

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE FÍSICA

PEDRO HENRIQUE SANTOS BENTO

TRATAMENTO SEMICLÁSSICO DO TRANSPORTE QUÂNTICO
CAÓTICO COM UMA BARREIRA DE TUNELAMENTO

UBERLÂNDIA - MG

2020

PEDRO HENRIQUE SANTOS BENTO

Tratamento Semiclássico do Transporte Quântico Caótico Com Uma Barreira de Tunelamento

Versão Original

Dissertação apresentada ao Instituto de Física (INFIS) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcel Novaes

UBERLÂNDIA - MG

2020

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

B478 Bento, Pedro Henrique Santos, 1997-
2021 Tratamento semiclássico do transporte quântico caótico
com uma barreira de tunelamento [recurso eletrônico] /
Pedro Henrique Santos Bento. - 2021.

Orientador: Marcel Novaes.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Física.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.163>
Inclui bibliografia.

1. Física. I. Novaes, Marcel, 1978-, (Orient.). II.
Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em
Física. III. Título.

CDU: 53

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1A, Sala 213 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4309 - www.infis.ufu.br - cpgfisica@ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Física				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado				
Data:	17 de fevereiro de 2021	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:45
Matrícula do Discente:	11912FIS003				
Nome do Discente:	Pedro Henrique Santos Bento				
Título do Trabalho:	Tratamento semiclássico do transporte quântico caótico com uma barreira de tunelamento				
Área de concentração:	Física				
Linha de pesquisa:	Física Estatística e Métodos Matemáticos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	N.A				

Reuniu-se por meio de vídeo conferência , a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Física, assim composta: Professores Doutores: Liliana Sanz de la Torre - INFIS/UFU, Anderson Luiz da Rocha e Barbosa - UFRPE e Marcel Novaes- INFIS/UFU orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Prof. Dr. Marcel Novaes, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Marcel Novaes, Professor(a) do Magistério Superior**, em 18/02/2021, às 09:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Liliana Sanz de La Torre, Professor(a) do Magistério Superior**, em 18/02/2021, às 09:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Anderson Luiz da Rocha e Barbosa, Usuário Externo**, em 23/02/2021, às 14:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2570292** e o código CRC **93373953**.

Dedico a mim. A pessoa que eu melhor conheci durante os dois últimos anos.

Agradecimentos

- Agradeço aos meus pais por todo o apoio e incentivo sempre.
- Faço agradecimentos especiais ao meu orientador, Marcel. Trabalhamos juntos desde 2016-2 e durante esses 4 anos, você sempre confiou no meu potencial, sempre me encorajou a tentar novamente e a não desistir das tarefas que você me passava. Foram 4 anos de muito aprendizado. Obrigado por tudo isso e por ter me ensinado que o mais importante é a persistência. Te desejo sucesso e sorte.
- Agradeço ao Pedro Palheta, ao Henri, à Bianca, ao José, ao Felipe e ao Victor por bons conselhos, conversas enriquecedoras e companheirismo.
- Faço também agradecimentos especiais ao Pedro Souza. Agradeço muito por todas as conversas, todos os conselhos, todo o apoio, todo o incentivo e toda a ajuda. Muito obrigado de coração.
- Não é possível falar de 2019 e 2020 sem falar de Carolina Marçal, minha psicóloga. Agradeço por ter me ajudado e me proporcionado recursos que mudaram a minha vida.
- Agradeço à CAPES pela bolsa de mestrado, sem a qual este mestrado não seria possível.
- Também agradeço aos professores Edson Vernek e José de los Santos Guerra (Pepe) pelas sugestões e comentários sobre o trabalho na qualificação e ao professor Anderson Barbosa e à professora Liliana Sanz pelos comentários e sugestões na defesa.
- Por fim, agradeço a todas as pessoas que contribuíram para o meu crescimento direta ou indiretamente durante os dois últimos anos.

Resumo

Usando uma abordagem semiclássica formulada em termos de uma integral matricial, consideramos a descrição do transporte quântico caótico quando uma barreira de tunelamento está presente em uma das guias de ondas. Para essa descrição, obtivemos os momentos do transporte como uma série de potências da probabilidade de reflexão da barreira, cujos coeficientes são funções racionais do número de canais M . Esse resultado, portanto, é válido no regime quântico e não só quando $M \gg 1$. As expressões obtidas não são idênticas às expressões da Teoria de Matrizes Aleatórias correspondentes ao mesmo problema, mas são de fato muito mais simples e ambas as teorias concordam até onde foi possível testar.

Palavras-chave: transporte quântico caótico, aproximação semiclássica, caos quântico.

Abstract

Using a semiclassical approach formulated in terms of a matrix integral, we consider the description of quantum chaotic transport when a tunnel barrier is present in one of the leads. For this description, we obtain the transport moments as a power series in the reflection probability of the barrier, whose coefficients are rational functions of the number of open channels M . Our results are therefore valid in the quantum regime and not only when $M \gg 1$. The expressions we arrive at are not identical to the Random Matrix Theory ones corresponding to the same problem, but are in fact much simpler. Both theories agree as far as we can test.

Keywords: quantum chaotic transport, semiclassical approximation, quantum chaos.

Lista de figuras

Figura 1	– Interpretação clássica do transporte numa cavidade em formato de estádio (caótica) acoplada a duas guias de onda.	16
Figura 2	– Esquerda: Representação de um elemento de matriz de Z e Z^\dagger que chamamos de aresta. Direita: Diagrama correspondente ao único pareamento da fórmula de Wick aplicada a $\langle \text{Tr}(Z^\dagger Z) \rangle$	32
Figura 3	– Esquerda: Representação diagramática do $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2]$ como um vértice com 4 arestas. Direita: Diagramas correspondentes aos acoplamentos de Wick.	33
Figura 4	– Faces dos diagramas que resultam da aplicação da fórmula de Wick em $\langle \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2] \rangle$. As faces são as superfícies disjuntas obtidas ao "cortarmos" o diagrama ao longo das arestas. Ambos os diagramas possuem 3 faces e, assim, contribuem com N^3 para o valor médio.	33
Figura 5	– Esquerda: Gráfico da função $f(t) = \sinh^2(t)$, com um mínimo em $t = 0$. Direita: Gráfico de $\text{Re}[F(10)]$, onde a maior contribuição para a integral vem da vizinhança do ponto de mínimo de $f(t)$	46
Figura 6	– Esquema de um par de trajetórias com um encontro duplo (retângulo tracejado). No encontro, um trecho da trajetória direta (linha sólida) se aproxima de outro trecho e os trechos da trajetória parceira (linha tracejada) permutam entre si. As trajetórias direta e parceira fora da região do encontro são praticamente indistinguíveis e têm a mesma ação clássica. Como no segundo link as trajetórias têm sentidos contrários, esse par de trajetórias só contribui para sistemas com simetria de reversão-temporal. Fonte: [16].	49
Figura 7	– Par de trajetórias com um encontro duplo em um sistema sem invarância de reversão-temporal. A condição de mesmo sentido das trajetórias direta e parceira em todos os trechos produz uma órbita periódica. Órbitas periódicas não são permitidas na teoria semiclássica do transporte.	50
Figura 8	– Esquerda: Pontos de cruzamento dos trechos de um encontro duplo com a seção de Poincaré. Os pontos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_1$ e \mathbf{x}'_2 e os pontos revertidos temporalmente $\mathcal{T}\mathbf{x}_2$ e $\mathcal{T}\mathbf{x}'_2$ estão indicados por setas. A seção de Poincaré \mathcal{P} está indicada pela barra vertical azul transversal ao primeiro trecho do encontro no ponto \mathbf{x}_1 . t_s é o tempo entre o início do encontro e \mathcal{P} e t_u o tempo entre \mathcal{P} e o final do encontro. Direita: Decomposição de $\mathcal{T}\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ nas componentes estável e instável. Fonte: [19]	52

Figura 9 – Nova representação do $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2]$ no contexto do transporte, agora com uma estrutura interna idêntica aos encontros. Neste novo esquema, os elementos de Z , do lado esquerdo, e os elementos de Z^\dagger , do lado direito, continuam sendo representados por um par de setas (aresta) e as ligações são feitas conforme os índices aparecem de trás para frente na expansão do traço.	57
Figura 10 – Nova representação do $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^3]$ no contexto do transporte num esquema análogo à figura (9).	57
Figura 11 – Correspondência entre encontros com q trechos e a representação diagramática de $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^q]$. O traço $\text{Tr}(Z^\dagger Z)^2$ (superior direito) corresponde a um encontro duplo, o traço $\text{Tr}(Z^\dagger Z)^3$ (inferior direito) corresponde a um encontro triplo e assim por diante.	58
Figura 12 – Diagramas semiclassicos correspondentes aos acoplamentos de Wick na equação (3.47). Todos os diagramas contêm órbitas periódicas e, portanto, se anulam ao tomarmos o limite $N \rightarrow 0$	59
Figura 13 – Diagrama (a) da figura (12). Cada uma das órbitas periódicas, destacadas em azul, preto e vermelho, se origina da conexão entre arestas indexadas por índices j_k ou m_k , de modo que o número de índices livres j_k ou m_k é igual ao número de órbitas.	61
Figura 14 – Trajetórias correlacionadas por ação que também contribuem para o termo $1/M^2$ da condutância. A barra cinza na primeira guia representa a barreira de tunelamento.	67
Figura 15 – Trajetórias correlacionadas por ação que contribuem para a condutância com $1/M^3$ e diferem por um encontro triplo (a) e dois encontros duplos (b). A barra cinza na primeira guia de onda representa a barreira de tunelamento	68
Figura 16 – Trajetórias correlacionadas por ação que também contribuem para a condutância com $1/M^3$ e diferem por duas reflexões (a) e uma reflexão e um encontro duplo (b). A barra cinza na primeira guia representa a barreira de tunelamento.	68
Figura 17 – Diagramas de faixa correspondentes às trajetórias na figura (15). A barra preta representa a primeira guia com barreira de tunelamento e a barra transparente a segunda guia de onda. O encontro triplo se torna um vértice de valência 6 (a) e os encontros duplos se tornam vértices de valência 4 (b).	69
Figura 18 – Diagramas correspondentes às trajetórias na figura (16). A barra preta representa a primeira guia com barreira de tunelamento e a barra transparente a segunda guia de onda. As reflexões são vistas como encontros que acontecem na primeira guia de onda e esses encontros têm valência ímpar.	69

Figura 19 – Famílias de pares de trajetórias diferindo por um encontro duplo (a), dois encontros duplos (b-f) e um encontro triplo (g-j). A cavidade foi omitida e o início e o fim das trajetórias foram unidos no ponto representado por $\cdot|\cdot$. Essa modificação não interfere, já que o formato dos links não importa. Os diagramas à direita só são permitidos em sistemas com invariância de reversão temporal (TRI). Junto com a aproximação diagonal, esses diagramas contribuem para a condutância até a ordem $1/M^3$. Fonte: [18]. 92

Sumário

	Introdução	15
1	DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS	21
1.1	Partições e Diagramas de Young	21
1.2	Funções Simétricas Homogêneas	23
1.2.1	Funções de Schur	25
1.2.2	Argumento Matricial e Mudanças de Base em Λ_n	27
1.2.3	Ortogonalidade das funções de Schur e Identidade de Andréief	29
1.2.4	Coefficientes de Littlewood-Richardson	29
1.3	Fórmula de Wick	31
2	ABORDAGEM VIA RMT	34
2.1	Teoria de Matrizes de Aleatórias - RMT	34
2.2	Cavidades Ideais	36
2.3	Cavidades com Barreira de Tunelamento	40
3	ABORDAGEM SEMICLÁSSICA	43
3.1	Propagador Semiclássico	43
3.1.1	Limite Semiclássico	44
3.1.1.1	Método da Fase Estacionária	45
3.1.1.2	Propagador Semiclássico	46
3.2	A Abordagem Semiclássica	47
3.2.1	Contribuição Diagonal	49
3.2.2	Pares de Richter-Sieber	50
3.2.2.1	Condutância	54
3.3	Formulação via Integral Matricial	55
3.3.1	Cavidades Ideais	56
3.3.1.1	Fórmula de Wick e Diagramas Semiclássicos	56
3.3.2	Solução Exata	61
4	CAVIDADES COM BARREIRA DE TUNELAMENTO	66
4.1	Regras Diagramáticas	67
4.2	Inclusão da Barreira na Integral Matricial	69
4.3	Solução Exata	70
4.3.1	Simplificações	73

5	CONCLUSÃO	76
	Referências	78
	APÊNDICES	85
APÊNDICE A	– ORTOGONALIDADE DAS FUNÇÕES DE SCHUR . . .	86
APÊNDICE B	– INTEGRAL DE CAMINHO	87
APÊNDICE C	– REGRAS DIAGRAMÁTICAS E EXPRESSÃO DA CON- DUTÂNCIA	89
APÊNDICE D	– CONSTANTE DE NORMALIZAÇÃO \mathcal{Z}	93
APÊNDICE E	– EXPANSÃO (4.17)	95
APÊNDICE F	– EXPRESSÃO DE $E_{\mu\nu}(N_1)$ (4.34)	97
APÊNDICE G	– LIMITE $N \rightarrow 0$	99

Introdução

O caos é uma propriedade observada apenas em sistemas clássicos [1]. Essa propriedade pode ser definida de forma geral da seguinte maneira: dizemos que um sistema é caótico quando ele é sensível às condições iniciais. Um exemplo disso é o trânsito de uma cidade grande [2]. Numa cidade grande, tem-se a impressão de que há dias em que o congestionamento é maior. É bem provável que isso tenha acontecido por um acidente, uma mudança climática repentina, por uma empresa que dispensou os seus funcionários mais cedo e houve um fluxo maior num cruzamento, etc. Note que o número de variáveis para se prever o comportamento de um trânsito é enorme e, mesmo que pudéssemos medi-las, não seria possível ter o controle total sobre todas elas, já que poderiam mudar a qualquer instante [3]. Uma pequena mudança em uma dessas variáveis produziria uma dinâmica totalmente diferente e por isso, esse sistema é claramente sensível às condições iniciais [4]. No dia a dia, temos vários exemplos de sistemas que são caóticos, como o clima, um dado lançado ao alto, a difusão das moléculas de leite numa xícara de café, o trânsito de uma capital, etc.

No contexto da mecânica clássica, uma caracterização dos sistemas caóticos pode ser feita olhando para um conjunto de trajetórias que se originam numa região estreita do espaço de fase [5]. Nesse tipo de sistema, essas trajetórias se afastam exponencialmente e a taxa média com que se afastam é o chamado expoente de Lyapunov. Contudo, quando efeitos quânticos são importantes, a noção de trajetórias no espaço de fase perde o seu significado, bem como a noção de expoente de Lyapunov na estrutura da teoria quântica.

Nesse sentido, surge uma pergunta importante: se imaginarmos um sistema quântico cujo análogo clássico é caótico, então esse comportamento caótico teria implicações nos efeitos quânticos desse sistema? A resposta é sim [6]. Essa pergunta é endereçada a uma área da física chamada caos quântico. O caos quântico tem como intuito estabelecer uma ponte entre a mecânica clássica dos sistemas caóticos e a mecânica quântica, ou seja, trata a interface entre essas duas áreas. Essa área da física surgiu na década de 1970, principalmente de uma perspectiva teórica. Poucos experimentos inicialmente exibiam a versatilidade de serem sensíveis, ao mesmo tempo, à sua dinâmica clássica e quântica. Átomos de Rydberg [7] se mostraram o principal meio de testar os conceitos do caos quântico até início da década de 1990, marcado pelo desenvolvimento dos bilhares de microondas [8], átomos ultra-frios em redes óticas [9] e transporte a baixas temperaturas em heteroestruturas semicondutoras mesoscópicas [10]. Todos esses exemplos de experimento serviram para demonstrar conceitos do caos quântico.

Neste trabalho, estamos interessados no transporte quântico caótico de elétrons em sistemas abertos no regime balístico. Isso significa que o sistema em estudo se "comunica" com o meio externo de alguma maneira e que os elétrons se movimentam sem colidirem com obstáculos. Imaginamos então uma cavidade ligada ao meio externo através de duas guias de onda acopladas a essa cavidade, por onde incidem elétrons no regime balístico.

Na visão clássica do sistema, os elétrons colidem com as paredes da cavidade e da guia de onda sofrendo reflexão especular. Na figura (1), mostramos um exemplo de cavidade e a trajetória de um elétron. Eventualmente, um elétron que entra por uma guia de onda ao colidir com as paredes da cavidade pode acabar saindo pela outra guia de onda ou mesmo voltar pela guia por onde entrou, mas nunca podendo atravessar as paredes e escapar do sistema. Nessa visão, o sistema é equivalente a um bilhar clássico acoplado a guias de onda. A única característica da cavidade que será importante é a sua geometria que determina se o transporte será caótico, como é o presente caso. Isso seria o que chamamos anteriormente de análogo clássico.

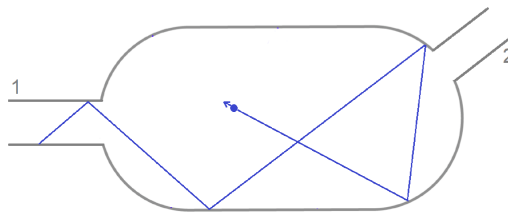


Figura 1: Interpretação clássica do transporte numa cavidade em formato de estádio (caótica) acoplada a duas guias de onda.

Na versão quântica, o elétron deve ser visto como uma onda. Consideraremos um formato das guias que permite a separação da função de onda do elétron em componentes relativas à cada grau de liberdade na guia. Para esse formato, o confinamento do elétron pelas paredes da guia de onda impõe a quantização da componente transversal E_t da sua energia, isto é, a parte da energia relativa ao momento clássico na direção perpendicular à direção de propagação. Portanto, a energia do elétron nas guias de onda pode ser escrita como

$$E = E_l + E_t = \frac{\hbar^2}{2m} \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{W_i} \right)^2 \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

onde E_l se refere à componente longitudinal do momento, paralela à guia de onda, e E_t à componente transversal; W_i é a largura das guias 1 ou 2. O número quântico n da parte transversal indexa, portanto, o autoestado da guia de onda em que o elétron se encontra. Por exemplo, se a guia de onda tiver um formato retangular, esses autoestados serão senoidais. Faremos a aproximação de guias de onda infinitamente longas, de modo que o elétron chega à cavidade por um autoestado da guia.

Na linguagem de transporte, o autoestado da guia em que o elétron se encontra, caracterizado pelo número quântico n , é chamado canal de propagação. Como todos os elétrons que entram pelas

guias têm a mesma energia e essa energia é fixa, então n deve ser limitado, isto é, deve ter um valor máximo. O maior número quântico acessível, n_{max} , é tal que toda a energia do elétron é completamente transversal e, assim, n_{max} determina o número total de canais abertos da guia. O número de canais de propagação será tratado como uma variável independente, diremos que a guia de onda 1 contém N_1 canais de propagação e a guia de onda 2 contém N_2 canais. Esse número é função da energia e da largura das guias e é dado por $N_i = \frac{\sqrt{2mE}}{\pi} \frac{W_i}{\hbar}$ ($i = 1, 2$).

Um experimento da versão quântica desse sistema pode ser feito utilizando uma microestrutura semicondutora mesoscópica. Heteroestruturas semicondutoras de $GaAs/AlGaAs$ criam um gás de elétrons bidimensional (2DEG) mantendo o movimento dos elétrons na direção perpendicular a essa interface no estado fundamental [11, 12]. Dada a ordem cristalina da interface e o fato de que os dopantes estão longe do plano dos portadores de carga (esse aspecto é geralmente referido na literatura como *clean cavities*), um elétron pode viajar uma longa distância, chamada livre caminho médio de transporte l_T , antes de ter o seu momento e sua fase quântica alterados. Várias técnicas de fabricação foram desenvolvidas para produzir um confinamento lateral do 2DEG definindo o formato da cavidade. As resoluções da ordem de microns ou sub-microns dessas técnicas permitem criar estruturas mesoscópicas menores que o livre caminho médio de transporte, possibilitando assim um regime balístico. Quando o tamanho da microestrutura $L \ll l_T$, o movimento clássico dos elétrons é dado por colisões com as paredes da cavidade, com uma deflexão lateral muito pequena devido à suavidade do potencial da impureza. Mudando o formato de uma cavidade, é possível ir de uma dinâmica integrável (não caótica) para uma dinâmica caótica e então estudar as consequências dessa transição a nível quântico.

Essas cavidades semicondutoras, muitas vezes chamadas de pontos quânticos, são então acopladas a uma fonte de elétrons e um dreno através de guias e uma pequena diferença de potencial é aplicada para transportar os elétrons. A diferença de potencial é sempre pequena para garantir um regime linear, onde a corrente elétrica varia linearmente com a tensão e para que os elétrons que participam do transporte sejam os elétrons do nível de Fermi da fonte. Dessa maneira, garante-se que os elétrons tenham todos a mesma energia E_F [11, 12].

Dado esse sistema, estamos interessados em obter informações físicas de transporte, como a sua condutância, e quantidades estatísticas como a variância dessas informações físicas. Para tratar esse sistema físico, utilizaremos uma abordagem de espalhamento, já que se trata de um sistema aberto, chamada abordagem de Landauer-Büttiker [13, 14]. Essa abordagem considera também que as colisões clássicas dos elétrons são elásticas e que os elétrons são não interagentes. A matriz de espalhamento para uma cavidade com duas guias de onda tem a forma

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Os blocos r e r' são chamados blocos de reflexão e t e t' de blocos de transmissão. Os blocos de reflexão se referem aos elétrons que entraram e saíram pela mesma guia de onda, enquanto os blocos de transmissão se referem aos elétrons que entraram por uma guia e saíram por outra.

Os elementos de matriz representam amplitudes de transmissão ou reflexão e o módulo quadrado representa probabilidades. Por exemplo, $|t_{32}|^2$ é a probabilidade de um elétron entrar pela guia de onda 1 pelo canal $n = 2$ e sair pela guia de onda 2 pelo canal $n = 3$. Os blocos r e r' , portanto, terão dimensão $N_1 \times N_1$ e $N_2 \times N_2$ respectivamente, enquanto os blocos t e t' terão dimensão $N_2 \times N_1$ e $N_1 \times N_2$ respectivamente. A dimensão da matriz S será, portanto, $M \times M$ onde $M = N_1 + N_2$ é o número total de canais.

A matriz S deve conservar probabilidade para que haja conservação de carga, isto é, para que todo elétron que entrar na cavidade deva sair, a matriz S deve ser unitária, $SS^\dagger = 1$. Outra maneira de obter informação do transporte é considerando a matriz de transmissão $\mathcal{T} = t^\dagger t$, onde t é o bloco de transmissão da matriz S . Como toda matriz hermitiana, a matriz \mathcal{T} terá todos os autovalores reais, que denotaremos por $\{T_1, T_2, \dots, T_{N_1}\}$.

O problema do transporte em cavidades caóticas recebeu tratamento via duas abordagens: a Teoria de Matrizes Aleatórias (RMT, do inglês *Random Matrix Theory*) e a Abordagem Semiclássica. Na primeira abordagem, a matriz S e a matriz \mathcal{T} são tratadas como matrizes aleatórias de um ensemble específico. As duas questões que a RMT pretende responder são: Qual é o ensemble da matriz S e da matriz \mathcal{T} ? Como obter do ensemble a estatística das propriedades de transporte? Já na segunda abordagem, os elementos da matriz S , e conseqüentemente da matriz \mathcal{T} , são dados como somas sobre trajetórias clássicas conectando os canais de propagação. Ambas as abordagens experimentaram grande sucesso em descrever as propriedades de transporte [15, 16] e, mesmo sendo bastante diferentes, concordam entre si em certos regimes. Uma descrição das duas abordagens será dada nos capítulos seguintes, com foco na abordagem semiclássica.

Na abordagem de espalhamento de Landauer-Büttiker, quase todas as propriedades de transporte da cavidade estão contidas na variável [13, 14]

$$\text{Tr}[(t^\dagger t)^n]. \quad (3)$$

Essa variável é chamada momento do transporte e permite calcular várias quantidades de interesse. Por exemplo a condutância, G , está relacionada com o primeiro momento, $n = 1$, na forma

$$G = \frac{e^2}{\pi \hbar} \text{Tr}(t^\dagger t) \quad (4)$$

levando em conta as duas orientações de spin. As flutuações de corrente são descritas pelo chamado shot-noise, dado pela expressão

$$P = \frac{2e^3 |V|}{\pi \hbar} \left(\text{Tr}(t^\dagger t) - \text{Tr}[(t^\dagger t)^2] \right) \quad (5)$$

onde V é a diferença de potencial aplicada sobre os elétrons experimentalmente. Mesmo em baixas temperaturas, a corrente elétrica como função do tempo tem uma natureza fundamentalmente aleatória, já que estamos tratando de correntes com poucos elétrons. Isso faz com que as quantidades mencionadas acima sejam funções altamente flutuantes da energia. Para suavizar essas flutuações,

tomamos uma média sobre um intervalo de energia ΔE suficiente

$$\left\langle \text{Tr}[(t^\dagger t)^n] \right\rangle = \frac{1}{\Delta E} \int_E^{E+\Delta E} \text{Tr}[(t^\dagger t)^n] dE'. \quad (6)$$

Isso faz com que o n -ésimo momento se torne o momento médio, ou seja, a condutância se torna a condutância média e assim por diante. Em ambas as abordagens, como os momentos do transporte $\text{Tr}[(t^\dagger t)^n]$ codificam várias das informações físicas do sistema, o problema de descrever o transporte se resume em obter uma expressão geral para os momentos.

Em caos quântico, incluindo o transporte quântico caótico, a simetria de reversão temporal desempenha um papel importante [6]. Na abordagem via RMT, essa simetria desempenha um papel central, determinando qual é o ensemble da matriz de espalhamento e de transmissão. Na abordagem semiclássica, essa simetria tem consequência na soma sobre trajetórias envolvida. Em ambas, as quantidades físicas calculadas são ligeiramente diferentes, dependendo da presença ou ausência dessa simetria. Neste trabalho, focaremos em sistemas sem a simetria de reversão temporal. Experimentalmente isso corresponde à presença de um campo magnético.

No regime fortemente caótico, é esperado que os momentos do transporte não dependam das características geométricas da cavidade e, portanto, sejam idênticos para todas as cavidades. Esse fato é chamado de universalidade [17, 6]. O regime fortemente caótico é garantido quando o tempo de permanência do elétron na cavidade, τ_D , é muito maior que o tempo de Ehrenfest, τ_E . O tempo de Ehrenfest corresponde ao tempo necessário para que o pacote de onda do elétron se espalhe por toda a cavidade, isto é, tenha comprimento de onda igual à largura do sistema. A condição $\tau_D \gg \tau_E$ é, então, necessária para permitir ergodicidade na dinâmica do elétron. Todos os resultados mencionados no texto, incluindo os novos resultados derivados, serão descritos considerando esse regime.

Um problema que frequentemente surge nos experimentos envolvendo pontos quânticos e bilhares de microondas é o acoplamento entre as guias de onda e a cavidade [18, 19]. Um acoplamento imperfeito torna a interface entre a guia e a cavidade não totalmente "transparente" aos elétrons, o que influencia nas quantidades físicas de transporte. A transparência da guia de onda é modelada a partir de uma barreira de tunelamento caracterizada por uma taxa de tunelamento Γ_i no i -ésimo canal, com $\Gamma_i = 1$ correspondendo ao caso ideal (acoplamento perfeito). Para o problema com barreiras, apenas as primeiras ordens no inverso do número de canais, $1/M$, de alguns momentos via teoria semiclássica são conhecidas, não havendo nenhum resultado semiclássico exato. Nesta perspectiva, derivamos uma nova expressão semiclássica para os momentos do transporte considerando que uma das guias de ondas possui barreira de tunelamento (a segunda guia é mantida ideal) com taxa $\Gamma_i = \Gamma$ igual em todos os canais. Essa expressão é dada em termos de uma série de Taylor da probabilidade de reflexão na barreira $\gamma = 1 - \Gamma$, cujos coeficientes são funções racionais do número de canais M e, portanto, contêm todas as ordens em $1/M$. Em particular, uma expressão simples para a condutância também é obtida. Esses resultados recentemente foram publicados em [5].

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 1 são definidos todos os conceitos matemáticos envolvidos com a teoria; no capítulo 2 uma breve descrição da RMT é dada,

contendo os principais resultados para o transporte; no capítulo 3, a abordagem semiclássica é introduzida na sua primeira formulação e na formulação via integral matricial; o capítulo 4 discute os novos resultados obtidos para o transporte com barreira de tunelamento e por fim o capítulo 5 traz considerações finais.

Definições Matemáticas

1.1 Partições e Diagramas de Young

Dado um número inteiro n , as suas partições são todas as maneiras possíveis de escrevê-lo como soma de números inteiros. Por exemplo, as partições do número 4 são

$$\begin{aligned}
 (4) & & (1.1) \\
 (3, 1) \\
 (2, 2) \\
 (2, 1, 1) \\
 (1, 1, 1, 1).
 \end{aligned}$$

Usaremos a notação acima em que as partes de uma dada partição são colocadas em ordem decrescente e entre parênteses. As partições não incluem o zero nem as permutações, como por exemplo $(1,2,1)$. Em linguagem matemática, a partição de um inteiro positivo n é uma sequência fracamente decrescente de inteiros positivos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ tal que $\sum_i \lambda_i = n$. Dizemos, portanto, que λ particiona n e representamos isso por $\lambda \vdash n$ ou $|\lambda| = n$. Definimos o comprimento de uma partição λ , $\ell(\lambda)$, como sendo o número de partes da partição, por exemplo $\ell(2, 1, 1) = 3$.

