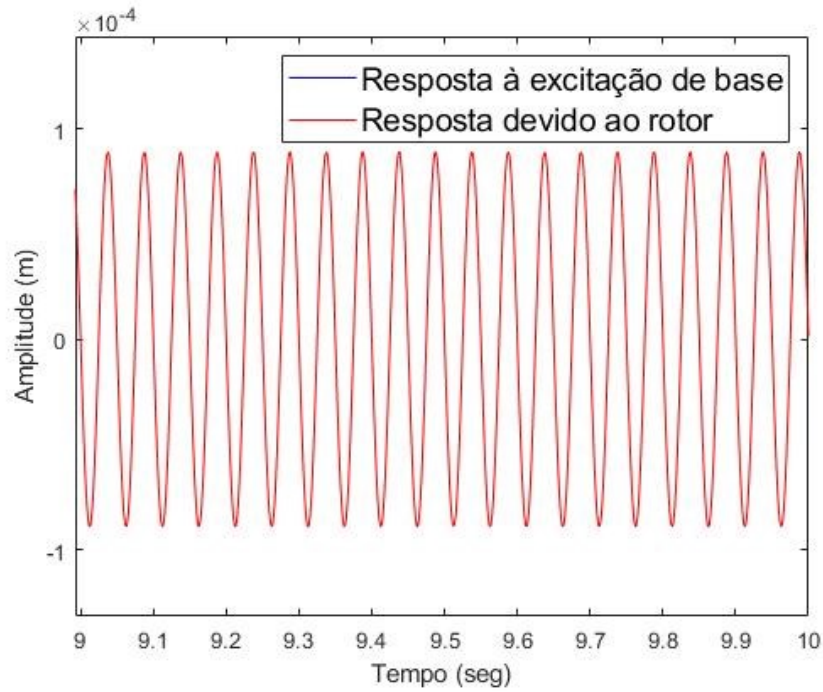


Figura 73: Deslocamento (u) do disco do rotor de base fonônica bimaterial na direção x para a frequência de 2600 Hz.

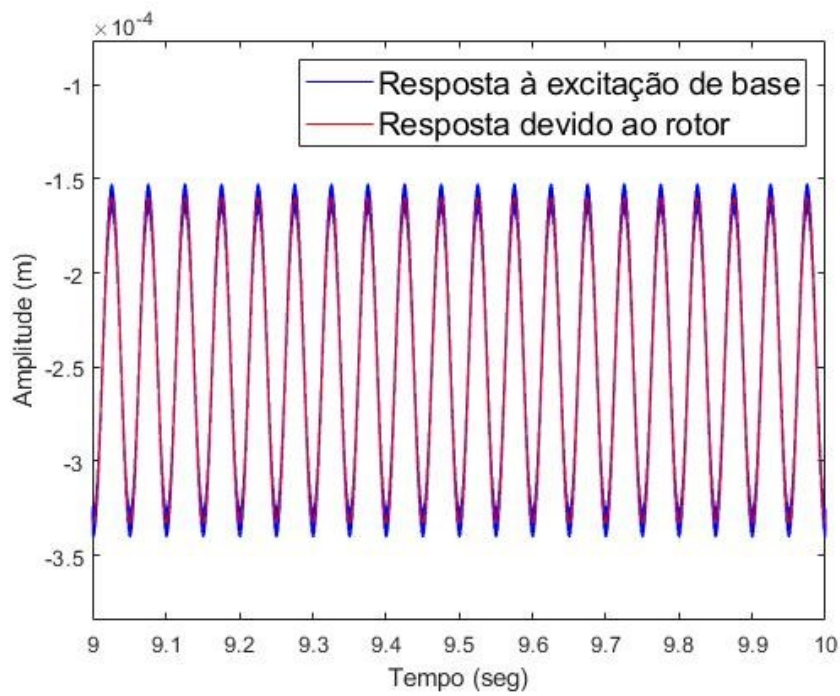


Figura 74: Vibrações (w) do disco do rotor de base fonônica bimaterial na direção z para a frequência de 2600 Hz.

