



**Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática**

Licenciatura em Matemática

DIMENSÃO DE HAUSDORFF E APLICAÇÕES

Paulo César da Silva Andreucci

Uberlândia-MG

2021

Paulo César da Silva Andreucci

DIMENSÃO DE HAUSDORFF E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado à
Coordenação do Curso de Matemática como
requisito parcial para obtenção do grau de Licen-
ciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Paula Tremura
Galves

Uberlândia-MG

2021

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me abençoado e me dado forças para superar as dificuldades.

Ao meu pai, pelo amor, apoio, incentivo e por acreditar em mim.

À minha mãe que antes de nos deixar me incentivou a estudar, e sem ela acredito que jamais teria chegado a uma universidade federal.

À minha orientadora que tive a oportunidade de conhecer e, com ela, aprender muito.

À Josiane Cristina Lüdke que me acompanhou neste percurso complicado, para chegar ao dia de hoje.

Agradeço à minha família, amigos e a todos que, direta ou indiretamente, me ajudaram e contribuíram para o término deste ciclo. Em especial ao Pedro Augusto Diniz que foi o meu apoio com a família distante.

*“Obrigado a todas as pessoas que contribuíram
para meu sucesso e para meu crescimento como
pessoa. Sou o resultado de confiança e da força
de cada um de vocês.”*

(Augusto Branco)

Resumo

Ao pensar no conceito de dimensão, a primeira ideia que surge é a dimensão euclidiana, a qual origina-se da geometria euclidiana, onde pontos têm dimensão 0, curvas têm dimensão 1, planos têm dimensão 2, e assim por diante. Porém, existem outras geometrias e entre elas a geometria fractal, na qual são encontrados objetos matemáticos de dimensão fracionária. Tais objetos são conhecidos como fractais. Esse termo se origina do verbo latim "fragere" que traduz-se como quebrar, fragmentar.

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo do conceito de dimensão de Hausdorff, que fornece uma boa definição para a dimensão de fractais e aplicá-lo em alguns fractais clássicos.

Palavras-chave: Dimensão de Hausdorff. Geometria Fractal. Distância de Hausdorff. Fractais.

Abstract

When thinking about the concept of dimension, the first idea that comes to mind is the Euclidean dimension, which originates from Euclidean geometry, where points have dimension 0, curves have dimension 1, planes have dimension 2, and so on. However, there are other geometries and among them the fractal geometry, in which mathematical objects of fractional dimension are found. Such objects are known as fractals. This term originates from the Latin verb "fragere" which translates as to break, to fragment.

The objective of this work is to make a study of the concept of the Hausdorff dimension, which provides a good definition for the dimension of fractals and apply it to some classical fractals.

Keywords: Hausdorff dimension. Fractal geometry. Hausdorff distance. Fractals.

Sumário

1	Introdução	1
2	Tópicos de espaços métricos	3
2.1	Espaços Métricos	3
2.2	Bolas abertas e fechadas	6
2.3	Sequências em espaços métricos	7
2.4	Topologia dos espaços métricos	10
2.5	Espaços métricos compactos	11
2.6	Sequência de Cauchy	15
2.7	Espaços métricos completos	19
3	Dimensão de Hausdorff	21
3.1	Espaço de Hausdorff	23
3.2	Dimensão de Hausdorff	28
4	Aplicação em Fractais	33
4.1	Conjunto de Cantor	34
4.1.1	Construção do conjunto de Cantor	34
4.1.2	Aplicação no conjunto de Cantor	36
4.2	Triângulo de Sierpinski	36
4.2.1	Construção do triângulo de Sierpinski	36
4.2.2	Aplicação no triângulo de Sierpinski	37
4.3	Curva de Peano	38

4.3.1	Construção da curva de Peano	38
4.3.2	Aplicação na curva de Peano	39
4.4	Floco de neve de Koch	40
4.4.1	Construção do floco de neve de Koch	40
4.4.2	Aplicação no floco de neve de Koch	41
Referências Bibliográficas		43

Introdução

Alguns conhecimentos geométricos vem desde os tempos antigos com os povos Egípcios, Babilônios, entre outros. Esses povos já tinham obtido, empiricamente, conceitos como área, o Teorema de Pitágoras, e muito mais. Devido a mudanças políticas os gregos ascendem como uma nação mais forte e então começa um período onde há uma maior preocupação com a formalização da geometria, ou seja, a necessidade moldar a geometria por meio de raciocínio dedutivo. Sabemos que alguns matemáticos, nessa busca, se deslocaram até o Egito para estudar a geometria egípcia e formalizá-la, são eles: Tales de Mileto, Pitágoras, entre outros estudiosos da área. Porém, somente com Euclides, por volta de 300a.C., a geometria começou a ser tratada como ciência. Por meio de sua coleção "Os elementos", que continha 13 livros, Euclides adquiriu alguns conhecimentos de geometria já existentes na época e provou, utilizando cinco postulados, resultados que deram início a geometria euclidiana, que é a geometria mais conhecida, que nos é ensinada nas escolas. Contudo, ela não é única. Quando algo se torna verdade absoluta, os matemáticos acabam contestando e nesse caso o que foi contestado foi o quinto postulado de Euclides, surgindo assim a geometria não euclidiana. Para maiores informações consultar [1].

Estes conhecimentos geométricos construídos por Euclides, foram por algum tempo considerados a ciência que melhor descrevia a natureza, porém logo vieram as dúvidas. Se descreve tão bem a natureza, como definir figuras geométricas mais complexas como uma samambaia ou uma nuvem? Isso abriu caminho para outras geometrias, dentre as quais temos, o surgimento da geometria fractal, que vem da necessidade de estudar conjuntos

irregulares demais para serem considerados pela geometria clássica, os chamados fractais. Esse ramo da matemática estuda as formas que se caracterizam por repetições de um determinado padrão com constante variação.

Desta forma, foi necessário o desenvolvimento de técnicas alternativas, uma vez que os métodos da geometria e cálculo clássicos se mostraram inadequados ao estudo dos fractais. Neste trabalho o interesse é apresentar, com detalhes, uma das principais ferramentas da geometria fractal, a dimensão.

De maneira informal, uma dimensão descreve a quantidade de espaço que um certo conjunto ocupa. É um meio de quantificar as irregularidades de um conjunto, quando vistas em escalas muito pequenas. Assim, a dimensão de um conjunto contém muita informação sobre suas propriedades geométricas.

Enquanto que temos o conhecimento de dimensões de figuras para a geometria euclidiana onde, pontos têm dimensão 0, curvas e retas têm dimensão 1, planos têm dimensão 2 e superfícies têm dimensão 3, na geometria fractal existem objetos com dimensão fracionária, que não são fáceis de se calcular como os objetos da geometria euclidiana. Embora exista uma grande variedade de definições de dimensões (fractais), estaremos interessados no estudo da dimensão de Hausdorff, também chamada de dimensão fractal, que é a definição mais comum e mais relevante.

O nome dimensão de Hausdorff vem do matemático alemão Felix Hausdorff (1868-1942), o qual publicou trabalhos na área de topologia e introduziu a ideia dessa dimensão. Alguns autores também se referem a ela por dimensão de Hausdorff-Besicovitch, pelo fato de seu desenvolvimento ter recebido grandes contribuições do matemático russo Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970).

Assim, o assunto central do trabalho é a dimensão de Hausdorff. O objetivo é, além de sua definição, apresentar algumas de suas propriedades mais importantes e métodos para o seu cálculo. Após os estudos iniciais, aplicaremos estas técnicas ao cálculo das dimensões de Hausdorff de vários fractais bem conhecidos como o conjunto de Cantor, o triângulo de Sierpinski e o floco de neve de Koch.

Para estudos de conceitos preliminares utilizados no trabalho seguiremos [4] e [5]. Já para estudos e construção dos fractais utilizaremos [3] e [7]. E escolhemos seguir [2] e [6] como principais referências.

Tópicos de espaços métricos

Este capítulo tem como objetivos apresentar o conceito de espaço métrico e, além disso, definir conjuntos abertos, sequências, topologia, funções contínuas, compacidade e completude em tais espaços. Tais conceitos serão fundamentais para o desenvolvimento do próximo capítulo. Para maiores detalhes sobre os conceitos preliminares, consultar [4] e [5].

2.1 Espaços Métricos

Definição 2.1.1 Dado um conjunto $M \neq \emptyset$, seja $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função e indiquemos por $d(x, y)$ a imagem de um par genérico $(x, y) \in M \times M$, através da função d . Dizemos que d é métrica sobre M se as seguintes condições se verificam para quaisquer $x, y, z \in M$.

(M1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (distância não negativa).

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria).

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdade triangular).

Cada imagem $d(x, y)$ é chamada distância de x a y e, o par (M, d) é o que chamamos de espaço métrico.

Observação 2.1.2 Se $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, temos que $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2}$.

Definição 2.1.3 *Seja (M, d) um espaço métrico. Dado $S \subset M$ ($S \neq \emptyset$) se considerarmos $d_1 = d|_S$, então d_1 é uma métrica sobre S e assim, obtemos o espaço métrico (S, d_1) . Desse modo, dizemos que S é um subespaço do espaço métrico M e que a métrica d_1 foi induzida por d sobre M . Geralmente indica-se a métrica do subespaço de maneira análoga à métrica de M , ou seja, faz-se $d_1 = d$.*

Para compreendermos um pouco melhor a definição de um espaço métrico apresentaremos alguns exemplos a seguir.

Exemplo 2.1.4 *Métrica discreta ou métrica zero-um. É o mais simples exemplo de métrica. Dado $M \neq \emptyset$ define-se $D : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ do seguinte modo: $d(x, x) = 0$, para todo $x \in M$ e $d(x, y) = 1$ sempre que $x \neq y$.*

Exemplo 2.1.5 *Considere o conjunto \mathbb{R} dos números reais e a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $d(x, y) = |x - y|$. Temos que d é uma métrica sobre \mathbb{R} .*

De fato,

$$(M1) \quad d(x, y) = |x - y| \geq 0, \text{ e } d(x, y) = 0 \Rightarrow |x - y| = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y.$$

$$(M2) \quad d(x, y) = |x - y| = |(-1) \cdot (y - x)| = |-1| \cdot |y - x| = |y - x| = d(y, x).$$

$$(M3) \quad d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

Essa é a métrica usual sobre \mathbb{R} .

Exemplo 2.1.6 *O espaço \mathbb{R}^n . Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ pontos quaisquer do \mathbb{R}^n . Para esse espaço existem três métricas muito conhecidas, que de certa forma são equivalentes.*

$$D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

$$D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$$

$$D_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

Faremos a prova que D_1 é métrica do espaço \mathbb{R}^n . As demonstrações para D e D_2 são semelhantes e por isso serão omitidas.

(M1) $D_1(x, y) \geq 0$, por serem módulos somados e $D_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = 0 \Leftrightarrow x_i - y_i = 0$, para todo $i \Leftrightarrow x = y$.