Uma outra notação para partições é escrever quantas vezes cada parte λ_i aparece em λ . Por exemplo, a partição $(2, 2, 1, 1, 1) \vdash 7$ pode ser escrita como $1^3 2^2$. Perceba que isso não significa multiplicar 1^3 por 2^2 . De forma geral, a notação funciona da seguinte forma

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots) = 1^{\hat{\lambda}_1} 2^{\hat{\lambda}_2} 3^{\hat{\lambda}_3} \dots \quad (1.2)$$

e chamamos $\hat{\lambda}_i$ a multiplicidade da parte λ_i .

Uma notação interessante para representar partições são os diagramas de Young. Um diagrama de Young é um conjunto de caixas justificadas à esquerda tal que a primeira linha tem λ_1 caixas, a segunda linha tem λ_2 caixas e assim por diante. Justificadas à esquerda significa que a

primeira caixa de cada linha está alinhada verticalmente. Na equação (1.3), mostramos os diagramas de Young correspondentes às partições do número 4.

(1.3)

Uma outra definição importante é a de *tabela de Young*. Uma tabela de Young é um diagrama de Young de formato $\lambda \vdash n$ preenchido com os números de 1 a n . Uma generalização é usar menos que n números diferentes, de tal forma a permitir repetições. Nesse caso, temos uma tabela *generalizada*. Se o número 1 aparecer r_1 vezes, o número 2 aparecer r_2 e assim por diante, definimos $\mu = (r_1, r_2, \dots)$ como o *conteúdo* da tabela de Young, por exemplo

4	1	4
1	3	

(1.4)

tem formato $\lambda = (3, 2)$ e conteúdo $1^2 2^0 3^1 4^2$ ou $\mu = (2, 0, 1, 2)$.

Dizemos que uma tabela de Young $\lambda \vdash n$ é *padrão* quando tanto as linhas quanto as colunas são estritamente crescentes. Por exemplo, para o formato $\lambda = (2, 2, 1)$, existem 5 tabelas padrão não generalizadas

1	2	1	2	1	3	1	3	1	4
3	4	3	5	2	4	2	5	2	5
5		4		5		4		3	

(1.5)

Uma tabela de Young em que as colunas são estritamente crescentes, mas as linhas são fracamente crescentes (podem haver repetições) é chamada *semi-padrão*. Por exemplo

1	1	2
2	3	

(1.6)

é uma tabela semi-padrão. O número de tabelas de Young semi-padrão de formato λ e conteúdo μ é chamado número de Kostka e denotado por $K_{\lambda\mu}$.

Uma relação entre duas partições é a relação de continência. Dizemos que $\mu \subset \lambda$ (μ está contida em λ) quando $\lambda_i \geq \mu_i$, para todo i . Em termos dos diagramas de Young, a partição μ está contida em λ quando o seu diagrama de Young está literalmente totalmente sobreposto pelo diagrama de λ . Essa relação nos permite definir os diagramas e as partições enviesadas. Um diagrama enviesado é obtido removendo-se um diagrama de Young menor de um outro diagrama maior que o

contém. Por exemplo, para as partições $\lambda = (5, 5, 4, 3, 2)$ e $\mu = (4, 4, 1)$, o diagrama correspondente à partição enviesada $(5, 5, 4, 3, 2)/(4, 4, 1)$ é

$$(1.7)$$

Note que $\mu \subset \lambda$, pois o diagrama de λ sobrepõe completamente o diagrama de μ . Logo, um diagrama enviesado λ/μ só pode ser definido se $\mu \subset \lambda$. Os diagramas enviesados, quando preenchidos, se tornam tabelas enviesadas.

1.2 Funções Simétricas Homogêneas

Funções simétricas são funções invariantes pela troca de quaisquer de suas variáveis. Por exemplo, o polinômio $f(x_1, x_2) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ é simétrico, pois permanece idêntico se trocarmos x_1 por x_2 , ou seja, $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$. Além disso, diremos que esse polinômio é homogêneo de grau d se $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Por exemplo, o polinômio $f(x_1, x_2) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ é homogêneo de grau 3, porém o polinômio $g(x_1, x_2) = x_1^2x_2 + x_1x_2^3$ não é homogêneo. O conjunto de todos os polinômios simétricos homogêneos em n variáveis forma um espaço vetorial, que chamaremos de Λ_n . Usaremos a notação $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x)$ quando convier. Esse espaço vetorial contém vários tipos de polinômios simétricos interessantes, vejamos alguns deles.

Os polinômios simétricos elementares $e_k(x)$ são a soma de monômios distintos de grau igual a k , mas cada variável aparece com expoente 1. Por exemplo, os polinômios elementares de três variáveis são

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \quad e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad e_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3. \quad (1.8)$$

É fácil ver que a expressão geral para o polinômio elementar simétrico $e_k(x)$ será

$$e_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}. \quad (1.9)$$

O polinômio elementar também pode ser definido em termos de uma partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ como

$$e_\lambda = e_{\lambda_1}e_{\lambda_2}\dots, \quad (1.10)$$

onde cada e_{λ_i} é dado pela expressão (1.9). Por exemplo, para as partições $\lambda = (1, 1)$ e $\lambda = (2)$, teremos $e_{(1,1)}(x) = e_1(x)e_1(x)$ e $e_{(2)} = e_2(x)$ respectivamente.

Os polinômios simétricos completos $h_k(x)$ são semelhantes aos elementares. A diferença é que as variáveis podem aparecer com potências maiores que 1, pois eles consistem da soma de todos os

monômios distintos das suas variáveis. Para o caso de três variáveis, eles são

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \quad (1.11)$$

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$h_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_2x_3.$$

A sua expressão geral é:

$$h_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2, \dots, \leq j_k \leq n} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}, \quad (1.12)$$

com a diferença em relação aos polinômios elementares que agora os índices j_1, \dots, j_k podem ser iguais. Uma outra maneira de obter os polinômios simétricos elementares e completos é através das suas funções geratriz

$$\sum_{k=0}^n e_k(x) t^k = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t) \quad (1.13)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) t^k = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x_i t}. \quad (1.14)$$

Nas expressões acima, basta comparar potências iguais da variável t , de modo que do lado direito o coeficiente que acompanha uma dada potência k de t corresponde ao k -ésimo polinômio. Para os polinômios completos, é necessário expandir em série de Taylor. Em contraste com os polinômios elementares, os polinômios completos continuam existindo para $k > n$, ou seja, para um índice maior que o número de variáveis. Eles também podem ser definidos em termos de partições como

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots, \quad (1.15)$$

tal que cada h_{λ_i} é definido pela expressão (1.12).

Vale destacar a relação desses dois polinômios simétricos com a mecânica estatística. Imagine um sistema quântico que tem níveis de energia E_i . Seja n_i o número de partículas no nível i . No caso de bósons não-interagentes, podemos colocar qualquer número deles em cada nível, ou seja $0 \leq n_i \leq N$. No caso de férmions não-interagentes, podemos colocar apenas um em cada nível, ou seja $n_i \in \{0, 1\}$. As funções de partição do ensemble gran-canônico são

$$Z_B = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N} e^{-n_i(E_i - \mu)/k_B T} = \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} (x_i t)^{n_i} = \prod_i \frac{1}{1 - x_i t} \quad (1.16)$$

para bósons e

$$Z_F = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N} e^{-n_i(E_i - \mu)/k_B T} = \prod_i \sum_{n_i=0}^1 (x_i t)^{n_i} = \prod_i (1 + x_i t) \quad (1.17)$$

para férmions. Em ambos os casos, $x_i = e^{-E_i/k_B T}$ e $t = e^{\mu/k_B T}$. Encontramos, assim, as funções geratriz dos polinômios simétricos completos e elementares (com infinitas variáveis).

Um outro polinômio, que aparecerá bastante ao longo do texto, é o polinômio simétrico de potências. Ele é certamente o mais simples, em três variáveis são

$$p_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \quad p_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad p_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \quad (1.18)$$

e de forma geral

$$p_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^k \quad (1.19)$$

Esse polinômio também pode ser definido em termos de uma partição de forma análoga $p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots$. Por exemplo, $p_{(1,1)}(x) = p_1(x) p_1(x)$.

1.2.1 Funções de Schur

Um outro polinômio interessante do espaço vetorial dos polinômios simétricos homogêneos é a função de Schur. As funções de Schur $s_\lambda(x)$ são sempre definidas em termos de uma partição, porém não possuem uma fórmula tão intuitiva como os polinômios citados anteriormente. Uma das suas formulações é a chamada fórmula bialternante de Cauchy, que consiste num quociente de dois determinantes onde os elementos de matriz são potências das variáveis:

$$s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\det(x_j^{\lambda_i + \ell - i})}{\det(x_j^{\ell - i})}. \quad (1.20)$$

Essa fórmula pressupõe que o número de variáveis n é igual ao comprimento da partição $\ell(\lambda) = \ell$. Portanto, os índices i, j vão de 1 a ℓ . Escrevendo explicitamente

$$s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1 + \ell - 1} & x_2^{\lambda_1 + \ell - 1} & \dots \\ x_1^{\lambda_2 + \ell - 2} & x_2^{\lambda_2 + \ell - 2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}_{1 \leq i, j \leq \ell}}{\begin{vmatrix} x_1^{\ell - 1} & x_2^{\ell - 1} & \dots \\ x_1^{\ell - 2} & x_2^{\ell - 2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}_{1 \leq i, j \leq \ell}}. \quad (1.21)$$

Se o número de variáveis $n > \ell(\lambda)$, podemos generalizar a expressão (1.20) bastando trocar ℓ por n

$$s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\det(x_j^{\lambda_i + n - i})}{\det(x_j^{n - i})} = \frac{\det(x_j^{\lambda_i + n - i})}{\Delta_n(x)}. \quad (1.22)$$

Agora os índices i, j vão de 1 a n e naturalmente $\lambda_i = 0$ se $i > \ell$. Explicitamos que o determinante do denominador $\det(x_j^{n-i})$ é chamado determinante de Vandermonde, que pode ser escrito como

$$\Delta_n(x) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i+1}^n (x_j - x_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \quad (1.23)$$

Note que a permutação entre quaisquer duas variáveis x_i e x_j do Vandermonde produz um sinal negativo. As funções que possuem essa propriedade são chamadas funções alternantes ou antissimétricas. Os dois primeiros Vandermondes são

$$\Delta_2(x) = (x_2 - x_1), \quad \Delta_3(x) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \quad (1.24)$$

Para três variáveis, as três primeiras funções de Schur são

$$s_{(1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \quad (1.25)$$

$$s_{(1,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \quad (1.26)$$

$$s_{(2)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \quad (1.27)$$

Uma outra fórmula para as funções de Schur é a fórmula de Jacobi-Trudi, que expressa s_λ em termos dos polinômios simétricos completos:

$$s_\lambda(x) = \det(h_{\lambda_i+j-i}) = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & h_{\lambda_1+2} & \dots \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & h_{\lambda_2+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}. \quad (1.28)$$

A função de Schur desempenha um papel importante quando todas as variáveis $x_i = 1$. Primeiro, quando tomamos os valores especiais $x_i = x^{i-1}$ para as variáveis na definição (1.22), temos

$$s_\lambda(1, x, x^2, \dots, x^{n-1}) = \frac{1}{\Delta_n(x)} \begin{vmatrix} 1 & x^{\lambda_1+n-1} & x^{2(\lambda_1+n-1)} & \dots \\ 1 & x^{\lambda_2+n-2} & x^{2(\lambda_2+n-2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}, \quad (1.29)$$

sendo que o numerador é também um determinante de Vandermonde, apenas escrito de outra forma, no qual as variáveis são x^{λ_i+n-i} . Assim, a expressão acima pode ser reduzida à forma

$$s_\lambda(1, x, x^2, \dots, x^{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x^{\lambda_j+n-j} - x^{\lambda_i+n-i}}{x^{j-1} - x^{i-1}}. \quad (1.30)$$

Tomando o limite $x \rightarrow 1$ pela regra de L'Hopital, obtemos a expressão

$$s_\lambda(1, 1, \dots, 1) = s_\lambda(1^n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}. \quad (1.31)$$

Se escolhermos levar em conta explicitamente o comprimento da partição $\ell(\lambda) = \ell$, podemos escrevê-la como

$$s_\lambda(1^n) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{(\lambda_i + n - i)!}{(\lambda_i + \ell - i)!(n - i)!} \prod_{j=i+1}^{\ell} (\lambda_i - \lambda_j + j - i). \quad (1.32)$$

Essa expressão será usada mais adiante nos próximos capítulos. Por fim, as funções de Schur possuem uma terceira fórmula dada em termos de tabelas de Young. Dada uma tabela generalizada T com conteúdo μ , podemos associar a ela o monômio $x^{\mu(T)} = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots$. Por exemplo

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow x_1^2 x_2^0 x_3^1 x_4^2 = x_1^2 x_3^1 x_4^2. \quad (1.33)$$

O conteúdo da tabela acima é $\mu = (2, 0, 1, 2)$. A função de Schur pode ser definida da seguinte maneira

$$s_\lambda(x) = \sum_{\mu(T)} x^{\mu(T)}, \quad (1.34)$$

sendo a soma feita sobre todos os conteúdos μ da tabela de Young T generalizada, semi-padrão e de formato λ . Por exemplo, considere a partição $\lambda = (2, 2, 1)$ e $n = 3$ variáveis. Basta pensarmos em todas as tabelas de Young generalizadas (podendo haver repetição) de formato $(2, 2, 1)$ que são semi-padrão. Essas tabelas são:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}. \quad (1.35)$$

Sendo o conteúdo de cada tabela $\mu = (2, 2, 1)$, $\mu = (2, 1, 2)$ e $\mu = (1, 2, 2)$, obtemos a função de Schur $s_{(2,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2$. Esse resultado pode ser verificado usando a expressão (1.20).

1.2.2 Argumento Matricial e Mudanças de Base em Λ_n

Qualquer uma das famílias de polinômios simétricos citados anteriormente $\{e_\lambda\}, \{h_\lambda\}, \{p_\lambda\}$ ou $\{s_\lambda\}$ serve como uma base para o espaço vetorial Λ_n . Isso significa que qualquer polinômio simétrico homogêneo pode ser escrito como combinação linear desses polinômios. Naturalmente, existem matrizes de mudança de base, que leva uma família em outra. Algumas dessas mudanças de base são [20]

$$h_n(x) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda(x) \quad (1.36)$$

$$e_n(x) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{(-1)^{n-\ell(\lambda)}}{z_\lambda} p_\lambda(x) \quad (1.37)$$

$$h_\mu(x) = \sum_{\lambda} K_{\lambda\mu} s_\lambda(x) \quad (1.38)$$

E outras duas importantes que aparecerão ao longo do texto são

$$s_\lambda(x) = \sum_{\mu} \frac{\chi_\lambda(\mu)}{z_\mu} p_\mu(x) \quad (1.39)$$

$$p_\mu(x) = \sum_{\lambda} \chi_\lambda(\mu) s_\lambda(x), \quad (1.40)$$

onde $\chi_\lambda(\mu)$ são os caracteres das representações irredutíveis do grupo de permutação S_n [20].

Seja X uma matriz de dimensão N com autovalores $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, definiremos o polinômio simétrico $e_k(X)$ com argumento matricial como sendo igual a $e_k(x_1, x_2, \dots, x_N)$ e de forma análoga para todos os outros polinômios. Essa notação das variáveis como autovalores de uma matriz nos permite escrever expressões mais compactas. Por exemplo, as equações (1.13) e (1.14) ficam

$$\sum_{k=0}^N e_k(X)t^k = \det(1 + Xt), \quad \sum_{k=0}^{\infty} h_k(X)t^k = \frac{1}{\det(1 - Xt)}. \quad (1.41)$$

O polinômio simétrico de potências com argumento matricial será igual ao traço da k -ésima potência de X , $p_k(X) = \text{Tr}(X^k)$. Em termos de uma partição, podemos escrevê-lo:

$$p_\lambda(X) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} p_{\lambda_i}(X) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \text{Tr}(X^{\lambda_i}) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \sum_{j=1}^N x_j^{\lambda_i}. \quad (1.42)$$

Por exemplo, para as partições $\lambda = (1, 1)$ e $\lambda = (2)$ e $N = 3$ variáveis, temos

$$p_{(1,1)}(X) = \prod_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 x_j^{\lambda_i} = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \quad (1.43)$$

$$p_{(2)}(X) = \prod_{i=1}^1 \sum_{j=1}^3 x_j^{\lambda_i} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (1.44)$$

Outra forma de definir o polinômio simétrico de potências em termos de uma partição com argumento matricial é através da expressão

$$p_\lambda(X) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \prod_{k=1}^n X_{i_{\pi(k)}, i_k}, \quad (1.45)$$

onde a soma em cada índice i_1, \dots, i_n vai de 1 a N e $n = |\lambda|$. A permutação π do índice k é qualquer permutação que tenha ciclo tipo igual a λ . Definimos o ciclo tipo de uma permutação da seguinte maneira. Se uma permutação p possui $\hat{\lambda}_1$ ciclos de tamanho 1, $\hat{\lambda}_2$ ciclos de tamanho 2 e assim por diante, então a partição $1^{\hat{\lambda}_1} 2^{\hat{\lambda}_2} \dots$ é chamada de ciclo tipo de p . Por exemplo, o ciclo tipo da permutação (123), que age na lista [1, 2, 3] levando o 1 no 2, o 2 no 3 e o 3 no 1, é $\lambda = (3)$; enquanto a permutação (123)(45)(67) tem ciclo tipo $1^0 2^2 3^1$ ou $\lambda = (3, 2, 2)$. Novamente, tomemos como exemplo as partições $\lambda = (1, 1)$ e $\lambda = (2)$ e $N = 3$ na expressão acima

$$p_{(1,1)}(X) = \sum_{i_1, i_2} \prod_{i=1}^2 X_{i_{(1)(2)[k]}, i_k} = \sum_{i_1, i_2} X_{i_1, i_1} X_{i_2, i_2} = \text{Tr}(X) \text{Tr}(X) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3) \quad (1.46)$$

$$p_{(2)}(X) = \sum_{i_1, i_2} \prod_{i=1}^2 X_{i_{(12)[k]}, i_k} = \sum_{i_1, i_2} X_{i_2 i_1} X_{i_1 i_2} = \sum_{i_2} (X^2)_{i_2, i_2} = \text{Tr}(X^2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (1.47)$$

No primeiro caso, a permutação π que tem ciclo tipo $\lambda = (1, 1)$ é (1)(2) e leva o índice k nele mesmo. No segundo caso a permutação que tem ciclo tipo $\lambda = (2)$ é (12) e que leva o índice $k = 1$ em 2 e vice-versa.

1.2.3 Ortogonalidade das funções de Schur e Identidade de Andréief

Se o argumento da função de Schur for uma matriz unitária U , verificamos a seguinte ortogonalidade dessas funções [21]

$$\int_{U(N)} s_\lambda(U) s_\mu(U^\dagger) dU = \delta_{\lambda,\mu}. \quad (1.48)$$

Sendo z_j , $1 \leq j \leq N$, os autovalores da matriz unitária U , então $s_\lambda(U) \equiv s_\lambda(z_1, \dots, z_N)$ são os caracteres da representação irredutível do grupo unitário [21]. Portanto, a relação de ortogonalidade entre as funções de Schur vem da clássica ortogonalidade dos caracteres do grupo unitário $U(N)$. Essa relação pode ser provada usando uma identidade muito útil chamada identidade de Andréief [22], qual seja

$$\int \det[f_i(x_j)] \det[g_i(x_j)] \prod_{j=1}^N dx_j = N! \det \left(\int f_i(x) g_j(x) dx \right). \quad (1.49)$$

Essa identidade transforma a integral N -dimensional do produto de dois determinantes em um único determinante de uma matriz cujos elementos são integrais unidimensionais. A relação de ortogonalidade (1.48) pode ser escrita em termos dos autovalores z_j da matriz unitária U . A densidade dos autovalores da matriz unitária U é [21]

$$\frac{1}{N!(2\pi)^N} \prod_{1 \leq i < j \leq N} |z_j - z_i|^2 = \frac{1}{N!(2\pi)^N} |\Delta(z)|^2, \quad (1.50)$$

onde $\Delta(z)$ é o determinante de Vandermonde. Em termos dos autovalores, a expressão (1.48) fica

$$\int_{U(N)} s_\lambda(U) s_\mu(U^\dagger) dU = \frac{1}{N!(2\pi)^N} \oint s_\lambda(z) s_\mu(\bar{z}) |\Delta(z)|^2 dz = \delta_{\lambda,\mu} \quad (1.51)$$

e a primeira igualdade expressa a chamada fórmula de integração de Weyl [21]. A integral sobre o grupo unitário $U(N)$ se transforma na integral de linha sobre o círculo unitário, uma vez que todos os autovalores de uma matriz unitária têm módulo 1, ou seja, são da forma $e^{i\theta}$, e o jacobiano é proporcional ao Vandermonde ao quadrado. A ortogonalidade expressada pela última igualdade está demonstrada no apêndice A.

1.2.4 Coeficientes de Littlewood-Richardson

O produto entre duas funções de Schur pode ser expandido em funções de Schur, ou seja

$$s_\lambda(X) s_\mu(X) = \sum_{\nu} C_{\lambda\mu}^{\nu} s_{\nu}(X) \quad (1.52)$$

onde os coeficientes da expansão $C_{\lambda\mu}^{\nu}$ são chamados coeficientes de Littlewood-Richardson. Esses coeficientes são obtidos a partir da regra de Littlewood-Richardson [23]. Essa regra pode ser formulada

de várias maneiras e provavelmente a mais simples afirma que $C_{\lambda\mu}^\nu$ é o número de tabelas de Young semi-padrão de formato ν/λ e conteúdo μ . A partição ν sobre a qual fazemos a soma é tal que $\nu \vdash |\lambda| + |\mu|$. Além disso, uma última condição imposta pela regra pode ser colocada da seguinte maneira genérica: a última caixa da i -ésima linha da tabela ν/λ deve ser no máximo i . Como exemplo para as primeiras partições, temos

$$\begin{aligned} s_{(1)}s_{(1)} &= s_{(2)} + s_{(1,1)} \\ s_{(1,1)}s_{(1)} &= s_{(1,1,1)} + s_{(2,1)} \\ s_{(2)}s_{(1)} &= s_{(3)} + s_{(2,1)} \\ s_{(3)}s_{(1)} &= s_{(4)} + s_{(3,1)} \\ s_{(2,1)}s_{(1)} &= s_{(3,1)} + s_{(2,2)} + s_{(2,1,1)}. \end{aligned} \tag{1.53}$$

A maioria dos coeficientes para partições pequenas são 0 ou 1, o que acontece em particular sempre que um dos fatores é da forma $s_{(n)}$ ou $s_{(1,1,\dots)}$. Esse resultado é garantido pela fórmula de Pieri e a sua versão transposta [20]

$$s_\lambda s_{(r)} = \sum_{\nu} s_\nu \tag{1.54}$$

em que a partição ν é tal que $|\nu/\lambda| = r$ é uma faixa horizontal e

$$s_\lambda s_{(1r)} = \sum_{\nu} s_\nu \tag{1.55}$$

em que a partição ν é tal que $|\nu/\lambda| = r$ é uma faixa vertical.

O caso mais simples com coeficiente maior que 1 acontece quando nenhuma das partições têm esse formato, ou seja, o produto $s_{(2,1)}s_{(2,1)}$. Para expandirmos esse produto, basta listarmos todas as tabelas de Young de formato $\nu/(2,1)$ semi-padrão com conteúdo $(2,1) \equiv 1^22^1$, tal que $\nu \vdash 6$. Essas tabelas estão mostradas abaixo.

$$\tag{1.56}$$

Note que em todas as tabelas, a última caixa da i -ésima linha é no máximo i . Assim, a expansão fica

$$s_{(2,1)}s_{(2,1)} = s_{(4,2)} + s_{(4,1,1)} + s_{(3,3)} + 2s_{(3,2,1)} + s_{(3,1,1,1)} + s_{(2,2,2)} + s_{(2,2,1,1)}. \tag{1.57}$$

1.3 Fórmula de Wick

Vamos introduzir agora integrais sobre matrizes e uma fórmula muito útil para calculá-las chamada Fórmula de Wick. Considere a seguinte integral sobre matrizes complexas Z de dimensão $N \times N$

$$\langle f(Z^\dagger Z) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int e^{-M \text{Tr}(Z^\dagger Z)} f(Z^\dagger Z) dZ \quad (1.58)$$

onde \mathcal{Z} é um fator de normalização, M é um parâmetro e dZ nos diz que devemos integrar sobre cada elemento de Z de forma independente. A função $f(Z^\dagger Z)$ é qualquer função polinomial da variável $Z^\dagger Z$. Perceba que o termo $e^{-M \text{Tr}(Z^\dagger Z)}$ é um termo gaussiano, já que

$$\exp\left(-M \text{Tr}(Z^\dagger Z)\right) = \exp\left(-M \sum_{i,j=1}^N Z_{i,j}^\dagger Z_{j,i}\right) = \exp\left(-M \sum_{i,j=1}^N |Z_{j,i}|^2\right) \quad (1.59)$$

sendo o elemento $Z_{j,i} = x_{j,i} - iy_{j,i}$ um número complexo, então

$$\exp\left(-M \sum_{i,j=1}^N |Z_{j,i}|^2\right) = \exp\left(-M \sum_{i,j=1}^N x_{j,i}^2 + y_{j,i}^2\right) \quad (1.60)$$

logo, $e^{-M \text{Tr}(Z^\dagger Z)}$ é de fato gaussiana em todas as variáveis $x_{i,j}$ e $y_{i,j}$.

A covariância, que nada mais é que a média do produto de dois elementos de matriz, é

$$\langle Z_{mj}^\dagger Z_{qr} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int e^{-M \text{Tr}(Z^\dagger Z)} Z_{mj}^\dagger Z_{qr} dZ = \frac{\delta_{mr} \delta_{jq}}{M}, \quad (1.61)$$

ou seja, o resultado é não nulo apenas se $m = r$ e $j = q$. A partir daí, enunciamos a seguinte fórmula

$$\left\langle \prod_{k=1}^n Z_{m_k, j_k}^\dagger Z_{q_k, r_k} \right\rangle = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{k=1}^n \langle Z_{m_k, j_k}^\dagger Z_{q_{\sigma(k)}, r_{\sigma(k)}} \rangle = \frac{1}{M^n} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{k=1}^n \delta_{m_k, r_{\sigma(k)}} \delta_{j_k, q_{\sigma(k)}} \quad (1.62)$$

chamada fórmula de Wick [24]. A fórmula mostra que a média do produto de um número par de elementos de matriz Z (Z^\dagger e Z) é igual à soma sobre todas as permutações dos índices k do produto da média de pares de elementos de matriz (Z^\dagger e Z). Em outras palavras, um produto como aquele mostrado no lado esquerdo pode ser decomposto numa soma do produto de todos os possíveis pareamentos. S_n é o grupo de todas as permutações σ que agem na lista de índices $[1, \dots, n]$. Na última igualdade, usamos a expressão da covariância. Vejamos um exemplo, quando $n = 2$

$$\begin{aligned} \left\langle Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{q_1, r_1} Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{q_2, r_2} \right\rangle &= \langle Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{q_1, r_1} \rangle \langle Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{q_2, r_2} \rangle + \langle Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{q_2, r_2} \rangle \langle Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{q_1, r_1} \rangle \\ &= \frac{1}{M^2} \delta_{m_1 r_1} \delta_{j_1 q_1} \delta_{m_2 r_2} \delta_{j_2 q_2} + \frac{1}{M^2} \delta_{m_1 r_2} \delta_{j_1 q_2} \delta_{m_2 r_1} \delta_{j_2 q_1}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

O lado direito contém todas as possíveis combinações, perceba que na fórmula de Wick os pareamentos acontecem apenas entre Z^\dagger e Z .

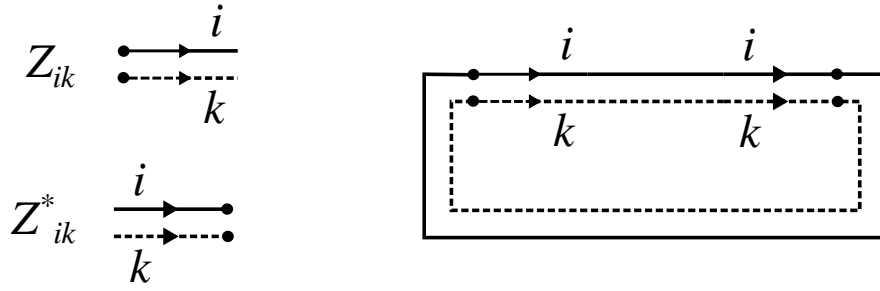


Figura 2: Esquerda: Representação de um elemento de matriz de Z e Z^\dagger que chamamos de aresta. Direita: Diagrama correspondente ao único pareamento da fórmula de Wick aplicada a $\langle \text{Tr}(Z^\dagger Z) \rangle$.

