Universidade Federal de Uberlândia

Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

Algumas Aplicações da Forma Canônica de Jordan

por

Vitor Hugo Muniz Oliveira †

Bacharelado em Matemática - Ituiutaba - MG

Orientadora: Profa. Dra. Patrícia Borges dos Santos

Algumas Aplicações da Forma Canônica de Jordan

Este exemplar corresponde à redação final da Monografia devidamente corrigida e defendida por **Vitor Hugo Muniz Oliveira** e aprovada pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 18 de Dezembro de 2020.

Patrícia Borges dos Santos

Profa. Dra. Patrícia Borges dos Santos

Banca examinadora:

Profa. Dra. Patrícia Borges dos Santos (Orientadora).

Profa. Dra. Evaneide Alves Carneiro.

Profa. Dra. Milena Almeida Leite Brandão.

Monografia apresentada ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais , UFU como requisito parcial para obtenção do título de **Bacharel em Matemática**.

A minha Orientadora
Profa. Dra. Patrícia Borges
dos Santos

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e forças para superar as dificuldades. Aos meus pais Benedito Divino de Oliveira e Leila Macedo Muniz pelo amor, incentivo e pelo apoio incondicional. Obrigado meus avós, irmã, tios(as) e primos(as) que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo superior, sempre fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente! Obrigado, a minha família, amigos, especialmente a Talita Soares Martins, o Paulo Ricardo de Oliveira Andrade e aos integrantes dos grupos "Ex Formandos 2020"e "Máfia da Inclusão"por sempre estarem ao meu lado nas horas mais difíceis, onde houve muito choro e às vezes vontade de desistir. A minha orientadora, Profa. Dra. Patrícia Borges dos Santos, pelo suporte, dedicação, pelas suas correções e incentivos. Agradeço, especialmente ao Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira pela tutoria do PET Matemática Pontal, a Profa. Dra. Evaneide Alves Carneiro e a Profa. Dra. Milena Almeida Leite Brandão por comporem minha banca avaliadora, e a todos os professores do curso de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal-ICENP da Universidade Federal de Uberlândia-UFU por me proporcionarem o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender. A Universidade Federal de Uberlândia-UFU, seu corpo docente, direção e administração, especialmente ao Eder Vieira Flor, que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes. A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar conceitos de Álgebra Linear, com ênfase na Forma Canônica de Jordan e na demonstração de sua existência. Apresentar os estudos sobre algumas aplicações em sistemas lineares de Equações Diferenciais Ordinárias utilizando a Forma Canônica de Jordan, apresentando como resultado a resolução de um problema de modelagem Matemática que trata do desabamento de um prédio, por meio dos métodos estudados. A Forma Canônica de Jordan é a representação matricial mais simples possível para um operador linear não diagonalizável definido em um espaço vetorial de dimensão finita, e pode ser obtida quando o polinômio característico do operador considerado puder ser decomposto em fatores lineares. O trabalho foi desenvolvido em um projeto de iniciação científica, após o pesquisador fazer o curso de Álgebra Linear II, onde foi escolhido o tema do trabalho. A metodologia utilizada foi pesquisa qualitativa através de um estudo sobre a pesquisa bibliográfica, onde foram feitas várias leituras e resolvidos vários exemplos de acordo com o tema do trabalho. A pesquisa contribuirá para a formação acadêmica do pesquisador, leitores e futuros pesquisadores em Matemática.

Palavras-chave: Forma Canônica de Jordan, Álgebra Linear, Equações Diferenciais, Sistemas Lineares.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

A Forma Canônica de Jordan é um conceito bastante útil em Álgebra Linear, pois fornece a representação matricial mais simples possível para um operador linear não diagonalizável definido em um espaço vetorial de dimensão finita. Para desenvolver a teoria que permeia a construção da Forma Canônica de Jordan, utilizamos os conceitos, propriedades e resultados referentes a Somas Diretas, Subespaços Invariantes, Decomposição Primária, Operadores Nilpotentes e Autovetores Generalizados. Provamos que a Forma Canônica de Jordan pode ser obtida quando o polinômio característico do operador considerado puder ser decomposto em fatores lineares, o que sempre ocorre no corpo dos complexos. Mostramos que a existência da Forma Canônica de Jordan para um operador qualquer é uma consequência da sua existência para operadores nilpotentes. Com o auxílio dos autovetores generalizados exibimos uma base para o espaço vetorial em relação ao qual a representação matricial do operador linear considerado estará na Forma Canônica de Jordan.

As atividades realizadas durante o projeto visam o estudo aprofundado de resultados relacionados ao tema da pesquisa, bem como a relação entre esse tema e alguns resultados clássicos de Álgebra Linear e Equações Diferenciais Ordinárias. Para alcançar isto, a metodologia escolhida foi a pesquisa qualitativa através de um estudo sobre a pesquisa bibliográfica e os pressupostos que embasaram nossa pesquisa. Para selecionar o material, foram feitos vários tipos de leituras e resolvidos vários exemplos e exercícios de acordo com as diferentes etapas traçadas em nosso roteiro. Em nosso estudo é de fundamental importância fazer leituras recorrentes, pois elas devem ter um foco diferente em cada parte do processo e não desviar cronologicamente dos critérios e procedimentos.

Neste trabalho estudamos alguns conceitos e resultados de Álgebra Linear, dando ênfase na Forma Canônica de Jordan, exibindo a demonstração de sua existência. Também estudamos algumas aplicações na resolução de sistemas lineares e na resolução de sistemas lineares de equações de recorrência, utilizando métodos de Equações Diferenciais Ordinárias e a Forma Canônica de Jordan, que, de modo genérico, consiste em saber escrever uma matriz dada numa forma "quase" diagonalizável. Uma das aplicações estudadas neste trabalho da Forma Canônica de Jordan é o cálculo de funções de matrizes, tais como as funções polinomiais ou exponenciais definidas no espaço das matrizes. Um exemplo onde funções de matrizes aparecem de forma oculta é no Teorema de Cayley-Hamilton. Além desta aplicação, utilizamos a Forma Canônica de Jordan, na resolução de sistemas lineares relacionados ao nosso cotidiano, como por exemplo: desabamento de prédio, misturas de líquidos em reservatórios ou, circuitos elétricos.

Justificativa

A Forma Canônica de Jordan é um conceito complexo, belo e útil para resolver sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias, mas pode ser ineficiente quando nos deparamos com matrizes de dimensões grandes, veja em [11]. Essa forma matricial é vista no curso de Álgebra Linear Avançada em um contexto breve. Como citado anteriormente, a Forma Canônica de Jordan pode ser utilizada na resolução de sistemas lineares de recorrência e outros sistemas, mas podemos nos deparar com o seguinte questionamento: é possível utilizar essa forma matricial na resolução de problemas avaliando acontecimentos do nosso cotidiano? A resposta é sim. Como exemplo, podemos citar um sistema onde é possível analisar a estrutura de um prédio utilizando alguns métodos de Equações Diferenciais Ordinárias, como o método do fator integrante e o problema do valor inicial, utilizando a Forma Canônica de Jordan para verificar se é possível a resolução desses problemas.

Com este projeto, o estudante de graduação tem a experiência de aprofundar os estudos em Álgebra Linear, Equações Diferencias Ordinárias e ainda utilizá-los na resolução de problemas e algumas generalizações. O pesquisador escolheu o tema "Algumas Aplicações de Forma Canônica de Jordan"quando fez o curso de Álgebra Linear II com a professora e orientadora do trabalho. O estudante se interessou por um dos conteúdos da disciplina, a Forma Canônica de Jordan, e conversou a respeito com a professora, que pesquisou possíveis estudos para fazer com o tema que havia proposto, então apresentou a proposta ao estudante, e assim fizeram o estudo sobre o tema, que se tornou um projeto de iniciação científica, visando no trabalho de conclusão de curso realizado. Enfim, a pesquisa está contribuindo para uma formação ampla e diversificada e possivelmente na formação de futuros pesquisadores em Matemática.

Objetivo

Este trabalho tem como objetivo estudar a Forma Canônica de Jordan, exibindo a demonstração de sua existência e estudar algumas aplicações em sistemas lineares, como por exemplo, sistemas homogêneos com coeficientes constantes, sistemas homogêneos com coeficientes constantes nos números complexos, sistemas não homogêneos com coeficientes constantes e matrizes exponenciais, utilizando métodos de Álgebra Linear e Equações Diferencias Ordinárias. Além disso, apresentamos a solução de um problema de modelagem Matemática usando as técnicas estudadas para alcançar o objetivo final da pesquisa que é apresentar uma solução inédita.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 1 (Definições e Resultados Preliminares), apresentamos definições e resultados preliminares que foram utilizados durante nossa pesquisa. Neste capítulo utilizamos notas de aula da orientadora do trabalho retiradas das referências [1], [5], [7] e [9].

- No capítulo 2 (A Forma Canônica de Jordan), apresentamos alguns conceitos utilizados na forma matricial da Forma Canônica de Jordan, a demonstração de sua existencia e exemplos para o entendimento do leitor/pesquisador da área. Neste capítulo utilizamos notas de aula da orientadora do trabalho retiradas das referências [1], [4] e [5].

- No capítulo 3 (Aplicações em Sistemas de Equações Diferenciais), estudamos aplicações da Forma Canônica de Jordan em sistemas homogêneos com coeficientes constantes, sistemas homogêneos com coeficientes constantes nos números complexos, sistemas não homogêneos com coeficientes constantes e matrizes exponenciais. Neste capítulo, o pesquisador traduziu o conteúdo encontrado nas referências [2], [3] e [8] .

- No capítulo 4 (Modelagem Matemática em Sistemas Lineares com Coeficientes Constantes), estudamos generalizações e técnicas de Álgebra Linear/Equações Diferenciais Ordinárias existentes na resolução de sistemas de equações diferenciais que modelam situações cotidianas, apresentando um modelo e a solução de um problema de desabamento de um prédio. Neste capítulo, o pesquisador traduziu o problema desenvolvido disponível nas referências [3] e [6].

CAPÍTULO 1

DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados preliminares de Álgebra Linear que serão utilizados para exibirmos a Forma Canônica de Jordan e suas aplicações utilizando sistemas lineares de Equações Diferenciais.

Polinômio Característico, Autovalores e Autovetores

Estamos interessados em estudar as transformações lineares de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V nele mesmo $T : V \to V$. Uma tal transformação é chamada de operador linear sobre V. Lembrando que o conjunto do operadores lineares sobre V é denotado por $L(V)$ e que com as operações:

i. $(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$,

ii. $(\alpha\ T)(v) = \alpha\ T(v)$,

$\forall\ T_1, T_2, T \in L(V), \forall\ \alpha \in \mathbb{K}, \forall\ v \in V$, tal que $L(V)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

Definição 1.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se existe $v \in V$, com $v \neq 0$ tal que:*

$$T(v) = \lambda v.$$

Se λ é um autovalor de T e $w \in V$ é tal que $T(w) = \lambda w$, então w é dito um autovetor de T associado ao autovalor λ.

Observação 1.2. *Note que se $v \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então:*

$$v \text{ é autovetor associado a } \lambda \Longleftrightarrow v \in \ker(T - \lambda I).$$

De fato,

$$T(v) = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad 0 = T(v) - \lambda v = T(v) - \lambda I(v) \quad \Leftrightarrow \quad (T - \lambda I)(v) = 0.$$

Exemplo 1.3. *Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e seja $T : V \to V$ definida por $T(v) = 2v$. Então, todo vetor não nulo de V é autovetor de T associado ao autovalor $2 \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 1.4. *Seja $T : V \to V$ definido por:*

$$T(x, y) = (-y, x).$$

Observe que T não possui autovetores. De fato, suponhamos por absurdo que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x, y) \neq (0, 0)$ tais que, $T(x, y) = \lambda(x, y)$.
Teremos:

$$(-y, x) = T(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \Rightarrow \begin{cases} -y & = & \lambda x \\ x & = & \lambda y \end{cases}$$

$$x = \lambda y = \lambda(-\lambda x) \Rightarrow x = -\lambda^2 x \Rightarrow \lambda^2 x + x = 0 \Rightarrow x(\lambda^2 + 1) = 0 \tag{1.1}$$

$$-y = \lambda x = \lambda(\lambda y) \Rightarrow -y = \lambda^2 y \Rightarrow \lambda^2 y + y = 0 \Rightarrow y(\lambda^2 + 1) = 0 \tag{1.2}$$

Como $\lambda^2 + 1 \neq 0$ segue de (1.1) e (1.2) que $x = 0$ e $y = 0$ o que contraria a hipótese $(x, y) \neq (0, 0)$.

Definição 1.5. *Seja $T \in L(V)$. Dizemos que $W \subset V$ é T-invariante (ou invariante sob T) se $T(W) \subset W$, $\forall\ w \in W$.*

Exemplo 1.6. *Sejam $T : V \to V$ um operador linear e $W = \ker T$. Para todo $w \in W$ teremos $T(w) = 0 \Rightarrow T(W) = \{0\}$ e como $\{0\} \subset \ker T = W$ teremos $T(\ker T) \subset \ker T$, ou seja, $\ker T$ é um subespaço T-invariante de V.*

Proposição 1.7. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T \in L(V)$. São equivalentes:*

1. *T possui autovalor;*

2. *Existe um subespaço T-invariante de dimensão 1.*

Definição 1.8. *O conjunto de todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ de T mais o vetor nulo é chamado de autoespaço de T associado a λ e será denotado por $V(\lambda, T)$, ou seja,*

$$V(\lambda, T) = \{v \in V : T(v) = \lambda v\} \cup \{0\} = \ker(T - \lambda I),$$

onde I é o operador identidade.

Observação 1.9. *$V(\lambda, T)$ é um subespaço de V que é T-invariante. De fato, veja na Observação 1.2 que $V(\lambda, T) = \ker(T - \lambda I)$. Além disso, dado $v \in V(\lambda, T)$ temos que $T(v) = \lambda v$ e então $T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v)$, ou seja, $T(v) \in V(\lambda, T)$.*

Teorema 1.10. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão n e β uma base para V. Se $T \in L(V)$ então serão equivalentes.*

1. *λ é autovalor de T;*

2. *$(T - \lambda I) : V \to V$ não é um isomorfismo;*

3. *$\det([T]_\beta - \lambda I_n) = 0$ (onde I_n é a matriz identidade de ordem n).*

Demonstração. (1.) $\Rightarrow$ (2.) Sabemos que $T - \lambda I$ é isomorfismo se, e somente se, $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$. Por hipótese, λ é um autovalor de T e veja na Observação (1.2) que $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$. Logo $(T - \lambda I)$ não pode ser isomorfismo.

(2.) $\Rightarrow$ (3.) Como $T - \lambda I$ não é isomorfismo, temos que $T - \lambda I$ não é injetora. Logo, existe $v \in \ker(T - \lambda I)$ com $v \neq 0$. Se $[v]_\beta = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$,então:

$$(T - \lambda I)(v) = 0 \Rightarrow [(T - \lambda I)(v)]_\beta = 0 \Rightarrow [T - \lambda I]_\beta [v]_\beta = 0.$$

Isto mostra que o sistema linear homogêneo dado por:

$$[T-\lambda I]_\beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ admite uma solução não nula, a saber, } [v]_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz dos coeficientes $[T-\lambda I]_\beta$ não pode ter inversa. Para isto, basta que $\det [T-\lambda I]_\beta = 0$, ou equivalentemente que $\det([T]_\beta - \lambda I_n) = 0$.

(3.) $\Rightarrow$ (1.) Como $\det([T]_\beta - \lambda I_n) = 0$ temos que o sistema linear dado por:

$$([T]_\beta - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ é possível e indeterminado.}$$

Logo, admite uma solução não trivial, ou seja, existe $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $([T]_\beta - \lambda I_n)[v]_\beta = 0 \Rightarrow [T-\lambda I]_\beta [v]_\beta = 0 \Rightarrow [(T-\lambda I)(v)] = 0$ $\Rightarrow (T-\lambda I)(v) = 0 \Rightarrow T(v) = \lambda v$, ou seja, λ é autovalor. $\square$

Observação 1.11. *Usamos na demonstração do Teorema* (1.10) *o seguinte fato: "Se $T : V \to V$ é um operador linear que não é isomorfismo, então T não é injetor e sobrejetor".*

Exemplo 1.12. *Seja $V = \{a\sin(x) + b\cos(x) : a + b \in \mathbb{R}\}$ e seja $T : V \to V$ dado por:*

$$T(a\sin(x) + b\cos(x) = (a+b)\sin(x) + 2b\cos(x).$$

Tomando $\beta = \{\sin(x), \cos(x)\}$ como base para V, teremos:

$T(\sin(x)) = \sin(x) = 1 \cdot \sin(x) + 0 \cdot \cos(x)$

$T(\cos(x)) = 1 \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x)$

ou seja, $[T_\beta] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *e então,*

$$p(\lambda) = \det([T]_\beta - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda).$$

Portanto, os autovalores de T são $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$.

Se considerarmos λ do item 3 no Teorema (1.10) como uma variável temos a seguinte definição:

Definição 1.13. *Seja $T : V \to V$ um operador linear e seja β uma base para V. O polinômio na variável λ dado por $\det([T]_\beta - \lambda I_n) = 0$ será chamado de polinômio característico de T e será denotado por $p_T(\lambda)$.*

Observação 1.14. *1. Se $\dim V = n$, então $p_T(\lambda) = (-1)^n\lambda^n +$(termos de menor grau). Logo, $\partial p_T = n$, onde ∂ é o grau do polinômio;*

2. Sejam β e β' duas bases para o $\mathbb{K}$-espaço vetorial V e seja T um operador linear em V. Então:

$$[T]_\beta^\beta = [I]_{\beta'}^\beta [T]_{\beta'}^{\beta'} [I]_\beta^{\beta'}$$

onde $[I]_{\beta'}^\beta$ é a matriz de mudança de base e $[I]_{\beta'}^\beta = ([I]_\beta^{\beta'})^{-1}$. Isto significa que para um espaço vetorial de dimensão finita sempre podemos obter uma matriz invertível P, chamada de matriz de mudança de base, tal que $[T]_\beta = P^{-1}[T]_{\beta'} P$;

3. O polinômio característico de um operador linear não depende da base. De fato, sejam β, β' duas bases do $\mathbb{K}$-espaço vetorial V. Seja P a matriz de mudança de base. Daí:

$$\det([T]_\beta - \lambda I_n) = \det(P^{-1}[T]_{\beta'} P - \lambda P^{-1}P) = \det\left[P^{-1}([T]_{\beta'} - \lambda I_n)P\right] =$$
$$= \det P^{-1} \det([T]_{\beta'} - \lambda I_n) \det P = \frac{1}{\det P}\det([T]_{\beta'} - \lambda I_n)\det P = \det([T]_{\beta'} - \lambda I_n).$$

Lema 1.15. *Seja T um operador linear sobre o $\mathbb{K}$-espaço vetorial V. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ autovalores distintos de T e sejam $V(\lambda_1, T)$, $V(\lambda_2, T)$,$\cdots$, $V(\lambda_s, T)$ os autoespaços associados. Neste caso, $W := V(\lambda, T) + V(\lambda_2, T) + \cdots + V(\lambda_s, T)$ é uma soma direta.*

Ser soma direta significa que se β_i é uma base para $V(\lambda_i, T), \forall = 1, 2, \cdots, s$, então $\beta_1 \cup \beta_2 \cup \cdots \cup \beta_s$ será uma base para W. Desta forma também concluímos que:

$$\dim W = \dim V(\lambda_1, T) + \dim V(\lambda_2, T) + \cdots + \dim V(\lambda_s, T).$$

Definição 1.16. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e T um operador linear sobre V. Dizemos que T é diagonalizável se existe uma base para V formada por autovetores de T.*

Como afirmamos, a Forma Canônica de Jordan é a representação matricial mais simples possível para um operador linear não diagonalizável definido em um espaço vetorial de dimensão finita. Podemos observar que se um operador linear é diagonalizável sobre V então:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s \end{pmatrix},$$

sendo $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base para V formada por autovetores de T e $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ os autovalores correspondentes (não necessariamente distintos). Neste caso, o polinômio característico será:

$$p_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Vale também a recíproca deste fato, isto é, se a matriz de T em relação a alguma base for diagonal, então esta base está formada por autovetores e consequentemente T é diagonalizável.