(M2) $D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = |-(y_1 - x_1)| + \cdots + |-(y_n - x_n)| = |-1| \cdot |y_1 - x_1| + \cdots + |-1| \cdot |y_n - x_n| = |y_1 - x_1| + \cdots + |y_n - x_n| = D_1(y, x)$.

(M3) Considere $z = (z_1, \cdots, z_n)$.

$D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = |(x_1 - z_1) + (z_1 - y_1)| + \cdots + |(x_n - z_n) + (z_n - y_n)| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + \cdots + |x_n - z_n| + |z_n - y_n| = |x_1 - z_1| + \cdots + |x_n - z_n| + |z_1 - y_1| + \cdots + |z_n - y_n| = D_1(x, z) + D_1(z, y)$.

Logo D_1 é métrica do espaço \mathbb{R}^n .

Estas três métricas introduzidas guardam entre elas as seguintes relações:

$$D_2(x, y) \leq D(x, y) \leq D_1(x, y) \leq nD(x, y)$$

Tome $x, y \in \mathbb{R}^n$,

Supondo que $|x_r - y_r| = \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\}$, com $1 \leq r \leq n$

Deste modo, $D_2(x, y) = |x_r - y_r| = \sqrt{|x_r - y_r|^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = D(x, y)$.

$D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \leq \sqrt{(|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|)^2} = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = D_1(x, y)$

Como $|x_r - y_r| = \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\}$, para todo $|x_i - y_i|$ tal que $1 \leq i \leq n$, temos que $|x_i - y_i| \leq |x_r - y_r|$

Logo, $D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \leq n|x_r - y_r| = nD_2(x, y)$.

Definição 2.1.7 *Sejam $(M_1, d_1), \cdots, (M_n, d_n)$, espaços métrico quaisquer e veremos agora que $M = M_1 \times \cdots \times M_n$, pode se tornar um espaço métrico com métricas ligadas a d_1, d_2, \cdots, d_n .*

Tome $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$ pontos de M , definindo as funções D, D_1 e $D_2 : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ do seguinte modo:

$$D(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \cdots + d_n(x_n, y_n)^2}$$

$$D_1(x, y) = d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_n(x_n, y_n)$$

$$D_2(x, y) = \max\{d(x_1, y_1), \cdots, d_n(x_n, y_n)\}$$

Definindo as funções desse modo são métrica de M . Serão omitidas as demonstrações de que são métricas.

2.2 Bolas abertas e fechadas

Definição 2.2.1 Seja p um ponto de um espaço métrico (M, d) . Sendo $\epsilon > 0$ um número real, a bola aberta de centro p e raio ϵ , a qual indicaremos por $B(p, \epsilon)$, é o seguinte subconjunto de M :

$$B(p, \epsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \epsilon\}.$$

Exemplo 2.2.2 Bolas em um espaço cuja métrica é a zero-um. Seja (M, d) um espaço discreto e consideremos $p \in M$. Há dois casos a considerar:

- $0 < \epsilon \leq 1$. Neste caso $B(p, \epsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \epsilon\} = \{p\}$, porque o único ponto cuja distância a p é menor do que 1 é o próprio p .
- $1 < \epsilon$. Quando isso acontece, $B(p, \epsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \epsilon\} = M$, porque todos os pontos de M estão a uma distância de p igual a zero ou igual a um, e portanto, menor do que ϵ .

Exemplo 2.2.3 Bolas no espaço \mathbb{R} . Na reta real, a bola de centro $p \in \mathbb{R}$ e raio ϵ é o conjunto

$$B(p, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - p| < \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid p - \epsilon < x < p + \epsilon\} =]p - \epsilon, p + \epsilon[.$$

Exemplo 2.2.4 Bolas no espaço \mathbb{R}^2 . Lembremos que no espaço \mathbb{R}^2 já foram definidas três métricas: para quaisquer $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de \mathbb{R}^2 :

$$D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$D_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|; |x_2 - y_2|\}$$

Seja $p = (a, b)$ um ponto de \mathbb{R}^2 , a bola de centro p e raio $\epsilon > 0$, segundo a métrica D , é o conjunto

$$B(p, \epsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 < \epsilon^2\}.$$

Quando a métrica for D_1 , a bola de centro p e raio ϵ é o conjunto:

$$B(p, \epsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - a| + |y - b| < \epsilon\}.$$

E por último, quando se trata da métrica D_2 , temos:

$$B(p, \epsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x - a|, |y - b|\} < \epsilon\}.$$

Definição 2.2.5 Seja p um ponto do espaço métrico (M, d) . Sendo $\epsilon > 0$ um número real, a bola fechada de centro p e raio ϵ , a qual denotaremos por $B[p, \epsilon]$, é o seguinte subconjunto de M :

$$B[p, \epsilon] = \{x \in M \mid d(x, p) \leq \epsilon\}.$$

2.3 Sequências em espaços métricos

Definição 2.3.1 Seja (M, d) um espaço métrico. Toda aplicação de $n \rightarrow x_n$, de \mathbb{N}^* em M , é chamada sequência de elementos de M . Denotaremos por $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ ou (x_n) .

Além disso, cada imagem x_n correspondente a uma sequência (x_n) é chamada termo da sequência. Assim o conjunto dos termos de uma sequência é $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Exemplo 2.3.2 $(1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$ é uma sequência de elementos de \mathbb{R} cujo conjunto dos termos é $\{1, 2\}$.

Definição 2.3.3 Dada uma sequência (x_r) em M , considere $\{r_1, r_2, \dots\} \subset \mathbb{N}^*$ e $r_1 < r_2 < \dots$, então a aplicação dada por $r_i \rightarrow x_{r_i}$ é indicada por $(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots)$ e é denominada subsequência de (x_r) .

Exemplo 2.3.4 Tome a sequência $(1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$ de elementos de \mathbb{R} , então $(1, 1, 1, \dots)$ é uma subsequência da sequência dada.

Definição 2.3.5 *Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que $p \in M$ é limite de uma sequência (x_n) de pontos de M se, para toda $B(p, \epsilon)$, existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$ tal que*

$$n \geq r \Rightarrow x_n \in B(p, \epsilon).$$

Para indicar que p é o limite da sequência (x_n) , usa-se $\lim x_n = p$ ou $x_n \rightarrow p$. Dizemos que nesse caso (x_n) é convergente ou que (x_n) converge para p .

Proposição 2.3.6 *Dada uma sequência (x_n) de elementos de M , dizemos que ela converge para $p \in M$ se, e somente se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$ tal que*

$$n \geq r \Rightarrow d(x_n, p) < \epsilon.$$

Demonstração. Pela definição de bola aberta, é fácil ver que $x_n \in B(p, \epsilon) \Leftrightarrow d(x_n, p) < \epsilon$.

■

Exemplo 2.3.7 *Seja (x_n) uma sequência estacionária em M , isto é, uma sequência (x_n) de pontos de M tal que $x_n = p$, a partir de um certo índice. Desse modo $(x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_r, p, p, \dots)$.*

Tais sequências são convergentes e convergem para o termo que se repete, ou seja, $x_n \rightarrow p$, uma vez que $x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = p$, pois para todo $\epsilon > 0$,

$$n \geq r + 1 \Rightarrow d(x_n, p) = d(p, p) = 0 < \epsilon.$$

Em particular as sequências constantes (p, p, p, \dots) convergem para essa constante p .

Proposição 2.3.8 *Seja (x_n) uma sequência convergente de um espaço métrico (M, d) . Então é único o limite dessa sequência.*

Demonstração. Suponhamos que $\lim x_n = p$ e $\lim x_n = q$. Se $p \neq q$, então $\epsilon = \frac{d(p, q)}{2}$ é maior do que zero e portanto existem índices r, s de maneira que

$$n \geq r \Rightarrow d(x_n, p) < \epsilon$$

$$n \geq s \Rightarrow d(x_n, q) < \epsilon.$$

Tomando $t = \max\{r, s\}$, então $n \geq t \Rightarrow d(x_n, p) < \epsilon$ e $d(x_n, q) < \epsilon$.

Daí, para todo $n \geq t$

$$d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = d(p, q),$$

o que é absurdo. ■

Proposição 2.3.9 *Se uma sequência (x_n) de pontos de M converge para $p \in M$ então toda subsequência de (x_n) também converge para p .*

Demonstração. Seja $(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots)$ uma subsequência da sequência dada e considere $\epsilon > 0$. Da hipótese de que $\lim x_n = p$ decorre que existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$n \geq k \Rightarrow d(x_n, p) < \epsilon.$$

Ora, como $r_i \in \mathbb{N}^*$ e $r_1 < r_2 < \dots$, então existe $r_t > k$ e portanto, para todo $r_i \geq r_t$, vale a relação

$$d(x_{r_i}, p) < \epsilon.$$

Assim fica provado que $\lim x_{r_i} = p$. ■

Observação 2.3.10 *A recíproca da proposição anterior não vale, como mostra o exemplo a seguir.*

Exemplo 2.3.11 *A sequência $(1, 2, 1, 2, \dots)$ não é convergente, enquanto que suas subsequências $(1, 1, 1, \dots)$ e $(2, 2, 2, \dots)$ são convergentes.*

Definição 2.3.12 *Uma sequência (x_n) de pontos de um espaço métrico (M, d) se diz limitada se o conjunto $\{x_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ dos termos dessa sequência é limitado, isto é, existe $k > 0$ tal que $d(x_r, x_s) < k$ para quaisquer termos x_r e x_s da sequência dada.*

Proposição 2.3.13 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de pontos de um espaço métrico (M, d) , convergente para $p \in M$. Dada a bola $B(p, 1)$, existe então um índice r tal que

$$n \geq r \Rightarrow x_n \in B(p, 1).$$

Seja $k > \max\{d(x_i, p) \mid i = 1, \dots, r-1\}$ e consideremos a bola $B(p, \epsilon)$, onde $\epsilon = \max\{1, k\}$. Então todos os pontos do conjunto $\{x_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ pertencem a essa bola e portanto, para quaisquer termos x_i e x_j da sequência

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, p) + d(p, x_j) < 2\epsilon,$$

o que prova ser a sequência (x_n) limitada. ■

Observação 2.3.14 *Nem toda sequência limitada é convergente.*

Tome como exemplo a sequência $(1, 2, 1, 2, \dots)$. Em \mathbb{R} tal sequência é obviamente limitada mas não convergente.

2.4 Topologia dos espaços métricos

Iremos apresentar a seguir, alguns conceitos e resultados básicos de uma estrutura matemática subjacente aos espaços métricos.

Definição 2.4.1 *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset M$ se diz aberto se, para todo $p \in A$, existe um número real $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset A$.*

Definição 2.4.2 *Seja (M, d) um espaço métrico. Se $A \subset M$, um ponto $p \in A$ é chamado ponto interior ao conjunto A se existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset A$.*

O conjunto dos pontos interiores de A é chamado interior de A e é indicado por $\text{int}(A)$. Tem-se $\text{int}(A) \subset A$.