A fórmula de Wick tem uma representação em termos de diagramas [25, 26, 27]. Cada elemento de matriz $Z_{m,j}$ é representado por um par de setas, uma associada com o índice m e outra associada com o índice j , com uma das extremidades marcadas. Nos elementos de matriz Z^\dagger , as setas apontam no sentido contrário de Z . Chamaremos esse par de setas por aresta. Por exemplo, se calcularmos o valor médio $\langle p_\lambda(Z^\dagger Z) \rangle$ através da equação (1.58), então um termo como $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^q]$ é representado por um vértice com $2q$ arestas. O produto entre pareamentos resultante da fórmula de Wick nos diz como ligar as arestas do vértice, produzindo assim, os diagramas. Vejamos alguns exemplos.

O exemplo mais simples e trivial é $\langle \text{Tr}(Z^\dagger Z) \rangle$. Na figura (2), mostramos a representação dos elementos de matriz de Z^\dagger e Z e o diagrama correspondente ao único pareamento resultante da fórmula de Wick para $\langle \text{Tr}(Z^\dagger Z) \rangle$. Esse caso é justamente a expressão da covariância:

$$\langle \text{Tr}(Z^\dagger Z) \rangle = \sum_{i,k=1}^N \langle Z_{i,k}^\dagger Z_{k,i} \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i,k=1}^N \delta_{i,i} \delta_{k,k} = \frac{N^2}{M}. \quad (1.64)$$

As deltas $\delta_{i,i}$ e $\delta_{k,k}$ significam que devemos ligar os segmentos indexados por i e os segmentos indexados j , sendo essas as únicas ligações.

O próximo caso mais simples é $\langle \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2] \rangle$. A aplicação da fórmula de Wick resulta

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2] \rangle &= \sum_{m_1, m_2, j_1, j_2=1}^N \langle Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{j_1, m_2} Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{j_2, m_1} \rangle \\ &= \sum_{m_1, m_2, j_1, j_2=1}^N \langle Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{j_1, m_2} \rangle \langle Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{j_2, m_1} \rangle + \langle Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{j_2, m_1} \rangle \langle Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{j_1, m_2} \rangle \\ &= \frac{1}{M^2} \left[\sum_{m_1, m_2, j_1, j_2=1}^N \delta_{m_1 m_2} \delta_{j_1 j_1} \delta_{m_2 m_1} \delta_{j_2 j_2} + \sum_{m_1, m_2, j_1, j_2=1}^N \delta_{m_1 m_1} \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_2 m_2} \delta_{j_2 j_1} \right] \\ &= \frac{1}{M^2} (N^3 + N^3) \end{aligned} \quad (1.65)$$

Os diagramas correspondentes aos pareamentos produzidos pela fórmula de Wick estão ilustrados na figura (3). O $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2]$ é representado como um vértice com 4 arestas, duas delas correspondendo aos elementos de Z^\dagger e outras duas correspondendo aos elementos de Z . O número de maneiras de

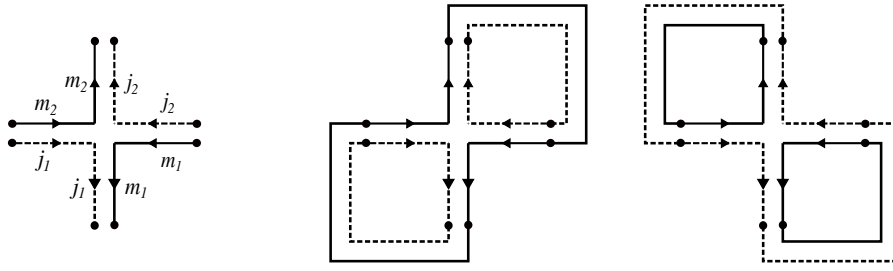


Figura 3: Esquerda: Representação diagramática do $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2]$ como um vértice com 4 arestas. Direita: Diagramas correspondentes aos acoplamentos de Wick.

ligarmos as arestas de Z^\dagger com Z no diagrama é sempre igual ao número de acoplamentos de Wick. Nesse caso, só existem 2 formas de ligá-las.

A representação diagramática da fórmula de Wick para as ordens mais altas do $\langle \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^q] \rangle$ procede de forma análoga aos exemplos acima, ou seja, um traço de ordem q será representado por um vértice com $2q$ arestas. De forma geral, a contribuição de cada diagrama será N elevado ao número de faces do diagrama, dividido por M elevado ao número de conexões entre arestas. A face de um diagrama é definida da seguinte maneira: se "cortarmos" o diagrama ao longo das ligações entre as arestas, teremos um conjunto de superfícies separadas umas das outras (em linguagem matemática, um conjunto disjunto) em que cada superfície é homeomorfa a um disco. Se isso acontecer, então cada superfície é uma face. Por exemplo, nos diagramas da figura (3) identificamos 3 faces em cada um, destacadas na figura (4). Logo, a contribuição de cada diagrama será N^3 , como foi obtido fazendo-se a soma sobre os índices na expressão (1.65). Além disso, no denominador teremos M^2 , já que ambos os diagramas contêm duas conexões entre arestas.

A representação diagramática da fórmula de Wick é uma ferramenta poderosa, porque transforma o problema de calcular uma integral matricial gaussiana num problema de desenhar diagramas e contar as faces. No capítulo 3, esse método será empregado no contexto do transporte.

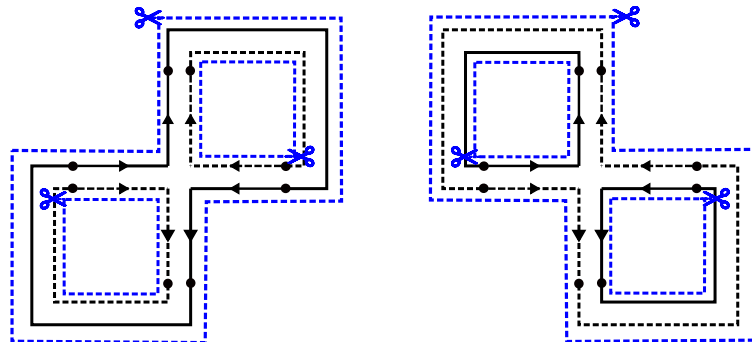


Figura 4: Faces dos diagramas que resultam da aplicação da fórmula de Wick em $\langle \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2] \rangle$. As faces são as superfícies disjuntas obtidas ao "cortarmos" o diagrama ao longo das arestas. Ambos os diagramas possuem 3 faces e, assim, contribuem com N^3 para o valor médio.

Abordagem via RMT

Antes de adentrarmos no foco deste trabalho, qual seja, a abordagem semiclássica do transporte quântico caótico, daremos uma breve descrição da abordagem via RMT. A intenção aqui é apenas citar alguns resultados importantes com os quais compararemos os resultados obtidos no capítulo seguinte. Antes disso, discutiremos brevemente a origem da RMT.

2.1 Teoria de Matrizes de Aleatórias - RMT

Nos anos 30, Fermi realizou experimentos com espalhamento de nêutrons por núcleos de átomos pesados [28, 29]. Foram observados nesses experimentos picos de ressonância de longa vida que levou Bohr a formular a ideia de um "núcleo composto" constituído por partículas fortemente interagentes [30]. Cada uma das ressonâncias corresponde a um estado composto de longa vida do sistema formado pelo núcleo alvo e o nêutron. As descobertas de Fermi *et. al* e o pouco conhecimento sobre a interação das partículas no núcleo levaram a um rápido desenvolvimento da física nuclear na época.

Na época, o modelo de camadas do núcleo ainda era muito recente. Basicamente, esse modelo prevê que assim como os elétrons, os prótons e os nêutrons estão organizados em camadas ou níveis de energia no núcleo atômico. Os dados coletados por Fermi nos experimentos com espalhamento de nêutrons revelavam um caráter estatístico desse espectro nuclear. Como o número de partículas no núcleo era muito grande, isso tornava o espectro nuclear extremamente complexo, impossibilitando acessá-lo usando uma abordagem via hamiltoniano.

Diante disso, na década de 50 o físico Eugene Wigner decidiu utilizar uma abordagem estatística para tratar o espectro de núcleos pesados. A abordagem utilizada por Wigner se difere de uma forma fundamental dos conceitos estatísticos aplicados em física. Em mecânica estatística, considera-se um ensemble de sistemas físicos idênticos, ou seja, todos governados pelo mesmo hamiltoniano, mas com diferentes condições iniciais, e calcula-se propriedades termodinâmicas tomando a média sobre o ensemble. Wigner procedeu de uma forma quase contrária, considerando um ensemble de

sistemas governados por diferentes hamiltonianos que compartilhavam uma única característica: as simetrias do sistema. Em outras palavras, Wigner sorteou aleatoriamente os elementos de muitas matrizes hamiltonianas, todas com a mesma distribuição de probabilidade e com as mesmas simetrias, por fim tomando a média sobre todas essas matrizes [31, 32].

Mais tarde, Dyson formalizou a abordagem utilizada por Wigner e mostrou que na estrutura da teoria de Schrödinger padrão, existem três ensembles genéricos de matrizes aleatórias definidas em termos das propriedades de simetria de um hamiltoniano. Se o sistema tem simetria de reversão temporal, então a hamiltoniana é uma matriz real e simétrica

$$H = H^T. \quad (2.1)$$

Se o sistema não é invariante por reversão temporal, então o hamiltoniano é uma matriz hermitiana com entradas complexas

$$H = H^\dagger \quad (2.2)$$

e, finalmente, se o sistema tiver simetria de reversão temporal com spin semi-inteiro sem simetria de rotação, a hamiltoniana é uma matriz simplética e auto-dual H definida pela propriedade

$$H^T J H = J, \quad \text{onde } J = \begin{pmatrix} 0 & I_{N \times N} \\ -I_{N \times N} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

cujas entradas são quatérnions. Os quatérnions são combinações lineares da matriz identidade 2×2 e das matrizes de Pauli σ_x, σ_y e σ_z .

Quanto à distribuição de probabilidade, ensembles gaussianos desempenham um papel importante em RMT. A distribuição de probabilidade neste caso é proporcional a

$$P(H) \propto \exp \left[-\beta N \text{Tr}(H^2) \right], \quad (2.4)$$

onde β é chamado índice de Dyson e conta o número de "graus de liberdade" das entradas de H , isto é, o número de variáveis necessárias para se especificar a entrada. Wigner considerou entradas reais, complexas ou quaterniônicas, que correspondem a $\beta = 1$, $\beta = 2$ e $\beta = 4$ respectivamente. Para essas três classes de simetria, os ensembles são chamados respectivamente de GOE, ensemble gaussiano ortogonal; GUE, ensemble unitário gaussiano; e GSE, ensemble simplético gaussiano. Essa nomenclatura vem do fato de que cada uma das matrizes com as simetrias citadas anteriormente podem ser decompostas na forma $H = M X M^{-1}$, sendo M uma matriz ortogonal, unitária ou simplética respectivamente e do fato de que o $\text{Tr}(H^2)$ é invariante sob essas transformações.

A RMT obteve sucesso em descrever os níveis de energia nucleares de núcleos pesados e com isso se tornou muito famosa. Até meados de 1977, a RMT tinha sido aplicada apenas em física nuclear. A partir daí, a teoria se expandiu rapidamente e hoje encontra aplicações em várias áreas

da física como física da matéria condensada, caos quântico, óptica quântica, etc.; na matemática, como em teoria de números e geometria algébrica; na biologia em estudos do RNA e até mesmo finanças. Em particular, a RMT foi empregada no estudo do transporte quântico caótico [15] e alguns dos resultados serão descritos nas seções seguintes.

2.2 Cavidades Ideais

Imaginamos novamente uma cavidade caótica acoplada a duas guias de ondas por onde incidem elétrons, como descritas na introdução. Daqui em diante, chamaremos essas cavidades de cavidades ideais. O adjetivo *ideal* diz respeito ao acoplamento entre as guias de onda e a cavidade. Portanto, uma cavidade não ideal será uma cavidade que possui esse acoplamento imperfeito. O acoplamento entre a guia e a cavidade é um detalhe experimental importante que tem implicações no transporte e os detalhes dessas implicações serão discutidos no capítulo seguinte.

Os primeiros resultados usando RMT para transporte em cavidades caóticas ideais foram obtidos ao longo dos anos de 1990 [33, 34, 35] para um número grande de canais, ou seja, apenas quando $M \gg 1$, revistos em [15]. Resultados válidos para um número de canais M arbitrário¹ foram produzidos nos anos 2000 [36, 37, 38, 39, 40, 41], depois que uma conexão com a integral de Selberg foi explorada [42].

Quando a dinâmica clássica correspondente na cavidade é fortemente caótica e a universalidade é esperada, pode-se fazer uso da RMT no tratamento desse sistema. Para esse problema, a matriz de espalhamento

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

com dimensão $M = N_1 + N_2$ e a matriz de transmissão $\mathcal{T} = t^\dagger t$, de dimensão N_1 , são tratadas como matrizes aleatórias. Focaremos no caso unitário, isto é, em sistemas sem simetria de reversão temporal. Para cavidades ideais, a matriz de espalhamento S tem distribuição uniforme no grupo unitário $U(N)$ com medida de Haar [21]. Em resumo, isso significa que todas as matrizes S aleatórias ocorrerão com a mesma probabilidade nesse ensemble. A matriz S deve ser unitária para que haja conservação de carga na cavidade.

Os momentos do transporte são dados por $\text{Tr}(\mathcal{T}^n)$. Como visto no capítulo anterior, o polinômio simétrico de potências com argumento matricial é $p_{(n)}(X) = \text{Tr}(X^n)$. Logo, podemos escrever os momentos de uma forma mais geral em termos de uma partição como $p_\lambda(\mathcal{T}) \equiv p_\lambda(T_1, \dots, T_{N_1})$, onde as variáveis T_i são os autovalores de \mathcal{T} . Como consequência, podemos notar o fato interessante de que os momentos são funções simétricas dos autovalores $\{T_1, \dots, T_{N_1}\}$ da matriz de transmissão \mathcal{T} . Sendo \mathcal{T} uma matriz hermitiana, então todos os seus autovalores são reais.

¹ Esse regime é geralmente chamado de regime quântico.

A distribuição de probabilidade dos autovalores de \mathcal{T} é [43]

$$P(T) = \frac{1}{\mathcal{N}} |\Delta(T)|^2 \prod_{i=1}^{N_1} T_i^{N_2 - N_1}, \quad (2.6)$$

onde cada autovalor $T_i \in [0, 1]$, o termo $\Delta(T) = \prod_{i < j} (T_i - T_j)$ é o determinante de Vandermonde e \mathcal{N} é uma constante de normalização. Assumiremos $N_1 \leq N_2$ sem perda de generalidade. Na abordagem via RMT, os momentos são calculados como uma média com respeito à distribuição $P(T)$. Assim, os momentos do transporte serão dados por

$$\langle p_\lambda(\mathcal{T}) \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 p_\lambda(T_1, \dots, T_{N_1}) \prod_{i=1}^{N_1} T_i^{N_2 - N_1} |\Delta(T)|^2 dT_1 \cdots dT_{N_1}. \quad (2.7)$$

Queremos resolver a integral para obtermos uma expressão dos momentos. Essa integral pode ser resolvida através de uma generalização da integral de Selberg, conhecida como integral de Kadell.

Em 1944, o matemático Atle Selberg publicou a seguinte integral [44]

$$S_n(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} (1-t_i)^{\beta-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2\gamma} dt_1 \cdots dt_n \quad (2.8)$$

cujo resultado é

$$S_n(\alpha, \beta, \gamma) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha + j\gamma)\Gamma(\beta + j\gamma)\Gamma(1 + (j+1)\gamma)}{\Gamma(\alpha + \beta + (n+j-1)\gamma)\Gamma(1 + \gamma)}. \quad (2.9)$$

A integral de Selberg permaneceu esquecida durante alguns anos, mas voltou em cena após surgir em problemas de física mais tarde [45]. Neste caso, ela pode ser usada para calcularmos a constante de normalização \mathcal{N} da distribuição $P(T)$. A constante de normalização é igual à integral de $P(T)$

$$\mathcal{N} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{i=1}^{N_1} T_i^{N_2 - N_1} |\Delta(T)|^2 dT_1 \cdots dT_{N_1}. \quad (2.10)$$

Para resolvê-la, basta adaptarmos a integral de Selberg escolhendo os parâmetros $\beta = 1$, $\alpha = N_2 - N_1 + 1$, $\gamma = 1$ e $n = N_1$. Com isso teremos

$$S_{N_1}(N_2 - N_1 + 1, 1, 1) = \mathcal{N} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{i=1}^{N_1} t_i^{N_2 - N_1} |\Delta(t)|^2 dt_1 \cdots dt_{N_1} \quad (2.11)$$

que resulta

$$\mathcal{N} = \prod_{j=0}^{N_1-1} \frac{\Gamma(N_2 - N_1 + 1 + j)\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)}{\Gamma(N_2 + j + 1)\Gamma(2)}. \quad (2.12)$$

Usando a propriedade da função Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$, obtemos

$$\mathcal{N} = N_1! \prod_{j=0}^{N_1-1} (j!)^2 \prod_{i=0}^{N_1-1} \frac{1}{N_2 + j - i}. \quad (2.13)$$

Obtida a constante de normalização, passamos agora para o valor médio $\langle p_\lambda(\mathcal{T}) \rangle$. O primeiro passo será expressar os momentos em termos das funções de Schur. A justificativa para isso ficará clara nas passagens seguintes. Logo, devemos calcular

$$\langle s_\mu(\mathcal{T}) \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 s_\mu(T_1, \dots, T_{N_1}) \prod_{i=1}^{N_1} T_i^{N_2 - N_1} |\Delta(T)|^2 dT_1 \dots dT_{N_1}. \quad (2.14)$$

Resolvemos a integral acima notando que ela se trata de um caso particular de uma generalização da integral de Selberg conhecida como integral de Kadell [45]. A integral de Kadell é dada por

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 J_\mu^{(1/\gamma)}(t_1, \dots, t_n) \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} (1-t_i)^{\beta-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2\gamma} dt_1 \dots dt_n \quad (2.15)$$

cujos resultados são

$$\frac{\{\alpha + (n-1)\gamma\}_\mu^{(\gamma)}}{\{\alpha + \beta + 2(n-1)\gamma\}_\mu^{(\gamma)}} J_\mu^{(1/\gamma)}(1^n) S_n(\alpha, \beta, \gamma), \quad (2.16)$$

onde $S_n(\alpha, \beta, \gamma)$ é o resultado da integral original de Selberg (2.9). A generalização de Kadell inclui na integral de Selberg o chamado polinômio de Jack, $J_\mu^{(1/\gamma)}(t_1, \dots, t_n)$, que também é uma função simétrica homogênea. Esse polinômio é proporcional à função de Schur quando o parâmetro $(1/\gamma) = 1$ através da expressão

$$J_\mu^{(1)}(t) = H_\mu s_\mu(t) = \prod_{(i,j) \in \mu} (\mu_i + \mu'_j - i - j + 1) s_\mu(t) \quad (2.17)$$

na qual o produtório em (i, j) significa que o produto é feito sobre todas as caixas do diagrama de Young de formato μ que tem como coordenada a i -ésima linha e a j -ésima coluna no diagrama. O termo $\{x\}_\mu^{(\gamma)}$ é dado por

$$\{x\}_\mu^{(\gamma)} = \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} (x + (1-i)\gamma)^{(\mu_i)} \quad (2.18)$$

onde $x^{(n)} = x(x+1)\dots(x+n-1)$ é o fatorial crescente. Para as três primeiras partições e $\gamma = 1$, esse termo resulta

$$\begin{aligned} \{x\}_{(1)}^{(1)} &= x^{(1)} = x \\ \{x\}_{(1,1)}^{(1)} &= x^{(1)}(x-1)^{(1)} = (x-1)x \\ \{x\}_{(2)}^{(1)} &= x^{(2)} = x(x+1), \end{aligned} \quad (2.19)$$

para $\gamma = 2$, por sua vez

$$\begin{aligned} \{x\}_{(1)}^{(2)} &= x^{(1)} = x \\ \{x\}_{(1,1)}^{(2)} &= x^{(1)}(x-2)^{(1)} = (x-2)x \\ \{x\}_{(2)}^{(2)} &= x^{(2)} = x(x+1). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Portanto, a quantidade $\{x\}_\mu^{(\gamma)}$ é nada mais do que uma generalização do fatorial crescente e é um polinômio na variável x de grau $|\mu|$. O termo $J_\mu^{(1/\gamma)}(1^n)$ que também aparece no resultado da integral de Kadell é o polinômio de Jack com n variáveis iguais a 1.

Assim, adaptamos a integral de Kadell escolhendo novamente os parâmetros $\gamma = 1$, $\alpha = N_2 - N_1 + 1$, $\beta = 1$ e $n = N_1$. Com isso, obtemos da integral de Kadell a nossa integral do valor médio $\langle s_\mu(\mathcal{T}) \rangle$

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 s_\mu(t_1, \dots, t_{N_1}) \prod_{i=1}^{N_1} t_i^{N_2 - N_1} |\Delta(t)|^2 dt_1 \dots dt_{N_1} \quad (2.21)$$

que terá como resultado

$$\begin{aligned} &= \frac{\{N_2\}_\mu^{(1)}}{\{N_1 + N_2\}_\mu^{(1)}} s_\mu(1^{N_1}) \prod_{j=0}^{N_1-1} \frac{\Gamma(N_2 - N_1 + 1 + j) \Gamma(j + 1) \Gamma(j + 2)}{\Gamma(N_2 + j + 1) \Gamma(2)} \\ &= \frac{\{N_2\}_\mu^{(1)}}{\{M\}_\mu^{(1)}} s_\mu(1^{N_1}) N! \prod_{j=0}^{N_1-1} (j!)^2 \prod_{i=0}^{N_1-1} \frac{1}{N_2 + j - i} \\ &= \frac{\{N_2\}_\mu^{(1)}}{\{M\}_\mu^{(1)}} s_\mu(1^{N_1}) \mathcal{N} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Aproveitamos para introduzir uma notação que aparecerá frequentemente ao longo do texto. Quando $\gamma = 1$, denotaremos $\{x\}_\mu^{(1)}$ por $[x]_\mu$, que pode ser expressa da seguinte forma

$$[x]_\mu = \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \frac{(x + \mu_i - i)!}{(x - i)!}. \quad (2.23)$$

Como mencionado no capítulo anterior, a função de Schur $s_\mu(1^{N_1})$ pode ser calculada através da equação (1.32). Introduzimos uma nova expressão para $s_\mu(1^{N_1})$ mais compacta

$$s_\mu(1^{N_1}) = \frac{d_\mu[N_1]_\mu}{|\mu|!}, \quad (2.24)$$

onde d_μ é a dimensão da representação irredutível da classe do grupo de permutação S_n indexada pela partição μ [20]. De forma mais simples, d_μ é o caracter do grupo de permutação, $\chi_\mu(1^n)$, calculado na identidade. Essa quantidade pode ser expressa de várias formas, sendo uma delas

$$d_\mu = n! \det \left(\frac{1}{(\mu_i - i + j)!} \right)_{1 \leq i, j \leq \ell(\mu)} \quad (2.25)$$

onde $n = |\mu|$. Interessantemente, d_μ é também o número de tabelas de Young padrão de formato μ .

Por fim, juntando todos os resultados, chegamos finalmente na seguinte expressão para os momentos do transporte

$$\langle s_\mu(\mathcal{T}) \rangle = \frac{d_\mu [N_1]_\mu [N_2]_\mu}{n! [M]_\mu}. \quad (2.26)$$

Para as três primeiras partições, os momentos são:

$$\begin{aligned}\langle s_{(1)}(\mathcal{T}) \rangle &= \frac{N_1 N_2}{M} \\ \langle s_{(1,1)}(\mathcal{T}) \rangle &= \frac{N_1 N_2 (N_1 - 1)(N_2 - 1)}{2M(M - 1)} \\ \langle s_{(2)}(\mathcal{T}) \rangle &= \frac{N_1 N_2 (N_1 + 1)(N_2 + 1)}{2M(M + 1)}.\end{aligned}\tag{2.27}$$

As três primeiras partições já nos permite acessar duas propriedades físicas do transporte numa cavidade caótica. A primeira é a condutância média

$$G = \frac{e^2}{\pi\hbar} \langle s_{(1)}(\mathcal{T}) \rangle = \frac{e^2}{\pi\hbar} \frac{N_1 N_2}{M}\tag{2.28}$$

e a segunda é o shot-noise médio, que mede a flutuação de corrente elétrica, igual a $p_{(1)}(\mathcal{T}) - p_{(2)}(\mathcal{T})$. Em termos da função de Schur, o shot-noise é

$$\begin{aligned}P &= \frac{2e^3|V|}{\pi\hbar} \left(\langle s_{(1)}(\mathcal{T}) \rangle + \langle s_{(1,1)}(\mathcal{T}) \rangle - \langle s_{(2)}(\mathcal{T}) \rangle \right) \\ &= \frac{2e^3|V|}{\pi\hbar} \frac{N_1^2 N_2^2}{M(M^2 - 1)}.\end{aligned}\tag{2.29}$$

2.3 Cavidades com Barreira de Tunelamento

Passemos agora para a descrição de resultados obtidos via RMT tratando de cavidades não ideais. Uma cavidade não ideal é uma cavidade que possui um acoplamento imperfeito entre a guia de onda e a cavidade. Quando isso acontece, a guia de onda deixa de ser "transparente" ao elétron. Esse acoplamento é então modelado introduzindo-se na teoria uma barreira de potencial na interface entre a guia de onda e a cavidade. A barreira impõe ao elétron uma taxa de tunelamento Γ_i no i -ésimo canal, com $\Gamma_i = 1$ correspondendo ao caso ideal. Mais detalhes das consequências da inclusão da barreira serão dados no capítulo seguinte.

Em RMT, a barreira de tunelamento é implementada introduzindo-se o chamado kernel de Poisson para modelar a distribuição estatística da matriz S [46]

$$P(S) \propto |\det(1 - \bar{S}^\dagger S)|^{-(\beta M + 2 - \beta)},\tag{2.30}$$

onde \bar{S} é a matriz de espalhamento média (para o caso ideal, $\bar{S} = 0$) e $\beta \in \{1, 2, 4\}$ é o índice de Dyson. Até o momento, no regime $M \gg 1$, as primeiras ordens da média e da variância da condutância foram obtidas em [47], enquanto o shot-noise médio foi considerado em [48, 49].

Fórmulas exatas para a distribuição dos autovalores da matriz de transmissão \mathcal{T} , válida para M arbitrário e apenas uma guia não ideal, foram derivadas em [50, 51] por Vidal e Kanzieper em termos de matrizes com elementos sendo funções hipergeométricas, no caso sem simetria de reversão temporal.

A distribuição de probabilidade derivada por Vidal e Kanzieper na referência [50] é expressada em termos dos autovalores de reflexão R_i , que se relacionam com os já conhecidos autovalores de transmissão através da relação $R_i = 1 - T_i$. Esse resultado assume apenas uma das guias de onda não ideal e ausência de simetria de reversão temporal. Assim, assumindo que os N_2 canais de propagação na segunda guia são ideais, enquanto na primeira guia as probabilidades de tunelamento Γ_i em cada canal estão organizadas numa matriz diagonal Γ , a distribuição é dada por

$$P(R) \propto \det(\Gamma)^M \det(\mathcal{F}) \frac{\Delta(R)}{\Delta(\Gamma)} \prod_{i=1}^{N_1} (1 - R_i)^{N_2 - N_1} \quad (2.31)$$

onde $\Delta(R)$ e $\Delta(\Gamma)$ são determinantes de Vandermonde e \mathcal{F} é uma matriz cujos elementos são a função hipergeométrica

$$\mathcal{F}_{ij} = {}_2F_1(N_2 + 1, N_2 + 1; 1; (1 - \Gamma_i)R_j). \quad (2.32)$$

A função hipergeométrica ${}_2F_1(a, b, c; z)$, por sua vez, é definida pela série de potências

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)} b^{(n)} z^n}{c^{(n)} n!} \quad (2.33)$$

onde $x^{(n)}$ é o fatorial crescente.

Esse resultado foi utilizado em [52] por Novaes *et. al* para se obter os momentos do transporte exatos de uma cavidade caótica com apenas uma guia não-ideal. Em termos das funções de Schur dos autovalores de reflexão, foi mostrado que

$$\langle s_\lambda(R) \rangle = \det(\Gamma) \sum_{\rho} s_{\rho} (1 - \Gamma) \frac{[M]_{\rho}^2}{[N_1]_{\rho}^2} \sum_{\nu} C_{\lambda, \rho}^{\nu} \frac{d_{\nu} [N_1]_{\mu}^2}{|\nu|! [M]_{\mu}} \quad (2.34)$$

onde a soma em ρ é uma soma infinita sobre todas as partições possíveis, a soma em ν é tal que $\nu \vdash |\lambda| + |\rho|$ e $C_{\lambda, \rho}^{\nu}$ é o coeficiente de Littlewood-Richardson. No regime de guias de ondas fracamente não ideais, $\Gamma_i \approx 1$, esse resultado pode ser visto como uma expansão perturbativa na variável $1 - \Gamma$.

