

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Instituto de Física - INFIS

José Nogueira de Castro Neto

Geração dinâmica de estados GHZ

Uberlândia - MG

2021

José Nogueira de Castro Neto

Geração dinâmica de estados GHZ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal de Uberlândia em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientadora: Profa. Dra. Liliana Sanz de la Torre
Co-orientador: Prof. Dr. Fabrício Macedo de Souza

Uberlândia - MG

2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C355 Castro Neto, José Nogueira de, 1996-
2021 Geração dinâmica de estados GHZ [recurso eletrônico] /
José Nogueira de Castro Neto. - 2021.

Orientadora: Liliana Sanz de la Torre.
Coorientador: Fabricio Macedo de Souza.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Física.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.190>

Inclui bibliografia.

1. Física. I. Torre, Liliana Sanz de la, 1974-,
(Orient.). II. Souza, Fabricio Macedo de, 1975-,
(Coorient.). III. Universidade Federal de Uberlândia.
Pós-graduação em Física. IV. Título.

CDU: 53

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1A, Sala 213 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4309 - www.infis.ufu.br - cpgfisica@ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Física				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado				
Data:	26 de fevereiro de 2021	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:10
Matrícula do Discente:	11912FIS001				
Nome do Discente:	José Nogueira de Castro Neto				
Título do Trabalho:	Geração Dinâmica de Estados GHZ				
Área de concentração:	Física				
Linha de pesquisa:	Informação Quântica				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Informação Quântica				

Reuniu-se por meio de vídeo conferência , a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Física, assim composta: Professores Doutores: Marcel Novaes- INFIS/UFU , Renato Moreira Ângelo - UFPR e Liliana Sanz de la Torre - INFIS/UFU, orientadora do candidato.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Prof^a. Dra. Liliana Sanz de la Torre, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Renato Moreira Angelo, Usuário Externo**, em 26/02/2021, às 17:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcel Novaes, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/02/2021, às 17:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Liliana Sanz de La Torre, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/02/2021, às 19:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2596196** e o código CRC **562C426E**.

Resumo

O emaranhamento é uma correlação puramente quântica capaz de permitir a realização de protocolos de informação tais como teletransporte quântico e criptografia quântica, e é um dos requisitos nas implementações de um computador quântico, o que torna a busca por estados emaranhados um fato de interesse prático. Nessa dissertação, busca-se apresentar a geração dinâmica de estados da classe GHZ de alta fidelidade em sistemas de N qubits de carga, que interagem via interação coulombiana e formados pela composição de pares de pontos quânticos nanoestruturados. Utilizando-se de condições específicas, concernentes a parâmetros no Hamiltoniano e condição inicial para a dinâmica, nota-se que o sistema pode se comportar aproximadamente como uma oscilação de dois níveis, contendo estados presentes na definição do GHZ. Propõe-se também um modelo efetivo, capaz de captar a essência da dinâmica completa e fornecer estimativas para importantes quantidades do sistema, principalmente seu período de oscilação, i.e., a escala temporal em que a dinâmica ocorre. Por fim, avalia-se a viabilidade experimental dos resultados aqui obtidos.

Palavras-chave: emaranhamento, classe GHZ, sistemas multipartidos, pontos quânticos, qubits de carga, informação quântica.

Abstract

Entanglement is at the heart of Quantum Mechanics, being a purely quantum correlation, with no analogous in Classical Mechanics. It is a resource that allows for the realization of protocols such as Quantum Teleportation and Quantum Cryptography, and a requirement for all implementations of a quantum computer. Thus, the search for entangled states is a matter of practical interest. In this dissertation, we present the dynamic generation of high fidelity GHZ class states in a system of N (up to 10) charged qubits, the latter interacting via a Coulomb-like interaction. Each qubit is to be considered a pair of quantum dots coupled by a tunneling parameter, sharing one extra electron. By utilizing specific conditions, regarding to parameters in the Hamiltonian and initial condition, we note the system to behave approximately as a two level one, containing states present in the GHZ definition. We also propose an effective model, which is capable of capture the dynamic's complete essence and to provide estimations for some of the system's important quantities, mainly the oscillation period, i.e., the time scale in which the dynamics takes place. We also analyse the experimental feasibility of the results here obtained.

Key-words: entanglement, GHZ class, N qubits systems, quantum dots, quantum information.

Agradecimentos

No trabalho de conclusão de curso de quem os escreve, desobedecendo ordens diretas da chefia, optei por não escrever palavras de agradecimento. A escolha pareceu natural à época, por diversas razões. Segue a principal delas: quando se escreve agradecimentos, ao incluir outras pessoas no contexto do trabalho, existe uma pitada de responsabilidade envolvida. Sim! Cita-se, nominalmente ou não, as pessoas mais importantes (presentes e fundamentais, independente da contribuição fornecida) ao longo da jornada de pesquisa e escrita do manuscrito em questão. Nesse sentido, não acreditei que a qualidade do referido trabalho fosse suficiente para justificar a escrita da dita seção (refiro-me aqui não à qualidade do texto e discussão dos resultados, mas dos resultados em si; no fim, talvez seja uma questão de não me orgulhar tanto do produto final. Mas estou divagando, continuemos). Nessa dissertação, diferentemente, acredito serem os agradecimentos não somente necessários mas também imprescindíveis. Novamente, as razões são diversas e na sequência enuncio a principal: nosso resultado final é uma (pequena) contribuição original para a física (em nenhum de meus sonhos mais positivos na infância poderia imaginar ter sucesso nessa empreitada) e, como consequência, estou de fato um degrau mais próximo de me tornar um físico. E, por isso, tenho um universo inteiro de agradecimentos. Aqui, nos parágrafos seguintes, relato os de primeira ordem.

Agradeço a toda minha família e, em especial, às três mulheres da minha vida: minha mãe, Valéria, por ter providenciado as condições ideais para que eu pudesse me dedicar integralmente aos estudos (mesmo com todos os sacrifícios envolvidos ao longo da jornada, desde o nascimento até o momento em que termino esse parêntese); minha avó, Tereza, por ter cuidado de mim de forma tão atenciosa e gentil até que fosse capaz de me manter em pé sozinho, ensinando-me, acima de tudo, que a bondade e honestidade sempre vem primeiro; minha namorada, quiçá futura esposa?!, Cinthia, pela presença absoluta em todos os momentos críticos de minha vida, seja nos bons e ótimos (quando, na maioria dos casos, foram ótimos simplesmente porque você estava presente) e, principalmente, nos ruins e péssimos (quando a força mental e emocional que me faltava para encarar os desafios e problemas foi

fornecida por você). Com vocês ao meu lado me sinto capaz de tudo. Faltam palavras para descrever o quanto sou grato - muito obrigado por tudo.

Agradeço enormemente a minha orientadora Liliana Sanz de la Torre. No universo da física tenho aproximadamente seis anos de idade e sou o que sou pois a tive como modelo a ser seguido. Você esteve lá desde o início dessa caminhada, ensinando-me tudo sobre Física *I*, depois me fazendo sofrer um pouco em Mecânica Clássica *II* e não exagero em dizer que me apaixonei ainda mais por quântica na sua disciplina de Mecânica Quântica *II* (um curso maravilhoso!). Em seguida, orientou-me no TCC, ao longo do mestrado e, naturalmente, no desenvolvimento desse trabalho e escrita dessa dissertação. Agradeço por tudo que me ensinou sobre física, como enxergar e fazer física e sobre os caminhos da ciência (as tradições, burocracias, os problemas e as entrelinhas), de maneira mais geral. Você é minha principal inspiração.

Agradeço ao meu co-orientador Fabrício Macedo de Souza por tudo que me ensinou ao longo das duas iniciações científicas e também das duas disciplinas brilhantemente ministradas, mas principalmente pela contribuição fundamental a esse trabalho concernente à proposta do modelo efetivo. Gostaria também de agradecer a Patrícia Aparecida Almeida de Oliveira, por toda a paciência e disposição para auxiliar na produção dos resultados numéricos aqui presentes, principalmente concernentes ao mecanismo de *dephasing*. Seus estudos de análise espectral do Hamiltoniano generalizado também foram fundamentais para caminharmos no sentido da proposta de generalização.

Agradeço ao trio de amigos e mestrandos: Bruno Souza Zanatta, Emmanuel Victor e Mykaelle Cristina. Não poderia pedir por um grupo de estudos melhor. Com vocês, as intermináveis listas e provas ... bem, continuavam intermináveis, mas, de tempos em tempos, pelo menos dávamos boas risadas sobre.

Agradeço também ao amigo Pedro Henrique Santos Bento, que se tornou muito importante nos últimos meses desse terrível ano de 2020, e primeiros meses de 2021. Suas palavras em momentos decisivos (qualificação, defesa da dissertação e matrícula no doutorado) nunca serão esquecidas. Agradeço também aos amigos Fernanda Ribeiro, Paula Belchior, Rafael Freitas, Geisson Filho, Serena Bueno, Gustavo Melo, Kesly Velozo, Gabriel Gon-

tijo, Matheus Vitor, Vinícios Balduino e tantos outros. Alguns da UFU, pelas idas ao RU e conversas nos famosos banquinhos, outros de Uberaba (minha cidade natal), pelas idas ao ratão, flavinho e campeonatos de FIFA.

Faço um agradecimento especial ao *Jedi*, amigo da família e morador de Uberlândia. Sua ajuda foi fundamental no ano de 2020, na minha mudança de Uberlândia para Uberaba durante um momento crítico e muito perigoso da pandemia. Propôs-se a auxiliar na venda dos móveis do antigo apartamento e realizar o traslado dos móveis vendidos quando necessário. Isso garantiu que eu não precisasse viajar para Uberlândia, garantindo a segurança da minha querida avó, evidentemente integrante do grupo de risco.

Agradeço aos comentários, recomendações e correções do Marcel Novaes e Raimundo Serrano, membros integrantes da banca de qualificação, assim como do Renato Angelo, membro externo da banca de defesa da dissertação. Tais contribuições certamente enriqueceram a qualidade e conteúdo do texto.

Agradeço a todas as demais pessoas que não foram citadas nominalmente nessa seção e tiveram qualquer contribuição para o desenvolvimento e escrita desse texto, ou mesmo para meu crescimento pessoal, cultural e científico.

Por fim, agradeço à CAPES pela bolsa de mestrado, sem a qual esse trabalho certamente não existiria.

Sumário

1	Introdução	13
2	Conceitos fundamentais	21
2.1	Postulados fundamentais da Mecânica Quântica	22
2.1.1	O formalismo do Vetor Estado	22
2.1.2	O formalismo do Operador Densidade	23
2.1.3	Propriedades gerais do Operador Densidade	25
2.1.4	Os postulados no formalismo do operador densidade	27
2.2	Definição formal do emaranhamento para N qubits	29
2.3	Classes de estados	31
2.3.1	Classes de estados via critério SLOCC	32
2.4	Quantificadores de emaranhamento	37
2.4.1	Tangles	38
2.4.2	Fidelidade de um estado quântico	40
2.5	O sistema de interesse	40
2.5.1	Heteroestruturas semicondutoras e pontos quânticos carregados	41
2.5.2	Qubits de carga	44
3	Obtenção dinâmica de estados GHZ	51
3.1	Geração de estado GHZ em um sistema de três qubits de carga	52
3.1.1	Resultado das simulações numéricas	52
3.1.2	Modelo efetivo de dois níveis da geração de estados GHZ	59
3.1.3	A dinâmica sob influência de um canal ruidoso - dephasing	74

3.2	Análise da escalabilidade da geração dinâmica de estados da classe GHZ . . .	77
3.2.1	O caso $N = 2$	78
3.2.2	O caso geral - N qubits	93
3.2.2.1	O Hamiltoniano de N qubits e a base computacional . . .	94
3.2.2.2	Hamiltoniano efetivo para a geração de estados GHZ de N qubits	99
3.2.2.3	Viabilidade da formação de estados GHZ de N qubits . . .	107
4	Considerações Finais	113
5	APÊNDICE	115
5.1	O caso $N = 4$	115
5.2	A operação de traço parcial	122

Lista de Figuras

- 2.1 (a) Representação esquemática de uma heteroestrutura AlGaAs/GaAs crescida na direção z , sendo L a espessura da camada intermediária. (b) Representação do perfil energético das bandas de condução e valência, em que ΔE_c e ΔE_v são a diferença de energia das bandas de condução e de valência dos materiais e $E_g^{\text{GaAs(AlGaAs)}}$ é a energia do gap do material GaAs (AlGaAs). (c) Potencial efetivo na banda de condução do GaAs, existente em decorrência da diferença de energia ΔE_c 42
- 2.2 (a) Imagem, feita por microscopia eletrônica, da amostra utilizada no trabalho de Hayashi. Os eletrodos V_R , V_L , e assim por diante, são tensionados de modo que os pontos quânticos L e R (da esquerda e direita, respectivamente) sejam definidos no gás bidimensional de elétrons da heteroestrutura AlGaAs/GaAs, por entre os reservatórios S e D (de fonte e dreno, respectivamente). O valor da tensão desses eletrodos também tem a função de controlar os parâmetros envolvidos no Hamiltoniano do sistema. (b) Regime de inicialização do sistema, em que a diferença de potencial entre a fonte e o dreno, V_{ds} , está ligada. Γ_L e Γ_R são os acoplamentos entre fonte e ponto da esquerda e dreno e ponto da direita, respectivamente. (c) Regime de manipulação do par de pontos quânticos, em que a diferença de potencial V_{ds} está desligada, o que provoca um bloqueio de Coulomb. Elétrons no reservatório de fonte não tem energia para vencer a repulsão de Coulomb dos elétrons nos pontos, ao passo em que os elétrons dos pontos não tem energia suficiente para tunelar para os reservatórios. Nesse caso, o acoplamento dominante é o tunelamento entre os dois pontos. 44

2.3 (a) Representação do sistema de três qubits de carga: seis pontos quânticos (círculo azul escuro) são acoplados aos pares (elipse azul clara), cada par constituindo uma molécula quântica. Os tunelamentos permitidos (V_{12}, V_{34}, \dots) são representados por linhas sólidas azul escuro. O acoplamento do tipo Coulomb (U_{13}, U_{14}, \dots) se dá por entre elétrons pertencentes a pontos quânticos de diferentes moléculas e são indicados pelas linhas pontilhadas vermelhas ou linhas tracejadas cinza. (b) Representação energética da i -ésima molécula quântica. Consegue-se nesse caso tornar explícitos os níveis eletrônicos E_i e E_{i+1} , onde $2\varepsilon_i$ é a desintonia, e Γ_L (Γ_R) é o acoplamento à fonte (dreno) de cargas. Na figura está representado o sistema no regime de bloqueio de Coulomb. 46

3.1 Dinâmica em um conjunto de três moléculas quânticas acopladas como função do parâmetro adimensional $\frac{\Omega_{GHZ}t}{\hbar}$, considerando-se a condição inicial $\rho(0) = |000\rangle\langle 000|$ e os parâmetros físicos $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu eV$ e $\Delta = J/8$ no Hamiltoniano, eq. (2.38). Painel (a) apresenta as populações $P_{000}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{111}(t)$ (círculo marrom não preenchido), em conjunto com a evolução dessas duas quantidades considerando-se um modelo efetivo de dois níveis (veja a seção sobre o modelo efetivo): $P_{000,\text{eff}}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{111,\text{eff}}(t)$ (linha tracejada cinza). O painel (b) apresenta a evolução de τ_3 (quadrado preto preenchido) e as fidelidades \mathcal{F}_{GHZ_-} (triângulo marrom preenchido) e \mathcal{F}_{GHZ_+} (cruz marrom). As duas últimas são calculados utilizando-se da eq. (2.30), com os estados *target* definidos por $\rho_{\text{target}} = |\Psi_{GHZ}(\frac{-\pi}{2})\rangle\langle\Psi_{GHZ}(\frac{-\pi}{2})|$ e $\rho_{\text{target}} = |\Psi_{GHZ}(\frac{\pi}{2})\rangle\langle\Psi_{GHZ}(\frac{\pi}{2})|$, respectivamente. A linha vertical ponto-tracejada azul evidencia o tempo de formação do primeiro estado GHZ, correspondendo a $t \sim 10.6\text{ns}$ 55

3.2 Geração dinâmica de estados GHZ para $\Delta = J/6$. A descrição é análoga ao caso encontrado na figura 3.1 e, portanto, são utilizadas as mesmas quantidades. Aqui, a linha ponto-tracejada azul apresenta o tempo de formação do primeiro GHZ, correspondendo a $t_{\text{GHZ}}^{(2)} \sim 4.46\text{ns}$ 57

3.3 Dinâmica do sistema em função do parâmetro adimensional $\frac{\Omega_{\text{FLIP}}t}{\hbar}$, considerando-se a condição inicial $\rho(0) = |010\rangle\langle 010|$, e, para os parâmetros no Hamiltoniano, $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu\text{eV}$, e dois valores de taxa de tunelamento: $\Delta = J/8$ nos painéis (a) e (b), e $\Delta = J/6$ nos painéis (c) e (d). Painel (a): populações $P_{010}(t)$ (círculo preto preenchido), $P_{101}(t)$ (círculo marrom não preenchido), além das populações obtidas partindo-se do modelo efetivo de dois níveis, sendo essas $P_{010,\text{eff}}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{101,\text{eff}}(t)$ (linha tracejada cinza). Painel (b): evolução do quantificador τ_3 (quadrado preto preenchido) e as fidelidades $\mathcal{F}_{\text{FLIP}_-}$ (triângulo marrom preenchido) e $\mathcal{F}_{\text{FLIP}_+}$ (cruz marrom). As fidelidades são calculadas utilizando-se a eq. (2.30) para os estados *target* $|\Psi_{\text{FLIP}}(-\frac{\pi}{2})\rangle$ e $|\Psi_{\text{FLIP}}(\frac{\pi}{2})\rangle$, respectivamente. A linha vertical azul ponto-tracedada apresenta o tempo de formação do primeiro estado FLIP, de valor $t_{\text{FLIP}}^1 \sim 10.6\text{ns}$. Os painéis (c) e (d) correspondem ao caso $\Delta = J/6$ e seguem as mesmas convenções apresentadas. Nesse caso, a linha vertical azul ponto-tracejada marca o tempo $t_{\text{FLIP}}^2 \sim 4.46\text{ns}$ 59

3.4 Dinâmica das populações $P_{000}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{111}(t)$ (círculo marrom não preenchido), tal como a fidelidade $\mathcal{F}_{\text{GHZ}_-}$ (triângulo marrom) considerando a ação do dephasing para $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu\text{eV}$, $\Delta = J/6$, e a condição inicial $\hat{\rho}(0) = |000\rangle\langle 000|$ com (a) $\gamma_{\text{deph}} = 10^{-2}$ GHz; (b) $\gamma_{\text{deph}} = 10^{-1}$ GHz, e (c) $\gamma_{\text{deph}} = 1$ GHz. A linha ponto-tracejada azul destaca o tempo de formação do primeiro estado GHZ, correspondendo a $t'_{\text{GHZ}} \approx 4.46$ ns. 76

3.5 Dinâmica em um conjunto de duas moléculas quânticas acopladas como função do parâmetro adimensional $\frac{\Omega^{BELL}t}{\hbar}$, considerando-se a condição inicial $\rho(0) = |00\rangle\langle 00|$ e os parâmetros físicos $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu eV$ e $\Delta = J/8$ no Hamiltoniano, eq. (3.74). Apresentam-se as populações $P_{00}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{11}(t)$ (círculo marrom não preenchido), em conjunto com a evolução dessas duas quantidades considerando-se um modelo efetivo de dois níveis, quais sejam, $P_{00,eff}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{11,eff}(t)$ (linha tracejada cinza), assim como a fidelidade \mathcal{F}_{GHZ_-} (triângulo marrom preenchido). A última quantidade é calculada utilizando-se a eq. (2.30), com o estado *target* definido por $\rho_{target} = |\Psi_{BELL}(-\pi/2)\rangle\langle \Psi_{BELL}(-\pi/2)|$, em que $|\Psi_{BELL}(-\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - i|11\rangle)$. A curva de fidelidade efetiva, $\mathcal{F}_{eff}(t)$ (linha ponto-tracejada preta) é produzida utilizando-se a eq. (3.102). 85

3.6 Dinâmica em um conjunto de duas moléculas quânticas acopladas como função do parâmetro adimensional $\frac{\Omega^{BELL}t}{\hbar}$, considerando-se a condição inicial $\rho(0) = |00\rangle\langle 00|$ e os parâmetros físicos $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu eV$ e $\Delta = J/6$ no Hamiltoniano, eq. (3.74). Apresentam-se as populações $P_{00}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{11}(t)$ (círculo marrom não preenchido), em conjunto com a evolução dessas duas quantidades considerando-se um modelo efetivo de dois níveis, quais sejam, $P_{00,eff}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{11,eff}(t)$ (linha tracejada cinza), assim como a fidelidade \mathcal{F}_{GHZ_-} (triângulo marrom preenchido). A última quantidade é calculada utilizando-se a eq. (2.30), com o estado *target* definido por $\rho_{target} = |\Psi_{BELL}(-\pi/2)\rangle\langle \Psi_{BELL}(-\pi/2)|$, em que $|\Psi_{BELL}(-\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - i|11\rangle)$. A curva de fidelidade efetiva, $\mathcal{F}_{eff}(t)$ (linha ponto-tracejada preta) é produzida utilizando-se a eq. (3.102). 86

3.7 Dinâmica em um conjunto de duas moléculas quânticas acopladas como função do parâmetro adimensional $\frac{\Omega^{BELL}t}{\hbar}$, considerando-se a condição inicial $\rho(0) = |00\rangle\langle 00|$ e os parâmetros físicos $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu eV$ e $\Delta = J/4$ no Hamiltoniano, eq. (3.74). Apresentam-se as populações $P_{00}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{11}(t)$ (círculo marrom não preenchido), em conjunto com a evolução dessas duas quantidades considerando-se um modelo efetivo de dois níveis, quais sejam, $P_{00,\text{eff}}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{11,\text{eff}}(t)$ (linha tracejada cinza), assim como a fidelidade \mathcal{F}_{GHZ_-} (triângulo marrom preenchido). A última quantidade é calculada utilizando-se a eq. (2.30), com o estado *target* definido por $\rho_{\text{target}} = |\Psi_{BELL}(-\pi/2)\rangle\langle \Psi_{BELL}(-\pi/2)|$, em que $|\Psi_{BELL}(-\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - i|11\rangle)$. A curva de fidelidade efetiva, $\mathcal{F}_{\text{eff}}(t)$ (linha ponto-tracejada preta) é produzida utilizando-se a eq. (3.102). 87

3.8 Dinâmica em um conjunto de dez moléculas quânticas acopladas como função do parâmetro adimensional $\frac{\Omega_{10}^{GHZ}t}{\hbar}$, considerando-se a condição inicial $\rho(0) = |0\rangle^{\otimes 10}\langle 0|^{\otimes 10}$ e os parâmetros físicos $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu eV$ e $\Delta = J/8$ no Hamiltoniano, eq. (3.134). Apresentam-se as populações $P_{|0\rangle^{\otimes 10}}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{|1\rangle^{\otimes 10}}(t)$ (círculo marrom não preenchido), em conjunto com a evolução dessas duas quantidades considerando-se um modelo efetivo de dois níveis, quais sejam, $P_{|0\rangle^{\otimes 10},\text{eff}}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{|1\rangle^{\otimes 10},\text{eff}}(t)$ (linha tracejada cinza), assim como a fidelidade \mathcal{F}_{GHZ_-} (triângulo marrom preenchido). A última quantidade é calculada utilizando-se a eq. (2.30), com o estado *target* definido por $\rho_{\text{target}} = |\Psi_{GHZ_{10}}(-\pi/2)\rangle\langle \Psi_{GHZ_{10}}(-\pi/2)|$, em que $|\Psi_{GHZ_{10}}(-\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes 10} - i|1\rangle^{\otimes 10})$. A curva de fidelidade efetiva, $\mathcal{F}_{\text{eff}}(t)$ (linha ponto-tracejada preta) é produzida utilizando-se a eq. (3.179). 107

5.1 Dinâmica em um conjunto de quatro moléculas quânticas acopladas como função do parâmetro adimensional $\frac{\Omega_4^{\text{GHZ}} t}{\hbar}$, considerando-se a condição inicial $\rho(0) = |0000\rangle\langle 0000|$ e os parâmetros físicos $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu\text{eV}$ e $\Delta = J/8$ no Hamiltoniano, eq. (5.1). Apresentam-se as populações $P_{0000}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{1111}(t)$ (círculo marrom não preenchido), em conjunto com a evolução dessas duas quantidades considerando-se um modelo efetivo de dois níveis, quais sejam, $P_{0000,\text{eff}}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{1111,\text{eff}}(t)$ (linha tracejada cinza), assim como a fidelidade $\mathcal{F}_{\text{GHZ}_-}$ (triângulo marrom preenchido). A última quantidade é calculada utilizando-se a eq. (2.30), com o estado *target* definido por $\rho_{\text{target}} = |\Psi_{\text{GHZ}_4}(-\pi/2)\rangle\langle\Psi_{\text{GHZ}_4}(-\pi/2)|$, em que $|\Psi_{\text{GHZ}_4}(-\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle - i|1111\rangle)$. A fidelidade efetiva $\mathcal{F}_{\text{eff}}(t)$ (linha preta ponto-tracejada é plotada utilizando-se a eq. (5.23). 120

Capítulo 1

Introdução

Não há teoria física mais excêntrica e desafiadora do que a Mecânica Quântica (MQ). E, na MQ, não há fenomenologia mais peculiar do que aquela relacionada ao *Emaranhamento*. Na literatura da física, a primeira menção a esse fenômeno se deve aos físicos Einstein, Podolsky e Rosen, em seu artigo seminal de 1935 [1]. O trabalho tinha como fim demonstrar a incompletude da MQ como uma boa descrição para a realidade física e, para tanto, utilizava-se de um estado emaranhado. Evidentemente, à época, não se tinha uma descrição precisa do que seria um estado desse tipo, tampouco mencionaram no trabalho o termo *emaranhamento*. Nesse sentido, apenas notaram que o dito estado produzia estranhos resultados concernentes às medições de observáveis incompatíveis realizadas em locais distantes espacialmente. Da constatação de que observáveis incompatíveis não tem valores fornecidos pela MQ, deduzem duas alternativas excludentes: (1) a MQ está incompleta ou (2) de fato observáveis incompatíveis não possuem realidade física simultânea. Assumem, então, a negação de (1) e, utilizando-se de um estado emaranhado e um conjunto de medidas realizados sobre uma das partes do sistema (que podem estar, em princípio, tão separados quanto se queira fazer), concluem que (2) também é falsa. Portanto, (1) deve ser tomada verdadeira. O erro no argumento do artigo está em assumir que, quando considerado um estado emaranhado, medidas realizadas sobre parte de um sistema não podem influenciar na outra parcela instantaneamente (de fato é natural assumir tal hipótese, ainda mais se tratando do criador da teoria da relatividade; apesar de uma aparente violação da última, o colapso

instantâneo da função de onda global não implica em uma possibilidade de transmissão de informação de forma superluminal). Uma formulação do paradoxo EPR mais simples e próxima da linguagem hoje utilizada na Informação Quântica é proposta por Bohm [2]. O termo emaranhamento, propriamente dito, é cunhado por Schrödinger poucos meses após a publicação do artigo de Einstein et. al [3, 4]. Nele, Schrödinger analisa o *status quo* da MQ, apresenta o seu famoso *Gedanken Experiment* denominado Gato de Schrödinger e, principalmente, faz constatações sobre o emaranhamento em estados. Ao enunciar que, nesses casos, o melhor conhecimento do todo supera o melhor conhecimento das partes, há um primeiro passo na direção de uma definição precisa do que seja um estado emaranhado. De fato, no caso puro, um estado emaranhado é aquele em que se tem um vetor estado descrevendo o sistema composto, mas, contraintuitivamente, não se consegue associar um vetor estado para as componentes desse todo.

A próxima grande contribuição na história do emaranhamento ocorre em 1964, e é produzida por John Bell [5]. Esse artigo é também seminal, posto que nele é introduzida uma primeira desigualdade, denominada atualmente como *Desigualdade de Bell*. Nesse trabalho o autor assume como verdade a incompletude da MQ (como discorrido no artigo de Einstein), introduz formalmente a noção de variáveis ocultas (o que tornaria a teoria completa) e, enfim, deriva uma desigualdade contendo correlações entre medidas realizadas em locais separados espacialmente. O ponto central é: todo modelo para a MQ, respeitando as hipóteses utilizadas por Bell (realismo, localidade e livre-arbítrio), deveria produzir resultados estatísticos que não violam a desigualdade deduzida. Nesse mesmo artigo, Bell utiliza um estado emaranhado para demonstrar que a desigualdade é violada nesse caso. Nesse sentido, a conclusão teórica é que o resultado estatístico das correlações produzidas por estados emaranhados (ao menos para os estados de Bell) não podem ser reproduzidos por uma teoria de variáveis ocultas locais - um modelo clássico da natureza [6]. É curioso notar que, assim como no artigo EPR, o emaranhamento não é o ponto central da argumentação e, ainda assim, acaba por se sobressair como consequência de sua estranha fenomenologia associada. É de grande importância destacar que a grande juíza para determinação sobre a violação ou não das desigualdades de Bell é a natureza. O primeiro teste experimental sobre violação das

desigualdades é devido a Aspect et. al. [7, 8]. É considerado que tais experimentos sofrem de *loopholes*, com origem nos aparatos experimentais. Recentemente, pesquisadores afirmam ter obtido uma violação *loophole-free* [9, 10, 11, 12, 13, 14]. Usualmente, há uma busca por violações de outras desigualdades do tipo Bell, por exemplo, as desigualdades CHSH [15]. Para uma revisão de literatura completa sobre as desigualdades de Bell, veja [16].

Em meados da década de 1980, os campos da Informação e Computação Quântica são oficialmente fundados, com a proposição de um primeiro protocolo de criptografia quântica e a consideração da capacidade computacional de um computador quântico [17, 18, 19]. Na década seguinte surgem diversos dos chamados *protocolos da informação quântica*: um novo protocolo de criptografia quântica utilizando-se do teorema de Bell [20], codificação quântica densa [21], teletransporte quântico de um estado de dois níveis via pares EPR e comunicação clássica [22] e, por fim, teletransporte quântico de um par EPR (também conhecido como *entanglement swapping*) [23], são alguns exemplos. Note que o emaranhamento é o fator capaz de permitir a própria existência desses protocolos e, por conseguinte, torna-se essencial colocá-lo em bases formais. Com isso, toda e qualquer análise qualitativa e, por vezes, filosófica desse fenômeno é abandonada em prol de algo que se transforma em um recurso, tão real e manipulável quanto energia (para uma revisão de literatura sobre a história do emaranhamento, veja a introdução do artigo [6]; para se convencer de que o emaranhamento está presente no laboratório, veja alguma das implementações do teletransporte quântico em variados contextos experimentais [24, 25, 26]).

Os primeiros resultados matemáticos concernentes à teoria do emaranhamento referem-se a sistemas bipartidos (i.e., compostos de duas partes), cuja dimensão de cada uma das partes é finita. O problema da caracterização do emaranhamento em sistemas bipartidos puros é resolvido pela *Decomposição de Schmidt*. Com efeito, um estado é dito separável se, e somente se, seu *rank de Schmidt* é 1 [27]. Do contrário, o estado está emaranhado. Para estados mistos, o problema da caracterização do emaranhamento só tem solução para baixas dimensionalidades. A definição de um estado emaranhado no caso misto foi proposta por Werner [28] (Na realidade Werner introduziu a definição do que não é um estado emaranhado, denominando-o estado separável. Nesse caso o estado pode ser produzido utilizando-se ape-

nas recursos clássicos e argumentou que um estado emaranhado nunca poderia ser escrito dessa forma. Um estado separável deve ser compreendido como uma combinação convexa de estados compostos em que se consegue associar um estado bem definido para cada um dos subsistemas). Apesar de conceitualmente simples, dado um estado quântico, decidir sob julgamento de tal definição é um problema de grande complexidade. Por consequência, criam-se os chamados critérios de separabilidade, esses funcionando como segue: dado um estado, aplica-se o critério e obtém-se uma das três respostas: estado emaranhado, estado não emaranhado ou inconclusivo. O teste mais poderoso (i.e., capaz de detectar, em comparação aos demais critérios, o maior número de estados como emaranhado) é o chamado *critério de Peres-Horodecki* [29]. Peres observou como sempre um estado separável mantém-se positivo definido sob aplicação do mapa de transposição parcial. Portanto, um estado que torna-se não positivo definido sob esse mapa não pode ser separável (e portanto, deve ser emaranhado). Foi demonstrado, pouco depois, que esse critério é necessário e suficiente quando as dimensões são 2×2 e 2×3 , mas apenas necessário em dimensões maiores (i.e., existem estados emaranhados que são positivos por transposição parcial) [30]. Para além da capacidade de caracterização de um estado como separável ou emaranhado, é de bastante interesse avaliar a quantidade de emaranhamento contido em um dado estado (é natural de se esperar que não somente existam estados separáveis e estados maximamente emaranhados, tais como os estados de Bell, mas sim um espectro de estados, por entre esses dois limites, contendo menos desse recurso para a implementação em protocolos). Essa tarefa fica a cargo dos *quantificadores de emaranhamento*. Expressões analíticas dessa ferramenta são bastante escassas na literatura da física, destacando-se a *Concorrência*, introduzida por Wootters e aqui utilizada de maneira indireta (veja a seção sobre quantificadores) [31].

Quando o número de partes do sistema é maior do que 2, o sistema é dito multipartido. Posto que mesmo a caracterização do emaranhamento em sistemas bipartidos é um problema em aberto, é de se esperar que os resultados em sistemas multipartidos sejam ainda mais escassos. As dificuldades são diversas: a dicotomia separabilidade - emaranhamento não faz tanto sentido, pois pode ser que partes do sistema estejam emaranhadas e outras não (portanto os critérios de separabilidade precisam ser repensados); garantindo-se a com-

pleta inseparabilidade de todas as partes do sistema, verifica-se que surgem tipos distintos de emaranhamento [32]; a complexidade e tamanho do espaço de Hilbert composto. Felizmente, do ponto de vista empírico e teórico, existe uma ferramenta capaz de contornar essas dificuldades e, minimamente, providenciar caminhos para o avanço teórico-experimental da área. Tal ferramenta é chamada de *Testemunha de Emaranhamento*, sendo introduzida por Terhal [33]. Ao contrário do que foi discorrido até esse ponto, uma testemunha de emaranhamento, como o nome sugere, detecta emaranhamento (ao contrário de um critério de separabilidade)[6, 27, 34, 35, 36].

Evidências sugerem que um computador quântico possui uma capacidade computacional superior (em alguns casos) aos computadores *clássicos*, da atual geração. Um exemplo disso é o algoritmo de Shor para a fatorização de inteiros [37]. Esse problema pertence a uma classe de problemas praticamente insolúveis com a utilização de computadores clássicos, ao passo em que o algoritmo quântico de Shor fornece uma solução em tempo polinomial. O bloco básico de processamento em um computador quântico é o chamado bit quântico. Esse pode ser considerado como qualquer sistema quântico de dois níveis e, portanto, existem inúmeras possíveis implementações de um computador quântico, tais como: íons frios aprisionados [38], espectroscopia de ressonância magnética eletrônica e nuclear [39, 40], dispositivos supercondutores [41] e pontos quânticos [42]. Independente da arquitetura e tipo de implementação, existem requerimentos para que seja factível, quais sejam, (1) escalabilidade do sistema físico com qubits bem definidos, (2) facilidade de inicialização do sistema, (3) tempo de descoerência muito mais longo do que o tempo de computação (leia-se, tempo de atuação dos unitários nos qubits), (4) um conjunto universal de portas lógicas quânticas (operadores unitários que atuam no sistema e produzem uma dada computação) e, por fim, (5) a possibilidade de leitura do sistema (após uma computação) [43]. Nesse sentido, pontos quânticos semicondutores nanoestruturados têm-se mostrado promissores candidatos. Em 2003, Hayashi et. al. demonstraram a oscilação coerente de um qubit formado por dois pontos quânticos carregados compartilhando um elétron, conjunto denominado molécula quântica [44]. Alguns anos depois, em 2009, Fujisawa et. al. estudaram um sistema de duas moléculas quânticas acopladas, tendo sucesso na geração de portas lógicas (CROT, SWAP, FLIP)

em um regime particular de parâmetros. O próprio artigo de 2003 é suficiente para satisfazer parte de (1) (qubits bem definidos), (2), visto que é apresentado um procedimento de inicialização do sistema por meio de pulsos de voltagem e (5), em que as leituras do sistema são feitas por métodos de transporte (corrente). No artigo de 2009, o critério (4) é satisfeito e percebe-se a possibilidade de escalabilidade. Até a presente data, não se tem relato de um sistema desse tipo com número de qubits maior do que 2.

Trabalhos desenvolvidos no Instituto de Física (INFIS) da Universidade Federal de Uberlândia contribuíram de maneira importante para o estudo da geração dinâmica de estados emaranhados nesse contexto de qubits de carga. Com efeito, Oliveira e Sanz desenvolveram um estudo sistemático sobre as propriedades do emaranhamento desse sistema, demonstrando como a base de estados de Bell está relacionada com os autoestados do Hamiltoniano desse sistema. Em particular, demonstraram que estados maximamente emaranhados (estados de Bell) podem ser dinamicamente obtidos pela manipulação dos parâmetros físicos relacionados à taxa de tunelamento, dessintonias e interação de Coulomb [45]. Também, Souza e Sanz desenvolveram uma equação mestra para descrever sistemas abertos de moléculas quânticas acopladas, fora do equilíbrio [46]. Por fim, mais recentemente, Souza, Oliveira e Sanz demonstraram como o acoplamento dos elétrons (nos qubits) com modos vibracionais da rede podem produzir estados de Bell [47].