Proposição 2.4.3 *Sejam (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$. Então, A é um subconjunto aberto se, e somente se, $\text{int}(A) = A$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que A é aberto. Então, para todo ponto $p \in A$, existe um número real $\epsilon > 0$, tal que $B(p, \epsilon) \subset A$. Assim, pela definição anterior, $p \in \text{int}(A)$. Logo, $A \subset \text{int}(A)$. Como $\text{int}(A) \subset A$ é imediato, concluímos que $\text{int}(A) = A$.

Agora suponhamos que $\text{int}(A) = A$. Assim, todo ponto $p \in A$ é ponto interior de A e, então, existe $\epsilon > 0$, tal que $B(p, \epsilon) \subset A$. Logo, A é aberto. ■

Definição 2.4.4 *Seja A um subconjunto de um espaço métrico (M, d) . Um ponto $p \in M$ é ponto aderente ao conjunto A se, para todo $\epsilon > 0$, vale a relação $B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.*

O conjunto dos pontos aderentes ao subconjunto A chama-se fecho de A e é indicado por \overline{A} . Tem-se $A \subset \overline{A}$.

Proposição 2.4.5 *Seja (M, d) um espaço métrico. Para todo $A \subset M$, tem-se*

$$M - \overline{A} = \text{int}(M - A).$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} p \in M - \overline{A} &\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0, \text{ tal que } B(p, \epsilon) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0, \text{ tal que } B(p, \epsilon) \subset M - A \Leftrightarrow p \in \text{int}(M - A). \end{aligned}$$

■

Definição 2.4.6 *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $F \subset M$ se diz fechado se, e somente se, $F^c = M - F$ é aberto.*

Corolário 2.4.7 *Sejam (M, d) um espaço métrico e $F \subset M$. Então, F é fechado se, e somente se, $\overline{F} = F$.*

Demonstração. Suponhamos que F é fechado. Então, $M - F$ é aberto. Assim, pela Proposição 2.4.3, $\text{int}(M - F) = M - F$. Além disso, da Proposição 2.4.5, concluímos que $\text{int}(M - F) = M - (\overline{F})$.

Logo, $M - F = M - (\overline{F})$, o que implica em $\overline{F} = F$.

Para a recíproca, suponhamos que $F = \overline{F}$.

Pela Proposição 2.4.5, temos que $\text{int}(M - F) = M - (\overline{F}) = M - F$. Logo, $M - F$ é aberto e, portanto, F é fechado. ■

2.5 Espaços métricos compactos

Definição 2.5.1 *Seja (M, d) um espaço métrico. Diz-se que um subconjunto $K \subset M$ é compacto se, para toda sequência (x_n) de pontos de K , existe uma subsequência (x_{n_j}) que*

converge para um $p \in K$. Um espaço métrico (M, d) se diz compacto se o conjunto M é compacto.

Exemplo 2.5.2 *Todo conjunto finito é compacto.*

De fato, se K é finito e (x_1, x_2, \dots) é uma sequência de pontos de K então existe um termo x_r tal que $(x_r, x_r, x_r, \dots) \rightarrow x_r$ e então fica provada nossa afirmação.

Exemplo 2.5.3 *Na reta real todo intervalo $[a, b]$ é compacto.*

De fato, seja (x_1, x_2, \dots) uma sequência de pontos de $[a, b]$ e consideremos a sequência (s_1, s_2, \dots) onde

$$s_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

Obviamente tem-se

$$a \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq b$$

e portanto, se $s = \sup\{s_n\}$, então pelo teorema da convergência monótona $s = \lim s_n$.

Assim, tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe um índice n_1 , tal que $|s_n - s| < \frac{1}{2}$, para todo $n \geq n_1$. Considerando algum índice $m > n_1$, como $s_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\}$, existe um índice $i_1 \geq m$ de modo que $|x_{i_1} - s_m| < \frac{1}{2}$. Daí

$$|x_{i_1} - s| \leq |x_{i_1} - s_m| + |s_m - s| < 1.$$

De maneira análoga, para $\epsilon = \frac{1}{4}$, existe um índice n_2 no qual $|s_n - s| < \frac{1}{4}$, para todo $n \geq n_2$. Tomando um índice m tal que $m > n_2$ e $m > i_1$, sendo $s_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\}$, existe um índice $i_2 \geq m$ (logo $i_2 > n_2$ e $i_2 > i_1$) de maneira que $|x_{i_2} - s_m| < \frac{1}{4}$. Então:

$$|x_{i_2} - s| < |x_{i_2} - s_m| + |s_m - s| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Dessa forma, obtemos uma sequência $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots)$, que é subsequência de (x_1, x_2, \dots) tal que

$$|x_{i_r} - s| < \frac{1}{2^{r-1}}, \text{ para todo } r = 1, 2, 3, \dots.$$

Como $\lim \left\{ \frac{1}{2^{r-1}} \right\} = 0$, então $\lim(x_{i_r} - s) = 0$ e portanto, $\lim x_{i_r} = s$. ■

Definição 2.5.4 *Seja (M, d) um espaço métrico e A um subconjunto de M . Dizemos que um ponto $p \in M$ é um ponto de acumulação de A se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ a interseção $(B(p, \epsilon) - \{p\}) \cap A$ é um conjunto infinito. Ou seja, toda bola de centro p deve ter infinitos pontos de A distintos do ponto p .*

O conjunto dos pontos de acumulação de A é chamado conjunto derivado, e é denotado por A' .

Observação 2.5.5 $A \subset M$ é fechado $\Leftrightarrow A' \subset A$.

Ver [4], Proposição 9.

Proposição 2.5.6 *Seja (M, d) um espaço métrico. Se F e K são subconjuntos de M tais que F é fechado, K é compacto e $F \subset K$, então F também é compacto.*

Demonstração. Seja (X_n) uma sequência de F , como uma sequência de pontos (x_1, x_2, \dots) de F é também uma sequência de pontos de K , e como K é compacto, então existe uma subsequência $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots)$ de (x_i) tal que $\lim x_i = p \in K$. Seja A o conjunto de imagens dessa subsequência.

Para essa subsequência são duas as possibilidades:

(i) $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots\}$ é finito.

Nesse caso existem subsequências de (x_{i_r}) que são constantes, devendo cada uma delas convergir para p , então seus termos são todos iguais a p e portanto $p \in F$.

(ii) A é infinito.

Como $p = \lim x_{i_r}$, então para cada $\epsilon > 0$ a bola aberta $B = B(p, \epsilon)$ contém infinitos termos de (x_{i_r}) e portanto, é infinita a intersecção $(B - \{p\}) \cap A$. Logo $p \in A'$ e daí $p \in F'$, uma vez que $A \subset F$. Como $F' \subset F$ (pois F é fechado), então, $p \in F$. ■

Proposição 2.5.7 *Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico M é fechado.*

Demonstração. Basta provar que $\overline{K} \subset K$. Se $p \in \overline{K}$, então, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, vale a desigualdade

$$B\left(p, \frac{1}{n}\right) \cap K \neq \emptyset.$$

Assim, tomando em cada uma dessas interseções, um e apenas um elemento, obtemos uma sequência de pontos de K que converge para p , onde todas as subsequências dessa sequência convergem para p . Como K é compacto uma, ao menos, delas converge para um ponto de K . Logo $p \in K$. ■

Proposição 2.5.8 *Sejam M e N espaços métricos e seja $f : M \rightarrow N$ uma função contínua. Se $K \subset M$ é compacto, então $f(K)$ também é compacto.*

Demonstração. Seja (y_1, y_2, \dots) uma sequência de pontos de $f(K)$. Assim sendo, existe para cada índice i , um elemento $x_i \in K$, tal que $f(x_i) = y_i$. Como (x_i) é uma sequência de pontos de K , que é compacto, existe uma subsequência $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots)$ dessa sequência tal que $\lim x_{i_r} = p \in K$. Sendo f contínua, então $\lim f(x_{i_r}) = f(p)$ e portanto, a subsequência $(f(x_{i_r}))$ de (y_i) converge para $f(p) \in f(K)$. ■

Proposição 2.5.9 *Sejam M e N espaços métricos do \mathbb{R} e consideremos sobre $M \times N$ uma qualquer das métricas equivalentes D , D_1 e D_2 . Se K e L são subconjuntos de M e N , respectivamente, então $K \times L$ é compacto se, e somente se, K e L são compactos.*

Demonstração. (\Rightarrow) Sendo $K \times L$ compacto, como as projeções $p_1 : M \times N \rightarrow M$ e $p_2 : M \times N \rightarrow N$ são contínuas, então $p_1(K \times L) = K$ e $p_2(K \times L) = L$ também são compactos.

(\Leftarrow) Seja $(z_n) = (x_n, y_n)$ uma sequência de pontos de $K \times L$. Então (x_n) é uma sequência de pontos de K e, como K é compacto, existe uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$ de (x_n) tal que $\lim (x_{n_i}) = p \in K$.

Considerando a subsequência (y_{n_i}) da sequência (y_n) , e sendo L compacto, existe uma subsequência $(y_{n_{i_k}})$ tal que $\lim (y_{n_{i_k}}) = q \in L$.

Assim $(x_{n_{i_k}}, y_{n_{i_k}})$ é obviamente uma subsequência de (z_n) e

$$\lim (x_{n_{i_k}}, y_{n_{i_k}}) = (p, q) \in K \times L.$$

■

Corolário 2.5.10 *Se $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$ são, respectivamente, subconjuntos compactos dos espaços métricos $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ e se em $M = M_1 \times \dots \times M_n$ considerarmos a métrica D (ou suas equivalentes D_1 ou D_2), então $K = K_1 \times \dots \times K_n$ é compacto se, e somente se, K_1, K_2, \dots, K_n são compactos.*

Proposição 2.5.11 *Um subconjunto A do espaço \mathbb{R}^n é compacto se, e somente se, A é fechado e limitado.*

Demonstração. A ida vale para todos os espaços métricos

Agora, sendo A limitado, existe $a > 0$ tal que:

$$A \subset [-a, a] \times \dots \times [-a, a]$$

deste modo $[-a, a] \times \dots \times [-a, a]$ é compacto em \mathbb{R}^n . Assim A é um subconjunto fechado do \mathbb{R}^n que está contido num compacto deste espaço. Levando em conta a Proposição 2.5.6, A também é compacto. ■

2.6 Sequência de Cauchy

As sequências convergentes tem uma propriedade importante que vamos ver ela abaixo.