No capítulo seguinte, nós derivaremos um resultado semiclássico para os momentos do transporte no caso em que as probabilidades de tunelamento $\Gamma_i = \Gamma$ são iguais para todos os canais da primeira guia (a segunda guia é mantida ideal) e expressamos esse resultado em termos de um parâmetro de opacidade $\gamma = 1 - \Gamma$, que é a probabilidade de reflexão na barreira. Usando a homogeneidade da função de Schur e a equação (2.24), podemos usar a relação

$$s_{\rho}(\gamma) = \gamma^{|\rho|} \frac{d_{\rho} [N_1]_{\rho}}{|\rho|!} \quad (2.35)$$

para escrever a expressão (2.34)

$$\langle s_\lambda(R) \rangle = (1 - \gamma)^{N_1 M} \sum_{\rho} \gamma^{|\rho|} \frac{d_{\rho} [M]_{\rho}^2}{|\rho|! [N_1]_{\rho}} \sum_{\nu} C_{\lambda, \rho}^{\nu} \frac{d_{\nu} [N_1]_{\mu}^2}{|\nu|! [M]_{\mu}} \quad (2.36)$$

para o caso particular $\Gamma_i = \Gamma$ mencionado. No capítulo seguinte, nós comparamos o resultado semiclássico derivado com a expressão acima e encontramos concordância para todas as partições até o momento $n = 5$ e em todas as ordens em γ até 6. Como o resultado semiclássico derivado é expressado em termos dos autovalores de transmissão $T_i = 1 - R_i$, para que seja possível compará-los, devemos expressá-lo em termos de R_i através da relação [20]

$$s_\mu(T) = s_\mu(1 - R) = \sum_{\lambda \subset \mu} (-1)^{|\lambda|} B_{\mu,\lambda}(N_1) s_\lambda(R) \quad (2.37)$$

na qual

$$B_{\mu,\lambda} = \det \left(\binom{N_1 + \mu_i - i}{N_1 + \lambda_j - j} \right)_{1 \leq i, j \leq \ell(\mu)} = \frac{[N_1]_\mu}{[N_1]_\lambda} \frac{d_{\mu/\lambda}}{(|\mu| - |\lambda|)!} \quad (2.38)$$

com

$$d_{\mu/\lambda} = (|\mu| - |\lambda|)! \det \left(\frac{1}{(\mu_i - i - \lambda_j + j)!} \right)_{1 \leq i, j \leq \ell(\mu)}, \quad (2.39)$$

sendo, de forma análoga à equação (2.25), o número de tabelas de Young padrão de formado μ/λ . Mostraremos que a abordagem semiclássica conduz, surpreendentemente, a uma expressão mais simples que a equação (2.36).

Abordagem Semiclássica

Neste capítulo, pretende-se mostrar como originalmente a abordagem semiclássica para o transporte quântico caótico foi proposta. Os detalhes mais complicados que exigem conhecimento avançado de sistemas dinâmicos são deixados de lado, mas boas referências são indicadas para os leitores mais curiosos. Em seguida, nos voltamos para a formulação via integral matricial, a qual utilizamos para obter novos resultados para o transporte com uma barreira de tunelamento

3.1 Propagador Semiclássico

Vamos começar derivando uma expressão que será importante para a abordagem semiclássica. A evolução temporal de um sistema quântico cujo hamiltoniano \hat{H} é independente do tempo pode ser feita usando o operador de evolução temporal $\mathcal{U}(t_0, t)$. Se o sistema se encontra num estado $|\alpha, t_0\rangle$ no tempo t_0 , então a evolução temporal desse sistema num tempo futuro t para um outro estado $|\alpha, t_0; t\rangle$ é dada por

$$|\alpha, t_0; t\rangle = \mathcal{U}(t_0, t)|\alpha, t_0\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t - t_0)\right]|\alpha, t_0\rangle. \quad (3.1)$$

Se expandirmos o ket $|\alpha, t_0\rangle$ em termos dos autoestados $\{|a_i\rangle\}_i$ de um operador genérico \hat{A} que comuta com \hat{H} , isto é $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$, teremos

$$|\alpha, t_0; t\rangle = \sum_i \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t - t_0)\right] |a_i\rangle \langle a_i|\alpha, t_0\rangle = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i|\alpha, t_0\rangle \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_i(t - t_0)\right] \quad (3.2)$$

multiplicando em ambos os lados da equação pelo autoestado do operador de posição, $\langle x|$, à esquerda

$$\langle x|\alpha, t_0; t\rangle = \sum_i \langle x|a_i\rangle \langle a_i|\alpha, t_0\rangle \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_i(t - t_0)\right] \quad (3.3)$$

$$\Psi(x, t) = \sum_i c_{a_i}(t_0) u_{a_i}(x) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_i(t - t_0)\right] \quad (3.4)$$

onde $u_{a_i}(x) = \langle x|a_i\rangle$ denota a autofunção do operador \hat{A} com autovalor a_i . Usando a completeza dos autoestados do operador de posição $\int dx' |x'\rangle\langle x'| = 1$ em $c_{a_i}(t_0)$, obtemos

$$\Psi(x, t; x', t_0) = \int dx' K(x, t; x', t_0) \Psi(x', t_0) \quad (3.5)$$

onde

$$K(x, t; x', t_0) = \sum_i \langle x|a_i\rangle \langle a_i|x'\rangle \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_i(t-t_0)\right] \quad (3.6)$$

na mecânica quântica é conhecido como **propagador**. Como o próprio nome diz, ele propaga a função de onda $\Psi(x', t_0) = \langle a_i|\alpha, t_0\rangle$ do sistema quântico que foi localizado precisamente na posição x' no tempo $t_0 < t$ para a posição x no tempo t . O propagador pode ser mais elegantemente escrito como

$$K(x, t; x', t_0) = \langle x|\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right]|x'\rangle, \quad (3.7)$$

sem a necessidade de qualquer operador genérico \hat{A} que comute com \hat{H} . A sua principal propriedade é que o propagador satisfaz a equação

$$\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \hat{H}\right]K(x, t; x', t_0) = -i\hbar\delta(x-x')\delta(t-t_0) \quad (3.8)$$

com a condição de contorno $K(x, t; x', t_0) = 0$ quando $t < t_0$. Por esta razão, o propagador é a função de Green para a equação de Schrödinger dependente do tempo, que a partir de agora chamaremos por G

$$G(x, t; x_0, t_0) = \langle x|\hat{G}(t_0, t)|x_0\rangle \quad (3.9)$$

onde

$$\hat{G}(t, t_0) = \theta(t-t_0)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right]. \quad (3.10)$$

A função Heaviside $\theta(t-t_0)$ garante a condição de contorno $K(x, t; x_0, t_0) = 0$ quando $t < t_0$.

A forma particular do propagador depende, é claro, do sistema físico em estudo, precisamente do potencial ao qual o sistema está sujeito. Por simplicidade, consideraremos apenas hamiltonianos da forma $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$, onde \hat{T} é o operador de energia cinética quadrático no momento e \hat{V} o operador de energia potencial que depende apenas das coordenadas de posição. Uma expressão para a função de Green pode ser obtida em termos de uma integral de caminho no espaço de coordenadas. Isso é feito no apêndice B, chegando-se na expressão

$$G(x, t; x_0, t_0) = \theta(t-t_0)\lim_{N\rightarrow\infty}\left(\frac{mN}{2\pi i\hbar(t-t_0)}\right)^{N/2}\times\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\dots\int_{-\infty}^{\infty}dx_{N-1}\exp\left[\frac{i}{\hbar}R_N(x, \{x_i\}, x_0)\right]. \quad (3.11)$$

3.1.1 Limite Semiclássico

Estamos interessados em obter o limite semiclássico da função de Green na equação (3.11) e isso é feito tomando o limite $\hbar \rightarrow 0$. Entretanto, ao fazermos esse limite, a exponencial irá oscilar

muito rapidamente e, assim, contribuindo muito pouco para a integral. Para contornar este problema, usamos o método da fase estacionária, discutido a seguir.

3.1.1.1 Método da Fase Estacionária

Considere a seguinte integral

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\lambda f(t)}. \quad (3.12)$$

Queremos avaliar a integral no limite em que $\lambda \rightarrow \infty$. Para λ muito grande, a exponencial complexa é uma função altamente oscilante dando praticamente nenhuma contribuição para a integral, exceto na vizinhança do ponto extremo de $f(t)$, isto é, na vizinhança do ponto em que $\frac{df}{dt} = 0$. Esse fato será exemplificado abaixo. Vamos assumir que esse ponto extremo seja $t = t_0$, assim $\exp[i\lambda f(t)]$ é uma função que oscila pouco na vizinhança de t_0 e oscila muito fora dessa vizinhança.

Inicialmente, expandimos $f(t)$ em torno de t_0 . Teremos

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp \left[i\lambda \left(f(t_0) + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 f''(t_0) + \frac{1}{6}(t-t_0)^3 f'''(t_0) + \dots \right) \right]. \quad (3.13)$$

Se fizermos a mudança de variável $\tau = \sqrt{\lambda}(t-t_0)$ considerando a vizinhança de t_0 , podemos escrever

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{i\lambda f(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp \left[\frac{i}{2} \left(\tau^2 f''(t_0) + \frac{1}{3} \frac{\tau^3}{\sqrt{\lambda}} f'''(t_0) + \dots \right) \right]. \quad (3.14)$$

Na vizinhança de $\tau = 0$, o nosso ponto de interesse que corresponde a $t = t_0$, podemos ignorar os termos de ordem cúbica e mais alta porque eles dão contribuições com potências de $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ relativas ao termo quadrático em τ , que tendem a zero no limite $\lambda \rightarrow \infty$. Escrevemos

$$F(\lambda) \approx \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{i\lambda f(t_0)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-\epsilon|\tau|} \exp \left[\frac{i}{2} \tau^2 f''(t_0) \right] = \sqrt{\frac{2\pi i}{\lambda f''(t_0)}} e^{i\lambda f(t_0)} \quad (3.15)$$

onde acrescentamos um fator de convergência ϵ para dar significado à integral quando $\tau = \infty$.

Obtivemos, portanto, uma aproximação para a integral (3.12). Na figura (5), mostramos como exemplo o gráfico de $f(t) = \sinh^2(t)$ e a parte real da integral de $f(t)$, no intervalo $[-4, 4]$ para $\lambda = 10$. A função $f(t)$ tem um ponto de mínimo em $t = 0$ e a vizinhança desse ponto é a região de maior contribuição para sua integral. Para esse exemplo, a integral na equação (3.12) feita numericamente no intervalo $(-\infty, \infty)$ é 0.455884, enquanto a aproximação da equação (3.15) resulta 0.396333. Obviamente, quanto maior o valor de λ , maior a precisão da aproximação. Para $\lambda = 100$ por exemplo, o resultado da integral e da aproximação são 0.124948 e 0.125331, respectivamente.

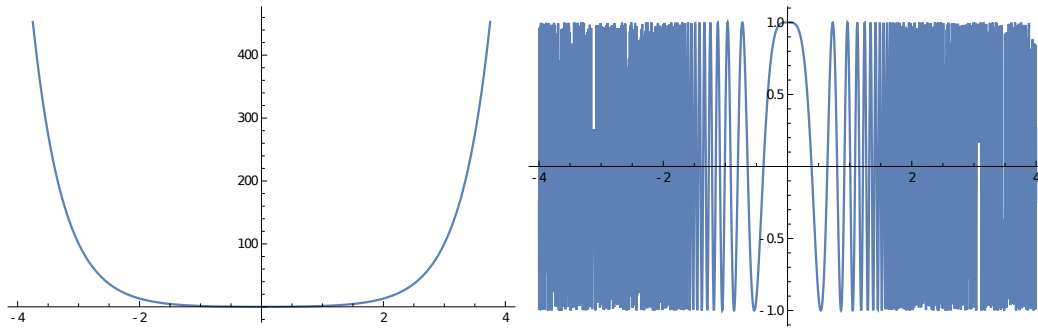


Figura 5: Esquerda: Gráfico da função $f(t) = \sinh^2(t)$, com um mínimo em $t = 0$. Direita: Gráfico de $Re[F(10)]$, onde a maior contribuição para a integral vem da vizinhança do ponto de mínimo de $f(t)$.

3.1.1.2 Propagador Semiclássico

Pelo princípio variacional de Langrange, os caminhos clássicos são caminhos que extremizam a função principal de Hamilton. A condição para um extremo ao longo de um caminho discreto é que

$$\frac{\partial R_N(x, \{x_i\}, x_0)}{\partial x_j} = 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.16)$$

A substituição da versão discreta da função principal de Hamilton, eq. (B.11), na expressão acima resulta numa versão discreta da lei de Newton

$$m \left(\frac{x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i}{(\Delta t)^2} \right) = -\frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i}, \quad (3.17)$$

ou seja, todos os caminhos clássicos possíveis que extremizam a ação são aqueles soluções da lei de Newton.

Podemos usar o método da fase estacionária para avaliar a equação (3.11) no limite semi-clássico. Se compararmos o argumento da exponencial na equação (3.11) com o argumento da exponencial na equação (3.12), vemos que \hbar^{-1} faz o papel do λ . Assim, se fizermos o limite $\hbar \rightarrow 0$, esperamos uma contribuição dominante da região onde $\frac{\partial R_N}{\partial x_j} = 0$, portanto, de um caminho possível. Denotaremos por $\{x_i\}_\alpha$ o conjunto de pontos do α -ésimo caminho clássico solução da equação (3.17). Introduziremos também uma nova coordenada $y_{\alpha,i} = x_i - x_{\alpha,i}$, que é o desvio a partir do α -ésimo caminho.

Seguindo o método da fase estacionária, vamos agora expandir $R_N(x, \{x_i\}, x_0)$ em torno do α -ésimo caminho:

$$R_N(x, \{x_i\}, x_0) = R_N(x, \{x_i\}_\alpha, x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{\partial^2 R_N}{\partial x_i \partial x_j} \right)_\alpha y_{\alpha,i} y_{\alpha,j} + \dots \quad (3.18)$$

Termos de ordem cúbica e mais alta contribuem com potências de $\sqrt{\hbar}$ e se anulam no limite semi-

clássico. Substituindo a equação (3.18) na função de Green (3.11), encontramos

$$G(x, t; x_0, t_0) \approx \theta(t - t_0) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\alpha} \left(\frac{mN}{2\pi i \hbar (t - t_0)} \right)^{N/2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} R_N(x, \{x_i\}_{\alpha}, x_0) \right] \quad (3.19)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dy_{N-1} \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{\partial^2 R_N}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\alpha} y_i y_j \right]$$

onde a soma é sobre todos os caminhos clássicos α que conectam os pontos x_0 e x , além disso abandonamos o subscrito α em y_i .

Depois de fazermos algumas manipulações na expressão acima, sendo duas delas tomar a transformada de Fourier para passarmos de uma expressão que depende do tempo para uma expressão que depende da energia e passarmos da função principal de Hamilton $R(x, x_0, t)$ para a ação clássica $S(x, x_0, E)$ (para mais detalhes, veja [1]), a versão final da expressão escrita de uma forma simplificada é

$$G(x, t) = \sum_{\alpha} A_{\alpha} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\alpha}}, \quad t > t_0 \quad (3.20)$$

onde A_{α} é um termo de estabilidade da trajetória α que deriva das integrais sobre as variáveis y_i incluindo as constantes (esse termo posteriormente inclui o chamado índice de Maslov) [1] e S_{α} a sua ação clássica. Todos os cálculos feitos até agora foram para derivar a expressão (3.20) chamada propagador de Van Vleck, que desempenha um papel crucial na aproximação semiclássica para o transporte quântico caótico.

3.2 A Abordagem Semiclássica

Como dito anteriormente, usaremos uma abordagem de espalhamento para tratar o transporte quântico em cavidades caóticas. A matriz de espalhamento S relaciona amplitudes quânticas de ondas de entrada e saída de um sistema, tipicamente usada no estudo de colisões de partículas. Neste caso, essas ondas serão as funções de onda dos elétrons que entram e saem da cavidade por ambas as guias. Nesta abordagem para o transporte, os elementos da matriz S são aproximados pelo propagador semiclássico. Por exemplo, os elementos do bloco de transmissão t serão

$$t_{o,i} \approx \frac{1}{\sqrt{M\tau_D}} \sum_{\alpha: i \rightarrow o} A_{\alpha} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\alpha}} \quad (3.21)$$

onde $M = N_1 + N_2$ é o número total de canais e a soma é feita sobre todas as trajetórias α que conectam os canais i e o . Por exemplo para o caso da condutância, que é proporcional ao primeiro momento, usando essa aproximação teremos uma soma dupla sobre trajetórias α e β

$$\text{Tr}(t^{\dagger}t) = \sum_{i_1, o_1} t_{i_1, o_1}^{\dagger} t_{o_1, i_1} = \sum_{i_1, o_1} t_{o_1, i_1}^* t_{o_1, i_1} = \frac{1}{M\tau_D} \sum_{i_1, o_1} \sum_{\substack{\alpha: i_1 \rightarrow o_1 \\ \beta: i_1 \rightarrow o_1}} A_{\alpha} A_{\beta}^* e^{i(S_{\alpha} - S_{\beta})/\hbar} \quad (3.22)$$

onde a soma sobre os canais de entrada i_1 vai de 1 a N_1 e a soma sobre os canais de saída o_1 de 1 a N_2 . De forma geral, os momentos do transporte em termos de somas sobre trajetórias serão

$$\text{Tr}[(t^\dagger t)^n] = \frac{1}{M^n \tau_D^n} \sum_{\vec{i}, \vec{o}} \prod_{k=1}^n \sum_{\alpha_k, \beta_k} A_{\alpha_k} A_{\beta_k}^* e^{i(S_{\alpha_k} - S_{\beta_k})/\hbar}, \quad (3.23)$$

tal que α_k conecta $i_{\pi(k)}$ a o_k e β_k conecta i_k a o_k sendo π uma permutação; os detalhes sobre essa permutação serão explicados mais adiante. Diremos que t dá origem a uma trajetória que será chamada de trajetória direta, enquanto t^\dagger dá origem à sua trajetória parceira. Teremos, portanto, sempre pares de trajetórias de forma que o n -ésimo momento terá $2n$ trajetórias.

O caráter ondulatório devido à natureza quântica dos elétrons dá origem a efeitos importantes para o transporte. Se enxergarmos o elétron como um pacote de onda, então a medida que o tempo passa esse pacote de onda se espalha até que, depois de um certo tempo, a sua largura σ será maior ou igual à largura da cavidade L . O intervalo de tempo necessário para que $\sigma = L$ é o chamado tempo de Ehrenfest $\tau_E = \lambda^{-1} \ln(k_F L)$, onde λ é o expoente de Lyapunov médio da dinâmica clássica caótica e k_F o módulo do vetor de onda de Fermi dos elétrons. Contudo, nesse regime a natureza ondulatória do elétron se torna aparente. Como estamos interessados no regime semiclássico, no qual $\lambda_F \ll L$, então vamos considerar que $\tau_D \gg \tau_E$, sendo τ_D o tempo de permanência da trajetória dentro da cavidade (do inglês *dwell time*), que mede quanto tempo o elétron passa dentro da cavidade.

O regime $\tau_D \gg \tau_E$ será importante para garantir que a partícula sofra muitas colisões antes de sair da cavidade, cobrindo uma região maior do espaço de fase e "sentindo" a ergodicidade da sua dinâmica; tudo isso garante uma dinâmica fortemente caótica. Uma maneira de garantir que o tempo de permanência da trajetória seja longo o suficiente é fazer com que as larguras das guias W_1 e W_2 sejam pequenas comparadas com a largura da cavidade. A consequência disso é que quando tomarmos $\hbar \rightarrow 0$, o número de canais nas guias $N_i \sim W_i/\hbar$ será grande, sem prejuízos para a teoria. O regime $\tau_E > \tau_D$ também foi bastante estudado, revelando efeitos importantes [53, 54, 55, 56].

A teoria semiclássica do transporte quântico caótico foi inicialmente desenvolvida por Richter e Sieber [57, 58] e posteriormente por Haake e colaboradores [59, 60, 16]. A grande descoberta da teoria se deu entendendo que o ingrediente principal são pares de trajetórias correlacionadas pela ação clássica. Esse par de trajetórias (a trajetória direta e a parceira) é composto por trajetórias que são praticamente idênticas na maior parte do tempo, portanto, tendo a mesma ação clássica, exceto nas regiões chamadas de **encontros**, onde elas se interferem construtivamente. Um encontro é uma região formada por dois ou mais trechos da trajetória direta que estreitamente se aproximam ou se cruzam com um ângulo de cruzamento pequeno no espaço de configuração e nele os trechos de trajetórias parceiras trocam de trecho da trajetória direta. Na figura (6), mostramos o exemplo de um encontro duplo. Os outros trechos fora do encontro são chamados de links. No caso da figura (6), temos três links: o primeiro que sai da guia de onda da esquerda e chega até o encontro, o segundo que liga os trechos da trajetória direta do encontro e cuja parceira caminha no sentido inverso da direta e o terceiro link que conduz a trajetória para a guia da direita.

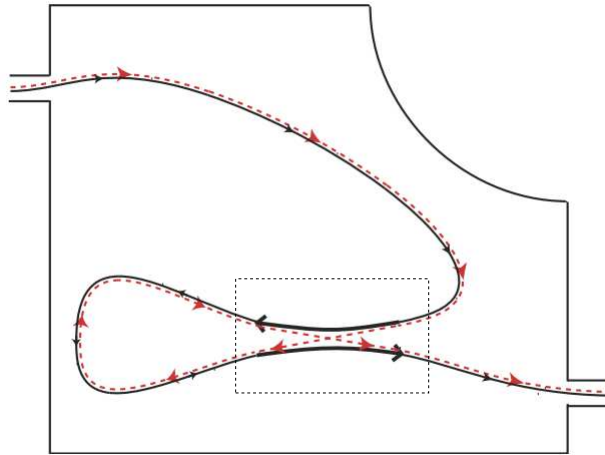


Figura 6: Esquema de um par de trajetórias com um encontro duplo (retângulo tracejado). No encontro, um trecho da trajetória direta (linha sólida) se aproxima de outro trecho e os trechos da trajetória parceira (linha tracejada) permutam entre si. As trajetórias direta e parceira fora da região do encontro são praticamente indistinguíveis e têm a mesma ação clássica. Como no segundo link as trajetórias têm sentidos contrários, esse par de trajetórias só contribui para sistemas com simetria de reversão-temporal. Fonte: [16].

É importante ressaltar que nas figuras os encontros estarão sempre fora de escala para facilitar a visualização e o formato da trajetória não é realístico. Como veremos a seguir, depois de fazer algumas integrações no espaço de fase, o cálculo dos momentos de transporte pode ser formulado diagramaticamente. Isso significa que a teoria se reduz a algumas regras que dão a contribuição de cada diagrama para os momentos de transporte. A partir daí, o formato da trajetória em si será irrelevante, todas as trajetórias com os mesmos encontros (independente do formato dos links) serão "topologicamente" equivalentes, correspondendo ao mesmo diagrama. Além disso, veremos que a teoria é perturbativa em $1/M$ e, por essas razões, dizemos que a abordagem semiclassical para o transporte quântico caótico é uma teoria perturbativa diagramática. Para dar uma descrição quantitativa da teoria semiclassical, seguiremos os cálculos da referência [16] sem se aprofundar muito nos detalhes. O intuito dessa descrição quantitativa é mostrar de onde vêm as regras diagramáticas.

3.2.1 Contribuição Diagonal

Seguiremos a referência [16], que realiza os cálculos considerando o primeiro momento $\text{Tr}[(t^\dagger t)]$. Partindo da expressão (3.22), o primeiro par de trajetórias que contribuem para o primeiro momento corresponde ao caso mais simples, que é considerar o caso trivial de trajetórias iguais $\alpha = \beta$. Essa contribuição é chamada contribuição diagonal. Nesse caso, a ação clássica de ambas as trajetórias é a mesma $S_\alpha = S_\beta$, logo as exponenciais se cancelam e o termo diagonal fica

$$\langle \text{Tr}[(t^\dagger t)] \rangle_{diag} = \frac{1}{M\tau_D} \left\langle \sum_{i,o} \sum_{\alpha:i \rightarrow o} |A_\alpha|^2 \right\rangle. \quad (3.24)$$

A soma sobre trajetórias é avaliada seguindo a regra estabelecida por Richter e Sieber [58]. Essa regra estabelece que a soma sobre trajetórias entre canais fixos é equivalente à integração sobre o tempo de permanência da trajetória dentro na cavidade. Introduce-se uma taxa de decaimento exponencial $e^{-\frac{T}{\tau_D}}$ que dá a probabilidade de encontrar uma partícula dentro da cavidade

$$\sum_{\alpha:i \rightarrow o} |A_\alpha|^2 = \int_0^\infty dT e^{-\frac{T}{\tau_D}} = \tau_D. \quad (3.25)$$

A regra de Richter-Sieber é análoga à regra de soma de Hannay-Ozório de Almeida [61]. Finalmente, fazendo a soma sobre os canais, onde a soma em i vai de 1 a N_1 e a soma em o vai de 1 a N_2 , obtemos

$$\langle \text{Tr}[(t^\dagger t)] \rangle_{diag} = \frac{N_1 N_2}{M}. \quad (3.26)$$

Esse é o primeiro termo da expansão perturbativa em $1/M$ da condutância. A aproximação diagonal já reproduz completamente o resultado da RMT da condutância no caso sem simetria de reversão temporal, Eq. (2.28). Adiante será obtida uma expressão perturbativa geral para a condutância e, a partir dela veremos que, de fato, todas as contribuições de ordem mais alta se anulam para o caso unitário, restando apenas a aproximação diagonal. No caso ortogonal, o próximo termo da expansão que contribui com $1/M^2$ se origina de um par de Richter-Sieber.

3.2.2 Pares de Richter-Sieber

A simetria de reversão temporal tem um papel fundamental no caos quântico, bem como no transporte quântico caótico. Se a dinâmica dos elétrons na cavidade é invariante por reversão temporal, então a trajetória parceira é permitida estar no sentido contrário à trajetória direta em algum trecho, como no segundo link da figura (6). Isso só é permitido se a simetria estiver presente.

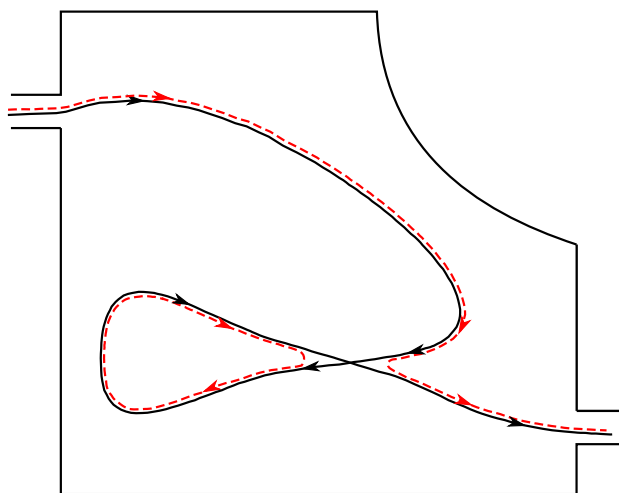


Figura 7: Par de trajetórias com um encontro duplo em um sistema sem invariância de reversão-temporal. A condição de mesmo sentido das trajetórias direta e parceira em todos os trechos produz uma órbita periódica. Órbitas periódicas não são permitidas na teoria semiclássica do transporte.

Como veremos a seguir, essa simetria dá origem a novos diagramas para o transporte, fazendo com que os momentos sejam ligeiramente diferentes dependendo da presença ou ausência dessa simetria.

Se tentássemos desenhar um par de trajetórias com um encontro duplo, como o da figura (6), sem que a trajetória direta e parceira tenham sentidos contrários em algum link, produziríamos uma órbita periódica, como ilustra a figura (7). A abordagem de Laudauer-Büttiker não permite a existência dessas órbitas, já que todo elétron que entra na cavidade deve sair dela. Por essa razão, um par de trajetórias com um encontro duplo é impossível num sistema sem simetria de reversão temporal.

Consideramos agora um sistema com simetria de reversão temporal. Chamaremos por par de Richter-Sieber um par de trajetórias α e β onde existe um encontro duplo, exatamente como na figura (6). Nesse par, a ação clássica S_α e S_β é praticamente a mesma, com uma diferença $S_\alpha - S_\beta$ que se origina principalmente do encontro. A teoria considera que a trajetória está sujeita a escapar da cavidade apenas durante os links e o primeiro trecho do encontro. Isso porque se o primeiro trecho do encontro acontece dentro da cavidade¹, então o segundo trecho, que é quase idêntico ao primeiro por definição, deve estar dentro da cavidade também. Essa proximidade entre o primeiro e o segundo trecho do encontro é precisamente a correlação de ação entre as trajetórias mencionada anteriormente.

Se denotarmos o tempo gasto no primeiro trecho do encontro por t_{enc} e o tempo gasto em cada link por t_1, t_2 e t_3 , então o chamado "tempo de exposição" da trajetória é dado por $T_{exp} = t_1 + t_2 + t_3 + t_{enc}$ que é menor que o tempo de permanência $T = t_1 + t_2 + t_3 + 2t_{enc}$ que inclui ainda o tempo gasto no segundo trecho do encontro. Consequentemente, a probabilidade de sobrevivência e^{-T_{exp}/τ_D} é maior que a estimativa e^{-T/τ_D} . Portanto, em resumo, a existência de encontros numa trajetória aumenta a sua probabilidade de sobrevivência.