Este trabalho é uma sequência direta do Trabalho de Conclusão de Curso desenvolvido pelo estudante. Nele, buscou-se dar continuidade ao que foi desenvolvido por Oliveira em 2015, i.e., buscar a geração dinâmica de estados maximamente emaranhados em um sistema de três qubits de carga (três moléculas quânticas acopladas), interagentes via interação de Coulomb. De maneira resumida, concluiu-se positivamente nesse sentido, de sorte que foi encontrado um regime de parâmetros para o qual o Hamiltoniano evolui o sistema a estados do tipo GHZ de alta fidelidade. Adicionalmente, descobriu-se que dependendo da condição inicial do operador densidade, o tipo de estado GHZ obtido se altera [48]. Tais resultados foram obtidos por meio de simulações numéricas e não possuíam justificativas teóricas. Ainda, não se apresentou uma escala temporal de obtenção dos estados GHZ (i.e., a escala temporal da dinâmica era desconhecida). Tais justificativas foram exploradas durante a realização

desta dissertação de mestrado. Os resultados demonstram que, por um lado, a geração de estados altamente emaranhados de N qubits nesse contexto é possível, sob certas condições. Por outro, a escala temporal de obtenção desses estados parece ser muito maior do que a escala de atuação do principal mecanismo de descoerência, tornando, portanto, a realização de um computador quântico nessa implementação um desafio do ponto de vista experimental (não satisfação do critério (3)).

O objetivo deste trabalho é apresentar a geração dinâmica de estados GHZ de alta fidelidade em um sistema de N qubits de carga e, com um modelo efetivo (que também pode ser generalizado), caracterizar de forma aproximada tal dinâmica de muitos corpos em uma linguagem compatível com a Informação Quântica. O trabalho está organizado como segue: no capítulo 2, apresenta-se o formalismo da MQ necessário para a descrição do sistema de interesse, sua dinâmica e extração de informação. Também, algumas noções básicas sobre o emaranhamento, sua definição formal e a ideia de tipos de emaranhamento que surge em sistemas multipartidos (também, apresenta-se a definição do que é um estado pertencente à classe GHZ). Além de uma descrição mais precisa do sistema de qubits de carga. No capítulo 3, apresentam-se os resultados originais do trabalho. No capítulo 4, apresentam-se algumas considerações finais. Foi também incluído um apêndice contendo o caso dinâmico $N = 4$ qubits e uma pequena digressão sobre a operação de traço parcial.

Capítulo 2

Conceitos fundamentais

Apresenta-se nesse capítulo um breve resumo concernente ao formalismo quântico a ser utilizado no estudo do emaranhamento, de maneira geral, e à determinação da dinâmica do sistema de interesse e cálculo de propriedades físicas desse sistema, de maneira mais particular. Inicia-se por uma exposição dos postulados da Mecânica Quântica no contexto de vetores estados, como comumente encontrado em variados livros didáticos, e depois se apresenta o conceito de operador densidade (ou mesmo matriz densidade) e uma formulação postulatória equivalente para tal operador. Duas ressalvas devem ser feitas nesse ponto, quais sejam, não há a intenção de completeza na apresentação dos conceitos relacionados à Mecânica Quântica (i.e., demonstrações e a maciça parcela de fenomenologia associada a esta teoria não serão aqui exploradas) e são considerados apenas espaços vetoriais complexos de dimensão finita. Também, busca-se apresentar as noções básicas da teoria do emaranhamento de modo a possibilitar uma caracterização do fenômeno homônimo no contexto dos estados puros, sendo isso suficiente para a completa caracterização dos estados maximamente emaranhados obtidos dinamicamente no sistema de interesse. Adicionalmente, apresenta-se a classificação dos estados puros em um sistema de três qubits via classes de equivalência por *SLOCC* (traduzindo do inglês, operações locais e comunicação clássica estocásticas) e alguns bons quantificadores do emaranhamento presente nos estados de interesse, assim como uma medida muito útil de distância de operadores - Fidelidade. Por fim, apresentam-se noções relacionadas ao sistema de interesse e, principalmente, o mapeamento de férmions para

qubits do Hamiltoniano desse sistema.

2.1 Postulados fundamentais da Mecânica Quântica

2.1.1 O formalismo do Vetor Estado

Toda a fenomenologia associada à Mecânica Quântica (MQ) pode ser reproduzida a partir de seis postulados fundamentais [49]. Em síntese, a cada sistema físico associa-se um espaço de Hilbert \mathcal{H} (espaço vetorial complexo, munido de um produto interno bem definido, denotado *espaço de estado*) e o representante do estado deste sistema é um *vetor estado* $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$. Naturalmente, toda sorte de informação contida no sistema pode ser extraída a partir desse vetor estado. A todo elemento físico efetivamente mensurável pode-se associar um operador hermitiano \mathcal{A} atuando em \mathcal{H} , recebendo o nome de *Observável*. O único resultado possível da medida de um observável \mathcal{A} corresponde a um elemento de seu espectro, $\{a_i\}$. Em particular, a probabilidade de obter-se o autovalor a_n é expressa por $\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle a_n^i | \psi(t) \rangle|^2$, em que g_n é o grau de degenerescência de a_n e $\{|a_n^i\rangle\}$ ($i = 1, \dots, g_n$) é um conjunto ortonormal de vetores caracterizando uma base no subespaço \mathcal{E}_n associado ao autovalor a_n do observável \mathcal{A} . A dita probabilidade corresponde ao coeficiente de expansão do vetor estado na representação dos autoestados do dito observável e é obtida pela aplicação de uma das representações do operador identidade, qual seja, $I = \sum_n P_n = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} |a_n^i\rangle \langle a_n^i|$ neste vetor estado. Supondo-se que o autovalor a_n seja obtido após a medida do observável \mathcal{A} , então o vetor estado representante do sistema, imediatamente após a medida, deve ser um vetor normalizado do respectivo subespaço \mathcal{E}_n dado por $\frac{P_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}}$.

Em um contexto em que não são realizadas medidas, a dinâmica do sistema ocorre de forma suave (sem colapsos do vetor estado) e é governada pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.1)$$

onde $H(t)$ é o operador Hamiltoniano, associado à energia do sistema e obtido pela quantização do Hamiltoniano clássico, quando possível, ou a introdução de Hamiltonianos sem

análogos clássicos (e.g., spin). Na condição em que H é independente do tempo, a evolução do vetor estado tem a forma $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\psi(0)\rangle$.

Em muitas situações empiricamente realizáveis ocorre de não se conseguir atribuir um vetor estado como representante do estado do sistema. Tal acontecimento não tem relação com a fenomenologia quântica, senão com uma *ignorância clássica* do experimentador em relação ao sistema (Como consequência desse comentário, escolheu-se utilizar, implicitamente, estados mistos provenientes de misturas próprias de estados puros para introduzir o próprio conceito de operador densidade. Entretanto, existem também estados mistos denominados misturas impróprias. Nesse caso, naturalmente, não se consegue atribuir um vetor estado para representar o sistema e, similarmente, uma combinação convexa de estados puros, como ocorre em uma mistura própria). Desenvolveu-se, nesse sentido, um formalismo mais geral capaz de, mesmo não atribuindo um vetor estado ao sistema, definir uma quantidade da qual, assim como para os vetores estados, consegue-se extrair toda sorte de informação do sistema.

2.1.2 O formalismo do Operador Densidade

De modo geral, um sistema quântico pode ser considerado puro ou misto. No primeiro caso, é sempre possível associar ao sistema um vetor estado, digamos $|\psi(t)\rangle$, enquanto no segundo deve-se proceder como segue. Seja um espaço de Hilbert \mathcal{H} , com uma base associada $\{|a_n\rangle\}$ e seja um conjunto de vetores estados $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_i\rangle, \dots, |\psi_s\rangle\}$. A cada $|\psi_i\rangle$, associa-se uma probabilidade clássica $p_i \geq 0$, de sorte que se tem um conjunto de probabilidades $\{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_s\}$, satisfazendo $\sum_{i=1}^s p_i = 1$. Então, diz-se que o sistema possui a probabilidade p_i de ocupar a configuração referente ao vetor estado $|\psi_i\rangle$. Nesse caso, não há um vetor estado genérico $|\psi(t)\rangle$ em que se pode representar completamente o sistema, conhece-se apenas um conjunto de configurações acessíveis, tão prováveis quanto o seu peso probabilístico permite. Esse cenário é frequente na natureza, sendo uma consequência de nossa ignorância sobre o estado ocupado pelo sistema (exemplos diversos são polarização de um fóton emitido por uma fonte de luz natural, e spin dos elétrons emitidos

por uma fonte térmica à temperatura T no experimento de Stern-Gerlach) [49]. Por fim, note como o formalismo dos vetores estado está contido no formalismo do operador densidade (para se obter o primeiro do segundo é suficiente fazer $p_i = 1$ para um dado i).

A MQ é intrinsecamente estatística. Por conseguinte médias e variâncias das medidas obtidas empiricamente surgem de forma natural, para além de erros instrumentais. Nesse sentido, [50] oferece uma boa motivação para a forma tomada pelo operador densidade. Com efeito, considere um sistema puro representado pelo vetor estado $|\psi(t)\rangle$, um observável \mathcal{Q} e um conjunto de autoestados $\{|u_n\rangle\}$ referentes a outro observável \mathcal{U} de espectro não degenerado. Expande-se então o vetor estado e o observável nessa base, obtendo-se:

$$|\psi\rangle = \sum_n C_n |u_n\rangle, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{Q} = \sum_{n',n} \langle u_{n'} | \mathcal{Q} | u_n \rangle |u_{n'}\rangle \langle u_n|. \quad (2.3)$$

Define-se então o *valor esperado* de \mathcal{Q} , no caso de um estado puro, pela expressão $\langle \mathcal{Q} \rangle = \langle \psi | \mathcal{Q} | \psi \rangle$. Aplicando-se (2.2) e (2.3), tem-se:

$$\langle \mathcal{Q} \rangle = \sum_{n',n} \mathcal{Q}_{n',n} C_n C_{n'}^*. \quad (2.4)$$

Essa quantidade pode ser interpretada como segue: sejam $N \gg 1$ sistemas idênticamente preparados de estado $|\psi\rangle$, mede-se em todos eles, simultaneamente, o mesmo observável \mathcal{Q} . A média de todos esses resultados será justamente $\langle \mathcal{Q} \rangle$.

No caso de um sistema misto, esse pode ocupar distintos estados, $|\psi^i\rangle$, cada qual com probabilidade p_i . Define-se então o valor esperado individual $\langle \mathcal{Q}^i \rangle = \langle \psi^i | \mathcal{Q} | \psi^i \rangle$, de expressão muito parecida à (2.4):

$$\langle \mathcal{Q}^i \rangle = \sum_{n',n} \mathcal{Q}_{n',n} C_n^i C_{n'}^{*i}, \quad (2.5)$$

sendo a diferença entre (2.4) e (2.5), o conjunto dos coeficientes de expansão. No caso misto, esses dependem de qual o estado ocupado pelo sistema (notado pela inclusão do índice

i). Assim, o valor esperado geral será dado pela média ponderada dos valores esperados individuais, com os pesos probabilísticos p_i :

$$\langle \mathcal{Q} \rangle = \sum_i p_i \langle \mathcal{Q}^i \rangle = \sum_{n',n} \mathcal{Q}_{n',n} \sum_i p_i C_{n'}^{*i} C_n^i. \quad (2.6)$$

Baseando-se em (2.6), define-se o termo geral da matriz densidade ρ como:

$$\rho_{n,n'} = \sum_i p_i C_{n'}^{*i} C_n^i. \quad (2.7)$$

Para que a equação acima seja satisfeita, pode-se definir um operador densidade como sendo

$$\rho = \sum_i p_i |\psi^i\rangle \langle \psi^i|. \quad (2.8)$$

2.1.3 Propriedades gerais do Operador Densidade

Algumas propriedades importantes podem ser extraídas da forma tomada pelo operador densidade em (2.8), enunciadas a seguir e sendo válidas, em princípio, para sistemas puros ou mistos [50].

Propriedade 1 *Um operador densidade é hermitiano:*

$$\rho = \rho^\dagger. \quad (2.9)$$

Com efeito, $\rho^\dagger = (\sum_i p_i |\psi^i\rangle \langle \psi^i|)^\dagger = \sum_i (p_i |\psi^i\rangle \langle \psi^i|)^\dagger = \sum_i p_i (|\psi^i\rangle \langle \psi^i|)^\dagger = \sum_i p_i |\psi^i\rangle \langle \psi^i| = \rho$.

Propriedade 2 *A condição de normalização do ensemble de estados puros implica na unidade do traço do operador identidade:*

$$\text{Tr}\{\rho\} = \sum_n \rho_{nn} = 1. \quad (2.10)$$

Tem-se novamente que $\rho = \sum_i p_i |\psi^i\rangle \langle \psi^i|$ e, portanto, $\text{Tr}\{\rho\} = \sum_i p_i \text{Tr}(|\psi^i\rangle \langle \psi^i|) =$

$\sum_i p_i \langle \psi^i | \psi^i \rangle$. Agora, pela normalização dos estados puros no ensemble, $\langle \psi^i | \psi^i \rangle = 1 \quad \forall i$. Então, $\text{Tr}\{\rho\} = \sum_i p_i = 1$, pela normalização das probabilidades nesse ensemble.

Propriedade 3 *Verifica-se que um operador densidade é positivo-definido:*

$$\rho \geq 0. \quad (2.11)$$

A demonstração de positividade de um operador X pode ser realizada de duas maneiras, quais sejam, pode-se demonstrar que o espectro de X é constituído exclusivamente por números reais não negativos ou, equivalentemente, que $\langle \phi | X | \phi \rangle \geq 0$ qualquer que seja $|\phi\rangle$ do espaço de Hilbert. Mas $\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \langle \phi | \left(\sum_i p_i |\psi^i\rangle\langle\psi^i| \right) | \phi \rangle = \sum_i p_i \langle \phi | \psi^i \rangle \langle \psi^i | \phi \rangle = \sum_i p_i |\langle \phi | \psi^i \rangle|^2 \geq 0 \quad \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}$.

Existe uma interpretação física associada aos elementos diagonais da matriz densidade. Dada uma base ortonormal $\{|u_n\rangle\}$ (autoestados de algum operador hermitiano \mathcal{U}) em que se expande ρ , tem-se ρ_{kk} como a probabilidade de o sistema ocupar o estado $|u_k\rangle$, por isso tais elementos diagonais são chamados *populações*. Os elementos fora da diagonal também tem uma interpretação física associada: o elemento arbitrário ρ_{ij} dá uma medida da sobreposição quântica entre os estados $|u_i\rangle$ e $|u_j\rangle$, por isso são denominados *coêrencias* [49, 50].

Em suma, um operador densidade descrevendo um estado físico, definido via ensembles de estados puros, é um operador Hermitiano, $\rho = \rho^\dagger$, de traço unitário, $\text{Tr}\{\rho\} = 1$ e positivo definido, $\rho \geq 0$ (a última notação é usual no contexto da informação quântica). Equivalentemente, supondo-se uma matriz ρ qualquer, satisfazendo tais propriedades, deve-se concluir que tal matriz representa de fato um operador densidade. Para alguns dos propósitos dessa dissertação, é de interesse reformular os postulados da MQ de um ponto de vista em que os operadores densidade sejam mais fundamentais se comparados aos vetores estados.

2.1.4 Os postulados no formalismo do operador densidade

Na sequência, enunciam-se os postulados da MQ em uma óptica sob a qual o operador densidade possui uma definição intrínseca, i.e., não requer a definição à priori de um ensemble de estados. Novamente, toda a fenomenologia da MQ pode ser recuperada partindo-se dos postulados que seguem [51].

Postulado 1 *A todo sistema físico pode-se associar um espaço vetorial complexo munido de um produto interno (i.e., um espaço de Hilbert), denominado espaço de estado e denotado \mathcal{H} . O sistema é completamente descrito por um operador densidade ρ , satisfazendo este as propriedades de hermiticidade, positividade e unitariedade do traço e atuando no espaço de estado do sistema.*

Postulado 2 *A evolução de um sistema fechado é descrita por uma transformação unitária, dada por $\tilde{\rho} = U\rho U^\dagger$.*

No caso em que o interesse se dá por uma evolução estritamente temporal do sistema e se o operador Hamiltoniano é independente do tempo, então $U(t, t_0) = \exp\left\{\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right\}$, e

$$\rho(t) = \exp\left\{\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right\}\rho(t_0)\exp\left\{\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}\right\}. \quad (2.12)$$

O operador $\rho(t)$ é obtido, equivalentemente, por meio da solução da equação de Von Neumann

$$i\hbar\dot{\rho}(t) = [H, \rho(t)], \quad (2.13)$$

sendo essa o análogo da equação de Schrödinger para operadores densidade. Explícitada a equivalência, no contexto em que o tema dinâmica temporal unitária surgir, as soluções numéricas apresentadas devem ser compreendidas como sendo obtidas da solução da equação de Von Neumann.

Postulado 3 *As medidas quânticas são descritas por uma coleção $\{M_m\}$ de operadores de medida. Tais operadores atuam no espaço de estado do sistema a ser medido. O índice m deve ser compreendido como um dos possíveis resultados das medições experimentais. Se*

o estado quântico de um sistema no instante imediatamente anterior à medida é ρ , então a probabilidade de se obter o resultado m é dado pela expressão

$$p(m) = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho), \quad (2.14)$$

ao passo em que o estado do sistema imediatamente após a medida deve ser considerado como da forma

$$\tilde{\rho} = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (2.15)$$

Tendo-se um conjunto qualquer de operadores $\{M_m\}$, esse é considerado como um conjunto fisicamente realizável de medidas se a condição $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$ é satisfeita, em que I é o operador identidade atuando no espaço de estado do sistema. Pode-se pensar, particularmente, nas chamadas medidas projetivas, estando essas intimamente relacionadas a observáveis. Dado um observável A , uma medida projetiva se traduz em uma medida desse observável no sistema. Os operadores de medida são substituídos pelos operadores projetores presentes na decomposição espectral de tal operador, qual seja,

$$A = \sum_n a_n P_n, \quad (2.16)$$

em que $P_n = \sum_{i=1}^{g_n} |a_n^i\rangle\langle a_n^i|$. Esses satisfazem duas propriedades importantes: $P_n^\dagger = P_n$, $P_n P_m = \delta_{n,m} P_n$. Ademais, sempre vão satisfazer a condição necessária para que um conjunto de operadores seja um conjunto realizável de medidas, pois $\sum_n P_n = I = \sum_n P_n^\dagger P_n$. Quando nesse contexto de medidas projetivas, somente elementos presentes no espectro de observáveis podem ser obtidos empiricamente.

Postulado 4 *O espaço de Hilbert de um sistema composto é obtido pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert das partes.*

O último postulado é ressaltado porque na mesma medida em que os operadores densidade são recomendados para a descrição de sistemas mistos, também o são para a descrição de partes de um sistema composto, utilizando-se dos chamados estados reduzidos, obtidos pela operação do traço parcial aplicado no operador densidade completo.

2.2 Definição formal do emaranhamento para N qubits

Uma vez que a dissertação se ocupa da caracterização do emaranhamento contido em sistemas em que as partes constituintes são qubits, faz-se aqui uma particularização da notação do espaço de Hilbert e espaço de operadores lineares atuando no último. Considere-se como espaço de Hilbert genérico um espaço de Hilbert de N qubits, isto é, $\mathcal{H}_N \sim \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2 = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$. O bloco básico de construção da base computacional associada a \mathcal{H}_N é dado pelos autoestados do operador σ_z . Isto é, faz-se $\mathcal{H}_1 = \text{span} \{|0\rangle, |1\rangle\}$, em que $\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$, com $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tem-se que $\dim(\mathcal{H}_N) = 2^N$ e, utilizando-se da notação explicitada, constrói-se diretamente a base computacional associada a esse espaço de Hilbert de N qubits, base essa dada pelo conjunto $\{|0\rangle^{\otimes N}, \dots, |1\rangle^{\otimes N}\}$. Portanto, estados puros com vetores estado associados $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_N$, são vetores complexos com 2^N coeficientes escritos na base computacional já citada. Os operadores lineares em \mathcal{H}_N , por sua vez, na mesma representação escolhida, tem seu espaço denotado por $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$ e devem ser identificados como matrizes complexas quadradas de dimensão 2^N . Tanto os observáveis quanto os estados fisicamente possíveis são elementos de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$, evidentemente em porções diferentes desse espaço.

Considere, então, um vetor estado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_N$; segue a definição [27].

Definição 1 *O vetor estado $|\Psi\rangle$ é dito completamente separável se pode ser escrito como um produto tensorial (em todas as N partes) da seguinte forma*

$$|\Psi\rangle = \bigotimes_{i=1}^N |\phi_i\rangle. \quad (2.17)$$

Na eq. (2.17), deve-se identificar $|\phi_i\rangle$ como pertencente ao espaço de Hilbert do i -ésimo qubit. Pensando-se em um espaço de N qubits, a identificação de um estado puro como separável (ou, mais comumente, um *estado produto*) impõe vínculos severos sobre a forma de escrita desse estado, uma vez que se deve encontrar, para cada um dos qubits, um estado $|\phi_i\rangle$ que possibilite, no produto tensorial completo, a escrita presente na eq. (2.17). Quando um vetor estado não pode ser identificado como separável, então ele deve possuir

algum tipo de emaranhamento. Naturalmente, não separabilidade completa não implica diretamente emaranhamento genuíno por entre os N qubits. Nesse sentido, pode-se pensar na definição que segue.

Definição 2 Um vetor estado $|\Psi\rangle$ é dito k -separável, com $1 < k < N$, se existe ao menos uma partição das N partes em k partes, $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$, tal que é válida a equação seguinte

$$|\Psi\rangle = \bigotimes_{i=1}^k |\phi_i\rangle_{P_i}. \quad (2.18)$$

É importante ressaltar como o estado é separável no sentido das k -partes, mas não separável no interior dessas partições. Um exemplo se faz necessário para elucidar essa ideia de k -separabilidade. Considere, para tanto, o caso não trivial mais simples, $N = 3$ qubits. Denomina-se cada qubit com as primeiras letras do alfabeto, A , B e C . Nesse caso, tem-se apenas o valor $k = 2$ como permissível. As possíveis partições desse sistema são: $\{P_1 = A, P_2 = BC\}$, $\{P_1 = C, P_2 = AB\}$, $\{P_1 = B, P_2 = CA\}$. Os estados, por sua vez, podem então ser 2-separáveis (ou mesmo biseparáveis) no sentido que segue

$$|\Psi\rangle = |\phi_1\rangle_A \otimes |\phi_2\rangle_{BC}, \quad (2.19)$$

e as permutações possíveis. Dessa maneira, $|\phi_1\rangle_A$ pertence ao espaço de Hilbert do qubit A , ao passo em que $|\phi_2\rangle_{BC}$ pertence ao espaço de Hilbert composto dos qubits B e C . Adicionalmente, para que o estado seja de fato biseparável, deve-se garantir que $|\phi_2\rangle_{BC}$ não seja separável nesse espaço de Hilbert reduzido, isto é, o sistema de três qubits, quando representado pelo estado em (2.19), apresenta separabilidade em relação às partes A e BC , mas emaranhamento nessa última parte. Esse mesmo desenvolvimento pode ser estendido a um caso mais genérico de N qubits e todas as possíveis k -separabilidades (ou k -partições do espaço de N qubits). Por fim, segue a definição de um estado puro genuinamente emaranhado no sentido dos N qubits

Definição 3 Um estado puro $|\Psi\rangle$ é dito genuinamente N emaranhado quando não é um estado separável e, simultaneamente, um estado k -separável, qualquer que seja $k > 1$.

Portanto, mesmo no contexto de estados puros a determinação de inseparabilidade dos N qubits é complicada, posto que para tanto deve-se verificar a não separabilidade (i.e., o vetor estado não é um estado produto) e a não k -separabilidade (i.e., nenhum dos qubits ou conjunto de qubits está descorrelacionado dos demais). Alternativamente, pode-se definir um estado como genuinamente N emaranhado quando se garante a sua não separabilidade em relação a todas as possíveis bipartições do espaço de Hilbert em questão [52, 53]. Entretanto, como torna evidente a discussão no parágrafo subsequente, essa distinção não tem relevância aqui.

Felizmente, o contexto dessa dissertação é bastante específico: busca-se a geração dinâmica de estados puros maximamente emaranhados pertencentes a uma classe particular, chamada classe de estados GHZ. Nesse sentido, não é de interesse caracterizar-se, a todo instante, em qual classe (ou tipo de emaranhamento) está contido o estado dinamicamente obtido; não há a necessidade de se preocupar com todas as possíveis partições e consequentes k -separabilidades. É suficiente buscar-se meios que possibilitem a detecção desses estados (garantindo a sua identificação como estados GHZ) quando forem de fato produzidos. Ainda mais interessante é o fato de que, qualquer que seja o número N de qubits do sistema, a classe de estados GHZ sempre existe e é notabilizada como um conjunto de estados caracterizado pela inseparabilidade dos N qubits, portanto satisfazendo a definição 3.

2.3 Classes de estados

Nessa seção busca-se apresentar o conceito muito útil de classes de estados e o critério pelo qual são definidas tais classes. Notar-se-á como essa ideia está relacionada intimamente aos possíveis tipos de emaranhamento de um sistema, aqui particularmente sob a óptica do critério *SLOCC*. A noção de classe GHZ surge naturalmente para esse tipo de critério e, por fim, argumenta-se como de fato essa classe está presente em um sistema de N qubits.

2.3.1 Classes de estados via critério SLOCC

Definem-se *Operações Locais e Comunicação Clássica* (em inglês *Local Operations and Classical Communication (LOCC)*), como um subconjunto de todas as operações atuantes no espaço de Hilbert \mathcal{H} de um sistema multipartido (incluem-se observáveis e portas lógicas, para citar alguns exemplos), caracterizadas pela utilização exclusiva de operações locais e a existência de um canal clássico de comunicação permitindo a cada um dos subsistemas conhecer, quando necessário, o resultado de operações realizadas em outros subsistemas. Ressalta-se que o emaranhamento contido em um estado ρ nunca pode aumentar através unicamente das LOCC, ao passo em que é possível diminuir.

Seja por exemplo um sistema bipartido de matriz densidade ρ cujo valor de uma medida de emaranhamento qualquer é denotada $E(\rho_{AB})$ (a noção de medida de emaranhamento será melhor trabalhada na seção seguinte; para os propósitos da seção em questão é suficiente considerar uma medida de emaranhamento como uma função capaz de quantificar o emaranhamento contido no estado ρ ; usualmente o valor $E = 0$ implica separabilidade, ao passo em que $E = 1$ implica máximo emaranhamento). Após a aplicação de operações locais arbitrárias, transforma-se a matriz densidade inicial em uma nova matriz densidade $\tilde{\rho}_{AB}$. Entretanto, deve-se manter a desigualdade $E(\tilde{\rho}_{AB}) \leq E(\rho_{AB})$. Ora, se tais estados possuem exatamente a mesma quantidade de emaranhamento (no caso do sinal da igualdade), então podem executar os mesmos protocolos de IQ, indistinguívelmente. Dessa maneira, *dois estados $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ são ditos equivalentes se, e somente se, são obtidos um do outro mediante as LOCC, com probabilidade unitária de sucesso*. Um resultado matemático enuncia que estados são equivalentes (nesse sentido proposto) se, e somente se, estão relacionados por *Operadores Locais Unitários*. O termo *Local* implica atuação individual em cada um dos subsistemas e *Unitário* no sentido comum de manutenção da norma quando aplicado em vetores estado. Quantitativamente, $|\phi\rangle = U_A \otimes U_B |\psi\rangle$. Esse é um fator limitante para a definição dada de equivalência, pois mesmo em casos onde o sistema considerado é bipartido, estados não são comumente relacionados por meio desses operadores, fazendo o número de classes ser grande e tornando a definição de classes de pouca utilidade prática.

A solução para esse problema é relaxar a condição de probabilidade unitária de obtenção de um estado pelo outro. Diz-se então que *os estados $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ de um sistema multipartido arbitrário pertencem à mesma classe de equivalência de emaranhamento quando podem ser obtidos um do outro mediante as LOCC, com probabilidade não nula*. Além de solucionar o problema anteriormente citado, em termos práticos, se $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ são equivalentes partindo-se dessa definição, então podem ser utilizados na realização dos mesmos protocolos de IQ com a ressalva de que a performance depende do estado escolhido para a tarefa (evidentemente agora há apenas uma probabilidade de sucesso da execução do protocolo). Outro resultado matemático enuncia que dois estados são equivalentes perante as SLOCC (o adicional S informa a relaxação da probabilidade e quer dizer estocástico, em inglês *Stochastic*) se um *Operador Local Inversível* (ou em inglês, *Invertible Local Operator, ILO*) relaciona ambos os estados. Quantitativamente, no caso de um sistema tripartido, $|\phi\rangle = A \otimes B \otimes C |\psi\rangle$ e, naturalmente, $|\psi\rangle = A^{-1} \otimes B^{-1} \otimes C^{-1} |\phi\rangle$. Os operadores A , B e C sintetizam todas as operações locais realizadas sobre os subsistemas homônimos, não interessando o ordenamento temporal das mesmas [32].

A última definição, aplicada ao conjunto de todos os estados puros de um sistema tripartido (lembre-se, aqui as partes devem ser consideradas qubits), permite concluir a existência de seis classes de equivalência distintas. Com isso, quer-se dizer que para estados pertencentes a diferentes classes, não existe um *ILO* da forma $A \otimes B \otimes C$ relacionando-os. Mais fisicamente, estados pertencentes a essas classes inequivalentes por *SLOCC* não podem ser transformados um no outro por *LOCC*, mesmo com uma baixa probabilidade de sucesso.

A primeira dessas classes é denominada *classe separável* e nela encontram-se os estados produto (do inglês, *product states*, em referência ao produto tensorial). Os qubits estão completamente descorrelacionados nesse caso e, portanto, qualquer que seja o quantificador de emaranhamento escolhido, esse deve retornar um valor nulo. O representante genérico para estados deste tipo é da forma

$$|\psi_{ABC}\rangle = |0\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_C. \quad (2.20)$$

Todos os estados separáveis de um sistema tripartido podem ser obtidos do estado (2.20) por meio de algum ILO.

Adicionalmente, existem três classes de formato similar contendo, no entanto, emaranhamento distinto. São as classes de emaranhamento bipartido no sistema tripartido. Sua nomenclatura é identificada como *classe A - BC*, *classe B - CA* e *classe C - AB*. Os detalhes serão apresentados para uma delas e podem ser facilmente generalizados às demais. No caso da primeira, a letra A encontra-se separada (pelo hífen) das letras B e C (estas agrupadas), o que significa separabilidade do subsistema A com relação aos subsistemas B e C, enquanto estes últimos estão emaranhados. Intuitivamente conhece-se quais os qubits emaranhados e aquele separável nas demais classes. Também, pode-se compreender a razão pela qual as três classes possuem emaranhamento fundamentalmente distinto. É bem verdade que os quantificadores de emaranhamento, quando aplicados em representantes de cada uma das classes podem apresentar o mesmo valor numérico. No entanto, essa quantidade de emaranhamento, apesar de numericamente equivalente, está distribuída em diferentes setores do sistema global para cada um deles. Então, assumindo-se a aplicação exclusiva de operações do tipo LOCC, o emaranhamento não pode aumentar. Nesse caso ele teria de ser redistribuído, isto é, decrescer com relação a dois subsistemas (o que pode ser realizado pela aplicação de operadores locais não inversíveis), e crescer novamente com relação a dois outros, o que é absurdo por hipótese. Portanto, de fato as classes são não equivalentes. O representante genérico para estados pertencentes à classe A - BC é da forma:

$$|\psi_{ABC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_A (|0\rangle_B |0\rangle_C + |1\rangle_B |1\rangle_C), \quad (2.21)$$

em que se escolhe, como representante da classe, um estado em que os qubits não separáveis estão maximamente emaranhados. Qualquer estado em um sistema tripartido possuindo emaranhamento entre os qubits B e C (e, portanto, na classe A - BC) pode ser transformado no estado em (2.21) por LOCC com uma probabilidade não nula de sucesso, sendo a recíproca também verdadeira. A mesma arguição é válida para as demais classes e os representantes genéricos possuem forma similar, alterando-se apenas o índice do estado separável

(o ket externo à soma em parênteses).

Restam agora duas classes inequivalentes por *SLOCC* a serem exploradas, quais sejam, as classes GHZ e W. Ambas compartilham uma característica em comum: seus estados representantes são emaranhados no sentido genuíno, i.e., os três qubits são inseparáveis quando da descrição do estado. A existência dessas duas classes foi considerada uma nova faceta do emaranhamento em sistemas de múltiplas partes (número de partes maior do que 2), pois adicionalmente à inseparabilidade de todos os qubits no sistema, as propriedades de emaranhamento dos estados pertencentes às duas classes são distintas. O representante de um estado da classe GHZ é dado por

$$|\Psi_{\text{GHZ}}(\phi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_C + e^{i\phi} |1\rangle_A |1\rangle_B |1\rangle_C), \quad (2.22)$$

em que $\phi \in \mathbb{R}$ é uma fase e, mais usualmente, os subíndices dos subsistemas são ocultados por simplicidade. O nome dado a essa classe é em homenagem a Greenberger, Horne e Zeilinger, quando o utilizaram na produção de uma prova complementar ao teorema de Bell [54]. De fato, uma de suas características mais interessantes é a máxima violação de desigualdades do tipo Bell (adequadas a sistemas multipartidos) [55]. Por máxima violação, quer-se dizer que dado o conjunto completo de estados representantes de um sistema multipartido, todos podem ser colocados sob teste das desigualdades de Bell. Um subconjunto dos estados as violará, uma vez que se tem a existência de correlações puramente quânticas e não locais por entre os subsistemas de tais estados. Essa violação se dará em um espectro de valores, pois a quantidade de correlação não é equivalente para todos os estados. Nesse sentido, um dos estados pertencente a tal subconjunto deve possuir máximo valor de correlação e, por conseguinte, viola maximamente a desigualdade de Bell. Pode-se dizer que os estados GHZ são para N qubits o que os estados de Bell são para $N = 2$. De fato, alguns resultados desse trabalho indicam que o contrário é mais natural de se considerar, i.e., estados de Bell são os estados GHZ para $N = 2$ (colocando-se assim os estados GHZ em um patamar mais genérico). O argumento de transformação de estados (apresentado no caso das classes biseparáveis) também é válido aqui. O representante para a classe GHZ foi escolhido de tal

maneira que possui o máximo emaranhamento possível do tipo contido em estados da classe GHZ. Qualquer estado de três qubits inseparáveis e contendo emaranhamento GHZ pode ser transformado no estado em (2.22) por LOCC com uma probabilidade não nula de sucesso, sendo a recíproca verdadeira.

Por sua vez, o representante escolhido para a Classe de estados W é dado por

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle). \quad (2.23)$$

Vale aqui também o mesmo argumento sobre a razão de definição desse estado como representante da classe (seu máximo emaranhamento no sentido do emaranhamento do tipo W). Comparando-se os representantes (2.22) e (2.23) das classes GHZ e W, respectivamente, observa-se uma diferença essencial. Aqueles pertencentes à última necessitam da combinação linear de três vetores estado, ao contrário dos primeiros, necessitando de apenas dois. Essa é, em termos simplificados, a razão de existirem essas duas classes de emaranhamento genuinamente triplo, pois implica na inexistência de um operador local inversível capaz de transformá-los um no outro e vice-versa. Alternativamente, note também como estados do tipo GHZ tem um emaranhamento bastante suscetível quanto à perda de partes do sistema e medidas locais (observe, para tanto, como uma medida projetiva do operador $|0\rangle\langle 0| \otimes I_B \otimes I_C$ transforma o estado GHZ em um estado separável), ao passo em que o emaranhamento de estados do tipo W é robusto nesse mesmo sentido. Inicialmente tinha-se como objetivo também a geração dinâmica de estados W, visto que também são importantes para alguns protocolos da Informação Quântica, mas essa abordagem foi abandonada. A dificuldade principal na sua obtenção é referente à impossibilidade (até o momento) de encontrar-se uma base ortonormal para o espaço de Hilbert contendo somente estados do tipo W (e maximamente emaranhados nesse sentido). Isso possibilitaria a reescrita do Hamiltoniano de interesse nessa base e uma consequente facilitação no processo de se encontrar os regimes de parâmetros para os quais os estados W devem ser obtidos dinamicamente. No caso dos estados GHZ, por outro lado, essa base existe e é conhecida como base GHZ. Ademais, o espectro do Hamiltoniano utilizado é particularmente eficiente no sentido de agrupar (em porções energéticas distin-

tas desse espectro) estados necessários à geração de estados GHZ, ao passo em que separa energeticamente os estados necessários à geração dos estados W.

Como último comentário, deve-se ressaltar como essa classificação do conjunto dos estados puros de um sistema de três qubits não pode ser generalizada para N qubits, pois o número de classes inequivalentes por *SLOCC* torna-se rapidamente bastante grande (o que diminui sua utilidade prática). Novamente, isso não será um problema para os propósitos dessa dissertação, visto que, independentemente do número de qubits, garante-se que existem ao menos estados do tipo GHZ, cujo representante é escolhido da forma

$$|\Psi_{\text{GHZ}_N}(\phi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes N} + e^{i\phi}|1\rangle^{\otimes N}). \quad (2.24)$$

Ademais, todos os estados que são *SLOCC* do estado acima podem também ser considerados estados GHZ, isto é, são estados contendo emaranhamento genuíno por entre os N qubits e (possivelmente) maximamente emaranhados nesse sentido. Um desses que se destacou dos demais é obtido do estado em (2.24) pelo ILO $[I \otimes \sigma_x]^{\otimes \frac{N}{2}}$, quando N é par (quando N é ímpar deve-se fazer $[I \otimes \sigma_x]^{\otimes \frac{N-1}{2}} \otimes I$). Esse estado é denominado aqui por FLIP, sendo da forma

$$|\Psi_{\text{FLIP}_N}(\phi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle^{\otimes \frac{N}{2}} + e^{i\phi}|10\rangle^{\otimes \frac{N}{2}}). \quad (2.25)$$

2.4 Quantificadores de emaranhamento

Nessa seção busca-se apresentar os principais quantificadores de emaranhamento utilizados para a identificação dos estados GHZ obtidos dinamicamente no sistema de três qubits. Os quantificadores em questão são denominados *tangle* e podem ser considerados como uma generalização do quantificador *Concorrência*, esse válido para estados mistos de um sistema de dois qubits, ao passo em que os primeiros são válidos apenas para estados puros de um sistema de três qubits. Utiliza-se também o conceito de fidelidade com relação a um estado definido previamente. Caracteriza-se como uma medida de distância entre matrizes

e na medida em que o número de qubits do sistema cresce, torna-se ainda mais importante devido à ausência de bons quantificadores de emaranhamento nesses casos.