O disco do rotor embarcado com base de material periódico com ressonador interno apresentou os gráficos de deslocamento nas direções x e z em função do tempo mostrados nas Figuras 75 e 76, respectivamente. O deslocamento provocado pela excitação de base na direção x é muito pequeno se comparado ao deslocamento causado pelos componentes do rotor (curva em vermelho), enquanto que na direção z a excitação de base é responsável pela maior parte do deslocamento do disco do rotor, já que a curva em azul é bem maior que a curva em vermelho.

O gráfico do deslocamento do disco do rotor na direção x demonstra que nessa direção as excitações de base influenciam muito pouco no comportamento do deslocamento do disco, apresentando uma pequena parcela de influência como mostrado pela pequena diferença entre a curva azul (efeitos dos componentes do rotor e excitação de base combinados) e a curva vermelha (efeitos dos componentes do rotor), mostrando uma pequena influência do efeito giroscópico no deslocamento total do disco nessa direção.

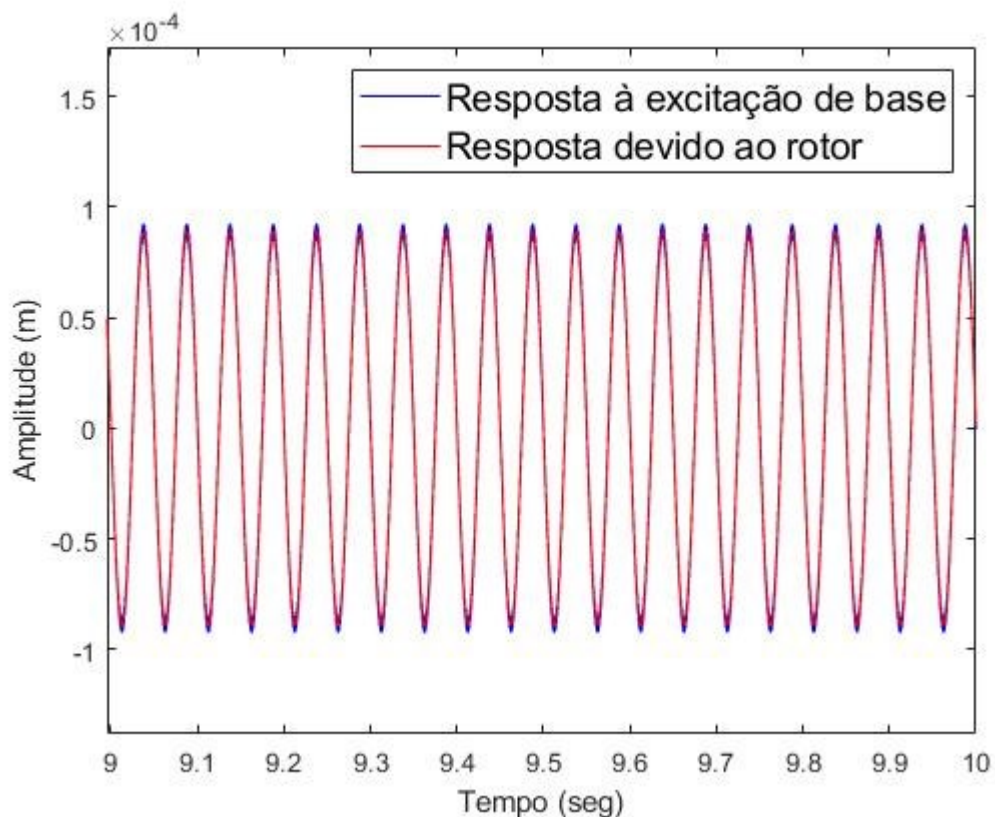


Figura 75: Deslocamento (u) do disco do rotor de base fonônica com ressonância local na direção x para a frequência de 2600 Hz.

A Figura 76 apresenta o deslocamento do disco do rotor embarcado na direção z, mostrando que nessa direção a excitação de base representa a maior parcela do deslocamento produzido devido à grande diferença entre a curva azul e a curva vermelha, em parte isso se justifica pela proximidade da frequência de 2600 Hz com uma das frequências naturais do material fonônico simulado.