Se (x_n) é uma sequência convergente de um espaço métrico (M, d) e se $\lim x_n = p$, então, para todo $\epsilon > 0$, existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$m, n \geq r \Rightarrow d(x_n, p) < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } d(x_m, p) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Porém, $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, p) + d(x_n, p)$ então

$$m, n \geq r \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Assim, obtemos uma condição sobre os termos da sequência na qual não invertém o limite p dessa sequência. Intuitivamente, essa condição significa que as distâncias entre os termos da sequência se tornam arbitrariamente pequenos, para índices convenientemente grandes.

Definição 2.6.1 *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) de pontos de M é chamada sequência de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$, existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$ tal que*

$$m, n \geq r \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Proposição 2.6.2 *Toda sequência convergente de um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

Observação 2.6.3 *A recíproca do resultado anterior não é válida, ou seja, uma sequência de Cauchy de um espaço métrico (M, d) pode não convergir em M , como mostra o exemplo a seguir.*

Exemplo 2.6.4 *Seja (x_n) uma sequência de pontos em \mathbb{Q} definida por*

$$x_1 = 2 \text{ e } x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right), \forall n \geq 1. \quad (*)$$

Como $x_n - \frac{2}{x_n} \neq 0$, uma vez que cada x_n é racional, e como

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{2}{x_n} \right)^2 + 2,$$

então $x_n^2 > 2$, para todo $n \geq 1$. Daí

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) < \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{x_n^2}{x_n} \right) = x_n,$$

para qualquer $n \geq 1$. Então

$$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n > \cdots > 1.$$

Como toda sequência decrescente ou estritamente decrescente, cujo conjunto dos termos é limitado inferiormente, converge para o supremo desse conjunto, podemos concluir que a sequência (x_n) converge para um ponto real $p > 0$ e que, portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy em \mathbb{Q} . Como (x_2, x_3, \dots) também converge para p , a fórmula $()$, "passada ao*

limite”, nos dá a igualdade

$$p = \frac{1}{2} \left(p + \frac{2}{p} \right) \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2 + 2}{p} \right) \Leftrightarrow p^2 = \frac{1}{2}(p^2 + 2) \Leftrightarrow p^2 - \frac{p^2}{2} = \frac{2}{2} \Leftrightarrow \frac{p^2}{2} = \frac{2}{2} \Leftrightarrow p^2 = 2.$$

Portanto $p \notin \mathbb{Q}$, ou seja, (x_n) não converge em \mathbb{Q} .

Proposição 2.6.5 *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço vetorial normado E . Então existe uma bola aberta de centro no vetor nulo que contém todos os termos da sequência.*

Demonstração. Tomando $\epsilon = 1$ existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$m, n \geq r \Rightarrow d(x_m, x_n) = \|x_m - x_n\| < 1.$$

Em particular, $\|x_m - x_r\| < 1$, para todo $m \geq r$. Mas $\|x_m\| \leq \|x_m - x_r\| + \|x_r\|$ e portanto, para todo $m \geq r$, $\|x_m\| < 1 + \|x_r\|$.

Seja $\lambda > \max \{\|x_1\|, \dots, \|x_{r-1}\|, 1 + \|x_r\|\}$. Então, para todo índice n ,

$$d(x_n, 0) = \|x_n\| < \lambda,$$

o que prova que $x_n \in B(0, \lambda)$, para todo $n \geq 1$. ■

Proposição 2.6.6 *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço métrico (M, d) . Se existe uma subsequência de (x_n) que converge para $p \in M$, então $\lim x_n = p$.*

Demonstração. Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots)$ uma subsequência da sequência (x_n) de Cauchy. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um índice n_k tal que:

$$n_i \geq n_k \Rightarrow d(x_{n_i}, p) < \frac{\epsilon}{2}$$

e pelo fato de (x_n) ser de Cauchy, existe um índice s tal que:

$$n, j \geq s \Rightarrow d(x_n, x_j) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando $t = \max \{s, n_k\}$ e, considerando um índice $n_j > t$ (sempre existe), temos então que

$$n \geq t \Rightarrow d(x_n, p) \leq d(x_n, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, p) < \epsilon,$$

o que garante convergência de (x_n) para o ponto p . ■

Corolário 2.6.7 *Se uma sequência de pontos de um espaço métrico contém duas subsequências que convergem para pontos diferentes desse espaço, então a sequência não é de Cauchy.*

Proposição 2.6.8 *Se M e N são espaços métricos, para que uma sequência (x_n, y_n) de pontos de $M \times N$ seja um sequência de Cauchy nesse espaço, é necessário e suficiente que (x_n) e (y_n) sejam de Cauchy em M e N , respectivamente.*

Demonstração. Naturalmente o enunciado se refere a qualquer das métricas usuais em $M \times N$ indistintas no que tange à convergência.

(\Rightarrow) Seja $\epsilon > 0$. Existe então $\delta > 0$ de maneira que

$$m, n \geq r \Rightarrow D_1((x_m, y_m); (x_n, y_n)) = d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) < \epsilon.$$

Dessa forma, $d(x_m, x_n) < \epsilon$ e $d(y_m, y_n) < \epsilon$, para qualquer $m, n \geq r$ e portanto, (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em M e N , respectivamente.

(\Leftarrow) Para todo $\epsilon > 0$ existem, por hipótese, r e s tais que

$$d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } m, n \geq r \text{ e } d(y_m, y_n) < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } m, n \geq s.$$

Considerando $t = \max \{r, s\}$ temos então

$$m, n \geq t \Rightarrow D_1((x_m, y_m); (x_n, y_n)) < \epsilon.$$

■

A generalização do resultado acima para um produto $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$, com $(n \geq 1)$ de espaços métricos, é imediata.

2.7 Espaços métricos completos

Proposição 2.7.1 *Toda sequência de Cauchy (x_n) em \mathbb{R} converge para um ponto $p \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Devido a Proposição 2.6.5, existe $k > 0$ tal que $|x_n| < k$, para todo $n \geq 1$, o que nos permite concluir a existência, para cada índice $m \geq 1$, de

$$y_m = \inf \{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots\}.$$

Assim, é claro que $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq k$. Dessa forma, (y_n) converge para $p = \sup \{y_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ que é um ponto de \mathbb{R} .

Mostremos que $\lim x_n = p$.

Dado $\epsilon > 0$, existe um índice r tal que

$$n \geq r \Rightarrow |y_n - p| < \frac{\epsilon}{3},$$

e como (x_n) é de Cauchy, existe um índice s de modo que

$$m, n \geq s \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Tome $t = \max \{s, r\}$. Levando em conta que $y_t = \inf \{x_t, x_{t+1}, \dots\}$, existe $j \geq t$ para o qual tem-se $y_t \leq x_j < y_t + \frac{\epsilon}{3}$ e portanto,

$$|x_j - y_t| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Assim, para todo $n > t$ temos

$$|x_n - p| \leq |x_n - x_j| + |x_j - y_t| + |y_t - p| < \epsilon.$$

Portanto $\lim x_n = p$. ■

Definição 2.7.2 *Um espaço métrico (M, d) é chamado completo se toda sequência de Cauchy desse espaço converge para um ponto de M .*

Assim, podemos dizer, já usando a linguagem da definição acima, que o espaço \mathbb{Q} não é completo ao passo que \mathbb{R} é um espaço métrico completo.

Proposição 2.7.3 *Sejam M e N espaços métricos. Então o espaço $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se (x_n) é uma sequência de Cauchy em M , então, para cada $y \in N$, $((x_1, y); (x_2, y); \dots)$ é uma sequência de Cauchy no espaço $M \times N$.

De fato, dado $\epsilon > 0$, existe um índice r tal que

$$m, n \geq r \Rightarrow D_1((x_m, y); (x_n, y)) = d(x_m, x_n) + d(y, y) = d(x_m, x_n) < \epsilon$$

Portanto (x_n, y) converge para $(x, y) \in M \times N$ e daí, (x_n) converge para $x \in M$.

De maneira análoga prova-se que N é completo.

(\Leftarrow) Se (x_n, y_n) é uma sequência de Cauchy no espaço $M \times N$, então (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em M e N , respectivamente, e sendo completos estes espaços, existem $p \in M$ e $q \in N$ de maneira que $\lim x_n = p$ e $\lim y_n = q$.

Portanto, $\lim (x_n, y_n) = (p, q)$. ■

A generalização da proposição anterior para um produto $M = M_1 \times \dots \times M_n$ é imediata. Em particular, temos um importante resultado:

Corolário 2.7.4 *O espaço \mathbb{R}^n é completo.*

Dimensão de Hausdorff

Se pretendermos medir o comprimento de uma linha costeira com todas as imperfeições que apresenta, podemos fazê-lo através de uma fotografia de satélite e, considerando uma determinada escala, obtemos um determinado valor. Mas se a fotografia fosse tirada de um helicóptero, as irregularidades seriam mais visíveis e, considerando uma escala inferior, obteríamos um outro valor para o comprimento da costa. Se esta fosse percorrida a pé, tomando cada passo como uma nova escala, ainda menor, o comprimento seria ainda maior. Se quisermos considerar cada vez mais particularidades como por exemplo, os contornos das rochas, poderíamos usar este processo indefinidamente com escalas sempre cada vez menores e obtendo comprimentos sempre cada vez maiores. A noção de dimensão de Hausdorff, a qual estudaremos neste capítulo, permite traduzir a rugosidade e a irregularidade de um objeto e, diferente da geometria euclidiana, não é necessariamente uma quantidade inteira, podendo ser uma fração simples, ou até mesmo um número irracional. A dimensão de Hausdorff de um objeto representa o grau de ocupação deste no espaço e surge então como uma alternativa de medição, obtendo assim o grau de complexidade de uma forma.

Nos referimos à dimensão de Hausdorff como a "dimensão dos fractais", os quais iremos discutir mais a fundo no próximo capítulo. Este capítulo tem como principal objetivo detalhar os resultados necessários para a definição formal de dimensão de Hausdorff, tais como espaço e métrica de Hausdorff. Para maiores informações sobre o assunto, consultar [2] e [6].

Inicialmente, vamos abordar uma noção intuitiva do conceito de dimensão de Hausdorff. Para isso, vamos explorar o conceito de dimensão de objetos através de subdivisões destes.

Dimensão 1. Considere um segmento de reta e o divida em quatro partes euclidianamente iguais, isto é, cada parte que obtemos na divisão tem comprimento igual ao do segmento original multiplicado pelo fator $\frac{1}{4}$.



Figura 3.1: Divisão do segmento de reta.

Dimensão 2. Agora, considere um quadrado e, efetuando o mesmo processo anterior, divida cada um dos seus lados em quatro partes iguais. Ficamos então com 4^2 partes iguais.

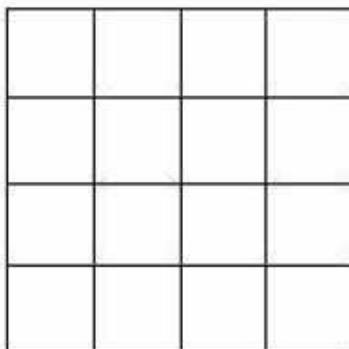


Figura 3.2: Divisão do quadrado.