2.4.1 Tangles

Como o nome da seção sugere, quantificadores de emaranhamento são funções de operadores densidade, usualmente denotados como E , tais que possuem domínio no espaço de operadores densidade (ainda que no subconjunto de estados puros) e levam ao intervalo da reta real $[0, 1]$. No limite inferior, diz-se que o estado é separável, enquanto no superior diz-se que o estado é maximamente emaranhado (no sentido do emaranhamento a ser detectado). Para que um dado E seja de fato um quantificador, deve satisfazer uma série de propriedades pré-definidas, baseadas principalmente em aspectos físicos do emaranhamento. Uma dessas propriedades foi rapidamente citada anteriormente, sendo o não crescimento perante *LOCC*. Aqui não serão apresentadas as propriedades, tampouco serão apresentadas as motivações e desenvolvimento teóricos que levaram à proposição e definição dos quantificadores utilizados. Por conseguinte, trata-se de uma abordagem puramente prática, ressaltando-se, naturalmente, como são calculados e o que esse valor, quando obtido, permite inferir sobre o emaranhamento no sistema.

Um bom quantificador do emaranhamento contido em estados da classe GHZ é denominado 3-tangle, denotado por τ_3 e da forma [56, 57]

$$\tau_3 = \tau_{A(BC)} - \tau_{AB} - \tau_{AC}, \quad (2.26)$$

em que,

$$\tau_{A(BC)} = 4\text{Det}(\rho_A), \quad (2.27)$$

em que ρ_A é o estado reduzido quando são traçados parcialmente (para mais informações sobre a operação de traço parcial, veja a subseção reservada a essa operação matemática no

apêndice) os qubits B e C , i.e., $\rho_A = \text{Tr}_B[\text{Tr}_C(\rho)]$, ainda

$$\tau_{AB} = \text{Tr}(\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}) - 2\lambda_1\lambda_2, \quad (2.28)$$

em que $\rho_{AB} = \text{Tr}_C(\rho)$, $\tilde{\rho}_{AB}$ é a chamada matriz densidade de *spin-flip*, definida como $\tilde{\rho}_{AB} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho_{AB}^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$, ρ_{AB}^* é o complexo conjugado da matriz densidade ρ_{AB} e, por fim, λ_1 e λ_2 são as raízes quadradas dos únicos autovalores não nulos do operador $\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}$. Calcule-se τ_{AC} analogamente, desde que se faça a utilização do operador reduzido $\rho_{AC} = \text{Tr}_B(\rho)$. A quantidade τ_3 é cíclica, de sorte que quaisquer um dos qubits pode ser identificado como A, B e C e valor τ_3 será o mesmo, desde que o estado utilizado para o cálculo seja mantido.

É dito que o τ_3 é um bom quantificador para o emaranhamento da classe GHZ como consequência de $\tau_3(\rho) > 0 \iff \rho \in GHZ$ [32]. Dessa maneira, qualquer estado com um valor de 3-tangle positivo pode ser transformado, com probabilidade não nula de sucesso, no estado em (2.22). De maneira oposta, o valor de τ_3 para estados pertencentes às classes separável, biseparáveis e W é nulo. Note no entanto que os estados da classe W possuem de fato emaranhamento genuíno por entre os três qubits; por essa razão τ_3 não pode ser considerado um quantificador de emaranhamento genuíno para $N = 3$, mas somente para o emaranhamento da classe GHZ.

Assim, quando se tem $\tau_3(\rho) = 0$, nada pode ser dito sobre a classe do estado. Ao passo em que $\tau_3(\rho) > 0$ o garante como um estado da classe GHZ. Particularmente quando se tem $\tau_3(\rho) = 1$, então o estado possui o máximo emaranhamento possível do tipo GHZ e, portanto, ρ deve ser um produto externo dos estados da forma em (2.22).

Como uma quantidade auxiliar, define-se

$$\tau_2 = \tau_{AB} + \tau_{AC}, \quad (2.29)$$

esse último quantificando, de certa maneira, o emaranhamento bipartido no sistema de três qubits. Em suma, considera-se como condição necessária e suficiente para a identificação de um estado $\rho(t)$ como um estado maximamente emaranhado da classe GHZ que $\tau_3(\rho(t)) =$

1 (ao mesmo tempo deve ocorrer $\tau_2 = 0$, apesar de que a unidade de τ_3 carregue essa informação em sua própria definição; nesse cenário, τ_2 informa, fora dos pontos $\tau_3 = 1$, quanto de emaranhamento bipartido existe no sistema, independente de quais os pares de qubits estão efetivamente emaranhados nesse sentido).

2.4.2 Fidelidade de um estado quântico

Em termos absolutos a Fidelidade não é um quantificador de emaranhamento. Entretanto, quando utilizada da maneira adequada pode ser de grande valor na identificação de estados maximamente emaranhados, pois a Fidelidade é uma medida da similaridade entre operadores [51]. Assim, seja ρ_{target} o operador representante de um estado de interesse (em particular, tal estado sempre será considerado puro) e seja $\rho(t)$ o operador representante do sistema. Então a Fidelidade pode ser calculada como segue

$$\mathcal{F}(\rho(t), \rho_{\text{target}}) = \text{Tr}[\rho(t)\rho_{\text{target}}]. \quad (2.30)$$

Quando se tem $\mathcal{F}(\rho(t), \rho_{\text{target}}) = 0$, então é possível interpretar que $\rho(t)$ é ortogonal ao estado de interesse, ao passo em que $\mathcal{F}(\rho(t), \rho_{\text{target}}) = 1$ significa $\rho(t) = \rho_{\text{target}}$. Dessa maneira, pode-se definir $\rho_{\text{target}} = |\Psi_{GHZ}(\phi)\rangle\langle\Psi_{GHZ}(\phi)|$, de sorte que quando a Fidelidade se aproxima da unidade, $\rho(t)$ aproxima-se da forma de um estado maximamente emaranhado.

2.5 O sistema de interesse

Nesta seção, apresenta-se o sistema de interesse que é a plataforma experimental da nossa proposta: pontos quânticos carregados. A codificação do qubit neste sistema dá-se por meio da ocupação de um elétron em excesso que tunela entre dois pontos quânticos. Também é apresentada uma adequação (mapeamento) da notação de segunda quantização para uma notação usualmente utilizada no meio da informação quântica.

2.5.1 Heteroestruturas semicondutoras e pontos quânticos carregados

As chamadas heteroestruturas semicondutoras são estruturas híbridas formadas por finas camadas de materiais semicondutores distintos e dispostos de forma intercalada (e.g., em um dado substrato do elemento X, deposita-se uma fina camada do elemento Y e, acima do último, deposita-se uma nova camada do elemento X) [58]. A tecnologia atual é tal que as dimensões envolvidas em seu processo de produção são da ordem de nanômetros. Dependendo dos tipos de materiais utilizados consegue-se, por diferentes mecanismos físicos, confinar os portadores de carga de um dos elementos na direção de crescimento/deposição. O conceito chave aqui é a diferença entre as brechas (*gaps*) de energia: ao juntar dois materiais semicondutores com diferentes valores de *gap*, os portadores de carga ficam armadilhados em um poço de potencial. Este efeito pode ser observado na figura 2.1.

A consequência da existência desse poço de potencial para os elétrons na camada mais fina de material pode ser entendida qualitativamente impondo que a função de onda de tais elétrons seja obtida aproximando-se o complexo potencial de muitos corpos a que estão submetidos pelo simples poço de potencial $V(z)$, visto na figura 2.1. Naturalmente, nas direções x e y , em que os portadores de carga podem ser descritos aproximadamente como partículas livres, as soluções da equação de Schrödinger são funções de onda plana. Na direção z , tem-se ondas estacionárias no interior da fina camada e ondas evanescentes no exterior. As energias associadas assumem apenas alguns valores e portanto são quantizadas. Dessa maneira verifica-se que a heteroestrutura, ao confinar os elétrons nesse poço de potencial da banda de condução do GaAs, reduz um grau de liberdade do sistema tornando-o, nesse caso, um gás bidimensional de elétrons.

Como o próprio nome sugere, o sistema descrito no parágrafo anterior é bidimensional (i.e., os elétrons possuem dois graus de liberdade na posição). Conseguindo-se, por qualquer mecanismo físico, confinar ainda outro grau de liberdade de um gás bidimensional de elétrons na posição, o sistema torna-se unidimensional e recebe o nome de *poço quântico*. Nesse caso, a energia dos elétrons tem duas contribuições quantizadas (e.g., as direções y e z , com funções de onda estacionárias) e uma contribuição contínua, referente à direção x , com

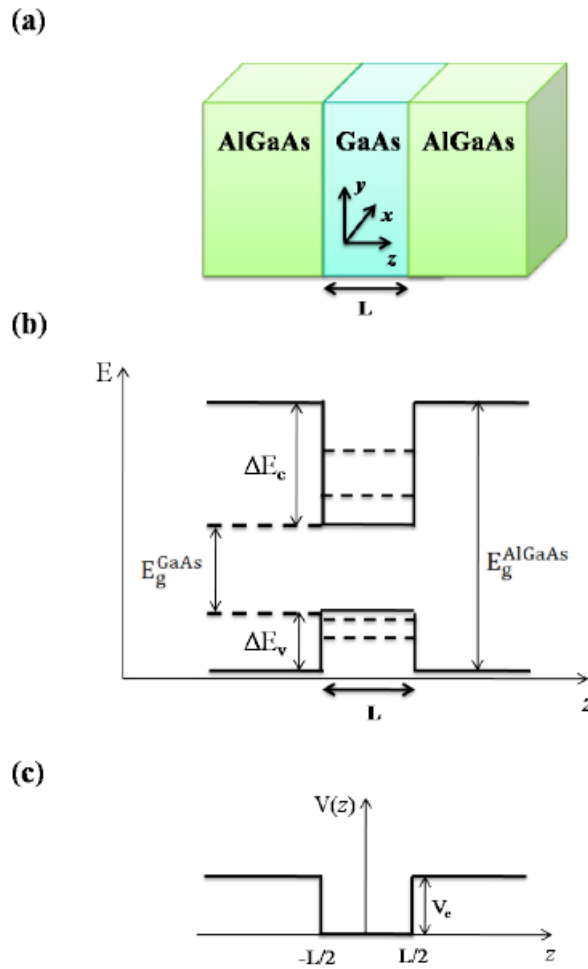


Figura 2.1: (a) Representação esquemática de uma heteroestrutura AlGaAs/GaAs crescida na direção z , sendo L a espessura da camada intermediária. (b) Representação do perfil energético das bandas de condução e valência, em que ΔE_c e ΔE_v são a diferença de energia das bandas de condução e de valência dos materiais e $E_g^{\text{GaAs(AlGaAs)}}$ é a energia do gap do material GaAs (AlGaAs). (c) Potencial efetivo na banda de condução do GaAs, existente em decorrência da diferença de energia ΔE_c .

Fonte: [58]

função de onda dispersiva (onda plana). O confinamento do grau de liberdade restante em um fio quântico gera o chamado *ponto quântico*. Nesse caso os elétrons estão confinados nas três direções espaciais e, por conseguinte, seu espectro é completamente discreto. Por isso são usualmente denominados átomos artificiais. A diferença entre esses e os átomos naturais é que a alteração do número de elétrons em um ponto quântico pode provocar consideráveis alterações em suas propriedades físicas (por exemplo, a condutividade).

O processo de formação de um ponto quântico é fundamental para a sua caracterização e determinação de propriedades físicas associadas. Interessa-se aqui, particularmente,

pelos pontos quânticos eletroestáticos. A sua formação decorre da presença de eletrodos localizados na parte superior de uma heteroestrutura semicondutora. Quando tensionados negativamente, os elétrons do gás bidimensional são expelidos da região desses eletrodos e confinados (nas três dimensões) em pequenas regiões do espaço. Ressalta-se que o número de elétrons pode ser ajustado pelo valor da tensão nos eletrodos. Em todo caso, tem-se um sistema de muitos corpos, com níveis energéticos discretos bem definidos e cada elétron ocupando um desses níveis.

Em princípio, um ponto quântico é suficiente para a codificação de um qubit. Com efeito, pode-se utilizar o spin do elétron ocupando o nível energético mais alto desse ponto. Entretanto, pode-se desejar utilizar outro grau de liberdade, como o de ocupação eletrônica. Para tanto é necessário dois pontos quânticos acoplados - para que de fato se consiga duas configurações distintas e a consequente codificação do qubit. A demonstração da viabilidade desse tipo de sistema ocorreu em 2003, por Hayashi et. al. [44], e uma representação do sistema pode ser vista na figura 2.2. Tem-se um par de pontos quânticos acoplados por tunelamento e definidos pela presença dos eletrodos V_R , V_r , e assim por diante. Consegue-se garantir que apenas dois estados eletrônicos (um do ponto da esquerda e um do ponto da direita) estão disponíveis para ocupação de um único elétron em excesso. O regime de inicialização ocorre quando uma alta diferença de potencial elétrico, $V_{ds} \sim 650\mu\text{eV}$, é mantida entre os reservatórios. Nesse caso o acoplamento entre reservatórios (fonte e dreno) e pontos é muito mais importante do que acoplamentos inelásticos entre os estados eletrônicos desses pontos e o próprio tunelamento entre os pontos, ocorrendo assim o acúmulo de um elétron em excesso no ponto da esquerda. O regime de manipulação ocorre, logo após o da inicialização, quando a diferença de potencial elétrico entre reservatórios é desligada. Com isso o sistema entra em um regime de bloqueio de Coulomb e apenas o tunelamento do elétron em excesso entre os dois estados eletrônicos disponíveis é permitido. Nesse caso de fato um qubit pode ser codificado. Um primeiro passo no sentido da escalabilidade empírica desse tipo de sistema foi obtida pelo mesmo grupo em 2009 [59], quando dois desses pares de pontos quânticos são permitidos interagir por Coulomb, mas estando isolados (elétrons não podem tunelar entre pares distintos). Ressalta-se que em laboratório, os experimentos são

realizados à um temperatura $T = 100\text{mK}$, na presença de um campo magnético de módulo $B = 0.6T$.

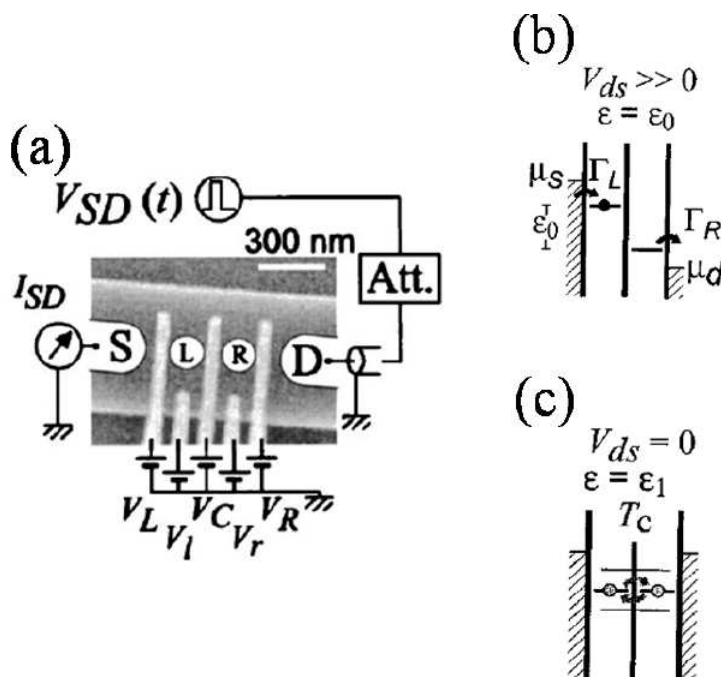


Figura 2.2: (a) Imagem, feita por microscopia eletrônica, da amostra utilizada no trabalho de Hayashi. Os eletrodos V_R , V_r , e assim por diante, são tensionados de modo que os pontos quânticos L e R (da esquerda e direita, respectivamente) sejam definidos no gás bidimensional de elétrons da heteroestrutura AlGaAs/GaAs, por entre os reservatórios S e D (de fonte e dreno, respectivamente). O valor da tensão desses eletrodos também tem a função de controlar os parâmetros envolvidos no Hamiltoniano do sistema. (b) Regime de inicialização do sistema, em que a diferença de potencial entre a fonte e o dreno, V_{ds} , está ligada. Γ_L e Γ_R são os acoplamentos entre fonte e ponto da esquerda e dreno e ponto da direita, respectivamente. (c) Regime de manipulação do par de pontos quânticos, em que a diferença de potencial V_{ds} está desligada, o que provoca um bloqueio de Coulomb. Elétrons no reservatório de fonte não tem energia para vencer a repulsão de Coulomb dos elétrons nos pontos, ao passo em que os elétrons dos pontos não tem energia suficiente para tunelar para os reservatórios. Nesse caso, o acoplamento dominante é o tunelamento entre os dois pontos.

Fonte: [58]

2.5.2 Qubits de carga

O modelo de estudo utilizado consiste em um sistema de três qubits de carga (na realidade, esse foi o modelo inicial considerado, mas veja a seção sobre a dinâmica para N qubits para uma proposta de generalização), codificados em pontos quânticos carregados. Cada qubit é codificado em estados eletrônicos de ocupação em um par de pontos quânticos, tais pares sendo conhecidos como moléculas quânticas (o nome é consequência da associação de

um ponto quântico com um átomo artificial. Disso segue que um par de pontos quânticos seja uma molécula artificial) [44], e o acoplamento por entre tais pares é obtido por um parâmetro de tunelamento. Considera-se que os pares de pontos quânticos compartilham apenas um elétron em excesso, podendo esse ocupar apenas um nível eletrônico em cada um dos pontos do par. Os elétrons podem tunelar dentro das moléculas, mas é proibido o tunelamento eletrônico entre pontos quânticos pertencentes a moléculas distintas. O acoplamento desses pontos com reservatórios de elétrons permite a inicialização do sistema em uma dada configuração de ocupação eletrônica (reforçando-se aqui que cada par é inicializado com apenas um elétron em um dos dois pontos do par). Além do potencial eletroquímico de cada ponto quântico (esses dando origem à dessintonia entre os dois níveis de cada qubit) e os acoplamentos de tunelamento (esses dando origem às transições entre os dois níveis de cada qubit), considera-se que elétrons pertencentes a diferentes qubits interagem via uma interação do tipo Coulomb (ao menos para primeiros vizinhos) [59, 60]. Uma representação do sistema se encontra na figura 2.3, ressaltando as principais características de um experimento com pontos quânticos carregados, um arranjo que tem sido estudado ao menos nas últimas duas décadas [61].

Os seis pontos quânticos encontrados na figura 2.3 estão localizados na intersecção de dois semicondutores de gap energético distinto (como a heteroestrutura GaAs/AlGaAs), o que produz um gás bidimensional de elétrons (do inglês *two dimensional electron gas*, ou 2DEG). Os pontos quânticos são então definidos por um confinamento espacial das dimensões restantes, obtido esse pela presença de eletrodos tensionados negativamente e posicionados no superior da heteroestrutura (acima do gás). Ademais, eletrodos possibilitam um acoplamento entre o sistema e reservatórios eletrônicos: um de fonte, com a função de providenciar elétrons a entrarem no sistema; um dreno, com a função de retirar elétrons do sistema, assim como permitir a realização de medidas de corrente em cada um dos qubits, por exemplo. Diversos outros eletrodos espalhados pela arquitetura do sistema permitem um bom controle dos parâmetros físicos relacionados ao tunelamento, V_{ij} , assim como da energia dos níveis eletrônicos nos pontos, E_i , ocorrendo tal manipulação de forma independente para cada ponto quântico/par de pontos quânticos.

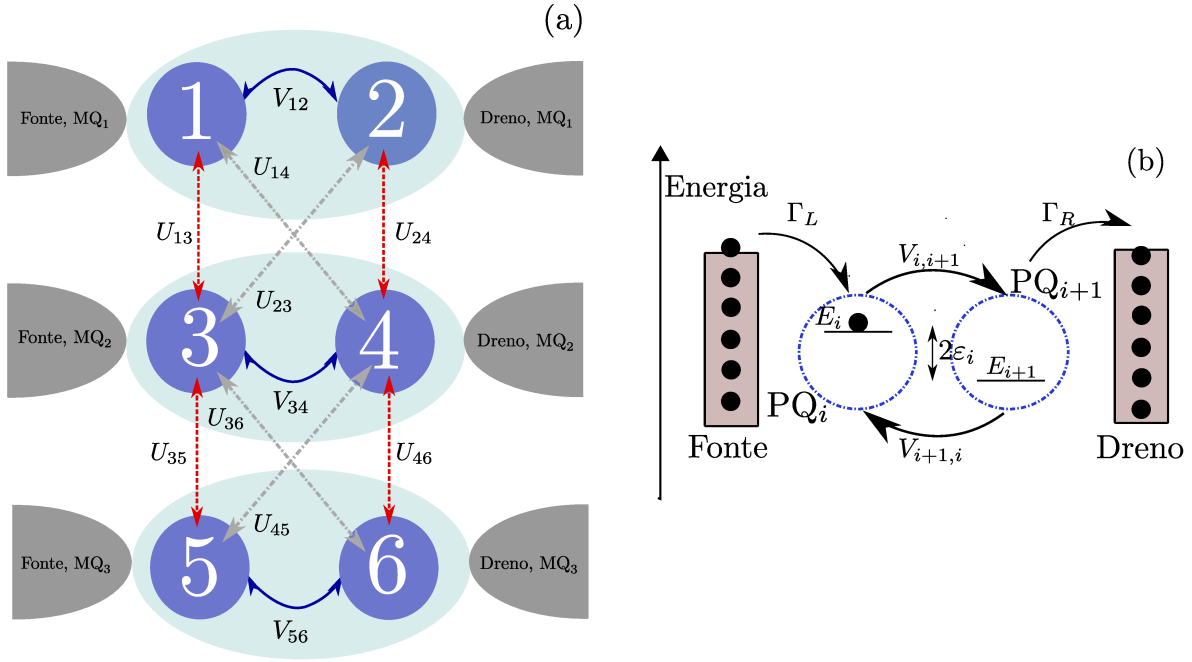


Figura 2.3: (a) Representação do sistema de três qubits de carga: seis pontos quânticos (círculo azul escuro) são acoplados aos pares (elipse azul clara), cada par constituindo uma molécula quântica. Os tunelamentos permitidos (V_{12}, V_{34}, \dots) são representados por linhas sólidas azul escuro. O acoplamento do tipo Coulomb (U_{13}, U_{14}, \dots) se dá por entre elétrons pertencentes a pontos quânticos de diferentes moléculas e são indicados pelas linhas pontilhadas vermelhas ou linhas tracejadas cinza. (b) Representação energética da i -ésima molécula quântica. Consegue-se nesse caso tornar explícitos os níveis eletrônicos E_i e E_{i+1} , onde $2\varepsilon_i$ é a desintonia, e Γ_L (Γ_R) é o acoplamento à fonte (dreno) de cargas. Na figura está representado o sistema no regime de bloqueio de Coulomb.

Fonte: [62]

Nessa dissertação, considera-se a evolução temporal de um sistema já inicializado, i.e., no decorrer da geração de resultados e análise dá-se como certa a presença de 1 elétron extra presente em cada um dos qubits e a tensão por entre os reservatórios de fonte e dreno (que de fato criou essa configuração inicial de cargas) é tomada como desligada. Portanto, durante o estudo encontra-se o sistema em um regime de bloqueio de Coulomb, uma vez que elétrons nos reservatórios não possuem a energia necessária para tunelarem aos pontos, ou mesmo dos pontos em direção aos reservatórios [63]. Nesse sentido, há conservação de cargas no sistema, podendo essa ser confirmada pelo cálculo da ocupação média eletrônica nos pontos. Com esse conjunto de considerações levado em conta, o Hamiltoniano do sistema (escrito em segunda quantização) é da forma

$$H_{6\text{QDs}} = \sum_{i=1}^6 E_i n_i + U + V, \quad (2.31)$$

em que,

$$U = U_{13}n_1n_3 + U_{14}n_1n_4 + U_{23}n_2n_3 + U_{24}n_2n_4 \\ + U_{35}n_3n_5 + U_{36}n_3n_6 + U_{45}n_4n_5 + U_{46}n_4n_6, \quad (2.32)$$

e,

$$V = V_{12}d_1^\dagger d_2 + V_{34}d_3^\dagger d_4 + V_{56}d_5^\dagger d_6 + \text{h.c.} \quad (2.33)$$

Aqui, d_i^\dagger (d_i) é o i -ésimo operador de criação (aniquilação) fermiônico, o operador número é definido como $n_i = d_i^\dagger d_i$, representando esse o número de elétrons no i -ésimo ponto e, por fim, todos os parâmetros físicos em $H_{6\text{QDs}}$ tem unidade de energia. O primeiro termo em (2.31) traduz-se no valor do nível eletrônico do i -ésimo ponto, ao passo em que o último termo representa o parâmetro de tunelamento entre o i -ésimo e o j -ésimo ponto do mesmo qubit. O segundo termo, por sua vez, leva em conta a interação de Coulomb entre elétrons ocupando diferentes pontos. Como é de se esperar, por construção, quando de elementos não nulos U_{ij} , há uma repulsão do tipo Coulomb somente na condição em que o i -ésimo e j -ésimo pontos estão, simultaneamente, ocupados.

O espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{6\text{QDs}}$ do sistema é tal que $\dim(\mathcal{H}_{6\text{QDs}}) = 64$, e uma boa escolha de base para esse espaço é dada pelo conjunto de estados $\{|1\rangle^{\otimes 6}, \dots, |0\rangle^{\otimes 6}\}$, em que $|1\rangle$ ($|0\rangle$) significa ponto ocupado (vazio). Como explicado anteriormente, considera-se aqui uma dinâmica unitária em que, a cada par de elétrons codificando um qubit, há apenas um elétron compartilhado. Esses vínculos diminuem drasticamente o espaço de Hilbert dinamicamente acessível ao sistema de 64 possíveis configurações eletrônicas a apenas 8, dadas pelo conjunto $\{|101010\rangle, |101001\rangle, |100110\rangle, |100101\rangle, |011010\rangle, |011001\rangle, |010110\rangle, |010101\rangle\}$. Esse espaço de Hilbert reduzido 8-dimensional é isomórfico a um espaço de Hilbert referente a um sistema de três qubits (o que é evidentemente esperado). Tal observação justifica a realização de um mapeamento do tipo férmions-qubits, de modo que se possa trabalhar diretamente com a notação utilizada na teoria da informação quântica. [46]

De modo a se obter a nova forma do Hamiltoniano do sistema no espaço de três qubits (somente esse passo é necessário, uma vez que a nova base é obtida por uma simples contração dos elementos do espaço reduzido; veja na sequência) primeiro escreve-se

o operador de criação (aniquilação) utilizando-se de uma transformação de Jordan-Wigner $d_i^\dagger = \sigma_z^{\otimes(i-1)} \otimes \sigma_+^{(i)} \otimes \sigma_0^{\otimes(6-i)}$ ($d_i = \sigma_z^{\otimes(i-1)} \otimes \sigma_-^{(i)} \otimes \sigma_0^{\otimes(6-i)}$)¹, em que $\sigma_\pm = \frac{\sigma_x \pm i\sigma_y}{2}$ e $\sigma_{0,z}$ são o operador identidade e o operador de Pauli na direção z atuando em um espaço de Hilbert bidimensional, respectivamente. Define-se então um operador projeção no subespaço reduzido dos três qubits, dado por

$$\begin{aligned}
W = & |101010\rangle\langle 101010| + |101001\rangle\langle 101001| + \\
& |100110\rangle\langle 100110| + |100101\rangle\langle 100101| + \\
& |011010\rangle\langle 011010| + |011001\rangle\langle 011001| + \\
& |010110\rangle\langle 010110| + |010101\rangle\langle 010101|.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Nesse sentido, o novo Hamiltoniano no espaço de Hilbert de três qubits, denotado $H_{3\text{QBs}}$, é definido como $H_{3\text{QBs}} = WH_{6\text{QDs}}W$. Faz-se também uma contração da notação da base do espaço de ocupação como segue: $10 \rightarrow 0$, $01 \rightarrow 1$ ($|100101\rangle \rightarrow |011\rangle$, por exemplo). O último passo é definir a seguinte parametrização dos acoplamentos em $H_{6\text{QDs}}$:

$$E_1 = -E_2 = \varepsilon_1, E_3 = -E_4 = \varepsilon_2, E_5 = -E_6 = \varepsilon_3 \tag{2.35}$$

$$V_{12} = V_{21} = -\Delta_1, V_{34} = V_{43} = -\Delta_2, V_{56} = V_{65} = -\Delta_3 \tag{2.36}$$

$$U_{13} = U_{24} = -U_{14} = -U_{23} = J_{12}, U_{35} = U_{46} = -U_{36} = -U_{45} = J_{23}. \tag{2.37}$$

Tem-se como resultado o que segue

$$H_{3\text{QBs}} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \sigma_z^{(i)} + \sum_{i=1}^2 J_{i,i+1} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(i+1)} + \sum_{i=1}^3 \Delta_i \sigma_x^{(i)} = H_0 + V, \tag{2.38}$$

em que

$$H_0 = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \sigma_z^{(i)} + \sum_{i=1}^2 J_{i,i+1} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(i+1)}, \tag{2.39}$$

¹Com os operadores definidos dessa maneira, garante-se que as relações de anticomutação fermiônicas são satisfeitas, quais sejam, $\{d_i, d_j^\dagger\} = \delta_{ij}$ e $\{d_i^\dagger, d_j^\dagger\} = 0$.

e,

$$V = \sum_{i=1}^3 \Delta_i \sigma_x^{(i)}, \quad (2.40)$$

em que $\sigma_{z,x}^{(i)} = \sigma_0^{(i-1)} \otimes \sigma_{z,x}^{(i)} \otimes \sigma_0^{(3-i)}$ e $\sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(i+1)} = \sigma_0^{(i-2)} \otimes \sigma_z^{(i)} \otimes \sigma_z^{(i+1)} \otimes \sigma_0^{(2-i)}$. O primeiro termo em (2.38) refere-se à dessintonia do i -ésimo qubit, o segundo à interação de Coulomb por entre o i -ésimo e $(i+1)$ -ésimo qubits e o último termo se traduz como a taxa de tunelamento do i -ésimo qubit. Na presente notação, σ_0 é um operador identidade 2×2 e escolhe-se uma base (por muitas vezes chamada computacional) para o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{3\text{QBs}}$ escrita em termos dos autoestados do operador σ_z , de sorte que $\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ e $\sigma_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$, com $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sendo os elementos dessa base os estados no conjunto $\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}$. Alguns pontos importantes devem ser ressaltados nesse momento. O Hamiltoniano $H_{3\text{QBs}}$ é exatamente o que se espera de uma extensão direta do caso (bem conhecido e já estudado) de um sistema de dois qubits no contexto de qubits de carga, para um sistema de três qubits nesse mesmo contexto [45, 46, 47]. Fundamentalmente, a física do problema não é alterada como consequência desse processo de mapeamento de férmions em qubits e, como detalhado anteriormente, é apenas possível em decorrência de uma dinâmica unitária com o vínculo adicional de apenas um elétron por par definidor de qubits. Entretanto, constatou-se que trabalhar nesse espaço reduzido permite compreender de forma mais clara a função dos parâmetros no sentido de se obter estados maximamente emaranhados. Além disso, trabalhar nessa nova notação (usualmente utilizada na área da informação quântica) permite relacionar, muito mais diretamente, os parâmetros físicos presentes em (2.38) com esses mesmos valores utilizados/extraídos empiricamente.

Explicitamente, $H_{3\text{QBs}}$ tem a forma seguinte

$$H_{3\text{QBs}} = \begin{pmatrix} E_{000} & \Delta_3 & \Delta_2 & 0 & \Delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_3 & E_{001} & 0 & \Delta_2 & 0 & \Delta_1 & 0 & 0 \\ \Delta_2 & 0 & E_{010} & \Delta_3 & 0 & 0 & \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 & \Delta_3 & E_{011} & 0 & 0 & 0 & \Delta_1 \\ \Delta_1 & 0 & 0 & 0 & E_{100} & \Delta_3 & \Delta_2 & 0 \\ 0 & \Delta_1 & 0 & 0 & \Delta_3 & E_{101} & 0 & \Delta_2 \\ 0 & 0 & \Delta_1 & 0 & \Delta_2 & 0 & E_{110} & \Delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_1 & 0 & \Delta_2 & \Delta_3 & E_{111} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

em que os elementos diagonais, autovalores do operador H_0 , podem ser encontrados no conjunto de equações (3.6).

Capítulo 3

Obtenção dinâmica de estados GHZ

Neste capítulo busca-se apresentar os principais resultados concernentes à obtenção dinâmica de estados GHZ no contexto de qubits de carga. Começa-se com o caso de três qubits, conforme explicado no capítulo de introdução. Inicia-se pela apresentação das condições impostas sobre o Hamiltoniano (2.38) e das melhores condições iniciais, e depois se introduz a ideia de um Hamiltoniano efetivo capaz de capturar a essência da dinâmica exata. A dinâmica efetiva é importante pois ilustra a física do problema, incluindo, principalmente, uma estimativa para a frequência de oscilação da dinâmica exata, demonstrando também que essa frequência não é constante no tempo. O sistema é então colocado sob influência de um canal quântico ruidoso, aqui particularmente um canal de dephasing, e são estudados os regimes para os quais um GHZ de alta fidelidade seja obtido. O resultado para o valor do acoplamento no Hamiltoniano efetivo corrobora a possibilidade de generalização dos resultados obtidos para um número genérico N de qubits. Os casos $N = 2$ e $N = 4$ são resolvidos analiticamente, sendo o último caso discutido no Apêndice. Com isso, conjectura-se como esse regime de dinâmica deve valer para um número N de qubits e, nesse sentido, apresentam-se os resultados para $N = 10$. Por fim, estuda-se a principal consequência de se considerar a conjectura válida, qual seja, a escala temporal das oscilações e sua viabilidade empírica frente ao canal de dephasing. Parte dos resultados desse capítulo foram submetidos à *Physical Review A* [64]. O manuscrito também está disponível no repositório ArXiv no link [62].

3.1 Geração de estado GHZ em um sistema de três qubits de carga

O sistema de interesse foi descrito na subseção 2.5.2. Em síntese, o Hamiltoniano, denotado $H_{3\text{QBs}}$, encontra-se na eq. (2.38), assim como a base escolhida para expansão do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{3\text{QBs}}$ é dada pela base computacional

$$\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}. \quad (3.1)$$

As informações são extraídas do sistema utilizando-se de sua matriz densidade associada $\rho(t)$. Essa, por sua vez, é obtida da solução da equação de Von Neumann encontrada na eq. (2.13), com a identificação $H \rightarrow H_{3\text{QBs}}$. O postulado dos operadores, eq. (2.14), permite o cálculo das populações associadas ao sistema quando se substitui $M_m^\dagger M_m$ por um operador projetor $|e\rangle\langle e|$, de sorte que

$$P_e(t) = \text{Tr} [|e\rangle\langle e| \rho(t)], \quad (3.2)$$

em que e refere-se a um dos elementos da base computacional, i.e., $e = 000, 001, \dots$ e assim por diante. Portanto $P_{000}(t), P_{001}(t), \dots$ são as populações (dependentes do tempo) dos estados $|000\rangle$ e $|001\rangle, \dots$, respectivamente. Os quantificadores de emaranhamento do estado $\rho(t)$ são computados por meio das equações (2.26), (2.27) e (2.28), ao passo em que a Fidelidade desse estado com um estado maximamente emaranhado (definido previamente) é calculado pela eq. (2.30).