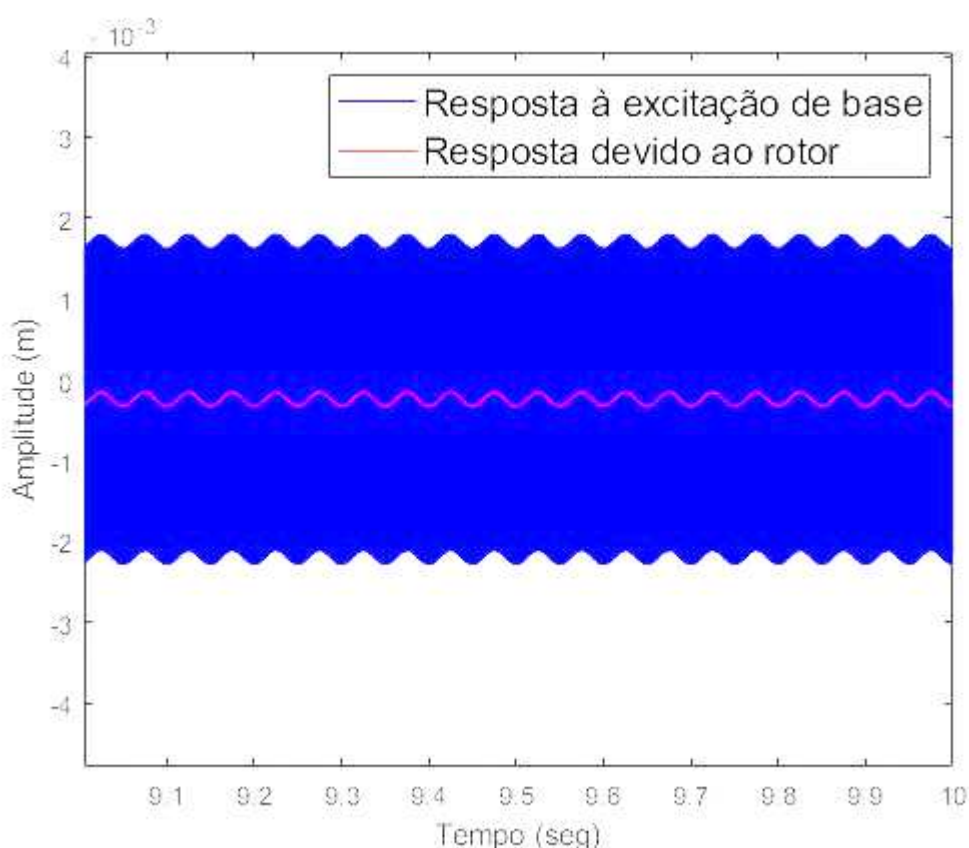


Figura 76: Movimentações (w) do disco do rotor de base fonônica com ressonância local na direção z para a frequência de 2600 Hz.

O nível de deslocamento produzido pela frequência de 2600 Hz, ramo ótico do material periódico de Bragg, nas bases contínua e periódica com ressonadores internos foi elevado, devido à proximidade desse valor com as frequências de ressonância desses materiais. O material fonônico binário de Bragg apresentou um nível de vibração baixo, apesar de ser um pouco maior que os valores obtidos na banda proibida, para o material, demonstrando que o material fonônico de Bragg não apresenta riscos caso alguma excitação de base venha a atingir frequências no interior do ramo ótico do material fonônico de Bragg estudado.

5.3. Discussão

Através das simulações da propagação de ondas elásticas longitudinais em materiais fonônicos e em um material uniforme de mesmas dimensões realizadas nas Seções 5.1 e 5.2, é possível visualizar graficamente os principais conceitos dos materiais periódicos fonônicos que utilizam o fenômeno de espalhamento de Bragg que são, a existência de zonas de incompatibilidade de impedâncias, nas quais ocorrem as bandas proibidas (448,7 a 2587,3 Hz) e as bandas de parada (2625,9 Hz), como apresentado na Figura 40.

As frequências de ocorrência das bandas proibidas e da frequência de parada calculadas na simulação de elementos finitos do material fonônico binário unidimensional de Bragg através do método apresentado por Jensen (2003) e Cao (2009) coincidem com as frequências do diagrama de dispersão encontradas através do diagrama de dispersão calculado pelo método de Frazier (2015), demonstrando que os resultados obtidos pela teoria estabelecida pelos três pesquisadores se coincidem.