O próximo lema nos garante que autovetores associados a autovalores distintos de um operador linear T formam um conjunto L.I.. Acontece que nem sempre este conjunto será base do espaço vetorial. Nestes casos, quando T não é diagonalizável, é que queremos estabelecer uma decomposição mais próxima o possível da forma diagonal.

Lema 1.17. *Seja T um operador linear e V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ autovalores distintos de T e sejam $v_1, v_2, \cdots, v_s$ autovetores correspondentes. Então, o conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$ é linearmente independente.*

Exemplo 1.18. *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador dado por:*

$$T(a, b, c) = (-3a - 7b - 6c, a + 5b + 6c, -a - b - 2c).$$

Podemos verificar que T não é diagonalizável ao descrever os autoespaços associados a cada autovalor.
Tomando a base canônica do $\mathbb{R}^3$, $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, temos:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -6 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$p_T(\lambda) = \det([T]_\beta - \lambda I_3) = \det \begin{vmatrix} -3-\lambda & -7 & -6 \\ 1 & 5-\lambda & 6 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2(4-\lambda).$$

Portanto, os autovalores de T são -2 e 4.
Note que:

1. *Cálculo do autoespaço associado ao autovalor -2:*

$$\begin{aligned} V(-2,T) = \ker(T+2I_3) &= \begin{pmatrix} -3 & -7 & -6 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -6 \\ 1 & 7 & 6 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} -3x-7y-6z &= 0 \\ x+7y+6z &= 0 \\ -x-y &= 0 \end{cases} = \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \\ &= \left\{(z,-z,z) : z \in \mathbb{R}^3\right\} = \{z(1,-1,1) : z \in \mathbb{R}^3\} = [(1,-1,1)]\,. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \dim V(-2,T) = 1.$

2. *Cálculo do autoespaço associado ao autovalor 4:*

$$\begin{aligned} V(4,T) = \ker(T-4I_3) &= \begin{pmatrix} -3 & -7 & -6 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -6 \\ 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} -7x-7y-6z &= 0 \\ x+y+6z &= 0 \\ -x-y-6z &= 0 \end{cases} = \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} \\ &= \left\{(-y,y,0) : y \in \mathbb{R}^3\right\} = \{y(-1,1,0) : y \in \mathbb{R}^3\} = [(-1,1,0)]\,. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \dim V(4,T) = 1.$

Daí, $W = V(-2,T) \oplus V(4,T) \subsetneq \mathbb{R}^3$ já que $\dim W = 2$. Portanto, não existe uma base para $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. Logo, T não é diagonalizável.

Definição 1.19. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $\dim V = n$ e T um operador linear sobre V. Se $\alpha \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T, a multiplicidade algébrica de α será sua multiplicidade como raiz do polinômio característico e será denotada por $\mu_T(\alpha)$. Já a multiplicidade geométrica corresponde à dimensão do autoespaço $V(\alpha,T)$, a saber $\dim V(\alpha,T)$.*

Em geral, temos que o valor da multiplicidade geométrica é no máximo o da multiplicidade algébrica. O próximo teorema nos garante, em particular, que quando elas coincidirem teremos um operador linear diagonalizável.

Teorema 1.20. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, T um operador linear sobre V e $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ distintos autovalores de T. São equivalentes:*

i. T *é diagonalizável;*

ii. $V = V(\lambda_1, T) \oplus V(\lambda_2, T) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_m, T)$*;*

iii.
$$\dim V = \sum_{i=1}^{m} \dim V(\lambda_i, T);$$

iv.
$$p_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda)^{d_i}, \ \textit{onde } d_i = \dim V(\lambda_i, T), \forall i = 1, 2, \cdots m.$$

Observe que como o domínio e o contradomínio de um operador linear coincidem, podemos fazer as composições $T \circ T$, $T \circ T \circ T$, $\cdots$, $\underbrace{T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ vezes}}$, obtendo novos operadores lineares.

Denote por T^i a composição $\underbrace{T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T}_{i \text{ vezes}}$. Assim a cada polinômio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ associamos ao operador linear $p(T)$, da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[x] & \to & L(V) \\ p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n & \mapsto & p(T) = a_0 T + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots a_n T^n. \end{array}$$

Isto significa que para cada $v \in V$ teremos:

$$p(T)(v) = a_0 v + a_1 T(v) + a_2 T^2(v) + \cdots + a_n T^n(v).$$

O Teorema de Cayley-Hamilton vem nos garantir que quando construímos o operador linear $p(T)$ a partir do polinômio característico obteremos o operador nulo.

Teorema 1.21 (Cayley-Hamilton). *Seja T um operador linear num $\mathbb{K}$-espaço vetorial V. Então, $p_T(T) = 0$.*

Definição 1.22. *O único polinômio mônico de menor grau que satisfaz $q(T) = 0$ será chamado de polinômio minimal e será denotado por $m_T(x)$.*

Proposição 1.23. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T \in L(V)$. Temos que:*

i. Se $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ *e* $q(T) = 0$*, então* $m_T(x) \mid q(x)$*;*

ii. As raízes do polinômio característico $p_T(x)$ coincidem com as raízes do polinômio minimal $m_T(x)$.

Exemplo 1.24. *Sejam $T_1, T_2 \in L(\mathbb{R}^3)$ dados por $T_1(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 + a_2, 2a_2 + a_3, 2a_3)$ e $T_2(a_1, a_2, a_3) = (2a_1, 2a_2, 2a_3)$. Vamos encontrar $m_{T_1}(x)$ e $m_{T_2}(x)$. Tomando a base canônica do $\mathbb{R}^3$, $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, temos:*

$$[T_1]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad [T_2]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$p_{T_1}(\lambda) = \det([T_1]_\beta - \lambda I_3) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3,$$

$$p_{T_2}(\lambda) = \det([T_2]_\beta - \lambda I_3) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3.$$

Portanto, o autovalor de $[T_1]_\beta$ e $[T_2]_\beta$ é 2.

1. *Como $p_{T_1}(\lambda) = (2-\lambda)^3$, segue da Proposição (1.23) que as possibilidades para $m_{T_1}(\lambda)$ são: $2-\lambda, (2-\lambda)^2, (2-\lambda)^3$. Verificaremos qual destes polinômios cumpre $m_{T_1}(T_1) = 0$. Observe que se β é uma base de V, então $m_T(T) = 0 \Leftrightarrow [m_T(T)]_\beta = 0 \Leftrightarrow m_T([T_\beta]) = 0$.*

   a) Cálculo para o polinômio $2-\lambda$:

$$m_{T_1}([T_1]_\beta) = ([T_1]_\beta - 2I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

   Logo, $m_{T_1}(\lambda) \neq 2-\lambda$.

   b) Cálculo para o polinômio $(2-\lambda)^2$:

$$m_{T_1}([T_1]_\beta) = ([T_1]_\beta - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

ou seja, $m_{T_2}(\lambda) \neq (2-\lambda)^2$.

Portanto, o polinômio minimal de T_1 *é* $m_{T_1}(\lambda) = (2-\lambda)^3$.

2. *Como* $p_{T_2} = (2-\lambda)^3$*, as possibilidades para* m_{T_2} *também são* $2-\lambda, (2-\lambda)^2, (2-\lambda)^3$.

   a) Cálculo para o polinômio $2-\lambda$*:*

$$m_{T_2}([T]_\beta) = ([T]_\beta - 2I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Portanto, o polinômio minimal de $[T_2]_\beta$ *é* $m_{T_2}(\lambda) = 2-\lambda$.

Subespaços Invariantes

Vimos que $W \subset V$ é um subespaço T-invariante se $T(W) \subset W$, $\forall\ w \in W$ e para $T \in L(V)$. Observe que se W é T-invariante, então $T|_W \in L(W)$.

Lema 1.25. *Sejam* $T, S \in L(V)$ *e suponha que* $T \circ S = S \circ T$*. Então* $\ker(S)$ *e* $S(V)$ *são* T*-invariantes.*

Proposição 1.26. *Sejam* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial e* $T \in L(V)$*. Se* $W \subset V$ *é* T*-invariante então existe uma base* β *de* V *tal que:*

$$[T_\beta] = \begin{pmatrix} M_{m\times m} & N_{m\times(n-m)} \\ 0_{(n-m)\times m} & P_{(n-m)\times(n-m)} \end{pmatrix},$$

onde $\dim V = n$ *e* $\dim W = m$.

Proposição 1.27. *Sejam* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial e* T *um operador linear sobre* V*. Se* $W_1, W_2, ..., W_r$ *são subespaços* T*-invariantes de* V *e* $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_r$ *então existe uma base de* V *tal que :*

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix},$$

onde A_j *é uma matriz quadrada do tamanho* $m_j = \dim W_j$, $\forall\ j = 1, 2, ..., r$.

Exemplo 1.28. *Seja P uma matriz invertível tal que $P^{-1}AP$ é diagonal e $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule A^{100}.*

Usaremos que se P é a matriz de mudança de base de β' para β então $[T]_\beta = P^{-1}[T]_{\beta'}P$.

O Cálculo do polinômio característico para encontrar os autovalores é dado por:

$$p_T(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda).$$

Portanto, os autovalores são 1 e 2.

$\Rightarrow$ *Cálculo do autoespaço associado ao autovalor 1:*

$V(1,T) = \ker(T - I) = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0) : x \in \mathbb{R}\} = [(1,0)]$.

$\Rightarrow$ *Cálculo do autoespaço associado ao autovalor 2:*

$V(2,T) = \ker(T - 2I) = \{(2y,y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(2,1) : y \in \mathbb{R}\} = [(2,1)]$.

Logo, as bases para $\mathbb{R}^2$ formadas pelos autovetores 1 e 2 são $\beta = \{(1,0),(2,1)\}$ e $\beta' = \{(1,0),(0,1)\}$.

Podemos definir as matrizes de mudança de base como:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [I]_{\beta}^{\beta'},$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [I]_{\beta'}^{\beta}.$$

$\Rightarrow$ *Cálculo da matriz diagonal:*

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1}$, então:

$$A^{100} = PD^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(2^{100}-1) \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix}.$$

Veremos no próximo teorema, se V é um espaço vetorial de dimensão S, então um operador linear será diagonalizável se, e somente se, possuir S autovalores distintos.

Teorema 1.29. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T \in L(V)$. Então T é diagonalizável se, e somente se, $m_T(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - \lambda_s)$ sendo $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ os distintos autovalores de T.*

Teorema 1.30. ***(Decomposição Primária)*** *Sejam T um operador linear sobre V e m_T o polinômio minimal de T e escreva:*

$$m_T = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_k^{r_k},$$

a decomposição de m_T em fatores irredutíveis, mônicos e distintos $p_1, p_2, ..., p_k$. Se W_i é o núcleo de $p_i^{r_i}(T), \forall\ i = 1, 2, ..., k$, então:

1. $$V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker p_i^{r_i}(T);$$

2. *W_i é T-invariante $\forall\ i = 1, 2, ..., k$;*

3. *Se $T_i|_{W_i}$ representa a restrição T_i ao subespaço W_1, então o polinômio minimal de T_i será $p_i^{r_i}, \forall\ i = 1, ..., k$.*

Exemplo 1.31. *Seja T um operador cuja matriz em relação à base β é dada por:*

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos estabelecer a decomposição garantida pelo Teorema (1.30) para V, ou seja, vamos encontrar os W_i's, os T_i's e os polinômios m_{T_i}'s.

1. *Cálculo do polinômio característico:*

$$p_T(\lambda) = \det([T]_\beta - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda).$$

2. *Possibilidades para polinômio minimal m_1 e m_2:*

a) Cálculo para $m_1 = (2-\lambda)(1-\lambda)$,

$$m_1 = ([T]_\beta - 2I)([T]_\beta - I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq 0,$$

b) Cálculo para $m_2 = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$,

$$m_2 = ([T]_\beta - 2I)^2([T]_\beta - I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Portanto, o polinômio minimal é $m_T(\lambda) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$.

3. *Pelo Teorema* (1.30) *calcularemos os autoespaços associados de acordo com os autovalores* 1 *e* 2 *encontrados com o polinômio característico.*

   a) Cálculo do autoespaço associado ao autovalor 2*:*
   $W_1 = V(2,T) = \ker([T]_\beta - 2I)^2 = \{(x,x,z) : x,z \in \mathbb{K}\} = \{x(1,1,0) + z(0,0,1) : x,z \in \mathbb{K}\} = [(1,1,0),(0,0,1)]$.

   Portanto, $\dim V(2,T) = 2$.

   b) Cálculo do autoespaço associado ao autovalor 1*:*
   $W_2 = V(1,T) = \ker([T]_\beta - I) = \{(x,0,2x) \in \mathbb{K}\} = \{x(1,0,2) : x \in \mathbb{K} = [(1,0,2)]$.

   Portanto, $\dim V(1,T) = 1$.

Pelo teorema (1.30) $W = V(2,T) \oplus V(1,T) \subseteq \mathbb{K}^3$, *então a* $\dim W = \dim W_1 + W_2 = 3$.

3. *Agora encontraremos* T_1 *e* T_2 *tal que* $T_1 = T|_{W_1}$ *e* $T_2 = T|_{W_2}$*. Para isso, utilizaremos*

a base $\beta = [(1,0,2),(1,1,0),(0,0,1)]$ *de* $\mathbb{K}^3$, *então:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $[T]_\beta = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e então* $T_1 = T|_{W_1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $T_2 = T|_{W_2} = (1)$.

CAPÍTULO 2

A FORMA CANÔNICA DE JORDAN

Neste capítulo apresentaremos a Forma Canônica de Jordan. Essa forma matricial é um conceito bastante útil em Álgebra Linear, pois fornece uma matriz mais simples possível para um operador linear não diagonalizável definido em um espaço vetorial de dimensão finita. Para desenvolvermos a teoria da construção da Forma Canônica de Jordan utilizamos os conceitos, propriedades e resultados a respeito: Somas Diretas, Subespaços Invariantes, Decomposição Primária, Operadores Nilpotentes e Autovetores Generalizados. Provamos que a Forma Canônica de Jordan pode ser obtida quando o polinômio característico do operador considerado puder ser decomposto em fatores lineares, o que sempre ocorre no corpo dos complexos. Mostramos que a existência da Forma Canônica de Jordan para um operador qualquer é uma consequência da sua existência para operadores nilpotentes. Com o auxílio dos autovetores generalizados exibimos uma base para o espaço vetorial em relação ao qual a representação matricial do operador linear considerado estará na Forma Canônica de Jordan. A Forma Canônica de Jordan foi apresentada em 1870 pelo matemático francês Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922). Jordan foi um matemático que atuou em várias áreas, contribuindo essencialmente em todos os tópicos que eram estudados na época, incluindo Grupos Finitos, Álgebra Linear e Multilinear, Teoria dos Números, Topologia de Poliedros, Equações Diferenciais e Mecânica.

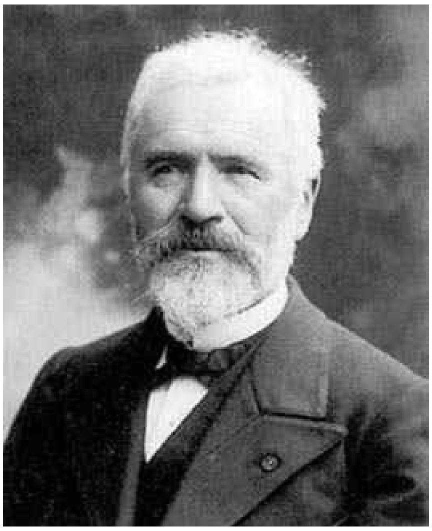

Figura 2.1: Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)
Fonte: Site MacTutor de John O'Connor e Edmund Robertson.[1]

Definição 2.1. *Um operador* $N \in L(V)$ *é nilpotente se existir* $r > 0$ *tal que* $N^r = 0$*. Se* $r = min\{s \in \mathbb{N} : N^s = 0\}$ *então* r *será chamado de índice de nilpotência de* N*.*

Observação 2.2. *1. Veja que se* $N^r = 0$ *e* $s > r$*, então* $N^s = 0$*.*

2. Se N *é um operador em* V *e* β *é uma base de* V *tem-se:*

$$N^r = 0 \Leftrightarrow ([N]_\beta)^r = 0.$$

Exemplo 2.3. *Considere o operador derivação* $D : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$*, onde* $P_2(\mathbb{R})$ *é o conjunto dos polinômios da forma* $a + bt + ct^2$ *e sua derivação é* $b + 2ct$*. Em relação à base* $\beta = \{1, t, t^2\}$ *a matriz de* D *é:*

$$[D]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que D *é um operador nilpotente cujo índice de nilpotência é* 3*. De fato,*

$$[D]_\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

[1]Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jordan/pictdisplay/. Acesso em: 24 nov. 2020.

$$[D]_\beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $D^3 = 0$.

- *Outra maneira de verificar que* $D^3 = 0$.

  $D^3(1) = D^2(D(1)) = D^2(0) = 0,$
  $D^3(t) = D^2(D(t)) = D^2(1) = D(D(1)) = D(0) = 0,$
  $D^3(t^2) = D^2(D(t^2)) = D^2(2t) = D(D(2t)) = D(2) = 0.$

Observe que se $T \in L(V)$ é um operador nilpotente com índice de nilpotência igual a k, então existe $\mu \in V$ tal que:

$$T^{k-1}(u) \neq 0 \text{ e } T^k(u) = 0.$$

Considere o conjunto:

$$\beta = \{u, T(u), T^2(u), ..., T^{k-1}(u)\},$$

e note que β é linearmente independente, pois se $\alpha_0 u + \alpha_1 T(u) + ... + \alpha_{k-1} T^k(u) = 0$, aplicando T^{k-1} a esta expressão obtemos $\alpha_0 = 0$, aplicando T^{k-2} novamente, $\alpha_1 = 0$ e procedendo desta forma concluímos que $\alpha_i = 0$, $\forall i = 0, ..., k-1$.