3.1.1 Resultado das simulações numéricas

Uma análise preliminar concernente às características do espectro de $H_{3\text{QBs}}$ demonstram como as melhores condições para a obtenção dos estados GHZ e FLIP são obtidas fazendo-se as dessintonias nulas, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, e igualando-se as taxas de tunelamento, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta$. Faz-se também com que as interações de Coulomb estejam fixas e

equivalentes para os dois qubits vizinhos, $J_{12} = J_{23} = J = 25\mu\text{eV}$, em concordância com relatos encontrados na literatura [60]. Todos os parâmetros no Hamiltoniano são dados em função desse acoplamento de Coulomb, J . Para essa escolha de parâmetros, o Hamiltoniano toma a forma seguinte

$$\tilde{H}_{3\text{QBs}} = \begin{pmatrix} 2J & \Delta & \Delta & 0 & \Delta & 0 & 0 & 0 \\ \Delta & 0 & 0 & \Delta & 0 & \Delta & 0 & 0 \\ \Delta & 0 & -2J & \Delta & 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & \Delta & \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta \\ \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta & \Delta & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 & \Delta & -2J & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & \Delta & 0 & \Delta & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & \Delta & 0 & \Delta & \Delta & 2J \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Na figura 3.1(a), plota-se o comportamento dinâmico das populações dos estados $|000\rangle$ e $|111\rangle$, $P_{000}(t)$ e $P_{111}(t)$, respectivamente, considerando-se $\Delta = J/8$ e a condição inicial $\rho(0) = |000\rangle\langle 000|$. Define-se também um novo parâmetro adimensional $\frac{\Omega^{\text{GHZ}}t}{\hbar}$, em que $\Omega^{\text{GHZ}} = \frac{\Delta^3}{J^2}$, que se demonstra importante na discussão da dinâmica temporal do sistema estudado. Nota-se que $P_{000}(t) = P_{111}(t) = 1/2$, para o valor $\frac{\Omega^{\text{GHZ}}t}{\hbar} \sim \pi/4$. Ao mesmo tempo, tem-se $\tau_3 = 1$, notado pela curva de quadrados preto preenchidos no painel (b) da figura 3.1. Simultaneamente ocorre $\tau_2 = 0$, mas esse resultado não é disposto na figura. Como discorrido anteriormente, tais valores obtidos para os quantificadores de emaranhamento são sinais claros da obtenção de um estado pertencente à classe GHZ. Afim de determinar o valor da fase relativa ϕ desse estado GHZ, calculam-se as fidelidades $\mathcal{F}_{\text{GHZ}_-}$ (triângulo marrom preenchido) e $\mathcal{F}_{\text{GHZ}_+}$ (cruz marrom), o que corresponde a fazer o estado ρ_{target} com as fases $\phi = \pm\pi/2$. Obtem-se $\mathcal{F}_{\text{GHZ}_-} = 1$, para instantes de tempo correspondentes à $\frac{\Omega^{\text{GHZ}}t_{\text{GHZ}}^1}{\hbar} \sim \pi/4$ de sorte que se pode concluir que o estado dinâmico do sistema,

nesse instante particular de tempo, é dado por

$$|\Psi(t_{\text{GHZ}}^1)\rangle = |\Psi_{\text{GHZ}}(-\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - i|111\rangle). \quad (3.4)$$

Observam-se também sinais de formação do estado $|\Psi_{\text{GHZ}}(\pi/2)\rangle$ em $\frac{\Omega^{\text{GHZ}}t}{\hbar} \sim 3\pi/4$, indicados por altos valores de τ_3 e $\mathcal{F}_{\text{GHZ}_+}$. Tais valores, no entanto, são ligeiramente inferiores ao valor unitário.

Algumas observações importantes devem aqui ser feitas. A primeira é a de que para o valor exposto de Δ e condição inicial, tem-se apenas as duas populações expostas na figura 3.1 como as dinamicamente acessíveis, sendo todas as demais aproximadamente nulas. No entanto, o espaço de Hilbert em questão tem oito dimensões e, portanto, esse comportamento deve ser considerado não trivial. Pode-se pensar, a priori, como explicação para esse fenômeno, uma bloco-diagonalização do Hamiltoniano $H_{3\text{QBs}}$ na base computacional, sob essas condições dos parâmetros. Adicionalmente, a existência de uma oscilação de dois níveis, envolvendo os estados $|000\rangle$ e $|111\rangle$, fornece fundamentação para a proposição de uma dinâmica efetiva, ocorrendo em um espaço de Hilbert contendo somente os estados citados, e que evolui sob influência de um Hamiltoniano bidimensional efetivo. Este modelo será capaz de reproduzir a mesma física do sistema resolvida numericamente, permitindo compreender e extrair informações importantes do sistema. Como principal exemplo tem-se uma estimativa para a frequência de oscilação desse sistema de dois níveis. A segunda observação é a de que as curvas apresentadas na figura 3.1, painéis (a) e (b), não são tão suaves como expostas. De fato possuem esse comportamento médio, no entanto há um tipo de comportamento de batimento ao redor dessas curvas mais suaves, para o qual a intensidade está diretamente relacionada com o valor de Δ e aumenta com o crescimento desse parâmetro. Nesse sentido, altos valores de Δ implicam em uma dinâmica menos suave, afastando-se também do comportamento de dois níveis. Por fim, alterar a condição inicial para $\rho(0) = |111\rangle\langle 111|$, implica em um mesmo comportamento dinâmico do encontrado na figura 3.1, com a diferença de que a fase relativa do primeiro GHZ produzido é $\phi = \pi/2$, o que, novamente, é consistente com a ideia de bloco-diagonalização de $H_{3\text{QBs}}$ nas condições citadas.

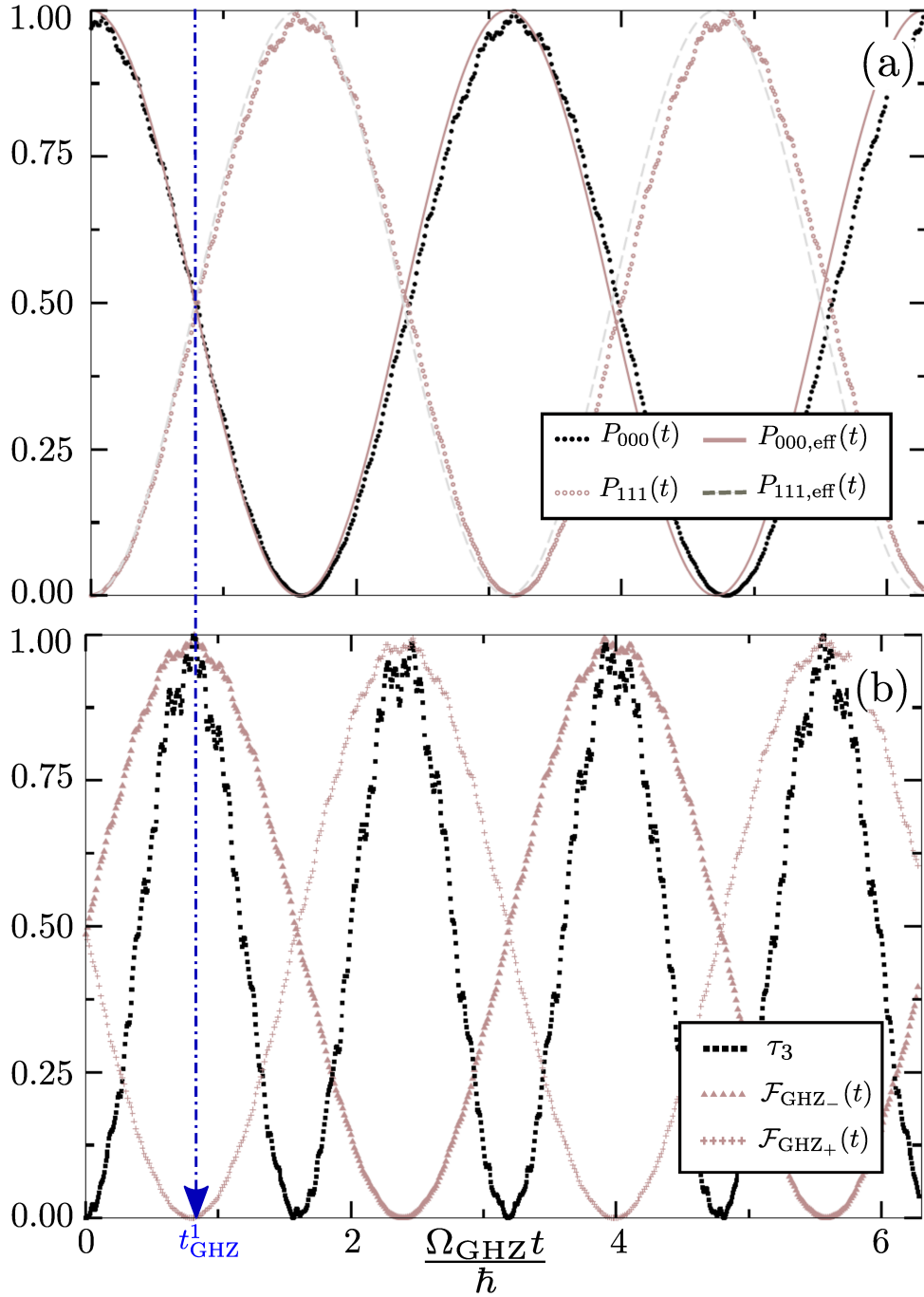


Figura 3.1: Dinâmica em um conjunto de três moléculas quânticas acopladas como função do parâmetro adimensional $\frac{\Omega_{\text{GHZ}} t}{\hbar}$, considerando-se a condição inicial $\rho(0) = |000\rangle\langle 000|$ e os parâmetros físicos $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu\text{eV}$ e $\Delta = J/8$ no Hamiltoniano, eq. (2.38). Painel (a) apresenta as populações $P_{000}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{111}(t)$ (círculo marrom não preenchido), em conjunto com a evolução dessas duas quantidades considerando-se um modelo efetivo de dois níveis (veja a seção sobre o modelo efetivo): $P_{000,\text{eff}}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{111,\text{eff}}(t)$ (linha tracejada cinza). O painel (b) apresenta a evolução de τ_3 (quadrado preto preenchido) e as fidelidades $\mathcal{F}_{\text{GHZ}-}(t)$ (triângulo marrom preenchido) e $\mathcal{F}_{\text{GHZ}+}(t)$ (cruz marrom). As duas últimas são calculados utilizando-se da eq. (2.30), com os estados *target* definidos por $\rho_{\text{target}} = |\Psi_{\text{GHZ}}(\frac{-\pi}{2})\rangle\langle\Psi_{\text{GHZ}}(\frac{-\pi}{2})|$ e $\rho_{\text{target}} = |\Psi_{\text{GHZ}}(\frac{\pi}{2})\rangle\langle\Psi_{\text{GHZ}}(\frac{\pi}{2})|$, respectivamente. A linha vertical ponto-tracejada azul evidencia o tempo de formação do primeiro estado GHZ, correspondendo a $t \sim 10.6\text{ns}$.

Fonte: Próprio autor

Para compreender melhor o papel do parâmetro Δ na dinâmica, plota-se na figura 3.2(a) as populações $P_{000}(t)$ e $P_{111}(t)$, considerando-se um valor maior para a taxa de tunelamento, qual seja, $\Delta = J/6$ e mesma condição inicial. Novamente, essas populações plotadas são as únicas dinamicamente acessadas e a existência de cruzamentos nessas curvas indicam a formação de estados GHZ. Isso é confirmado pelo comportamento de τ_3 e das fidelidades, na figura 3.2(b). Ao passo em que o tempo de obtenção do primeiro estado GHZ diminuiu, sendo esse $t_{\text{GHZ}}^{(2)} \sim 4.46\text{ns}$, a oscilação coerente dos estados $|000\rangle$ e $|111\rangle$ é menos regular, e apresenta uma intensidade maior no comportamento dos batimentos. Os valores máximos de fidelidade e 3-tangle são também ligeiramente inferiores a 1, da ordem de ~ 0.98 . Ressalta-se que, ainda assim, tais estados GHZ de alta fidelidade são bons estados para a realização de protocolos de informação quântica; com isso, quer-se dizer que a probabilidade de sucesso do protocolo é alta para estados com a fidelidade mencionada.

Ao se utilizar a mesma condição inicial, mas com $\Delta = J/4$, ainda se obtém estados GHZ de alta fidelidade. No entanto, nesse ponto, as demais populações tornam-se numericamente não desprezíveis, o que afeta negativamente a dinâmica de dois níveis, diminuindo os valores de fidelidade e τ_3 , e aumentando τ_2 ; em outras palavras, a qualidade dos GHZ obtidos decresce. As simulações não apresentam comportamento dinâmico de interesse para valores de $\Delta > J/4$, ao menos no sentido de obtenção de estados GHZ.

Por outro lado, a utilização de valores $\Delta < J/8$ implica na obtenção de estados GHZ maximamente emaranhados, enquanto o comportamento de batimento é praticamente inexistente. O problema nesse caso dá-se pelo aumento da escala temporal em que a dinâmica ocorre. Uma vez que J está fixo, Δ tem o controle sobre a ordem temporal da dinâmica e verifica-se que são inversamente proporcionais (veja a seção sobre dinâmica efetiva para maiores detalhes). Em um estudo puramente teórico isso não se apresenta como um problema, mas para os propósitos de uma implementação experimental realística, deve-se considerar ao menos algum mecanismo de descoerência. Na existência desse, mesmo anteriormente à obtenção de estados GHZ o mecanismo irá atuar e evoluir o sistema para um estado completamente misto.

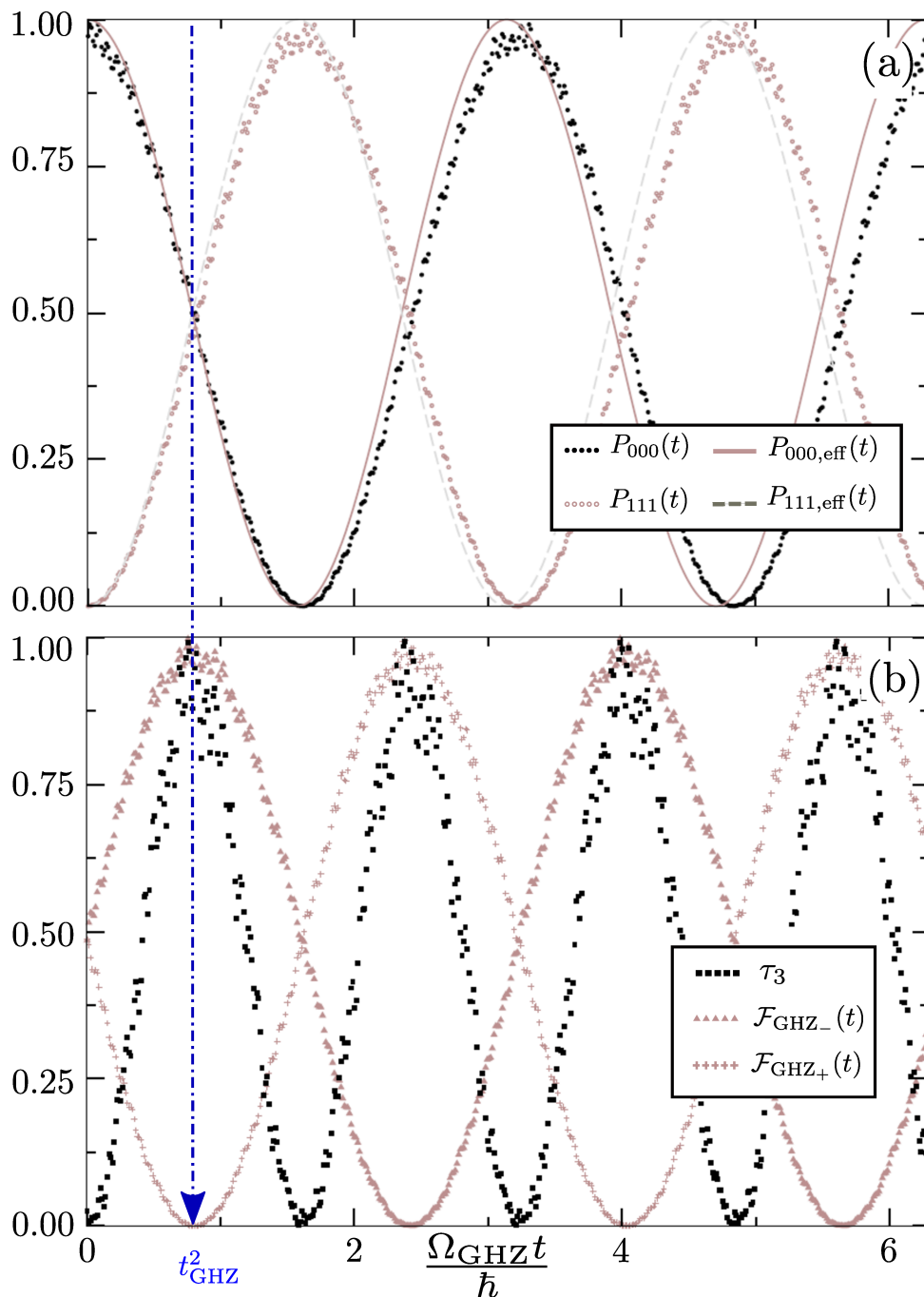


Figura 3.2: Geração dinâmica de estados GHZ para $\Delta = J/6$. A descrição é análoga ao caso encontrado na figura 3.1 e, portanto, são utilizadas as mesmas quantidades. Aqui, a linha ponto-tracejada azul apresenta o tempo de formação do primeiro GHZ, correspondendo a $t_{\text{GHZ}}^{(2)} \sim 4.46\text{ns}$.

Fonte: Próprio autor

Seguindo-se o mesmo procedimento citado nos parágrafos anteriores, pode-se obter os estados da classe GHZ, maximamente emaranhados nesse sentido, aqui denominados FLIP, como definidos na eq. (2.25), considerando o caso $N = 3$. Para o fazer, considera-se

valores equivalentes dos parâmetros no Hamiltoniano, mas se faz $\rho(0) = |010\rangle\langle 010|$ e, para o cálculo da fidelidade, define-se $\rho_{\text{target}} = |\Psi_{\text{FLIP}}(\pm\frac{\pi}{2})\rangle\langle\Psi_{\text{FLIP}}(\pm\frac{\pi}{2})|$. Na figura 3.3 plotam-se os resultados para a dinâmica de populações (solução exata e modelo efetivo), nos painéis superiores (a) e (c), e a dinâmica do quantificador τ_3 e fidelidades, nos painéis inferiores (b) e (d), para dois valores distintos de taxa de tunelamento, quais sejam, $\Delta = J/8$ (painéis (a) e (b)) e $\Delta = J/6$ (painéis (c) e (d)). Uma rápida comparação com os casos anteriores (figuras 3.1 e 3.2), demonstra como a dinâmica é essencialmente equivalente, salvo pela exceção de que, nesse novo caso, as únicas populações (aproximadamente) acessadas são as $P_{010}(t)$ e $P_{101}(t)$. Os cálculos associados à fidelidade e tangle revelam como o estado

$$|\Psi_{\text{FLIP}}(-\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle - i|101\rangle), \quad (3.5)$$

é gerado no instante $t_{\text{FLIP}}^1 = t_{\text{GHZ}}^1$. Também se repete o comportamento do sistema mediante a variação dos valores de tunelamento: valores baixos ($\Delta \leq J/8$) melhoram a oscilação de dois níveis ao passo em que fazem aumentar o período em que a dinâmica ocorre; valores altos ($\Delta \geq J/4$) diminuem o tempo de obtenção de estados GHZ de alta fidelidade, mas o modelo efetivo começa a falhar e diferentes populações tornam-se não desprezíveis. As linhas contínuas nos painéis (a) e (c) referem-se às populações obtidas por um modelo efetivo de dois níveis.

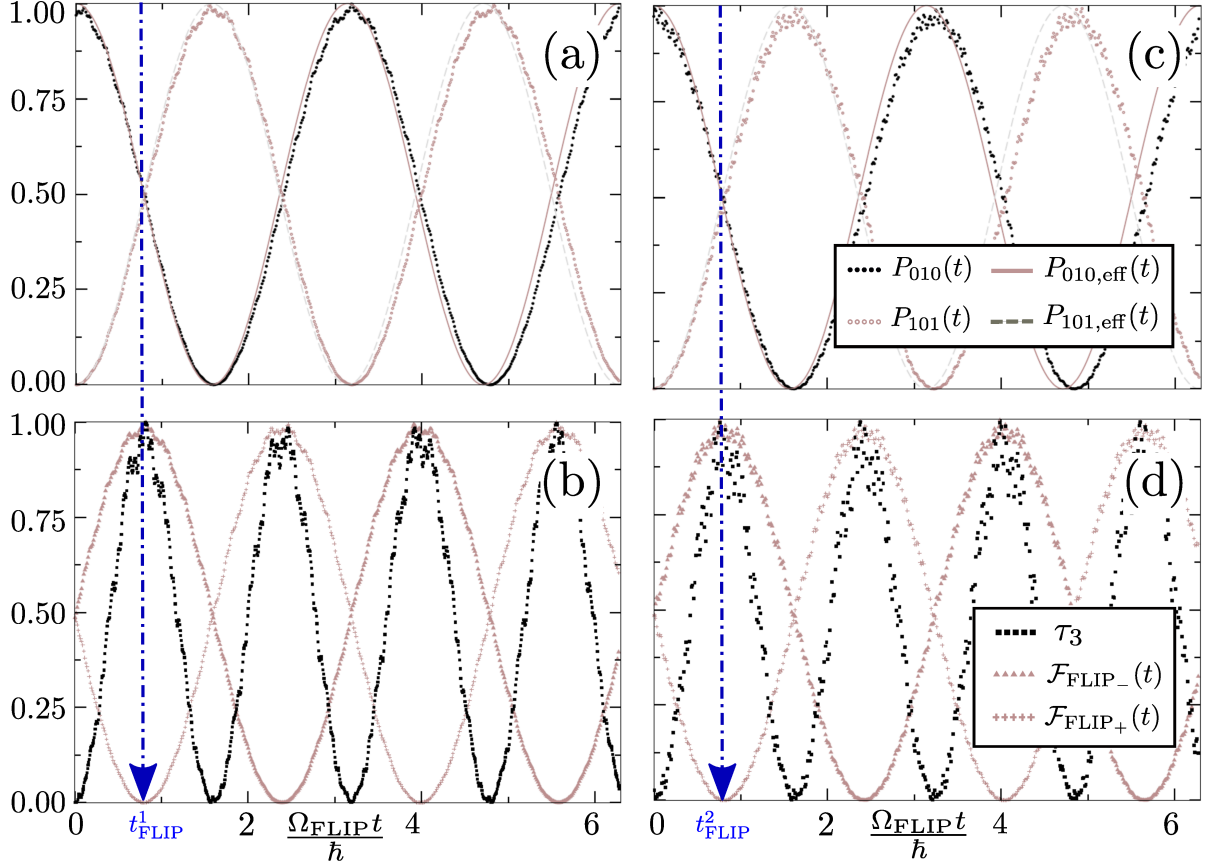


Figura 3.3: Dinâmica do sistema em função do parâmetro adimensional $\frac{\Omega_{\text{FLIP}} t}{\hbar}$, considerando-se a condição inicial $\rho(0) = |010\rangle\langle 010|$, e, para os parâmetros no Hamiltoniano, $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu\text{eV}$, e dois valores de taxa de tunelamento: $\Delta = J/8$ nos painéis (a) e (b), e $\Delta = J/6$ nos painéis (c) e (d). Painel (a): populações $P_{010}(t)$ (círculo preto preenchido), $P_{101}(t)$ (círculo marrom não preenchido), além das populações obtidas partindo-se do modelo efetivo de dois níveis, sendo essas $P_{010,\text{eff}}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{101,\text{eff}}(t)$ (linha tracejada cinza). Painel (b): evolução do quantificador τ_3 (quadrado preto preenchido) e as fidelidades $\mathcal{F}_{\text{FLIP}-}$ (triângulo marrom preenchido) e $\mathcal{F}_{\text{FLIP}+}$ (cruz marrom). As fidelidades são calculadas utilizando-se a eq. (2.30) para os estados *target* $|\Psi_{\text{FLIP}}(-\frac{\pi}{2})\rangle$ e $|\Psi_{\text{FLIP}}(\frac{\pi}{2})\rangle$, respectivamente. A linha vertical azul ponto-tracedada apresenta o tempo de formação do primeiro estado FLIP, de valor $t_{\text{FLIP}}^1 \sim 10.6\text{ns}$. Os painéis (c) e (d) correspondem ao caso $\Delta = J/6$ e seguem as mesmas convenções apresentadas. Nesse caso, a linha vertical azul ponto-tracedada marca o tempo $t_{\text{FLIP}}^2 \sim 4.46\text{ns}$.

Fonte: Próprio autor

3.1.2 Modelo efetivo de dois níveis da geração de estados GHZ

Nessa subseção discutem-se as propriedades do sistema de modo mais analítico e, também, propõe-se uma dinâmica efetiva para substituir a exata, tal que seja mediada por um Hamiltoniano efetivo e envolvendo apenas dois estados (o que é de fato observado com uma boa aproximação na subseção anterior). Essa abordagem esclarece e fornece alguma

justificativa para os resultados das simulações numéricas.

Para tanto, considere o termo H_0 , definido na eq. (2.39). Por construção, o operador em questão é diagonal quando escrito na base computacional $\{|000\rangle, \dots, |111\rangle\}$ e, portanto, os elementos diagonais devem corresponder aos elementos de seu espectro. Esses podem ser diretamente computados e são da forma

$$E_{000} = \langle 000|H_0|000\rangle = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + J_{12} + J_{23} \quad (3.6a)$$

$$E_{001} = \langle 001|H_0|001\rangle = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + J_{12} - J_{23} \quad (3.6b)$$

$$E_{010} = \langle 010|H_0|010\rangle = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - J_{12} - J_{23} \quad (3.6c)$$

$$E_{011} = \langle 011|H_0|011\rangle = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - J_{12} + J_{23} \quad (3.6d)$$

$$E_{100} = \langle 100|H_0|100\rangle = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - J_{12} + J_{23} \quad (3.6e)$$

$$E_{101} = \langle 101|H_0|101\rangle = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - J_{12} - J_{23} \quad (3.6f)$$

$$E_{110} = \langle 110|H_0|110\rangle = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + J_{12} - J_{23} \quad (3.6g)$$

$$E_{111} = \langle 111|H_0|111\rangle = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + J_{12} + J_{23}. \quad (3.6h)$$

Particularmente, na ausência dos termos de dessintonia, $\varepsilon_i = 0 \forall i$, e considerando-se $J_{12} = J_{23} = J$ fixo, obtêm-se um espectro energético de H_0 com três domínios energéticos distintos, da forma

$$E_{000} = E_{111} = 2J \quad (3.7a)$$

$$E_{010} = E_{101} = -2J \quad (3.7b)$$

$$E_{001} = E_{011} = E_{100} = E_{110} = 0 \quad (3.7c)$$

Denomina-se \tilde{H}_0 o Hamiltoniano diagonal resultante da escolha de parâmetros relacionada acima, na eq. (2.38). Destaca-se agora o operador \tilde{V} , contendo todos os elementos não diagonais definido como

$$\tilde{V} = \Delta \sum_{i=1}^3 \sigma_x^{(i)}, \quad (3.8)$$

tal que $\tilde{H}_{3\text{QBs}} = \tilde{H}_0 + \tilde{V}$. A seguir, considera-se uma situação em que $\Delta \ll J$, tal que o

operador não-diagonal \tilde{V} pode ser tratado como uma perturbação. Notou-se, anteriormente, como a evolução das populações, dada uma condição inicial ajustada para um dos autoestados de \tilde{H}_0 (e que pertence a um dos domínios energéticos), sob o Hamiltoniano $\tilde{H}_{3\text{QBs}}$, com \tilde{V} sendo considerado uma perturbação ($\Delta \in [\frac{J}{8}, \frac{J}{4}]$), não permite uma evolução para estados fora desse subespaço de \tilde{H}_0 .

Esse fato é de bastante interesse pela argumentação que segue: considere $\rho(0) = |000\rangle\langle 000|$. Agora, como consequência de $\Delta \ll J$, os únicos estados acessados dinamicamente devem ser, aproximadamente, $|000\rangle$ e $|111\rangle$. Ora, isso corresponde a um sistema de dois níveis envolvendo tais estados. Em um instante arbitrário, o sistema pode ser considerado no estado

$$|\Psi(t)\rangle \sim C_1(t) |000\rangle + C_2(t) |111\rangle. \quad (3.9)$$

Ainda que seja impossível, da argumentação anterior, afirmar que isso de fato irá ocorrer, se em um instante particular t' , obtêm-se $C_1(t') = C_2(t') \sim \frac{1}{\sqrt{2}}$, então

$$|\Psi(t')\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle). \quad (3.10)$$

Esse último pode ser identificado como um estado maximamente emaranhado da classe GHZ.

É importante ressaltar que não há (no sentido analítico) uma bloco-diagonalização de $\tilde{H}_{3\text{QBs}}$ na base computacional e, desse modo, outras populações podem ser acessadas com uma baixa probabilidade; a aproximação de dois níveis torna-se ótima na medida em que os valores de Δ decrescem para um J fixo. Esse fato também explica o comportamento de batimento observado nas curvas de populações, o que deve ser atribuído ao aumento de população nos demais subespaços de \tilde{H}_0 . Por fim, ao se utilizar de uma condição inicial associada ao subespaço de energia nula, ainda são obtidos estados GHZ; no entanto, a dinâmica nesse subespaço é um pouco mais complexa, visto que envolve quatro estados ao invés de dois.

Como consequência do comportamento comentado, propõe-se substituir o espaço de Hilbert dos três qubits por um espaço de apenas dois níveis, composto dos estados $|000\rangle$ e

$|111\rangle$. A dinâmica agora ocorre por meio de um Hamiltoniano efetivo definido para atuar nesse novo espaço, sendo da forma

$$H_{3\text{QBs,eff}}^{\text{GHZ}} = \Omega^{\text{GHZ}}|111\rangle\langle 000| + h.c., \quad (3.11)$$

em que Ω^{GHZ} é o acoplamento efetivo por entre esses dois estados. Um Hamiltoniano efetivo similar pode ser proposto no caso de a condição inicial dar-se no subespaço de energia $-2J$, sendo da forma

$$H_{3\text{QBs,eff}}^{\text{FLIP}} = \Omega^{\text{FLIP}}|101\rangle\langle 010| + h.c., \quad (3.12)$$

e em que se observa a equivalência do valor do acoplamento, i.e., conclui-se que $\Omega^{\text{FLIP}} = \Omega^{\text{GHZ}}$. Note como os processos considerados no Hamiltoniano $\tilde{H}_{3\text{QBs}}$ não são capazes, em primeira ordem, de acoplar os estados citados. Nesse sentido, deve-se considerar que a transição requerida ocorre por meio de transições virtuais nos demais estados do espaço de Hilbert completo dos três qubits, e em uma escala temporal curta quando comparada à escala temporal da dinâmica do sistema.

Busca-se agora determinar o valor acoplamento efetivo Ω^{GHZ} . Considerando-se a discussão acerca das populações acessadas dinamicamente via $\tilde{H}_{3\text{QBs}}$, dependendo da condição inicial, pode-se pensar em dividir o espaço de Hilbert em duas parcelas, quais sejam, a parte A composta dos estados $\{|000\rangle, |111\rangle\}$, e a parte B, composta pelo estados $\{|001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle\}$ (pode-se utilizar esse mesmo desenvolvimento de modo a se determinar Ω^{FLIP} , desde que se altere o segmento A com os estados corretos). Reorganiza-se a base do espaço de Hilbert de maneira a evidenciar essas duas partes como segue

$$\{\{|000\rangle, |111\rangle\}, \{|001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle\}\}. \quad (3.13)$$

Kets nesse rearranjo serão da forma

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} C_A \\ C_B \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

em que C_A é um bloco 2x1 do vetor $|\psi\rangle$ com as componentes associadas à parte A do espaço de Hilbert (e o mesmo argumento para C_B , sendo esse um bloco 6x1). Operadores também podem ser representados nesse rearranjo utilizando-se de blocos, como segue

$$O = \begin{pmatrix} O^{AA} & O^{AB} \\ O^{BA} & O^{BB} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Nesse caso, O^{AA} é um bloco 2x2 da matrix O relacionado à parte A, O^{BB} é um bloco 6x6 da matrix O relacionado à parte B, O^{AB} é um bloco 2x6 da matrix O e é responsável pelo acoplamento do espaço B com o espaço A e, por fim, O^{BA} é um bloco 6x2 da matrix O e é responsável pelo acoplamento do espaço A com o espaço B.

Particularmente, $\tilde{H}_{3\text{QBs}}$ é representado nesse arranjo como segue

$$\tilde{H}_{3\text{QBs}} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_{3\text{QBs}}^{AA} & \tilde{H}_{3\text{QBs}}^{AB} \\ \tilde{H}_{3\text{QBs}}^{BA} & \tilde{H}_{3\text{QBs}}^{BB} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

A partir desse ponto, o subíndice 3QBs dos blocos matriciais será omitido. Analisa-se agora o problema de autovalores associado a $\tilde{H}_{3\text{QBs}}$, dado por

$$\tilde{H}_{3\text{QBs}}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (3.17)$$

e, escrito de maneira mais explícita, da forma

$$\begin{pmatrix} \tilde{H}^{AA} & \tilde{H}^{AB} \\ \tilde{H}^{BA} & \tilde{H}^{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_A \\ C_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} C_A \\ C_B \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

A equação acima é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\tilde{H}^{AA}C_A + \tilde{H}^{AB}C_B = EC_A \quad (3.19)$$

$$\tilde{H}^{BA}C_A + \tilde{H}^{BB}C_B = EC_B \quad (3.20)$$

Da equação (3.20), tem-se

$$C_B = (E - \tilde{H}^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} C_A. \quad (3.21)$$

Substituindo-se a eq. (3.21) na eq. (3.19), decorre a seguinte equação

$$\left[\tilde{H}^{AA} + \tilde{H}^{AB} (E - \tilde{H}^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} \right] C_A = E C_A. \quad (3.22)$$

Note como a eq. (3.22) é exatamente o que se espera de uma dinâmica efetiva no subespaço A, dado que se defina

$$\tilde{H}_{3\text{QBs}, \text{eff}}^{\text{GHZ}} = \tilde{H}^{AA} + \tilde{H}^{AB} (E - \tilde{H}^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA}, \quad (3.23)$$

como o Hamiltoniano efetivo dessa dinâmica. Interessa-se aqui pelo elemento $\langle 111 | \tilde{H}_{3\text{QBs}, \text{eff}}^{\text{GHZ}} | 000 \rangle$ do Hamiltoniano efetivo acima, pois a seguinte identificação é possível

$$\Omega^{\text{GHZ}} = \langle 111 | \tilde{H}_{3\text{QBs}, \text{eff}}^{\text{GHZ}} | 000 \rangle. \quad (3.24)$$

De maneira a determinar Ω^{GHZ} , deve-se agora estudar a forma explícita dos operadores \tilde{H}^{AA} , \tilde{H}^{AB} , \tilde{H}^{BA} , \tilde{H}^{BB} . Para tanto, definem-se os projetores P e Q , tais que

$$P = |000\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111|, \quad (3.25)$$

$$Q = I - P. \quad (3.26)$$

Note, das definições (3.25) e (3.26), como P é um projetor do subespaço A, ao passo em que Q é um projetor do subespaço B. Ainda, recordando-se de que $\tilde{H}_{3\text{QBs}} = \tilde{H}_0 + \tilde{V}$,

decorrem as seguintes definições

$$\tilde{H}^{AA} = P(\tilde{H}_0 + \tilde{V})P, \quad (3.27a)$$

$$\tilde{H}^{BB} = Q(\tilde{H}_0 + \tilde{V})Q, \quad (3.27b)$$

$$\tilde{H}^{AB} = P(\tilde{H}_0 + \tilde{V})Q, \quad (3.27c)$$

$$\tilde{H}^{BA} = Q(\tilde{H}_0 + \tilde{V})P. \quad (3.27d)$$

Da eq. (3.27a), tem-se

$$\tilde{H}^{AA} = P\tilde{H}_0P + PVP. \quad (3.28)$$

Sendo \tilde{H}_0 diagonal na base computacional, identifica-se que

$$P\tilde{H}_0P = E_{000}|000\rangle\langle 000| + E_{111}|111\rangle\langle 111|. \quad (3.29)$$

Utilizando-se a eq. (3.8) e a eq. (3.25), conclui-se que

$$VP = \Delta(|100\rangle\langle 000| + |011\rangle\langle 111| + |010\rangle\langle 000| + |101\rangle\langle 111| + |001\rangle\langle 000| + |110\rangle\langle 111|). \quad (3.30)$$

Ora, portanto,

$$PVP = 0. \quad (3.31)$$

Assim, tem-se o primeiro bloco escrito de maneira explícita na base computacional, sendo esse da forma

$$\tilde{H}^{AA} = E_{000}|000\rangle\langle 000| + E_{111}|111\rangle\langle 111|. \quad (3.32)$$

Adicionalmente, substituindo-se a eq. (3.23) na eq. (3.24), tem-se

$$\Omega^{\text{GHZ}} = \langle 111|\tilde{H}_{3\text{QBs, eff}}^{\text{GHZ}}|000\rangle = \langle 111|\tilde{H}^{AA}|000\rangle + \langle 111|\tilde{H}^{AB}(E - \tilde{H}^{BB})^{-1}\tilde{H}^{BA}|000\rangle. \quad (3.33)$$

Utilizando-se a eq. (3.32) na equação acima, decorre que

$$\Omega^{\text{GHZ}} = \langle 111 | \tilde{H}_{3\text{QBs, eff}}^{\text{GHZ}} | 000 \rangle = \langle 111 | \tilde{H}^{AB} (E - \tilde{H}^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} | 000 \rangle. \quad (3.34)$$

Da eq. (3.27b), tem-se

$$\tilde{H}^{BB} = Q\tilde{H}_0Q + QVQ \equiv \tilde{H}_0^{BB} + V^{BB}, \quad (3.35)$$

em que se define

$$Q\tilde{H}_0Q = \tilde{H}_0^{BB}, \quad (3.36)$$

$$QVQ = V^{BB}. \quad (3.37)$$

Nesse ponto, anteriormente à determinação dos operadores \tilde{H}_0^{BB} e V^{BB} , deve-se retornar à expressão de Ω^{GHZ} para a apresentação de um importante desenvolvimento. Observe a eq. (3.34) e considere, em particular, o termo $(E - \tilde{H}^{BB})^{-1}$. Note que

$$E - \tilde{H}^{BB} = E - \tilde{H}_0^{BB} - V^{BB} = (E - \tilde{H}_0^{BB}) \left[I - (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} V^{BB} \right]. \quad (3.38)$$

Segue, portanto, a seguinte identidade

$$(E - \tilde{H}^{BB})^{-1} = \left[I - (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} V^{BB} \right]^{-1} (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}. \quad (3.39)$$