Vejamos a geometria no espaço de fase do encontro duplo. Tomamos uma seção de Poincaré \mathcal{P} que é uma superfície ortogonal ao primeiro trecho do encontro. O primeiro trecho do encontro intercepta essa seção num ponto qualquer \mathbf{x}_1 e o segundo trecho num ponto \mathbf{x}_2 . A teoria considera que o ponto \mathbf{x}_2 deve estar quase revertido no tempo com respeito a \mathbf{x}_1 , isto é, a separação entre os pontos $\mathcal{T}\mathbf{x}_2$ e \mathbf{x}_1 na seção de Poincaré, sendo \mathcal{T} o operador de reversão temporal, deve ser pequena. Essa separação $\mathcal{T}\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ pode ser decomposta em duas componentes vetoriais da seção de Poincaré chamadas componente estável $\hat{\mathbf{e}}_s$ e componente instável $\hat{\mathbf{e}}_u$ (as letras s e u se referem a *stable* e *unstable* respectivamente)

$$\mathcal{T}\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = s\hat{\mathbf{e}}_s + u\hat{\mathbf{e}}_u. \quad (3.27)$$

Na figura (8), mostramos os pontos de cruzamento das trajetórias com a seção de Poincaré. Se \mathcal{P} se move ao longo do encontro seguindo a evolução temporal de \mathbf{x}_1 , a componente instável u cresce exponencialmente e a componente estável s decresce exponencialmente. Para tempos longos

¹ Veremos mais adiante no caso com barreiras de tunelamento que o encontro pode acontecer na guia de onda.

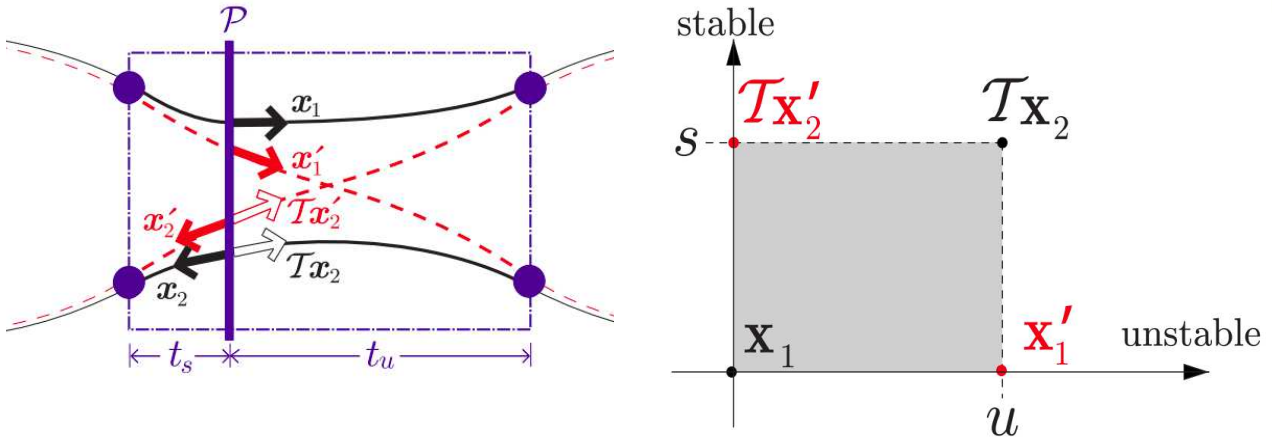


Figura 8: Esquerda: Pontos de cruzamento dos trechos de um encontro duplo com a seção de Poincaré. Os pontos \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 , \mathbf{x}'_1 e \mathbf{x}'_2 e os pontos revertidos temporalmente $\mathcal{T}\mathbf{x}_2$ e $\mathcal{T}\mathbf{x}'_2$ estão indicados por setas. A seção de Poincaré \mathcal{P} está indicada pela barra vertical azul transversal ao primeiro trecho do encontro no ponto \mathbf{x}_1 . t_s é o tempo entre o início do encontro e \mathcal{P} e t_u o tempo entre \mathcal{P} e o final do encontro. Direita: Decomposição de $\mathcal{T}\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ nas componentes estável e instável. Fonte: [19]

comparados com o tempo balístico (L/v sendo L a largura da cavidade e v a velocidade dos elétrons), podemos escrever

$$s(t) \sim s(0)e^{-\lambda t} \quad (3.28)$$

$$u(t) \sim u(0)e^{\lambda t} \quad (3.29)$$

onde λ é o expoente de Lyapunov. Por definição, as coordenadas u e s estão limitadas a um intervalo $-c < u < c$, $-c < s < c$, com c sendo uma pequena separação no espaço de fase. Como consequência das duas equações acima, o tempo entre a seção \mathcal{P} e o final do encontro é o tempo necessário para que a componente instável cresça de u a $\pm c$ e vale $t_u \sim \frac{1}{\lambda} \ln \frac{c}{|u|}$. Analogamente, o tempo entre o início do encontro e a seção \mathcal{P} é igual ao tempo necessário para que a componente estável diminua de $\pm c$ para s e vale $t_s \sim \frac{1}{\lambda} \ln \frac{c}{|s|}$; esses tempos estão mostrados na figura (8). Portanto, o tempo gasto para percorrer um dos trechos do encontro é

$$t_{enc} = t_s + t_u = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{c^2}{|su|}. \quad (3.30)$$

Uma análise um tanto complicada da hiperbolicidade da dinâmica caótica [62, 63] permite mostrar que

$$t_{enc} = t_s + t_u = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{c^2}{|\Delta S|} \quad (3.31)$$

e portanto a diferença de ação entre as trajetórias direta e parceira na região do encontro é $\Delta S = S_\alpha - S_\beta = su$.

Precisamos determinar o número médio de encontros duplos dentro de trajetórias α para um dado tempo de permanência T . Esse número será integrado junto com a probabilidade de

sobrevivência dando o "peso" correspondente do encontro duplo para a probabilidade. Esse número é representado por uma densidade de coordenadas estável e instável da trajetória α e dado por [16]

$$w(s, u) = \int dt_1 dt_2 \frac{1}{\Omega t_{enc}(s, u)} \quad (3.32)$$

onde Ω é o volume do espaço de fase. Essa densidade é normalizada tal que a integração sobre todos os valores de s e u pertencendo a um dado intervalo $\Delta S = su$ resulta no número de encontros duplos de α . A normalização garante que a diferença de ação ΔS seja independente da posição da sessão de Poincaré \mathcal{P} no encontro.

Por fim, para obter a contribuição do par de Richter-Sieber para a condutância, a teoria substitui a soma sobre β por uma soma sobre encontros duplos ou, equivalentemente, uma integral sobre s e u com o peso $w(s, u)$ e considera $A_\beta \approx A_\alpha$ [16] de modo que

$$\langle \text{Tr}[(t^\dagger t)] \rangle_{RS} = \frac{1}{M\tau_D} \left\langle \sum_{i,o} \int_{-c}^c dsdu \sum_{\alpha:i \rightarrow o} |A_\alpha|^2 w(s, u) e^{isu/\hbar} \right\rangle \quad (3.33)$$

Em seguida, emprega-se novamente a regra de Richter-Sieber, Eq. (3.25), substituindo a soma sobre trajetórias α por uma integral sobre o tempo de permanência T com o integrando envolvendo a probabilidade de sobrevivência modificada pelo encontro $e^{-\frac{T_{exp}}{\tau_D}} = e^{-\frac{1}{\tau_D}(t_1+t_2+t_3+t_{enc})}$. Como o peso $w(s, u)$ já integra sobre os tempos dos links t_1 e t_2 , então a integral sobre T pode ser substituída por uma integral sobre o link final t_3 , tendo agora todas as regiões do par de Richter-Sieber integradas

$$\langle \text{Tr}[(t^\dagger t)] \rangle_{RS} = \frac{N_1 N_2}{M\tau_D} \left\langle \int_0^\infty dt_1 dt_2 dt_3 \int_{-c}^c dsdu \frac{1}{\Omega t_{enc}(s, u)} e^{-\frac{1}{\tau_D}(t_1+t_2+t_3+t_{enc}(s, u))} e^{isu/\hbar} \right\rangle \quad (3.34)$$

de modo que o termo $N_1 N_2$ vem da soma sobre canais. A integral na expressão acima se fatora em três integrais independentes sobre os links,

$$\int_0^\infty dt_i e^{-\frac{t_i}{\tau_D}} = \tau_D, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.35)$$

e uma integral sobre as separações estável e instável dentro do encontro,

$$I = \left\langle \int dsdu \frac{1}{\Omega t_{enc}(s, u)} e^{-\frac{t_{enc}(s, u)}{\tau_D}} e^{isu/\hbar} \right\rangle. \quad (3.36)$$

A integral do encontro I pode ser avaliada expandindo a primeira exponencial

$$e^{-\frac{t_{enc}(s, u)}{\tau_D}} = 1 - \frac{t_{enc}(s, u)}{\tau_D} + \dots \quad (3.37)$$

Como mostrado no apêndice A de [64], o termo linear $\left\langle \int dsdu \frac{1}{\Omega t_{enc}(s, u)} e^{isu/\hbar} \right\rangle = \left\langle \frac{2\lambda\hbar}{\Omega} \sin \frac{c^2}{\hbar} \right\rangle$ oscila rapidamente quando tomamos o limite $\hbar \rightarrow 0$ e desaparece depois de tomarmos uma média. No limite semiclássico, o valor de I é determinado somente pelo termo linear, para o qual o denominador $t_{enc}(s, u)$ cancela e assim

$$I \approx -\frac{1}{\Omega\tau_D} \left\langle \int_{-c}^c dsdu e^{isu/\hbar} \right\rangle = -\frac{1}{M\tau_D^2} \quad (3.38)$$

onde $\int dsdu e^{isu/\hbar} \rightarrow 2\pi\hbar$ e $\Omega = 2\pi M\hbar\tau_D$. Todos os outros termos da expansão de $e^{-\frac{t_{enc}(s,u)}{\tau_D}}$ podem ser ignorados comparados ao termo linear uma vez que $\frac{t_{enc}}{\tau_D} \sim \frac{\tau_E}{\tau_D} \ll 1$, dada a consideração do regime semiclássico $\tau_D \gg \tau_E$. Finalmente, substituindo o resultado da integral I e as integrais sobre os links na expressão (3.34), resulta que a contribuição do par de Richter-Sieber para a condutância é

$$\langle \text{Tr}[(t^\dagger t)] \rangle_{RS} = -\frac{N_1 N_2}{M^2}. \quad (3.39)$$

Como todos os termos τ_D se cancelam e o resultado depende unicamente de N_1 e N_2 , podemos formular a seguinte regra diagramática para a contribuição total de qualquer diagrama:

- Cada link contribui com um fator de M^{-1} ;
- Cada encontro contribui com um fator $-M$;
- N_1 para cada par de trajetórias que entra na cavidade;
- N_2 para cada par de trajetórias que sai da cavidade.

De modo que a contribuição total de um diagrama será dada pelo produto de cada um desses fatores. O resultado da equação (3.39) é o segundo termo da expansão da condutância de sistemas com simetria de reversão temporal.

3.2.2.1 Condutância

Dado que todos os diagramas contribuem para a condutância, para obter uma expressão geral para a condutância que contenha todos os termos da expansão perturbativa, devemos considerar todos os tipos de trajetórias, que diferem umas das outras pelo número de encontros, pelos tipos de encontros (número de trechos), pelo sentido em que os trechos da trajetória direta são atravessados e pelas reconexões da trajetória parceira, tanto no caso unitário quanto no caso ortogonal.

As regras diagramáticas estabelecidas acima continuam valendo para todas as trajetórias. Para provar isso, os autores em [16] generalizam os cálculos feitos para o par de Richter-Sieber de maneira intuitiva. Esses cálculos estão descritos no apêndice C. Após fazermos todas as integrações no espaço de fase e resolvermos o problema combinatorial de determinar todas as trajetórias que contribuem para uma dada potência de $1/M$, obtemos para a condutância a expressão

$$\langle \text{Tr}(t^\dagger t) \rangle = \begin{cases} \frac{N_1 N_2}{M}, & \text{caso unitário} \\ \frac{N_1 N_2}{M+1}, & \text{caso ortogonal.} \end{cases} \quad (3.40)$$

Encerramos aqui a descrição da aproximação semiclássica da maneira como foi originalmente proposta. Algumas observações importantes merecem ser feitas a respeito. Note que a integral sobre o tempo dos links, tanto no par de Richter-Sieber quanto no caso geral do apêndice C, não leva em

conta nenhuma característica geométrica e resulta sempre a mesma contribuição $\frac{T_H}{M}$. Isso prova a equivalência topológica dos diagramas, de forma que o resultado depende apenas das características e do número de encontros.

Outro fato importante é que os cálculos não levaram em conta nenhum aspecto geométrico da cavidade. Isso significa que os mesmos resultados semiclássicos se aplicam a todas as cavidades caóticas no regime $\tau_D \gg \tau_E$. Esse fato é chamado de universalidade [17, 6] e é certamente um dos resultados mais importantes do caos quântico. É surpreendente que sistemas quânticos caóticos individualmente diferentes compartilhem de propriedades exatamente iguais. Esse fato, que foi inicialmente formalizado na conjectura de Bohigas-Gianonni-Schmit [65] proposta há mais de trinta anos, mas posteriormente estendida, não possui ainda uma prova formal, mas já é amplamente aceito devido à imensa quantidade de resultados que apontam para a sua veracidade. Essa conjectura encontrou aplicações em muitos campos da física como física atômica, física nuclear, física mesoscópica, etc.

Nos anos seguintes ao estabelecimento da teoria semiclássica do transporte a partir de integrações sobre o tempo de permanência da trajetória na cavidade, outras maneiras de se obter os momentos foram desenvolvidas. Por exemplo, Berkolaiko *et. al* [66] perceberam que os diagramas de primeira ordem em $1/M$ têm a mesma topologia de árvores, que são objetos matemáticos de genus zero; e Marcel Novaes propôs uma integral matricial que reproduz as regras diagramáticas do transporte [67]. A seção seguinte será dedicada à abordagem via integral matricial.

3.3 Formulação via Integral Matricial

A formulação a partir de integral matricial foi proposta por Marcel Novaes em [67] para o caso unitário e em [68] para o caso ortogonal. Novaes propõe uma integral sobre matrizes complexas $N \times N$ que reproduzem exatamente as mesmas regras diagramáticas da abordagem semiclássica. Esse método tem uma série de vantagens sobre os outros métodos existentes na literatura. A primeira vantagem é que os diagramas são obtidos logo de início e não precisam ser construídos um a um posteriormente, como é feito no método descrito na seção anterior. Além disso, a teoria envolvida na construção dos diagramas é mais simples que o método combinatorial proposto pela formulação anterior [16]. Uma outra vantagem desse método é que a integral pode ser adaptada para tratar outros problemas, como a estatística envolvendo matrizes de espalhamento em diferentes energias [69, 70].

A partir de agora, chamaremos as cavidades às quais nos referimos até aqui por cavidades ideais e discutiremos primeiramente o modelo matricial para esse tipo. Uma cavidade não ideal será uma cavidade com barreiras de tunelamento, que discutiremos posteriormente. Em ambos os casos, não consideraremos simetria de reversão temporal.

3.3.1 Cavidades Ideais

Os momentos do transporte segundo esse modelo, para sistemas sem simetria de reversão temporal, são dados pela seguinte integral matricial [67]

$$\left\langle \prod_{k=1}^n t_{i_{\pi(k)}, o_k}^\dagger t_{o_k, i_k} \right\rangle = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{Z}} \int e^{-M \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^q]} \prod_{k=1}^n Z_{i_{\pi(k)}, o_k}^\dagger Z_{o_k, i_k} dZ \quad (3.41)$$

Rigorosamente, para que a expressão acima corresponda aos momentos do transporte, é necessário ainda fazer a soma sobre os canais de entrada \vec{i} de 1 a N_1 e sobre os canais de saída \vec{o} de 1 a N_2 . Para notar isso, basta lembrar que o polinômio simétrico de potências com argumento matricial é $p_n(X) = \text{Tr}(X^n)$, logo $p_n(\mathcal{T}) = \text{Tr}[(t^\dagger t)^n]$ que é justamente os momentos do transporte. Uma expressão mais geral é obtida se escrevermos em termos de partições, $p_\lambda(\mathcal{T})$, onde as partições inteiras $\lambda = (n)$ correspondem à primeira expressão. Por fim, lançamos mão da equação (1.45) para p_λ , que é idêntica ao lado esquerdo da equação (3.41), a menos da soma sobre os canais \vec{i} e \vec{o} .

Na integral matricial, a matriz Z é uma matriz complexa $N \times N$ e \mathcal{Z} é uma constante de normalização calculada no apêndice D. Para entendermos de que forma a integral reproduz as regras diagramáticas e como os diagramas são construídos, contaremos com a formula de Wick.

3.3.1.1 Fórmula de Wick e Diagramas Semiclássicos

Primeiro isolamos o termo $q = 1$ da exponencial, $e^{-M \text{Tr}(Z^\dagger Z)}$, tomando-o como parte da medida de integração dZ e expandimos em série de Taylor o restante da exponencial

$$e^{-M \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^q]} = e^{-M \text{Tr}(Z^\dagger Z)} \left[1 + \frac{-M}{2} \text{Tr}(Z^\dagger Z)^2 + \frac{(-M)^2}{2^2 \cdot 2!} [\text{Tr}(Z^\dagger Z)^2]^2 + \frac{(-M)^3}{2^3 3!} [\text{Tr}(Z^\dagger Z)^2]^3 + \dots \right] \times \left[1 + \frac{-M}{3} \text{Tr}(Z^\dagger Z)^3 + \frac{(-M)^2}{3^2 \cdot 2!} [\text{Tr}(Z^\dagger Z)^3]^2 + \frac{(-M)^3}{3^3 3!} [\text{Tr}(Z^\dagger Z)^3]^3 + \dots \right] \times \dots \quad (3.42)$$

Cada $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^q]$ representa um encontro com q trechos de trajetórias diretas e q trechos de trajetórias parceiras. Essa conexão entre o traço e o encontro é feita através da representação diagramática da fórmula de Wick. Na fórmula de Wick, um elemento de Z é representado por um par de setas com uma das extremidades marcadas (para um elemento de Z^\dagger , as setas apontam no sentido contrário); e o traço $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^q]$, por sua vez, é representado por um vértice de valência $2q$, isto é, um vértice com $2q$ arestas.

Neste contexto, em comparação com os diagramas da seção 1.3, faremos uma pequena modificação na representação dos traços para incorporar a estrutura interna do encontro. Por exemplo, o

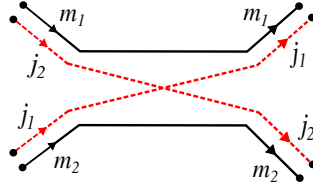


Figura 9: Nova representação do $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2]$ no contexto do transporte, agora com uma estrutura interna idêntica aos encontros. Neste novo esquema, os elementos de Z , do lado esquerdo, e os elementos de Z^\dagger , do lado direito, continuam sendo representados por um par de setas (aresta) e as ligações são feitas conforme os índices aparecem de trás para frente na expansão do traço.

traço $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2]$, que é escrito como

$$\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2] = \sum_{m_1, m_2, j_1, j_2=1}^N Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{j_1, m_2} Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{j_2, m_1} \quad (3.43)$$

agora é representado conforme a figura (9), com as linhas cheias sendo trechos da trajetória direta e linhas traçadas sendo trechos da trajetória parceira. Nesta nova configuração, os elementos de Z são colocados do lado esquerdo na representação e os elementos de Z^\dagger do lado direito. As ligações internas são feitas lendo-se a expressão do traço da direita para a esquerda na equação (3.43). Lendo dessa maneira, note que um índice j_k é seguido por outro índice j_k do elemento de Z seguinte e um índice m_k é seguido por outro índice m_k , de modo que as ligações são feitas segundo essa ordem. Com essa modificação, a representação do traço agora contém toda a estrutura de um encontro. O traço $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^3]$ por sua vez, escrito como

$$\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^3] = \sum_{\vec{m}, \vec{j}=1}^N Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{j_1, m_2} Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{j_2, m_3} Z_{m_3, j_3}^\dagger Z_{j_3, m_1} \quad (3.44)$$

será representado conforme a figura (10), que também tem a mesma estrutura de um encontro triplo, e assim por diante. A figura (11) mostra uma comparação entre os encontros duplo e triplo no esquema de Richter-Sieber e a representação dos mesmos encontros no modelo matricial.

Feita a conexão entre a representação dos traços e os encontros, a contribuição de cada um desses produtos entre $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^q]$ resultantes da expansão da exponencial em (3.42) é calculada integrando-os com o termo $\prod_{k=1}^n Z_{i_{\pi(k)}, o_k}^\dagger Z_{o_k, i_k}$. Portanto de forma geral, teremos integrais do tipo

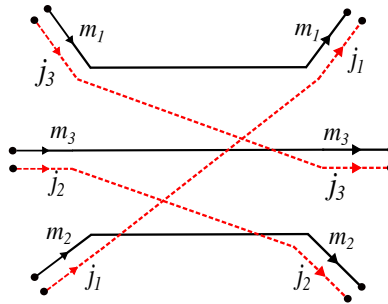


Figura 10: Nova representação do $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^3]$ no contexto do transporte num esquema análogo à figura (9).

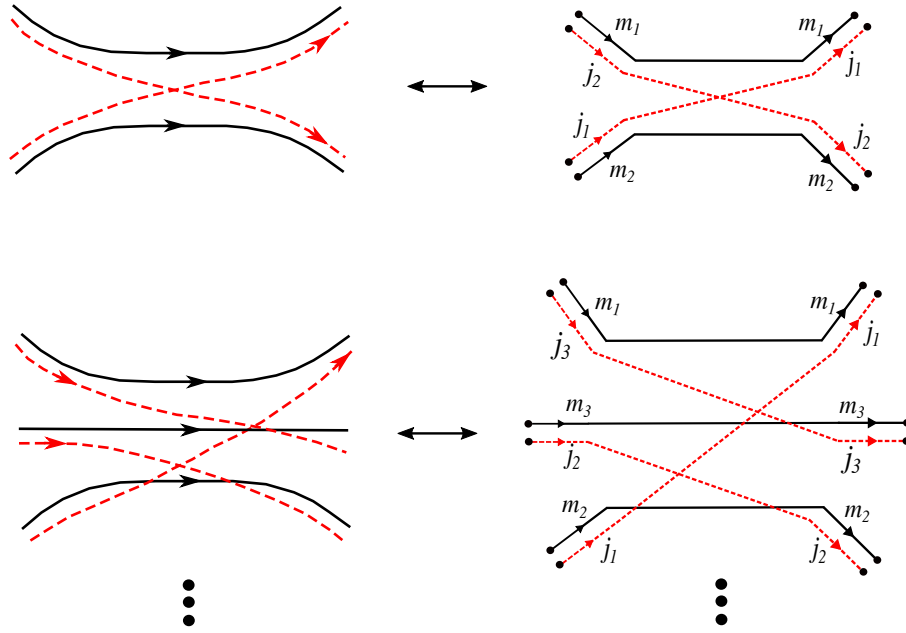


Figura 11: Correspondência entre encontros com q trechos e a representação diagramática de $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^q]$. O traço $\text{Tr}(Z^\dagger Z)^2$ (superior direito) corresponde a um encontro duplo, o traço $\text{Tr}(Z^\dagger Z)^3$ (inferior direito) corresponde a um encontro triplo e assim por diante.

$$\langle f(Z^\dagger Z) \rangle_\lambda = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int e^{-M \text{Tr}(Z^\dagger Z)} f(Z^\dagger Z) \prod_{k=1}^n Z_{i_{\pi(k)}, o_k}^\dagger Z_{o_k, i_k} dZ, \quad (3.45)$$

onde $n = |\lambda|$ e π é qualquer permutação com ciclo tipo λ . A função $f(Z^\dagger Z)$ será um desses produtos entre $\text{Tr}[(Z^\dagger Z)^q]$.

Como exemplo, calculemos a contribuição do par de Richter-Sieber para a condutância. Um par de Richter-Sieber é um par de trajetórias com um encontro duplo, que no modelo matricial corresponde ao termo $\frac{-M}{2} \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2]$ na expansão da exponencial. A contribuição desse diagrama para a condutância ($n = 1$) será dada por

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{-M}{2} \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2] \right\rangle_{(1)} &= \lim_{N \rightarrow 0} \frac{-M}{2} \sum_{i_1, o_1} \frac{1}{\mathcal{Z}} \int e^{-M \text{Tr}(Z^\dagger Z)} \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2] Z_{i_1, o_1}^\dagger Z_{o_1, i_1} dZ \\ &= \lim_{N \rightarrow 0} \frac{-M}{2} \sum_{i_1, o_1} \sum_{\vec{m}, \vec{j}=1}^N \frac{1}{\mathcal{Z}} \int e^{-M \text{Tr}(Z^\dagger Z)} Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{j_1, m_2} Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{j_2, m_1} Z_{i_1, o_1}^\dagger Z_{o_1, i_1} dZ \end{aligned} \quad (3.46)$$

com a soma em i_i feita de 1 a N_1 e a soma em o_1 de 1 a N_2 . Novamente, essa integral pode ser feita

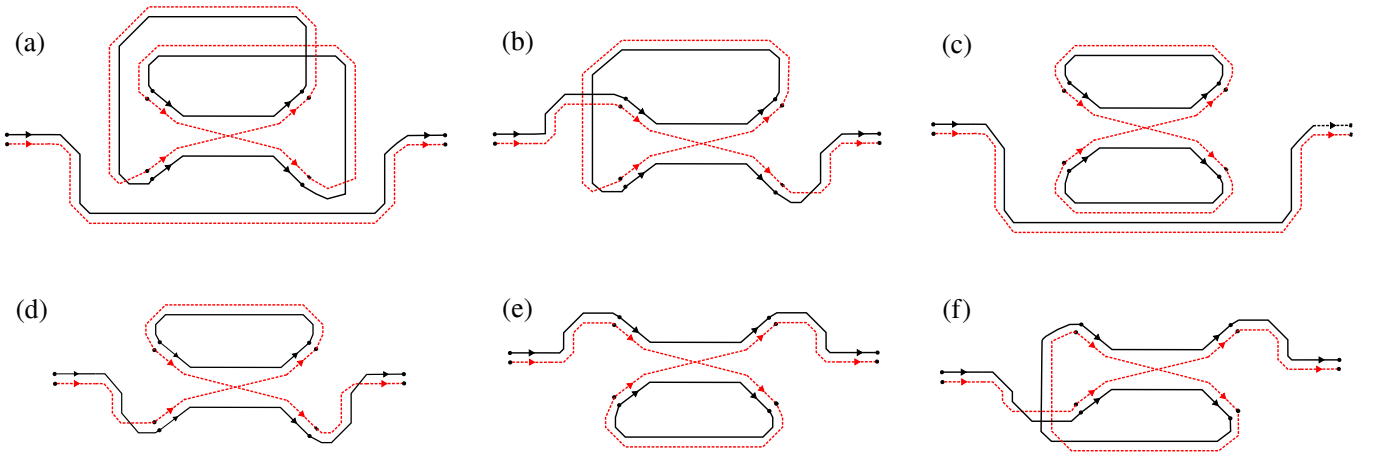


Figura 12: Diagramas semiclássicos correspondentes aos acoplamentos de Wick na equação (3.47). Todos os diagramas contêm órbitas periódicas e, portanto, se anulam ao tomarmos o limite $N \rightarrow 0$.

via fórmula de Wick. A aplicação da fórmula resulta

$$\begin{aligned}
 \langle Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{j_1, m_2}^\dagger Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{j_2, m_1}^\dagger Z_{i_1, o_1}^\dagger Z_{o_1, i_1} \rangle = & \langle Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{j_1, m_2} \rangle \langle Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{j_2, m_1} \rangle \langle Z_{i_1, o_1}^\dagger Z_{o_1, i_1} \rangle + \\
 & \langle Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{j_1, m_2} \rangle \langle Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{o_1, i_1} \rangle \langle Z_{i_1, o_1}^\dagger Z_{j_2, m_1} \rangle + \\
 & \langle Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{j_2, m_1} \rangle \langle Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{j_1, m_2} \rangle \langle Z_{i_1, o_1}^\dagger Z_{o_1, i_1} \rangle + \\
 & \langle Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{j_2, m_1} \rangle \langle Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{o_1, i_1} \rangle \langle Z_{i_1, o_1}^\dagger Z_{j_1, m_2} \rangle + \\
 & \langle Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{o_1, i_1} \rangle \langle Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{j_1, m_2} \rangle \langle Z_{i_1, o_1}^\dagger Z_{j_2, m_1} \rangle + \\
 & \langle Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{o_1, i_1} \rangle \langle Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{j_2, m_1} \rangle \langle Z_{i_1, o_1}^\dagger Z_{j_1, m_2} \rangle.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Introduzimos uma segunda alteração na representação da fórmula de Wick no contexto do transporte. Em vez de agruparmos todos os elementos da matriz Z que aparecem na integral em um único vértice, como é feito na seção 1.3, colocaremos os elementos advindos do $\prod_{k=1}^n Z_{i_{\pi(k)}, o_k}^\dagger Z_{o_k, i_k}$, ou seja, os elementos cujos índices correspondem a canais de entrada e saída, separados e agruparemos nos vértices só os elementos com índices j e m . Dessa forma, teremos a ideia de que a trajetória chega no sistema (cavidade) pela guia de onda da esquerda e sai pela guia de onda da direita.