Conclusão: O índice de nilpotência não ultrapassa $\dim V$, isto é, $k \leq n = \dim V$. Logo, se T é nilpotente sempre teremos $T^n = 0$.

Observação 2.4. *Suponha que* $\beta = \{u, T(u), T^2(u), ..., T^{k-1}(u)\}$ *seja uma base para* V. *Como será a matriz de* T *em relação a* β*?*

$$\begin{aligned} T(u) &= 0 \cdot u + 1 \cdot T(u) + 0 \cdot T^2(u) + 0 \cdot T^3(u) + ... + 0 \cdot T^{k-1}(u), \\ T(T(u)) &= 0 \cdot u + 0 \cdot T(u) + 1 \cdot T^2(u) + 0 \cdot T^3(u) + ... + 0 \cdot T^{k-1}(u), \\ T(T^2(u)) &= 0 \cdot u + 0 \cdot T(u) + 0 \cdot T^2(u) + 1 \cdot T^3(u) + ... + 0 \cdot T^{k-1}(u) \\ &\vdots \\ T(T^{k-2}(u)) &= 0 \cdot u + 0 \cdot T(u) + 0 \cdot T^2(u) + 0 \cdot T^3(u) + ... + 1 \cdot T^{k-1}(u), \\ T(T^{k-1}(u)) &= 0 \cdot u + 0 \cdot T(u) + 0 \cdot T^2(u) + 0 \cdot T^3(u) + ... + 0 \cdot T^{k-1}. \end{aligned}$$

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.5. *Seja $T : V \to V$ um operador nilpotente de índice k. Então T admite uma representação matricial em bloco cujos elementos diagonais têm a forma:*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(isto é, todos os elementos de N são 0's, exceto os que estão diretamente acima da diagonal principal, que são 1's). Há ao menos uma N de ordem k, e todas as outras N são de ordem $\leq k$. O número de N's de cada ordem possível é determinado de modo único por T. Além disso, o número total de N's de todas as ordens é igual a dimensão do núcleo de T.

Definição 2.6. *Uma célula de Jordan é uma matriz de forma:*

$$J_n(d) = \begin{pmatrix} d & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.7. *Seja $T \in L(V)$ um operador nilpotente. Então, existe uma base β de V tal que:*

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} J_{d_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{d_2}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{d_k}(0) \end{pmatrix},$$

com

$$\dim V = \sum_{i=1}^{k} d_i.$$

Observação 2.8. *Se $T : V \to V$ é um operador linear nilpotente, então pelo Teorema* (2.7) *existe uma base β de V tal que:*

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} J_{d_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{d_2}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{d_k}(0) \end{pmatrix}.$$

Observemos que:

1. *O número de células de Jordan k é igual à $\dim \ker T$=(número de colunas nulas).*

2. *A maior célula de Jordan de $[T]_\beta$ tem dimensão igual ao índice de nilpotência de T que por sua vez é igual ao grau do polinômio minimal.*

Teorema 2.9. *Seja $T : V \to V$ um operador linear cujos polinômios característico e minimal são respectivamente:*

$$p_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)^{n_r} \text{ e } m_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda)^{m_r},$$

onde os λ_i são escalares distintos. Então T admite uma representação matricial em blocos J cujos elementos diagonais têm a forma:

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Para cada λ_i os blocos corespondentes J_{ij} têm as seguintes propriedades:

i. *Há ao menos um J_{ij} de ordem m_i; todos os outros J_{ij} são de ordem $\leq m_i$;*

ii. *A soma das ordens dos J_{ij} é n_i;*

iii. *O número de* J_{ij} *é igual à multiplicidade geométrica de* λ_i*;*

iv. *O número de* J_{ij} *de cada ordem possível é univocamente determinado por* T*.*

Demonstração. Pelo Teorema (1.30) da Decomposição Primária, T é decomponível em operadores $T_1, ..., T_r$, isto é, $T = T_1 \oplus ... \oplus T_r$, onde $(\lambda_i - \lambda)^{m_i}$ é o polinômio minimal de T_i. Assim, em particular:

$$(T_1 - \lambda_1 I)^{m_1} = 0, ..., (T_r - \lambda_r I)^{m_r} = 0.$$

Faça $N_i = T_i - \lambda_i I$. Então, para $i = 1, ..., r$:

$$T_i = N_i + \lambda_i I, \quad onde\ N_i^{m_i} = 0,$$

isto é, T_i é a soma do operador escalar $\lambda_i I$ e um operador nilpotente N_i, que é de índice m_i, pois $(\lambda_i - \lambda)^{m_i}$ é o polinômio minimal de T_i.

Mas pelo Teorema (2.5) sobre operadores nilpotentes, podemos escolher uma base tal que N_i esteja em forma canônica. Nesta base, $T_i = N_i + \lambda_i I$ é representado por uma matriz diagonal em bloco M_i cujos elementos diagonais são as matrizes J_{ij}. A soma direta U das matrizes M_i está em Forma Canônica de Jordan e, pelo Teorema (2.7), é uma representação matricial T.

Finalmente, devemos mostrar que os blocos J_{ij} verificam as propriedades desejadas:

i. Decorre do fato de que N_i é de índice m_i.

ii. É verdadeira, pois T e J têm o mesmo polinômio característico.

iii. É verdadeira, pois a nulidade de $N_i = T_i - \lambda_i I$ é igual à multiplicidade geométrica do autovalor λ_i.

iv. Decorre do fato de que os T_i e então os N_i, são univocamente determinados por T_i.

□

Definição 2.10. *A matriz* $[T]_\beta = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{ij} \end{pmatrix}$ *é chamada de Forma Canônica de Jordan do oparador* T*.*

Exemplo 2.11. *Dada a matriz* $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & 15 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$*, exibiremos a base e Forma Canônica de Jordan.*

Primeiro calcularemos o polinômio característico $p_A(\lambda)$ *e o polinômio minimal* $m_A(\lambda)$.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & 3 & 15 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1).$$

Como o polinômio característico $p_A(\lambda)$ *tem como autovalores* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ *e* $\lambda_4 = 0$*, com autovalores* -1 *de multiplicidade* 3 *e autovalor* 0 *de multiplicidade* 1*, então:*

$$m_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^3.$$

Portanto, a Forma Canônica de Jordan J *será:*

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por último, calcularemos os autoespaços associados aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ *e* $\lambda_4 = 0$*, ou seja:*

$$\begin{aligned} \ker(A+I)^3 &= \{(x, y, (-3/2)w, w) : x, y, w \in \mathbb{R}^4\} \\ &= \{x(1,0,0,0) + y(0,1,0,0) + w(0,0,(-3/2),1)\} \\ &= [(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,3,-2)], \\ \ker(A+I)^2 &= \{(x,y,0,0) : x, y \in \mathbb{R}^4\} = \{x(1,0,0,0) + y((0,1,0,0) : x, y \in \mathbb{R}^4\} \\ &= [(1,0,0,0), (0,1,0,0)], \\ \ker(A+I) &= \{(2y, y, 0, 0) : y \in \mathbb{R}^4\} = \{y(2,1,0,0) : y \in \mathbb{R}^4\} = [(2,1,0,0)], \\ \ker(A-0I) &= \{(8w, 3w, -w, w) : w \in \mathbb{R}^4\} = \{w(8,3,-1,1) : w \in \mathbb{R}^4\} = [(8,3,-1,1)]. \end{aligned}$$

Para formar a base da Forma Canônica Jordan, precisamos de um vetor $v_1 \in \ker(A+I)^3 \setminus \ker(A+I)^2$*. Assim, tome* $v_1 = (0,0,3,-2)$*, os próximos serão*

$v_2 = (A+I)v_1 = (-21,-10,0,0)$, $v_3 = (A+I)^2 v_1 = (2,1,0,0)$ *e o último estará no* $\ker(A)$, *digamos* $v_4 = (8,3,-1,1)$.
Portanto, a base associada a matriz A será:

$$[(0,0,3,-2),(-21,-10,0,0),(2,1,0,0),(8,3,-1,1)].$$

Exemplo 2.12. *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ *dada por:*

$$T(x,y,z,w) = (2x, x+2y, x+2y+2z, z-w),$$

e seja A a matriz de T na base canônica. Encontre uma matriz de mudança de base P tal que $B = P^{-1}AP$ *esteja na Forma Canônica de Jordan e calcule B.*

Sabemos que a base canônica β *de* $\mathbb{C}^4$ *é definida como:*

$$\beta = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\},$$

então tomemos cada vetor de T associado a cada vetor da base canônica β *como* $T(1,0,0,0) = (2,1,1,0)$, $T(0,1,0,0) = (0,2,2,0)$, $T(0,0,1,0) = (0,0,2,1)$ *e* $T(0,0,0,1) = (0,0,0,-1)$. *Assim, formando a matriz transformação* T_β, *ou seja:*

$$T_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Primeiro calcularemos o polinômio característico $p_{T_\beta}(\lambda)$ *e o polinômio minimal* $m_{T_\beta}(\lambda)$.

$$p_{T_\beta}(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3(-1-\lambda).$$

Como o polinômio característico p_{T_β} *tem autovalores* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ *e* $\lambda_4 = -1$, *com autovalores* 2 *de multiplicidade* 3 *e autovalor* -1 *de multiplicidade* 1, *então:*

$$m_{T_\beta} = (\lambda-2)^3(\lambda+1).$$

Portanto, a Forma Canônica de Jordan J_T *será:*

$$J_{T_\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Agora calcularemos os autoespaços associados aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ *e* $\lambda_4 = -1$ *para encontrar a base da Forma Canônica de Jordan e formar a matriz* P *de mudança de base. Assim:*

$$\begin{aligned}
\ker(T_\beta - 2I)^3 &= \{(-6y + 9z - 27w, y, z, w) : y, z, w \in \mathbb{C}^4\} \\
&= \{y(-6, 1, 0, 0) + z(9, 0, 1, 0) + w(-27, 0, 0, 1) : y, z, w \in \mathbb{C}^4\} \\
&= [(-6, 1, 0, 0), (9, 0, 1, 0), (-27, 0, 0, 1)], \\
\ker(T_\beta - 2I)^2 &= \{(0, 3z - 9w, 2z, 2w) : z, w \in \mathbb{C}^4\} \\
&= \{z(0, 3, 2, 0) + w(0, -9, 0, 2) : z, w \in \mathbb{C}^4\} \\
&= [(0, 3, 2, 0), (0, -9, 0, 2)], \\
\ker(T_\beta - 2I) &= \{(0, 0, 3w, w) : w \in \mathbb{C}^4\} = \{w(0, 0, 3, 1) : w \in \mathbb{C}^4\} = [(0, 0, 3, 1)], \\
\ker(T_\beta + I) &= \{(0, 0, 0, w) : w \in \mathbb{C}^4\} = \{w(0, 0, 0, 1) : w \in \mathbb{C}^4\} = [(0, 0, 0, 1)].
\end{aligned}$$

Para formar a base da Forma Canônica Jordan, precisamos de um vetor $v_1 \in \ker(T_\beta - 2I)^3 \setminus \ker(T_\beta - 2I)^2$*. Assim, tome* $v_1 = (9, 0, 1, 0)$*, os próximos serão* $v_2 = (T_\beta - 2I)v_1 = (0, 9, 9, 1)$*,* $v_3 = (T_\beta - 2I)^2 v_1 = (0, 0, 18, 6)$ *e o último estará no* $\ker(T_\beta + I)$*, digamos* $v_4 = (0, 0, 0, 1)$*.*

Portanto, a base associada a matriz transformação T_β *será* $[(9, 0, 1, 0), (0, 9, 9, 1), (0, 0, 18, 6), (0, 0, 0, 1)]$ *e a matriz de mudança de base* P *será:*

$$P = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 18 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por fim, calcularemos $B = P^{-1}AP$*, ou seja:*

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ -1/162 & -1/18 & 1/18 & 0 \\ 1/27 & 2/9 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 18 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & 0 & 0 \\ 1/9 & 2/9 & 0 & 0 \\ -1/81 & 0 & 1/9 & 0 \\ -1/27 & -2/9 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 18 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, B está em J_{T_β}.

No próximo capítulo apresentaremos algumas aplicações em sistemas de Equações Diferencias, utilizando a Forma Canônica de Jordan. As aplicações que trabalharemos são relativas: Sistemas Homogêneos com Coeficientes Constantes, Sistemas Homogêneos com Coeficientes Constantes nos Números Complexos, Sistemas não Homogêneos com Coeficientes Constantes e Matrizes Exponenciais. Vejamos a seguir esse estudo.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES EM SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Neste capítulo apresentaremos sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias utilizando a Forma Canônica de Jordan e matrizes de mudança de base para resolver soluções gerais, Problemas de Valor Inicial e soluções particulares deses sistemas. Trabalharemos com sistemas homogêneos com coeficientes constantes, sistemas homogêneos com coeficientes constantes nos números complexos, sistemas não homogêneos com coeficientes constantes e matrizes exponenciais.

Sistemas Homogêneos com Coeficientes Constantes

O objetivo desta seção é utilizar a Forma Canônica de Jordan para resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias. Um sistema linear da forma:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + g_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + g_2(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + g_n(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

é chamado de sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Se todas as funções $g_1(x), \cdots, g_n(x)$ forem identicamente nulas no intervalo $I = (a, b)$, dizemos que o sistema (3.1) é homogêneo; caso contrário, ele é não-homogêneo.

A forma matricial de um sistema linear pode ser descrita de seguinte maneira. Se Y, $A(x)$ e $G(x)$ denotarem respectivamente as matrizes:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad G(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix},$$

então o sistema de equações lineares de primeira ordem será escrito como:

$$Y' = A(x)Y + G(x).$$

Se o sistema for homogêneo, sua forma matricial será simplesmente $Y' = A(x)Y$.

Vamos investigar soluções de sistemas homogêneos com coeficientes constantes, ou seja, sistemas da forma $Y' = AY$, sendo A uma matriz com todas as entradas sendo constantes.

Considere o sistema matricial $Y' = AY$. A estratégia que seguiremos ao longo desta seção será dada pelos seguintes passos:

Passo 1. Sejam J a Forma Canônica de Jordan de A e P a matriz de mudança de base. Então $A = PJP^{-1}$ sendo P^{-1} uma matriz com termos constantes. Daí $P^{-1}(Y') = (P^{-1}Y)'$, e o sistema se escreve da seguinte forma:

$$Y' = (PJP^{-1})Y \Leftrightarrow P^{-1}Y' = J(P^{-1}Y) \Leftrightarrow (P^{-1}Y)' = J(P^{-1}Y). \tag{3.2}$$

Passo 2. Se $Z = P^{-1}Y$, podemos reescrever (3.2) como:

$Z' = JZ$ onde a solução do novo sistema será dada por Z.

Passo 3. Daí como $Z = P^{-1}Y$ então $Y = PZ$ e esta será a solução do sistema original.

Examinando esta estratégia, podemos observar que é fácil resolver o Passo 1 e também o Passo 3, pois consistem apenas em multiplicar matrizes. O mais importante para nosso estudo é ser capaz de resolver o Passo 2, e é nesse passo que a Forma Canônica de Jordan será útil. Cabe ressaltar também que será relativamente fácil resolver o sistema $Z' = JZ$, quando J for uma matriz na Forma Canônica de Jordan.

Ao longo desta seção, veremos que $Z' = JZ$ tem como solução $Z = M_Z C$, onde M_Z é uma matriz de funções, chamada de matriz fundamental do sistema e C é um vetor de constantes arbitrárias.

Apesar de não ser uma lógica necessária, vamos olhar uma matriz diagonal como uma matriz da Forma Canônica de Jordan em que todos os blocos de Jordan são blocos 1 por 1, pois isto nos dará ideia de como lidar com os outros casos.

Teorema 3.1. *Seja J uma matriz diagonal k por k:*

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & a_2 & & & 0 & \\ & & a_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & a_{k-1} & \\ & & & & & a_k \end{pmatrix}.$$

Então o sistema $Z' = JZ$ tem a solução:

$$Z = \begin{pmatrix} e^{a_1 x} & & & & & \\ & e^{a_2 x} & & & 0 & \\ & & e^{a_3 x} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & e^{a_{k-1} x} & \\ & & & & & e^{a_k x} \end{pmatrix} C = M_Z C,$$

onde, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$ *é um vetor de constantes arbitrárias* $c_1, c_2, \cdots, c_k$.

Demonstração. Substituindo a matriz J no sistema $Z' = JZ$ vemos que:

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 z_1 \\ a_2 z_2 \\ \vdots \\ a_k z_k \end{pmatrix}.$$

Observe que a equação de z_i' envolve apenas z_i e nenhuma das outras variáveis, então podemos resolvê-las separadamente. Em geral, a equação diferencial $z' = az$ tem solução $z = ce^{ax}$. Desta forma, o sistema $Z' = JZ$ terá solução:

$$Z = \begin{pmatrix} c_1e^{a_1x} \\ c_2e^{a_2x} \\ \vdots \\ c_ke^{a_kx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a_1x} & & & \\ & e^{a_2x} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & e^{a_kx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix},$$

que é exatamente o produto M_ZC mencionado acima. $\square$

Exemplo 3.2. *Considere o sistema $Y' = AY$ onde:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desenvolveremos a Forma Canônica de Jordan e encontraremos a matriz de mudança de base P, para isso calcularemos o polinômio característico $p_A(\lambda)$, o polinômio minimal $m_A(\lambda)$ e por fim, para encontrar a base de Jordan calcularemos o núcleo dos operadores $A - \lambda I$, para cada autovalor λ.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & -3 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda+1),$$

$$m_A(\lambda) = \lambda(\lambda-2)(\lambda+1).$$

Portanto a Forma Canônica de Jordan terá 3 blocos de Jordan de dimensão 1 com autovalores $-1,\ 0$ e 2:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como A é diagonalizável, a base de Jordan será uma base de autovetores, e a matriz P, terá em suas colunas os autovetores encontrados:

$$\begin{aligned}
\ker(A+I) &= \{(x,0,x) : x \in \mathbb{R}^3\} = \{x\ (1,0,1) : x \in \mathbb{R}^3\} = [(1,0,1)], \\
\ker(A) &= \{(0,-z,z) : z \in \mathbb{R}^3\} = \{z\ (0,-1,1) : z \in \mathbb{R}^3\} = [(0,-1,1)], \\
\ker(A-2I) &= \{(-z,-z,z) : z \in \mathbb{R}^3\} = \{z\ (-1,-1,1) : z \in \mathbb{R}^3\} = [(-1,-1,1)],
\end{aligned}$$

então as bases associadas a J são $\{(1,0,1),(0,-1,1),(-1,-1,1)\}$. Logo a matriz P é:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então $Z' = JZ$ tem solução:

$$Z = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = M_Z C.$$

Ainda, $Y = PZ = PM_ZC$, isto é:

$$\begin{aligned}
Y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & -e^{2x} \\ 0 & -1 & -e^{2x} \\ e^{-x} & 1 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1e^{-x} \qquad - c_3e^{2x} \\ -c_2 - c_3e^{2x} \\ c_1e^{-x} + c_2 + c_3e^{2x} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Agora veremos como usar a Forma Canônica de Jordan para resolver sistemas $Y' = AY$, onde a matriz dos coeficientes A não é diagonalizável.