Comparando-se o deslocamento longitudinal no domínio das frequências após a aplicação de uma força harmônica na base de uma estrutura periódica de Bragg, com ressonadores internos e de uma estrutura contínua através das Figuras 41, 44 e 45, respectivamente, identifica-se uma diferença expressiva na ordem de grandeza dos valores na região das bandas proibidas, demonstrando a eficiência de um material periódico na atenuação de propagação de ondas elásticas nas frequências adequadas.

A principal desvantagem da utilização de um material fonônico que utiliza o mecanismo de espalhamento de Bragg para atenuação de vibrações de baixa frequência é a necessidade de células unitárias de grandes dimensões, podendo chegar a comprimentos na ordem de metros para atenuação de baixas frequências, como citado em Wen (2008). O material fonônico de Bragg definido nesse trabalho permite a atenuação de ondas 448 a 2587 Hz de frequência e para isso foi necessário um comprimento de malha na sua célula unitária de 800 mm, sendo necessários 3,2 metros de altura da base para atingir 4 células unitárias.

Uma solução viável para atingir baixas frequências e reduzir o tamanho da estrutura fonônica é a utilização de ressonadores locais, como apresentado por Wen (2008) e Hussein (2014). Devido a isso, foram realizados cálculos pelo método de elementos finitos do comportamento vibratório desse material através da equação de movimento de um material periódico com ressonância local como mostrado na Seção 3.1.5.

Foi selecionada arbitrariamente uma frequência para atenuação de 60 Hz para o material fonônico com ressonadores internos, a célula unitária definida possui 100 mm de comprimento de malha e o material fonônico possui 4 células unitárias.

O diagrama de dispersão do material periódico com ressonância interna simulado segue a formulação de Hussein (2014) e é apresentado nas Figuras 42 e 43, mostrando a presença de uma banda proibida muito pequena na vizinhança da frequência de 60 Hz. A amplitude do deslocamento em função da frequência de excitação do material fonônico com ressonadores internos é mostrada na Figura 44 e apresenta claramente uma atenuação de onda na vizinhança da frequência estabelecida de 60 Hz, validando assim a hipótese inicial sobre o comportamento dinâmico desse tipo de material fonônico.

Nesse trabalho não foram desconsiderados os efeitos do amortecimento da estrutura de base, que principalmente devido às características do material epóxi irá produzir grandes influências na propagação de ondas em um sistema real, essas equações foram inclusas na matriz do modelo computacional montado, no entanto, foram desprezadas devido a necessidade de montagem de um modelo experimental para estimar com precisão o comportamento do amortecimento na estrutura periódica, a formulação desenvolvida através das equações de Jensen (2003) e Cao (2009) permitem definir um coeficiente de amortecimento (ξ_s) para avaliar o efeito do amortecimento no material periódico e no material contínuo.

Considerando um coeficiente de amortecimento (ξ_s) como estimado por (Cao, 2009) de 5% o gráfico da amplitude de deslocamento em função da frequência para o material fonônico binário de Bragg simulado é mostrado na Figura 77, modificando significativamente a forma do deslocamento em um material fonônico com as mesmas propriedades sem amortecimento como mostrado na Figura 41.