Deve-se mencionar o fato de que, de maneira geral, um elemento de Z , representado como um par de setas, é um par de trajetórias que chega em um vértice ou sai do sistema, enquanto um elemento de Z^\dagger é um par de trajetórias que deixa um vértice ou que entra no sistema. Portanto, a fórmula de Wick nos manda ligar um par de trajetórias que entra no sistema (Z^\dagger) com um par de trajetórias que entra num vértice (Z) e um par de trajetórias que sai de um vértice (Z^\dagger) com um par de trajetórias que sai do sistema (Z). Aplicando essa regra, todos os diagramas correspondentes aos acoplamentos na equação (3.47) estão ilustrados na figura (12).

Todos os diagramas da figura (12) contêm órbitas periódicas envolvendo linhas cheias ou tracejadas. Isso revela a impossibilidade de haver um par de trajetórias com um encontro duplo contribuindo para a condutância num sistema sem simetria de reversão temporal. Como mencionado

na subseção 3.2.2, a tentativa de obtermos um diagrama com um encontro duplo sem a simetria induz órbitas periódicas. Como a teoria do transporte se baseia numa abordagem de espalhamento, órbitas periódicas não são admitidas. No modelo matricial proposto por Novaes, a contribuição de um diagrama com t órbitas periódicas é proporcional a N^t , ou seja, em correspondência com a seção 1.3, as faces dos diagramas agora se traduzem em órbitas periódicas. Para provar essa afirmação, primeiro aplicamos a expressão da covariância em cada um dos pareamentos na equação (3.47)

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{-M}{2} \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2] \right\rangle_{(1)} &= \lim_{N \rightarrow 0} \frac{-M}{2} \sum_{i_1, o_1} \sum_{\vec{m}, \vec{j}=1}^N \left\langle Z_{m_1, j_1}^\dagger Z_{j_1, m_2} Z_{m_2, j_2}^\dagger Z_{j_2, m_1} Z_{i_1, o_1}^\dagger Z_{o_1, i_1} \right\rangle \quad (3.48) \\
&= \lim_{N \rightarrow 0} \frac{-M}{2} \frac{1}{M^3} \sum_{i_1, o_1} \sum_{\vec{m}, \vec{j}=1}^N \delta_{m_1, m_2} \delta_{j_1, j_1} \delta_{m_2, m_1} \delta_{j_2, j_2} \delta_{i_1, i_1} \delta_{o_1, o_1} + \\
&\quad \delta_{m_1, m_2} \delta_{j_1, j_1} \delta_{m_2, i_1} \delta_{j_2, o_1} \delta_{i_1, m_1} \delta_{o_1, j_2} + \\
&\quad \delta_{m_1, m_1} \delta_{j_1, j_2} \delta_{m_2, m_2} \delta_{j_2, j_1} \delta_{i_1, i_1} \delta_{o_1, o_1} + \\
&\quad \delta_{m_1, m_1} \delta_{j_1, j_2} \delta_{m_2, i_1} \delta_{j_2, o_1} \delta_{i_1, m_2} \delta_{o_1, j_1} + \\
&\quad \delta_{m_1, i_1} \delta_{j_1, o_1} \delta_{m_2, m_2} \delta_{j_2, j_1} \delta_{i_1, m_1} \delta_{o_1, j_2} + \\
&\quad \delta_{m_1, i_1} \delta_{j_1, o_1} \delta_{m_2, m_1} \delta_{j_2, j_2} \delta_{i_1, m_2} \delta_{o_1, j_1}.
\end{aligned}$$

Ao avaliarmos as deltas, alguns índices serão eliminados da soma, enquanto outros permanecerão sendo somados. A esses últimos, damos o nome de índices livres. Cada índice m_k ou j_k livre, quando somado, produz um termo N de modo que a contribuição de cada produto entre deltas será proporcional a N elevado ao número de índices livres. Assim, fazendo as somas sobre os índices teremos

$$\left\langle \frac{-M}{2} \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2] \right\rangle_{(1)} = \frac{-M}{2} \frac{N_1 N_2}{M^3} \lim_{N \rightarrow 0} (N^3 + N + N^3 + N + N + N). \quad (3.49)$$

Agora, é fácil ver que as órbitas periódicas estão associadas aos índices m_k e j_k nos diagramas. Por exemplo, no diagrama (a) da figura (12) mostrado abaixo, as três órbitas periódicas conectam j_1 a j_1 , j_2 a j_2 e m_1 a m_2 , que são precisamente os índices livres do termo correspondente na soma. Isso prova que a contribuição de um diagrama com t órbitas periódicas é proporcional a N^t .

Por fim, tomando o limite $N \rightarrow 0$

$$\left\langle \frac{-M}{2} \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^2] \right\rangle_{(1)} = 0 \quad (3.50)$$

como já era esperado.

Na expansão (3.42), perceba que cada traço com expoente q é acompanhado de uma potência q de $-M$ no numerador que dá a contribuição correta do encontro segundo as regras diagramáticas citadas anteriormente. Depois de fazer as multiplicações, teremos todas as possíveis combinações

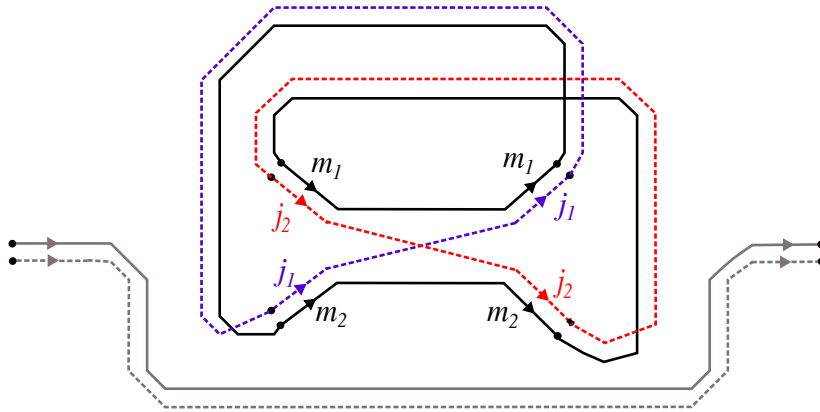


Figura 13: Diagrama (a) da figura (12). Cada uma das órbitas periódicas, destacadas em azul, preto e vermelho, se origina da conexão entre arestas indexadas por índices j_k ou m_k , de modo que o número de índices livres j_k ou m_k é igual ao número de órbitas.

entre traços, logo todos os tipos de diagramas com todos os tipos de encontros. A contribuição de cada um desses diagramas é calculada integrando cada termo com $\prod_{k=1}^n Z_{i_{\pi(k)}, o_k}^\dagger Z_{o_k, i_k}$ usando a fórmula de Wick.

Cada par de deltas de Kronecker, obtido pela expressão da covariância aplicada nos pareamentos da fórmula de Wick, nos diz como ligar as arestas (trajetórias) dos vértices (encontros) com os canais de entrada e saída i_k e o_k , conectando o encontro às guias de onda e produzindo, portanto, os links. Após aplicarmos a fórmula de Wick e a covariância, cada par de ligações entre arestas (link) estará acompanhado por um termo $1/M$ que dá a contribuição correta do link segundo as regras diagramáticas.

Como a fórmula de Wick produz todos os tipos de ligações entre as arestas dos vértices, o limite $N \rightarrow 0$ é essencial para eliminar os diagramas que contenham órbitas periódicas já que, como foi mencionado, a contribuição desse diagrama será proporcional a N^t , com t sendo o número de órbitas periódicas.

Assim, em resumo, a exponencial é a parte da integral responsável por produzir todos os encontros no interior da cavidade e o produtório é a parte responsável pelo que acontece nas guias. Em particular, a aproximação diagonal, que corresponde a um par de trajetórias sem encontro, se origina do produto de todos os termos iguais a 1 na expansão em Taylor acima. Vejamos então como resolver a integral (3.41) e obter uma expressão para os momentos.

3.3.2 Solução Exata

Para resolver a integral, seguiremos o método utilizado em [67]. Fazemos uma decomposição em valores singulares na matriz Z , escrevendo-a como $Z = UDV^\dagger$, onde U e V são matrizes unitárias e D é uma matriz diagonal. Essa decomposição pode ser entendida através de uma analogia com coordenadas esféricas, onde as matrizes U e V desempenham o papel das coordenadas angulares φ

e θ e matriz D desempenha o papel da coordenada radial r . O primeiro passo é obter a constante de normalização \mathcal{Z} . A medida de integração dZ após a decomposição em valores singulares se torna [71]

$$dZ = |\Delta(X)|^2 dX dU dV \quad (3.51)$$

onde $X = DD^\dagger = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ e as variáveis reais x_i são os autovalores de X que residem todos no intervalo $[0, 1]$. Mencionamos que $dX = \prod_i dx_i$ e dU e dV são chamadas medida de Haar no grupo unitário $U(N)$ [21]. O termo $\Delta(X)$ é o Vandermonde dos autovalores x_i , dado pela eq. (1.23). Com isso, a constante de normalização, calculada no apêndice D, é [67]

$$\mathcal{Z} = \int e^{-M \text{Tr}(Z^\dagger Z)} dZ = \frac{N!}{M^{N^2}} \prod_{k=1}^{N-1} (k!)^2. \quad (3.52)$$

O produto $Z^\dagger Z$ será escrito como

$$Z^\dagger Z = VD^\dagger U^\dagger U DV^\dagger = V X V^\dagger \quad (3.53)$$

onde usamos o fato de que U é uma matriz unitária, isto é, $U^\dagger U = 1$ e $D^\dagger D = X$. A partir disso, reescrevemos a exponencial da integral semiclássica

$$e^{-M \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^q]} = e^{-M \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \text{Tr}[(V X V^\dagger)^q]} = e^{-M \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \text{Tr}[(X)^q]} \quad (3.54)$$

na qual usamos o fato de que o traço é invariante por transformação unitária. Reescrevemos novamente a exponencial fazendo as seguintes manipulações

$$e^{-M \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \text{Tr}[(X)^q]} = e^{-M \text{Tr} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(X)^q}{q}} = e^{M \text{Tr}[\ln(1-X)]} \quad (3.55)$$

onde reconhecemos no expoente a série de Taylor da função $-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$. Usamos agora a identidade $\text{Tr}[\ln(A)] = \ln[\det(A)]$ e obtemos

$$e^{M \text{Tr}[\ln(1-X)]} = e^{M \ln[\det(1-X)]} = e^{\ln[\det(1-X)]^M} = \det(1-X)^M. \quad (3.56)$$

O produtório $\prod_{k=1}^n Z_{i_{\pi(k)}, o_k}^\dagger Z_{o_k, i_k}$ deve ser reescrito cuidadosamente usando a decomposição $Z = UDV^\dagger$, notando que se trata do produto de elementos da matriz de Z . Assim, teremos

$$\prod_{k=1}^n Z_{i_{\pi(k)}, o_k}^\dagger Z_{o_k, i_k} = \prod_{k=1}^n \sum_{m_k, j_k=1}^N V_{i_{\pi(k)}, m_k} D_{m_k}^\dagger U_{m_k, o_k}^\dagger U_{o_k, j_k} D_{j_k} V_{j_k, i_k} \quad (3.57)$$

onde escrevemos apenas um índice para as matrizes D^\dagger e D pelo fato de serem diagonais. A decomposição em valores singulares, portanto, transforma a integral semiclássica em

$$\left\langle \prod_{k=1}^n t_{i_{\pi(k)}, o_k}^\dagger t_{o_k, i_k} \right\rangle = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_0^1 dX |\Delta(X)|^2 \det(1-X)^M \times \int dU dV a_\pi(U, X, V) \quad (3.58)$$

em que

$$a_\pi(U, X, V) = \prod_{k=1}^n \sum_{m_k, j_k=1}^N V_{i_{\pi(k)}, m_k} D_{m_k}^\dagger U_{m_k, o_k}^\dagger U_{o_k, j_k} D_{j_k} V_{j_k, i_k}^\dagger. \quad (3.59)$$

Ou seja, a decomposição fatora a integral numa parte angular $a_\pi(U, V, X)$ que, depois de integrada sobre U e V , contribui ainda para a parte radial, integrada sobre os autovalores de X . O termo $a_\pi(U, V, X)$ é integrado sobre o grupo unitário usando o maquinário das funções de Weingarten [72, 73, 74]. As funções de Weingarten podem ser expandidas em termos dos caracteres do grupo de permutação S_n . Os detalhes sobre a integração estão descritos em [67]. Devemos mencionar que a soma sobre os canais de entrada e saída \vec{i} e \vec{o} é feita nessa passagem, resultando na expressão

$$\int dU dV a_\pi(U, X, V) = \sum_{\mu \vdash n} \frac{[N_1]_\mu [N_2]_\mu}{[N]_\mu^2} \chi_\mu(\lambda) s_\mu(X) \quad (3.60)$$

onde definimos

$$[N]_\lambda = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{(N + \lambda_i - i)!}{(N - i)!} \quad (3.61)$$

como uma generalização do fatorial crescente, introduzida na equação (2.23). O termo $\chi_\mu(\lambda)$ é um caracter do grupo de permutação S_n [20]. A partição λ indexa o momento do transporte calculado e corresponde ao ciclo-tipo da permutação π . $s_\mu(X)$ é a função de Schur dos autovalores de X . Como a soma sobre canais já foi feita no termo $A_\pi(X)$, podemos reescrever ambos os lados da equação (3.58) como

$$\langle p_\lambda(\mathcal{T}) \rangle = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\mu \vdash n} \frac{[N_1]_\mu [N_2]_\mu}{[N]_\mu^2} \chi_\mu(\lambda) \int_0^1 dX |\Delta(X)|^2 \det(1 - X)^M s_\mu(X). \quad (3.62)$$

Partimos agora para a parte radial da integral semiclássica, com respeito aos autovalores de X :

$$\mathcal{R}(M, N, \mu) = \int_0^1 dX |\Delta(X)|^2 \det(1 - X)^M s_\mu(X) \quad (3.63)$$

Notamos que essa integral é uma generalização da famosa integral de Selberg, conhecida como integral de Kadell e dada por [45]

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 J_\lambda^{(1/\lambda)}(t) \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1} (1 - t_i)^{\beta-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2\gamma} dt_1 \dots dt_n \quad (3.64)$$

cujos resultado é

$$\frac{\{\alpha + (n - 1)\gamma\}_\lambda^{(\gamma)}}{\{\alpha + \beta + 2(n - 1)\gamma\}_\lambda^{(\gamma)}} J_\lambda^{(1/\gamma)}(1^n) S_n(\alpha, \beta, \gamma) \quad (3.65)$$

em que $S_n(\alpha, \beta, \gamma)$ é o resultado da integral original de Selberg

$$S_n(\alpha, \beta, \gamma) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha + j\gamma)\Gamma(\beta + j\gamma)\Gamma(1 + (j+1)\gamma)}{\Gamma(\alpha + \beta + (n+j-1)\gamma)\Gamma(1 + \gamma)}. \quad (3.66)$$

$J_\lambda^{(1/\gamma)}$ é o polinômio simétrico de Jack [20], relacionado com a função de Schur quando $1/\gamma = 1$ por

$$J_\lambda^{(1)}(t) = H_\lambda s_\lambda(t) = \prod_{(i,j)} (\lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1) s_\lambda(t) \quad (3.67)$$

e o termo $\{x\}_\lambda^{(\gamma)}$ é definido pela equação (2.18).

Apesar de todos os detalhes acima, a integral de Kadell pode ser facilmente aplicada bastando relacionarmos alguns parâmetros. Como a nossa integral \mathcal{R} é N -dimensional, primeiro tomamos $N = n$. Já que o termo $t_i^{\alpha-1}$ não aparece na integral \mathcal{R} , tomamos $\alpha = 1$ para eliminá-lo da integral de Kadell. Sendo X uma matriz diagonal, o determinante $\det(1 - X)^M = \prod_{i=1}^N (1 - x_i)^M$, que corresponde exatamente ao termo $\prod_{i=1}^N (1 - t_i)^{\beta-1}$ quando $\beta = M + 1$. Finalmente, fazemos $\gamma = 1$ para que o polinômio de Jack J_λ seja proporcional à função de Schur e para que $\prod_{i < j} |t_i - t_j|^{2\gamma}$ seja igual a $|\Delta(X)|^2$, com $\lambda = \mu$. Além disso, quando $\gamma = 1$, o termo $\{x\}_\mu^{(\gamma)}$ é idêntico a $[x]_\mu$, dado por (3.61). Depois de fazermos todas essas mudanças de variáveis, a integral de Kadell fica idêntica à integral \mathcal{R} e, assim, resulta que

$$\mathcal{R}(M, N, \mu) = N! \frac{[N]_\mu}{[2N + M]_\mu} s_\mu(1^N) \prod_{j=0}^{N-1} \frac{(j!)^2 (M + j)!}{(M + N + j)!}. \quad (3.68)$$

A função de Schur $s_\mu(1^N)$, por sua vez, pode ser escrita como

$$s_\mu(1^N) = \frac{d_\mu [N]_\mu}{|\mu|!} \quad (3.69)$$

em que d_μ é a dimensão da classe da representação irredutível do grupo de permutação S_n indexada por μ [20]. Substituindo o resultado da integral \mathcal{R} , a função de Schur $s_\mu(1^N)$ e a constante de normalização \mathcal{Z} na expressão (3.62), chegamos na seguinte expressão para os momentos

$$\langle p_\lambda(\mathcal{T}) \rangle = \lim_{N \rightarrow 0} M^{N^2} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{(M + j)!}{(M + N + j)!} \frac{1}{n!} \sum_{\mu \vdash n} \frac{[N_1]_\mu [N_2]_\mu}{[2N + M]_\mu} \chi_\mu(\lambda) d_\mu. \quad (3.70)$$

Devemos agora tomar o limite $N \rightarrow 0$. Primeiro, o termo $M^{N^2} \rightarrow 1$. No caso do produto, esse limite deve ser feito mais cuidadosamente,

$$\prod_{j=0}^{N-1} \frac{(M + j)!}{(M + N + j)!} \rightarrow \prod_{j=0}^{N-1} \frac{(M + j)!}{(M + j)!} \rightarrow 1. \quad (3.71)$$

No caso do termo $[2N + M]_\mu$, como esse termo é um polinômio, então claramente $[2N + M]_\mu \rightarrow [M]_\mu$. Assim, obtemos [67]

$$\langle p_\lambda(\mathcal{T}) \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\mu \vdash n} \frac{[N_1]_\mu [N_2]_\mu}{[M]_\mu} \chi_\mu(\lambda) d_\mu. \quad (3.72)$$

Se escolhermos expressar os momentos em termos das funções de Schur, $\langle s_\lambda(\mathcal{T}) \rangle$, basta usarmos a expressão (1.40), que resulta em

$$\langle s_\mu(\mathcal{T}) \rangle = \frac{d_\mu [N_1]_\mu [N_2]_\mu}{n! [M]_\mu} \quad (3.73)$$

e exhibe uma forma mais compacta. Para as três primeiras partições, os momentos são:

$$\begin{aligned} \langle s_{(1)}(\mathcal{T}) \rangle &= \frac{N_1 N_2}{M} \\ \langle s_{(1,1)}(\mathcal{T}) \rangle &= \frac{N_1 N_2 (N_1 - 1)(N_2 - 1)}{M(M - 1)} \\ \langle s_{(2)}(\mathcal{T}) \rangle &= \frac{N_1 N_2 (N_1 + 1)(N_2 + 1)}{M(M + 1)}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Note que $\langle s_{(1)}(\mathcal{T}) \rangle = \langle p_{(1)}(\mathcal{T}) \rangle$ é idêntico ao primeiro momento no caso unitário usando a formulação de Richter e Sieber, equação (3.40). Esse resultado, Eq. (3.73), está em concordância com o resultado via RMT, Eq. (2.26). A partir desse resultado, calculamos todas as propriedades físicas relativas ao transporte.

Cavidades com Barreira de Tunelamento

Todos os resultados descritos até agora se aplicam ao caso ideal, nos quais as guias de onda se acoplam perfeitamente à cavidade. O acoplamento entre a guia de onda e a cavidade é um detalhe experimental que tem implicações físicas importantes. O acoplamento imperfeito frequentemente ocorre em experimentos de bilhares de microondas e pontos quânticos e, para tornarmos o tratamento teórico descrito acima de uso prático, é necessário incluir esse acoplamento imperfeito. Para isso, considera-se uma parede fina de potencial, em outras palavras, uma barreira de potencial localizada na interface entre a guia e a cavidade para modelar o acoplamento não ideal. Ao passar por essa barreira, a função de onda do elétron se divide numa parte transmitida e numa parte refletida. Essa barreira impõe uma taxa de tunelamento Γ_i para o elétron no i -ésimo canal de propagação, com $\Gamma_i = 1$ correspondendo ao caso ideal.

O primeiro resultado semiclássico tratando o problema com barreiras de tunelamento é devido a Whitney [75], no qual foram derivadas as regras diagramáticas para o transporte com barreiras. Além disso, contudo, apenas a primeira ordem em $1/M$ da condutância e shot-noise foram obtidas, em concordância com RMT. Posteriormente, a variância da condutância foi calculada [76] e a teoria pôde ser estendida para tratar a estatística do tempo de atraso e sistemas de Andreev [77, 78]. Em todos esses trabalhos, os resultados se restringem à primeira ordem em $1/M$, tanto para o caso de barreiras de tunelamento em uma das guias, quanto para ambas as guias, e o problema de obter uma expressão semiclássica com todas as ordens continuou em aberto.

Neste trabalho, nós avançamos o entendimento desse problema, obtendo uma expressão via abordagem semiclássica para os momentos do transporte de uma cavidade com barreira de tunelamento em uma das guias (a outra é mantida ideal), com probabilidades $\Gamma_i = \Gamma$ iguais em todos os canais. Essa expressão é dada por uma série de Taylor em γ , onde $\gamma = 1 - \Gamma$ é a probabilidade de reflexão do elétron na barreira, cujos coeficientes são funções racionais do número de canais M e, portanto, contém todas as ordens em $1/M$. Uma expressão para os momentos de um sistema com essa mesma configuração foi obtida usando teoria de matrizes aleatórias [52], Eq. (2.36), com a qual o nosso resultado semiclássico concorda até onde foi possível testar computacionalmente. As próximas seções são dedicadas para a derivação desse novo resultado semiclássico.

4.1 Regras Diagramáticas

Como dito anteriormente, a presença de barreiras de tunelamento, que impõem uma probabilidade de tunelamento Γ_i no i -ésimo canal, modifica as regras diagramáticas. Isso porque, ao passar pela barreira de tunelamento, a função de onda do elétron pode se dividir numa parte transmitida e numa parte refletida e isso modifica as correlações de ação [75]. Devemos considerar, portanto, nas regras diagramáticas a possibilidade de haver reflexão de trajetórias para o interior da cavidade.

Assumindo que a segunda guia de onda é ideal e que na primeira guia a taxa de tunelamento $\Gamma_i = \Gamma$ é a mesma para todos os canais, a contribuição de cada diagrama se torna:

- Cada link contribui com $[N_1(1 - \gamma) + N_2]^{-1} = [M - N_1\gamma]^{-1}$;
- Cada encontro contribui com $[-N_1(1 - \gamma^q) - N_2] = [-M + N_1\gamma^q]$, onde q é o número de trechos;
- $N_1(1 - \gamma)$ para cada par de trajetórias que entra na cavidade;
- N_2 para cada par de trajetórias que sai da cavidade;
- γ para cada reflexão na primeira guia de onda.

Para o cálculo da condutância, por exemplo, a primeira ordem em $1/M$ continua sendo dada pela aproximação diagonal em que as trajetórias $\alpha = \beta$. A contribuição desse diagrama passa a ser $N_1(1 - \gamma)N_2/(M - N_1\gamma)$ na presença da barreira. Para a potência $1/M^2$, contamos com o par de Richter-Sieber, que contém um encontro duplo e três links e contribui com

$$\frac{N_1(1 - \gamma)N_2(-M + N_1\gamma^2)}{(M - N_1\gamma)^3}. \quad (4.1)$$

A presença de barreiras de tunelamento produz novos diagramas. Para $1/M^2$, contamos mais um diagrama no qual as trajetórias sofrem uma reflexão. Esse diagrama está ilustrado na figura (14) e contribui com

$$\frac{N_1(1 - \gamma)\gamma N_2}{(M - N_1\gamma)^2}. \quad (4.2)$$

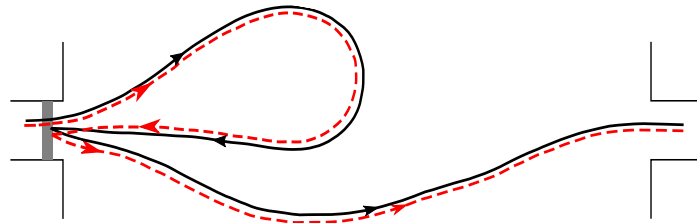


Figura 14: Trajetórias correlacionadas por ação que também contribuem para o termo $1/M^2$ da condutância. A barra cinza na primeira guia representa a barreira de tunelamento.

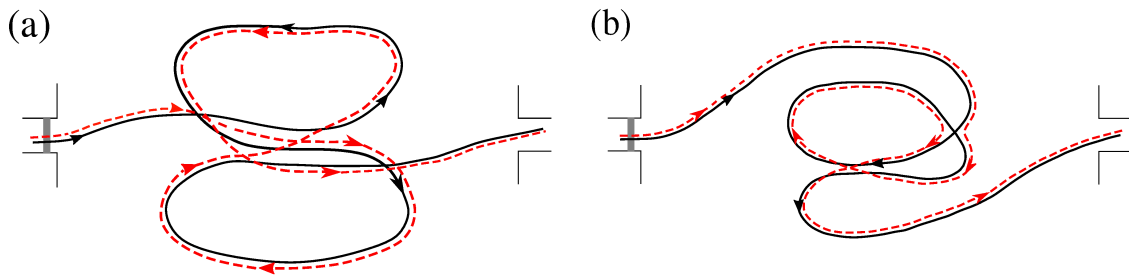


Figura 15: Trajetórias correlacionadas por ação que contribuem para a condutância com $1/M^3$ e diferem por um encontro triplo (a) e dois encontros duplos (b). A barra cinza na primeira guia de onda representa a barreira de tunelamento

Para $1/M^3$, como discutido no apêndice C e ilustrado na figura (15), temos um diagrama com um encontro triplo e quatro links e um diagrama com dois encontros duplos e cinco links, que contribuem com

$$\frac{N_1(1-\gamma)N_2(-M+N_1\gamma^3)}{(M+N_1\gamma)^4}, \quad \frac{N_1(1-\gamma)N_2(-M+N_1\gamma^2)^2}{(M+N_1\gamma)^5} \quad (4.3)$$

respectivamente. Outros dois diagramas para essa mesma ordem estão mostrados na figura (16). O primeiro contém três links, nenhum encontro e duas reflexões e o segundo contém quatro links, um encontro duplo e uma reflexão. As contribuições desses diagramas ainda para a condutância são

$$\frac{N_1(1-\gamma)\gamma^2 N_2}{(M-N_1\gamma)^3}, \quad \frac{N_1(1-\gamma)\gamma(-M+N_1\gamma^2)N_2}{(M-N_1\gamma)^4} \quad (4.4)$$

respectivamente.

Os pares de trajetórias correlacionadas podem ser representados por diagramas que são grafos de faixa. Essa representação também é muito útil e é equivalente à representação diagramática da fórmula de Wick. Nesses diagramas, novamente os encontros com q trechos se tornam vértices de valência $2q$ e os links se tornam faixas orientadas cujas bordas são a trajetória direta (linha cheia) e a trajetória parceira (linha tracejada). Os diagramas do tipo grafo de faixa das trajetórias nas figuras (15) e (16) estão mostrados nas figuras (17) e (18), respectivamente.

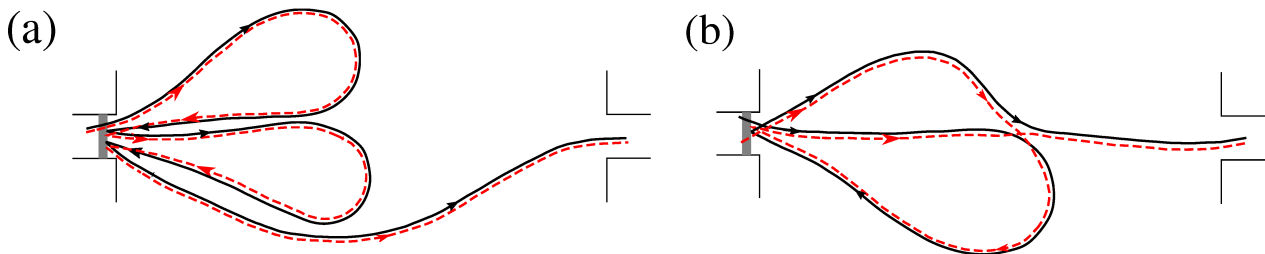


Figura 16: Trajetórias correlacionadas por ação que também contribuem para a condutância com $1/M^3$ e diferem por duas reflexões (a) e uma reflexão e um encontro duplo (b). A barra cinza na primeira guia representa a barreira de tunelamento.