Esse passo é justificado na medida em que \tilde{H}_0^{BB} é diagonal na base computacional, enquanto \tilde{H}^{BB} não o é. Sabe-se, dessa maneira, atuar o operador $(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}$ em estados da base computacional, utilizando-se da propriedade

$$F(\hat{A})|a\rangle = F(a)|a\rangle, \quad (3.40)$$

em que $F(\hat{A})$ é uma função do operador \hat{A} e $|a\rangle$ um de seus autoestados. Substituindo-se

então (3.39) em (3.34), tem-se

$$\Omega^{\text{GHZ}} = \langle 111 | \tilde{H}^{AB} \left[I - (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} V^{BB} \right]^{-1} (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} | 000 \rangle. \quad (3.41)$$

Definindo-se

$$X \equiv (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} V^{BB}, \quad (3.42)$$

decorre que

$$\left[I - (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} V^{BB} \right]^{-1} = (I - X)^{-1}. \quad (3.43)$$

O operador acima pode ser expandido em série de Taylor, tornando-se

$$(I - X)^{-1} = I + X + X^2 + X^3 + \dots \quad (3.44)$$

O termo de ordem zero I é incapaz de acoplar os estados $|000\rangle$ e $|111\rangle$ (pois para tanto é necessário ao menos um processo de terceira ordem em V ; note como Ω^{GHZ} possui, sem a expansão do operador, um processo de ordem dois em V , visto pela presença de \tilde{H}^{AB} e \tilde{H}^{BA}). Nesse sentido, o termo de ordem 1, qual seja, X é suficiente para a ocorrência do requerido acoplamento. Utiliza-se então da seguinte aproximação para o cálculo de Ω^{GHZ} ,

$$(I - X)^{-1} \sim I + X. \quad (3.45)$$

Como dito anteriormente, a identidade não contribui para Ω^{GHZ} e, portanto, tem-se (substituindo-se a aproximação em série de Taylor para o operador na eq. (3.41) e identificando corretamente X)

$$\Omega^{\text{GHZ}} = \langle 111 | \tilde{H}^{AB} (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} V^{BB} (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} | 000 \rangle. \quad (3.46)$$

Pode-se agora retornar ao estudo da forma explícita dos operadores envolvidos na

definição de Ω^{GHZ} . Com efeito, da eq. (3.37), tem-se

$$V^{BB} = QVQ. \quad (3.47)$$

Calcula-se, em primeira instância, o operador VQ , resultando em

$$\begin{aligned} VQ = \Delta(&|101\rangle\langle 001| + |110\rangle\langle 010| + |111\rangle\langle 011| + |000\rangle\langle 100| + |001\rangle\langle 101| + |010\rangle\langle 110| \\ &+ |011\rangle\langle 001| + |000\rangle\langle 010| + |001\rangle\langle 011| + |110\rangle\langle 100| + |111\rangle\langle 101| + |100\rangle\langle 110| \\ &+ |000\rangle\langle 001| + |011\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 011| + |101\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 101| + |111\rangle\langle 110|), \end{aligned} \quad (3.48)$$

e em seguida, calcula-se o operador completo QVQ (simplesmente a aplicação do projetor Q no operador VQ). Portanto,

$$\begin{aligned} V^{BB} = \Delta\left(&|001\rangle\langle 101| + |001\rangle\langle 011| + |010\rangle\langle 110| + |010\rangle\langle 011| \\ &+ |011\rangle\langle 001| + |011\rangle\langle 010| + |100\rangle\langle 110| + |100\rangle\langle 101| \\ &+ |101\rangle\langle 001| + |101\rangle\langle 100| + |110\rangle\langle 010| + |110\rangle\langle 100| \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Da eq. (3.36), é fácil notar que a forma explícita desse operador é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0^{BB} = &E_{001}|001\rangle\langle 001| + E_{010}|010\rangle\langle 010| + E_{011}|011\rangle\langle 011| + \\ &E_{100}|100\rangle\langle 100| + E_{101}|101\rangle\langle 101| + E_{110}|110\rangle\langle 110|. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Da eq. (3.27c), tem-se

$$\tilde{H}^{AB} = P\tilde{H}_0Q + PVQ. \quad (3.51)$$

Naturalmente o operador $P\tilde{H}_0Q$ é nulo pois, novamente, \tilde{H}_0 é diagonal na base computacional. Tem-se, dessa maneira,

$$\tilde{H}^{AB} = PVQ = (|000\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111|)VQ, \quad (3.52)$$

e utilizando-se o operador VQ calculado anteriormente, obtém-se

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{AB} = & \Delta(|000\rangle\langle 100| + |000\rangle\langle 010| + |000\rangle\langle 001| \\ & + |111\rangle\langle 011| + |111\rangle\langle 101| + |111\rangle\langle 110|).\end{aligned}\quad (3.53)$$

Da eq. (3.27d), tem-se

$$\tilde{H}^{BA} = Q\tilde{H}_0P + QVP = QVP, \quad (3.54)$$

em que, novamente, o operador $Q\tilde{H}_0P$ é o operador nulo. O operador VP já foi estudado anteriormente, de sorte que para determinar \tilde{H}^{BA} é suficiente aplicar a esse o operador Q . Tal operação permite concluir o que segue

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{BA} = & \Delta(|001\rangle\langle 000| + |010\rangle\langle 000| + |100\rangle\langle 000| \\ & + |011\rangle\langle 111| + |101\rangle\langle 111| + |110\rangle\langle 111|).\end{aligned}\quad (3.55)$$

Tem-se agora todos os operadores requeridos para a determinação de Ω^{GHZ} . Da eq. (3.46) e inserindo dois operadores identidade nessa expressão, decorre que

$$\Omega^{\text{GHZ}} = \sum_{k=1}^8 \sum_{u=1}^8 \langle 111|\tilde{H}^{AB}|k\rangle\langle k|(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}V^{BB}(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}|u\rangle\langle u|\tilde{H}^{BA}|000\rangle. \quad (3.56)$$

Note em (3.56) como apesar dos índices dos somatórios percorrerem todos os vetores do espaço de Hilbert, contribuem para Ω^{GHZ} efetivamente apenas os termos cujo acoplamento é permitido pelos operadores \tilde{H}^{AB} , \tilde{V}^{BB} e \tilde{H}^{BA} . Analisando-se as expressões explícitas de tais operadores, nota-se que há termos de acoplamento apenas para um número reduzido de estados. Além disso, note como esses operadores estão intimamente ligados à perturbação \tilde{V} e que de fato para a transição requerida são necessários processos virtuais na parte B do espaço de Hilbert.

Define-se a seguinte identificação: $k = 1, |000\rangle$; $k = 2, |111\rangle$; $k = 3, |001\rangle$; $k = 4, |010\rangle$; $k = 5, |011\rangle$; $k = 6, |100\rangle$; $k = 7, |101\rangle$; $k = 8, |110\rangle$. A partir de (3.53), calcula-se

o seguinte termo

$$\langle 111|\tilde{H}^{AB}|k\rangle = \Delta(\langle 011|k\rangle + \langle 101|k\rangle + \langle 110|k\rangle) = \Delta(\delta_{k,5} + \delta_{k,7} + \delta_{k,8}). \quad (3.57)$$

Substituindo-se a eq. (3.57) na equação (3.56) e após algumas manipulações, vem

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{GHZ}} = & \sum_{u=1}^8 \Delta \langle 011|(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}V^{BB}(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}|u\rangle \langle u|\tilde{H}^{BA}|000\rangle + \\ & \sum_{u=1}^8 \Delta \langle 101|(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}V^{BB}(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}|u\rangle \langle u|\tilde{H}^{BA}|000\rangle + \\ & \sum_{u=1}^8 \Delta \langle 110|(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}V^{BB}(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}|u\rangle \langle u|\tilde{H}^{BA}|000\rangle. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Por outro lado, da eq. (3.55), conclui-se que

$$\langle u|\tilde{H}^{BA}|000\rangle = \Delta(\langle u|001\rangle + \langle u|010\rangle + \langle u|100\rangle) = \Delta(\delta_{u,3} + \delta_{u,4} + \delta_{u,6}). \quad (3.59)$$

Novamente, substituindo-se a eq. (3.59) na eq. (3.58) e após algumas manipulações, obtêm-se

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{GHZ}} = & \Delta^2 \langle 011|(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}V^{BB}(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}|001\rangle + \\ & \Delta^2 \langle 011|(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}V^{BB}(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}|010\rangle + \\ & \Delta^2 \langle 011|(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}V^{BB}(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}|100\rangle + \\ & \Delta^2 \langle 101|(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}V^{BB}(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}|001\rangle + \\ & \Delta^2 \langle 101|(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}V^{BB}(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}|010\rangle + \\ & \Delta^2 \langle 101|(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}V^{BB}(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}|100\rangle + \\ & \Delta^2 \langle 110|(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}V^{BB}(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}|001\rangle + \\ & \Delta^2 \langle 110|(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}V^{BB}(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}|010\rangle + \\ & \Delta^2 \langle 110|(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}V^{BB}(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}|100\rangle. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Aplicando-se na eq. (3.60) a propriedade (3.40), decorre que

$$\begin{aligned}
\Omega^{GHZ} = & \frac{\Delta^2 \langle 011 | V^{BB} | 001 \rangle}{(E - E_{011})(E - E_{001})} + \frac{\Delta^2 \langle 011 | V^{BB} | 010 \rangle}{(E - E_{011})(E - E_{010})} + \frac{\Delta^2 \langle 011 | V^{BB} | 100 \rangle}{(E - E_{011})(E - E_{100})} + \\
& \frac{\Delta^2 \langle 101 | V^{BB} | 001 \rangle}{(E - E_{101})(E - E_{001})} + \frac{\Delta^2 \langle 101 | V^{BB} | 010 \rangle}{(E - E_{101})(E - E_{010})} + \frac{\Delta^2 \langle 101 | V^{BB} | 100 \rangle}{(E - E_{101})(E - E_{100})} + \\
& \frac{\Delta^2 \langle 110 | V^{BB} | 001 \rangle}{(E - E_{110})(E - E_{001})} + \frac{\Delta^2 \langle 110 | V^{BB} | 010 \rangle}{(E - E_{110})(E - E_{010})} + \frac{\Delta^2 \langle 110 | V^{BB} | 100 \rangle}{(E - E_{110})(E - E_{100})}.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

A partir da eq. (3.49), conclui-se que

$$\langle 011 | V^{BB} | 100 \rangle = \langle 101 | V^{BB} | 010 \rangle = \langle 110 | V^{BB} | 001 \rangle = 0, \tag{3.62}$$

ao passo que os demais termos presentes na eq. (3.61) envolvendo o operador V^{BB} são todos iguais a Δ . Finalmente, substituindo-se essas informações na (3.61), vem

$$\begin{aligned}
\Omega^{GHZ} = & \frac{\Delta^3}{(E - E_{011})(E - E_{001})} + \frac{\Delta^3}{(E - E_{011})(E - E_{010})} + \\
& \frac{\Delta^3}{(E - E_{101})(E - E_{001})} + \frac{\Delta^3}{(E - E_{101})(E - E_{100})} + \\
& \frac{\Delta^3}{(E - E_{110})(E - E_{010})} + \frac{\Delta^3}{(E - E_{110})(E - E_{100})}.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Chegou-se na equação acima partindo-se da eq. de Schrödinger independente do tempo exata (com isso quer-se dizer que $|\psi\rangle$ e E correspondem aos autoestados e autovalores de $\tilde{H}_{3\text{QBs}}$). Nesse sentido, pode-se imaginar $|\psi\rangle$ como o conjunto de autoestados correspondentes à \tilde{H}_0 obtidos por correções da perturbação \tilde{V} e o mesmo é válido para os autovalores E . Portanto, pode-se fazer, por exemplo, $|\psi\rangle$ como a correção no ket $|000\rangle$ e E como a correção da energia E_{000} . É fácil se convencer de que as correções serão pequenas se comparadas com esse último valor e, portanto, faz-se $E \sim E_{000} = 2J$. Substituindo-se

essa aproximação na expressão acima, obtém-se $\Omega^{\text{GHZ}} = \Delta^3/J^2$.

A solução do problema efetivo

$$i\hbar\dot{\rho}_{\text{eff}}(t) = \left[\tilde{H}_{3\text{QBs,eff}}^{\text{GHZ}}, \rho_{\text{eff}}(t) \right] \quad (3.64)$$

tem como consequência (nas condições iniciais apresentadas na subseção das simulações numéricas) a seguinte forma para as populações

$$P_{000,\text{eff}}(t) = \text{Tr}(|000\rangle\langle 000| \rho_{\text{eff}}(t)) = \cos^2\left(\frac{\Omega^{\text{GHZ}}t}{\hbar}\right), \quad (3.65)$$

$$P_{111,\text{eff}}(t) = \text{Tr}(|111\rangle\langle 111| \rho_{\text{eff}}(t)) = \sin^2\left(\frac{\Omega^{\text{GHZ}}t}{\hbar}\right). \quad (3.66)$$

As oscilações de Rabi para as populações efetivas $P_{000,\text{eff}}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{111,\text{eff}}(t)$ (linha tracejada cinza) podem ser encontradas nas figuras 3.1 e 3.2 para diferentes valores de Δ . Note como o modelo efetivo descreve bem o modelo exato para baixos valores de tempo (qualquer que seja o valor de Δ no regime citado) e, pensando-se em escalas temporais maiores, o modelo fita melhor menores valores de Δ . O modelo também permite concluir como a evolução exata é não periódica e, nos casos de maior valor de Δ , decai na amplitude (o que é explicado pelo aumento de populações na parte B do espaço de Hilbert). O mesmo comportamento das populações efetivas é observado considerando-se a condição inicial no subespaço de energia $-2J$ (veja a figura 3.3).

Uma vez que sistemas realistas estão sob ação de mecanismos de descoerência, é de fundamental importância estudar a escala temporal em que a dinâmica exata ocorre. Isso pode ser feito utilizando-se do modelo efetivo, uma vez que esse é descrito por uma função periódica analítica. Das equações (3.65) e (3.66), conclui-se que o período de oscilação associado à dinâmica efetiva é dado por

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{2\pi}{\frac{\Omega^{\text{GHZ}}}{\hbar}} \right]. \quad (3.67)$$

Considerando-se $\Delta = \frac{J}{x}$, $x \in \mathbb{R}$, substituição direta na expressão acima permite

concluir

$$T_3(x, J) = \left(\frac{h}{2J} \right) x^3. \quad (3.68)$$

Recorda-se de que esse modelo só é válido na condição em que $\varepsilon_i = 0$, J fixo e $\Delta \ll J$. Também, as simulações demonstraram como os melhores valores para a taxa de tunelamento estão no intervalo $\Delta \in [J/8, J/4]$ e, portanto, $x \in [4, 8]$. Utilizando-se o valor do acoplamento de Coulomb $J = 25\mu\text{eV}$, tem-se

$$T(x, 25\mu\text{eV}) \sim (0.083\text{ns})x^3. \quad (3.69)$$

A eq. (3.69) permite compreender a influência direta da variação da taxa de tunelamento Δ no período de oscilação (ao menos nesse regime em que a dinâmica efetiva descreve de maneira adequada o sistema exato). Grandes valores desse acoplamento ($x \leq 4$), diminuem o período da oscilação (entretanto o modelo efetivo deixa de ser uma boa descrição do sistema, pelos motivos já expostos anteriormente). Por outro lado, baixos valores desse acoplamento ($x \geq 8$) melhoram a descrição do sistema pelo modelo efetivo, ao custo de que o período de oscilação cresça polinomialmente com a terceira potência de x ; nesse sentido, deve-se sempre ter em mente que o período de atuação (experimentalmente aceito) para os mecanismos de dephasing (veja a subseção de dinâmica sob um canal de dephasing) é da ordem de 1ns. Essa é, de maneira simplificada, a razão pela qual trunca-se $x = 8$ (truncando-se, portanto, $\Delta = J/8$ como o menor valor da taxa de tunelamento). Substituindo-se alguns valores de x , tem-se: $T(4, 25\mu\text{eV}) \sim 5.3\text{ns}$, $T(6, 25\mu\text{eV}) \sim 17.9\text{ns}$, $T(8, 25\mu\text{eV}) \sim 42.3\text{ns}$. Nas simulações numéricas, o tempo de obtenção do primeiro estado GHZ ocorre aproximadamente em $\frac{1}{4}T$. Esses longos períodos de oscilação (se comparados aos tempos empíricos de obtenção da oscilação coerente do sistema de dois qubits $\sim 2\text{ns}$) também explicam o porquê de o sistema ser tão frágil em relação ao canal quântico ruidoso de dephasing.

3.1.3 A dinâmica sob influência de um canal ruidoso - dephasing

Nessa subseção, discute-se os efeitos de *dephasing*¹ de carga, o principal mecanismo de descoerência no contexto de pontos quânticos de carga [51, 65, 66]. Para quantificar o efeito do dephasing na geração dos estados GHZ, resolve-se numericamente uma equação mestra de Lindblad [60] escrita como

$$\dot{\rho}(t) = [H_{3\text{QBs}}, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 \Gamma_k \left(2L_k \rho L_k^\dagger - L_k L_k^\dagger \rho - \rho L_k L_k^\dagger \right), \quad (3.70)$$

em que Γ_k são as taxas associadas ao canal de dephasing em unidades de energia, L_k são os operadores de pulso (tradução livre de *jump operators*), e a escala temporal do processo de dephasing é dada por $T_{\text{deph}} = 1/\gamma_k = \hbar/\Gamma_k$, com γ_k em Hertz. O agente físico por trás desse processo é a flutuação de carga do background (lembre-se, ainda que efetivamente somente o grau de liberdade de ocupação de um elétron define o qubit de carga, existem vários outros elétrons formando esse *background*; a flutuação energética dessas cargas de fundo provoca, portanto, uma flutuação energética do nível ocupado por esse elétron definidor do qubit). De modo a modelar o efeito de dephasing, consideram-se os operadores de pulso como

$$L_k = |k\rangle \langle k|, \quad (3.71)$$

na equação (3.70). Aqui, $|k\rangle$ corresponde a um dos elementos da base computacional. Portanto, $L_1 = |000\rangle \langle 000|$, $L_2 = |001\rangle \langle 001|$ e assim por diante. A solução numérica é obtida considerando-se $\Gamma_k = \Gamma_{\text{deph}}$ para todo k .

Plota-se na figura 3.4 os resultados para a dinâmica das populações $P_{000}(t)$ (ponto preto preenchido) e $P_{111}(t)$ (ponto marrom não preenchido), e a fidelidade \mathcal{F}_{GHZ} (triângulo marrom preenchido), considerando-se três valores distintos do parâmetro de dephasing: $\gamma_{\text{deph}} = 10^{-2}$ GHz no painel (a), $\gamma_{\text{deph}} = 10^{-1}$ GHz no painel (b) e $\gamma_{\text{deph}} = 1$ GHz no painel (c). Os parâmetros no Hamiltoniano, por sua vez, são os mesmos do caso sem dephasing

¹O *dephasing* é um importante mecanismo de descoerência para o contexto da informação quântica e a sua atuação em um operador densidade genérico é eliminar, assintoticamente no tempo, as coerências, transformando tal operador em um estado separável.

(particularmente, $\Delta = J/6$). Busca-se aqui a formação do estado GHZ $|\Psi_{\text{GHZ}}(-\pi/2)\rangle$, posto que tal estado é o primeiro dinamicamente gerado.

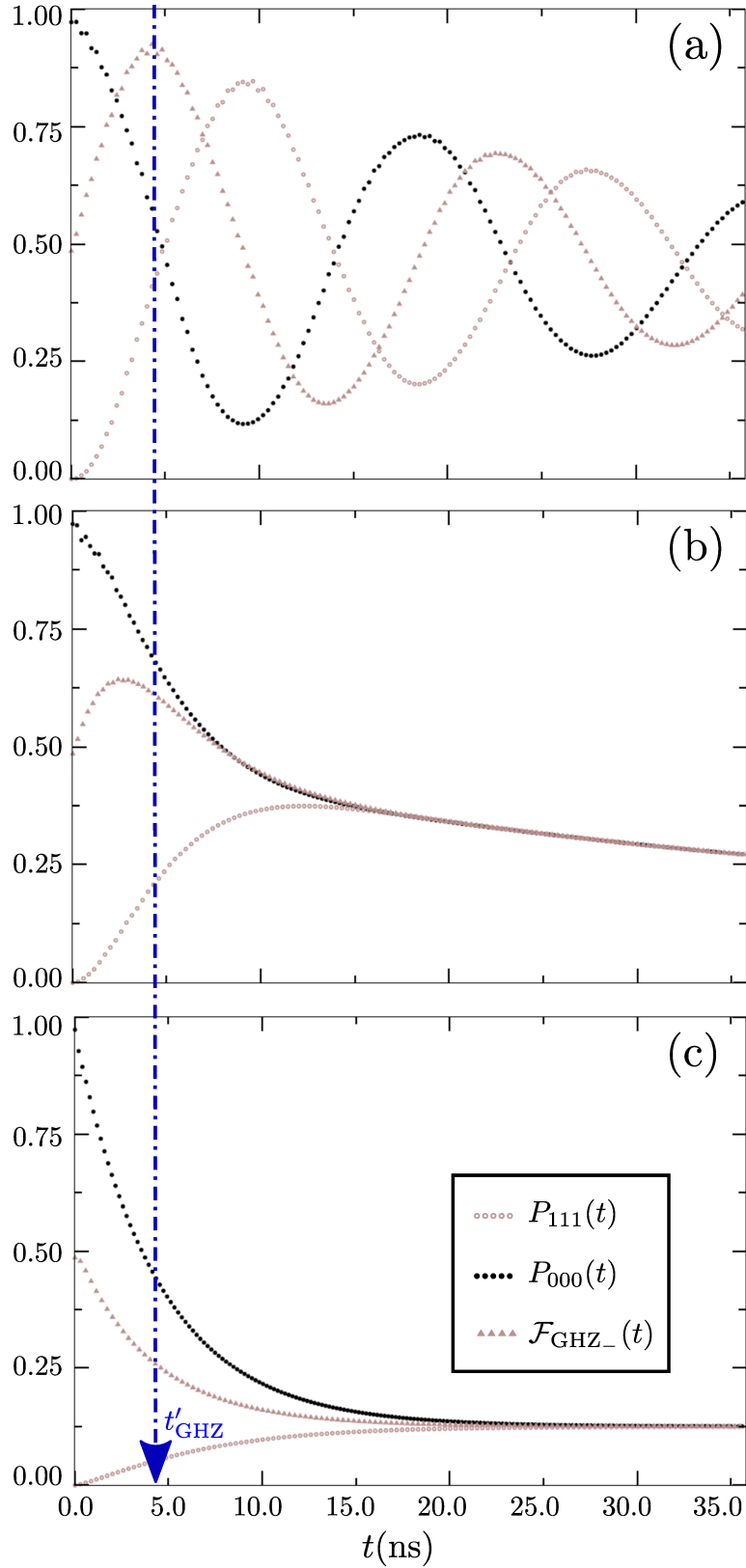


Figura 3.4: Dinâmica das populações $P_{000}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{111}(t)$ (círculo marrom não preenchido), tal como a fidelidade $\mathcal{F}_{\text{GHZ}_-}$ (triângulo marrom) considerando a ação do dephasing para $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu\text{eV}$, $\Delta = J/6$, e a condição inicial $\hat{\rho}(0) = |000\rangle\langle 000|$ com (a) $\gamma_{\text{deph}} = 10^{-2}$ GHz; (b) $\gamma_{\text{deph}} = 10^{-1}$ GHz, e (c) $\gamma_{\text{deph}} = 1$ GHz. A linha ponto-tracejada azul destaca o tempo de formação do primeiro estado GHZ, correspondendo a $t'_{\text{GHZ}} \approx 4.46$ ns.

Os resultados demonstram uma alta sensibilidade da dinâmica de três qubits em relação a esse mecanismo. Mesmo para valores baixos das taxas de dephasing, figura 3.4(a), a redução da amplitude das oscilações é um claro sinal de que há a promoção de populações indesejadas (leia-se, populações não envolvidas na definição do estado GHZ requerido), de uma maneira incoerente. Em t'_{GHZ} ainda se tem um máximo da fidelidade de valor $\mathcal{F}_{\text{GHZ-}} \approx 0.85$ em relação ao estado alvo $|\Psi_{\text{GHZ}}(-\pi/2)\rangle$; a população P_{000} apresenta um valor aproximado de 0.62. Isso significa que o processo de *dephasing* afeta fortemente o processo de tunelamento coerente de terceira ordem responsável pela dinâmica efetiva de dois níveis, cujo produto final é a formação dos estados da classe GHZ. Aumentando-se o valor da taxa de *dephasing* para $\gamma_{\text{deph}} = 10^{-1}$ GHz, veja a 3.4(b), nota-se que o comportamento oscilatório é completamente perdido e a fidelidade apresenta um máximo de baixo valor (≈ 0.55). Finalmente, para $\gamma_{\text{deph}} = 1$ GHz, caso disposto na figura 3.4(c), a população P_{000} e fidelidade decaem rapidamente, com P_{111} crescendo até que, em $t \approx 12$ ns, o operador densidade torna-se uma mistura estatística. De fato, para as três taxas de dephasing consideradas, é verdade que $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\rho}(t) = I/8$. Esse comportamento demonstra que a viabilidade da geração de estados da classe GHZ no contexto dos qubits de carga é um desafio experimental em aberto, uma vez que é importante se garantir um setup com baixos valores da taxa de *dephasing*.

Em suma, a formação de estados GHZ no presente sistema (e considerando-se $N = 3$ qubits) é bastante sensível ao dephasing de carga. Entretanto, se baixos valores dessa taxa forem obtidos experimentalmente, pode-se encontrar altos valores de fidelidade para estados do tipo GHZ e FLIP.

3.2 Análise da escalabilidade da geração dinâmica de estados da classe GHZ

Nas próximas páginas, busca-se apresentar uma conjectura acerca do valor do acoplamento efetivo em um sistema de N qubits e um breve estudo sobre as consequências da

mesma.

O caso $N = 3$ foi apresentado previamente, em que se concluiu que

$$\Omega_3^{\text{GHZ}} = \frac{\Delta^3}{J^2}, \quad (3.72)$$

e o Hamiltoniano efetivo dado por

$$H_{3\text{QBs,eff}}^{\text{GHZ}} = \Omega_3^{\text{GHZ}} |111\rangle\langle 000| + h.c.. \quad (3.73)$$

Revisita-se o caso de $N = 2$, tratado previamente na dissertação intitulada *Emaranhamento eletrônico em moléculas de pontos quânticos semicondutores* [58] e no artigo [45], afim de comparar o modelo efetivo empregado para $N = 3$ com resultados analíticos. Depois trata-se o caso de N arbitrário.

3.2.1 O caso $N = 2$

Considerando-se $N = 2$ qubits, tem-se como Hamiltoniano o operador

$$H_{2\text{QBs}} = \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i \sigma_z^{(i)} + J_{12} \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} + \sum_{i=1}^2 \Delta_i \sigma_x^{(i)} = H_0 + V, \quad (3.74)$$

em que,

$$H_0 = \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i \sigma_z^{(i)} + J_{12} \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)}, \quad (3.75)$$

$$V = \sum_{i=1}^2 \Delta_i \sigma_x^{(i)}. \quad (3.76)$$

O primeiro passo do método é analisar o espectro do operador H_0 . É fácil se convencer de que, sendo a base computacional escrita em termos dos autoestados de σ_z , tal operador

é diagonal na referida base. Tem-se, portanto,

$$E_{00} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + J_{12}, \quad (3.77a)$$

$$E_{01} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - J_{12}, \quad (3.77b)$$

$$E_{10} = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - J_{12}, \quad (3.77c)$$

$$E_{11} = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + J_{12}. \quad (3.77d)$$

Toma-se, nesse ponto, $\varepsilon_i = 0 \ \forall \ i$, $J_{12} = J$ fixo, $\Delta_i = \Delta \ll J$ e, denotam-se os operadores H_0 e V com um til superescrito. Portanto, o espectro de \tilde{H}_0 é dado por

$$E_{00} = E_{11} = +J, \quad (3.78a)$$

$$E_{01} = E_{10} = -J. \quad (3.78b)$$

Isto é, o espectro desse operador consiste de dois domínios energéticos distintos, degenerados e distantes um do outro por um *gap* de $2J$. Ao se considerar a adição de uma perturbação a \tilde{H}_0 , tal que o parâmetro dessa perturbação seja pequeno em comparação a J , espera-se que essa perturbação conecte fracamente estados pertencentes a diferentes subespaços energéticos de \tilde{H}_0 . Dessa maneira, ao se iniciar o sistema em um desses subespaços e fazer com que o sistema evolua temporalmente sob o Hamiltoniano $\tilde{H}_{2\text{QBs}} = \tilde{H}_0 + \tilde{V}$, espera-se que o sistema mantenha-se no subespaço inicial, ao menos na escala temporal de interesse. (Existem processos virtuais ocorrendo, em uma escala temporal muito mais curta, sendo responsáveis pelo acoplamento entre estados no subespaço de interesse com os demais subespaços e que, de fato, são responsáveis pelo acoplamento efetivo entre estados no mesmo subespaço. Note, pois, que no Hamiltoniano $\tilde{H}_{2\text{QBs}}$ não há termo de acoplamento entre $|00\rangle$ e $|11\rangle$).

Esse cenário é interessante pela seguinte razão: considere, por exemplo, $\rho(0) = |00\rangle\langle 00|$. Agora, como consequência de $\Delta \ll J$, os únicos estados acessados dinamicamente devem ser, aproximadamente, $|00\rangle$ e $|11\rangle$. Mas isso corresponde a um sistema de dois níveis envolvendo tais estados. Em um instante de tempo arbitrário, o estado do sistema pode

ser considerado

$$|\Psi(t)\rangle \approx c_1(t)|00\rangle + c_2(t)|11\rangle. \quad (3.79)$$

Ainda que seja impossível, da argumentação anterior, afirmar que isso de fato irá ocorrer, se em um instante particular t' , obtem-se $c_1(t') = c_2(t') \approx 1/\sqrt{2}$, então

$$|\Psi(t')\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (3.80)$$

esse último sendo um estado de Bell, i.e., um estado puro maximamente emaranhado em um sistema de dois qubits. Argumentação semelhante é válida quando se faz $\rho(t=0) = |01\rangle\langle 10|$, sendo outro dos estados de Bell obtido dinamicamente.

Esse raciocínio permite considerar o sistema de dois qubits, quando satisfeitas as condições expostas previamente, como efetivamente um sistema de dois níveis que evolui no tempo sob ação de um Hamiltoniano efetivo dado por

$$H_{2\text{QBs,eff}} = \Omega_2^{\text{BELL}}|11\rangle\langle 00| + h.c., \quad (3.81)$$

ou mesmo,

$$H_{2\text{QBs,eff}} = \Omega_2^{\text{BELL}}|10\rangle\langle 01| + h.c. \quad (3.82)$$

Determina-se o valor do acoplamento efetivo Ω^{BELL} analogamente ao caso $N = 3$. Particiona-se o espaço de Hilbert em dois, sendo uma parte de interesse envolvendo apenas dois níveis (denotada por A) e o restante do espaço (denotada por B), como segue $\{|00\rangle, |11\rangle\}, \{|01\rangle, |10\rangle\}$. Nessa organização, pode-se escrever o Hamiltoniano $H_{2\text{QBs,eff}}$ em blocos, como visto na eq. (3.18) e seguindo-se o mesmo raciocínio, conclui-se que

$$H_{2\text{QBs,eff}} = \tilde{H}^{AA} + \tilde{H}^{AB}(E - \tilde{H}^{BB})^{-1}\tilde{H}^{BA}. \quad (3.83)$$

Essa equação permite a identificação requerida do acoplamento efetivo, dado por

$$\Omega^{\text{BELL}} = \langle 11|H_{2\text{QBs,eff}}|00\rangle = \langle 11|\left[\tilde{H}^{AA} + \tilde{H}^{AB}(E - \tilde{H}^{BB})^{-1}\tilde{H}^{BA}\right]|00\rangle. \quad (3.84)$$

Os operadores \tilde{H}^{AA} , \tilde{H}^{AB} , \tilde{H}^{BA} , \tilde{H}^{BB} são definidos como nas equações (3.27a), (3.27c), (3.27d) e (3.27b), respectivamente, desde que se utilize o Hamiltoniano correto (aqui $H_{2\text{QBs,eff}}$), assim como os projetores corretos $P = |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|$, $Q = I - P$.

É fácil computar, nesse caso, a forma explícita dos blocos do Hamiltoniano, sendo dados por

$$\tilde{H}^{AA} = E_{00} |00\rangle\langle 00| + E_{11} |11\rangle\langle 11|, \quad (3.85)$$

$$\tilde{H}^{AB} = \Delta (|00\rangle\langle 10| + |00\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 10|), \quad (3.86)$$

$$\tilde{H}^{BA} = \Delta (|10\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 11| + |10\rangle\langle 11|). \quad (3.87)$$

Tem-se ainda que $\tilde{H}^{BB} = \tilde{H}_0^{BB} + \tilde{V}^{BB}$, com $\tilde{H}_0^{BB} = Q\tilde{H}_0Q$ e $\tilde{V}^{BB} = Q\tilde{V}Q$. Nesse caso não será necessário computar o último termo. Com efeito, utilizando-se a eq. (3.85), conclui-se que

$$\Omega^{\text{BELL}} = \langle 11 | \tilde{H}^{AB} (E - \tilde{H}^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} | 00 \rangle. \quad (3.88)$$

Utilizando-se, também, a identidade na eq. (3.39), tem-se

$$\Omega^{\text{BELL}} = \langle 11 | \tilde{H}^{AB} \left[I - (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{V}^{BB} \right]^{-1} (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} | 00 \rangle. \quad (3.89)$$

O acoplamento requerido está associado com transições virtuais de segunda ordem no parâmetro de tunelamento. A expressão acima, por outro lado, demonstra a existência dessa transição (termos \tilde{H}^{AB} e \tilde{H}^{BA}) sem a necessidade de expansão do operador entre colchetes.

Por conseguinte, utiliza-se a expansão de ordem zero do referido operador, de sorte que $\left[I - (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{V}^{BB} \right]^{-1} \sim I$. Portanto,

$$\Omega^{\text{BELL}} = \langle 11 | \tilde{H}^{AB} (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} | 00 \rangle, \quad (3.90)$$

em que $\tilde{H}_0^{BB} = E_{01} |01\rangle\langle 01| + E_{10} |10\rangle\langle 10|$. Introduzindo-se duas relações de completudeza na

expressão do acoplamento efetivo, decorre que

$$\Omega^{\text{BELL}} = \sum_{k=1}^4 \sum_{u=1}^4 \langle 11 | \tilde{H}^{AB} | k \rangle \langle k | (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} | u \rangle \langle u | \tilde{H}_{BA} | 00 \rangle. \quad (3.91)$$

Substituição direta dos bloco-operadores na expressão acima, permite concluir que

$$\Omega^{\text{BELL}} = \frac{\Delta^2}{J}. \quad (3.92)$$

Nas figuras 3.5, 3.6 e 3.7, plota-se a dinâmica das populações de interesse, as respectivas populações efetivas, a fidelidade com um estado de interesse definido previamente e uma curva de fidelidade efetiva (a ser definida em breve). O dito estado de interesse é dado por $|\Psi_{\text{BELL}}(-\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - i|11\rangle)$. As populações exatas são: $P_{00}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{11}(t)$ (círculo marrom não preenchido). As populações efetivas são: $P_{00,\text{eff}}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{11,\text{eff}}(t)$ (linha tracejada cinza). Em relação às curvas de fidelidade, a exata é composta por triângulos marrons preenchidos, ao passo que a efetiva é representada pela linha ponto-tracejada preta. Todos os gráficos são construídos utilizando-se os parâmetros $\varepsilon_i = 0$ e $J = 25\mu\text{eV}$, ao passo em que cada um possui um valor distinto do parâmetro de tunelamento, sendo esses $\Delta = J/8$, $\Delta = J/6$ e $\Delta = J/4$. Nessas condições, a configuração inicial em algum dos autoestados do operador \tilde{H}_0 garante que a dinâmica deve ocorrer aproximadamente como previsto pelo modelo efetivo. Utiliza-se em todos os casos $\rho(0) = |00\rangle\langle 00|$ (portanto a dinâmica de dois níveis ocorre no subespaço de \tilde{H}_0 com energia $+J$). Nota-se, em todos os casos, como são de fato obtidos estados de Bell de alta fidelidade. Também, o modelo efetivo ajusta-se bem a todos os casos, desde que $\frac{\Omega^{\text{BELL}}t}{\hbar}$ seja pequeno. Na medida em que esse parâmetro cresce, as curvas exata e efetiva distanciam-se; a discordância também aumenta na medida em que o valor de Δ é maior. Esse é o mesmo comportamento observado no caso $N = 3$.