Para entendermos melhor o processo, primeiro analisaremos um sistema $Z' = JZ$, onde J é uma matriz constante com um único bloco de Jordan.

Teorema 3.3. *Seja J um bloco de Jordan k por k com autovalor a:*

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 & & & & \\ & a & 1 & & 0 & \\ & & a & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & a & 1 \\ & & & & & a \end{pmatrix}.$$

Então o sistema $Z' = JZ$ tem a solução:

$$Z = e^{ax} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2! & x^3/3! & \cdots & x^{k-1}/(k-1)! \\ & 1 & x & x^2/2! & \cdots & x^{k-2}/(k-2)! \\ & & 1 & x & \cdots & x^{k-3}/(k-3)! \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & x \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} C = M_Z C \ ,$$

onde, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$ *é um vetor de constantes arbitrárias $c_1, c_2, \cdots, c_k$.*

Demonstração. Mostraremos para os casos $k = 1, 2$ e 3. Podemos observar que a demonstração é uma simples aplicação de técnicas para resolver equações diferenciais de primeira ordem.

Para o caso $k = 1$, consideremos o sistema:

$$(z_1') = (a)(z_1),$$

que equivale a equação diferencial:

$$z_1' = az_1.$$

Esta equação diferencial tem a solução:

$$z_1 = c_1 e^{ax},$$

podemos reescrevê-la como:

$$(z_1) = e^{ax}(1)(c_1).$$

Para o caso $k = 2$, consideremos o sistema:

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

que equivale ao sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} z_1' &= az_1 + z_2 \\ z_2' &= az_2 \end{cases}.$$

Temos a solução da segunda equação do sistema como:

$$z_2 = c_2 e^{ax},$$

e substituindo a solução da segunda equação do sitema na primeira, obtemos:

$$z_1' = az_1 + c_2 e^{ax}.$$

Reescrevendo a equação acima, temos a solução:

$$z_1' - az_1 = c_2 e^{ax},$$

e observando que esta equação tem e^{-ax} como fator integrante. Então multiplicando ambos os lados da equação por esse fator, temos:

$$\begin{aligned} e^{-ax}(z_1' - az_1) &= c_2 \\ (e^{-ax} z_1)' &= c_2 \\ e^{-ax} z_1 &= \int c_2 \, dx = c_1 + c_2 x. \end{aligned}$$

Então:

$$z_1 = e^{ax}(c_1 + c_2 x).$$

A solução do sistema é:

$$\begin{cases} z_1 &= e^{ax}(c_1 + c_2 x) \\ z_2 &= e^{ax} c_2 \end{cases},$$

reescrevendo na forma matricial, obtemos:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{ax} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Para o caso $k = 3$, consideremos o sistema:

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

que equivale ao sistema de equações diferenciais definido por três variáveis:

$$\begin{cases} z_1' &= az_1 + z_2 \\ z_2' &= \quad az_2 + z_3 \\ z_3' &= \quad\quad az_3 \end{cases}.$$

Se observarmos o sistema, podemos notar que as duas últimas equações do sistema equivalem ao sistema do caso $k = 2$, onde temos a solução referente ao caso $k = 3$ como:

$$\begin{cases} z_2 &= e^{ax}(c_2 + c_3x) \\ z_3 &= e^{ax}c_3 \end{cases}.$$

Substituindo o valor de z_2 na equação z_1', obtemos:

$$z_1' = az_1 + e^{ax}(c_2 + c_3x).$$

Reescrevendo a equação acima, temos a solução:

$$z_1' - az_1 = e^{ax}(c_2 + c_3x),$$

observando que esta equação tem e^{-ax} como fator integrante. Então multiplicando ambos os lados da equação por esse fator, temos:

$$\begin{aligned} e^{-ax}(z_1' - az_1) &= c_2 + c_3x \\ (e^{-ax}z_1)' &= c_2 + c_3x \\ e^{-ax}z_1 &= \int (c_2 + c_3x)\ dx = c_1 + c_2x + c_3(x^2/2). \end{aligned}$$

Então:

$$z_1 = e^{ax}(c_1 + c_2x + c_3(x^2/2)).$$

A solução do sistema é:

$$\begin{cases} z_1 &= e^{ax}(c_1 + c_2x + c_3(x^2/2)) \\ z_2 &= e^{ax}(c_2 + c_3x) \\ z_3 &= e^{ax}c_3 \end{cases}.$$

reescrevendo na forma matricial, obtemos:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{ax} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

□

Observação 3.4. *Suponha que $Z' = JZ$, onde J é uma matriz da Forma Canônica de Jordan formada por vários blocos. Podemos observar que esses sistemas se decompõem em vários subsistemas, um para cada bloco de Jordan. Já que esses sistemas estão desconectados, podemos resolvê-los separadamente usando o Teorema* (3.3)*, e em seguida reuni-los para obter uma solução geral.*

Exemplo 3.5. *Considere o sistema $Y' = AY$:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Novamente, para achar a Forma Canônica de Jordan de A e encontrarmos a matriz P calcularemos o polinômio característico $p_A(\lambda)$, o polinômio minimal $m_A(\lambda)$ e a base de Jordan.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3 ,$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 .$$

Portanto a Forma Canônica de Jordan terá 2 *blocos de Jordan para o autovalor* 1*, um de dimensão* 1 *e outro de dimensão* 2*:*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Agora encontraremos a matriz P, através da base de Jordan:

$$\begin{aligned} \ker(A-I)^2 &= \mathbb{R}^3, \\ \ker(A-I) &= \{(-y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}^3\} = \\ &= \{y\ (-1,1,0), z(-1,0,1) : y, z \in \mathbb{R}^3\} = [(-1,1,0), (-1,0,1)]. \end{aligned}$$

Tomaremos um vetor para a base fora de $\ker(A-I)$*, por exemplo,* $v=(1,0,0)$ *o próximo será* $(A-I)v=(1,-2,1)$ *e o terceiro deve estar em* $\ker(A-I)$*, digamos,* $v_3=(-1,0,1)$*. Portanto a base de Jordan será* $\{(1,-2,1),(1,0,0),(-1,0,1)\}$ *e a matriz* P *é:*

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, $Z'=JZ$ *terá solução:*

$$Z=\begin{pmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=M_ZC.$$

Ainda, $Y=PZ=PM_ZC$*, isto é:*

$$\begin{aligned} Y &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^x & xe^x+e^x & -e^x \\ -2e^x & -2xe^x & 0 \\ e^x & xe^x & e^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c_1+c_2-c_3)e^x+c_2xe^x \\ -2c_1e^x-2c_2xe^x \\ (c_1+c_3)e^x+c_2xe^x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por fim, vamos exemplificar como este método serve também para se resolver problemas de valor inicial (PVI). A partir do que já desenvolvemos, precisaremos apenas de uma etapa a mais.

Já escrevemos a solução de $Z'=JZ$ como $Z=M_ZC$. Sendo mais explicito, reescreveremos esta solução como $Z(x)=M_Z(x)C$ para nos lembrar que $Z(x)$ é um vetor de funções, $M_Z(x)$ é uma matriz de funções e C é um vetor constante. A observação fundamental é que $M_Z(0)=I$ é a matriz identidade. Assim, se desejamos resolver o PVI:

$$Z'=JZ, \qquad Z(0)=Z_0,$$

descobrimos que, em geral,

$$Z(x)=M_Z(x)C,$$

e em particular,

$$Z_0 = Z(0) = M_Z(0)C = IC = C,$$

então a solução para o PVI será:

$$Z(x) = M_Z(x)Z_0.$$

Para resolvermos o sistema $Y' = AY$, com $A = PJP^{-1}$, vimos que a solução desse sistema é $Y = PZ = PM_ZC$. Manipulando o sistema algebricamente, obtemos:

$$\begin{aligned} Y &= PM_ZC = PM_ZIC = PM_Z(P^{-1}P)C \\ &= (PM_ZP^{-1})(PC). \end{aligned}$$

Defina $M_Y = PM_ZP^{-1}$ e $\Gamma = PC$. Note que M_Y ainda é uma matriz de funções, Γ é um vetor de constantes arbitrárias, devido a P ser uma matriz constante invertível e, C um vetor de constantes arbitrárias. Com essa notação, vemos que:

$$Y' = AY \quad \text{tem como solução} \quad Y = M_Y\Gamma.$$

Agora para resolvermos o PVI:

$$Y' = AY, \qquad Y(0) = Y_0.$$

Reescrevendo a solução acima de $Y' = AY$ e explicitando a variável independente, obtemos $Y(x) = M_Y(x)\Gamma$, em particular,

$$Y_0 = Y(0) = M_Y(0)\Gamma = PM_Z(0)P^{-1}\Gamma = PIP^{-1}\Gamma = \Gamma.$$

Então, podemos observar que:

$$Y' = AY, \quad Y(0) = Y_0 \quad \text{tem como solução} \quad Y(x) = M_Y(x)Y_0.$$

Exemplo 3.6. *Considere o sistema $Y' = AY$ onde:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para determinar a Forma Canônica de Jordan façamos:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4,$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2.$$

Portanto, a Forma Canônica de Jordan terá apenas 1 *bloco de Jordan para o autovalor* 2*:*

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Agora encontraremos a matriz P*, através da bases de Jordan:*

$$\begin{aligned} &\ker(A - 2I)^2 = \mathbb{R}^2, \\ &\ker(A - 2I) = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}^2\} = \{x\ (1, 2) : x \in \mathbb{R}^2\} = [(1, 2)]. \end{aligned}$$

Tomemos um vetor em $\mathbb{R}^2 \setminus \ker(A - 2I)$*, digamos,* $v = (1, 0)$ *e faça* $(A - 2I)v = (-2, -4)$ *então a base de Jordan será* $\{(-2, -4), (1, 0)\}$*. Logo a matriz* P *é:*

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$M_Z(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} M_Y(x) = PM_Z(x)P^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2x} - 2xe^{2x} & xe^{2x} \\ -4e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} Y(x) = M_Y(x) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{2x} - 2xe^{2x} & xe^{2x} \\ -4e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 e^{2x} + (-2a_1 + a_2)xe^{2x} \\ a_2 e^{2x} + (-4a_1 + 2a_2)xe^{2x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Seja $Y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$ *então a solução particular do PVI é:*

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 3e^{2x} - 14xe^{2x} \\ -8e^{2x} - 28xe^{2x} \end{pmatrix}.$$

Observação 3.7. *Esta variação do método tem seus prós e contras. Ela é menos efetiva que o método original para resolver um único problema de valor inicial (já que requer o cálculo de P^{-1} e algumas multiplicações extra de matrizes), mas tem a vantagem de expressar a solução diretamente em termos das condições iniciais. Isto o torna mais eficiente quando o mesmo sistema $Y' = AY$ deve ser resolvido para várias condições iniciais.*

Sistemas Homogêneos com Coeficientes Constantes nos Números Complexos

Nesta seção, mostraremos como resolver um sistema homogêneo $Y' = AY$ onde o polinômio característico de A tem raízes complexas. A princípio, a resolução é a mesma em relação ao polinômio característico de A com raízes reais que vimos na seção anterior, mas na prática existe um passo a mais para chegar na resolução.

Definição 3.8. *Seja z um número complexo, a exponencial e^z é definida por:*

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + ...$$

A exponencial complexa tem as seguintes propriedades.

Teorema 3.9. *1. Para qualquer θ:*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta);$$

2. Para qualquer a:

$$\frac{d}{dz}(e^{az}) = ae^{az};$$

3. Para qualquer z_1 e z_2:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2};$$

4. Se $z = s + it$, então:

$$e^z = e^s(\cos(t) + i\sin(t));$$

5. Para qualquer z:

$$e^{\overline{z}} = \overline{e^z}.$$

O lema a seguir nos ajudará na resolução dos sistemas homogêneos.

Lema 3.10. *Seja A uma matriz com entradas reais, e v um autovetor de A com autovalor associado λ. Então, $\overline{v}$ é um autovetor de A com autovalor associado $\overline{\lambda}$.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $Av = \lambda v$. Tomando o complexo conjugado de cada lado da equação obtemos:

$$\overline{Av} = \overline{\lambda v} \Rightarrow \overline{A}\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v} \Rightarrow A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$$

(com $\overline{A} = A$, já que todas as entradas de A são reais), como queríamos. □

Exemplo 3.11. *Considere o sistema $Y' = AY$, onde $A = \begin{pmatrix} 2 & -17 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.*
Para achar a Forma Canônica de Jordan de A e encontrarmos a matriz P calcularemos o polinômio característico $p_A(\lambda)$, o polinômio minimal $m_A(\lambda)$ e a base de Jordan.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & -17 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 25,$$

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 25$ com raízes $\lambda_1 = 3+4i$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 3-4i$, cada uma de multiplicidade 1. Portanto, λ_1 e λ_2 são os autovalores de A e consequentemente o polinômio minimal é:

$$m_A(\lambda) = (\lambda - (3+4i))(\lambda - (3-4i)).$$

Agora, calcularemos os autoespaços referente aos autovalores associados. Para o autovalor $\lambda_1 = 3+4i$, temos o autoespaço $E_{3+4i} = \ker(A - (3+4i)I)$ e tem como base $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1+4i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, e consequentemente, pelo Lema (3.10), para o autovalor $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 3-4i$ temos o autoespaço $E_{3-4i} = \ker(A-(3-4i)I)$ e tem como base $\left\{ v_2 = \overline{v_1} = \begin{pmatrix} -1-4i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Portanto a Forma Canônica de Jordan terá 2 blocos de Jordan de dimensão 1, respectivamente com autovalores $\lambda_1 = 3+4i$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 3-4i$.

$$J = \begin{pmatrix} 3+4i & 0 \\ 0 & 3-4i \end{pmatrix}.$$

Como encontramos as bases associadas aos autoespaços anteriormente, podemos definir a matriz P como:

$$P = \begin{pmatrix} -1+4i & -1-4i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Continuaremos com o mesmo método da seção anterior, mas agora usaremos F para denotar um vetor de constantes arbitrárias. Desta forma, $Z' = JZ$ terá solução:

$$Z = \begin{pmatrix} e^{(3+4i)x} & 0 \\ 0 & e^{(3-4i)x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = M_Z F = \begin{pmatrix} f_1 e^{(3+4i)x} \\ f_2 e^{(3-4i)x} \end{pmatrix}.$$

Ainda, $Y = PZ = PM_Z F$, isto é:

$$Y = \begin{pmatrix} 1-4i & -1-4i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(3+4i)x} & 0 \\ 0 & e^{(3-4i)x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$= f_1 e^{(3+4i)x} \begin{pmatrix} -1+4i \\ 1 \end{pmatrix} + f_2 e^{(3-4i)x} \begin{pmatrix} -1-4i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Agora queremos que nossa equação diferencial tenha soluções reais e, para que seja o caso, devemos ter $f_2 = \overline{f_1}$. Assim, podemos escrever nossa solução como:

$$\begin{aligned} Y &= f_1 e^{(3+4i)x} \begin{pmatrix} -1+4i \\ 1 \end{pmatrix} + f_2 e^{(3-4i)x} \begin{pmatrix} -1-4i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= f_1 e^{(3+4i)x} \begin{pmatrix} -1+4i \\ 1 \end{pmatrix} + \overline{f_1 e^{(3-4i)x} \begin{pmatrix} -1+4i \\ 1 \end{pmatrix}}, \end{aligned}$$

onde f_1 é uma constante complexa arbitrária.

Essa solução é correta, mas inaceitável. Queremos resolver o sistema $Y' = AY$, onde A tem coeficientes reais, e temos uma solução que é de fato um vetor real, mas esse vetor é expresso em termos de números complexos e funções. Precisamos obter uma solução que seja expressa totalmente em termos de números reais e funções. Para fazer isso, precisamos de uma etapa extra.

Para não interromper o fluxo da exposição, simplesmente afirmamos aqui o que precisamos fazer, e justificamos após a conclusão do exemplo.

Portanto, fazemos o seguinte: Simplesmente substituímos a matriz PM_Z pela matriz cuja primeira coluna é a parte real $Re(e^{\lambda_1 x} v_1) = Re\left(e^{(3+4i)x} \begin{pmatrix} -1+4i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, e cuja segunda coluna é a parte imaginária $Im(e^{\lambda_1 x} v_1) = Im\left(e^{(3+4i)x} \begin{pmatrix} -1+4i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, e o vetor

F pelo vetor C de constantes reais arbitrárias. Calculamos:

$$\begin{aligned} e^{(3+4i)x}\begin{pmatrix} -1+4i \\ 1 \end{pmatrix} =& e^{3x}(\cos(4x)+i\sin(4x))\begin{pmatrix} -1+4i \\ 1 \end{pmatrix} \\ =& e^{3x}\begin{pmatrix} -\cos(4x)-4\sin(4x) \\ \cos(4x) \end{pmatrix} + ie^{3x}\begin{pmatrix} 4\cos(4x)-\sin(4x) \\ \sin(4x) \end{pmatrix} \\ =& Re\left(e^{\lambda_1 x}v_1 \right) + Im\left(e^{\lambda_1 x}v_1 \right). \end{aligned}$$

e assim obtemos:

$$Y = \begin{pmatrix} e^{3x}(-\cos(4x)-4\sin(4x)) & e^{3x}(4\cos(4x)-\sin(4x)) \\ e^{3x}\cos(4x) & e^{3x}\sin(4x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-c_1+4c_2)e^{3x}\cos(4x)+(-4c_1-c_2)e^{3x}\sin(4x)) \\ c_1e^{3x}\cos(4x)+c_2e^{3x}\sin(4x) \end{pmatrix}.$$

Agora justificamos por meio do seguinte Lema, a etapa que demos.