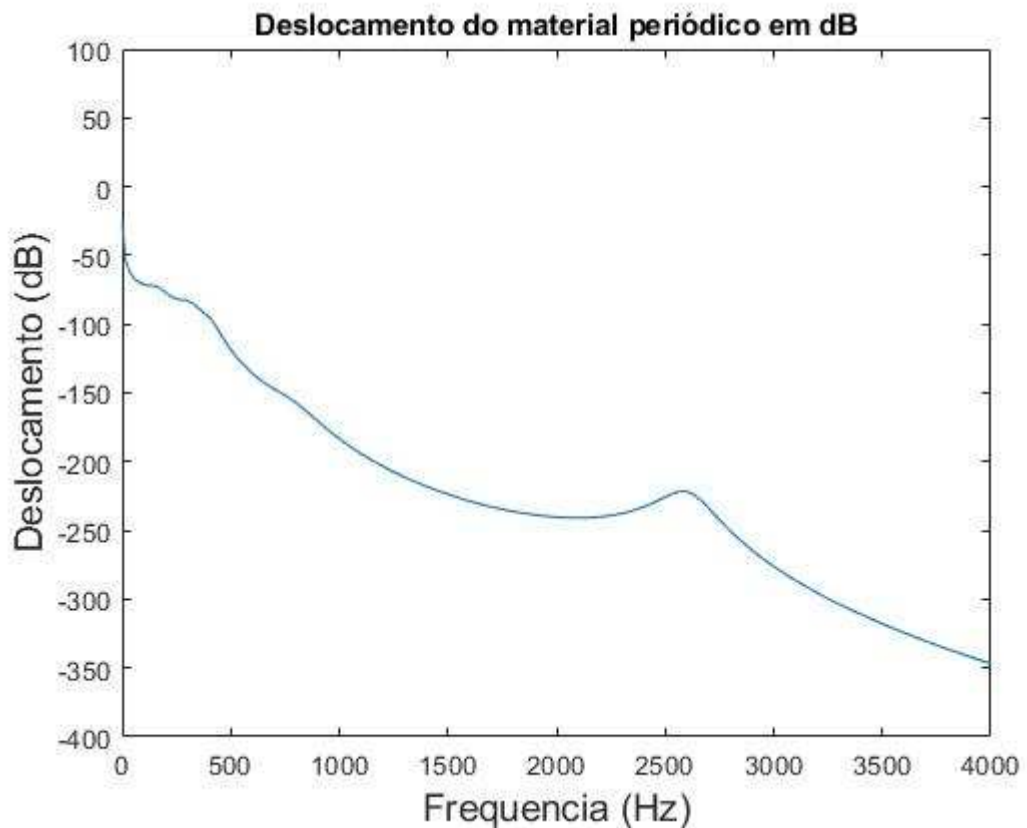


Figura 77: Deslocamento em dB do material periódico de Bragg em função da frequência (Hz) com um fator de amortecimento (ξ_s) de 5%.

Mesmo com uma excitação de base nula, os rotores embarcados apresentam vibrações devido ao comportamento rotativo dos seus componentes, por isso, para avaliar a eficiência das bases fonônicas na atenuação de vibrações foi necessário mostrar uma curva separada que mostrasse os deslocamentos do disco do rotor embarcado causados exclusivamente pelos seus componentes internos, em conjunto com a curva de deslocamento do disco causada pelos efeitos combinados da excitação de base e dos componentes dos rotores, as curvas que representam o deslocamento gerado pelos componentes do rotor foram mostradas nas curvas em vermelho presentes nos gráficos da Seção 5.2. Isso explica a existência de casos nos quais mesmo com uma excitação de base de amplitude muito baixa ainda obter-se um deslocamento na ordem de 10^{-4} metros no disco do rotor embarcado. Para visualizar corretamente a efetividade da base utilizada na atenuação de vibrações foi necessário realizar a comparação das duas curvas.

Posteriormente, esta dissertação avaliou a influência da atenuação de vibrações de base em um disco de rotor embarcado, como mostrado na Seção 5.2, foram realizadas simulações das amplitudes de deslocamento geradas nas direções x e z do disco do rotor,

utilizando-se como parâmetros de entrada as vibrações produzidas em excitações nas frequências de 60 Hz (banda proibida do material fonônico com ressonador interno), 1000 Hz (banda proibida do material fonônico binário de Bragg) e 2600 Hz (ramo ótico do material fonônico binário de Bragg) nas bases contínua, fonônica binária e fonônica com ressonadores internos.

A resposta da amplitude de deslocamento do disco do rotor embarcado às propriedades de atenuação de ondas elásticas dos materiais fonônicos foi identificada claramente nas Figuras 58 e 65, na qual percebe-se uma menor vibração no sentido z na frequência de 60 Hz para o material fonônico com ressonadores internos (banda proibida do material fonônico com ressonador interno) e 1000 Hz para o material fonônico que utiliza o fenômeno de espalhamento de Bragg (banda proibida do material fonônico binário de Bragg), conforme apresentado na Seção 5.2.

As principais dificuldades para obtenção das bandas proibidas de baixa frequência neste trabalho foram a necessidade de estruturas de grandes dimensões, e de forças de excitações com amplitudes elevadas para poder se enxergar o efeito das bandas proibidas nos rotores embarcados.