Particularmente, a solução do problema efetivo

$$i\hbar\dot{\rho}_{\text{eff}}(t) = [H_{2\text{QBs,eff}}, \rho_{\text{eff}}(t)], \quad (3.93)$$

tem como consequência a seguinte forma para a matriz densidade efetiva

$$\begin{aligned} \rho_{\text{eff}}(t) = & \cos^2\left(\frac{\Omega^{\text{BELL}}}{\hbar}t\right) |00\rangle\langle 00| + i\cos\left(\frac{\Omega^{\text{BELL}}}{\hbar}t\right)\sin\left(\frac{\Omega^{\text{BELL}}}{\hbar}t\right) |00\rangle\langle 11| \\ & - i\cos\left(\frac{\Omega^{\text{BELL}}}{\hbar}t\right)\sin\left(\frac{\Omega^{\text{BELL}}}{\hbar}t\right) |11\rangle\langle 00| + \sin^2\left(\frac{\Omega^{\text{BELL}}}{\hbar}t\right) |11\rangle\langle 11|, \end{aligned} \quad (3.94)$$

de onde segue a forma para as populações efetivas

$$P_{00} = \text{Tr}(|00\rangle\langle 00|\rho_{\text{eff}}(t)) = \cos^2\left(\frac{\Omega^{\text{BELL}}}{\hbar}t\right), \quad (3.95)$$

$$P_{11} = \text{Tr}(|11\rangle\langle 11|\rho_{\text{eff}}(t)) = \sin^2\left(\frac{\Omega^{\text{BELL}}}{\hbar}t\right). \quad (3.96)$$

Portanto, o período de oscilação da solução efetiva é dado por

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{2\pi}{\frac{\Omega^{\text{BELL}}}{\hbar}} \right]. \quad (3.97)$$

Considerando-se então J fixo, $\Delta = \frac{J}{x}$, com $x \in \mathcal{R}$ e substituindo-se a expressão explícita de Ω^{BELL} na equação acima, decorre que

$$T_2(x, J) = \left(\frac{\hbar}{2J}\right)x^2. \quad (3.98)$$

Do caso $N = 3$, conclui-se que os valores ótimos de x estão no intervalo $x \in [4, 8]$ (isso porque os valores ótimos de Δ estão entre $J/8$ e $J/4$). Considerando-se $J = 25\mu\text{eV}$, decorre que

$$T_2(x, 25\mu\text{eV}) = (0.083 \text{ ns})x^2. \quad (3.99)$$

Portanto, $T_2(8, 25\mu\text{eV}) \sim 5.3 \text{ ns}$, $T_2(6, 25\mu\text{eV}) \sim 3 \text{ ns}$, $T_2(4, 25\mu\text{eV}) \sim 1.3 \text{ ns}$. Esses resultados são satisfatórios com relação à dinâmica empírica de um sistema de dois qubits no contexto de qubits de carga.

A fidelidade efetiva é definida de maneira direta. Tem-se que

$$\rho_{\text{target}} = |\Psi_{\text{BELL}}(-\pi/2)\rangle \langle \Psi_{\text{BELL}}(-\pi/2)|, \quad (3.100)$$

e, portanto, explicitamente

$$\rho_{\text{target}} = \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| + i|00\rangle\langle 11| - i|11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|). \quad (3.101)$$

Assim, $\mathcal{F}_{\text{eff}}(t) \equiv \text{Tr}(\rho_{\text{eff}}(t)\rho_{\text{target}})$, resultando na expressão seguinte

$$\mathcal{F}_{\text{eff}}(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \sin\left(\frac{2\Omega^{\text{BELL}}t}{\hbar}\right) \right]. \quad (3.102)$$

Note que, garantindo-se uma boa proximidade da dinâmica exata e efetiva (isso ocorre ao menos para $\Delta = J/8$), os resultados extraídos da última produzem boas estimativas para todas as quantidades de interesse da primeira. Tem-se funções analíticas que descrevem as populações, tal como o seu período de oscilação, e também uma curva analítica para o comportamento da fidelidade do sistema.

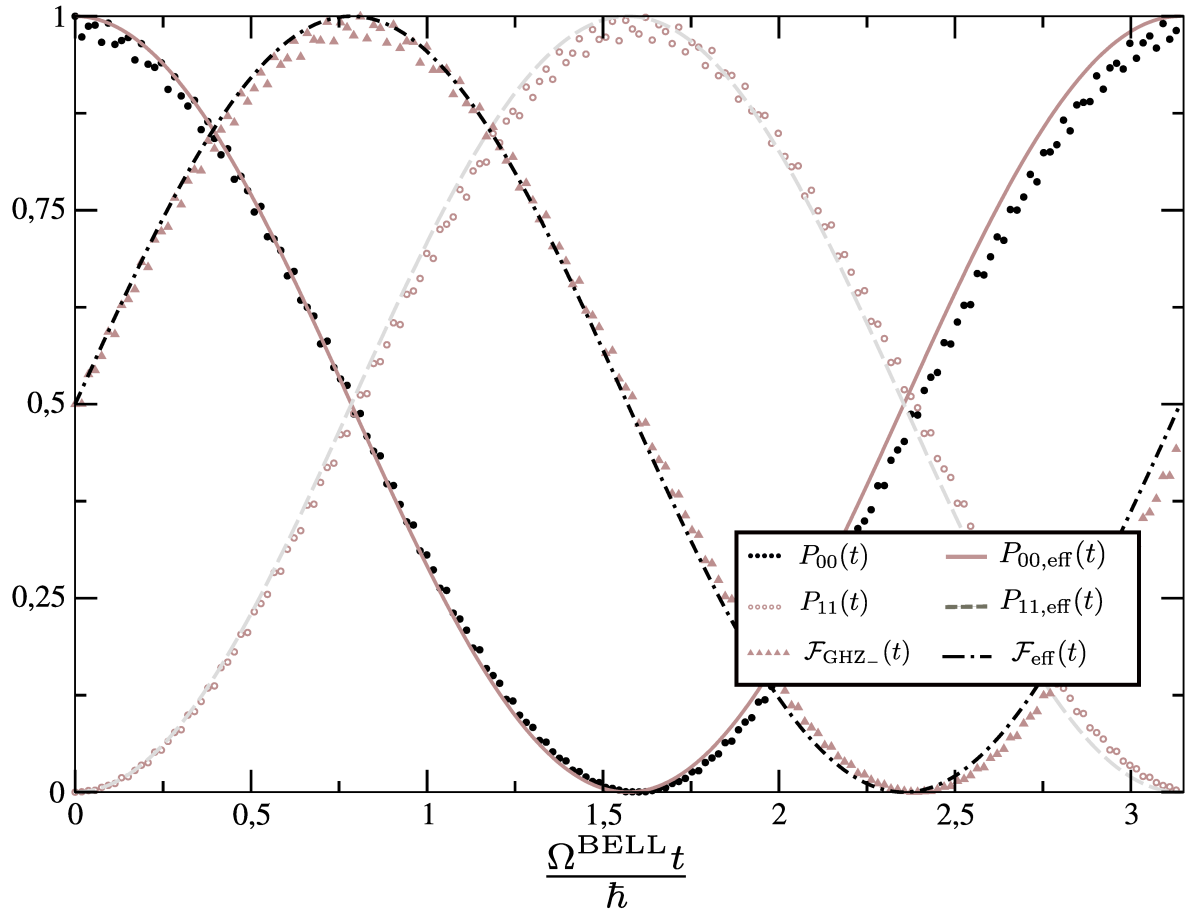


Figura 3.5: Dinâmica em um conjunto de duas moléculas quânticas acopladas como função do parâmetro adimensional $\frac{\Omega^{BELL}t}{\hbar}$, considerando-se a condição inicial $\rho(0) = |00\rangle\langle 00|$ e os parâmetros físicos $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu eV$ e $\Delta = J/8$ no Hamiltoniano, eq. (3.74). Apresentam-se as populações $P_{00}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{11}(t)$ (círculo marrom não preenchido), em conjunto com a evolução dessas duas quantidades considerando-se um modelo efetivo de dois níveis, quais sejam, $P_{00,eff}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{11,eff}(t)$ (linha tracejada cinza), assim como a fidelidade \mathcal{F}_{GHZ_-} (triângulo marrom preenchido). A última quantidade é calculada utilizando-se a eq. (2.30), com o estado *target* definido por $\rho_{target} = |\Psi_{BELL}(-\pi/2)\rangle\langle\Psi_{BELL}(-\pi/2)|$, em que $|\Psi_{BELL}(-\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - i|11\rangle)$. A curva de fidelidade efetiva, $\mathcal{F}_{eff}(t)$ (linha ponto-tracejada preta) é produzida utilizando-se a eq. (3.102).

Fonte: Próprio autor

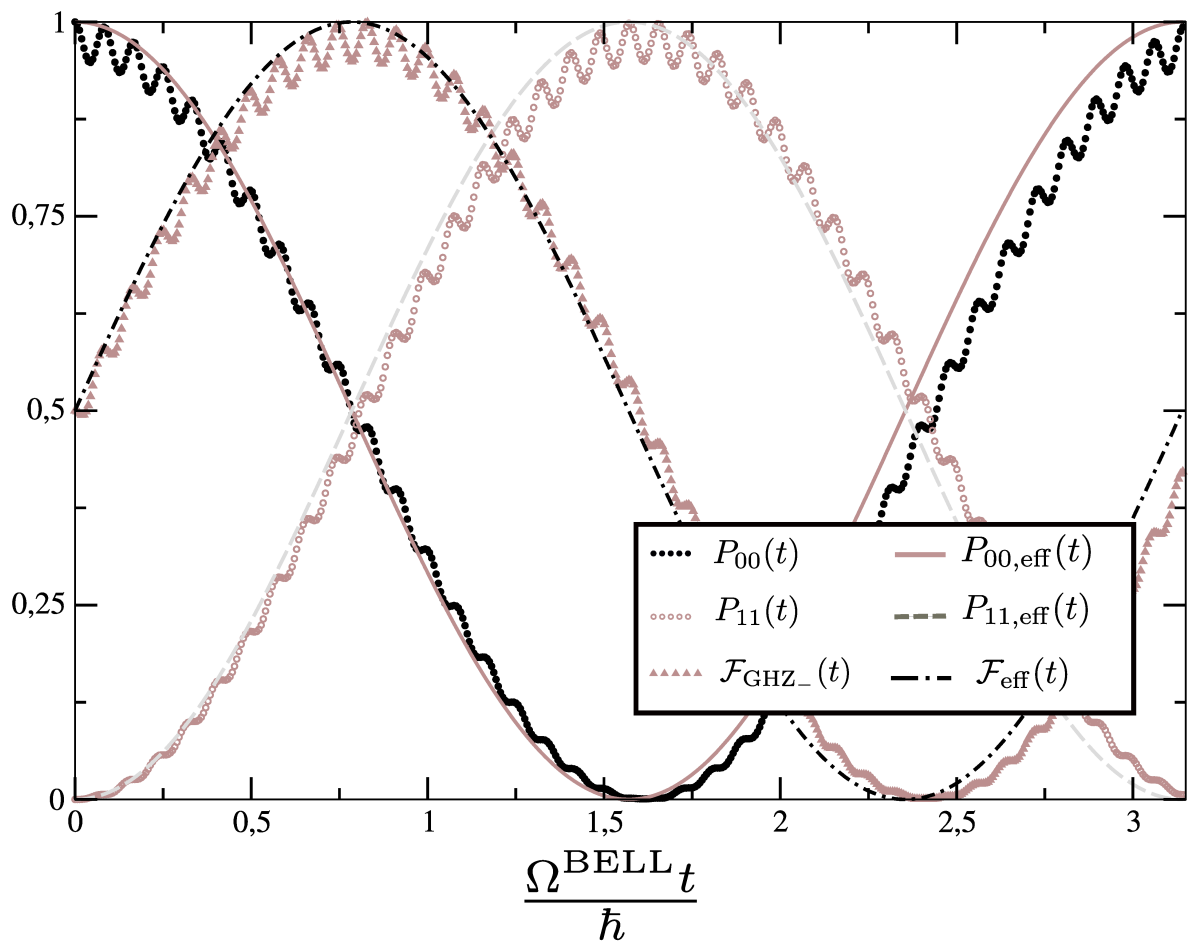


Figura 3.6: Dinâmica em um conjunto de duas moléculas quânticas acopladas como função do parâmetro adimensional $\frac{\Omega^{BELL}t}{\hbar}$, considerando-se a condição inicial $\rho(0) = |00\rangle\langle 00|$ e os parâmetros físicos $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu eV$ e $\Delta = J/6$ no Hamiltoniano, eq. (3.74). Apresentam-se as populações $P_{00}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{11}(t)$ (círculo marrom não preenchido), em conjunto com a evolução dessas duas quantidades considerando-se um modelo efetivo de dois níveis, quais sejam, $P_{00,eff}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{11,eff}(t)$ (linha tracejada cinza), assim como a fidelidade \mathcal{F}_{GHZ_-} (triângulo marrom preenchido). A última quantidade é calculada utilizando-se a eq. (2.30), com o estado *target* definido por $\rho_{target} = |\Psi_{BELL}(-\pi/2)\rangle\langle \Psi_{BELL}(-\pi/2)|$, em que $|\Psi_{BELL}(-\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - i|11\rangle)$. A curva de fidelidade efetiva, $\mathcal{F}_{eff}(t)$ (linha ponto-tracejada preta) é produzida utilizando-se a eq. (3.102).

Fonte: Próprio autor

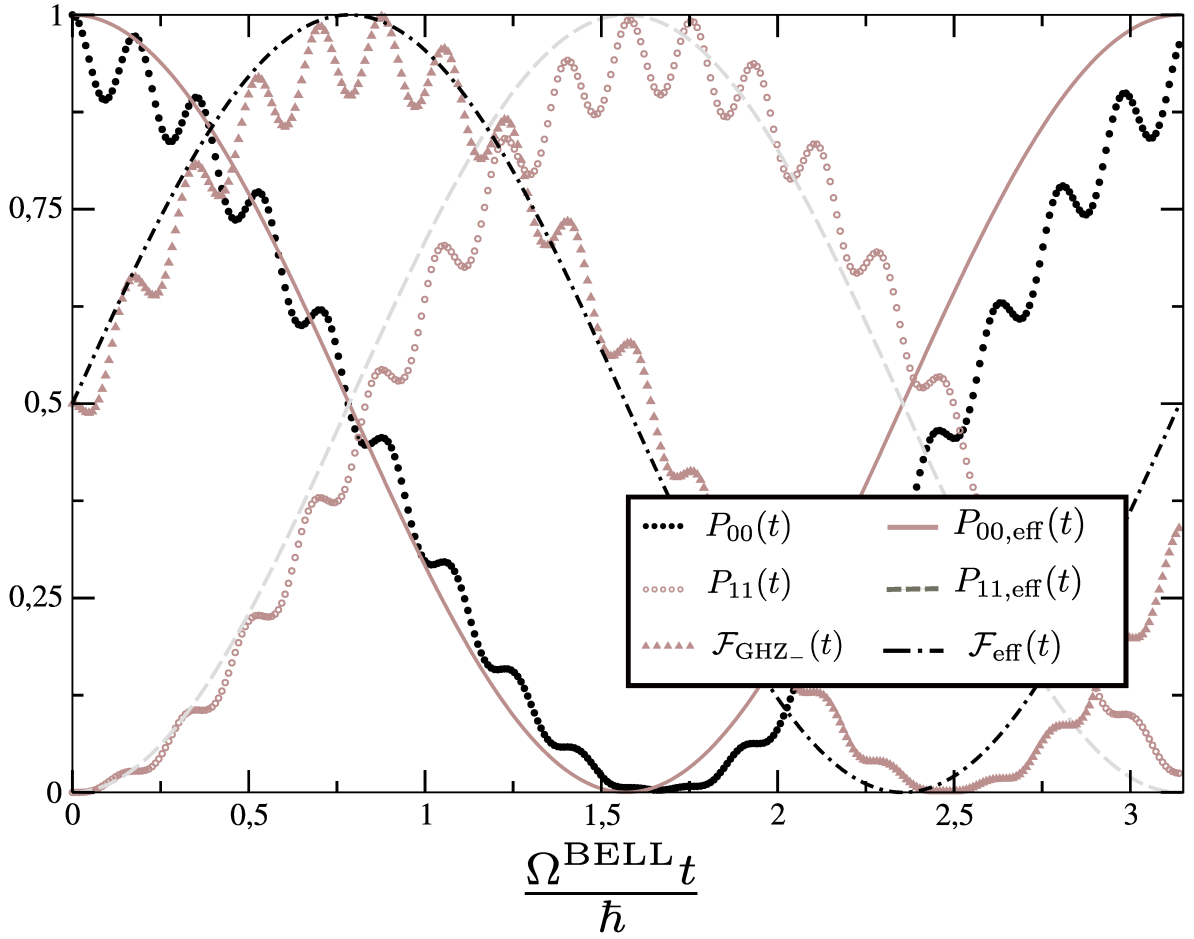


Figura 3.7: Dinâmica em um conjunto de duas moléculas quânticas acopladas como função do parâmetro adimensional $\frac{\Omega^{\text{BELL}} t}{\hbar}$, considerando-se a condição inicial $\rho(0) = |00\rangle\langle 00|$ e os parâmetros físicos $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu\text{eV}$ e $\Delta = J/4$ no Hamiltoniano, eq. (3.74). Apresentam-se as populações $P_{00}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{11}(t)$ (círculo marrom não preenchido), em conjunto com a evolução dessas duas quantidades considerando-se um modelo efetivo de dois níveis, quais sejam, $P_{00,\text{eff}}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{11,\text{eff}}(t)$ (linha tracejada cinza), assim como a fidelidade $\mathcal{F}_{\text{GHZ}_-}$ (triângulo marrom preenchido). A última quantidade é calculada utilizando-se a eq. (2.30), com o estado *target* definido por $\rho_{\text{target}} = |\Psi_{\text{BELL}}(-\pi/2)\rangle\langle\Psi_{\text{BELL}}(-\pi/2)|$, em que $|\Psi_{\text{BELL}}(-\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - i|11\rangle)$. A curva de fidelidade efetiva, $\mathcal{F}_{\text{eff}}(t)$ (linha ponto-tracejada preta) é produzida utilizando-se a eq. (3.102).

Fonte: Próprio autor

O caso $N = 2$ qubits é especial pois, utilizando-se de uma rotação de base, pode-se encontrar uma solução analítica para o problema de autovalores de $H_{2\text{QBs}}$. Nas próximas páginas, busca-se demonstrar como a forma obtida para as populações efetivas é recuperada quando, na solução analítica, utilizam-se as condições sob as quais o modelo efetivo é válido, quais sejam, $\rho(0) = |00\rangle\langle 00|$, $\Delta = J/x$, $\Delta \ll J$.

Para tanto faz-se necessário, em primeiro lugar, determinar $\rho(t)$ analiticamente ou,

equivalentemente (no caso de uma dinâmica unitária), o vetor estado $|\Psi(t)\rangle$. Partindo-se do Hamiltoniano na eq. (3.74) e considerando-se $\varepsilon_i = 0$, $J_{12} = J$, $\Delta_i = \Delta$, obtêm-se

$$H_{2\text{QBs}} = J\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)} + \Delta(\sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}). \quad (3.103)$$

Considerando o ordenamento da base computacional como sendo $\{|00\rangle, |11\rangle, |01\rangle, |10\rangle\}$, a representação matricial de $H_{2\text{QBs}}$ tem a forma

$$H_{2\text{QBs}} = \begin{pmatrix} J & 0 & \Delta & \Delta \\ 0 & J & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & -J & 0 \\ \Delta & \Delta & 0 & -J \end{pmatrix}. \quad (3.104)$$

Resulta interessante escrever o Hamiltoniano em uma nova base ortonormal, cujos elementos são os estados de Bell definidos como

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \quad (3.105a)$$

$$|\phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle). \quad (3.105b)$$

Um ordenamento interessante para a base de Bell é dado por $\{|\phi_{-}\rangle, |\psi_{-}\rangle, |\phi_{+}\rangle, |\psi_{+}\rangle\}$, pois dessa maneira o operador Hamiltoniano torna-se

$$H_{2\text{QBs}} = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & 2\Delta \\ 0 & 0 & 2\Delta & -J \end{pmatrix}. \quad (3.106)$$

Segue que $|\phi_{-}\rangle$ e $|\psi_{-}\rangle$ são autoestados de $H_{2\text{QBs}}$ com autovalores $+J$ e $-J$, respectivamente. Os demais autovalores e autoestados podem ser determinados pelo problema de

autovalores de $H_{2\text{QBs}}$ no subespaço $\text{span}\{|\phi_+\rangle, |\psi_+\rangle\}$. Com efeito,

$$\begin{vmatrix} J - \lambda & 2\Delta \\ 2\Delta & -J - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - J^2 - 4\Delta^2 = 0. \quad (3.107)$$

Portanto, os autovalores restantes são dados por

$$\lambda_{\pm} = \pm J \sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2}. \quad (3.108)$$

Os autoestados são determinados da maneira usual, resolvendo a equação

$$\begin{pmatrix} J & 2\Delta \\ 2\Delta & -J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm J \sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (3.109)$$

de onde segue que

$$\beta = \pm \frac{J}{2\Delta} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2} \mp 1 \right) \alpha \quad (3.110)$$

e, portanto, o autoestado $|\lambda_{\pm}\rangle$ (normalizado) é dado por

$$|\lambda_{\pm}\rangle = \left[1 + \frac{J^2}{4\Delta^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2} \mp 1 \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left[|\phi_+\rangle \pm \frac{J}{2\Delta} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2} \mp 1 \right) |\psi_+\rangle \right]. \quad (3.111)$$

De modo a simplificar a notação, define-se

$$\alpha_{\pm} \equiv \left[1 + \frac{J^2}{4\Delta^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2} \mp 1 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.112a)$$

$$y \equiv \sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2}, \quad (3.112b)$$

e segue que

$$|\lambda_{\pm}\rangle = \frac{1}{\alpha_{\pm}} \left[|\phi_+\rangle \pm \frac{J}{2\Delta} (y \mp 1) |\psi_+\rangle \right]. \quad (3.113)$$

Em síntese, os autoestados e autovalores de $H_{2\text{QBs}}$ são dados por

$$|\phi_{-}\rangle, +J \quad (3.114a)$$

$$|\psi_{-}\rangle, -J \quad (3.114b)$$

$$|\lambda_{+}\rangle, +J\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2} \quad (3.114c)$$

$$|\lambda_{-}\rangle, -J\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2}. \quad (3.114d)$$

A evolução temporal do sistema pode ser agora determinada, a partir da aplicação do operador de evolução temporal no vetor estado inicial, tendo esse último sido projetado na base dos autoestados de $H_{2\text{QBs}}$. Reescrevendo-se a condição inicial em termos dos autoestados, obtém-se

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle = |00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_{+}\rangle + |\phi_{-}\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\phi_{-}\rangle + \frac{1}{\alpha_{+}}|\lambda_{+}\rangle + \frac{1}{\alpha_{-}}|\lambda_{-}\rangle\right). \end{aligned} \quad (3.115)$$

O estado evoluído é obtido ao se atuar com o propagador $U(t)$ sob o estado inicial, de forma que

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= U(t)|\Psi(0)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\exp\left(\frac{-iJt}{\hbar}\right)|\phi_{-}\rangle + \frac{1}{\alpha_{+}}\exp\left(\frac{-i\lambda_{+}t}{\hbar}\right)|\lambda_{+}\rangle + \frac{1}{\alpha_{-}}\exp\left(\frac{-i\lambda_{-}t}{\hbar}\right)|\lambda_{-}\rangle\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\exp\left(\frac{-iJt}{\hbar}\right)|\phi_{-}\rangle + \frac{1}{\alpha_{+}}\exp\left[-i\frac{J}{\hbar}t\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2}\right]|\lambda_{+}\rangle\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{\alpha_{-}}\exp\left[i\frac{J}{\hbar}t\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2}\right]|\lambda_{-}\rangle\right\}. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Escrevendo-se os autoestados $|\lambda_{\pm}\rangle$ em sua forma explícita e, em seguida, escrevendo os estados de Bell em sua representação na base computacional e, por fim, após algumas

manipulações, conclui-se que o vetor estado do sistema $|\Psi(t)\rangle$ é dado por

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle = & \frac{1}{2} \left\{ \exp\left(-i\frac{J}{\hbar}t\right) + \frac{1}{\alpha_+^2} \exp\left[-i\frac{J}{\hbar}t\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2}\right] + \frac{1}{\alpha_-^2} \exp\left[i\frac{J}{\hbar}t\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2}\right] \right\} |00\rangle \\
& + \frac{1}{2} \left\{ -\exp\left(-i\frac{J}{\hbar}t\right) + \frac{1}{\alpha_+^2} \exp\left[-i\frac{J}{\hbar}t\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2}\right] + \frac{1}{\alpha_-^2} \exp\left[\frac{J}{\hbar}t\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2}\right] \right\} |11\rangle \\
& + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha_+^2} \exp\left(-i\frac{J}{\hbar}ty\right) \frac{J}{2\Delta}(y-1) - \frac{1}{\alpha_-^2} \exp\left(i\frac{J}{\hbar}ty\right) \frac{J}{2\Delta}(y+1) \right] (|01\rangle + |10\rangle)
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Para estudar a geração da dinâmica de estados de Bell como definidos na equação (3.105b), calcula-se a população $P_{00}(t) = |\langle 00|\Psi(t)\rangle|^2$, dada por

$$\begin{aligned}
P_{00}(t) = & \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos\left(\frac{J}{\hbar}t\right) \cos\left[\frac{J}{\hbar}t\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2}\right] + \right. \\
& + \frac{(\alpha_-^2 - \alpha_+^2)}{\alpha_+^2 \alpha_-^2} \sin\left(\frac{J}{\hbar}t\right) \sin\left[\frac{J}{\hbar}t\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2}\right] + \\
& \left. + \frac{-2}{\alpha_+^2 \alpha_-^2} \sin^2\left[\frac{J}{\hbar}t\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2}\right] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.118}$$

Nesse ponto, faz-se uma análise concernente aos parâmetros envolvidos na expressão acima, de modo que se possa justificar algumas aproximações a serem apresentadas. Considerando-se $J = 25\mu\text{eV}$, $\Delta = J/8$, decorre que

$$y = \sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2} \sim 1.031. \tag{3.119}$$

Por outro lado, fazendo-se

$$y = \sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2} \sim 1 + 2\left(\frac{\Delta}{J}\right)^2 \sim 1.031. \tag{3.120}$$

Portanto, faz-se razoável utilizar a expansão de Taylor de y . Dessa maneira,

$$\alpha_+^2 = 1 + \left(\frac{J}{2\Delta}\right)^2 (y-1)^2 \sim 1.015. \quad (3.121a)$$

$$\alpha_-^2 = 1 + \left(\frac{J}{2\Delta}\right)^2 (y+1)^2 \sim 66.98. \quad (3.121b)$$

Ou, utilizando-se a expansão de y , tem-se

$$\alpha_+^2 = 1 + \left(\frac{J}{2\Delta}\right)^2 \left(1 + 2\frac{\Delta^2}{J^2} - 1\right)^2 \sim 1 + \frac{\Delta^2}{J^2} \quad (3.122a)$$

$$\alpha_-^2 = 1 + \left(\frac{J}{2\Delta}\right)^2 \left(1 + 2\frac{\Delta^2}{J^2} + 1\right)^2 = 1 + \frac{J^2}{\Delta^2} \left(1 + \frac{2\Delta^2}{J^2}\right)^2 = 3 + \frac{J^2}{\Delta^2}. \quad (3.122b)$$

Dessa maneira, tem-se que

$$\alpha_-^2 - \alpha_+^2 \sim 2 + \frac{J^2}{\Delta^2}. \quad (3.123)$$

Também,

$$\alpha_-^2 \alpha_+^2 \sim 4 + \frac{J^2}{\Delta^2}. \quad (3.124)$$

Conclui-se que $\frac{(\alpha_-^2 - \alpha_+^2)}{\alpha_-^2 \alpha_+^2} \rightarrow 1$ e $\frac{-2}{\alpha_-^2 \alpha_+^2} \rightarrow 0$. Dessa maneira,

$$P_{00}(t) \sim \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos\left(\frac{J}{\hbar}t\right) \cos\left[\frac{J}{\hbar}t\left(1 + 2\frac{\Delta^2}{J^2}\right)\right] + \sin\left(\frac{J}{\hbar}t\right) \sin\left[\frac{J}{\hbar}t\left(1 + 2\frac{\Delta^2}{J^2}\right)\right] \right\}. \quad (3.125)$$

Ainda, utilizando-se as identidades $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ e $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$, decorre que

$$P_{00}(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\Delta^2 t}{\hbar J}\right) \right]. \quad (3.126)$$

Por fim, utilizando-se a identidade $\cos^2(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$, decorre que

$$P_{00}(t) \sim \cos^2\left(\frac{\Delta^2 t}{J\hbar}\right) = P_{00,\text{eff}}(t). \quad (3.127)$$

Similarmente, tem-se que $P_{11}(t) = |\langle 11|\Psi(t)\rangle|^2$. Pode-se demonstrar que tal população tem a forma seguinte

$$\begin{aligned} P_{11}(t) = \frac{1}{2} & \left\{ 1 - \cos\left(\frac{J}{\hbar}t\right) \cos\left[\frac{J}{\hbar}t\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2}\right] + \right. \\ & - \frac{(\alpha_-^2 - \alpha_+^2)}{\alpha_+^2 \alpha_-^2} \sin\left(\frac{J}{\hbar}t\right) \sin\left[\frac{J}{\hbar}t\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2}\right] + \\ & \left. + \frac{-2}{\alpha_+^2 \alpha_-^2} \sin^2\left[\frac{J}{\hbar}t\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta}{J}\right)^2}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Aplicando-se as mesmas considerações/aproximações, decorre que

$$P_{11}(t) \sim \sin^2\left(\frac{\Delta^2 t}{J\hbar}\right) = P_{11,\text{eff}}(t). \quad (3.129)$$

Esses resultados confirmam a hipótese inicial, de que a solução pelo modelo efetivo é aproximadamente um caso particular da solução analítica, quando aplicado o devido regime de parâmetros no Hamiltoniano.

3.2.2 O caso geral - N qubits

Pela similaridade dos resultados obtidos nos casos particulares $N = 2$, $N = 3$ e $N = 4$ ², em relação à expressão para o acoplamento efetivo, similaridade essa traduzida na equação

$$\Omega_N^{\text{GHZ}} = \frac{\Delta^N}{J^{N-1}}, \quad N = 2, 3, 4, \quad (3.130)$$

²Esse último caso está desenvolvido integralmente na seção de apêndices. Cronologicamente veio primeiro como um passo intermediário importante na consolidação de uma proposta de generalização. Entretanto, para evitar repetição de argumentos, foi deslocado para o apêndice. Naturalmente, agora está em condições de confirmar os métodos mais gerais que essa seção propõe, como um caso particular de interesse.

inicia-se a busca por um tipo de generalização (tanto do modelo efetivo, quanto da própria dinâmica exata) para um sistema composto por um número genérico N de qubits, sob ação de uma generalização do Hamiltoniano para os casos particulares. Discutir-se-á as razões pelas quais se acredita que o resultado deve ser válido para qualquer N , baseando-se principalmente na ideia de que as condições necessárias para que o comportamento exato e efetivo ocorram nos casos particulares, encontram-se também no caso geral.

3.2.2.1 O Hamiltoniano de N qubits e a base computacional

Inicia-se pela estruturação do espaço de Hilbert, tal como a escrita formal da generalização do Hamiltoniano a ser estudado. O espaço de Hilbert de um sistema de N qubits é dado por $\mathcal{H}_{\text{NQBs}} \sim (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$, a base computacional associada é dada pelo conjunto $\{|0\rangle^{\otimes N}, \dots, |1\rangle^{\otimes N}\}$ e tem-se $\text{Dim}(\mathcal{H}_{\text{NQBs}}) = 2^N$. Reforça-se aqui que a notação escolhida é tal que $\mathbb{C}^2 = \text{span}\{|0\rangle, |1\rangle\}$, tendo-se, por definição, $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Por fim, tais vetores de base são identificados como autoestados do operador σ_z , de sorte que

$$\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|, \quad (3.131)$$

e,

$$\sigma_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|. \quad (3.132)$$

Um elemento arbitrário da base computacional será denotado como

$$|\xi_1, \dots, \xi_N\rangle \quad ; \quad \xi_k \in \{0, 1\}. \quad (3.133)$$

O Hamiltoniano do sistema é considerado como da forma

$$H_{\text{NQBs}} = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sigma_z^{(i)} + \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,i+1} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(i+1)} + \sum_{i=1}^N \Delta_i \sigma_x^{(i)} = H_0 + V, \quad (3.134)$$

em que

$$H_0 = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sigma_z^{(i)} + \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,i+1} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(i+1)}, \quad (3.135)$$

$$V = \sum_{i=1}^N \Delta_i \sigma_x^{(i)}. \quad (3.136)$$

Similarmente aos casos particulares, sendo a base computacional construída com produtos tensoriais dos autoestados do operador σ_z , H_0 deve ser diagonal na referida base. Estuda-se, na sequência, tal espectro.

Considere a aplicação do operador H_0 em um elemento arbitrário da base computacional $|\xi_1, \dots, \xi_N\rangle$, como segue

$$\begin{aligned} H_0 |\xi_1, \dots, \xi_N\rangle &= \left[\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sigma_z^{(i)} + \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,i+1} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(i+1)} \right] |\xi_1, \dots, \xi_N\rangle \\ &= \left[\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sigma_z^{(i)} \right] |\xi_1, \dots, \xi_N\rangle + \left[\sum_{i=1}^{N-1} J_{i,i+1} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(i+1)} \right] |\xi_1, \dots, \xi_N\rangle \\ &= \left[\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sigma_z^{(i)} |\xi_1, \dots, \xi_N\rangle \right] + \left[\sum_{i=1}^{N-1} J_{i,i+1} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(i+1)} |\xi_1, \dots, \xi_N\rangle \right] \\ &= \left[\sum_{i=1}^N \varepsilon_i (-1)^{\xi_i} |\xi_1, \dots, \xi_N\rangle \right] + \left[\sum_{i=1}^{N-1} J_{i,i+1} (-1)^{\xi_i + \xi_{i+1}} |\xi_1, \dots, \xi_N\rangle \right] \\ &= \left[\sum_{i=1}^N (-1)^{\xi_i} \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{\xi_i + \xi_{i+1}} J_{i,i+1} \right] |\xi_1, \dots, \xi_N\rangle. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Segue que

$$\langle \xi'_1, \dots, \xi'_N | H_0 | \xi_1, \dots, \xi_N \rangle = \left[\sum_{i=1}^N (-1)^{\xi_i} \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{\xi_i + \xi_{i+1}} J_{i,i+1} \right] \prod_{i=1}^N \delta_{\xi'_i, \xi_i}. \quad (3.138)$$

Da igualdade acima, obtém-se a forma genérica dos autovalores desse operador para um elemento de base $|\xi_1, \dots, \xi_N\rangle$, qual seja,

$$E_{\xi_1 \dots \xi_N} = \sum_{i=1}^N (-1)^{\xi_i} \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{\xi_i + \xi_{i+1}} J_{i,i+1}, \quad (3.139)$$

sendo esse determinado, naturalmente, quando se define o conjunto $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ referente

ao estado em questão.

A computação completa do espectro de H_0 não é possível nesse ponto, uma vez que, para tanto, deve-se fornecer o número N de qubits do sistema (pois isso permite conhecer os conjuntos possíveis $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$) ao passo que tal ação caminha em direção contrária ao propósito da seção em questão. De fato, para tais propósitos não se faz necessário fixar N . Note, pois, como o modelo de dinâmica efetiva é baseado em dois pilares principais: a existência de subespaços energéticos no espectro de H_0 cujo espaçamento é da ordem da interação de Coulomb, $J_{i,i+1}$; um baixo valor atribuído ao parâmetro de tunelamento no Hamiltoniano, $\Delta_i \ll J_{i,i+1} \quad \forall i$. Tais condições, a priori, garantem que, na medida em que o sistema é inicializado em um dos subespaços energéticos de H_0 , a dinâmica sob influência de $\tilde{H}_{\text{NQBs}} = \tilde{H}_0 + \tilde{V}$, permite fracamente transições para estados que vivem em diferentes subespaços. Novamente, é preciso ressaltar que transições virtuais por entre autoestados pertencentes a diferentes subespaços de \tilde{H}_0 podem e devem ocorrer em uma escala temporal curta, quando comparada à escala da dinâmica, de sorte que efetivamente é como se houvesse um acoplamento entre os autoestados pertencentes ao mesmo subespaço. Nesse sentido, no caso de confirmarmos a existência de tais subespaços energéticos no espectro de H_0 para N qubits e, ademais, que tais subespaços estão distantes (energeticamente) por um fator $\sim J$, então $\Delta \ll J$ por si só deve garantir a validade do modelo efetivo para N qubits.

Considera-se, em primeira instância, $\varepsilon_i = 0 \quad \forall i$, $J_{i,i+1} = J \quad \forall i$ fixo, de sorte que

$$H_0 \longrightarrow \tilde{H}_0 = J \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(i+1)}, \quad (3.140)$$

e o espectro de \tilde{H}_0 torna-se

$$E_{\xi_1 \dots \xi_N} = J \sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{\xi_i + \xi_{i+1}}, \quad (3.141)$$

para o estado $|\xi_1, \dots, \xi_N\rangle$.

Nesse ponto é interessante introduzir uma noção importante a ser utilizada, qual seja, a dos pares de qubits. Um par de qubits vizinhos será denotado por (ξ_k, ξ_{k+1}) , $k = 1, \dots, N -$

1. Naturalmente, tem-se os pares iniciando em (ξ_1, ξ_2) até o último par (ξ_{N-1}, ξ_N) , i.e., dado um sistema de N qubits, tem-se $N - 1$ desses pares. Define-se como n o número de pares com sinal de pseudo-spin ao contrário. Ao contrário aqui significa que para o k -ésimo par, tem-se $\xi_k = 0, \xi_{k+1} = 1$ ou vice-versa. Define-se também $m = N - 1 - n$ como o número de qubits com sinal de pseudo-spin paralelos.

Agora, note como cada elemento $(-1)^{\xi_i + \xi_{i+1}}$ do somatório na expressão do autovalor genérico resulta em

$$\begin{aligned} (-1)^{\xi_i + \xi_{i+1}} &= +1, & \text{se } \xi_i = \xi_{i+1} \\ &= -1, & \text{se } \xi_i \neq \xi_{i+1} \end{aligned} \quad (3.142)$$

Portanto, conclui-se que

$$\sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{\xi_i + \xi_{i+1}} = (m - n), \quad (3.143)$$

uma vez que para cada par com sinal de pseudo-spin paralelo, o somatório contribui com $+1$, ao passo em que para cada par com sinal de pseudo-spin antiparalelo, o somatório contribui com -1 . Assim,

$$\sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{\xi_i + \xi_{i+1}} = (N - 1 - 2n). \quad (3.144)$$

Naturalmente, $n = n(\xi_1, \dots, \xi_N)$, sendo esse determinado por um processo de contagem simples. Ainda, $n \in [0, N - 1]$ e $(N - 1 - 2n) \in [-(N - 1), (N - 1)]$. O espectro de \tilde{H}_0 torna-se

$$E_{\xi_1 \dots \xi_N} = (N - 1 - 2n)J \quad (3.145)$$

para o estado $|\xi_1, \dots, \xi_N\rangle$ e $n = n(\xi_1, \dots, \xi_N)$.