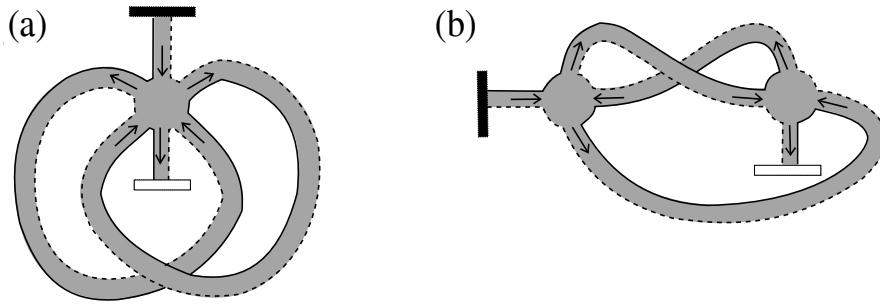


Figura 17: Diagramas de faixa correspondentes às trajetórias na figura (15). A barra preta representa a primeira guia com barreira de tunelamento e a barra transparente a segunda guia de onda. O encontro triplo se torna um vértice de valência 6 (a) e os encontros duplos se tornam vértices de valência 4 (b).

Para o primeiro par, figura (17), o encontro triplo se torna um vértice de valência 6, fig.17-(a), e os encontros duplos se tornam vértices de valência 4, fig.17-(b). Quando existe reflexão na barreira de tunelamento, isso pode ser interpretado como um encontro na guia de onda. Contudo, nesse caso especial, os encontros têm valência ímpar. No primeiro diagrama da figura (18), duas reflexões dão origem a um vértice com valência 5 e no segundo diagrama uma reflexão dá origem a um vértice com valência 3. A ocorrência desses pseudovértices de valência ímpar é um dos motivos por tornar o problema do transporte com barreiras mais complicado.

4.2 Inclusão da Barreira na Integral Matricial

Se não houvesse encontros nas guias de ondas, poderíamos propor a seguinte integral semi-clássica para os momentos

$$\lim_{N \rightarrow 0} \frac{(1 - \gamma)^n}{\mathcal{Z}} \int \exp \left[- \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - N_1 \gamma^q)}{q} \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^q] \right] \prod_{k=1}^n Z_{i_{\pi(k)}, o_k}^\dagger Z_{o_k, i_k} \quad (4.5)$$

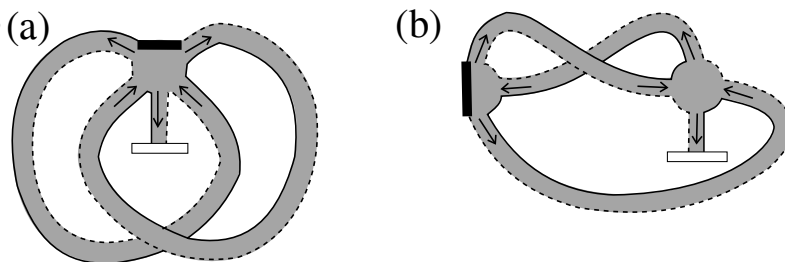


Figura 18: Diagramas correspondentes às trajetórias na figura (16). A barra preta representa a primeira guia com barreira de tunelamento e a barra transparente a segunda guia de onda. As reflexões são vistas como encontros que acontecem na primeira guia de onda e esses encontros têm valência ímpar.

com o termo de normalização

$$\mathcal{Z} = \int e^{-(M-N_1\gamma)\text{Tr}(Z^\dagger Z)} dZ = \frac{N!}{(M-N_1\gamma)^{N^2}} \prod_{j=1}^{N-1} (j!)^2. \quad (4.6)$$

O termo $(1-\gamma)^n$ dá a contribuição dos n pares de trajetórias entrando na cavidade pela barreira de tunelamento para o n -ésimo momento, segundo as regras diagramáticas. De forma análoga ao caso ideal, o produto entre a medida gaussiana $e^{-(M-N_1\gamma)\text{Tr}(Z^\dagger Z)}$ e a expansão em Taylor dos outros termos da exponencial produziria, através da fórmula de Wick, o termo $(M-N_1\gamma)^{-1}$ para cada faixa dos diagramas (link) e o termo $-M+N_1\gamma^q$ para cada vértice (encontro) de valência $2q$ e assim as regras diagramáticas estariam implementadas corretamente.

Entretanto, devemos agora incorporar encontros na primeira guia de onda. A informação sobre o que acontece nas guias de onda deve estar contida no fator $\prod_{k=1}^n Z_{i_{\pi(k)}, o_k}^\dagger Z_{o_k, i_k}$, já que cada elemento de matriz Z^\dagger é um par de trajetórias entrando na cavidade e cada elemento de matriz Z é um par de trajetórias saindo da cavidade. Portanto, esse termo deve ser modificado.

Quando um encontro acontece na guia de onda, um pseudovértice é produzido com valência ímpar. Se compararmos diagramas onde os encontros acontecem apenas no interior da cavidade (Figura 17) com diagramas que contêm encontro na guia (Figura 18), é como se um elemento de matriz Z fosse substituído por um elemento de $(ZZ^\dagger ZZ^\dagger Z)$ no diagrama 18-(a) e por um elemento de $(ZZ^\dagger Z)$ no diagrama 18-(b). Assim, para produzir um vértice de valência $2m+1$, devemos substituir Z por $Z(Z^\dagger Z)^m$. Como esses pseudovértices acontecem a partir de reflexões na barreira, esse termo deve estar acompanhado por um fator γ^m de acordo com as regras diagramáticas. De maneira geral, os encontros na guia são implementados por meio da série geométrica

$$\frac{1}{1-\gamma Z^\dagger Z} = 1 + \gamma Z^\dagger Z + \gamma^2 (Z^\dagger Z)^2 + \dots \quad (4.7)$$

que contém todos os possíveis números de reflexões na primeira guia de onda, com o fator γ dando a contribuição segundo as regras diagramáticas. Portanto, postulamos a seguinte integral

$$\left\langle \prod_{k=1}^n t_{i_{\pi(k)}, o_k}^\dagger t_{o_k, i_k} \right\rangle = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{(1-\gamma)^n}{\mathcal{Z}} \int e^{\left[-\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M-N_1\gamma^q)}{q} \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^q]\right]} \prod_{k=1}^n Z_{i_{\pi(k)}, o_k}^\dagger \left(Z \frac{1}{1-\gamma Z^\dagger Z} \right)_{o_k, i_k} dZ \quad (4.8)$$

perceba que quando $\gamma = 0$, recuperamos a integral matricial (3.41) do caso ideal.

4.3 Solução Exata

A nova integral matricial adaptada para o problema com uma barreira de tunelamento é mais complicada que a integral do caso ideal. Para resolvê-la, novamente introduzimos uma decomposição em valores singulares, $Z = UDV^\dagger$. A medida de integração dZ continua idêntica a do caso ideal,

equação (3.51). Começamos pela integral das variáveis angulares U e V sobre o grupo unitário $U(N)$. A integração é análoga ao caso ideal, sendo a única diferença a parte diagonal envolvendo a matriz $X = DD^\dagger$

$$\sum_{\vec{i}=1}^{N_1} \sum_{\vec{o}=1}^{N_2} \int dU dV \prod_{k=1}^n (VD^\dagger U^\dagger)_{i_{\pi(k)}, o_k} \left(UD \frac{1}{1 - \gamma X} V^\dagger \right)_{o_k, i_k} \quad (4.9)$$

que é igual a

$$\sum_{\mu \vdash n} \frac{[N_1]_\mu [N_2]_\mu}{[N]_\mu^2} \chi_\mu(\lambda) s_\mu \left(\frac{X}{1 - \gamma X} \right). \quad (4.10)$$

Partindo para a parte radial da integral, isto é, a integral sobre a matriz diagonal X , reescrevemos a exponencial da seguinte maneira

$$e \left[- \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - N_1 \gamma^q)}{q} \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^q] \right] = e \left[-M \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\text{Tr}(X)^q}{q} \right] e \left[N_1 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\gamma^q \text{Tr}(X)^q}{q} \right] = e \left[-M \text{Tr} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(X)^q}{q} \right] e \left[N_1 \text{Tr} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(\gamma X)^q}{q} \right] \quad (4.11)$$

onde escrevemos $Z^\dagger Z = V X V^\dagger$ e usamos a invariância por transformação unitária do traço. Reconhecemos novamente a expansão em série de Taylor da função $-\ln(1 - x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ no argumento das exponenciais e assim obtemos

$$e \left[- \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(M - N_1 \gamma^q)}{q} \text{Tr}[(Z^\dagger Z)^q] \right] = \det(1 - X)^M \det(1 - \gamma X)^{-N_1} \quad (4.12)$$

Com isso, chegamos na seguinte integral radial

$$\int_0^1 dX |\Delta(X)|^2 \det(1 - X)^M \det(1 - \gamma X)^{-N_1} s_\mu \left(\frac{X}{1 - \gamma X} \right) \quad (4.13)$$

em que $|\Delta(X)|^2$ é o jacobiano da decomposição em valores singulares. Reescrevemos agora o segundo determinante usando a identidade de Cauchy [20]. A identidade de Cauchy é dada por

$$\sum_{\omega} s_{\omega}(x) s_{\omega}(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} \quad (4.14)$$

na qual a soma infinita sobre ω é feita sobre todas as partições possíveis. Como a matriz X é diagonal, então o determinante $\det(1 - \gamma X)^{-N_1}$ é o produtório dos elementos da matriz diagonal $1 - \gamma X$, ou seja,

$$\det(1 - \gamma)^{-N_1} = \prod_{i=1}^N \frac{1}{(1 - \gamma x_i)^{N_1}}. \quad (4.15)$$

Na identidade de Cauchy, podemos então escolher a variável y como N_1 variáveis $y_i = \gamma$ e assim teremos

$$\det(1 - \gamma X)^{-N_1} = \sum_{\omega} s_{\omega}(\gamma) s_{\omega}(X) \quad (4.16)$$

com a soma sendo infinita. A primeira função de Schur, $s_\omega(\gamma)$, tem como argumento N_1 variáveis iguais a γ . A função de Schur com o argumento complicado na integral radial, por sua vez, pode ser expandida através da seguinte expressão

$$s_\mu \left(\frac{X}{1 - \gamma X} \right) = \sum_{\rho \supset \mu} \gamma^{|\rho| - |\mu|} A_{\mu\rho} s_\rho(X) \quad (4.17)$$

onde os coeficientes $A_{\mu\rho}$ da expansão são dados por um determinante cujos elementos de matriz são binômios

$$A_{\mu\rho} = \det \left(\left(\begin{array}{c} \rho_i - i \\ \mu_j - j \end{array} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq \ell(\rho)}. \quad (4.18)$$

Essa expansão é chave na resolução do problema e foi derivada no apêndice E. A partir dessas expansões, a integral radial é escrita como

$$\sum_{\omega} s_\omega(\gamma) \sum_{\rho \supset \mu} \gamma^{|\rho| - |\mu|} A_{\mu\rho} \int_0^1 dX |\Delta(X)|^2 \det(1 - X)^M s_\omega(X) s_\rho(X). \quad (4.19)$$

Usamos agora a expansão (1.52) em funções de Schur e coeficientes de Littlewood-Richardson para escrever o produto

$$s_\omega(X) s_\rho(X) = \sum_{\nu} C_{\omega, \rho}^{\nu} s_\nu(X) \quad (4.20)$$

com a soma sendo feita sobre todas as partições $\nu \vdash |\omega| + |\rho|$ segundo a regra de Littlewood-Richardson. Obtemos então a integral

$$\sum_{\omega} s_\omega(\gamma) \sum_{\rho \supset \mu} \gamma^{|\rho| - |\mu|} A_{\mu\rho} \sum_{\nu} C_{\omega, \rho}^{\nu} \int_0^1 dX |\Delta(X)|^2 \det(1 - X)^M s_\nu(X). \quad (4.21)$$

A integral na expressão acima é nada mais que a mesma generalização da integral de Selberg discutida anteriormente no caso ideal, chamada integral de Kadell. Aplicando o resultado, obtemos:

$$\frac{1}{Z} \int_0^1 dX |\Delta(X)|^2 \det(1 - X)^M s_\nu(X) = (M - N_1 \gamma)^{N^2} \frac{d_\nu [N]_\nu^2}{|\nu|! [2N + M]_\nu} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{(M + j)!}{(M + N + j)!}. \quad (4.22)$$

Podemos previamente nos livrar de alguns termos no resultado acima tomando o limite $N \rightarrow 0$. Claramente o termo $(M - N_1 \gamma)^{N^2} \rightarrow 1$ e também

$$\prod_{j=0}^{N-1} \frac{(M + j)!}{(M + N + j)!} \rightarrow \prod_{j=0}^{N-1} \frac{(M + j)!}{(M + j)!} \rightarrow 1 \quad (4.23)$$

$$[2N + M]_\nu \rightarrow [M]_\nu. \quad (4.24)$$

Coletando todas as partes da integral matricial, chegamos na seguinte expressão para os momentos

$$\langle p_\lambda(\mathcal{T}) \rangle = \lim_{N \rightarrow 0} (1 - \gamma)^n \sum_{\mu \vdash n} \frac{[N_1]_\mu [N_2]_\mu}{[N]_\mu^2} \chi_\mu(\lambda) \sum_{\omega} s_\omega(\gamma) \sum_{\rho \supset \mu} \gamma^{|\rho| - |\mu|} A_{\mu\rho} \sum_{\nu} C_{\omega, \rho}^{\nu} \frac{d_\nu [N]_\nu^2}{|\nu|! [M]_\nu} \quad (4.25)$$

perceba que o limite $N \rightarrow 0$ permanece por ainda haver termos que dependem de N .

4.3.1 Simplificações

É possível simplificar a expressão acima notando primeiramente a seguinte identidade [20]

$$\sum_{\omega} s_{\omega}(\gamma) C_{\omega, \rho}^{\nu} = s_{\nu/\rho}(\gamma) = \gamma^{|\nu|-|\rho|} s_{\nu/\rho}(1^{N_1}) \quad (4.26)$$

em que $s_{\nu/\rho}(1^{N_1})$ é uma função de Schur enviesada com N_1 variáveis iguais a 1. Através da fórmula de Jacobi-Trudi, essa função de Schur enviesada pode ser escrita como

$$s_{\nu/\rho}(1^{N_1}) = \det \left(\begin{pmatrix} N_1 + \nu_i - i - \rho_j + j - 1 \\ \nu_i - i - \rho_j + j \end{pmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq \ell(\nu)} \quad (4.27)$$

e assim, teremos

$$\langle p_{\lambda}(\mathcal{T}) \rangle = \lim_{N \rightarrow 0} (1 - \gamma)^n \sum_{\mu \vdash n} \frac{[N_1]_{\mu} [N_2]_{\mu}}{[N]_{\mu}^2} \chi_{\mu}(\lambda) \sum_{\nu \supset \mu} \gamma^{|\nu|-n} E_{\mu\nu}(N_1) \frac{d_{\nu} [N_1]_{\nu}^2}{|\nu|! [M]_{\nu}} \quad (4.28)$$

onde

$$E_{\mu\nu}(N_1) = \sum_{\mu \subset \rho \subset \nu} A_{\mu\rho} s_{\nu/\rho}(1^{N_1}). \quad (4.29)$$

A soma na expressão acima é feita sobre todas as partições ρ que estão contidas em ν e ao mesmo tempo contêm μ . A relação $\mu \subset \rho$ deriva da expressão (4.17) e a relação $\rho \subset \nu$ deriva de (4.20). O termo $E_{\mu\nu}(N_1)$ pode ser calculado usando o lema 9.1 da referência [79], que é uma versão da fórmula de Cauchy-Binet. Esse lema afirma que se

$$H_{\nu\mu} = \sum_{\rho} F_{\nu\rho} G_{\rho\mu} \quad (4.30)$$

em que os termos $F_{\nu\rho}$ e $G_{\rho\mu}$ são determinantes da forma

$$F_{\nu\rho} = \det(f_{\nu_i - i, \rho_j - j}) \quad (4.31)$$

$$G_{\rho\mu} = \det(g_{\rho_i - i, \mu_j - j}), \quad (4.32)$$

então

$$H_{\nu\mu} = \det \left(\sum_k f_{\nu_i - i, k} g_{k, \mu_j - j} \right). \quad (4.33)$$

Aplicado ao nosso problema, esse lema nos dá a seguinte expressão

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu}(N_1) &= \det \left(\sum_k \begin{pmatrix} N_1 + \nu_i - i - k - 1 \\ \nu_i - i - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ \mu_j - j \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} N_1 + \nu_i - i \\ N_1 + \mu_j - j \end{pmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq \ell(\nu)} = \frac{[N_1]_{\nu}}{[N_1]_{\mu}} \frac{d_{\nu/\mu}}{(|\nu| - n)!} \end{aligned} \quad (4.34)$$

deduzida no apêndice F. Substituindo na expressão dos momentos, temos

$$\langle p_\lambda(\mathcal{T}) \rangle = \lim_{N \rightarrow 0} (1 - \gamma)^n \sum_{\mu \vdash n} \frac{[N_1]_\mu [N_2]_\mu}{[N]_\mu^2} \chi_\mu(\lambda) \sum_{\nu \supset \mu} \gamma^{|\nu| - n} \frac{[N_1]_\nu}{[N_1]_\mu} \frac{d_{\nu/\mu}}{(|\nu| - n)!} \frac{d_\nu [N]_\nu^2}{|\nu|! [M]_\nu}. \quad (4.35)$$

Como a soma em ν é sobre todas as partições que contêm μ , começando com $\nu = \mu$, então a diferença $|\nu| - n$ se estenderá de zero a infinito. Assim, fazendo as simplificações, podemos escrever a expressão para os momentos da seguinte maneira

$$\langle p_\lambda(\mathcal{T}) \rangle = \lim_{N \rightarrow 0} (1 - \gamma)^n \sum_{\mu \vdash n} \frac{[N_2]_\mu}{[N]_\mu^2} \chi_\mu(\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma^m}{m!} \sum_{\substack{\nu \vdash n+m \\ \nu \supset \mu}} \frac{[N_1]_\nu}{[M]_\nu} \frac{d_\nu d_{\nu/\mu}}{|\nu|!} [N]_\nu^2. \quad (4.36)$$

Devemos agora lidar com o limite

$$\lim_{N \rightarrow 0} \frac{[N]_\nu}{[N]_\mu}. \quad (4.37)$$

Para N pequeno, nós sabemos da expressão de $[N]_\lambda$ em termos dos conteúdos de λ que

$$[N]_\lambda \sim t_\lambda N^{D(\lambda)} + O(N^{D(\lambda)+1}) \quad (4.38)$$

em que t_λ é o produto de todos os conteúdos não nulos

$$t_\lambda = \prod_{\substack{(i,j) \in \lambda \\ i \neq j}} (j - i) \quad (4.39)$$

e $D(\lambda)$ é o tamanho do quadrado de Durfee de λ , isto é, o comprimento do lado do maior diagrama quadrado contido em λ . Como $\nu \supset \rho$ devido à expressão (4.20) e $\rho \supset \mu$ devido à expressão (4.17), então temos que $D(\nu) \geq D(\mu)$. Por essa razão o limite existe e só é diferente de zero se $D(\nu) = D(\mu)$.

Logo

$$\lim_{N \rightarrow 0} \frac{[N]_\nu}{[N]_\mu} = \frac{t_\nu}{t_\mu} \equiv t_{\nu/\mu}. \quad (4.40)$$

As definições e expressões utilizadas no cálculo do limite estão explicadas no apêndice G. Finalmente, chegamos na seguinte expressão para os momentos do transporte

$$\langle p_\lambda(\mathcal{T}) \rangle = (1 - \gamma)^n \sum_{\mu \vdash n} [N_2]_\mu \chi_\mu(\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma^m}{m!} \sum_{\substack{\nu \vdash n+m \\ \nu \supset \mu \\ D(\nu)=D(\mu)}} \frac{[N_1]_\nu}{[M]_\nu} \frac{d_\nu d_{\nu/\mu}}{|\nu|!} t_{\nu/\mu}^2. \quad (4.41)$$

Em termos da função de Schur, temos uma expressão mais compacta

$$\langle s_\mu(\mathcal{T}) \rangle = (1 - \gamma)^n [N_2]_\mu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma^m}{m!} \sum_{\substack{\nu \vdash n+m \\ \nu \supset \mu \\ D(\nu)=D(\mu)}} \frac{[N_1]_\nu}{[M]_\nu} \frac{d_\nu d_{\nu/\mu}}{|\nu|!} t_{\nu/\mu}^2. \quad (4.42)$$

O termo $m = 0$ corresponde a $\nu = \mu$ e coincide com o resultado para o caso ideal. Essa expressão é surpreendentemente mais simples que a expressão obtida para o mesmo problema via RMT, equação

(2.36). Isso porque o resultado da equação (2.36) contém coeficientes de Littlewood-Richardson, que não possuem uma fórmula explícita, enquanto todas as quantidades do lado direito na equação (4.42) possuem uma fórmula. A demonstração de que ambas as expressões são equivalentes não é nem um pouco trivial, mas verificamos que isso, de fato, é verdade até $n = 5$ e para todas as ordens em γ até 6.

Em particular, podemos escrever uma fórmula simples para a condutância média. Quando $\mu = (1)$, verifica-se que partição ν deve ser um gancho, ou seja, deve ter a forma $\nu = (m + 1 - k, 1^k)$, com k indo de 0 a m . A notação 1^k significa uma sequência de k partes iguais a 1. A razão disso é o fato de que $D(\nu) = D(1)$. Além disso, quando $\mu = (1)$, temos neste caso:

$$d_{\nu/(1)} = d_\nu = \binom{m}{k} \quad (4.43)$$

ou seja, o número de tabelas de Young padrão de formato $\nu/(1)$ é igual ao número de tabelas de Young padrão de formato ν . O produto de todos os conteúdos não nulos será $t_{\nu/(1)} = (-1)^k (m - k)! k!$. Com isso, após algumas manipulações, obtemos a seguinte expressão para a condutância média

$$\langle s_{(1)}(\mathcal{T}) \rangle = (1 - \gamma) \frac{N_1 N_2}{M} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma^m}{m + 1} \sum_{k=0}^m \frac{(N_1 + 1)^{(m-k)} (N_1 - 1)_k}{(M + 1)^{(m-k)} (M - 1)_k} \quad (4.44)$$

em que $a^{(n)}$ e $(a)_n$ são os fatoriais crescente e decrescente, respectivamente

$$\begin{aligned} a^{(n)} &= a(a + 1) \cdots (a + (n - 1)) \\ (a)_n &= a(a - 1) \cdots (a - (n - 1)). \end{aligned} \quad (4.45)$$

A expressão da condutância avaliada no regime assintótico de muitos canais $N_1, N_2 \gg 1$ é conhecida da RMT para sistemas sem simetria de reversão-temporal, sendo [47, 52]

$$\langle s_{(1)}(\mathcal{T}) \rangle = \frac{(1 - \gamma) N_1 N_2}{M - \gamma N_1} + \mathcal{O}(M^{-1}) \quad (4.46)$$

com o qual, o nosso resultado também concorda. Esse regime pode ser facilmente avaliado na expressão (4.44) notando que

$$\sum_{k=0}^m \frac{(N_1 + 1)^{m-k} (N_1 - 1)_k}{(M + 1)^{m-k} (M - 1)_k} \approx \sum_{k=0}^m \frac{N_1^{m-k} N_1^k}{M^{m-k} M^k} = \sum_{k=0}^m \frac{N_1^m}{M^m} = (m + 1) \frac{N_1^m}{M^m} \quad (4.47)$$

nesse regime. Com isso, temos

$$\langle s_{(1)}(\mathcal{T}) \rangle \approx (1 - \gamma) \frac{N_1 N_2}{M} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m \frac{N_1^m}{M^m}. \quad (4.48)$$

Identificando a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, chegamos no mesmo resultado da RMT

$$\lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \langle s_{(1)}(\mathcal{T}) \rangle \approx \frac{(1 - \gamma) N_1 N_2}{M - \gamma N_1}. \quad (4.49)$$

Conclusão

Um problema experimental frequente em experimentos envolvendo pontos quânticos e bilhares de microondas é o acoplamento entre os *gates*, por onde os fótons ou os elétrons são guiados, e o sistema. Esse acoplamento deve ser levado em conta nas descrições teóricas do transporte quântico nesses sistemas se uma concordância melhor entre teoria e experimento é desejada.

Usando uma formulação em termos de integrais matriciais, foi desenvolvida uma abordagem semiclássica para o transporte quântico caótico com barreira de tunelamento em uma das guias de ondas. O resultado obtido, Eq. (4.42), incorpora a barreira de forma perturbativa como uma série de potências, mas é exato no número de canais, ou seja, é válida também no regime quântico de poucos canais.

Concordância exata foi encontrada, até onde foi possível calcular, com o resultado correspondente da RMT [52]. Surpreendentemente, a expressão semiclássica para os momentos do transporte é muito mais simples que a expressão da RMT, que não é muito explícita já que envolve coeficientes de Littlewood-Richardson. Em particular, uma excelente fórmula semiclássica para a condutância foi encontrada sem o envolvimento de partições. O resultado derivado neste trabalho representa um avanço no entendimento do problema do transporte quântico caótico com barreiras de tunelamento, uma vez que até o momento apenas as primeiras ordens em $1/M$ são conhecidas da teoria semiclássica.

Mencionamos o fato de que a nova integral matricial que incorpora a barreira na primeira guia pode ser facilmente adaptada para tratar da estatística do transporte envolvendo matrizes de espalhamento em diferentes energias. O valor médio de quantidades envolvendo uma matriz S de energia E e a conjugada transposta S^\dagger de energia $E + \epsilon$ poderá ser calculado bastando substituir $M - N_1\gamma^q$ por $M(1 - iq\epsilon) - N_1\gamma^q$ no expoente da expressão (4.8). Os cálculos procederiam de forma similar aos momentos do transporte.

Além disso, uma extensão deste trabalho seria o tratamento de sistemas invariantes por reversão-temporal. Como discutido em [68, 70], a abordagem via modelo matricial pode ser usada neste caso substituindo as matrizes complexas por reais e as funções de Schur por polinômios zonais.

Publicação Relacionada à Dissertação

Pedro H. S. Bento, M. Novaes, *Semiclassical treatment of quantum chaotic transport with a tunnel barrier*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **54** 125201 (2021)

Referências

- [1] L. Reichl, *The transition to chaos: conservative classical systems and quantum manifestations*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] A. Abul-Magd, Modeling highway-traffic headway distributions using superstatistics, *Physical Review E* 76 (5) (2007) 057101. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.057101>.
- [3] A. Adewumi, J. Kagamba, A. Alochukwu, Application of chaos theory in the prediction of motorised traffic flows on urban networks, *Mathematical Problems in Engineering* 2016. doi:<https://doi.org/10.1155/2016/5656734>.
- [4] P. Shang, X. Li, S. Kamae, Chaotic analysis of traffic time series, *Chaos, Solitons & Fractals* 25 (1) (2005) 121–128. doi:<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.09.104>.
- [5] M. C. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanics*, Vol. 1, Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] F. Haake, *Quantum signatures of chaos*, Springer, 1991. doi:https://doi.org/10.1007/978-1-4899-3698-1_38.
- [7] D. Shepelyansky, Microwave ionization of hydrogen atoms, *Scholarpedia* 7 (1) (2012) 9795. doi:<https://doi.org/10.4249/scholarpedia.9795>.
- [8] H.-J. Stöckmann, Microwave billiards and quantum chaos, *Scholarpedia* 5 (10) (2010) 10243. doi:<https://doi.org/10.4249/scholarpedia.10243>.
- [9] M. Raizen, D. A. Steck, Cold atom experiments in quantum chaos, *Scholarpedia* 6 (11) (2011) 10468. doi:<https://doi.org/10.4249/scholarpedia.10468>.
- [10] R. A. Jalabert, Mesoscopic transport and quantum chaos, arXiv preprint arXiv:1601.02237.
- [11] A. A. Kozikov, C. Rössler, T. Ihn, K. Ensslin, C. Reichl, W. Wegscheider, Interference of electrons in backscattering through a quantum point contact, *New Journal of Physics* 15 (1) (2013) 013056. doi:<https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/1/013056>.

- [12] C. Marcus, A. Rimberg, R. Westervelt, P. Hopkins, A. Gossard, Conductance fluctuations and chaotic scattering in ballistic microstructures, *Physical Review Letters* 69 (3) (1992) 506. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.506>.
- [13] R. Landauer, Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction, *IBM Journal of research and development* 1 (3) (1957) 223–231. doi:<https://doi.org/10.1147/rd.13.0223>.
- [14] M. Büttiker, Scattering theory of thermal and excess noise in open conductors, *Physical Review Letters* 65 (23) (1990) 2901. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.65.2901>.
- [15] C. W. Beenakker, Random-matrix theory of quantum transport, *Reviews of Modern Physics* 69 (3) (1997) 731. doi:<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.69.731>.
- [16] S. Müller, S. Heusler, P. Braun, F. Haake, Semiclassical approach to chaotic quantum transport, *New Journal of Physics* 9 (1) (2007) 12. doi:<https://doi.org/10.1088/1367-2630/9/1/012>.
- [17] M. V. Berry, The bakerian lecture, 1987. quantum chaology, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 413 (1844) (1987) 183–198. doi:<https://doi.org/10.1098/rspa.1987.0109>.
- [18] S. Gustavsson, R. Leturcq, B. Simovič, R. Schleser, T. Ihn, P. Studerus, K. Ensslin, D. Driscoll, A. Gossard, Counting statistics of single electron transport in a quantum dot, *Physical Review Letters* 96 (7) (2006) 076605. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.076605>.
- [19] S. Gustavsson, R. Leturcq, T. Ihn, K. Ensslin, M. Reinwald, W. Wegscheider, Measurements of higher-order noise correlations in a quantum dot with a finite bandwidth detector, *Physical Review B* 75 (7) (2007) 075314. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.075314>.
- [20] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford University Press, 1998. doi:<https://doi.org/10.1090/ulect/012>.
- [21] E. S. Meckes, *The random matrix theory of the classical compact groups*, Cambridge University Press, 2019. doi:<https://doi.org/10.1017/9781108303453>.
- [22] C. Andréief, Note sur une relation les intégrales définies des produits des fonctions, *Mém. de la Soc. Sci. Bordeaux* 2 (1) (1883) 1–14. doi:<https://doi.org/10.1007/BF02612154>.
- [23] W. Fulton, *Young tableaux: With applications to representation theory and geometry*, London Mathematical Society Student Texts 35 (1997). doi:<https://doi.org/10.1017/CB09780511626241>.
- [24] A. Zvonkin, Matrix integrals and map enumeration: an accessible introduction, *Mathematical and Computer Modelling* 26 (8-10) (1997) 281–304. doi:[https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(97\)00210-0](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(97)00210-0).