CAPÍTULO VI

Conclusão

Essa dissertação analisou os efeitos de atenuação de uma estrutura fonônica através dos fenômenos de espalhamento de Bragg e ressonância local nas excitações longitudinais de base de um rotor embarcado. O conceito de materiais fonônicos, conforme discutido anteriormente é um conceito relativamente novo e em ampla expansão, existindo poucos estudos relacionados a sistema rotativos disponíveis na literatura, justificando a importância e necessidade desse trabalho.

Os resultados numéricos, demonstram a existência de uma banda proibida (*bandgap*) unidimensional no sentido longitudinal para o material fonônico de Bragg selecionado em frequências de 448 a 2587 Hz, e uma banda de parada (*stop band*) após a frequência de 2625 Hz. Esse mesmo comportamento é visualizado ao se analisar a função resposta em frequência do deslocamento do material fonônico de base como mostrado nas Figuras 41. Comparando-se com o deslocamento obtido em uma base contínua, mostrado na Figura 45, nota-se a existência de uma atenuação considerável na região da banda proibida do material fonônico binário de Bragg estudado.

A grande desvantagem de materiais fonônicos baseados no fenômeno de espalhamento de Bragg é a necessidade de estruturas com grandes dimensões para atenuar ondas elásticas de baixas frequências, como citado por (WEN, 2008), com o intuito de dimensionar materiais periódicos com atenuação em baixas frequências e com menores dimensões, foi realizada a simulação de um material fonônico com ressonadores internos com uma banda proibida na vizinhança da frequência de 60 Hz neste trabalho, como mostrado no diagrama de dispersão das Figuras 42 e 43 e na resposta em frequência da amplitude do deslocamento da base de material fonônico com ressonadores internos mostrada na Figura 44. Comparando-se esse

resultado com o deslocamento obtido em uma base contínua, mostrado na Figura 45, nota-se a existência de uma atenuação considerável na região da banda proibida nesse material.

Devido à utilização de bases de grandes dimensões para a obtenção de cristais fonônicos de Bragg com bandas proibidas de baixa frequência foram necessárias forças de excitação de amplitudes elevadas para que fosse possível enxergar o efeito das bandas proibidas nos rotores embarcados.

A atenuação das vibrações de base de um rotor embarcado através de materiais fonônicos reduziu significativamente o nível de vibrações no disco do rotor, na direção longitudinal da célula unitária (z), nas regiões das bandas proibidas, tanto para cristais fonônicos baseados no mecanismo de espalhamento de Bragg quanto para ressonância local, como foi mostrado pelas Figuras 58 e 65.

O amortecimento dos materiais utilizados pode possuir um efeito significativo nas propriedades de atenuação de ondas elásticas e nas amplitudes dessas ondas, como mostrado na Figura 77, na qual utilizou-se um fator de amortecimento de 5% para avaliar o seu efeito no deslocamento gerado em um material fonônico.

As principais contribuições desse trabalho foram a definição dos conceitos, revisão literária, estudo dos fenômenos e modelos numéricos acerca da propagação de ondas elásticas em cristais fonônicos; o estudo de métodos numéricos para cálculo de diagramas de dispersão em materiais periódicos; a utilização do método numérico de elementos finitos para o cálculo da propagação de ondas elásticas em materiais periódicos; a realização de análises numéricas da propagação de ondas em materiais fonônicos baseados no fenômeno de espalhamento de Bragg e ressonância interna; e a simulação dos efeitos da atenuação de vibrações de uma base fonônica em um rotor embarcado; Este trabalho também iniciou uma nova linha de pesquisa no laboratório LMEst

6.1. Perspectivas de Trabalhos Futuros

As próximas etapas relacionadas ao tema dessa dissertação a serem desenvolvidas para aumentar a eficiência desses resultados são:

- Elaboração de um modelo numérico para cálculo da atenuação e dos diagramas de dispersão de cristais fonônicos bi e tridimensionais;

- Desenvolvimento de um modelo numérico para cálculo da propagação de ondas elásticas em cristais fonônicos radiais ou axiais em sistemas rotativos;
- Definição de um modelo ideal para montagem de um sistema experimental para medição física da propagação de ondas elásticas em um material fonônico unidimensional nos sentidos longitudinal e radial;
- Avaliação dos efeitos do amortecimento dos materiais da malha no diagrama de dispersão e nas propriedades de atenuação de ondas elásticas do material periódico através de sistemas experimentais.