Da expressão acima, conclui-se que todos os estados $\{|\xi'_1, \dots, \xi'_N\rangle\}$ com o mesmo valor de n terão o mesmo autovalor e, portanto, esse é o fator capaz de caracterizar (ou distinguir) os subespaços de \tilde{H}_0 . De fato, pode-se denotar $\{|\xi_1, \dots, \xi_N\rangle\}_n$ como o conjunto de estados na base computacional com o mesmo valor de n . A caracterização da base em termos dos subespaços se dá como segue: $\{|\xi_1, \dots, \xi_N\rangle\}_0 \rightarrow (N - 1)J, \{|\xi_1, \dots, \xi_N\rangle\}_1 \rightarrow (N - 1 - 2)J, \{|\xi_1, \dots, \xi_N\rangle\}_2 \rightarrow (N - 1 - 4)J, \dots, \{|\xi_1, \dots, \xi_N\rangle\}_{N-1} \rightarrow -(N - 1)J$.

Note como para quaisquer dois subespaços de \tilde{H}_0 , a sua diferença de energia é sempre maior do que J . De fato, considere $k, l \in [0, N - 1]$, então

$$\Delta E_{kl} = (N - 1 - 2k)J - (N - 1 - 2l)J = 2J(l - k). \quad (3.146)$$

Assim, para $k = l - 1$, tem-se $\Delta E_{l-1,l} = 2J$. Para $k = l - 2$, então $\Delta E_{l-2,l} = 4J$. Por outro lado, se $k = l + 1$, então $\Delta E_{l+1,l} = -2J$ e quando $k = l + 2$, então $\Delta E_{l+2,l} = -4J$ e assim por diante (evidentemente não há problema com o sinal da diferença de energia; importa aqui o fato de existir uma diferença de energia). No pior cenário, i.e., subespaços energéticos vizinhos ($k = l \pm 1$), a diferença energética é $|2J| > J$.

Prontamente pode-se argumentar como os conjuntos de estados $\{|\xi_1, \dots, \xi_N\rangle\}_n$ devem variar drasticamente com a mudança do número de qubits N (considere, por exemplo, a variação desses conjuntos nos casos $N = 3$ e $N = 4$). De fato esse é o caso para todo n , exceto para $n = 0$ e $n = N - 1$ e, como ficará claro na sequência, esses são os dois únicos conjuntos necessários para a geração de estados GHZ de alta fidelidade, assim como são os subespaços em que o modelo efetivo de dois níveis funciona.

Qualquer que seja o número N de qubits,

$$n = 0 \iff \xi_1 = \dots = \xi_N = 0 \text{ e } \xi_1 = \dots = \xi_N = 1. \quad (3.147)$$

Portanto, $\{|\xi_1, \dots, \xi_N\rangle\}_0 = \{|0\rangle^{\otimes N}, |1\rangle^{\otimes N}\}$, o que caracteriza um subespaço de \tilde{H}_0 de dois níveis com energia $(N - 1)J$, existente qualquer que seja N . Similarmente,

$$n = N - 1 \iff \xi_i = 0, \xi_{i+1} = 1 \ \forall \ i \text{ e } \xi_i = 1, \xi_{i+1} = 0 \ \forall \ i. \quad (3.148)$$

Portanto, $\{|\xi_1, \dots, \xi_N\rangle\}_{N-1} = \{|01\rangle^{\otimes N/2}, |10\rangle^{\otimes N/2}\}$, o que novamente caracteriza um subespaço de \tilde{H}_0 de dois níveis com energia $-(N - 1)J$, existente qualquer que seja N (simples ajustes de notação devem ser feitos se N é ímpar).

Considera-se a argumentação anterior suficiente no sentido de sustentar a ideia de uma aproximada dinâmica exata de dois níveis qualquer que seja N , uma vez que se pode

sempre iniciar o sistema no subespaço $n = 0$ (ou mesmo em $n = N - 1$) e fazer $\Delta \ll J$.

3.2.2.2 Hamiltoniano efetivo para a geração de estados GHZ de N qubits

Como nos casos particulares, ao se considerar a adição de uma perturbação a \tilde{H}_0 , na qual o parâmetro é pequeno em comparação a J , espera-se que a perturbação conecte fracamente, no decorrer da dinâmica, estados pertencentes a diferentes n -subespaços de \tilde{H}_0 . Assim, ao se inicializar o sistema em um dos n -subespaços, e deixar o sistema evoluir sob $H = \tilde{H}_0 + V$, espera-se que o sistema mantenha-se (aproximadamente) nesse subespaço. Portanto, considerar-se-á que o sistema evolui sob o Hamiltoniano $\tilde{H}_{\text{NQB}s} = \tilde{H}_0 + \tilde{V}$, em que

$$\tilde{V} = \Delta \sum_{i=1}^N \sigma_x^{(i)}, \quad \Delta \ll J. \quad (3.149)$$

Isso é de fato um cenário promissor pela seguinte razão: se o sistema é inicializado em $\{|\xi_1, \dots, \xi_N\rangle\}_0$ ou $\{|\xi_1, \dots, \xi_N\rangle\}_{N-1}$, como consequência de $\Delta \ll J$, os únicos estados acessados dinamicamente são $\{|0\rangle^{\otimes N}, |1\rangle^{\otimes N}\}$ ou $\{|01\rangle^{\otimes N/2}, |10\rangle^{\otimes N/2}\}$, respectivamente. Mas isso corresponde a um sistema de dois níveis, envolvendo os estados referidos. Então, em um instante arbitrário, o estado do sistema pode ser considerado como

$$|\Psi(t)\rangle = C_1(t) |0\rangle^{\otimes N} + C_2(t) |1\rangle^{\otimes N}, \quad (3.150)$$

ou,

$$|\Psi(t)\rangle = C_1(t) |01\rangle^{\otimes N/2} + C_2(t) |10\rangle^{\otimes N/2}. \quad (3.151)$$

Se em um dado instante t' obtem-se $C_1(t') = C_2(t') \sim 1/\sqrt{2}$, então

$$|\Psi(t')\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N}), \quad (3.152)$$

ou,

$$|\Psi(t')\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle^{\otimes N/2} + |10\rangle^{\otimes N/2}), \quad (3.153)$$

esses sendo estados do tipo GHZ, i.e., estados puros maximamente emaranhados em um

sistema de N qubits (contendo emaranhamento genuíno entre N qubits). Descreve-se essa situação utilizando-se um Hamiltoniano efetivo dado por

$$H_{\text{NQB}s,\text{eff}} = \Omega_N^{\text{GHZ}} |1\rangle^{\otimes N} \langle 0|^{\otimes N} + h.c., \quad (3.154)$$

na condição em que o sistema exato é iniciado em $\rho(t=0) = |0\rangle^{\otimes N} \langle 0|^{\otimes N}$ ou $\rho(t=0) = |1\rangle^{\otimes N} \langle 1|^{\otimes N}$ e o sistema exato evolui sob $\tilde{H}_{\text{NQB}s} = \tilde{H}_0 + \tilde{V}$. Similarmente,

$$H_{\text{NQB}s,\text{eff}} = \Omega_N^{\text{FLIP}} |10\rangle^{\otimes N/2} \langle 01|^{\otimes N/2} + h.c., \quad (3.155)$$

na condição em que o sistema exato é iniciado em $\rho(t=0) = |01\rangle^{\otimes N/2} \langle 01|^{\otimes N/2}$ ou $\rho(t=0) = |10\rangle^{\otimes N/2} \langle 10|^{\otimes N/2}$ e o sistema exato evolui sob $\tilde{H}_{\text{NQB}s} = \tilde{H}_0 + \tilde{V}$.

A determinação do acoplamento efetivo Ω_N^{GHZ} (ou, equivalentemente, Ω_N^{FLIP}) segue o procedimento aplicado nos casos particulares. Aqui o tratamento será um pouco mais trabalhado de modo a demonstrar a equação genérica de determinação do dito acoplamento.

Deve-se primeiro separar o espaço de Hilbert em duas partes, A e B,

$$\{\{|0\rangle^{\otimes N}, |1\rangle^{\otimes N}\}, \{|0^{\otimes(N-1)}1\rangle, \dots, |1^{\otimes(N-1)}0\rangle\}\}, \quad (3.156)$$

em que usualmente a parte A está associada com os subespaços de \tilde{H}_0 com $n=0$ ou $n=N-1$. Partindo-se da eq. de Schrödinger independente do tempo, pode-se concluir que o Hamiltoniano efetivo desse sistema de dois níveis é dado por

$$H_{\text{NQB}s,\text{eff}} = \tilde{H}^{AA} + \tilde{H}^{AB}(E - \tilde{H}^{BB})^{-1}\tilde{H}^{BA}, \quad (3.157)$$

e, portanto,

$$\Omega_N^{\text{GHZ}} = \langle 1|^{\otimes N} H_{\text{NQB}s,\text{eff}} |0\rangle^{\otimes N} = \langle 1|^{\otimes N} [\tilde{H}^{AA} + \tilde{H}^{AB}(E - \tilde{H}^{BB})^{-1}\tilde{H}^{BA}] |0\rangle^{\otimes N}. \quad (3.158)$$

Definindo-se os operadores projetores

$$P = |0\rangle^{\otimes N} \langle 0|^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N} \langle 1|^{\otimes N}, \quad (3.159a)$$

$$Q = I - P, \quad (3.159b)$$

é fácil ver que as definições que seguem são válidas,

$$\tilde{H}^{AA} = P(\tilde{H}_0 + \tilde{V})P, \quad (3.160a)$$

$$\tilde{H}^{BB} = Q(\tilde{H}_0 + \tilde{V})Q, \quad (3.160b)$$

$$\tilde{H}^{AB} = P(\tilde{H}_0 + \tilde{V})Q, \quad (3.160c)$$

$$\tilde{H}^{BA} = Q(\tilde{H}_0 + \tilde{V})P. \quad (3.160d)$$

Simplificando-se a expressão do acoplamento, vem

$$\Omega_N^{\text{GHZ}} = \langle 1|^{\otimes N} \tilde{H}^{AA} |0\rangle^{\otimes N} + \langle 1|^{\otimes N} \left[\tilde{H}^{AB} (E - \tilde{H}^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} \right] |0\rangle^{\otimes N}. \quad (3.161)$$

Analisa-se nesse instante, em particular, o segundo termo da equação acima, denotado por S . Tem-se

$$(E - \tilde{H}^{BB})^{-1} = (E - Q\tilde{H}_0Q - Q\tilde{V}Q)^{-1} = (E - \tilde{H}_0^{BB} - \tilde{V}^{BB})^{-1}, \quad (3.162)$$

e, portanto,

$$(E - \tilde{H}^{BB})^{-1} = \left[I - (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{V}^{BB} \right]^{-1} (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1}. \quad (3.163)$$

Ora, então S é dado por

$$S = \langle 1|^{\otimes N} \left\{ \tilde{H}^{AB} \left[I - (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{V}^{BB} \right]^{-1} (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} \right\} |0\rangle^{\otimes N}. \quad (3.164)$$

Denota-se o operador $\left[I - (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{V}^{BB} \right]^{-1}$ como segue

$$\left[I - (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{V}^{BB} \right]^{-1} = (I - X)^{-1}, \quad (3.165)$$

em que $X = (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{V}^{BB}$. Ora, pode-se tratar tal operador utilizando-se da sua expansão em série de Taylor, dada por

$$(I - X)^{-1} = I + X + X^2 + \dots + X^{N-2} + \dots \quad (3.166)$$

Agora, note como Ω_N^{GHZ} está associado com um processo de ordem N na perturbação \tilde{V} . No formato em que S se encontra, existe a priori um processo de segunda ordem (termos \tilde{H}^{AB} e \tilde{H}^{BA}). Portanto, é suficiente se considerar o truncamento da série no termo de ordem $N - 2$, como segue

$$(I - X)^{-1} \sim I + X + \dots + X^{N-2}. \quad (3.167)$$

Segue que

$$\begin{aligned} S &= \langle 1 |^{\otimes N} \tilde{H}^{AB} \left[I + \dots + X^{N-2} \right] (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} | 0 \rangle^{\otimes N} \\ &= \langle 1 |^{\otimes N} \tilde{H}^{AB} X^{N-2} (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} | 0 \rangle^{\otimes N} \\ &= \langle 1 |^{\otimes N} \tilde{H}^{AB} \left[(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{V}^{BB} \right]^{N-2} (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} | 0 \rangle^{\otimes N}. \end{aligned} \quad (3.168)$$

E finalmente, conclui-se que

$$\Omega_N^{\text{GHZ}} = \langle 1 |^{\otimes N} \tilde{H}^{AA} | 0 \rangle^{\otimes N} + \langle 1 |^{\otimes N} \tilde{H}^{AB} \left[(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{V}^{BB} \right]^{N-2} (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} | 0 \rangle^{\otimes N}, \quad (3.169)$$

sendo essa válida para qualquer número N de qubits, fazendo-se a ressalva de que para $N = 2$, deve-se considerar $X^0 = I$.

Aqui não será computado explicitamente o valor desse acoplamento, devido ao volume de contas envolvido. No entanto, garantiu-se para N qualquer as condições necessárias

para a ocorrência da dinâmica exata de dois níveis, podendo-se sempre fazer $\Delta \ll J$. Ocorre também de a equação determinante do acoplamento Ω_N^{GHZ} ser estruturalmente equivalente para todo N . Tendo-se esses fatos como fundamentação, conjectura-se o que segue.

Conjectura: O valor do acoplamento efetivo Ω_N^{GHZ} , presente no Hamiltoniano efetivo $H_{\text{NQBs,eff}} = \Omega_N^{\text{GHZ}}|1\rangle^{\otimes N}\langle 0|^{\otimes N} + h.c.$, é dado por

$$\Omega_N^{\text{GHZ}} = \frac{\Delta^N}{J^{N-1}}. \quad (3.170)$$

Note que a conjectura também é válida para o acoplamento no subespaço $n = N - 1$, isto é, considera-se que $\Omega_N^{\text{FLIP}} = \Omega_N^{\text{GHZ}}$.

A partir desse ponto, assume-se a conjectura como verdadeira e estuda-se a principal consequência desse fato, qual seja, o período de oscilação do pseudo sistema de dois níveis.

A solução do modelo efetivo de dois níveis é obtida da equação de Von Neumann

$$i\hbar\dot{\rho}_{\text{eff}}(t) = [H_{\text{NQBs,eff}}, \rho_{\text{eff}}(t)], \quad (3.171)$$

permitindo concluir a seguinte forma para a matriz densidade efetiva

$$\begin{aligned} \rho_{\text{eff}}(t) = & \cos^2\left(\frac{\Omega_N^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right) |0\rangle^{\otimes N}\langle 0|^{\otimes N} + i\cos\left(\frac{\Omega_N^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right)\sin\left(\frac{\Omega_N^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right) |0\rangle^{\otimes N}\langle 1|^{\otimes N} \\ & - i\cos\left(\frac{\Omega_N^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right)\sin\left(\frac{\Omega_N^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right) |1\rangle^{\otimes N}\langle 0|^{\otimes N} + \sin^2\left(\frac{\Omega_N^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right) |1\rangle^{\otimes N}\langle 1|^{\otimes N}. \end{aligned} \quad (3.172)$$

Portanto, as populações efetivas são da forma

$$P_{|0\rangle^{\otimes N}} = \text{Tr}(|0\rangle^{\otimes N}\langle 0|^{\otimes N}\rho_{\text{eff}}(t)) = \cos^2\left(\frac{\Omega_N^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right), \quad (3.173a)$$

$$P_{|1\rangle^{\otimes N}} = \text{Tr}(|1\rangle^{\otimes N}\langle 1|^{\otimes N}\rho_{\text{eff}}(t)) = \sin^2\left(\frac{\Omega_N^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right). \quad (3.173b)$$

Dessa maneira, o período de oscilação das populações $P_{|0\rangle^{\otimes N}}$ e $P_{|1\rangle^{\otimes N}}$ é dado pela

expressão

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{2\pi}{\frac{\Omega_N^{\text{GHZ}}}{h}} \right]. \quad (3.174)$$

Uma vez que esse modelo é válido somente nas condições em que $\varepsilon_i = 0$, $\Delta \ll J$, considera-se J fixo (isso é fisicamente justificável) e $\Delta = \frac{J}{x}$, $x \in \mathbb{R}$. Simples substituição dessas informações na expressão para o período, permite concluir que

$$T_N(x, J) = \left(\frac{h}{2J} \right) x^N. \quad (3.175)$$

O caso particular $N = 3$, assim como as simulações numéricas apresentadas permitem concluir que valores ótimos da taxa de tunelamento estão no intervalo $\Delta \in [J/8, J/4]$ e, portanto, considera-se $x \in [4, 8]$. Um típico valor para a força de Coulomb é dado por $J = 25\mu\text{eV}$ e, para esse, estima-se na sequência o período de oscilação $T_N(x, 25\mu\text{eV})$. É fácil computar que

$$T_N(x, 25\mu\text{eV}) = (0.083 \text{ ns}) x^N. \quad (3.176)$$

Naturalmente os casos particulares estão aqui contemplados, por construção da conjectura. O melhor cenário possível é obtido fazendo-se $N = 2$ e $x = 4$, em que $T_2(4, 25\mu\text{eV}) \sim 1.3\text{ns}$. Fica claro, a partir dessa equação, como o período cresce exponencialmente com o aumento do número de qubits. De modo a contemplar um sistema físico real (em que exista no mínimo o mecanismo de dephasing), pode-se pensar em aumentar o valor de J , mantendo-se $x \sim 8$ fixo e, evidentemente, buscar maneiras para se diminuir Γ_{deph} .

A fidelidade efetiva é definida de maneira direta. Tem-se que

$$\rho_{\text{target}} = |\Psi_{\text{GHZ}_N}(-\pi/2)\rangle\langle\Psi_{\text{GHZ}_N}(-\pi/2)|, \quad (3.177)$$

e, portanto, explicitamente

$$\rho_{\text{target}} = \frac{1}{2} \left(|0\rangle^{\otimes N} \langle 0|^{\otimes N} + i |0\rangle^{\otimes N} \langle 1|^{\otimes N} - i |1\rangle^{\otimes N} \langle 0|^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N} \langle 1|^{\otimes N} \right). \quad (3.178)$$

Assim, $\mathcal{F}_{\text{eff}}(t) \equiv \text{Tr}(\rho_{\text{eff}}(t)\rho_{\text{target}})$, resultando, explicitamente, na expressão se-

guinte

$$\mathcal{F}_{\text{eff}}(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \sin \left(\frac{2\Omega_N^{\text{GHZ}} t}{\hbar} \right) \right]. \quad (3.179)$$

É importante ressaltar algumas questões nesse ponto. A obtenção dinâmica de estados GHZ de alta fidelidade e um modelo efetivo para descrever a dinâmica exata dos N qubits são aspectos distintos da dissertação em questão. Com isso quer-se dizer que pode ocorrer de a dinâmica efetiva ser de fato um bom modelo, mas na medida em que N cresce, os estados GHZ tenham cada vez menor fidelidade. O oposto também é possível, isto é, obtenção de estados GHZ de alta fidelidade, mas com o modelo efetivo sendo cada vez menos uma boa descrição para o sistema. Nesse sentido, a situação ideal ocorre quando esses dois objetivos caminham em conjunto: os estados GHZ são obtidos, o que é importante no sentido da teoria da informação quântica, ao passo em que o modelo efetivo (por meio de suas expressões analíticas) fornece importantes estimativas para quantidades do sistema (que não seriam obtidas facilmente por outros meios), destacando-se o período de oscilação e expressões para as populações e fidelidade. A única maneira de isso ser colocado em prova é por meio da análise dos resultados de simulações numéricas.

Com efeito, na figura 3.8, plota-se o resultado das simulações numéricas para o caso $N = 10$ (veja, nesse caso não houve solução analítica do parâmetro de acoplamento, portanto é um teste do regime de validade da conjectura), como função do parâmetro adimensional $\frac{\Omega_{10}^{\text{GHZ}} t}{\hbar}$. A legenda de símbolos pode ser encontrada na própria figura. Note como há de fato concordância das curvas exatas e efetiva com um bom grau de exatidão, no que concerne ao comportamento oscilatório (intensidade e frequência) dessas curvas. Pensado-se em termos matriciais, o resultado é bastante não trivial. Note, pois, que as matrizes e vetores envolvidos tem dimensão $2^{10} = 1024$ e o resultado enuncia que, sob as condições já citadas, de todos esses graus de liberdade, importam apenas 2, quais sejam, aqueles envolvidos na definição do estado GHZ de dimensão 10. Do modelo efetivo, conclui-se que em $\frac{\Omega_{10}^{\text{GHZ}} t}{\hbar} \sim \frac{\pi}{4}$ obtém-se o estado

$$|\Psi_{\text{GHZ}_{10}}(-\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes 10} - i|1\rangle^{\otimes 10}). \quad (3.180)$$

Ressalta-se que foram realizadas simulações de $N = 5$ até $N = 10$. Os resultados

são bastante similares aos encontrados na figura 3.8 (o que é natural, pois se a generalização funciona até $N = 10$, é natural que funcione em casos de N menor) e por isso não são apresentados aqui. De maneira geral, observa-se que os resultados utilizando-se de $\Delta = J/8$ são robustos em todos esses casos, ao passo que para $\Delta = J/6$ nota-se um aumento de discordância (tanto uma diminuição no valor da fidelidade do estado GHZ obtido, quanto na discordância com o modelo efetivo) na medida em que N cresce. O caso $\Delta = J/4$ apresenta uma alta discordância já no caso $N = 2$ (veja a subseção reservada a esse caso) e, portanto, espera-se que essa discordância apenas cresça com o crescimento de N . Maiores valores de N não foram testados por falta de capacidade computacional e, principalmente, tempo hábil. Para uma discussão sobre o que pode significar essa generalização, sua importância e possíveis limitações, veja a próxima subseção.

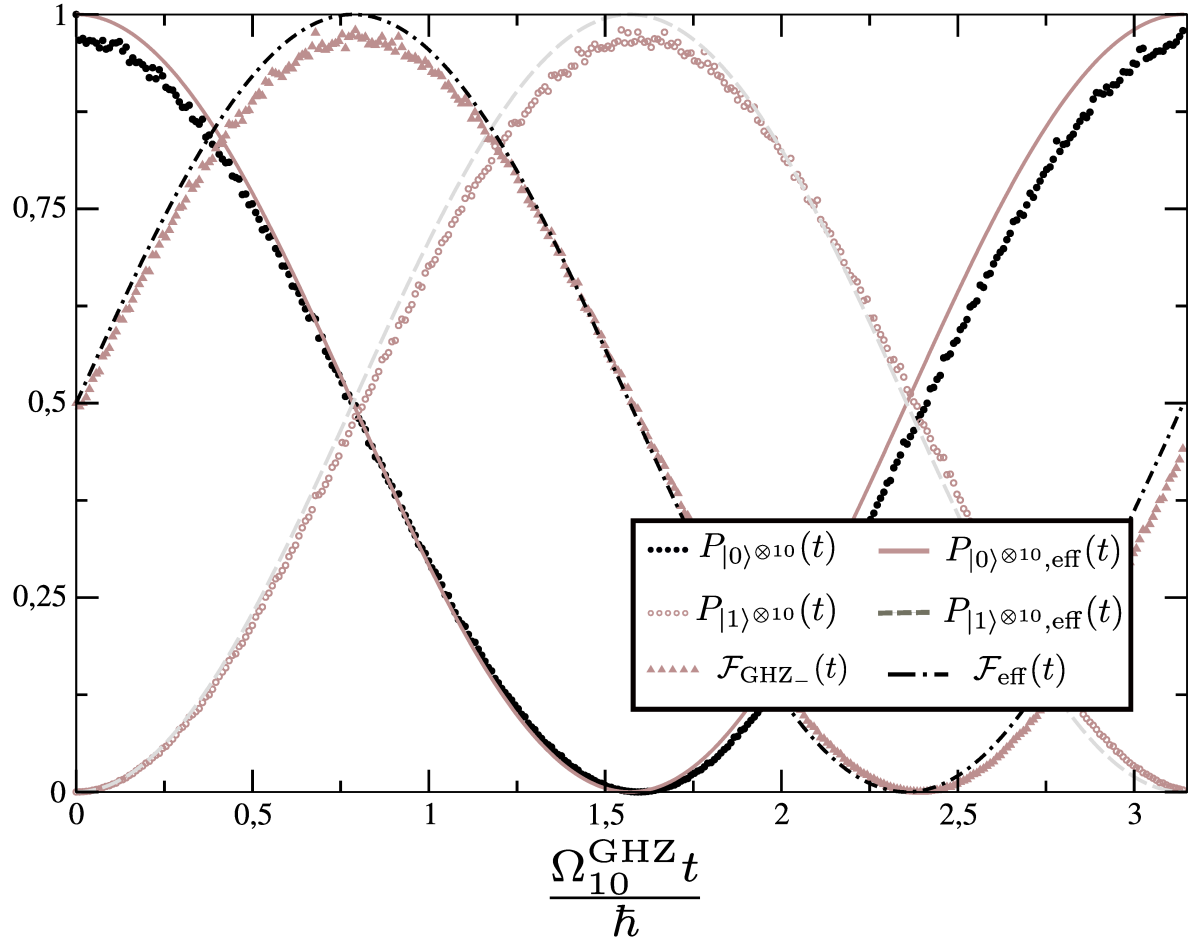


Figura 3.8: Dinâmica em um conjunto de dez moléculas quânticas acopladas como função do parâmetro adimensional $\frac{\Omega_{10}^{\text{GHZ}} t}{\hbar}$, considerando-se a condição inicial $\rho(0) = |0\rangle^{\otimes 10} \langle 0|^{\otimes 10}$ e os parâmetros físicos $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu\text{eV}$ e $\Delta = J/8$ no Hamiltoniano, eq. (3.134). Apresentam-se as populações $P_{|0\rangle^{\otimes 10}}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{|1\rangle^{\otimes 10}}(t)$ (círculo marrom não preenchido), em conjunto com a evolução dessas duas quantidades considerando-se um modelo efetivo de dois níveis, quais sejam, $P_{|0\rangle^{\otimes 10},\text{eff}}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{|1\rangle^{\otimes 10},\text{eff}}(t)$ (linha tracejada cinza), assim como a fidelidade $\mathcal{F}_{\text{GHZ}_-}(t)$ (triângulo marrom preenchido). A última quantidade é calculada utilizando-se a eq. (2.30), com o estado *target* definido por $\rho_{\text{target}} = |\Psi_{\text{GHZ}_{10}}(-\pi/2)\rangle \langle \Psi_{\text{GHZ}_{10}}(-\pi/2)|$, em que $|\Psi_{\text{GHZ}_{10}}(-\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes 10} - i|1\rangle^{\otimes 10})$. A curva de fidelidade efetiva, $\mathcal{F}_{\text{eff}}(t)$ (linha ponto-tracejada preta) é produzida utilizando-se a eq. (3.179).

Fonte: Próprio autor

3.2.2.3 Viabilidade da formação de estados GHZ de N qubits

Nesta seção, discute-se aspectos sobre a viabilidade experimental e as limitações da nossa proposta teórica de geração de estados GHZ para N qubits. Ainda que se tenha discorrido no sentido de que as condições encontradas nos casos particulares também se encontram (ou podem ser produzidas) no caso geral, não existe uma garantia de que o comportamento

de uma oscilação de dois níveis repete-se qualquer que seja o número de qubits. O número de estados no espaço de Hilbert cresce exponencialmente com o número de qubits, portanto o número de estados nos n -subespaços de \tilde{H}_0 também o faz. Nesse sentido, ainda que $\Delta \ll J$ conecte fracamente os diferentes n -subespaços, o número de transições possíveis cresce também exponencialmente e, portanto, um número muito grande de populações desprezíveis, pode se tornar não desprezível.

Em segunda instância, a conjectura em si para o valor do acoplamento efetivo. O número de casos resolvidos analiticamente (este termo aqui deve ser lido com cautela. Quer-se dizer que, na proposta de generalização para o valor do acoplamento efetivo, com todas as suas aproximações e considerações feitas, conseguiu-se explicitamente determinar esse valor) é bastante reduzido $N = 2, 3, 4$, quando em comparação com o conteúdo exposto na conjectura, qual seja, de validade qualquer que seja o número N de qubits. Como dito, o espaço de Hilbert dificulta bastante a solução da eq. (3.2.2.2) mesmo para o próximo caso não resolvido $N = 5$ (naturalmente, isso decorre de $\text{Dim}(\mathcal{H}_{5\text{QBs}}) = 2^5$ e, por conseguinte, da dimensão dos operadores relacionados ser 32x32). Provavelmente um melhor enunciado para a conjectura seja de validade até um N da ordem de 10 qubits (leia-se um número N baixo de qubits), 50 qubits ou mesmo 100 qubits. A problemática, entretanto, é a de que esse valor de corte é desconhecido. Dessa forma, mantem-se a conjectura em seu enunciado original. Ademais, tais valores podem ser considerados fisicamente não realizáveis, como ficará claro nos próximos parágrafos. Em síntese, não é de importância se conhecer o valor N em que o modelo efetivo deixa de funcionar, uma vez que os valores fisicamente realizáveis estão bastante próximos dos valores resolvidos analiticamente.

A viabilidade experimental da nossa proposta requer uma discussão sobre as escalas temporais relevantes no problema. Como dito na subseção 3.1.3, o dephasing é o principal processo de descoerência neste sistema. Com efeito, a primeira pode ser estimada analisando-se o inverso da taxa de dephasing Γ_{deph} , usualmente escrita em unidades de frequência. O valor estimado para essa constante é de $\Gamma_{deph} \sim 1\text{GHz}$. Segue que a escala temporal de atuação do dephasing é da ordem de $T_{deph} \sim \frac{1}{\Gamma_{deph}} = 1\text{ ns}$. A segunda escala de importância, a de oscilação do sistema exato, pode ser avaliada quantitativamente

pela eq. (3.176). Evidentemente, deve-se fazer a ressalva de que a descrição efetiva não é perfeita e livre de erros. Por outro lado, no que diz respeito ao primeiro período de oscilação, as curvas exata e efetiva demonstram ser suficientemente similares para o propósito de estimar o período de oscilação da dinâmica exata. Isso é interessante pois a (3.176) permite conhecer, para quaisquer J , x (consequentemente taxa de tunelamento Δ) e número N de qubits, a quantidade requerida. O problema de implementação experimental da nossa proposta é identificado quando se nota que mesmo para valores pequenos de N , a estimativa do período da dinâmica exata torna-se muito maior do que o período de atuação do dephasing. Por exemplo, fazendo-se $N = 5$, $J = 25\mu\text{eV}$ e $x = 6$, esse valor de x demonstra ser importante pois diminui o período, mantendo ainda uma alta fidelidade dos estados GHZ obtidos, tem-se $T_5(6, 25\mu\text{eV}) \sim 643\text{ns} \gg T_{deph}$. Usualmente o primeiro estado GHZ de alta fidelidade é obtido em $\frac{T_5(6, 25\mu\text{eV})}{4} \sim 161\text{ns}$. Portanto, anteriormente à obtenção desse GHZ, o sistema evolui para um estado do tipo $\frac{I}{2^5}$ (correspondendo, evidentemente, a um estado separável). Essa problemática da escala vale também para os casos $N = 3$ e $N = 4$, como se pode verificar pelos valores calculados de período nas subseções anteriores. De fato, é por essa razão que Γ_{deph} precisou ser reduzido na subseção de dinâmica sob o canal de dephasing, de modo a permitir a geração de ao menos um estado GHZ de alta fidelidade, no caso $N = 3$.

Outro problema é dado pelo que segue: qual a limitação dos parâmetros J e Δ na medida em que se faz crescer o número de qubits no sistema, de modo que o sistema (originalmente de pontos quânticos acoplados) possa ainda ser considerado como um sistema de N qubits? Esse questionamento é justificado na medida em que os qubits são identificados sob condições experimentais bastante específicas, a partir de pontos quânticos acoplados. Deve-se garantir, por exemplo, a existência de apenas dois níveis eletrônicos acessíveis (um em cada ponto) de modo que se tenha apenas duas ocupações eletrônicas possíveis (na janela das energias envolvidas). Utilizou-se nessa dissertação valores extraídos dos trabalhos experimentais originais (em que se garantem todas as condições necessárias para a definição dos qubits, partindo-se dos pontos quânticos acoplados). Supõe-se aqui que esses parâmetros não podem assumir valores quaisquer. Entretanto, nota-se que um aumento de J com

x fixado (ainda assim há um aumento relativo de $\Delta = J/x$), permite uma diminuição do período da oscilação efetiva/exata. Por exemplo, dobrar o valor de J , em qualquer um dos casos calculados, diminui pela metade o período; ainda assim, as escalas temporais do sistema continuam muito maiores se comparadas com a escala do dephasing. Em síntese, o fato de o período crescer exponencialmente com o número de qubits é bastante inesperado e, considerando-se toda a discussão até aqui, cria desafios para a implementação realista da proposta. Pois, mantendo-se x fixo, a quantidade x^N cresce exponencialmente com N , ao passo em que, para a manutenção de baixos períodos (da ordem do período do dephasing), deve-se fazer J também crescer exponencialmente. Isso pode, do ponto de vista empírico, descaracterizar completamente o sistema (não permitindo uma boa definição dos qubits), além de se apresentar como um custo energético muito alto. Esse custo pode ser estimado por meio da inversão da eq. do período, como segue

$$J_N(x, T) = \left(\frac{h}{2T} \right) x^N. \quad (3.181)$$

Fazendo-se na equação acima $T = T_{deph} \sim 1ns$, então

$$J_N(x, 1ns) \sim (2.1\mu eV) x^N. \quad (3.182)$$

Por fim, fazendo-se $x = 6$ e $N = 3$, tem-se $J_3(6, 1ns) \sim 447\mu eV$ (assim como $\Delta = J/6 \sim 75\mu eV$). Note que esse altíssimo custo ocorre em um dos casos mais simples do número de qubits.

O último assunto a ser discutido refere-se a um questionamento importante sobre o regime de obtenção dos estados GHZ: o regime de parâmetros e condição inicial são únicos no sentido da geração de estados GHZ de alta fidelidade? Evidentemente aqui não há pretensão de garantir-se a unicidade do método de obtenção dos estados GHZ em um sistema de N qubits de carga (sob influência de uma interação de Coulomb). Entretanto, ainda que não seja único, aparenta ser o caminho mais direto e simples nesse sentido. Essa afirmativa é justificada na medida em que se considera $\varepsilon_i = 0$, $J_{i,i+1} = J$, $\Delta_i = \Delta \quad \forall \quad i$. São simpli-

ficações severas e implicam grande restrição sob o espaço de fase dos parâmetros. Qualquer que seja o diferente método utilizado, deve ser constituído de uma combinação mais complicada para os valores desses parâmetros (e possivelmente a consideração de dessintonias não nulas). Supondo-se existente esse método alternativo, deve-se ainda questionar sob o regime de validade dos parâmetros e a escala de obtenção da dinâmica do sistema (como feito para o método utilizado na dissertação, de modo a avaliar a sua possível implementação experimental), seja para $N = 3$ ou uma possível proposta de generalização para N qubits. Uma busca por métodos alternativos, deve ser facilitada ao se fazer a utilização de métodos de optimização de quantidades de interesse (por exemplo, pode-se tentar optimizar alguns parâmetros em $H_{3\text{QBs}}$ de modo que se maximize τ_3 ou a fidelidade em relação a um estado GHZ). Por outro lado, supondo-se inexistentes tais métodos alternativos, o que implica na unicidade do método aqui utilizado, então a obtenção de estados GHZ no contexto de N qubits de carga está severamente limitada pela montagem experimental. Tanto no sentido de buscar métodos para diminuir severamente o dephasing do sistema (e isso sem considerar outros mecanismos de descoerência), quanto de estudo da viabilidade física do regime de parâmetros do acoplamento de Coulomb e taxa de tunelamento.

Capítulo 4

Considerações Finais

Nesta dissertação, estudou-se teoricamente uma proposta para a obtenção dinâmica de estados GHZ em um sistema de três qubits de carga. Com este objetivo, explorou-se a dinâmica quântica usando-se uma abordagem numérica, calculando-se grandezas como as populações dos estados quânticos, diversos quantificadores de emaranhamento e a fidelidade. De posse dos resultados numéricos, foi possível a proposição de um modelo efetivo de dois níveis capaz de fornecer estimativas importantes acerca da dinâmica exata, destacando-se principalmente o período da última. Notou-se que as condições para a obtenção de uma aproximada dinâmica analítica e modelo efetivo de dois níveis podem ser reproduzidas no caso genérico de N qubits, o que implicou também em uma busca por generalização do resultado particular de três qubits, i.e., tinha-se como objetivo a geração dinâmica de estados GHZ de alta fidelidade em um sistema de N qubits de carga.