Lema 3.12. *Considere o sistema $Y' = AY$, onde A é uma matriz com entradas reais. Este sistema tem solução geral da seguinte forma:*

$$Y = PM_ZF = \begin{pmatrix} v_1 & | & \overline{v_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\overline{\lambda_1}x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ \overline{f_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x}v_1 & | & \overline{e^{\lambda_1 x}v_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ \overline{f_1} \end{pmatrix},$$

onde f_1 é uma constante complexa arbitrária. Então este sistema também tem solução geral da forma:

$$Y = \begin{pmatrix} Re(e^{\lambda_1 x}v_1) & | & Im(e^{\lambda_1 x}v_1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.

Demonstração. Primeiro observe que para qualquer número complexo $z = x+iy$, $x = Re(z) = (1/2)(z+\overline{z})$ e $y = Im(z) = (1/2i)(z-\overline{z})$, e da mesma forma, para qualquer vetor complexo.

Agora $Y' = AY$ tem solução geral $Y = PM_ZF = PM_Z(RR^{-1})F = (PM_ZR)(R^{-1}F)$ para qualquer matriz invertível R. Agora, escolhemos:

$$R = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix}.$$

Com esta escolha de R,

$$PM_Z R = \left(\begin{array}{c|c} Re(e^{\lambda_1 x} v_1) & Im(e^{\lambda_1 x} v_1) \end{array} \right).$$

Então:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Uma vez que f_1 é uma constante complexa arbitrária, podemos escolher escrevê-la como $f_1 = (1/2)(c_1 + ic_2)$ para constantes reais arbitrárias c_1 e c_2, e com esta escolha:

$$R^{-1}F = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

□

Agora resolveremos $Y' = AY$ onde A é uma matriz real 3 por 3 com um par de autovalores complexos e um terceiro autovalor real. Como você verá, usamos a ideia do Lema (3.12) para simplesmente substituir as colunas "relevantes"de PM_Z a fim de obter nossa solução final.

Exemplo 3.13. *Considere o sistema $Y' = AY$, onde $A = \begin{pmatrix} 15 & -16 & 8 \\ 10 & -10 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.*
Para achar a Forma Canônica de Jordan de A e encontrarmos a matriz P calcularemos o polinômio característico $p_A(\lambda)$, o polinômio minimal $m_A(\lambda)$ e a base de Jordan.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 15-\lambda & -16 & 8 \\ 10 & -10-\lambda & 5 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 2\lambda + 5)(\lambda - 5),$$

$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda + 5)(\lambda - 5)$ com raízes $\lambda_1 = 1+2i$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1-2i$ e $\lambda_3 = 5$, cada uma uma de multiplicidade 1. Portanto, λ_1, λ_2 e λ_3 são autovalores de A e correspondentemente o polinômio minimal é:

$$m_A(\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda + 5)(\lambda - 5).$$

Agora, calcularemos os autoespaços referente aos autovalores associados. Para o autovalor $\lambda_1 = 1 + 2i$, temos o autoespaço $E_{1+2i} = \ker(A - (1 + 2i)I)$ e tem como base

$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -2+2i \\ -1+2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, *consequentemente, pelo Lema* (3.10), *para o autovalor* $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1-2i$, *temos o autoespaço* $E_{1-2i} = \ker(A-(1-2i)I)$, *tem como base* $\left\{ v_2 = \overline{v_1} = \begin{pmatrix} -2-2i \\ -1-2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, *e para o autovalor* $\lambda_3 = 5$, *temos o autoespaço* $E_5 = \ker(A-5I)$ *e temos como base* $\left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Portanto a Forma Canônica de Jordan terá 3 blocos de Jordan de dimensão 1, *respectivamente, com autovalores* $\lambda_1 = 1+2i$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1-2i$ *e* $\lambda_3 = 5$.

$$J = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 & 0 \\ 0 & 1-2i & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Como encontramos as bases associadas aos autoespaços anteriormente, podemos definir a matriz P *como:*

$$P = \begin{pmatrix} -2+2i & -2-2i & 4 \\ -1+2i & -1-2i & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, $Z' = JZ$ *tem solução:*

$$Z = \begin{pmatrix} e^{(1+2i)x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \overline{f_1} \\ c_3 \end{pmatrix} = M_Z F = \begin{pmatrix} f_1 e^{(1+2i)x} \\ \overline{f_1 e^{(1+2i)x}} \\ c_3 e^{5x} \end{pmatrix}.$$

Ainda, $Y = PZ = PM_Z F$, *isto é,*

$$Y = \begin{pmatrix} -2+2i & -2-2i & 4 \\ -1+2i & -1-2i & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1+2i)x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \overline{f_1} \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
e^{(1+2i)x}\begin{pmatrix} -2+2i \\ -1+2i \\ 1 \end{pmatrix} &= e^{x}(\cos(2x)+i\sin(2x))\begin{pmatrix} -2+2i \\ -1+2i \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{x}(\cos(2x)-2\sin(2x)) \\ e^{x}(-\cos(2x)-2\sin(2x)) \\ e^{x}\cos(2x) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^{x}(2\cos(2x)-2\sin(2x)) \\ e^{x}(2\cos(2x)-2\sin(2x)) \\ e^{x}\sin(2x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

e de fato,

$$e^{5x}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{5x} \\ 3e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix},$$

então, substituindo as colunas relevantes de PM_Z, encontramos:

$$\begin{aligned}
Y &= \begin{pmatrix} e^{x}(\cos(2x)-2\sin(2x)) & e^{x}(2\cos(2x)-2\sin(2x)) & 4e^{5x} \\ e^{x}(-\cos(2x)-2\sin(2x)) & e^{x}(2\cos(2x)-2\sin(2x)) & 3e^{5x} \\ e^{x}\cos(2x) & e^{x}\sin(2x) & e^{5x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-2c_1+2c_2)e^{x}\cos(2x)+(-2c_1-2c_2)e^{x}\sin(2x)+4c_3e^{5x} \\ (-c_1+2c_2)e^{x}\cos(2x)+(-2_1-c_2)e^{x}\sin(2x)+3c_3e^{5x} \\ c_1e^{x}\cos(2x)+c_2e^{x}\sin(2x)+c_3e^{5x} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Sistemas não Homogêneos com Coeficientes Constantes

Nesta seção, mostraremos como resolver um sistema não homogêneo $Y' = AY+G(x)$, onde $G(x)$ é um vetor de funções. (Abreviaremos frequentemente $G(x)$ por G). Usaremos um método que é uma generalização direta do método que usamos para resolver os sistemas homogêneos na seção "Sistemas Homogêneos com Coeficientes Constantes".

Considere o sistema matricial $Y' = AY + G$. A estratégia que seguiremos ao longo desta seção será dada pelos seguintes passos:

Passo 1. Escreva $A = PJP^{-1}$ com J sendo a Forma Canônica de Jordan, então temos o sistema como:

$$\begin{aligned} Y' &= (PJP^{-1})Y + G \\ Y' &= PJ(P^{-1}Y) + G \\ P^{-1}Y' &= P^{-1}PJ(P^{-1}Y) + P^{-1}G \\ P^{-1}Y' &= J(P^{-1}Y) + P^{-1}G \\ (P^{-1}Y)' &= J(P^{-1}Y) + P^{-1}G \end{aligned}$$

(Observe que, uma vez que P^{-1} é uma matriz constante, temos que $(P^{-1}Y)' = P^{-1}Y'$.)

Passo 2. Defina $Z = P^{-1}Y$ e $H = P^{-1}G$, então este sistema torna-se:

$$Z' = JZ + H \ ,$$

e resolva este sistema para Z.

Passo 3. Como $Z = P^{-1}Y$, temos que:

$$Y = PZ$$

é a solução para nosso sistema original.

Examinando essa estratégia, observamos que a chave para desenvolver este método é ser capaz de resolver o Passo 2 e, novamente, isso é direto. Em cada bloco de Jordan, resolvemos de baixo para cima. Vamos focar nossa atenção em um único bloco $k \times k$. A equação para a última função z_k naquele bloco é uma equação diferencial de primeira ordem não homogênea envolvendo apenas z_k. A equação para à última função z_{k-1} naquele bloco é uma equação diferencial de primeira ordem não homogênea envolvendo apenas z_{k-1} e z_k, daí substituímos a solução de z_k para obter uma equação diferencial de primeira ordem não homogênea para z_{k-1} envolvendo apenas z_{k-1}, etc. Para desenvolver este método, devemos começar com algumas preliminares.

Para a matriz fixa A, dizemos que o sistema não homogêneo $Y' = AY + G(x)$ está associado ao sistema homogêneo $Y' = AY$. Pelo que fizemos anteriormente, sabemos como encontrar a solução geral de $Y' = AY$. Em primeiro lugar, veremos que, para encontrar a solução geral de $Y' = AY + G(x)$, basta encontrar uma única solução desse sistema.

Lema 3.14. *Seja Y_i qualquer solução de $Y' = AY + G(x)$. Se Y_h é qualquer solução do sistema homogêneo associado $Y' = AY$, então $Y_h + Y_i$ também é uma solução de $Y' = AY + G(x)$, e cada solução de $Y' = AY + G(x)$ é deste formato.*

Consequentemente, a solução geral de $Y' = AY + G(x)$ é dada por $Y = Y_h + Y_i$, onde Y_h denota a solução geral de $Y' = AY$.

Demonstração. Primeiro verificaremos que $Y = Y_h + Y_i$ é uma solução de $Y' = AY + G(x)$. Então calcularemos:

$$\begin{aligned} Y' = (Y_h + Y_i)' = Y_h' + Y_i' &= (AY_h) + (AY_i + G) \\ &= A(Y_h + Y_i) + G = AY + G \ , \end{aligned}$$

como queríamos.

Agora verificaremos que toda solução Y de $Y' = AY + G(x)$ é desta forma. Portanto, seja Y qualquer solução desse sistema não homogêneo. Certamente podemos escrever $Y = (Y - Y_i) + Y_i = Y_h + Y_i$ onde $Y_h = Y - Y_i$. Precisamos mostrar que Y_h definido dessa forma é de fato uma solução de $Y' = AY$. Novamente calculamos:

$$\begin{aligned} Y_h' = (Y - Y_i)' = Y' - Y_i' &= (AY + G) - (AY_i + G) \\ &= A(Y - Y_i) = AY_h, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Por convenção, chamaremos Y_i uma solução particular do sistema não homogêneo.

Agora vamos relembrar das técnicas utilizadas na primeira seção deste capítulo, e manter a notação anterior. O sistema homogêneo $Y' = AY$ tem solução geral $Y_h = PM_ZC$ onde C é um vetor de constantes arbitrárias. Vamos definir $N_Y = N_Y(x) = PM_Z(x)$ por conveniência, assim $Y_h = N_YC$. Então, $Y_h' = (N_YC)' = N_Y'C$, logo, substituindo na equação $Y' = AY$, obtemos a equação $N_Y'C = AN_YC$. Uma vez que esta equação deve ser válida para qualquer C, concluímos que:

$$N_Y' = AN_Y \ .$$

Usamos esse fato para escrever uma solução para $Y' = AY + G$. Verificaremos por calculo direto que a função que escrevemos é de fato uma solução. Essa verificação não é tão difícil quanto responder a pergunta de como resolver essa função, mas a explicação para isso envolve a matriz exponencial e por isso a adiamos para a seção seguinte. No entanto, assim que tivermos essa solução (não importa como a tenhamos criado), certamente estaremos livres para usá-la.

É conveniente introduzir a seguinte notação não padronizada. Para um vetor $H(x)$, deixamos $\int_0 H(x)dx$ denotar uma integral arbitrária fixa de $H(x)$. Em outras palavras, ao obter $\int_0 H(x)dx$, simplesmente ignoramos as constantes de integração. Isso é legítimo para o nosso propósito, já que pelo Lema (3.14) só precisamos encontrar uma única solução para um sistema não homogêneo, e não importa qual encontrarmos, qualquer uma servirá. Dito de outra forma, podemos "absorver" as constantes de integração na solução geral do sistema homogêneo associado.

Teorema 3.15. *A função* $Y_i = N_Y \int_0 N_Y^{-1} G\ dx$ *é uma solução do sistema* $Y' = AY + G$*.*

Demonstração. Para mostrar essa solução, simplesmente calculamos Y_i'. Então, temos:

$$\begin{aligned}
Y_i' &= \left(N_Y \int_0 N_Y^{-1} G\ dx\right)' \\
&\text{pela regra do produto} \\
&= N_Y' \int N_Y^{-1} G\ dx + N_Y \left(\int_0 N_Y^{-1} G\ dx\right)' \\
&\text{pela definição de integral} \\
&= N_Y' \int_0 N_Y^{-1} G\ dx + N_Y (N_Y^{-1} G) \\
&= N_Y' \int_0 N_Y^{-1} G\ dx + G \\
&\text{como } N_Y' = AN_Y \\
&= (AN_Y) \int_0 N_Y^{-1} G\ dx + G \\
&= A \left(N_Y \int_0 N_Y^{-1} G\ dx\right) + G \\
&= AY_i + G\ ,
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Agora faremos alguns exemplos: um sistema diagonalizável 2×2, um sistema não diagonalizável 2×2, um sistema diagonalizável 3×3 e um sistema 2×2 com polinômio característico tendo raízes complexas. Em todos esses exemplos, quando se trata de encontrar N_Y^{-1}, é conveniente usar o fato de que $N_Y^{-1} = (PM_Z)^{-1} = M_Z^{-1} P^{-1}$.

Exemplo 3.16. *Considere o sistema* $Y' = AY + G$ *onde* $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ *e* $G = \begin{pmatrix} 30e^{x} \\ 60e^{2x} \end{pmatrix}$.

Desenvolveremos a Forma Canônica de Jordan e encontraremos a matriz de mudança de base P, *para isso calcularemos o polinômio caracterísitco* $p_A(\lambda)$, *o polinômio minimal* $m_A(\lambda)$ *e por fim, para encontrar a base de Jordan calcularemos o núcleo dos operadores* $A - \lambda I$, *para cada autovalor* λ.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 5-\lambda & -7 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6,$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 2).$$

Portanto a Forma Canônica de Jordan terá 2 *blocos de Jordan de dimensão* 1 *com autovalores* 3 *e* -2:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como A *é diagonalizável, a base de Jordan será uma base de autovalores, e a matriz* P, *terá em suas colunas os autovetores encontrados:*

$$\ker(A - 3I) = \{(7x, 2x) : x \in \mathbb{R}^2\} = \{x\ (7,2) : x \in \mathbb{R}^2\} = [(7,2)],$$
$$\ker(A - 2I) = \{(y, y) : y \in \mathbb{R}^2\} = \{y\ (1,1) : y \in \mathbb{R}^2\} = [(1,1)],$$

então as bases associadas a J *são* $\{(7,2),(1,1)\}$. *Logo as matrizes* P *e* P^{-1} *respectivamente são:*

$$P = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ \text{e} \ P^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Com isso, M_Z *e* M_Z^{-1} *são respectivamente:*

$$M_Z = \begin{pmatrix} e^{3x} & 0 \\ 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} \ \text{e} \ M_Z^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-3x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix},$$

e $N_Y = PM_Z$, *então:*

$$N_Y^{-1}G = \begin{pmatrix} e^{-3x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{5}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30e^{x} \\ 60e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-2x} - 12e^{-x} \\ -12e^{3x} + 84e^{4x} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\int_0 N_Y^{-1}G = \begin{pmatrix} -3e^{-2x} + 12e^{-x} \\ -4e^{3x} + 21e^{4x} \end{pmatrix},$$

e,

$$Y_i = N_Y \int_0 N_Y^{-1}G = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3x} & 0 \\ 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3e^{-2x} + 12e^{-x} \\ -4e^{3x} + 21e^{4x} \end{pmatrix}.$$

Portanto, $Y_i = \begin{pmatrix} -25e^{x} + 105e^{2x} \\ -10e^{x} + 45e^{2x} \end{pmatrix}.$

Exemplo 3.17. *Considere o sistema* $Y' = AY + G$ *onde* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ *e* $G = \begin{pmatrix} 60e^{3x} \\ 72e^{5x} \end{pmatrix}$.

Pelo Exemplo (3.6) *sabemos que o polinômio característico* $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$, *o polinômio minimal* $m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, *a Forma Canônca de Jordan* $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, *a matriz de mudança de base* $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ *e sua inversa* $P^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, *e a matriz de função* $M_Z = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$ *e sua inversa* $M_Z^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2x} & -xe^{-2x} \\ 0 & e^{-2x} \end{pmatrix}$.

Como $N_Y = PM_Z$, *então:*

$$N_Y^{-1}G = \begin{pmatrix} e^{-2x} & -xe^{-2x} \\ 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60e^{3x} \\ 72e^{5x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18e^{3x} - 60xe^{x} + 36xe^{3x} \\ 60e^{x} - 36e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\int_0 N_Y^{-1}G = \begin{pmatrix} 60e^{x} - 60xe^{x} - 10e^{3x} + 12xe^{3x} \\ 60e^{x} - 12e^{3x} \end{pmatrix},$$

e,

$$Y_i = N_Y \int_0 N_Y^{-1}G = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60e^{x} - 60xe^{x} - 10e^{3x} + 12xe^{3x} \\ 60e^{x} - 12e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Logo, $Y_i = \begin{pmatrix} -60e^{3x} + 8e^{5x} \\ -240e^{3x} + 40e^{5x} \end{pmatrix}.$

Exemplo 3.18. *Considere o sistema* $Y' = AY + G$ *onde* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $G = \begin{pmatrix} e^x \\ 12e^{3x} \\ 20e^{4x} \end{pmatrix}$.