Referências bibliográficas

BADREDDINE ASSOUAR, M., SENESI, M., OUDICH, M., RUZZENE, M., HOU, Z., "Broadband Plate-Type Acoustic Metamaterial for Low-Frequency Sound Attenuation," Appl. Phys. Lett., v. 101(17), pp. 173505-173505, 2012.

<https://doi.org/10.1063/1.4764072>

BANERJEE, A. Enhanced refractometric optical sensing by using one-dimensional ternary photonic crystals. Progress In Electromagnetics Research, v. 89, p. 11-22, 2009.

<https://doi.org/10.2528/PIER08112105>

BASTA, E., GHOMMEM, M., EMAM, S. Vibration suppression of nonlinear rotating metamaterial beams. Nonlinear Dyn, v.101, p. 311-332, 2020.

<https://doi.org/10.1007/s11071-020-05796-z>

BELI, D.; MENCİK, J. M.; SILVA, P. B.; ARRUDA, J. R. F. A projection-based model reduction strategy for the wave and vibration analysis of rotating periodic structures. Computational Mechanics, 2018

<https://doi.org/10.1007/s00466-018-1576-7>

BELI, D.; SILVA, P.B.; MENCİK, J.M.; DE FRANÇA ARRUDA, J. R.; Wave and Vibration Analysis of Rotating Periodic Structures by Wave-Based Methods. International Conference on Rotor Dynamics, v.10, 518-529, 2018

https://doi.org/10.1007/978-3-319-99268-6_36

CAO, Z. J. One and Two-Dimensional Mass Spring Computational Model for Phononic Band Gap Analysis. Tese de Doutorado, University of Waterloo, Waterloo, 2009.

CAVALINI JR, A. A., GUIMARÃES, T. A. M., DA SILVA, B. R. M. G., STEFFEN JR., V. Analysis of the Dynamic Behavior of a Rotating Composite Hollow Shaft. Latin American Journal of Solids and Structures, v. 14, p. 1-16, 2017.

<https://doi.org/10.1590/1679-78253168>

CAVALINI JR, A. A., GUIMARÃES, T. A. M., STEFFEN JR., V. Optimal Design of a Rotating Machine Containing a Composite Material Shaft. Brazilian Conference on Composite Materials, 2016, Gramado, Brasil, Anais.

CAVALINI JR., A.A., LARA-MOLINA, F.A., SALES. T.P., KOROISHI, E.H., STEFFEN JR, V., Uncertainty analysis of a flexible rotor supported by fluid film bearings. Latin American Journal of Solids and Structures. v. 12, v. 8, p. 1487-1504, 2015a.

<https://doi.org/10.1590/1679-78251582>

CHAI, Z., WANG, D., LIU, W., & KONG, D. Torsional wave propagation in a piezoelectric radial phononic crystals. Noise Control Engineering Journal, v. 64(1), p. 75-84, 2016.

<https://doi.org/10.3397/1/376361>

DUCHEMIN, M. Contribution à l'étude du comportement dynamic d'un rotor embar-qué. 2003. Tese de Doutorado - INSA Lyon, Lyon.

DUCHEMIN, M.; BERLIOZ, A.; FERRARIS, G. Dynamic behavior and stability of a rotor under base excitation. ASME. v. 128, p. 576, 2006.

<https://doi.org/10.1115/1.2202159>

FRAZIER, M. Dissipative Wave Propagation in Phononic Crystals and Metamaterials: Models and Analysis. Tese de Doutorado, University of Colorado, 2015.

GAO, N., WU, J., GUAN, D. Research on the large band gaps in multilayer radial phononic crystal structure. *Modern Physics Letters B.*, v. 30, 2016.

<https://doi.org/10.1142/S0217984916501098>

GE, H.; YANG, M.; MA, C.; LU, M. H.; CHEN, Y. F.; FANG, N.; SHENG, P. Breaking the barriers: advances in acoustic functional materials. *National Science Review*, v. 5, n. 2, p. 159-182, 2017.