Dimensão 3. Procedendo de forma igual para um cubo, obtemos 4^3 partes iguais.

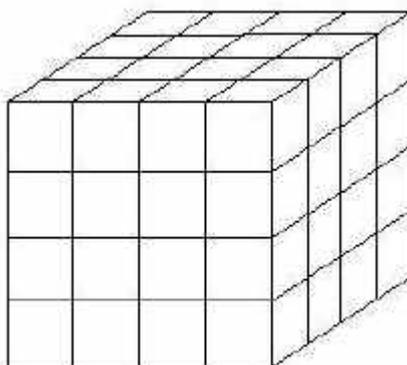


Figura 3.3: Divisão do cubo.

O fator de redução escolhido poderia ter sido qualquer outro, variando o número de partes em que o objeto inicial é dividido. Assim, denotando por N o número de partes que o objeto foi dividido e r o fator de redução, a dimensão de um objeto é o expoente que aparece no denominador da fração: $N = \frac{1}{r^1}$ no caso do segmento de reta (dimensão 1), $N = \frac{1}{r^2}$ no caso do quadrado (dimensão 2), $N = \frac{1}{r^3}$ no caso do cubo (dimensão 3).

Dessa forma, denotando por D a dimensão do objeto, obtemos a seguinte relação

$$N = \frac{1}{r^D},$$

que equivale à $N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$.

Aplicando a função logaritmo em ambos os lados da igualdade anterior, ficamos com

$$\log(N) = \log\left(\frac{1}{r}\right)^D \Rightarrow \log(N) = D \cdot \log\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

A dimensão de Hausdorff de um objeto é dada, de maneira intuitiva, por $D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$.

A partir de agora, veremos algumas definições e resultados para formalizar a definição de dimensão de Hausdorff.

3.1 Espaço de Hausdorff

Nos referimos ao espaço de Hausdorff como o "espaço dos fractais", os quais iremos discutir um pouco melhor no próximo capítulo. Formalmente temos a seguinte definição:

Definição 3.1.1 *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Chamaremos de espaço de Hausdorff de X o espaço formado por todos os subconjuntos não vazios compactos de X . Denotaremos por $\mathcal{H}(X)$, ou seja,*

$$\mathcal{H}(X) = \{K \subset X \mid K \text{ é compacto e } K \neq \emptyset\}.$$

A fim de trabalharmos com um espaço métrico é necessário definir uma métrica a ele envolvida. Para isso, definiremos a distância de um elemento do espaço métrico X a um elemento de $\mathcal{H}(X)$. A construção de tal métrica em X será detalhada a seguir e é conhecida

como *distância de Hausdorff*.

Definição 3.1.2 *Sejam (X, d) um espaço métrico completo, $x \in X$ e $B \in \mathcal{H}(X)$. Definimos a distância do ponto x ao conjunto B como*

$$d(x, B) = \min \{d(x, y); y \in B\}.$$

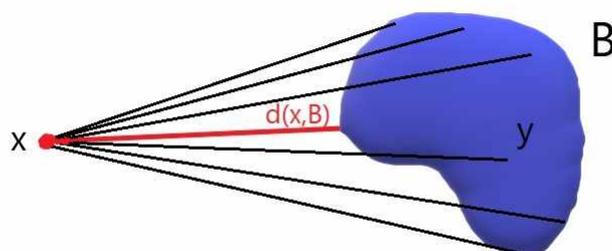


Figura 3.4: Distância de ponto a conjunto.

O conjunto de números reais $\{d(x, y); y \in B\}$ contém um mínimo valor uma vez que $B \in \mathcal{H}(X)$ é compacto e não vazio.

Definição 3.1.3 *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $A, B \in \mathcal{H}(X)$. A distância do conjunto A ao conjunto B é definida como*

$$d(A, B) = \max \{d(x, B); x \in A\}.$$

Em outras palavras, $d(A, B)$ é a maior das menores distâncias que separam os pontos de A a qualquer ponto de B .

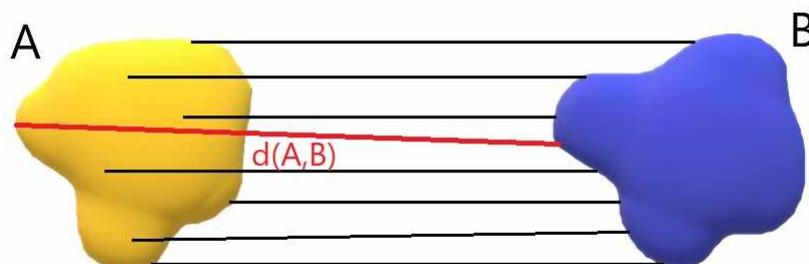


Figura 3.5: Distância entre dois conjuntos.

Da mesma forma que garantimos a existência de um mínimo, podemos afirmar a existência de um máximo para a definição anterior.

Para um melhor entendimento da definição, considere o exemplo a seguir:

Exemplo 3.1.4 Considere $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}$ e $B = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$. Dessa forma, A e B pertencem ao espaço $\mathcal{H}(X)$ e obtemos as distâncias a seguir

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \max\{d(x, B); x \in A\} \\ &= \max\{\min\{d(x, y); y \in B\}; x \in A\} \\ &= \max\left\{d\left(0, \frac{1}{2}\right), d\left(1, \frac{1}{2}\right), d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \dots, d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right), \dots\right\} \\ &= \max\left\{\frac{1}{2}, 0, \dots, \frac{n-2}{2n}, \dots\right\} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(B, A) &= \max\{d(y, A); y \in B\} \\ &= \max\{\min\{d(y, x); x \in A\}; y \in B\} \\ &= \max\left\{\min\left\{d\left(\frac{1}{2}, 0\right), d\left(\frac{1}{2}, 1\right), d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \dots, d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right), \dots\right\}\right\} \\ &= \max\{0\} = 0 \end{aligned}$$

Portanto, $d(A, B) \neq d(B, A)$

Exemplo 3.1.5 Dados retângulos A e B , A com vértices $(100, 100)$, $(300, 100)$, $(300, 200)$ e $(100, 200)$ e B com vértices $(400, 100)$, $(800, 100)$, $(800, 200)$ e $(400, 200)$, temos que são conjuntos fechados e limitados, o que com a métrica euclidiana garante que são compactos. Desse modo, conseguimos calcular a distância entre esses dois conjuntos, $d(A, B) = 300$ e $d(B, A) = 500$, ou seja $d(A, B) \neq d(B, A)$

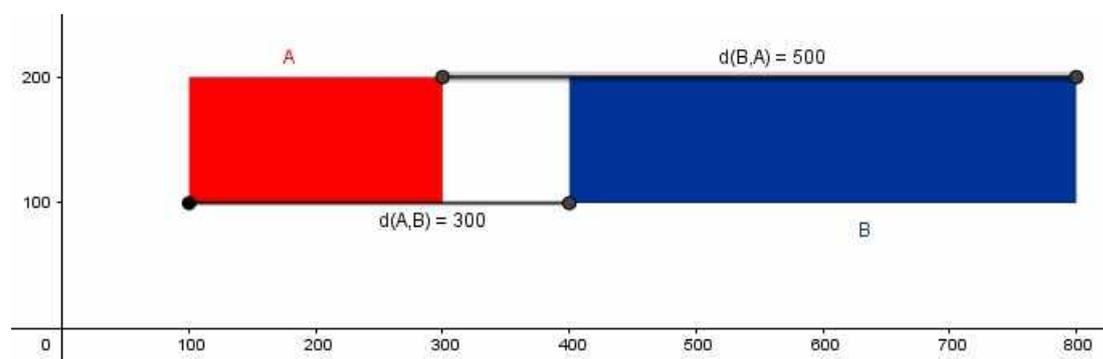


Figura 3.6: Distância entre dois conjuntos não necessariamente é comutativo.

Observação 3.1.6 A definição anterior de distância entre conjuntos não pode ser uma métrica, pois nem sempre $d(A, B) = d(B, A)$, como mostram os exemplos anteriores.

Definimos assim a distância de Hausdorff como a maior entre as distâncias $d(A, B)$ e $d(B, A)$. Formalmente temos:

Definição 3.1.7 Seja (X, d) um espaço métrico completo. A distância de Hausdorff entre os pontos A e B de $\mathcal{H}(X)$ é definida por

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A),$$

onde o símbolo \vee representa o máximo entre as duas distâncias.

Teorema 3.1.8 A aplicação $h(A, B)$, distância de Hausdorff definida acima, é uma métrica no espaço $\mathcal{H}(X)$.

Demonstração. Tome $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$. Iremos mostrar que a aplicação h satisfaz as três propriedades da definição de métrica .

(M1) Como $d(A, B)$ e $d(B, A)$ são maiores ou iguais 0 então o máximo entre os dois também será.

Inicialmente, suponhamos $h(A, B) = 0$.

Dessa forma, $d(A, B) \vee d(B, A) = 0$, ou seja, $\max\{d(A, B), d(B, A)\} = 0$. Como distância sempre é maior ou igual a zero, temos $0 \leq d(A, B) \leq 0$ e $0 \leq d(B, A) \leq 0$.

Logo, $d(A, B) = d(B, A) = 0$.

Por outro lado, $d(A, B) = \max\{d(x, B); x \in A\}$ e $d(B, A) = \max\{d(y, A); y \in B\}$.

Dessa forma, para todo $x \in A$, temos $0 \leq d(x, B) \leq d(A, B) = 0$, ou seja, $d(x, B) = 0$.

Dai $x \in \overline{B}$ pela Proposição 2.5.6, segue que $\overline{B} = B$, pois B é compacto. Logo, $A \subset B$.

Analogamente, para todo $y \in B$, temos $d(y, A) = 0$ e assim, $y \in \overline{A} = A$. Logo, $B \subset A$.

Portanto, se $h(A, B) = 0$ temos que $A = B$.

Reciprocamente, suponhamos $A = B$. Então, $d(x, B) = d(y, A) = 0$, para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$, obtendo assim

$$d(A, B) = \max\{d(x, B); x \in A\} = 0 = \max\{d(y, A); y \in B\} = d(B, A).$$

Portanto, $h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A) = 0$.

(M2) Por definição,

$$\begin{aligned} h(A, B) &= d(A, B) \vee d(B, A) \\ &= \max\{d(A, B), d(B, A)\} \\ &= d(B, A) \vee d(A, B) \\ &= h(B, A). \end{aligned}$$

(M3) Agora mostraremos a desigualdade triangular. Porém precisamos provar inicialmente que, $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

De fato, para todo $x \in A$, temos $d(x, B) = \min\{d(x, y); y \in B\}$. Além disso, como d é uma métrica, para todo $z \in C$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Logo,

$$\begin{aligned} d(x, B) &= \min\{d(x, y); y \in B\} \\ &\leq \min\{d(x, z) + d(z, y); y \in B\}, \forall z \in C \\ &= d(x, z) + \min\{d(z, y); y \in B\}, \forall z \in C \\ &= d(x, z) + d(z, B), \forall z \in C. \end{aligned}$$

Consequentemente, $d(x, B) \leq \min\{d(x, z) + d(z, B); z \in C\}$.