Desenvolveremos a Forma Canônica de Jordan e encontraremos a matriz de mudança de base P, *para isso calcularemos o polinômio caracterísitco* $p_A(\lambda)$, *o polinômio minimal* $m_A(\lambda)$ *e por fim, para encontrar a base de Jordan calcularemos o núcleo dos operadores* $A - \lambda I$, *para cada autovalor* λ.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & -3 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(-\lambda^2 + \lambda + 2),$$

$$m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

Portanto a Forma Canônica de Jordan terá 3 *blocos de Jordan de dimensão* 1 *com autovalores* -1, 0 *e* 2*:*

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como A *é diagonalizável, a base de Jordan será uma base de autovalores, e a matriz* P, *terá em suas colunas os autovetores encontrados:*

$$\begin{aligned} \ker(A + I) &= \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}^3\} = \{x\ (1, 0, 1) : x \in \mathbb{R}^3\} = [(1, 0, 1)], \\ \ker(A) &= \{(0, -z, z) : z \in \mathbb{R}^3\} = \{z\ (0, -1, 1) : x \in \mathbb{R}^3\} = [(0, -1, 1)], \\ \ker(A - 2I) &= \{(-z, -z, z) : z \in \mathbb{R}^3\} = \{z\ (-1, -1, 1) : x \in \mathbb{R}^3\} = [(-1, -1, 1)], \end{aligned}$$

então as bases associadas a J *são* $\{(1, 0, 1), (0, -1, 1), (-1, -1, 1)\}$. *Logo as matrizes* P *e* P^{-1} *respectivamente são:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ e\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com isso, M_Z e M_Z^{-1} respectivamente são:

$$M_Z = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \ \ e \ \ M_Z^{-1} = \begin{pmatrix} e^{x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2x} \end{pmatrix},$$

e $N_Y = PM_Z$, então:

$$N_Y^{-1}G = \begin{pmatrix} e^{x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{x} \\ 12e^{3x} \\ 20e^{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12e^{4x} + 20e^{5x} \\ e^{x} - 24e^{3x} - 20e^{4x} \\ -e^{-x} + 12e^{x} + 20e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\int_0 N_Y^{-1}G = \begin{pmatrix} 3e^{4x} + 4e^{5x} \\ e^{x} - 8e^{3x} - 5e^{4x} \\ e^{-x} + 12e^{x} + 10e^{2x} \end{pmatrix},$$

e,

$$Y_i = N_Y \int_0 N_Y^{-1}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{4x} + 4e^{5x} \\ e^{x} - 8e^{3x} - 5e^{4x} \\ e^{-x} + 12e^{x} + 10e^{2x} \end{pmatrix}$$

Portanto, $Y_i = \begin{pmatrix} -e^{x} - 9e^{3x} - 6e^{4x} \\ -2e^{x} - 4e^{3x} - 5e^{4x} \\ 2e^{x} + 7e^{3x} + 9e^{4x} \end{pmatrix}.$

Exemplo 3.19. *Considere o sistema $Y' = AY + G$ onde $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $G = \begin{pmatrix} 200 \\ 160e^{x} \end{pmatrix}$.*

Pelo Exemplo (3.11) sabemos que o polinômio característico $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 25$, o polinômio minimal $m_A(\lambda) = (\lambda - (3+4i))(\lambda - (3-4i))$, a Forma Canônca de Jordan $J = \begin{pmatrix} 3+4i & 0 \\ 0 & 3-4i \end{pmatrix}$, a matriz de mudança de base $P = \begin{pmatrix} -1+4i & -1-4i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e sua inversa $P^{-1} = \left(\frac{1}{8i}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1+4i \\ -1 & -1+4i \end{pmatrix}$, e a matriz de função $M_Z = \begin{pmatrix} e^{(3+4i)x} & 0 \\ 0 & e^{(3-4i)x} \end{pmatrix}$ e sua inversa $M_Z^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-(3+4i)x} & 0 \\ 0 & e^{-(3-4i)x} \end{pmatrix}$.

Como $N_Y = PM_Z$*, então:*

$$N_Y^{-1}G = \begin{pmatrix} e^{-(3+4i)x} & 0 \\ 0 & e^{-(3-4i)x} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{8i}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1+4i \\ -1 & -1+4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 160e^x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -25ie^{-(3+4i)x} + 20(4-i)e^{(-2-4i)x} \\ 25ie^{-(3-4i)x} + 20(4+i)e^{(-2+4i)x} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\int_0 N_Y^{-1}G = \begin{pmatrix} (4+3i)e^{(-3-4i)x} + (-4+18i)e^{-2-4i)x} \\ (4-3i)e^{(-3+4i)x} + (-4-18i)e^{-2+4i)x} \end{pmatrix},$$

e,

$$Y_i = N_Y \int_0 N_Y^{-1}G$$
$$= \begin{pmatrix} -1+4i & -1-4i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(3+4i)x} & 0 \\ 0 & e^{(3-4i)x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (4+3i)e^{(-3-4i)x} + (-4+18i)e^{-2-4i)x} \\ (4-3i)e^{(-3+4i)x} + (-4-18i)e^{-2+4i)x} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1+4i & -1-4i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (4+3i) + (-4+18i)e^x \\ (4-3i) + (-4-18i)e^x \end{pmatrix}$$

Assim, $Y_i = \begin{pmatrix} -32 - 136e^x \\ 8 - 8e^x \end{pmatrix}$.

Observe que nesse último exemplo poderíamos fazer os cálculos com números complexos diretamente, ou seja, sem ter que converter exponencial complexa em termos reais.

Exemplo 3.20. *Considere o problema de valor inicial* $Y' = AY + G$*,* $Y(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}$*, onde* $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ *e* $G = \begin{pmatrix} 30e^x \\ 60e^{2x} \end{pmatrix}$.

Primeiro calcularemos a solução geral do sistema homogêneo associado utilizando o método da primeira seção (Sistemas Homogêneos com Coeficientes Constantes) deste capítulo.

Para isso, encontraremos o polinômio característico $p_A(\lambda)$*, o polinômio minimal* $m_A(\lambda)$*, a Forma Canônica de Jordan* J *e a matriz de mudança de base* P*.*

$$p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 5-\lambda & -7 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6,$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 2),$$
$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cálculo dos autoespaços associados aos autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$:

$$\ker(A - 3I) = \{(7y, 2y) : y \in \mathbb{R}^2\} = \{y(7,2) : y \in \mathbb{R}^2\} = [(7,2)],$$
$$\ker(A + 2I) = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1,1) : x \in \mathbb{R}^2\} = [(1,1)],$$

Logo,$P = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Então $Z' = JZ$ tem como solução:

$$Z = M_Z C = \begin{pmatrix} e^{3x} & 0 \\ 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{3x} \\ c_2 e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

E o sistema homogêneo tem como solução geral:

$$\begin{aligned} Y_h = PZ = PM_Z C &= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3x} & 0 \\ 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7e^{3x} & e^{-2x} \\ 2e^{3x} & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} \\ 2c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pelo Exemplo (3.16) *temos que a solução original do sistema tem como solução particular:*

$$Y_i = \begin{pmatrix} -25e^{x} + 105e^{2x} \\ -10e^{x} + 45e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Portanto, nosso sistema tem como solução geral:

$$\begin{aligned} Y = Y_h + Y_i &= \begin{pmatrix} 7c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} \\ 2c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25e^{x} + 105e^{2x} \\ -10e^{x} + 45e^{2x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - 25e^{x} + 105e^{2x} \\ 2c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - 10e^{x} + 45e^{2x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por fim, aplicamos a condição inicial para obter o sistema linear:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 7c_1 + c_2 + 80 \\ 2c_1 + c_2 + 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix},$$

com solução $c_1 = -11$ e $c_2 = 4$. Substituindo, encontramos a solução para nosso problema de valor inicial:

$$Y = \begin{pmatrix} -77e^{3x} + 4e^{-2x} - 25e^{x} + 105e^{2x} \\ -22e^{3x} + 4e^{-2x} - 10e^{x} + 45e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Matrizes Exponenciais

Nesta seção, discutiremos a matriz exponencial e seu uso na resolução de sistemas $Y' = AY$. Nossa primeira tarefa é perguntar qual o meio de definir uma matriz exponencial. Para responder isso, somos guiados por exponenciais comuns. Lembre-se de que, para qualquer número complexo z, a exponencial e^z é dada por:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ...$$

Com isso em mente, definimos a matriz exponencial da seguinte maneira.

Definição 3.21. *Seja T uma matriz quadrada. Então, a matriz exponencial e^T é definida por:*

$$e^T = I + T + \frac{1}{2!}T^2 + \frac{1}{3!}T^3 + \frac{1}{4!}T^4 + ...$$

Note que essa definição faz sentido, já que essa série sempre converge.

Lembre-se de que a equação diferencial $y' = ay$ tem a solução $y = ce^{ax}$. A situação para $Y' = AY$ é muito análoga. Note que usamos Γ em vez de C para denotar um vetor de constantes por razões que ficarão claras um pouco mais tarde. Observe que Γ está à direita na equação que apareçe no Teorema (3.22) abaixo, uma consequência do fato de que a multiplicação da matriz não é comutativa.

Teorema 3.22. *(1) Seja A uma matriz quadrada. Então a solução geral de $Y' = AY$ é dado por $Y = e^{Ax}\Gamma$ onde Γ é um vetor de constantes arbitrárias.*

(2) O problema de valor inicial $Y' = AY$, $Y(0) = Y_0$ tem solução $Y = e^{Ax}Y_0$.

Demonstração. (1) Primeiro calcularemos e^{Ax}. Para fazer isso, observe que $(Ax)^2 = (Ax)(Ax) = (AA)(xx) = A^2x^2$ visto que a multiplicação de matriz comuta com multiplicação escalar, e $(Ax)^3 = (Ax)^2(Ax) = (A^2x^2)(Ax) = (A^2A)(x^2x) = A^3x^3$, e da mesma forma, $(Ax)^k = A^k x^k$ para qualquer k. Então, substituindo na Definição (3.21), temos que:

$$Y = e^{Ax}\Gamma = \left(I + Ax + \frac{1}{2!}A^2x^2 + \frac{1}{3!}A^3x^3 + \frac{1}{4!}A^4x^4 + ...\right)\Gamma.$$

Para encontrar Y', podemos diferenciar essa série termo por termo. Lembrando que A e Γ são matrizes constantes, vemos que:

$$\begin{aligned} Y' &= \left(A + \frac{1}{2!}A^2(2x) + \frac{1}{3!}A^3(3x^2) + \frac{1}{4!}A^4(4x^3) + ...\right)\Gamma \\ &= \left(A + A^2x + \frac{1}{2!}A^3x^2 + \frac{1}{3!}A^4x^3 + ...\right)\Gamma \\ &= A\left(I + Ax + \frac{1}{2!}A^2x^2 + \frac{1}{3!}A^3x^3 + ...\right)\Gamma \\ &= A(e^{Ax}\Gamma) = AY, \end{aligned}$$

como queríamos.

(2) Por (1) sabemos que $Y' = AY$ tem solução $Y = e^{Ax}\Gamma$. Usaremos a condição inicial para resolver para Γ. Tomando $x = 0$, temos:

$$Y_0 = Y(0) = e^{A0}\Gamma = e^0\Gamma = I\Gamma = \Gamma,$$

onde e^0 significa a exponencial da matriz zero, e o valor disso é a matriz identidade I, como na Definição (3.21)). Então $T = Y_0$ e $Y = e^{Ax}\Gamma = e^{Ax}Y_0$.

$\square$

No restante desta seção, veremos como traduzir a solução teórica de $Y' = AY$ dada pelo Teorema (3.22) em uma prática. Para manter nossa notação simples, manteremos casos 2 x 2 ou 3 x 3, mas o princípio é o mesmo, independentemente do tamanho da matriz.

Lema 3.23. *Se J é uma matriz diagonal,*

$$J = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix},$$

então e^{Jx} é a matriz diagonal:

$$e^{Jx} = \begin{pmatrix} e^{d_1x} & & & \\ & e^{d_2x} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & e^{d_nx} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Suponha que J é 2 x 2,

$$J = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Então podemos facilmente calcular $J^2 = \begin{pmatrix} {d_1}^2 & 0 \\ 0 & {d_2}^2 \end{pmatrix}$, $J^3 = \begin{pmatrix} {d_1}^3 & 0 \\ 0 & {d_2}^3 \end{pmatrix}$, e da mesma forma, $J^k = \begin{pmatrix} {d_1}^k & 0 \\ 0 & {d_2}^k \end{pmatrix}$ para qualquer k.

Então, como na demonstração do Teorema (3.22),

$$\begin{aligned} e^{Jx} &= I + Jx + \frac{1}{2!}J^2x^2 + \frac{1}{3!}J^3x^3 + \frac{1}{4!}J^4x^4 + ... \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} {d_1}^2 & 0 \\ 0 & {d_2}^2 \end{pmatrix} x^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} {d_1}^3 & 0 \\ 0 & {d_2}^3 \end{pmatrix} x^3 + ... \\ &= \begin{pmatrix} 1 + d_1x + \frac{1}{2!}(d_1x)^2 + \frac{1}{3!}(d_1x)^3 + ... & 0 \\ 0 & 1 + d_2x + \frac{1}{2!}(d_2x)^2 + \frac{1}{3!}(d_2x)^3 + ... \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{d_1x} & 0 \\ 0 & e^{d_2x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.24. *Queremos encontrar a solução geral de $Y' = JY$ onde:*

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para fazer isso, aplicamos diretamente o Teorema (3.22) *e o Lema* (3.23). *A solução é dada por:*

$$Y = e^{Jx}\Gamma = \begin{pmatrix} e^{3x} & 0 \\ 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 e^{3x} \\ \gamma_2 e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Agora suponha que queiramos encontrar a solução geral de $Y' = AY$ *onde* $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. *Ainda podemos aplicar o Teorema* (3.22) *para concluir que a solução é* $Y = e^{Ax}\Gamma$. *Novamente tentaremos calcular* e^{Ax}. *Agora encontramos:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 41 & -49 \\ 14 & -22 \end{pmatrix}, \ldots$$

então:

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 41 & -49 \\ 14 & -22 \end{pmatrix} x^3 + \ldots$$

Lema 3.25. *Sejam* S *e* T *matrizes quaisquer. Suponha que:*

$$S = PTP^{-1},$$

para alguma matriz inversível P. *Então:*

$$S^k = PT^kP^{-1} \quad \textit{para cada} \quad k$$

e

$$e^S = Pe^TP^{-1}.$$

Demonstração. Simplesmente calcularemos:

$$\begin{aligned}
S^2 &= SS = (PTP^{-1})(PTP^{-1}) = PT(P^{-1}P)TP^{-1} = PTITP^{-1} = PTTP^{-1} = PT^2P^{-1}, \\
S^3 &= S^2S = (PT^2P^{-1})(PTP^{-1}) = PT^2(P^{-1}P)TP^{-1} = PT^2ITP^{-1} = PT^2TP^{-1} = PT^3P^{-1}, \\
S^4 &= S^3S = (PT^3P^{-1})(PTP^{-1}) = PT^3(P^{-1}P)TP^{-1} = PT^3ITP^{-1} = PT^3TP^{-1} = PT^4P^{-1}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
e^S &= I + S + \frac{1}{2!}S^2 + \frac{1}{3!}S^3\frac{1}{4!}S^4 + \ldots \\
&= PIP^{-1} + PTP^{-1} + \frac{1}{2!}PT^2P^{-1} + \frac{1}{3!}PT^3P^{-1}\frac{1}{4!}PT^4P^{-1} + \ldots \\
&= P\left(I + T + \frac{1}{2!}T^2 + \frac{1}{3!}T^3 + \frac{1}{4!}T^4 + \ldots\right)P^{-1} \\
&= Pe^TP^{-1},
\end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Exemplo 3.26. *Queremos encontrar a solução geral de $Y' = AY$ onde:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Para isso, calcularemos o polinômio característico $p_A(\lambda)$ e o polinômio minimal $m_A(\lambda)$ para encontrar a Forma Canônica de Jordan J.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 5-\lambda & -7 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6,$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 2),$$

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Agora calcularemos os autoespaços associados aos autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$ para encontrar a matriz de mudança de base P:

$$\ker(A - 3I) = \{(7x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(7,2) : x \in \mathbb{R}\} = [(7,2)],$$

$$\ker(A + 2I) = \{(y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(1,1) : y \in \mathbb{R}\} = [(1,1)],$$

Então $P = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $P^{-1} = \left(\dfrac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$

Pelo lema (3.25), temos que:

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= Pe^{Jx}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3x} & 0 \\ 0 & e^{-2x} \end{pmatrix}\left(\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7e^{3x} & e^{-2x} \\ 2e^{3x} & e^{-2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ -2/5 & 7/5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (7/5)e^{3x} - (2/5)e^{-2x} & (-7/5)e^{3x} + (7/5)e^{-2x} \\ (2/5)e^{3x} - (2/5)e^{-2x} & (-2/5)e^{3x} + (7/5)e^{-2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Y = e^{Ax}\Gamma &= \begin{pmatrix} (7/5)e^{3x} - (2/5)e^{-2x} & (-7/5)e^{3x} + (7/5)e^{-2x} \\ (2/5)e^{3x} - (2/5)e^{-2x} & (-2/5)e^{3x} + (7/5)e^{-2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ((7/5)\gamma_1 - (7/5)\gamma_2)e^{3x} + ((-2/5)\gamma_1 + (7/5)\gamma_2)e^{-2x} \\ ((2/5)\gamma_1 - (2/5)\gamma_2)e^{3x} + (-2/5)\gamma_1 + (7/5)\gamma_2)e^{-2x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.27. *Queremos encontrar a solução geral de $Y' = AY$ onde:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para isso, calcularemos o polinômio característico $p_A(\lambda)$ e o polinômio minimal $m_A(\lambda)$ para encontrar a Forma Canônica de Jordan J.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & -3 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(-\lambda^2 + \lambda + 2),$$

$$m_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-2),$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Agora calcularemos os autoespaços associados aos autovalores $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 2$ para encontrar a matriz de mudança de base P:

$$\begin{aligned} \ker(A+I) &= \{(x,0,x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,1) : x \in \mathbb{R}\} = [(1,0,1)], \\ \ker(A) &= \{(0,-y,y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(0,-1,1) : y \in \mathbb{R}\} = [(0,-1,1)], \\ \ker(A-2I) &= \{(-z,-z,z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-1,-1,1) : x \in \mathbb{R}\} = [(-1,-1,1)]. \end{aligned}$$

Então, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Pelo Lema (3.25), temos que:

$$\begin{aligned}
e^{Ax} &= Pe^{Jx}P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & -e^{2x} \\ 0 & -1 & -e^{2x} \\ e^{-x} & 1 & e\ 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} - e^{2x} & e^{-x} - e^{2x} \\ -1 + e^{2x} & 2 - e^{2x} & 1 - e^{2x} \\ 1 - e^{2x} & e^{-x} - 2 + e^{2x} & e^{-x} - 1 + e^{2x} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Y = e^{Ax}\Gamma &= \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} - e^{2x} & e^{-x} - e^{2x} \\ -1 + e^{2x} & 2 - e^{2x} & 1 - e^{2x} \\ 1 - e^{2x} & e^{-x} - 2 + e^{2x} & e^{-x} - 1 + e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\gamma_2 + \gamma_3)e^{-x} + (\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3)e^{2x} \\ (-\gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3) + (\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3)e^{2x} \\ (\gamma_2 + \gamma_3)e^{-x} + (\gamma_1 - 2\gamma_2 - \gamma_3) + (-\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)e^{2x} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Agora suponha que queiramos resolver o problema de valor inicial $Y' = AY$, $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Então:*

$$\begin{aligned}
Y &= e^{Ax}Y(0) \\
&= \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} - e^{2x} & e^{-x} - e^{2x} \\ -1 + e^{2x} & 2 - e^{2x} & 1 - e^{2x} \\ 1 - e^{2x} & e^{-x} - 2 + e^{2x} & e^{-x} - 1 + e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -1 + e^{2x} \\ 1 - e^{2x} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Observação 3.28. *Vamos comparar os resultados do nosso método desta seção com o do método apresentado na primeira seção deste capítulo (Sistemas Homogêneos com Coeficientes Constantes) . No caso do Exemplo* (3.26)*, o método anterior fornece a solução:*

$$\begin{aligned} Y &= P\begin{pmatrix} e^{3x} & 0 \\ 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} C \\ &= Pe^{Jx}C, \end{aligned}$$

onde $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$*, enquanto o método desta seção nos dá:*

$$Y = Pe^{Jx}P^{-1}\Gamma.$$

Mas observe que essas respostas são realmente as mesmas! Basta apenas definirmos $C = P^{-1}\Gamma$*, já que* $P^{-1}\Gamma$ *é uma matriz constante.*

Da mesma forma, no caso do Exemplo (3.27)*, o método anterior fornece a solução:*

$$\begin{aligned} Y &= P\begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} C \\ &= Pe^{Jx}, \end{aligned}$$

onde $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$*, enquanto nosso método dessa seção define:*

$$Y = Pe^{Jx}P^{-1}\Gamma.$$

e novamente, definindo $C = P^{-1}\Gamma$*, vemos que as soluções são as mesmas.*

Portanto, o ponto aqui não é o fato da matriz exponencial permitir resolver novos problemas, mas sim que ela dê um novo ponto de vista sobre as soluções que já obtivemos.