<https://doi.org/10.1093/nsr/nwx154>

GROSSO, G.; PARRAVICINI, G. P. *Solid State Physics*, 2 ed., p.1-105, Academic Press, 2014.

<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385030-0.00001-3>

HAISHENG, S., LIQIANG, D., SHIDAN, L., WEI, L., SHAOGANG, L., WEIYUAN, W., DAN, Z. Propagation of torsional waves in a thin circular plate of generalized phononic crystals. *Journal of Physics D: Applied Physics*, v. 47(29), 2014.

<https://doi.org/10.1088/0022-3727/47/29/295501>

HONG-GANG, Z.; YAO-ZONG, L.; JI-HONG, W.; DIAN-LONG, Y.; GANG, W.; XI-SEN, W. Sound Absorption of Locally Resonant Sonic Materials. *Chinese Physics Letters*, v. 23, n. 8, p. 2132-2134, 2006.

<https://doi.org/10.1088/0256-307X/23/8/047>

HUSSEIN, M.; LEAMY, M.; RUZZENE, M. Dynamics of Phononic Materials and Structures: Historical Origins, Recent Progress, and Future Outlook, *Applied Mechanics Reviews*, v. 66, n. 4, p.040802 1-38, 2014

<https://doi.org/10.1115/1.4026911>

JENSEN, J. S. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures. *Journal of Sound and Vibration*, v. 266(5), p. 1053-1078, 2003.

[https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01629-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01629-2)

JIANG, H.; CHEN, H.; LI, H.; ZHANG, Y.; ZI, J.; ZHU, S. Properties of one-dimensional photonic crystals containing single-negative materials. *Physical Review E*, v. 69, n. 6, 2004.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.066607>

LALANNE, M.; FERRARIS, G. *Rotordynamics Prediction in Engineering*. New York: J. Wiley and Sons, 266p, 1998.

MALDOVAN, M.; THOMAS, E. *Periodic materials and interference lithography for photonics, phononics and mechanics*, 1st ed. Wiley & Co, 2009.

<https://doi.org/10.1002/9783527625390>

PEREIRA, J. C. *Introdução à dinâmica de rotores*. 2005. Apostila - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

RUZZENE, M. *A short course on Wave propagation in Periodic Structures*. School of Aerospace Engineering - Georgia Tech. Available at: <http://www.ruzzene.gatech.edu/Teaching.html> [Accessed 13 Apr. 2019], 2019.

SAMORA, M.S.J. *Análise do comportamento dinâmico de rotores embarcados*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017.

<http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2017.42>

SINO, R. *Comportement dynamique et stabilité des rotors: application aux rotors composites*. l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Theses, 2007.

WEN, J.; WANG, G.; YU, D.; ZHAO, H.; LIU, Y.; WEN, X. Study on the vibration band gap and vibration attenuation property of phononic crystals. Science in China Series E: Technological Sciences, v. 51, n. 1, p. 85-99, 2008.

<https://doi.org/10.1007/s11431-008-0008-x>

YAN, Z.Z, Wang, Y.S. Wavelet-based method for computing elastic band gaps o fone-dimensional phononic crystals, Physical Review B, v. 74 (22), 2007.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.74.224303>

ZHAO, L., SHU, H., LIANG, S., SHI, X., AN, S., REN, W., ZHU, J. Torsional wave band gap properties in a circular plate of a two-dimensional generalized phononic crystal. AIP Advances. v. 8., 2018.

<https://doi.org/10.1063/1.5027600>

ZHENG, M., PEI-JUN, W., Band gaps of elastic waves in 1-D phononic crystals with imperfect interfaces, International Journal of Minerals, Metallurgy and Materials, V. 16 (5), p. 608-614, 2009.

[https://doi.org/10.1016/S1674-4799\(09\)60105-9](https://doi.org/10.1016/S1674-4799(09)60105-9)

ZHOU, S.; JIANJUN, S. Active Balancing and Vibration Control of Rotating Machinery: A Survey. The Shock and Vibration Digest, v. 33, n. 4 ,2001.

<https://doi.org/10.1177/058310240103300501>