Note ainda que $d(z, B) \leq \max\{d(z, B); z \in C\} = d(C, B)$.

Então,

$$\begin{aligned} d(x, B) &\leq \min\{d(x, z) + d(z, B); z \in C\} \\ &\leq \min\{d(x, z); z \in C\} + d(C, B) \\ &= d(x, C) + d(C, B). \end{aligned}$$

Logo, $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

Analogamente, podemos mostrar que $d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} h(A, B) &= d(A, B) \vee d(B, A) \\ &\leq (d(A, C) \vee d(C, A)) + (d(C, B) \vee d(B, C)) \\ &= h(A, C) + h(C, B). \end{aligned}$$

Logo, provamos que h é uma métrica no espaço $\mathcal{H}(X)$. ■

3.2 Dimensão de Hausdorff

Nesta seção iremos enfim formalizar a definição de dimensão de Hausdorff e apresentar alguns resultados que auxiliam no cálculo de tal dimensão.

Definição 3.2.1 *Sejam (X, d) um espaço métrico completo, $A \in \mathcal{H}(X)$ e $\epsilon > 0$. Defina $\mathcal{N}(A, \epsilon)$ como sendo o menor número de bolas fechadas de raio ϵ necessárias para cobrir o conjunto A . Isto é, $\mathcal{N}(A, \epsilon)$ é o menor inteiro positivo M , tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^M B[x_n, \epsilon]$, para algum conjunto de pontos distintos $\{x_n \mid n = 1, 2, \dots, M\} \subset X$.*

Definição 3.2.2 *Sejam (X, d) um espaço métrico completo, $A \in \mathcal{H}(X)$ e $\epsilon > 0$. Se*

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon))}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} \right\}$$

existe, então D é chamado dimensão de Hausdorff ou dimensão fractal de A .

Podemos também denotar $D = D(A)$.

Exemplo 3.2.3 Considere X o espaço métrico \mathbb{R}^2 com a métrica euclidiana. Sejam $a \in X$ e $A = \{a\}$. Assim, para cada $\epsilon > 0$, temos $\mathcal{N}(A, \epsilon) = 1$. Logo,

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1)}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} \right\} = 0.$$

Portanto, $D(A) = 0$.

Visto que a dimensão de Hausdorff (ou dimensão fractal) de um objeto mede o seu grau de irregularidade, a estrutura e o comportamento, quer se trate de uma figura ou de um fenômeno físico, biológico ou social, o exemplo anterior utiliza a definição 3.2.2 para mostrar o que já era geometricamente esperado, que um ponto possui dimensão zero.

Teorema 3.2.4 Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $A \in \mathcal{H}(X)$. Considere $\epsilon_n = Cr^n$, para r e C números reais, tais que $0 < r < 1$ e $C > 0$, e inteiros $n = 1, 2, 3, \dots$. Se

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_n))}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon_n}\right)} \right\},$$

então A tem dimensão fractal D .

Demonstração. Sejam r e C números reais e $E = \{\epsilon_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ uma sequência, como definida no enunciado do teorema. Seja $\epsilon > 0$. Defina $f(\epsilon) = \max\{\epsilon_n \in E \mid \epsilon_n \leq \epsilon\}$. Assuma que $\epsilon \leq r$. Então,

$$f(\epsilon) \leq \epsilon \leq \frac{f(\epsilon)}{r} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(A, f(\epsilon)) \geq \mathcal{N}(A, \epsilon) \geq \mathcal{N}\left(A, \frac{f(\epsilon)}{r}\right),$$

uma vez que $\mathcal{N}(A, \epsilon)$ é o menor número de bolas fechadas de raio ϵ necessárias para cobrir o conjunto A .

Como $\ln(x)$ é uma função positiva crescente de x para $x \geq 1$, então pelas desigualdades anteriores, segue que

$$\left\{ \frac{\ln\left(\mathcal{N}\left(A, \frac{f(\epsilon)}{r}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{f(\epsilon)}\right)} \right\} \leq \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon))}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} \right\} \leq \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\epsilon)))}{\ln\left(\frac{r}{f(\epsilon)}\right)} \right\}. \quad (3.2.1)$$

Suponha que $\mathcal{N}(A, \epsilon) \rightarrow \infty$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, caso contrário o teorema é válido. Então,

para o lado direito da inequação (3.2.1) vale

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, f(\epsilon)))}{\ln\left(\frac{r}{f(\epsilon)}\right)} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_n))}{\ln\left(\frac{r}{\epsilon_n}\right)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_n))}{\ln(r) + \ln\left(\frac{1}{\epsilon_n}\right)} \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_n))}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon_n}\right)} \right\}. \end{aligned}$$

Para o lado esquerdo da inequação (3.2.1) vale

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln\left(\mathcal{N}\left(A, \frac{f(\epsilon)}{r}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{f(\epsilon)}\right)} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_{n-1}))}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon_n}\right)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_{n-1}))}{\ln\left(\frac{1}{r}\right) + \ln\left(\frac{1}{\epsilon_{n-1}}\right)} \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_{n-1}))}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon_{n-1}}\right)} \right\}. \end{aligned}$$

Agora, quando $n \rightarrow \infty$, podemos fazer uma substituição simples de $n - 1$ por n . Assim temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_{n-1}))}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon_{n-1}}\right)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}(A, \epsilon_n))}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon_n}\right)} \right\}.$$

Desse modo, a medida que $\epsilon \rightarrow 0$, tanto o lado esquerdo quanto o lado direito da inequação (3.2.1) aproximam-se do mesmo valor afirmado no teorema. Pelo Teorema do Confronto, do Cálculo Diferencial, o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ do valor do meio da inequação (3.2.1) também existe e é o mesmo valor dos limites à esquerda e à direita das desigualdades.

■

Dentre os vários cálculos de dimensão fractal existentes, o Box Counting ou Box Dimension é um dos mais utilizados. Sua grande popularidade se deve a sua facilidade de uso em cálculos matemáticos e em estimativas experimentais. O algoritmo para o cálculo dessa dimensão considera uma figura qualquer coberta por um conjunto de quadrados, e calcula o número de quadrados necessários para cobrir toda a figura que é representado por $\mathcal{N}_n(A)$, sendo n a escala, ou seja, número de vezes que o lado da imagem será dividido. E a dimensão fractal, neste caso, será dada como no teorema a seguir.

Para o próximo teorema, considere $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ com a métrica euclidiana. Cubra \mathbb{R}^m por caixas quadradas fechadas que apenas se tocam, com lados de tamanho $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Considere também $\mathcal{N}_n(A) = \mathcal{N}_n$ como o número de caixas com lado de tamanho $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ que interceptam A .

Proposição 3.2.5 *Seja (M, d) um espaço métrico. Se $p \in M$ e $A \subset M$, então $d(p, A) = 0$ se, e somente se, $p \in \bar{A}$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Dado $\epsilon > 0$, como $d(p, A) = \inf \{d(p, x) \mid x \in A\} = 0$ existe $a \in A$, tal que $0 \leq d(p, a) < \epsilon$ (caso contrário teríamos $0 < \epsilon \leq d(p, x)$, para todo $x \in A$, o que não é possível pois, por hipótese $d(p, A) = 0$). Então, $a \in B(p, \epsilon)$ e, portanto, $B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Logo, $p \in \bar{A}$.

(\Leftarrow) Suponhamos, por absurdo, que $d(p, A) = \epsilon > 0$. Como por hipótese $B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, então existe $a \in A$, tal que $d(a, p) < \epsilon$.

Assim, $\epsilon = d(p, A) \leq d(p, a) < \epsilon$, o que é um absurdo. Logo, $d(p, A) = 0$. ■

Teorema 3.2.6 (Box Counting) *No contexto acima, se*

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_n(A))}{\ln(2^n)} \right\},$$

então A tem dimensão fractal D .

Demonstração. Note que para $m = 1, 2, 3, \dots$,

$$2^{-m} \mathcal{N}_{n-1} \leq \mathcal{N} \left(A, \frac{1}{2^n} \right) \leq \mathcal{N}_{k(n)},$$

para todo $n = 1, 2, 3, \dots$ onde $k(n)$ é o menor inteiro k que satisfaz $k \geq n - 1 + \frac{1}{2} \log_2(m)$.

A primeira inequação é válida porque uma bola de raio $\frac{1}{2^n}$ pode interceptar no máximo 2^m caixas de lado $\frac{1}{2^{n-1}}$.

A segunda inequação segue pelo fato de que uma caixa de lado s pode caber dentro de uma bola de raio r , em que

$$r^2 \geq \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = m \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

pelo Teorema de Pitágoras.

Como $\frac{k(n)}{n} \rightarrow 1$, quando $n \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)})}{\ln(2^n)} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(2^{k(n)})}{\ln(2^n)} \cdot \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)})}{\ln(2^{k(n)})} \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{k(n) \cdot \ln(2)}{n \cdot \ln(2)} \cdot \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)})}{\ln(2^{k(n)})} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{k(n)})}{\ln(2^{k(n)})} \right\} = D. \end{aligned}$$

Desde que também,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(2^{-m} \mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^n)} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(2^{-m}) + \ln(\mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^n)} \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(2^{-m})}{\ln(2^n)} \right\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{-m \cdot \ln(2)}{n \cdot \ln(2)} \right\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^n)} \right\} = \\ &= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(2^{n-1})}{\ln(2^{n-1})} \cdot \frac{\ln(\mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(n-1) \ln(2)}{(n) \ln(2)} \cdot \frac{\ln(\mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^{n-1})} \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_{n-1})}{\ln(2^{n-1})} \right\} = D. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Confronto e pelo Teorema 3.2.4, com $r = \frac{1}{2}$, segue o resultado. \blacksquare

Note que no Teorema 3.2.6 usamos caixas de lado $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Porém, de modo análogo, podemos usar caixas de lado Cr^n , onde $C > 0$ e $0 < r < 1$ são números reais fixos.

Exemplo 3.2.7 Considere $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$. Note que $\mathcal{N}_1(Q) = 4, \mathcal{N}_2(Q) = 16, \mathcal{N}_3(Q) = 64, \dots, \mathcal{N}_n(Q) = 4^n$, para $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Então,

$$D(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_n(Q))}{\ln(2^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(4^n)}{\ln(2^n)} \right\} = 2.$$

Aplicação em Fractais

Tentar simplificar a natureza e representá-la apenas com figuras da geometria clássica pode nos fazer cometer erros bastante significativos em cálculos e aproximações, pois é concebida por diversas formas nas quais predominam a irregularidade e o caos. Em contrapartida, na geometria fractal encontramos boas aproximações para essas formas, uma vez que suas estruturas fornecem alguma ordem ao irregular.