Como justificativa para a generalização da dinâmica exata para N qubits, descobriu-se que o espectro do Hamiltoniano diagonal \tilde{H}_0 depende da variável n (o número de pares de qubits com sinal de pseudo-spin antiparalelos). Esse fato é suficiente para demonstrar que, em termos energéticos, todos os autoestados desse operador com o mesmo n possuem mesma energia e se agrupam em porções distintas desse espectro (demonstrou-se que essa diferença energética entre porções com n distintos é de no mínimo $2J$). Também, os autoestados de maior e menor energia, $n = 0$ e $n = N - 1$, compõem, qualquer que seja o número de qubits N , subespaços de dois níveis bastante eficientes para a geração dinâmica de estados GHZ,

visto que incluem os dois estados separáveis presentes nas próprias definições de estados GHZ e FLIP. Dessa maneira, ao incluir o operador de tunelamento \tilde{V} na dinâmica, fazer com que este seja uma perturbação em comparação com o parâmetro de Coulomb ($\Delta \ll J$), e iniciar o sistema em um dos autoestados de \tilde{H}_0 com $n = 0$ ou $n = N - 1$, verifica-se que a dinâmica mantém-se, de forma aproximada, somente nesse subespaço e, portanto, estados GHZ de alta fidelidade devem ser obtidos, qualquer que seja o número de qubits N . Essa justificativa foi confirmada verdadeira até o número de qubits $N = 10$.

De maneira analítica, determinou-se o acoplamento efetivo Ω_N^{GHZ} nos casos $N = 2$, $N = 3$ e $N = 4$ e conjecturou-se que a regra particular pode ser generalizada para qualquer número N de qubits. As simulações numéricas de $N = 5$ até $N = 10$ indicam que a conjectura é válida. O modelo efetivo é útil pois permite inferir importantes quantidades acerca do sistema. Destacam-se as expressões analíticas para as populações efetivas (3.173), fidelidade efetiva com relação a estados GHZ definidos previamente (3.179) e, principalmente, uma expressão para o período de oscilação (3.175). Em particular, no caso $N = 2$, verificou-se que, sob as condições nas quais se considera válido o modelo efetivo, as curvas de população efetiva são recuperadas da solução analítica geral.

Concernente à viabilidade experimental dos resultados aqui obtidos, uma análise sobre o período de oscilação efetivo no caso de N qubits em comparação com o tempo de atuação do mecanismo de dephasing leva à conclusão de que será de fato um desafio a obtenção de estados GHZ no contexto de qubits de carga, visto que T é proporcional à N -ésima potência de x (esse idealmente está entre 6 e 8). Uma possibilidade de se diminuir tal período é fazer J crescer, idealmente de maneira exponencial (isso também significa fazer crescer Δ , pela maneira como foi escrito). Não se tem conhecimento, no entanto, de até que ponto isso pode ser realizado em laboratório, visto que é preciso, em primeira instância, garantir a codificação dos qubits.

Capítulo 5

APÊNDICE

5.1 O caso $N = 4$

O espaço de Hilbert de um sistema de 4 qubits é dado por $\mathcal{H}_{4QB_s} \sim (\mathbb{C}^2)^{\otimes 4}$ e a base computacional associada é dada pelo conjunto de estados $\{|0\rangle^{\otimes 4}, \dots, |1\rangle^{\otimes 4}\}$ em que se utiliza a mesma convenção anteriormente estabelecida. O Hamiltoniano do sistema é considerado como da forma

$$H_{4QB_s} = \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i \sigma_z^{(i)} + \sum_{i=1}^3 J_{i,i+1} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(i+1)} + \sum_{i=1}^4 \Delta_i \sigma_x^{(i)} = H_0 + V, \quad (5.1)$$

em que,

$$H_0 = \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i \sigma_z^{(i)} + \sum_{i=1}^3 J_{i,i+1} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(i+1)}, \quad (5.2)$$

$$V = \sum_{i=1}^4 \Delta_i \sigma_x^{(i)}. \quad (5.3)$$

Novamente, primeiro se estuda o espectro do operador H_0 . Pelas mesmas razões anteriormente citadas, esse deve ser diagonal quando escrito na base computacional e, portanto,

segue seu espectro

$$E_{0000} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + J_{12} + J_{23} + J_{34}, \quad (5.4a)$$

$$E_{0001} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + J_{12} + J_{23} - J_{34}, \quad (5.4b)$$

$$E_{0010} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + J_{12} - J_{23} - J_{34}, \quad (5.4c)$$

$$E_{0011} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + J_{12} - J_{23} + J_{34}, \quad (5.4d)$$

$$E_{0100} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - J_{12} - J_{23} + J_{34}, \quad (5.4e)$$

$$E_{0101} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - J_{12} - J_{23} - J_{34}, \quad (5.4f)$$

$$E_{0110} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - J_{12} + J_{23} - J_{34}, \quad (5.4g)$$

$$E_{0111} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - J_{12} + J_{23} + J_{34}, \quad (5.4h)$$

$$E_{1000} = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - J_{12} + J_{23} + J_{34}, \quad (5.4i)$$

$$E_{1001} = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - J_{12} + J_{23} - J_{34}, \quad (5.4j)$$

$$E_{1010} = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - J_{12} - J_{23} - J_{34}, \quad (5.4k)$$

$$E_{1011} = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - J_{12} - J_{23} + J_{34}, \quad (5.4l)$$

$$E_{1100} = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + J_{12} - J_{23} + J_{34}, \quad (5.4m)$$

$$E_{1101} = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + J_{12} - J_{23} - J_{34}, \quad (5.4n)$$

$$E_{1110} = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + J_{12} + J_{23} - J_{34}, \quad (5.4o)$$

$$E_{1111} = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + J_{12} + J_{23} + J_{34}, \quad (5.4p)$$

Considera-se agora $\varepsilon_i = 0$, $J_{i,i+1} = J$ fixo, $\Delta_i = \Delta \ll J$ e denota-se os operadores H_0 e V como \tilde{H}_0 e \tilde{V} . Ainda, o espectro de \tilde{H}_0 torna-se

$$E_{0000} = E_{1111} = +3J, \quad (5.5a)$$

$$E_{0101} = E_{1010} = -3J, \quad (5.5b)$$

$$E_{0001} = E_{0011} = E_{0111} = E_{1000} = E_{1100} = E_{1110} = +J \quad (5.5c)$$

$$E_{0010} = E_{0100} = E_{0110} = E_{1011} = E_{1101} = E_{1001} = -J. \quad (5.5d)$$

Portanto, nesse caso tem-se quatro subespaços energéticos no espectro de \tilde{H}_0 , sendo esses degenerados e cada qual com distância mínima de $|2J|$ do próximo subespaço.

Novamente, considerando-se a adição de uma perturbação não diagonal a \tilde{H}_0 (i.e., cujo parâmetro é pequeno em comparação a J), espera-se que tal perturbação conecte fracamente, via dinâmica, estados pertencentes a diferentes subespaços de \tilde{H}_0 . Dessa maneira, ao se iniciar o sistema em um desses subespaços e deixar que o mesmo evolua sob ação do Hamiltoniano $\tilde{H}_{4QB_s} = \tilde{H}_0 + \tilde{V}$, espera-se que (aproximadamente) o sistema mantenha-se no subespaço inicial, na escala temporal de interesse (note que o mesmo comentário feito no caso $N = 2$ vale aqui; existem transições virtuais, em uma escala temporal menor, entre o subespaço de interesse e os demais subespaços; são essas transições que permitem um acoplamento efetivo entre os dois estados no subespaço de interesse, uma vez que em \tilde{H}_{4QB_s} tais estados não estão acoplados). Naturalmente esse é um cenário interessante, pois, nos subespaços $\pm 3J$, há a possibilidade de estados GHZ serem obtidos no decorrer do tempo.

Pela arguição anterior, pode-se considerar o sistema de 4 qubits como efetivamente um sistema de dois níveis evoluindo no tempo via um Hamiltoniano efetivo da forma

$$H_{4QB_s, \text{eff}} = \Omega_4^{\text{GHZ}} |1111\rangle\langle 0000| + h.c., \quad (5.6)$$

ou, equivalentemente para o subespaço $-3J$, como

$$H_{4QB_s, \text{eff}} = \Omega_4^{\text{FLIP}} |1010\rangle\langle 0101| + h.c. \quad (5.7)$$

O método de determinação do parâmetro de acoplamento efetivo $\Omega_4^{\text{GHZ/FLIP}}$ é análogo ao caso $N = 3$, sendo as principais diferenças as que seguem: o espaço de Hilbert agora tem dimensão 16, o que dificulta bastante a determinação dos blocos do Hamiltoniano nas partes A e B (no que concerne a um cálculo manual dos mesmos); o operador projeção aqui é $P = |0000\rangle\langle 0000| + |1111\rangle\langle 1111|$ e $Q = I - P$; em um dado momento do método é necessário expandir um dado operador em série de Taylor para operadores. No caso $N = 3$ pode-se truncar a série no termo de ordem 1, pois isso fornece um processo de ordem 3.

Nesse caso, no entanto, deve-se truncar a série no termo de ordem dois. Percebe-se isso na equação que segue

$$\Omega_4^{\text{GHZ}} = \langle 1111 | \tilde{H}^{AA} | 0000 \rangle + \langle 1111 | \tilde{H}^{AB} \left[I - (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{V}^{BB} \right]^{-1} (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} | 0000 \rangle. \quad (5.8)$$

O operador a ser expandido é $[I - (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{V}^{BB}]^{-1}$ e aqui os operadores \tilde{H}^{AB} e \tilde{H}^{BA} geram um processo de segunda ordem (leia-se, são da ordem Δ^2). Faz-se então necessário a adição de outro processo de segunda ordem e isso é conseguido ao se fazer $[I - (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{V}^{BB}]^{-1} \sim I + [(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{V}^{BB}] + [(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{V}^{BB}]^2$. Segue que

$$\Omega_4^{\text{GHZ}} = \langle 1111 | \tilde{H}^{AA} | 0000 \rangle + \langle 1111 | \tilde{H}^{AB} \left[(E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{V}^{BB} \right]^2 (E - \tilde{H}_0^{BB})^{-1} \tilde{H}^{BA} | 0000 \rangle. \quad (5.9)$$

Introduzindo-se relações de completude na identidade acima e após algumas manipulações, tem-se

$$\Omega_4^{\text{GHZ}} = \sum_{k,u,l=1}^{16} \frac{\langle 1111 | \tilde{H}^{AB} | k \rangle \langle k | \tilde{V}^{BB} | l \rangle \langle l | \tilde{V}^{BB} | u \rangle \langle u | \tilde{H}^{BA} | 0000 \rangle}{(E - E_k)(E - E_l)(E - E_u)}. \quad (5.10)$$

Novamente, o problema de se determinar o acoplamento (por meio da eq. acima) torna-se o problema de se determinar os blocos de $\tilde{H}_{4\text{QBs}}$ nas partes A e B do espaço de Hilbert. Os operadores \tilde{H}^{AA} e \tilde{H}_0^{BB} são triviais, nesse sentido, por serem diagonais nas partes. Os demais operadores, definidos como nas equações (3.27c), (3.27d) e (3.27b) resultam em

$$\tilde{H}^{AB} = \Delta \left(|0000\rangle\langle 1000| + |1111\rangle\langle 0111| + |0000\rangle\langle 0100| + |1111\rangle\langle 1011| + |0000\rangle\langle 0010| + |1111\rangle\langle 1101| + |0000\rangle\langle 0001| + |1111\rangle\langle 1110| \right). \quad (5.11)$$

Note que, $\tilde{H}^{AB} = P\tilde{V}Q$, ao passo em que $\tilde{H}^{BA} = Q\tilde{V}P$, então é fácil convencer-se

de que $\tilde{H}^{BA} = (\tilde{H}^{AB})^\dagger$. Por fim,

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{BB} = \Delta \bigg(& |0001\rangle\langle 0011| + |0001\rangle\langle 0101| + |0001\rangle\langle 1001| + |0010\rangle\langle 0011| + \\ & |0010\rangle\langle 0110| + |0010\rangle\langle 1010| + |0011\rangle\langle 0001| + |0011\rangle\langle 0010| + \\ & |0011\rangle\langle 0111| + |0011\rangle\langle 1011| + |0100\rangle\langle 0101| + |0100\rangle\langle 0110| + \\ & |0100\rangle\langle 1100| + |0101\rangle\langle 0001| + |0101\rangle\langle 0100| + |0101\rangle\langle 0111| + \\ & |0101\rangle\langle 1101| + |0110\rangle\langle 0010| + |0110\rangle\langle 0100| + |0110\rangle\langle 0111| + \\ & |0110\rangle\langle 1110| + |0111\rangle\langle 0011| + |0111\rangle\langle 0101| + |0111\rangle\langle 0110| + \\ & |1000\rangle\langle 1001| + |1000\rangle\langle 1010| + |1000\rangle\langle 1100| + |1001\rangle\langle 0001| + \\ & |1001\rangle\langle 1000| + |1001\rangle\langle 1011| + |1001\rangle\langle 1101| + |1010\rangle\langle 0010| + \\ & |1010\rangle\langle 1000| + |1010\rangle\langle 1011| + |1010\rangle\langle 1110| + |1011\rangle\langle 0011| + \\ & |1011\rangle\langle 1001| + |1011\rangle\langle 1010| + |1100\rangle\langle 0100| + |1100\rangle\langle 1000| + \\ & |1100\rangle\langle 1101| + |1100\rangle\langle 1110| + |1101\rangle\langle 0101| + |1101\rangle\langle 1001| + \\ & |1101\rangle\langle 1100| + |1110\rangle\langle 0110| + |1110\rangle\langle 1010| + |1110\rangle\langle 1100| \bigg). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Após uma extensa série de cálculos, conclui-se que o valor do acoplamento efetivo é dado por

$$\Omega_4^{\text{GHZ}} = \frac{\Delta^4}{J^3}. \quad (5.13)$$

Nas figura 5.1, plotam-se a dinâmica das populações de interesse, as respectivas populações efetivas, a fidelidade com um estado de interesse definido previamente, além de a curva de fidelidade efetiva (definida na sequência, mas é análoga à curva obtida no caso $N = 2$ com a ressalva de que deve se utilizar Ω_4^{GHZ} no argumento da função seno). O estado alvo é dado por $|\Psi_{\text{GHZ}_4}(-\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle - i|1111\rangle)$. As populações exatas são: $P_{0000}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{1111}(t)$ (círculo marrom não preenchido). As populações efetivas são: $P_{0000,\text{eff}}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{1111,\text{eff}}(t)$ (linha tracejada cinza). O gráfico é construído utilizando-se os parâmetros $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu\text{eV}$ e $\Delta = J/8$. Nessas condições, a configuração inicial em algum dos autoestados do operador \tilde{H}_0 garante que

a dinâmica deve ocorrer aproximadamente como previsto pelo modelo efetivo. Utiliza-se $\rho(0) = |0000\rangle\langle 0000|$ (portanto a dinâmica de dois níveis ocorre no subespaço de \tilde{H}_0 com energia $+3J$). Nota-se como são de fato obtidos estados GHZ de alta fidelidade. Também, o modelo efetivo fita bem o modelo exato, desde que $\frac{\Omega_4^{\text{GHZ}}t}{\hbar}$ seja pequeno. Na medida em que esse parâmetro cresce, as curvas exata e efetiva distanciam-se, na medida em que o valor de Δ é maior. Esse é o mesmo comportamento observado no caso $N = 3$.

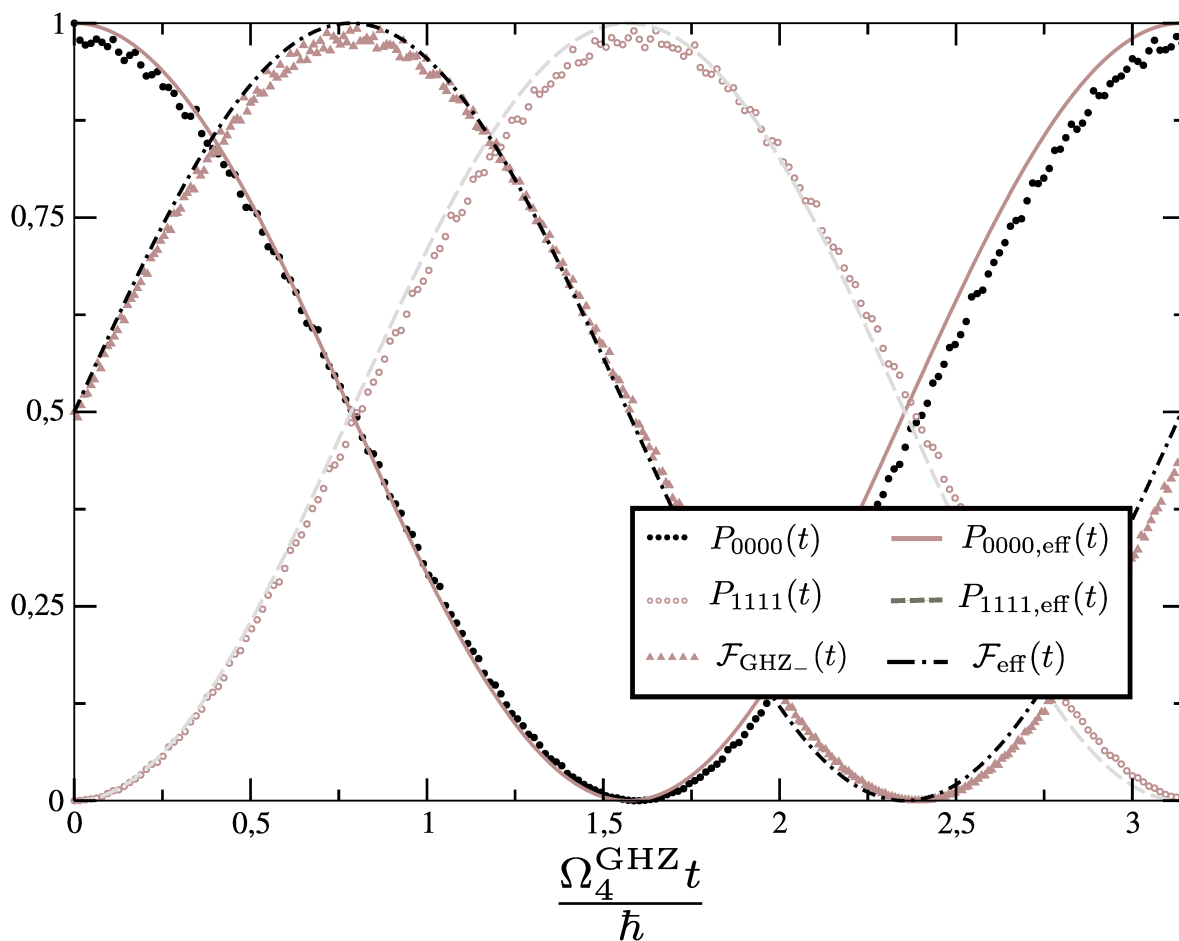


Figura 5.1: Dinâmica em um conjunto de quatro moléculas quânticas acopladas como função do parâmetro adimensional $\frac{\Omega_4^{\text{GHZ}}t}{\hbar}$, considerando-se a condição inicial $\rho(0) = |0000\rangle\langle 0000|$ e os parâmetros físicos $\varepsilon_i = 0$, $J = 25\mu\text{eV}$ e $\Delta = J/8$ no Hamiltoniano, eq. (5.1). Apresentam-se as populações $P_{0000}(t)$ (círculo preto preenchido) e $P_{1111}(t)$ (círculo marrom não preenchido), em conjunto com a evolução dessas duas quantidades considerando-se um modelo efetivo de dois níveis, quais sejam, $P_{0000,\text{eff}}(t)$ (linha sólida marrom) e $P_{1111,\text{eff}}(t)$ (linha tracejada cinza), assim como a fidelidade $\mathcal{F}_{\text{GHZ}_-}(t)$ (triângulo marrom preenchido). A última quantidade é calculada utilizando-se a eq. (2.30), com o estado *target* definido por $\rho_{\text{target}} = |\Psi_{\text{GHZ}_4}(-\pi/2)\rangle\langle\Psi_{\text{GHZ}_4}(-\pi/2)|$, em que $|\Psi_{\text{GHZ}_4}(-\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle - i|1111\rangle)$. A fidelidade efetiva $\mathcal{F}_{\text{eff}}(t)$ (linha preta ponto-tracejada) é plotada utilizando-se a eq. (5.23).

Fonte: Próprio autor

Como no caso $N = 2$, a solução da equação

$$i\hbar\dot{\rho}_{\text{eff}}(t) = [H_{4\text{QBs,eff}}, \rho_{\text{eff}}(t)], \quad (5.14)$$

resulta em uma matriz densidade efetiva da forma

$$\begin{aligned} \rho_{\text{eff}}(t) = & \cos^2\left(\frac{\Omega_4^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right) |0000\rangle\langle 0000| + i\cos\left(\frac{\Omega_4^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right)\sin\left(\frac{\Omega_4^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right) |0000\rangle\langle 1111| \\ & - i\cos\left(\frac{\Omega_4^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right)\sin\left(\frac{\Omega_4^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right) |1111\rangle\langle 0000| + \sin^2\left(\frac{\Omega_4^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right) |1111\rangle\langle 1111|, \end{aligned} \quad (5.15)$$

e, da equação acima, segue que as populações efetivas são da forma

$$P_{0000,\text{eff}}(t) = \text{Tr}(|0000\rangle\langle 0000|\rho_{\text{eff}}(t)) = \cos^2\left(\frac{\Omega_4^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right), \quad (5.16)$$

$$P_{1111,\text{eff}}(t) = \text{Tr}(|1111\rangle\langle 1111|\rho_{\text{eff}}(t)) = \sin^2\left(\frac{\Omega_4^{\text{GHZ}}}{\hbar}t\right). \quad (5.17)$$

Portanto, o período de oscilação da solução efetiva é dado por

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{2\pi}{\frac{\Omega_4^{\text{GHZ}}}{\hbar}} \right]. \quad (5.18)$$

Considerando-se então J fixo, $\Delta = \frac{J}{x}$, com $x \in \mathbb{R}$ e substituindo-se a expressão explícita de Ω_4^{GHZ} na equação acima, decorre que

$$T_4(x, J) = \left(\frac{\hbar}{2J}\right)x^4. \quad (5.19)$$

Do caso $N = 3$, conclui-se que os valores ótimos de x estão no intervalo $x \in [4, 8]$ (isso porque os valores ótimos de Δ estão entre $J/8$ e $J/4$). Considerando-se $J = 25\mu\text{eV}$, decorre que

$$T_4(x, 25\mu\text{eV}) = (0.083 \text{ ns})x^4. \quad (5.20)$$

Portanto, $T_4(8, 25\mu eV) \approx 339 \text{ ns}$, $T_4(6, 25\mu eV) \approx 107 \text{ ns}$, $T_4(4, 25\mu eV) \approx 21 \text{ ns}$. Esse resultado pode ser considerado ruim, de certa maneira. Note pois que o modelo efetivo descreve bem o sistema exato. Na condição em que esse seja o único regime capaz de produzir estados GHZ de alta fidelidade, então dificilmente sistemas de qubits de carga com $N > 3$ devem ser observados em laboratório. Em outras palavras, a escala de obtenção de um GHZ é por muitas ordens de grandeza maior do que o tempo de atuação do dephasing. Essa faceta é explorada melhor na seção sobre o caso de N qubits.

A fidelidade efetiva é definida de maneira direta. Tem-se que

$$\rho_{\text{target}} = |\Psi_{\text{GHZ}_4}(-\pi/2)\rangle\langle\Psi_{\text{GHZ}_4}(-\pi/2)|, \quad (5.21)$$

e, portanto, explicitamente

$$\rho_{\text{target}} = \frac{1}{2} (|0000\rangle\langle 0000| + i|0000\rangle\langle 1111| - i|1111\rangle\langle 0000| + |1111\rangle\langle 1111|). \quad (5.22)$$

Assim, $\mathcal{F}_{\text{eff}}(t) \equiv \text{Tr}(\rho_{\text{eff}}(t)\rho_{\text{target}})$, resultando, explicitamente, na expressão seguinte

$$\mathcal{F}_{\text{eff}}(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \sin\left(\frac{2\Omega_4^{\text{GHZ}}t}{\hbar}\right) \right]. \quad (5.23)$$

5.2 A operação de traço parcial

Definição 4 (Traço Parcial). *Seja um operador X_{A_1, A_2, \dots, A_N} atuando em um espaço de Hilbert de N partes (todas finito-dimensionais) $\mathcal{H}_{A_1, A_2, \dots, A_N}$, e também sejam I_{A_l} identidades atuando em \mathcal{H}_{A_l} e $\{|i\rangle_{A_k}\}$ uma base ortornormal para \mathcal{H}_{A_k} ($l \neq k$). Então, o traço parcial em relação ao espaço de Hilbert \mathcal{H}_{A_k} é definido como*

$$\text{Tr}_{A_k} \{X_{A_1, A_2, \dots, A_N}\} = \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{H}_{A_k}} (I_{A_1} \otimes \dots \otimes \langle i|_{A_k} \otimes \dots \otimes I_{A_N}) X_{A_1, A_2, \dots, A_N} (I_{A_1} \otimes \dots \otimes |i\rangle_{A_k} \otimes \dots \otimes I_{A_N}) \quad (5.24)$$

Da definição acima, pode-se concluir que o traço parcial é um mapa (ou superope-

rador) $M : \mathcal{L}(\mathcal{H}_{A_1, A_2, \dots, A_N}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{A_1, \dots, A_{(k-1)}, A_{(k+1)}, \dots, A_N})$, tomando como objeto de aplicação um operador linear que atua no espaço de Hilbert completo do sistema e levando a um operador linear que atua em um espaço de Hilbert com um grau de liberdade a menos, a parte A_k . Assim como a operação do traço total, o traço parcial é um mapa linear.

O exemplo mais simples de aplicação da operação do traço parcial é obtido quando se faz $A_1 = A$, $A_2 = B$ (um sistema bipartido), e, ademais, $\mathcal{H}_{AB} \sim \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, com $\dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B) = 2$ (trata-se do espaço de Hilbert de dois qubits). Considerando-se um operador linear $\rho_{AB} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$, escrito na base computacional como segue

$$\rho_{AB} = \sum_{i,j,k,l=0,1} \rho_{ij,kl} |i\rangle\langle k|_A \otimes |j\rangle\langle l|_B, \quad (5.25)$$

quer-se calcular o traço parcial de ρ_{AB} em relação à parte B . Para tanto, utilizando-se a definição de traço parcial, vem

$$\begin{aligned} Tr_B(\rho_{AB}) &= \sum_{n=0,1} (I_A \otimes \langle n|_B) \rho_{AB} (I_A \otimes |n\rangle_B) \\ &= \sum_{n,i,j,k,l=0,1} \rho_{ij,kl} (I_A |i\rangle_A) (\langle k|_A I_A) \otimes \langle n|_B |j\rangle_B \langle l|_B |n\rangle_B \\ &= \sum_{n,i,k=0,1} \rho_{in,kn} |i\rangle\langle k|_A. \end{aligned} \quad (5.26)$$

O exemplo acima deixa claro como um operador, inicialmente em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$, torna-se um operador atuando apenas em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$.

A importância do traço parcial, ao menos no contexto da informação quântica, é a de descrição de partes de um sistema composto. De fato, considerando-se que ρ_{AB} represente o estado de um sistema de dois qubits, é possível demonstrar a validade da equação que segue nesse mesmo contexto de dois qubits (não obstante, sendo um resultado genérico para N partes, desde que essas sejam finitas)

$$p(a_n, A) = Tr[(P_{n,A} \otimes I_B) \rho_{AB}] = Tr[P_{n,A} Tr_B(\rho_{AB})]. \quad (5.27)$$

Na equação acima, $p(a_n, A)$ é identificada como a probabilidade de se obter a_n como

resultado de uma medida local, na parte A, do observável A no sistema bipartido. Note que nesse caso $\sum_n P_{n,A} = I_A$. Agora, a segunda parcela da igualdade é bastante curiosa; também apresenta, no sentido dos postulados do operador densidade, a forma de uma probabilidade, qual seja, a de se obter a_n como resultado de uma medida do observável A , mas em um sistema com apenas uma parte e que, para essa completa identificação, deve-se concluir que o estado representante desse sistema de uma parte é dado por $\rho_A \equiv Tr_B(\rho_{AB})$. De fato isso é o que se observa empiricamente, quando se tem um sistema composto de N partes, com operador densidade ρ e deseja-se obter uma descrição particular de apenas M ($M < N$) partes, é suficiente tomar-se o traço parcial de ρ com relação às $N - M$ partes restantes de não interesse. Com isso, quer-se dizer, por exemplo, que toda a estatística do operador $P_{n,A} \otimes I_B$ obtida quando o estado do sistema é dado por ρ_{AB} (tudo isso ocorrendo em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{AB})$) é recuperada quando se tem a parte não trivial $P_{n,A}$ em um sistema de estado ρ_A (tudo ocorrendo em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$).

De fato, para além da descrição física de sistemas em que se possui uma ignorância clássica com relação ao vetor estado do sistema (estados mistos), uma das principais razões para a utilização do formalismo de operador densidade é o excelente manejo desse para com a descrição de estados reduzidos de um sistema composto; estados reduzidos obtidos, como explicado, pela utilização da operação de traço parcial.

Referências Bibliográficas

- [1] A. EINSTEIN et al. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47:777, 1935. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777>.
- [2] D. BOHM. Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky. *Physical Review*, 108:1070, 1957. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.108.1070>.
- [3] E. SCHRODINGER. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23:807, 1935. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01491891>.
- [4] E. SCHRODINGER. Discussion of probability relations between separated systems. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31:555, 1935. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004100013554>.
- [5] J.S BELL. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1:195, 1964. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195>.
- [6] R. HORODECKI et al. Quantum entanglement. *Reviews of Modern Physics*, 81:865, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.865>.
- [7] A. ASPECT et al. Experimental tests of realistic local theories via bells theorem. *Physical Review Letters*, 47:460, 1981. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.47.460>.
- [8] A. ASPECT et al. Experimental test of bells inequalities using time-varying analyzers.

- Physical Review Letters*, 49:1804, 1982. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.1804>.
- [9] M. GIUSTINA et al. Significant-loophole-free test of bells theorem with entangled photons. *Physical Review Letters*, 115:250401, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.250401>.
- [10] B. HENSEN et al. Loophole free bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature*, 526:682, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature15759>.
- [11] L. K. SHALM et al. Strong loophole-free test of local realism. *Physical Review Letters*, 115:250402, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.250402>.
- [12] B. HENSEN et al. Loophole-free bell test using electron spins in diamond: second experiment and additional analysis. *Scientific Reports*, 6:30289, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1038/srep30289>.
- [13] D. RAUCH et al. Cosmic bell test using random measurement settings from high redshift quasars. *Physical Review Letters*, 121:080403, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.080403>.
- [14] M. LI et al. Test of local realism into the past without detection and locality loopholes. *Physical Review Letters*, 121:080404, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.080404>.
- [15] J. F. CLAUSER et al. Proposed experiment to test local hidden variable theories. *Physical Review Letters*, 23:880, 1969. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.23.880>.
- [16] N. BRUNNER et al. Bell nonlocality. *Reviews of Modern Physics*, 86:419–478, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.419>.

- [17] C.H. BENNET et al. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. *Theoretical Computer Science*, 560:7, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2014.05.025>.
- [18] R. P. FEYNMAN. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21:467–488, 1982. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02650179>.
- [19] D. DEUTSCH. Quantum theory, the church turing principle and the universal quantum computer. *Proceedings of the Royal Society A*, 400:1818, 1985. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1985.0070>.
- [20] A. K. EKERT. Quantum cryptography based on bells theorem. *Physical Review Letters*, 67:661, 1991. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.661>.
- [21] C. H. BENNET. Communication via one and two particle operators on einstein podolsky rosen states. *Physical Review Letters*, 69:2881, 1992. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.2881>.
- [22] C. H. BENNET. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein podolsky rosen channels. *Physical Review Letters*, 70:1895, 1993. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1895>.
- [23] M. ZUKOWSKI et al. Event-Ready-Detector bell experiment via entanglement swapping. *Physical Review Letters*, 71:4287, 1993. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.4287>.
- [24] D. BOUWMEESTER et al. Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390:575, 1997. DOI: <https://doi.org/10.1038/37539>.
- [25] W. PFAFF et al. Unconditional quantum teleportation between distant solid-state quantum bits. *Science*, 345:532, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1253512>.

- [26] JG. REN et al. Ground-to-satellite quantum teleportation. *Nature*, 549:70, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature23675>.
- [27] O. GÜHNE et al. Entanglement detection. *Physics Reports*, 474:1–75, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2009.02.004>.
- [28] R. F. WERNER. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Physical Review A*, 40:4277, 1989. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.4277>.
- [29] A. PERES. Separability criterion for density matrices. *Physical Review Letters*, 77:8–19, 1996. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [30] M. HORODECKI et al. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, 223:1–8, 1996. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [31] W. K. WOOTERS. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, 80:2245, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [32] W. DUR et al. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physical Review A*, 62:2314, 2000. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [33] B. TERHAL. Bell inequalities and the separability criterion. *Physics Letters A*, 271:319–326, 2000. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(00\)00401-1](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00401-1).
- [34] O. GUHNE. *Detecting quantum entanglement: Entanglement Witness and Uncertainty relations*. Thesis, Universitat Siegen, 2004. Disponível em: <https://www.repo.uni-hannover.de/bitstream/handle/123456789/6406/393503704.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.

- [35] M. BARBIERI et al. Detection of entanglement with polarized photons: Experimental realization of an entanglement witness. *Physical Review Letters*, 91:227901, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.227901>.
- [36] M. BOURENNANE. Experimental detection of multipartite entanglement using witness operators. *Physical Review Letters*, 92:087902, 2004. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.087902>.
- [37] P. W. SHOR. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 124–134, 1994. DOI: <https://doi.org/10.1109/SFCS.1994.365700>.
- [38] J. I. CIRAC. Quantum computations with cold trapped ions. *Physical Review Letters*, 74:4091, 1995. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.4091>.
- [39] D. G. CORY. Ensemble quantum computing by NMR spectroscopy. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 94:1634, 1997. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.94.5.1634>.
- [40] B. E. KANE. A silicon based nuclear spin quantum computer. *Nature*, 393:133–137, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1038/30156>.
- [41] D. V. AVERIN. Adiabatic quantum computation with cooper pairs. *Solid State Communications*, 105:659, 1998. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0038-1098\(97\)10001-1](https://doi.org/10.1016/S0038-1098(97)10001-1).
- [42] D. LOSS et al. Quantum computation with quantum dots. *Physical Review A*, 57:120, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.57.120>.
- [43] D. P. DIVINCENZO. The physical implementation of quantum computation, 2000 (accessed October 30, 2020). <https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0002077.pdf>.

- [44] T. HAYASHI et al. Coherent manipulation of electronic states in a double quantum dot. *Physical Review Letters*, 91:226804, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.226804>.
- [45] P. OLIVEIRA and L. SANZ. Bell states and entanglement dynamics on two coupled quantum molecules. *Annals of Physics*, 356:244, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2015.02.036>.
- [46] F.M. SOUZA and L. SANZ. Lindblad formalism based on fermion-to-qubit mapping for nonequilibrium open quantum systems. *Physical Review A*, 96:052110, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.052110>.
- [47] F.M SOUZA, P. OLIVEIRA, and L. SANZ. Quantum entanglement driven by electron-vibrational mode coupling. *Physical Review A*, 100:042309, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.042309>.
- [48] J. NOGUEIRA. Conceitos gerais sobre o emaranhamento com aplicação em moléculas quânticas, 2018 (accessed March 28, 2021). <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/23947/1/ConceitosGeraisSobre.pdf>.
- [49] C. COHEN-TANNOUJDI et al. *Quantum Mechanics*. Wiley, 1991.
- [50] U. FANO. Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques. *Reviews of Modern Physics*, 29:74, 1957. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.29.74>.
- [51] M. A. NIELSEN et al. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2011.
- [52] C. H. BENNETT et al. Postulates for measures of genuine multipartite correlations. *Physical Review A*, 83:012312, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.012312>.

- [53] Z. MA et al. Measure of genuine multipartite entanglement with computable lower bounds. *Physical Review A*, 83:062325, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.062325>.
- [54] D.M. GREENBERGER et al. *Bells Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe*, chapter Going beyond Bell Theorem. Springer, 1989. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-017-0849-4_10.
- [55] N. GISIN et al. Bell inequality, bell states and maximally entangled states for n qubits. *Physics Letters A*, 246:1, 1998. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(98\)00516-7](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(98)00516-7).
- [56] V. COFFMAN et al. Distributed entanglement. *Physical Review A*, 61:2306, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.052306>.
- [57] W. C. GAZZONI. *Estudo do Emaranhamento Quântico com base na Teoria da Codificação Clássica*. Tese, Unicamp, 2008.
- [58] P. A. S. OLIVEIRA. *Emaranhamento eletrônico em moléculas de pontos quânticos semicondutores*. Dissertação, Universidade Federal de Uberlândia, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/15671/1/EmaranhamentoEletronicoMoleculas.pdf>.
- [59] T. FUJISAWA et al. Correlated coherent oscillations in coupled semiconductor charge qubits. *Physical Review Letters*, 103:56802, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.056802>.
- [60] T. FUJISAWA et al. Multiple two-qubit operations for a coupled semiconductor charge qubit. *Physica E*, 43:730, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physe.2010.07.040>.
- [61] T. FUJISAWA et al. Spontaneous emission spectrum in double quantum dot devices. *Science*, 282:932, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.282.5390.932>.

- [62] J. NOGUEIRA et al. Dynamic generation of ghz states of three coupled charge qubits, 2020 (accessed March 28, 2021). <https://arxiv.org/pdf/2009.04569.pdf>.
- [63] W.G VAN DER WIEL et al. Electron transport through double quantum dots. *Reviews of Modern Physics*, 75:1, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.1>.
- [64] J. NOGUEIRA et al. Dynamic generation of Greenberger-Horne-Zeilinger states with coupled charge qubits. *Physical Review A*, 103:032438, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.103.032438>.
- [65] X. ZHANG et al. Semiconductor quantum computation. *National Science Review*, 6(1):32–54, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1093/nsr/nwy153>.
- [66] M. M. WILDE. *Quantum Information Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 2017.