Embora esses dois métodos sejam, em princípio, os mesmos, podemos perguntar qual é preferível na prática. A este respeito, vemos que o método anterior é melhor, pois o uso da matriz exponencial exige que encontremos P^{-1}*, o que pode ser uma quantidade considerável de trabalho. No entanto, essa vantagem é (parcialmente) negada se quisermos* *resolver problemas de valor inicial, pois o método da matriz exponencial nos dá imediatamente as constantes desconhecidas* Γ, *como* $\Gamma = Y(0)$, *enquanto no primeiro método devemos resolver um sistema linear para obter as constantes desconhecidas* C.

Passando agora para o caso não diagonalizável. Suponha que $Z' = JZ$ *onde* J *é uma matriz que consiste em um único bloco Jordan. Então, pelo Teorema* (3.22), *isso tem a solução* $Z = e^{Jx}\Gamma$. *Por outro lado, no Teorema* (3.1) *já vimos que esse sistema tem solução* $Z = M_Z C$. *Nesse caso, simplesmente temos* $C = \Gamma$, *então devemos ter* $e^{Jx} = M_Z$. *Vejamos que isso é verdade calculando* e^{Jx} *diretamente.*

Teorema 3.29. *Seja* J *um bloco de Jordan* k *x* k *com autovalor* a*:*

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 & & & & \\ & a & 1 & & 0 & \\ & & a & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & a & 1 \\ & & & & & a \end{pmatrix}.$$

Então:

$$e^{Jx} = e^{ax}\begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2! & x^3/3! & \cdots & x^{k-1}/(k-1)! \\ 0 & 1 & x & x^2/2! & \cdots & x^{k-2}/(k-2)! \\ & & 1 & x & \cdots & x^{k-3}/(k-3)! \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & x \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Primeiro suponha que J é um bloco de Jordan 2 x 2:

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

então $J^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, $J^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$, $J^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$, ...

Assim:

$$e^{Jx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} x + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} x^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} x^3$$
$$+ \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix} x^4 + ...$$
$$= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ 0 & m_{22} \end{pmatrix},$$

e vimos que:

$$m_{11} = m_{22} = 1 + ax + \frac{1}{2!}(ax)^2 + \frac{1}{3!}(ax)^3 + \frac{1}{4!}(ax)^4 + \frac{1}{5!}(ax)^5 + ...$$
$$= e^{ax},$$

e

$$m_{12} = x + ax^2 + \frac{1}{2!}a^2x^3 + \frac{1}{3!}a^3x^4 + \frac{1}{4!}a^4x^5 + ...$$
$$= x(1 + ax + \frac{1}{2!}(ax)^2 + \frac{1}{3!}(ax)^3 + \frac{1}{4!}(ax)^4 + ...) = xe^{ax}$$

e assim concluímos que:

$$e^{Jx} = \begin{pmatrix} e^{ax} & xe^{ax} \\ 0 & a^{ax} \end{pmatrix} = e^{ax}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora suponha que J é um bloco de Jordan 3 x 3:

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

então $J^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$, $J^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$, $J^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 & 6a^2 \\ 0 & a^4 & 4a^3 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix}$,
$J^5 = \begin{pmatrix} a^5 & 5a^4 & 10a^3 \\ 0 & a^5 & 5a^4 \\ 0 & 0 & a^5 \end{pmatrix}$,...

Assim:

$$e^{Jx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} x + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} x^2 + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} x^3$$

$$+ \frac{1}{4!} \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 & 6a^2 \\ 0 & a^4 & 4a^3 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix} x^4 + \frac{1}{5!} \begin{pmatrix} a^5 & 5a^4 & 10a^3 \\ 0 & a^5 & 5a^4 \\ 0 & 0 & a^5 \end{pmatrix} x^5 + ...$$

$$= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix},$$

e vimos que:

$$\begin{aligned} m_{11} = m_{22} = m_{33} &= 1 + ax + \frac{1}{2!}(ax)^2 + \frac{1}{3!}(ax)^3 + \frac{1}{4!}(ax)^4 + \frac{1}{5!}(ax)^5 + ... \\ &= e^{ax}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} m_{12} = m_{23} &= x + ax^2 + \frac{1}{2!}a^2x^3 + \frac{1}{3!}a^3x^4 + \frac{1}{4!}a^4x^5 + .. \\ &= xe^{ax} \end{aligned}$$

como vimos no caso 2 x 2. Finalmente:

$$\begin{aligned} m_{13} &= \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{2!}ax^3 + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2!}a^2x^4\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3!}a^3x^5\right) + ... \\ &= \frac{1}{2!}x^2\left(1 + ax + \frac{1}{2!}(ax)^2 + \frac{1}{3!}(ax)^3 + ...\right) \\ &= \frac{1}{2!}x^2e^{ax}, \end{aligned}$$

então:

$$e^{Jx} = \begin{pmatrix} e^{ax} & xe^{ax} & (1/2!)x^2e^{ax} \\ 0 & e^{ax} & xe^{ax} \\ 0 & 0 & e^{ax} \end{pmatrix} = e^{ax} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2! \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e do mesmo raciocínio, para maiores blocos de Jordan. □

Vamos ver como aplicar esse teorema em alguns exemplos.

Exemplo 3.30. *Considere o sistema* $Y' = AY$ *onde* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *e o problema de valor inicial* $Y' = AY$, $Y(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 32 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Queremos encontar a solução para esse problema. Para isso, calcularemos o polinômio característico $p_A(\lambda)$ *e o polinômio minimal* $m_A(\lambda)$ *para encontrar a Forma Canônica de Jordan* J.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3,$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-3).$$

Então a Forma Canônica de Jordan J *será:*

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Agora encontraremos a matriz de mudança de base P. *Para isso, calcularemos os autoespaços associados aos autovalores* $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$ *e* $\lambda_3 = 3$.

$$\ker(A+I)^2 = \{(x,-2x,z) : x, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-2,0), z(0,0,1) : x, z \in \mathbb{R}\} = [(1,-2,0),(0,0,1)],$$
$$\ker(A+I) = \{(z,-2z,-z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(1,-2,-1) : z \in \mathbb{R}\} = [(1,-2,-1)],$$
$$\ker(A-3I) = \{(-5y,-6y,y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(-6,-5,1) : y \in \mathbb{R}\} = [(-5,-6,1)].$$

Como a matriz A *é não diagonalizável e de dimensão* 3, *devemos escolher um vetor de* $\ker(A+I)^2$ *que não esteja em* $\ker(A+I)$. *Analisando, podemos observar que qualquer um dos vetores de* $\ker(A+I)^2$ *pode ser utilizado. Escolhemos por conveniência o vetor* $v = (0,0,1)$, *o outro vetor será* $(A+I)v = (1,-2,-1)$ *e o terceiro vetor está em* $\ker(A-3I)$, *digamos* $v = (-5,-6,1)$.

Portanto, a matriz de mudança de base P *será:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e sua inversa P^{-1} será:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3/8 & -5/16 & 0 \\ 1/2 & -1/4 & 1 \\ -1/8 & -1/16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} Y =& Pe^{Jx}P^{-1} \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/8 & -5/16 & 0 \\ 1/2 & -1/4 & 1 \\ -1/8 & -1/16 & 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & 5e^{3x} \\ -2e^{-x} & -2xe^{-x} & 6e^{3x} \\ -e^{-x} & -xe^{-x}+e^{-x} & e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/8 & -5/16 & 0 \\ 1/2 & -1/4 & 1 \\ -1/8 & -1/16 & 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} (3/8)e^{-x}+(1/2)xe^{-x}+(5/8)e^{3x} & (-5/16)e^{-x}-(1/4)xe^{-x}+(5/16)e^{3x} & xe^{-x} \\ (-3/4)e^{-x}-xe^{-x}-(3/4)e^{3x} & (5/8)e^{-x}+(1/2)xe^{-x}-(3/8)e^{3x} & -2xe^{-x} \\ (1/8)e^{-x}-(1/2)xe^{-x}-(1/8)e^{3x} & (1/16)e^{-x}+(1/4)xe^{-x}-(1/16)e^{3x} & e^{-x}-xe^{-x} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} Y =& e^{Ax}\Gamma \\ =& \begin{pmatrix} (3/8)e^{-x}+(1/2)xe^{-x}+(5/8)e^{3x} & (-5/16)e^{-x}-(1/4)xe^{-x}+(5/16)e^{3x} & xe^{-x} \\ (-3/4)e^{-x}-xe^{-x}-(3/4)e^{3x} & (5/8)e^{-x}+(1/2)xe^{-x}-(3/8)e^{3x} & -2xe^{-x} \\ (1/8)e^{-x}-(1/2)xe^{-x}-(1/8)e^{3x} & (1/16)e^{-x}+(1/4)xe^{-x}-(1/16)e^{3x} & e^{-x}-xe^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} ((3/8)\gamma_1-(5/16)\gamma_2)e^{-x}+((1/2)\gamma_1-(1/4)\gamma_2+\gamma_3)xe^{-x}+((5/8)\gamma_1+(5/16)\gamma_2)e^{3x} \\ ((-3/4)\gamma_1+(5/8)\gamma_2)e^{-x}+(-\gamma_1+(1/2)\gamma_2-2\gamma_3)xe^{-x}+((-3/4)\gamma_1-(3/8)\gamma_2)e^{3x} \\ ((1/8)\gamma_1+(1/16)\gamma_2+\gamma_3)e^{-x}+((-1/2)\gamma_1+(1/4)\gamma_2-\gamma_3)xe^{-x}+((-1/8)\gamma_1-(1/16)\gamma_2)e^{3x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O problema de valor inicial tem solução:

$$\begin{aligned} Y =& e^{Ax}Y_0 \\ =& \begin{pmatrix} (3/8)e^{-x}+(1/2)xe^{-x}+(5/8)e^{3x} & (-5/16)e^{-x}-(1/4)xe^{-x}+(5/16)e^{3x} & xe^{-x} \\ (-3/4)e^{-x}-xe^{-x}-(3/4)e^{3x} & (5/8)e^{-x}+(1/2)xe^{-x}-(3/8)e^{3x} & -2xe^{-x} \\ (1/8)e^{-x}-(1/2)xe^{-x}-(1/8)e^{3x} & (1/16)e^{-x}+(1/4)xe^{-x}-(1/16)e^{3x} & e^{-x}-xe^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 32 \\ 5 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} -e^{-x}+xe^{-x}+15e^{3x} \\ 14e^{-x}-2xe^{-x}-18e^{3x} \\ 8e^{-x}-xe^{-x}-3e^{3x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Agora resolveremos um sistema $Y' = AY$, onde a matriz A tem autovalores complexos.

Exemplo 3.31. *Considere o sistema* $Y' = AY$ *onde* $a = \begin{pmatrix} 2 & -17 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Pelo Exemplo (3.11) *temos que:*

$$P = \begin{pmatrix} -1+4i & -1-4i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad J = \begin{pmatrix} 3+4i & 0 \\ 0 & 3-4i \end{pmatrix}.$$

Para resolver esse sistema utilizando o método desta seção precisamos encontrar a matriz P^{-1}*:*

$$P^{-1} = \left(\frac{1}{8i}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1+4i \\ -1 & -1+4i \end{pmatrix}.$$

Então:

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= Pe^{Jx}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1+4i & -1-4i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(3+4i)x} & 0 \\ 0 & e^{(3-4i)x} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{8i}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1+4i \\ -1 & -1+4i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} m_{11} &= \left(\frac{1}{8i}\right)((-1+4i)e^{3+4i)x} + (-1-4i)e^{(3-4i)x}) \\ &= \left(\frac{1}{8i}\right)((-1+4i)e^{3x}(\cos(4x) + i\sin(4x)) - (-1-4i)e^{3x}(\cos(4x) - i\sin(4x)) \\ &= \left(\frac{1}{8i}\right)(ie^{3x}(4\cos(4x) - \sin(4x))(2)) = e^{3x}\left(\cos(4x) - \left(\frac{1}{4}\right)\sin(4x)\right), \\ m_{12} &= \left(\frac{1}{8i}\right)((-1+4i)(1+4i)e^{3+4i)x} + (-1-4i)(-1+4i)e^{(3-4i)x}) \\ &= \left(\frac{1}{8i}\right)(ie^{3x}(-17\sin(4x))(2)) = e^{3x}\left(\left(\frac{-17}{4}\right)\sin(4x)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{21} &= \left(\frac{1}{8i}\right)(e^{(3+4i)x} - e^{(3-4i)x}) = \left(\frac{1}{8i}\right)(ie^{3x}(\sin(4x))(2)) = e^{3x}\left(\left(\frac{1}{4}\right)\sin(4x)\right),\\
m_{22} &= \left(\frac{1}{8i}\right)((1+4i)e^{3+4i)x} + (-1+4i)e^{(3-4i)x})\\
&= \left(\frac{1}{8i}\right)((1+4i)e^{3x}(\cos(4x) + i\sin(4x)) - (-1+4i)e^{3x}(\cos(4x) - i\sin(4x))\\
&= \left(\frac{1}{8i}\right)(ie^{3x}(4\cos(4x) - \sin(4x))(2)) = e^{3x}\left(\cos(4x) + \left(\frac{1}{4}\right)\sin(4x)\right).
\end{aligned}$$

Então:

$$e^{Ax} = e^{3x}\begin{pmatrix} \cos(4x) - (1/4)\sin(4x) & (-17/4)\sin(4x) \\ (1/4)\sin(4x) & \cos(4x) + (1/4)\sin(4x) \end{pmatrix}$$

e

$$Y = e^{Ax}\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 e^{3x}\cos(4x) + ((-1/4)\gamma_1 + (-17/4)\gamma_2)\sin(4x) \\ \gamma_2 e^{3x}\cos(4x) + ((1/4)\gamma_1 + (1/4)\gamma_2)e^{3x}\sin(4x) \end{pmatrix}.$$

Observação 3.32. *Como vimos, para uma matriz J na Forma Canônica de Jordan, $e^{Jx} = M_Z$, na notação da seção Sistemas Homogêneos com Coeficientes Constantes. Mas também na notação da seção Sistemas Homogêneos com Coeficientes Constantes, se $A = PJP^{-1}$, então $e^{Ax} = Pe^{Jx}P^{-1} = PM_ZP^{-1} = M_Y$.*

Observação 3.33. *Agora vamos ver como usar a matriz exponencial para resolver um sistema não homogêneo $Y' = AY + G(x)$. Visto que já sabemos como resolver sistemas homogêneos, só precisamos, pelo Lema* (3.14)*, encontrar uma solução (única) particular Y_i desse sistema não homogêneo, e é isso que faremos. Usaremos novamente a notação da seção Sistemas Não Homogêneos com Coeficientes Constantes, de que $\int_0 H(x)dx$ denota uma integral arbitrária (mas fixa) de $H(x)$.*

Assim, considere $Y' = AY + G(x)$. Então, procedendo analogamente quanto a um sistema ordinário de uma equação diferencial linear ordinária de primeira ordem, temos:

$$\begin{aligned}
Y' &= AY + G(x)\\
Y' - AY &= G(x),
\end{aligned}$$

e, multiplicando essa equação pelo fator integrante e^{-Ax}, obtemos:

$$\begin{aligned}
e^{-Ax}(Y' - AY) &= e^{-Ax}G(x)\\
(e^{-Ax}Y)' &= e^{-Ax}G(x),
\end{aligned}$$

com solução:

$$\begin{aligned} e^{-Ax}Y_i &= \int_0 e^{-Ax}G(x)\ dx \\ Y_i &= e^{Ax}\int_0 e^{-Ax}G(x)\ dx. \end{aligned}$$

Vamos comparar isso com a solução que encontramos ao usar o Teorema (3.15). *Pela Observação* (3.32)*, podemos reescrever esta solução como* $Y_i = M_Y \int_0 M_Y^{-1}G(x)$. *Isso é bem parecido com o que tínhamos no teorema* (3.15). *Lá tivemos a solução* $Y_i = N_Y \int_0 N_Y^{-1}G(x)$*, onde* $N_Y = PM_Z$. *Mas essas soluções são as mesmas, como* $M_Y = PM_ZP^{-1} = N_YP^{-1}$. *Então* $M_Y^{-1} = PM_Z^{-1}$ *e* $N_Y^{-1} = M_Z^{-1}P^{-1}$*, então* $M_Y^{-1} = PN_Y^{-1}$. *Substituindo, encontramos:*

$$\begin{aligned} Y_i &= M_Y \int_0 M_Y^{-1}G(x) \\ &= N_YP^{-1}\int_0 PN_Y^{-1}G(x), \end{aligned}$$

e, com P *é uma matriz constante, podemos trazê-la para fora da integral e obter:*

$$\begin{aligned} Y_i &= N_YP^{-1}P\int_0 N_Y^{-1}G(x) \\ &= N_Y\int_0 N_Y^{-1}G(x), \end{aligned}$$

como queríamos.

Nos três capítulos anteriores, foram apresentados algumas definições, teoremas, resultados importantes de Álgebra Linear e algumas aplicações em sistemas de Equações Diferencias, utilizando a Forma Canônica de Jordan. No próximo capítulo vamos modelar um problema de desabamento de um prédio utilizando os conceitos estudados no capítulo anterior. O problema mostra o deslocamento horizontal de um prédio durante um terremoto. Vejamos a seguir esse problema.

CAPÍTULO 4

MODELAGEM MATEMÁTICA EM SISTEMAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Neste capítulo apresentaremos um problema matemático relacionado a tremores/terremotos em edifícios de vários andares. No problema, utilizaremos os métodos estudados no Capítulo 3 (Aplicações em Sistemas de Equações Diferenciais), em particular, o método da seção Sistemas Homogêneos com Coeficientes Constantes nos Números Complexos resolvendo o problema de valor inicial para encontrar a solução do problema.