A geometria fractal estuda objetos que foram denominados fractais. O termo fractal foi empregado em 1975, por Benoît Mandelbrot, que iniciou os estudos dessa geometria. Quando sentiu necessidade de encontrar um nome para descrever a geometria que buscava representar as formas da natureza, uma consulta a um dicionário de latim resultou no encontro do adjetivo *fractus*, do verbo *frangere*, que significa quebrar, fragmentar.

A geometria fractal de Mandelbrot reflete a natureza cheia de irregularidades e fragmentações. Inicialmente, ele definiu o fractal como sendo um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff excede estritamente a dimensão topológica. Porém, a definição começou a ser criticada pois não atendia a alguns objetos, que também eram considerados fractais.

Após esta contestação, Mandelbrot passa a considerar que fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos. Desse modo o fractal ainda não possui uma definição formal. Entretanto, esses objetos possuem algumas das seguintes características:

- **Autossemelhança.** Se apresenta sempre com o mesmo aspecto visual a qualquer escala

que seja ampliada ou reduzida a figura, ou seja, parte da figura se assemelha à figura vista como um todo.

- **Complexidade infinita.** Os fractais são formados por um processo recursivo aplicado indefinidamente. Quanto maior for o número de iterações deste processo, mais detalhes serão apresentados e assim, nunca chegaremos ao fim das iterações.
- **Dimensão fracionada.** A dimensão fractal de vários desses objetos não é um número inteiro.

Em geral, os fractais tornam-se figuras com grande beleza e complexidade, nas quais cada parte é semelhante ao todo. Muitos matemáticos, ao longo da história, como Georg Cantor, Giuseppe Peano, Waclaw Sierpinski e outros, estudaram algumas figuras que não se enquadravam nas definições da geometria euclidiana. Tais figuras ficaram conhecidas como "monstros matemáticos". Tempos depois, com os estudos de Benoit Mandelbrot, esses monstros matemáticos passaram a ser chamados de *Fractais Clássicos*.

Nas sessões a seguir, estudaremos alguns fractais e utilizaremos conceitos do capítulo anterior para calcular suas dimensões.

4.1 Conjunto de Cantor

Georg Cantor nasceu na Rússia, na cidade de São Petersburgo e viveu entre 1845 e 1918. Freqüentou a Universidade de Zurich, onde ingressou em 1862, porém no ano seguinte se transferiu para a Universidade de Berlin, onde especializou-se em Matemática, Filosofia e Física. E tornou-se professor na Universidade de Halle em 1869.

Ele foi um importante matemático que focou seus estudos na fundamentação da matemática e o primeiro a estudar a Teoria dos Conjuntos no século XIX. Em 1883, publicou um trabalho sobre um determinado conjunto conhecido hoje como "Conjunto de Cantor" ou "Poeira de Cantor".

4.1.1 Construção do conjunto de Cantor

Para construir o conjunto de Cantor, começaremos partindo do intervalo $I = [0, 1]$ da reta real.

No primeiro passo, divida o intervalo I em outros três intervalos iguais medindo $\frac{1}{3}$, obtendo o seguinte resultado $I = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Depois retire o segmento intermediário $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. E então os elementos do conjunto de Cantor estão contidos no seguinte conjunto:

$$\mathcal{C}_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

O segundo passo consiste em repetir o mesmo processo, descrito anteriormente, nos dois intervalos de \mathcal{C}_1 .

$$\mathcal{C}_1 = \left[\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \right] \cup \left[\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \right].$$

Remova os intervalos abertos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Então, os elementos do conjunto de Cantor estão contidos no seguinte conjunto:

$$\mathcal{C}_2 = \left[\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \right] \cup \left[\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \right].$$

O terceiro passo consiste em repetir o mesmo processo em cada um dos intervalos contidos em \mathcal{C}_2 . Ou seja, remover em cada um dos intervalos que compõem \mathcal{C}_2 o intervalo aberto médio, obtendo:

$$\mathcal{C}_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\right] \cup \left[\frac{6}{27}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{9}{27}\right] \cup \left[\frac{18}{27}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{21}{27}\right] \cup \left[\frac{24}{27}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$

Repetindo esse processo n vezes, obtemos \mathcal{C}_n dividindo cada um dos intervalos de \mathcal{C}_{n-1} em três intervalos de mesmo comprimento e removendo o intervalo médio de cada um deles.

Definição 4.1.1 *O conjunto de Cantor é a interseção de todos os conjuntos \mathcal{C}_n ou*

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n.$$

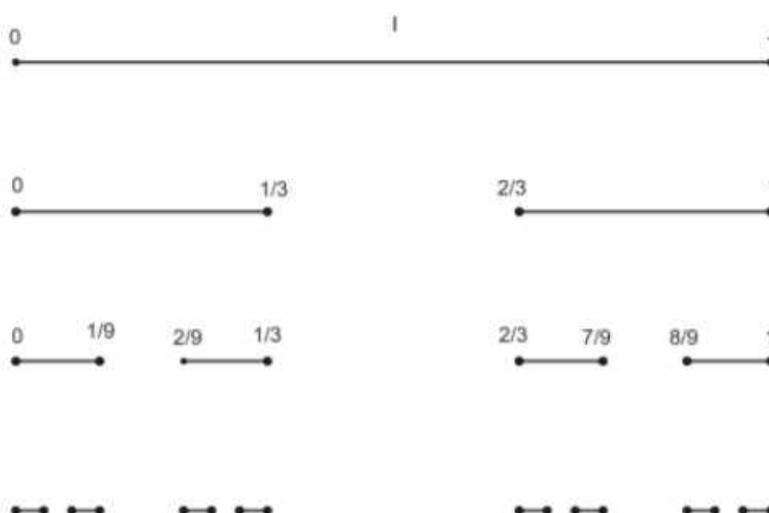


Figura 4.1: Conjunto de Cantor - Níveis 0, 1, 2 e 3.

4.1.2 Aplicação no conjunto de Cantor

Como \mathcal{C} é compacto, podemos usar o Teorema 3.2.6, de modo análogo ao feito no Exemplo 3.2.7, mas agora com caixas cujos lados tem medida $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ para o cálculo da dimensão de Hausdorff desse conjunto.

Temos que $\mathcal{N}_1(\mathcal{C}) = 2$, $\mathcal{N}_2(\mathcal{C}) = 4$, \dots , $\mathcal{N}_n(\mathcal{C}) = 2^n$, para $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Então,

$$D(\mathcal{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_n(\mathcal{C}))}{\ln(3^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(2^n)}{\ln(3^n)} \right\} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}.$$

Potanto a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor é $\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0,63$.

4.2 Triângulo de Sierpinski

Waclaw Sierpinski foi um matemático polonês, nascido em Varsóvia no ano de 1882 e falecido no ano de 1969. Lecionou nas cidades de Lvov e Varsóvia. Suas pesquisas foram predominantemente na Teoria dos Números e Teoria dos Conjuntos. Publicou 724 artigos e 50 livros. Em 1916, Sierpinski apresentou o triângulo de Sierpinski, um dos monstros matemáticos mais famosos.

4.2.1 Construção do triângulo de Sierpinski

Para construir o triângulo de Sierpinski tome uma superfície delimitada por um triângulo

equilátero totalmente preenchido no plano, sobre o qual aplicamos sistemas repetitivos de iterações. Em seguida, marque os pontos médios de cada um dos três segmentos do triângulo, obtendo um novo triângulo central de vértices nos pontos médios do triângulo maior. Dessa forma, obtemos quatro triângulos equiláteros congruentes cujo lado é metade do lado do triângulo original e a área é $\frac{1}{4}$ da área desse triângulo. Para provar que tais triângulos são congruentes e equiláteros, basta utilizar geometria euclidiana plana.

Retire o triângulo central ficando com três novos triângulos equiláteros e então repita o processo nos três triângulo que restaram. Divida cada um em quatro triângulos menores, após isso feito retire os triângulos centrais ficando com nove triângulos, os quais possuem lado $\frac{1}{4}$ do triângulo original e área $\frac{1}{16}$ do triângulo original.

Por fim, repita continuamente o processo em todos os triângulos equiláteros que não forem removidos. Assim no nível n temos 3^n triângulos de lado medindo $\frac{1}{2^n}$ do triângulo original.

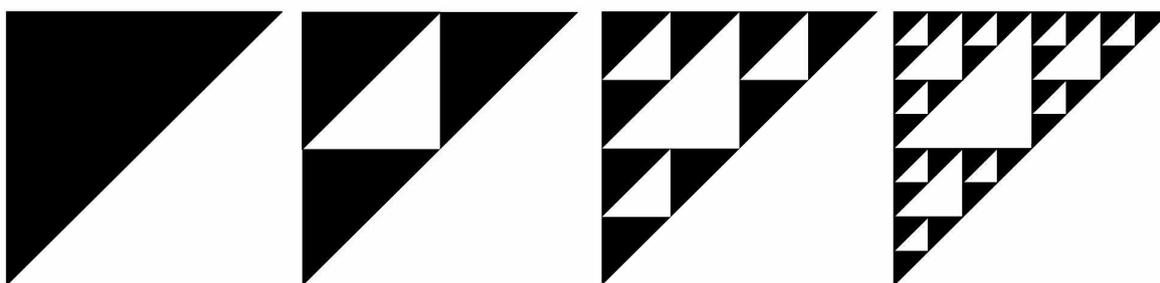


Figura 4.2: Triângulo de Sierpinski - Níveis 0, 1, 2 e 3.

4.2.2 Aplicação no triângulo de Sierpinski

Considere o triângulo de Sierpinski como um subconjunto compacto T do espaço \mathbb{R}^2 com a métrica usual.

Vamos cobrir \mathbb{R}^2 com caixas cujos lados tem medida $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Se $n = 1$, teremos caixas com lados de medida $\frac{1}{2}$. Assim, 3 dessas caixas interceptam T . Para $n = 2$, teremos caixas com lados de medida $\frac{1}{4}$. Nesse caso, 9 dessas caixas interceptam T . Continuando esse processo sucessivamente, teremos 3^n caixas com lados de medida $\frac{1}{2^n}$ que interceptam T . Veja o exemplo do nível 3 coberto por caixas abaixo:

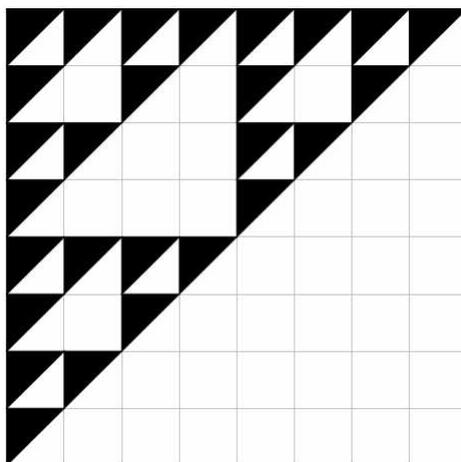


Figura 4.3: Triângulo de Sierpinski coberto por caixas - Níveis 3

Assim, $\mathcal{N}_1(T) = 3$, $\mathcal{N}_2(T) = 9$, $\mathcal{N}_3(T) = 27$, \dots , $\mathcal{N}_n(T) = 3^n$, para $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Então,

$$D(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_n(T))}{\ln(2^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(3^n)}{\ln(2^n)} \right\} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}.$$

Portanto, a dimensão de Hausdorff do triângulo de Sierpinski é $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 1,58$.

4.3 Curva de Peano

Nascido no ano de 1858 Giuseppe Peano estudou, matemática na Universidade de Turim, onde ele lecionou de 1890 até sua morte no ano de 1932. Ficou conhecido pelo interesse profundo pela lógica matemática. Peano mostrou até que ponto a matemática pode insultar o senso comum quando construiu curvas contínuas que preenchem o plano em 1890. Trata-se de uma curva que passa, pelo menos uma vez, por cada um dos pontos de um quadrado.

4.3.1 Construção da curva de Peano

A construção começa a partir de um segmento de reta. Divida o segmento em três segmentos iguais com $\frac{1}{3}$ do tamanho original, dos quais sobre o segmento central, constrói-se um retângulo, formando assim, dois quadrados com lado igual a cada um dos três segmentos. Dessa forma, obtém-se uma curva geradora com 9 novos segmentos, como visto a seguir:

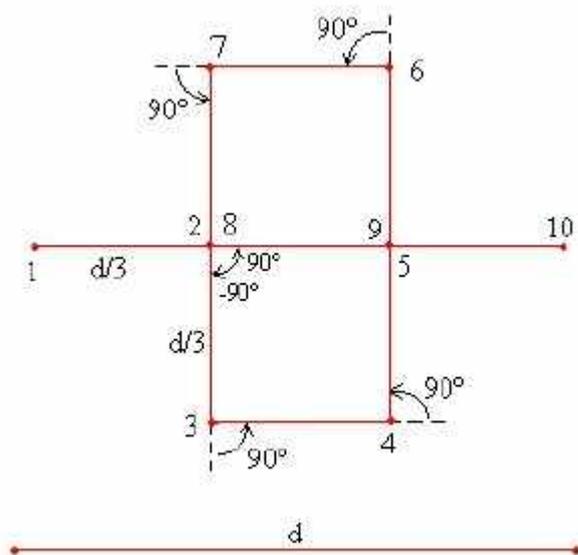


Figura 4.4: Curva de Peano - Nível 1.

Em seguida, repete-se os passos acima para cada um dos nove segmentos restantes, obtendo segmentos de tamanho $\frac{1}{9}$ do original, formando 81 novos segmentos. Quando estamos no nível n , seus segmentos tem tamanho $\frac{1}{3^n}$ do segmento original e temos 9^n segmentos.

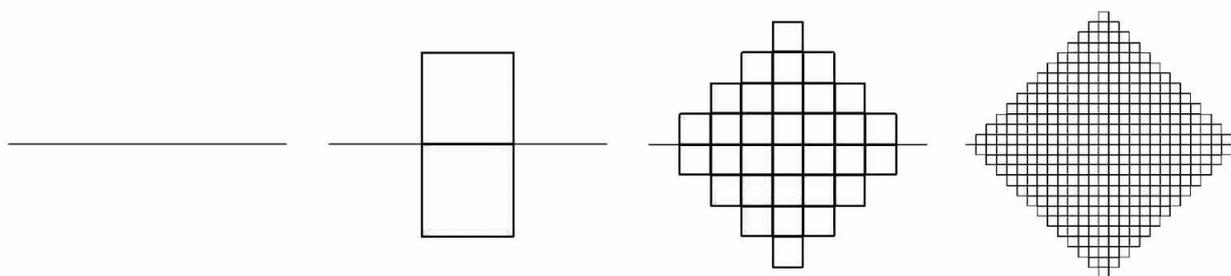


Figura 4.5: Curva de Peano - Nível 0, 1, 2 e 3.

4.3.2 Aplicação na curva de Peano

Intuitivamente, na construção da curva de Peano, vimos que a cada nível o comprimento dos segmentos é reduzido em $\frac{1}{3}$ e o número de segmentos é 9 vezes o do nível anterior.

Portanto, $r = \frac{1}{3}$ e $N = 9$. Assim, segue que:

$$D = \frac{\log(9)}{\log\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\log(9)}{\log(3)} = \frac{\log(3^2)}{\log(3)} = \frac{2\log(3)}{\log(3)} = 2.$$

Portanto, a dimensão de curva de Peano é 2, ou seja, esta curva tem a mesma dimensão de um quadrado.

Agora, vamos verificar se esse valor é o mesmo utilizando o Teorema 3.2.6. Para isso, considere a curva de Peano como um subconjunto compacto P do espaço \mathbb{R}^2 com a métrica usual. Novamente, usaremos o Teorema 3.2.6 com caixas de lado $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, iniciando com uma caixa de lado unitário cuja diagonal coincide com o segmento inicial da construção da curva. Note que se a caixa tem lado 1, o segmento inicial tem medida $\sqrt{2}$.

Deste modo, $\mathcal{N}_1(P) = 4$, $\mathcal{N}_2(P) = 16$, $\mathcal{N}_3(P) = 64$, \dots , $\mathcal{N}_n(P) = 4^n$, para $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Logo,

$$D(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_n(P))}{\ln(2^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(4^n)}{\ln(2^n)} \right\} = \frac{\ln(4)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^2)}{\ln(2)} = \frac{2\ln(2)}{\ln(2)} = 2.$$

4.4 Floco de neve de Koch

O matemático Niels Fabian Helge Von Koch nasceu em Estocolmo no ano de 1870. Koch estudou na Universidade de Estocolmo a partir de 1888, onde iniciou sua carreira de professor em 1911. Ele publicou diversos livros sobre Sistemas Lineares e Equações Diferenciais. Porém, o que fez Koch ficar famoso foi um artigo publicado em 1904, sobre uma curva sem tangentes, que atualmente é conhecida como curva de Koch. Em 1924 faleceu na cidade onde nasceu.

4.4.1 Construção do floco de neve de Koch

Para o estudo do floco de neve de Koch, primeiro apresentaremos a curva de Koch, uma vez que o floco de neve segue os mesmos passos da construção da curva de Koch, porém sendo feito nos três lados do triângulo equilátero.

Tome um segmento de reta. Primeiro divida esse segmento em três partes iguais de tamanho $\frac{1}{3}$ do segmento inicial e retire o segmento médio. Em seguida substitua o segmento médio retirado por um triângulo equilátero sem a sua base.

Agora temos quatro novos segmentos de tamanho $\frac{1}{3}$ do segmento inicial. Iremos repetir esse processo: primeiro divida cada um dos segmentos em três, depois substitua o segmento médio de cada um deles por um triângulo equilátero sem a sua base. Dessa forma, teremos 16 segmentos com tamanho $\frac{1}{9}$ do comprimento do segmento inicial.

Assim, com um processo infinito, vai surgindo a curva de Koch.

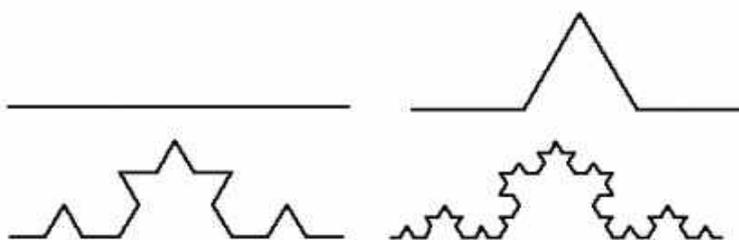


Figura 4.6: Curva de Koch - Níveis 0, 1, 2 e 3.

Para construir o floco de neve de Koch basta tomar inicialmente um triângulo equilátero e aplicar em cada um dos seus lados, os mesmos passos para a construção da curva de Koch, ou seja, o nível 1 do floco de neve de Koch tem em cada um de seus lados uma curva de Koch de nível 1, e assim por diante.

O floco de neve de Koch é obtido após infinitas iterações.



Figura 4.7: Floco de neve de Koch - Níveis 0, 1 e 2.

4.4.2 Aplicação no floco de neve de Koch

Intuitivamente, na construção do floco de neve de Koch, vimos que a cada nível o comprimento dos segmentos é reduzido em $\frac{1}{3}$ e o número de segmentos é 4 vezes o do nível

anterior.

Portanto, $r = \frac{1}{3}$ e $N = 4$. Assim, segue que:

$$D = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1,26.$$

Agora, vamos verificar se esse valor é o mesmo utilizando o Teorema 3.2.6. Para isso, considere o floco de neve de Koch como um subconjunto compacto P do espaço \mathbb{R}^2 com a métrica usual. Novamente, usaremos o Teorema 3.2.6, porém com caixas de lado $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, iniciando com três caixas de lado unitário cuja diagonal coincide com o lado do triângulo original da construção da curva.

Note que $\mathcal{N}_1(P) = 3 \times 4$, $\mathcal{N}_2(P) = 3 \times 16$, $\mathcal{N}_3(P) = 3 \times 64$, \dots , $\mathcal{N}_n(P) = 3 \times 4^n$, para $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Logo,

$$\begin{aligned} D(P) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(\mathcal{N}_n(P))}{\ln(3^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(3 \times 4^n)}{\ln(3^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(3) + \ln(4^n)}{\ln(3^n)} \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(3)}{\ln(3^n)} + \frac{\ln(4^n)}{\ln(3^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(3)}{n \ln(3)} + \frac{n \ln(4)}{n \ln(3)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \right\} = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1,26. \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] AGUSTINI, E. **Uma Introdução à Geometria Hiperbólica Plana**. 138 p. Notas de Aula - Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia. Disponível em: <https://sites.google.com/site/edsonagustini/geometria-analitica>
- [2] BARNSLEY, M. **Fractals Everywhere**. San Diego: Academic Press, 1988.
- [3] CRUZ, R. C. M. **Geometria fractal: conjunto de Cantor, dimensão e medida de Hausdorff e aplicações**. 2018. 93 p. Dissertação - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.
- [4] DOMINGUES, H. H. **Espaços métricos e introdução à topologia**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1982.
- [5] LIMA, E. L. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2009.
- [6] MURCHERONI, L. F. **Dimensão de Hausdorff e Algumas Aplicações**. 2017. 63 p. Dissertação - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2017.
- [7] OLIVEIRA, G. C. **Geometria fractal na educação básica**. 2014. 74 p. Monografia - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.