Problema de Desabamento de Prédio

Grandes terremotos costumam ter um efeito devastador em edifícios. Por exemplo, o famoso terremoto de San Francisco de 1906 destruiu grande parte da cidade. Mais recentemente, aquela área foi atingida pelo terremoto Loma Prieta que muitas pessoas no Estados Unidos e outros lugares experimentaram em segunda mão enquanto assistiam na televisão o jogo da Major League Baseball World Series que estava acontecendo em San Francisco em 1989.

Figura 4.1: Terremoto Loma Pietra em São Francisco, EUA, em 17 de outubro de 1989. Fonte: Site Curbed São Francisco de Brock Keeling.[2]

Modelo de deslocamento dos andares de um prédio:

Neste projeto, modelamos o efeito de um terremoto em um edifício de dois andares e, em seguida, resolver e interpretar matematicamente. Deixe x_i representar o deslocamento horizontal do i-ésimo andar. Aqui, a posição de equilíbrio será um ponto fixo no chão, de modo que $x_0 = 0$. Durante um terremoto, o solo se move horizontalmente de forma que cada andar é considerado deslocado em relação ao solo. Assumimos que o i-ésimo andar do edifício tem uma massa m_i, e o piso sucessivo é conectado por um conector elástico cujo efeito se assemelha ao de uma mola. Normalmente, os elementos estruturais em grandes edifícios são feitos de aço, um material altamente elástico. Cada conector fornece uma força restauradora quando os andares são deslocados um em relação ao outro. Assumimos que a Lei de Hooke[3] possui, com constante de proporcionalidade k_i entre o i-ésimo e o

[2]Disponível em: https://sf.curbed.com/2019/10/17/20898956/loma-prieta-earthquake-photos-images-sf-anniversary-quake. Acesso em: 24 nov. 2020.

[3]A mola helicoidal é um exemplo simples de um corpo material elástico, apresentando uma deformação Δl muito grande a partir de seu comprimento de equilíbrio l_0, quando sujeita a uma força deformadora. A elongação (ou contração) Δl da mola apresenta uma dependência linear entre a força aplicada. A força restauradora F_R, exercida pela mola (que se opõe à força externa F) é proporcional à sua deformação linear Δl: $F_R = -k\ \Delta l$. Esta relação é conhecida como a lei de Hooke, sendo a constante de proporcionalidade k chamada de constante elástica da mola, que é um parâmetro característico da mola helicoidal. Veja em [10].

$(i+1)$-ésimo andares. Daí, temos que a força restauradora entre esses dois andares i é dada por:

$$F = k_i(x_{i+1} - x_i),$$

onde x_{i+1} é o deslocamento horizontal do $(i+1)$-ésimo andar em relação ao i-ésimo andar. Também assumimos uma reação semelhante entre o primeiro andar e o solo, com a constante de proporcionalidade k_0.

Podemos aplicar a segunda Lei de Newton, $F = ma$ (onde F = força, m = massa e a = aceleração), a cada andar do edifício para chegar ao seguinte sistema linear de equações diferenciais.

$$\begin{cases} m_1x_1'' &= -k_0x_1 + k_1(x_2 - x_1) \\ m_2x_2'' &= -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) \\ \quad\vdots & \\ m_nx_n'' &= -k_{n-1}x_n(x_n - x_{n-1}) \end{cases}. \tag{4.1}$$

Como exemplo simples, considere um edifício de dois andares com cada andar tendo massa $m = 5000kg$ e cada constante de força restauradora tendo um valor de $k = 10000kg/s^2$. Então o sistema de equações diferenciais de segunda ordem é:

$$\begin{cases} x_1'' &= -4x_1 + 2x_2 \\ x_2'' &= 2x_1 - 2x_2 \end{cases}. \tag{4.2}$$

Sejam $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_1'$ e $y_4 = x_2'$. Substituindo na Equação (4.2) obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem equivalente.

$$\begin{cases} y_1' &= y_3 \\ y_2' &= y_4 \\ y_3' &= -4y_1 + 2y_2 \\ y_4' &= 2y_1 - 2y_2 \end{cases}.$$

Ainda podemos escrever o sistema da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Considere o sistema $Y' = AY$, onde $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcularemos o polinômio característico $p_A(\lambda)$, o polinômio minimal $m_A(\lambda)$ e a matriz de mudança de base P.

$$p_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 6\lambda^2 + 4.$$

Para encontrarmos os autovalores λ associados, reduziremos o grau do polinômio. Para isso, substituiremos a variável λ para a variável γ. Então, seja $\lambda^2 = \gamma$, temos que o novo polinômio característico será $p_A(\gamma) = \gamma^2 + 6\gamma + 4$ e seus autovalores são $\gamma_1 = -3 - \sqrt{5}$ e $\gamma_2 = -3 + \sqrt{5}$. Para ${\lambda_1}^2 = \gamma_1$ temos $\lambda_1 = \pm i\sqrt{3 - \sqrt{5}}$ e para ${\lambda_2}^2 = \gamma_2$ temos $\lambda_2 = \pm i\sqrt{3 + \sqrt{5}}$. Então, o polinômio minimal $m_A(\lambda)$ será:

$$m_A(\lambda) = \left(\lambda - i\sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)\left(\lambda + i\sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)\left(\lambda - i\sqrt{3 + \sqrt{5}}\right)\left(\lambda + i\sqrt{3 + \sqrt{5}}\right).$$

Agora calcularemos os autoespaços associados aos autovalores λ_1, $\overline{\lambda_1}$, λ_2 e $\overline{\lambda_2}$ da matriz A. Para o autoespaço $E_{i\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \ker\left(A - \left(i\sqrt{3 - \sqrt{5}}\right) I\right)$ temos como base:

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ i\sqrt{3-\sqrt{5}} \\ \dfrac{i\left(1+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)}{2} \end{pmatrix} \right\},$$

consequentemente, pelo Lema (3.10), temos que o autoespaço $E_{-i\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \ker\left(A + \left(i\sqrt{3 - \sqrt{5}}\right) I\right)$

tem como base:

$$\left\{ \overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ -i\sqrt{3-\sqrt{5}} \\ \dfrac{-i\left(1+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Para o autoespaço $E_{i\sqrt{3+\sqrt{5}}} = \ker\left(A - \left(i\sqrt{3+\sqrt{5}}\right) I\right)$ temos como base:

$$\left\{ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ i\sqrt{3+\sqrt{5}} \\ \dfrac{i\left(1-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)}{2} \end{pmatrix} \right\},$$

consequentemente, pelo Lema (3.10), temos que o autoespaço $E_{-i\sqrt{3+\sqrt{5}}} = \ker\left(A + \left(i\sqrt{3+\sqrt{5}}\right) I\right)$ tem como base:

$$\left\{ \overline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ -i\sqrt{3+\sqrt{5}} \\ \dfrac{-i\left(1-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Portanto a Forma Canônica de Jordan terá 4 blocos de Jordan de dimensão 1, respectivamente, com autovalores $\lambda_1 = i\sqrt{3-\sqrt{5}}$, $\overline{\lambda_1} = -i\sqrt{3-\sqrt{5}}$, $\lambda_2 = i\sqrt{3+\sqrt{5}}$ e

$\overline{\lambda_2} = -i\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

$$J = \begin{pmatrix} i\sqrt{3-\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{3-\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3+\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{3+\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Definamos $W_1 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$ e $W_2 = \sqrt{3-\sqrt{5}}$ para reduzir os cálculos apresentados nas matrizes seguintes.

Como encontramos as bases associadas aos autoespaços anteriormente, podemos definir a matriz de mudança de base P como:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ iW_2 & -iW_2 & iW_1 & -iW_1 \\ \left(i\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)W_2\right) & \left(-i\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)W_2\right) & \left(i\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)W_1\right) & \left(-i\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)W_1\right) \end{pmatrix}.$$

Então, $Z' = JZ$ tem solução:

$$\begin{aligned} Z &= \begin{pmatrix} e^{iW_2x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-iW_2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{iW_1x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-iW_1x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \overline{f_1} \\ f_2 \\ \overline{f_2} \end{pmatrix} \\ &= M_Z F = \begin{pmatrix} f_1 e^{iW_2x} \\ \overline{f_1 e^{-iW_2x}} \\ f_2 e^{iW_1x} \\ \overline{f_2 e^{-iW_1x}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainda, $Y = PZ = PM_ZF$, isto é,

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ iW_2 & -iW_2 & iW_1 & -iW_1 \\ \left(i\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)W_2\right) & \left(-i\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)W_2\right) & \left(i\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)W_1\right) & \left(-i\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)W_1\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{iW_2x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-iW_2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{iW_1x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-iW_1x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \overline{f_1} \\ f_2 \\ \overline{f_2} \end{pmatrix}.$$

Agora,

$$e^{iW_2x}\begin{pmatrix} 1 \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ iW_2 \\ i\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)W_2 \end{pmatrix} = e^0\left(\cos\left(W_2x\right)+i\sin\left(W_2x\right)\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ iW_2 \\ i\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)W_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(W_2x\right) \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cos\left(W_2x\right) \\ -W_1\sin\left(W_2x\right) \\ \dfrac{-\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}\sin\left(W_2x\right) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin\left(W_2x\right) \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\sin\left(W_2x\right) \\ W_2\cos\left(W_2x\right) \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cos\left(W_2x\right) \end{pmatrix},$$

e de fato,

$$e^{iW_1x}\begin{pmatrix} 1 \\ \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ iW_1 \\ i\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)W_1 \end{pmatrix} = e^0\left(\cos\left(W_1x\right)+i\sin\left(W_1x\right)\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ iW_1 \\ i\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)W_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(W_1x\right) \\ \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cos\left(W_1x\right) \\ -W_1\sin\left(W_1x\right) \\ -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)W_1\sin\left(W_1x\right) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin\left(W_1x\right) \\ \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\sin\left(W_1x\right) \\ W_1\cos\left(W_1x\right) \\ \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)W_1\cos\left(W_1x\right) \end{pmatrix},$$

então, substituindo as colunas relevantes de PM_Z. Encontramos:

$$Y = \begin{pmatrix} \cos(W_1x) & \sin(W_1x) & \cos(W_2x) & \sin(W_2x) \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cos(W_1x) & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\sin(W_1x) & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cos(W_2x) & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\sin(W_2x) \\ -W_1\sin(W_1x) & W_1\cos(W_1x) & -W_2\sin(W_2x) & W_2\cos(W_2x) \\ \left(\frac{-\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}\right)W_1\sin(W_1x) & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)W_1\cos(W_1x) & \left(\frac{-\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}\right)W_2\sin(W_2x) & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)W_2\cos(W_2x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1\cos(W_1x) + c_2\sin(W_1x) + c_3\cos(W_2x) + c_4\sin(W_2x) \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_1\cos(W_1x) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_2\sin(W_1x) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_3\cos(W_2x) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_4\sin(W_2x) \\ -c_1W_1\sin(W_1x) + c_2W_1\cos(W_1x) - c_3W_2\sin(W_2x) + c_4W_2\cos(W_2x) \\ -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_1W_1\sin(W_1x) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_2W_1\cos(W_1x) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_3W_2\sin(W_2x) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_4W_2\cos(W_2x) \end{pmatrix}.$$

Agora aplicaremos o problema de valor inicial para encontar a solução do sistema linear $Y' = AY$, onde $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$. Então:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 + c_3 \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_1 \\ c_2W_1 + c_4W_2 \\ c_2W_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_4W_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix},$$

com solução $c_1 = c_3 = 0$, $c_2 = \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{5}}$ e $c_4 = \frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}}{100}$. Substituindo na solução geral, então temos que o resultado do nosso problema do valor inicial tem como solução:

$$Y = \begin{pmatrix} \left(\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{5}}\right)\sin(W_1x) + \left(\frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}}{100}\right)\sin(W_2x) \\ \left(\frac{(-3+\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{5}}\right)\sin(W_1x) + \left(\frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}}{100}\right)\sin(W_2x) \\ \left(\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{5}}\right)W_1\cos(W_1x) - \left(\frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}}{100}\right)W_2\cos(W_2x) \\ \left(\frac{(-3+\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{5}}\right)W_1\cos(W_1x) - \left(\frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}}{100}\right)W_2\cos(W_2x) \end{pmatrix}.$$

Sejam

$$x_1(x) = \left(\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{5}}\right)\sin(W_1x) + \left(\frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}}{100}\right)\sin(W_2x)$$

e

$$x_2(x) = \left(\frac{(-3+\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}}{20\sqrt{5}}\right)\sin(W_1x) + \left(\frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}}{100}\right)\sin(W_2x)$$

as funções que representam o deslocamento horizontal de cada andar do prédio no tempo x.

A tabela abaixo mostra os valores em que x_1 e x_2 se desloca em relação ao tempo $0 \leq x \leq 5$ em segundos:

x	x_1	x_2
0	0	0
1	0,096	0,019
2	0	0,101
3	0,066	0,01
4	−0,005	−0,032
5	−0,117	−0,024

Tabela 1: Deslocamento horizontal dos andares x_1 e x_2 em metros.

Observe que inicialmente x_1 se move para a direita, mas é retardado pelo arrasto de x_2, enquanto x_2 está inicialmente em repouso, mas acelera, devido à atração de x_1, para ultrapassar x_1 em um segundo. Ele continua para a direita, eventualmente puxando x_1 até a marca de dois segundos. Nesse ponto, o arrasto de x_1 diminuiu a velocidade de x_2 até parar, depois disso x_2 se move para a esquerda, passando o ponto de equilíbrio em $3,2$ segundos e continua se movendo para a esquerda, arrastando x_1 junto com ele.

Isso também pode ser observado na Figura (4.2) que representa os gráficos de x_1 e x_2 dos deslocamentos em função do tempo.

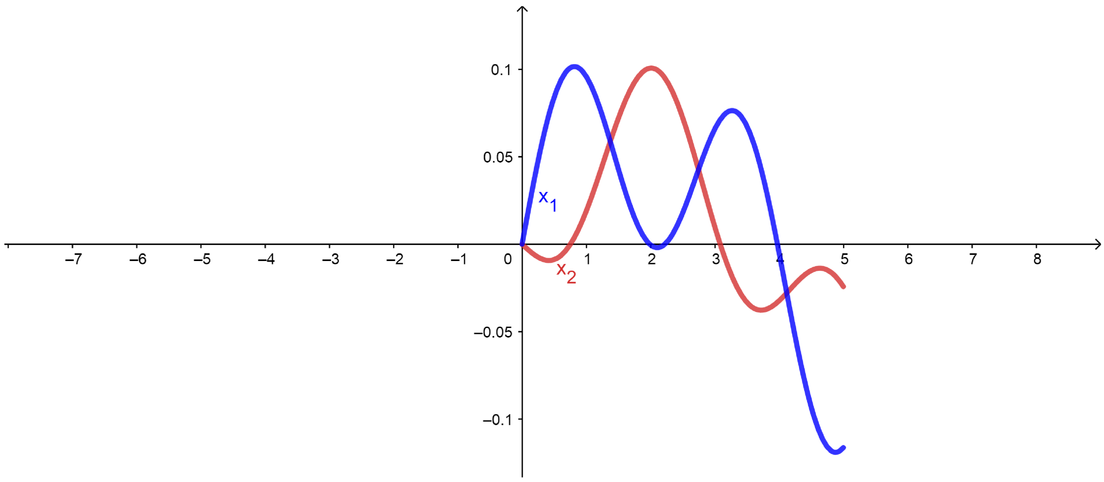

Figura 4.2: Gráfico de $x_1(x)$ e $x_2(x)$.

Fonte: Arquivo Pessoal. Gráfico plotado no Geogebra.

Conclusão

A relevância dessa monografia situa-se na reformulação de resultados encontradas na literatura, mas escritos de uma forma mais didática. Os resultados aqui apresentados abrem uma gama de possibilidades para o desenvolvimento de trabalhos futuros. Uma delas é desenvolver um algoritmo computacional que resolva um sistema linear de Equações Diferenciais Ordinárias apresentados no Capítulo 3 (Aplicações em Sistemas de Equações Diferenciais), utilizando linguagem de programação Matemática. A outra é aprofundar os estudos em outros tipos de problemas de modelagem Matemática, como por exemplo, aplicar uma modelagem Matemática em problemas relacionados com misturas de líquidos em reservatórios, circuitos elétricos, mas também em qualquer outro tipo de problema relacionado ao nosso cotidiano, tendo em vista que, neste trabalho foram feitas tentativas de resolver esses tipos de problemas (reservatório de misturas e circuitos elétricos), mas não conseguiu-se alcançar o resultado esperado, portanto deixa-se em aberto os problemas para futuras pesquisas. Por fim, ressaltamos que o método do Capítulo 3, utilizado para resolver o problema de desabamento do prédio foi resolvido com êxito. Ao aplicar uma abordagem diferente da convencional, usando a Forma Canônica de Jordan, chega-se na solução do problema de valor inicial (P.V.I.). Isto significa que neste trabalho a solução de um sistema homogêneo com coeficientes contantes relacionado a um problema de modelagem Matemática nos números complexos foi obtida de maneira inédita.

BIBLIOGRAFIA

[1] LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear**. São Paulo, Makron Books, 1994.

[2] WEINTRAUB, S. H. **Jordan canonical form: Application to differential equations**. San Rafael, Califórnia, EUA, Morgan and Claypool, (Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics), p. 25-68, 2008.

[3] ZILL, D. G. **A First Course in Differential Equations with Modeling Applications**. Boston, Editora Thompson Brooks Cole, 2013.

[4] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. MacTutor, 2001. **Marie Ennemond Camille Jordan**. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jordan/> Acesso em: 25 nov. 2020.

[5] LOURENÇO, M. L., COELHO, F. U. **Um Curso de Álgebra Linear**. São Paulo, Edusp, 2007.

[6] FIGUEIREDO, D. G., NEVES, A. F.**Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

[7] FRIEDBERG, S. H., INSEL, A. J., LAWRENCE, E. S. **Linear Algebra**. Nova Jersey, Prantice Hall, 2003.

[8] HIGHAM, N. J. **Functions of matrices: theory and computation**. Manchester, Siam, 2008.

[9] POOLE, D. **Linear algebra: A modern introduction**. Stamford, Cengage Learning, 2014.

[10] TOGINHO FILHO, D. O., ZAPPAROLI, F. V. D., PANTOJA, J. C. S. Universidade Estadual de Londrina, 2012. **Lei de Hooke - coeficiente de elasticidade** . Disponível em: <http://www.uel.br/pessoal/inocente/pages/arquivos/12-Lei%20de%20Hooke%20-%20coeficiente%20de%20elasticidade.pdf>. Acesso em: 25 nov. 2020.

[11] ZHANG, ZN., ZHANG, JN. **On The Computation of Jordan Canonical Form**. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2012; vol. 78, no. 2, págs.: 155-160. Disponível em: <https://ijpam.eu/contents/2012-78-2/3/index.html>. Acesso em: 12 mai. 2021.