- [25] G. 't Hooft, A planar diagram theory for strong interactions, in: *The Large N Expansion In Quantum Field Theory And Statistical Physics: From Spin Systems to 2-Dimensional Gravity*, World Scientific, 1993, pp. 80–92. doi:https://doi.org/10.1142/9789814365802_0007.
- [26] D. Bessis, C. Itzykson, J.-B. Zuber, Quantum field theory techniques in graphical enumeration, *Advances in Applied Mathematics* 1 (2) (1980) 109–157. doi:[https://doi.org/10.1016/0196-8858\(80\)90008-1](https://doi.org/10.1016/0196-8858(80)90008-1).
- [27] P. Di Francesco, 2d quantum gravity, matrix models and graph combinatorics, in: *Applications of random matrices in physics*, Springer, 2006, pp. 33–88. doi:https://doi.org/10.1007/1-4020-4531-X_2.
- [28] E. Fermi, E. Amaldi, O. D'Agostino, F. Rasetti, E. Segrè, Artificial radioactivity produced by neutron bombardment, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 146 (857) (1934) 483–500. doi:<https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0168>.
- [29] E. Amaldi, O. d'Agostino, E. Fermi, B. Pontecorvo, F. Rasetti, E. Segrè, Artificial radioactivity produced by neutron bombardment—II, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences* 149 (868) (1935) 522–558. doi:<https://doi.org/10.1098/rspa.1935.0080>.
- [30] N. Bohr, Neutron capture and nuclear constitution, *Nature* (137) (1936) 344–348. doi:<https://doi.org/10.1038/137344a0>.
- [31] E. P. Wigner, Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions, *Annals of Mathematics* 62 (3) (1955) 548–564. doi:<https://doi.org/10.2307/1970079>.
- [32] E. Wigner, *Group theory: and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*, Vol. 5, Elsevier, 1959.
- [33] C. Beenakker, Universality in the random-matrix theory of quantum transport, *Physical Review Letters* 70 (8) (1993) 1155. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1155>.
- [34] H. U. Baranger, P. A. Mello, Mesoscopic transport through chaotic cavities: A random S-matrix theory approach, *Physical Review Letters* 73 (1) (1994) 142. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.142>.
- [35] R. Jalabert, J.-L. Pichard, C. Beenakker, Universal quantum signatures of chaos in ballistic transport, *EPL (Europhysics Letters)* 27 (4) (1994) 255. doi:<https://doi.org/10.1209/0295-5075/27/4/001>.
- [36] H.-J. Sommers, W. Wiczorek, D. Savin, Statistics of conductance and shot-noise power for chaotic cavities, preprint arXiv:0710.5370.

- [37] D. Savin, H.-J. Sommers, W. Wieczorek, Nonlinear statistics of quantum transport in chaotic cavities, *Physical Review B* 77 (12) (2008) 125332. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.125332>.
- [38] M. Novaes, Statistics of quantum transport in chaotic cavities with broken time-reversal symmetry, *Physical Review B* 78 (3) (2008) 035337. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.035337>.
- [39] B. Khoruzhenko, D. Savin, H.-J. Sommers, Systematic approach to statistics of conductance and shot-noise in chaotic cavities, *Physical Review B* 80 (12) (2009) 125301. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.80.125301>.
- [40] G. Livan, P. Vivo, Moments of Wishart-Laguerre and Jacobi ensembles of random matrices: application to the quantum transport problem in chaotic cavities, preprint arXiv:1103.2638.
- [41] F. Mezzadri, N. Simm, Moments of the transmission eigenvalues, proper delay times, and random matrix theory. i, *Journal of Mathematical Physics* 52 (10) (2011) 103511. doi:<https://doi.org/10.1063/1.3644378>.
- [42] D. Savin, H.-J. Sommers, Shot noise in chaotic cavities with an arbitrary number of open channels, *Physical Review B* 73 (8) (2006) 081307. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.73.081307>.
- [43] P. J. Forrester, Quantum conductance problems and the Jacobi ensemble, *Journal of Physics A: Mathematical and General* 39 (22) (2006) 6861. doi:<https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/22/004>.
- [44] A. Selberg, Remarks on a multiple integral, *Norsk Mat. Tidsskr.* 26 (1944) 71–78.
- [45] P. Forrester, S. Warnaar, The importance of the selberg integral, *Bulletin of the American Mathematical Society* 45 (4) (2008) 489–534. doi:<https://doi.org/10.1090/S0273-0979-08-01221-4>.
- [46] P. Brouwer, Generalized circular ensemble of scattering matrices for a chaotic cavity with nonideal leads, *Physical Review B* 51 (23) (1995) 16878. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.51.16878>.
- [47] P. Brouwer, C. Beenakker, Diagrammatic method of integration over the unitary group, with applications to quantum transport in mesoscopic systems, *Journal of Mathematical Physics* 37 (10) (1996) 4904–4934. doi:<https://doi.org/10.1063/1.531667>.
- [48] J. Ramos, A. Barbosa, A. Macêdo, Quantum interference correction to the shot-noise power in nonideal chaotic cavities, *Physical Review B* 78 (23) (2008) 235305. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.235305>.

- [49] A. Barbosa, J. Ramos, A. Macêdo, Average shot-noise power via a diagrammatic method, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 43 (7) (2010) 075101. doi:<https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/7/075101>.
- [50] P. Vidal, E. Kanzieper, Statistics of reflection eigenvalues in chaotic cavities with nonideal leads, *Physical Review Letters* 108 (20) (2012) 206806. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.206806>.
- [51] A. Jarosz, P. Vidal, E. Kanzieper, Random matrix theory of quantum transport in chaotic cavities with nonideal leads, *Physical Review B* 91 (18) (2015) 180203. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.91.180203>.
- [52] S. Rodríguez-Pérez, R. Marino, M. Novaes, P. Vivo, Statistics of quantum transport in weakly nonideal chaotic cavities, *Physical Review E* 88 (5) (2013) 052912. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.052912>.
- [53] I. Adagideli, Ehrenfest-time-dependent suppression of weak localization, *Physical Review B* 68 (23) (2003) 233308. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.68.233308>.
- [54] S. Rahav, P. W. Brouwer, Ehrenfest-time dependence of weak localization in open quantum dots, *Physical Review Letters* 95 (5) (2005) 056806. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.056806>.
- [55] R. S. Whitney, P. Jacquod, Shot noise in semiclassical chaotic cavities, *Physical Review Letters* 96 (20) (2006) 206804. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.206804>.
- [56] D. Waltner, J. Kuipers, K. Richter, Ehrenfest-time dependence of counting statistics for chaotic ballistic systems, *Physical Review B* 83 (19) (2011) 195315. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.83.195315>.
- [57] M. Sieber, K. Richter, Correlations between periodic orbits and their rôle in spectral statistics, *Physica Scripta* 2001 (T90) (2001) 128. doi:<https://doi.org/10.1238/Physica.Topical.090a00128>.
- [58] K. Richter, M. Sieber, Semiclassical theory of chaotic quantum transport, *Physical Review Letters* 89 (20) (2002) 206801. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.206801>.
- [59] S. Heusler, S. Müller, P. Braun, F. Haake, Semiclassical theory of chaotic conductors, *Physical Review Letters* 96 (6) (2006) 066804. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.066804>.
- [60] P. Braun, S. Heusler, S. Müller, F. Haake, Semiclassical prediction for shot noise in chaotic cavities, *Journal of Physics A: Mathematical and General* 39 (11) (2006) L159. doi:<https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/11/L01>.

- [61] J. Hannay, A. O. De Almeida, Periodic orbits and a correlation function for the semiclassical density of states, *Journal of Physics A: Mathematical and General* 17 (18) (1984) 3429. doi:<https://doi.org/10.1088/0305-4470/17/18/013>.
- [62] S. Müller, Periodic-orbit approach to universality in quantum chaos, arXiv preprint [nlin/0512058](https://arxiv.org/abs/nlin/0512058).
- [63] D. Spehner, Spectral form factor of hyperbolic systems: leading off-diagonal approximation, *Journal of Physics A: Mathematical and General* 36 (26) (2003) 7269. doi:<https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/26/304>.
- [64] S. Müller, S. Heusler, P. Braun, F. Haake, A. Altland, Periodic-orbit theory of universality in quantum chaos, *Physical Review E* 72 (4) (2005) 046207. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.046207>.
- [65] O. Bohigas, M. Giannoni, C. Schmit, Spectral properties of the laplacian and random matrix theories, *Journal de Physique Lettres* 45 (21) (1984) 1015–1022. doi:<https://doi.org/10.1051/jphyslet:0198400450210101500>.
- [66] G. Berkolaiko, J. Harrison, M. Novaes, Full counting statistics of chaotic cavities from classical action correlations, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 41 (36) (2008) 365102. doi:<https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/36/365102>.
- [67] M. Novaes, A semiclassical matrix model for quantum chaotic transport, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 46 (50) (2013) 502002. doi:<https://doi.org/10.1088/1751-8113/46/50/502002>.
- [68] M. Novaes, Semiclassical matrix model for quantum chaotic transport with time-reversal symmetry, *Annals of Physics* 361 (2015) 51–61. doi:<https://doi.org/10.1016/j.aop.2015.06.007>.
- [69] M. Novaes, Statistics of time delay and scattering correlation functions in chaotic systems. ii. semiclassical approximation, *Journal of Mathematical Physics* 56 (6) (2015) 062109. doi:<https://doi.org/10.1063/1.4922745>.
- [70] M. Novaes, Energy-dependent correlations in the S-matrix of chaotic systems, *Journal of Mathematical Physics* 57 (2016) 122105. doi:<https://doi.org/10.1063/1.4972288>.
- [71] T. Morris, Chequered surfaces and complex matrices, *Nuclear Physics B* 356 (3) (1991) 703–728. doi:[https://doi.org/10.1016/0550-3213\(91\)90383-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90383-9).
- [72] S. Samuel, $U(N)$ integrals, $1/N$, and the De Wit–t Hooft anomalies, *Journal of Mathematical Physics* 21 (12) (1980) 2695–2703. doi:<https://doi.org/10.1063/1.524386>.
- [73] B. Collins, Moments and cumulants of polynomial random variables on unitary groups, the Itzykson-Zuber integral, and free probability, *International Mathematics Research Notices* 2003 (17) (2003) 953–982. doi:<https://doi.org/10.1155/S107379280320917X>.

- [74] M. D. Esposti, A. Knauf, On the form factor for the unitary group, *Journal of Mathematical Physics* 45 (12) (2004) 4957–4979. doi:<https://doi.org/10.1063/1.1814419>.
- [75] R. S. Whitney, Suppression of weak localization and enhancement of noise by tunneling in semiclassical chaotic transport, *Physical Review B* 75 (23) (2007) 235404. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.235404>.
- [76] D. Waltner, J. Kuipers, P. Jacquod, K. Richter, Conductance fluctuations in chaotic systems with tunnel barriers, *Physical Review B* 85 (2) (2012) 024302. doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.85.024302>.
- [77] J. Kuipers, Semiclassics for chaotic systems with tunnel barriers, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42 (42) (2009) 425101. doi:<https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/42/425101>.
- [78] J. Kuipers, K. Richter, Transport moments and Andreev billiards with tunnel barriers, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 46 (5) (2013) 055101. doi:<https://doi.org/10.1088/1751-8113/46/5/055101>.
- [79] D. Yeliussizov, Duality and deformations of stable grothendieck polynomials, *Journal of Algebraic Combinatorics* 45 (1) (2017) 295–344. doi:<https://doi.org/10.1007/s10801-016-0708-4>.

Apêndices

Ortogonalidade das funções de Schur

Para resolvermos a integral

$$\frac{1}{N!(2\pi)^N} \oint s_\lambda(z) s_\mu(\bar{z}) |\Delta(z)|^2 dz \quad (\text{A.1})$$

começamos escrevendo as funções de Schur usando a fórmula de Cauchy (1.22)

$$\frac{1}{N!(2\pi)^N} \oint \frac{\det(z_j^{\lambda_i+N-i})}{\Delta(z)} \frac{\det(\bar{z}_j^{\mu_i+N-i})}{\Delta(\bar{z})} |\Delta(z)|^2 dz. \quad (\text{A.2})$$

Os Vandermondes se cancelam e em seguida usamos a identidade de Andréief (1.49)

$$\frac{1}{N!(2\pi)^N} \oint \det(z_j^{\lambda_i+N-i}) \det(\bar{z}_j^{\mu_i+N-i}) dz = \frac{1}{(2\pi)^N} \det \left(\oint z^{\lambda_i+N-i} \bar{z}^{\mu_j+N-j} dz \right). \quad (\text{A.3})$$

Usamos agora o fato de que

$$\oint z^a \bar{z}^b = 2\pi \delta_{a,b}, \quad (\text{A.4})$$

ou seja, a integral só não será nula quando $\lambda_i - i = \mu_j - j$, isto é, para $i = j$ e $\lambda = \mu$. Calcularemos portanto o determinante de uma matriz diagonal $N \times N$ cujos elementos são iguais a 2π . Obtemos finalmente

$$\frac{1}{N!(2\pi)^N} \oint s_\lambda(z) s_\mu(\bar{z}) |\Delta(z)|^2 dz = \frac{1}{(2\pi)^N} (2\pi)^N \delta_{\lambda,\mu} = \delta_{\lambda,\mu} \quad (\text{A.5})$$

Integral de Caminho

Na expressão (3.9) vamos chamar $\lambda = \frac{i}{\hbar}(t - t_0)$ e escrever

$$e^{-\lambda(\hat{T}+\hat{V})} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[e^{-\frac{\lambda}{N}(\hat{T}+\hat{V})} \right]^N. \quad (\text{B.1})$$

Agora devemos notar que a igualdade $e^{X+Y} = e^X e^Y$ sendo X e Y quaisquer operadores somente vale quando os operadores comutarem $[X, Y] = 0$. O caso mais geral é dado pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X,[X,Y]]-\frac{1}{12}[Y,[X,Y]]+\dots}. \quad (\text{B.2})$$

Aplicando à equação (B.1)

$$e^{-\frac{\lambda}{N}(\hat{T}+\hat{V})} = e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{V}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^2[\hat{T},\hat{V}]} \dots \quad (\text{B.3})$$

para λ finito, podemos escrever a função de Green simplesmente como

$$\hat{G}(t_0, t) = \theta(t - t_0) \lim_{N \rightarrow \infty} \left[e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{V}} \right]^N \quad (\text{B.4})$$

já que no limite $N \rightarrow \infty$, os termos de segunda ordem e mais altas contribuem no máximo com N^{-2} .

Substituindo o operador \hat{G} na função de Green da equação (3.9)

$$G(x, t; x_0, t_0) = \theta(t - t_0) \lim_{N \rightarrow \infty} \langle x | \left[e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{V}} \right]^N | x_0 \rangle \quad (\text{B.5})$$

$$= \theta(t - t_0) \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1} \times \prod_{j=0}^{N-1} \langle x_{j+1} | e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{V}} | x_j \rangle \quad (\text{B.6})$$

onde $x_N \equiv x$ é a posição final. A passagem da equação (B.5) para a equação (B.6) pode ser interpretada da seguinte maneira: podemos decompor o caminho entre as posições inicial e final x_0 e x em N pequenos trechos que vão de x_j a x_{j+1} e integrar sobre todos os possíveis caminhos. Por simplicidade, consideraremos o operador $\hat{T} = \hat{p}^2/2m$ e o operador $\hat{V} = \hat{V}(\hat{x})$, onde \hat{p} representa o operador momento, m a massa e $\hat{V}(\hat{x})$ alguma função do operador de posição. Os elementos de matriz na equação (B.6) podem ser escritos

$$\langle x_{j+1} | e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{V}} | x_j \rangle = \langle x_{j+1} | e^{-\frac{\lambda}{N}\hat{T}} | x_j \rangle \exp\left(-\frac{\lambda}{N}V(x_j)\right) \quad (\text{B.7})$$

$$= \sqrt{\frac{mN}{2\pi\lambda\hbar^2}} \exp\left(-\frac{mN}{2\lambda\hbar^2}(x_{j+1} - x_j)^2\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{N}V(x_j)\right) \quad (\text{B.8})$$

e assim, a função de Green toma a forma

$$G(x, t; x_0, t_0) = \theta(t - t_0) \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{mN}{2\pi i \hbar (t - t_0)} \right)^{N/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1} \quad (\text{B.9})$$

$$\times \prod_{j=0}^{N-1} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{mN}{2(t - t_0)} (x_{j+1} - x_j)^2 - \frac{t - t_0}{N} V(x_j) \right) \right].$$

Na equação (B.9), nós expressamos a função de Green em termos de uma integral sobre todos os caminhos possíveis, não só caminhos fisicamente realizáveis, e discretizados em N intervalos conectando o ponto x_0 no tempo t_0 ao ponto x no tempo t . Desde que N seja muito maior que $t - t_0$, podemos escrever a equação (B.9) introduzindo um incremento de tempo infinitesimal, $\Delta t = \frac{t-t_0}{N}$, para cada intervalo de um dado caminho. O produtório agindo na exponencial resulta no argumento

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} \right)^2 - V(x_j) \right] = \int_{t_0}^t dt \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] = \int_{t_0}^t dt L(\dot{x}, x) = R(x, t; x_0, t_0) \quad (\text{B.10})$$

onde $L(\dot{x}, x)$ é a lagrangiana e $R(x, t; x_0, t_0)$ é chamada função principal de Hamilton. Perceba que quando $N \rightarrow \infty$, o incremento $\Delta t \rightarrow 0$. É importante notar que o caminho não será um caminho físico realizável a menos que ele extremize $R(x, t; x_0, t_0)$, segundo o princípio variacional de Lagrange [5]. Introduzimos uma versão discreta da função principal de Hamilton

$$R_N(x, \{x_i\}, x_0) = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} \right)^2 - V(x_j) \right]. \quad (\text{B.11})$$

A função de Green então pode ser escrita em termos da seguinte integral de caminho

$$G(x, t; x_0, t_0) = \theta(t - t_0) \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{mN}{2\pi i \hbar (t - t_0)} \right)^{N/2} \times \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1} \exp \left[\frac{i}{\hbar} R_N(x, \{x_i\}, x_0) \right]. \quad (\text{B.12})$$

Regras Diagramáticas e Expressão da Condutância

Vamos caracterizar uma trajetória arbitrária dizendo que ela contém um número v_l de encontros com l trechos. Esse número pode ser organizado num vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots)$ e, assim, o número total de encontros será a soma $V(\vec{v}) = \sum_{l \geq 2} v_l$. O número total de trechos dos encontros será, portanto, $L(\vec{v}) = \sum_{l \geq 2} l v_l$. O número total de links é sempre $L(\vec{v}) + 1$.

Tomamos uma seção de Poincaré \mathcal{P}_σ ($\sigma = 1, \dots, V$) ortogonal a cada um dos V encontros. Analogamente ao par de Richter-Sieber, caracterizamos o encontro por $l - 1$ coordenadas estáveis $s_{\sigma,j}$ ($\sigma = 1, \dots, V, j = 1, \dots, l - 1$) e $l - 1$ coordenadas instáveis $u_{\sigma,j}$. Todos os encontros são, então, caracterizados por $\sum_{l \geq 2} (l - 1) v_l = L - V$ coordenadas estáveis e instáveis. Como mostrado em [64], a diferença de ação é $\Delta S = \sum_{\sigma,j} s_{\sigma,j} u_{\sigma,j}$. Novamente, define-se o encontro como sendo a região em que as coordenadas permanecem num intervalo $[-c, c]$ e, conseqüentemente, a duração de um encontro é dada pelo tempo em que uma das coordenadas leva para atingir c , a primeira a atingir esse valor. Em analogia com a equação (3.30), a duração do σ -ésimo encontro é dada por

$$t_{enc}^\sigma \sim \frac{1}{\lambda} \ln \frac{c^2}{\max_j |s_{\sigma,j}| \times \max'_j |u_{\sigma,j'}|}. \quad (\text{C.1})$$

O tempo de exposição será igual à soma da duração de todos os links e todos os primeiros trechos dos encontros $T_{exp} = \sum_{i=1}^{L+1} t_i + \sum_{\sigma=1}^V t_{enc}^\sigma$ de forma que, novamente, a probabilidade de sobrevivência e^{-MT_{exp}/T_H} excede a estimativa e^{-MT/T_H} . De forma análoga ao par de Richter-Sieber, a densidade de coordenadas estável e instável será

$$w(s, u) = \int dt_1, \dots, dt_L \frac{1}{\Omega^{L-V} \prod_{\sigma=1}^V t_{enc}^\sigma(s, u)} \quad (\text{C.2})$$

que é integrada sobre todos os links, exceto o último, já que esse não precede qualquer encontro. Essa densidade é também normalizada. Continuando com o exemplo da condutância, a contribuição de um diagrama arbitrário pode ser escrita de forma análoga como

$$\langle \text{Tr}[(t^\dagger t)] \rangle_{diag} = \frac{1}{T_H} \left\langle \sum_{i,o} \int d^{L-V} s \, d^{L-V} u \sum_{\alpha:i \rightarrow o} |A_\alpha|^2 w(s, u) e^{i \sum_{\sigma,j} s_{\sigma,j} u_{\sigma,j} / \hbar} \right\rangle \quad (\text{C.3})$$

onde a soma sobre as trajetórias β foi substituída por uma integral sobre as coordenadas estável e instável. Semelhantemente, a soma sobre canais produz um termo $N_1 N_2$ e a soma sobre trajetórias α é avaliada usando a regra de Richter-Sieber, que a substituí por uma integral sobre a duração do último link t_{L+1} com um integrando envolvendo a probabilidade de sobrevivência e^{-MT_{exp}/T_H} . De forma fatorada, a equação (1.51) fica

$$\langle \text{Tr}[(t^\dagger t)] \rangle_{diag} = \frac{N_1 N_2}{T_H} \prod_{i=1}^{L+1} \left(\int dt_i e^{-\frac{M}{T_H} t_i} \right) \prod_{\sigma=1}^V \left(\int ds_{\sigma 1} \dots ds_{\sigma, l-1} du_{\sigma 1} \dots du_{\sigma, l-1} \frac{e^{-Mt_{enc}^\sigma(s,u)/T_H} e^{i \sum_j s_{\sigma,j} u_{\sigma,j}/\hbar}}{\Omega^{l-1} t_{enc}^\sigma(s,u)} \right). \quad (\text{C.4})$$

De maneira semelhante à expressão (3.34), a integral sobre cada link num fator $\frac{T_H}{M}$ e a integral sobre os encontros é feita expandindo a exponencial e^{-Mt_{enc}/T_H} até primeira ordem. A integral do encontro é ligeiramente diferente da anterior, Eq.(3.36), porque a probabilidade $\frac{1}{\Omega}$ e a integral $\int ds du e^{-isu/\hbar} \rightarrow 2\pi\hbar$ aparecem com uma potência $l-1$, de forma que

$$\begin{aligned} I &= \prod_{\sigma=1}^V \left(\int ds_{\sigma 1} \dots ds_{\sigma, l-1} du_{\sigma 1} \dots du_{\sigma, l-1} \frac{e^{-Mt_{enc}^\sigma(s,u)/T_H} e^{i \sum_j s_{\sigma,j} u_{\sigma,j}/\hbar}}{\Omega^{l-1} t_{enc}^\sigma(s,u)} \right) \quad (\text{C.5}) \\ &= \prod_{\sigma=1}^V \left(\int ds_{\sigma 1} \dots ds_{\sigma, l-1} du_{\sigma 1} \dots du_{\sigma, l-1} \frac{e^{i \sum_j s_{\sigma,j} u_{\sigma,j}/\hbar}}{\Omega^{l-1} t_{enc}^\sigma(s,u)} \left(1 - \frac{M}{T_H} t_{enc}^\sigma + \dots \right) \right) \\ &= \prod_{\sigma=1}^V \left[\frac{-M}{T_H} \prod_{j=1}^{l-1} \left(\frac{1}{\Omega} \int ds_{\sigma,j} du_{\sigma,j} e^{-is_{\sigma,j} u_{\sigma,j}/\hbar} \right) \right] \\ &= \prod_{\sigma=1}^V \left[\frac{-M}{T_H} \left(\frac{2\pi\hbar}{\Omega} \right)^{l-1} \right] = \prod_{\sigma=1}^V \left(\frac{-M}{T_H^l} \right) \end{aligned}$$

ou seja, cada encontro produz um fator igual a $\frac{-M}{T_H^l}$. Notamos novamente que os termos T_H se cancelam, já que a integral I contribui com a potência $L = \sum_l l v_l$ para T_H no denominador, a integral sobre os links com uma potência $L+1$ no numerador e, finalmente, o termo $\frac{1}{T_H}$ no início da expressão (1.51) contribui com uma potência linear no denominador. Nós então encontramos a mesma regra diagramática mencionada anteriormente: um fator de $\frac{1}{M}$ para cada um dos $L+1$ links, um fator $-M$ para cada encontro e um fator $N_1 N_2$ da soma sobre os canais. Por fim, a contribuição de cada diagrama será

$$\langle \text{Tr}[(t^\dagger t)] \rangle_{diag} = (-1)^{V(\vec{v})} \frac{N_1 N_2}{M^{L(\vec{v}) - V(\vec{v}) + 1}}. \quad (\text{C.6})$$

A expressão geral para a condutância é obtida somando sobre todos os diagramas, isso significa somar sobre todos os possíveis encontros \vec{v} . Se denotarmos o número de diagramas associados ao mesmo \vec{v} por $\mathcal{N}(\vec{v})$, teremos a expressão

$$\langle \text{Tr}[(t^\dagger t)] \rangle = \frac{N_1 N_2}{M} \left(1 + \sum_{\vec{v}} (-1)^{V(\vec{v})} \frac{1}{M^{L(\vec{v}) - V(\vec{v})}} \mathcal{N}(\vec{v}) \right) = \frac{N_1 N_2}{M} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{M^m} \right) \quad (\text{C.7})$$

onde o termo igual a 1 fora da soma corresponde à aproximação diagonal, um par de trajetórias sem encontro. Cada coeficiente c_m é determinado pelos diagramas com um dado $m = L - V$

$$c_m = \sum_{\vec{v}}^{L(\vec{v})-V(\vec{v})=m} = (-1)^{V(\vec{v})} \mathcal{N}(\vec{v}). \quad (\text{C.8})$$

O problema agora se reduz em contar o número de diagramas para um dado m . Para os primeiros valores de m , a contagem é fácil. Como discutido anteriormente, para sistemas invariantes por reversão temporal, o termo seguinte à aproximação diagonal é devido a um par de Richter Sieber. Esse diagrama contém um encontro ($V = 1$) com 2 trechos ($L = 2$), logo $m = 1$ e $c_m = -1$, dando justamente o resultado da equação (3.39). Para sistemas sem simetria de reversão temporal, $c_1 = 0$ devido à impossibilidade de haver um diagrama com um encontro duplo no qual a trajetória parceira sempre caminhe no mesmo sentido da direta.

O próximo termo c_2 é determinado por duas famílias de diagramas: a primeira contém dois encontros duplos ($L = 4, V = 2$) e a segunda contém um encontro triplo ($L = 3, V = 1$), que contribuem com um sinal positivo e um sinal negativo respectivamente. Essas famílias são mostradas na figura (19) abaixo. No caso unitário, existe apenas um diagrama do primeiro tipo, Fig. 19b, e um diagrama do segundo tipo, Fig. 19g, que se cancelam como visto anteriormente. No caso ortogonal, existem cinco diagramas do primeiro tipo com sinal positivo, Fig. 19b-f, e quatro diagramas do segundo tipo com sinal negativo, Fig. 19g-j, dando num coeficiente $c_2 = 1$.

A determinação dos coeficientes mais altos c_m para $m \geq 3$ requer um método combinatorial, descrito em [16]. Através desse método, os autores mostram que todos os coeficientes c_m para $m \geq 2$ se anulam mutuamente para o caso unitário, reproduzindo o resultado obtido pela RMT, Eq. (2.28). Para o caso ortogonal, o resultado obtido também concorda com RMT. Chegamos por fim nos seguintes resultados para a condutância

$$\langle \text{Tr}[(t^\dagger t)] \rangle = \begin{cases} \frac{N_1 N_2}{M}, & \text{caso unitário} \\ \frac{N_1 N_2}{M+1}, & \text{caso ortogonal} \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

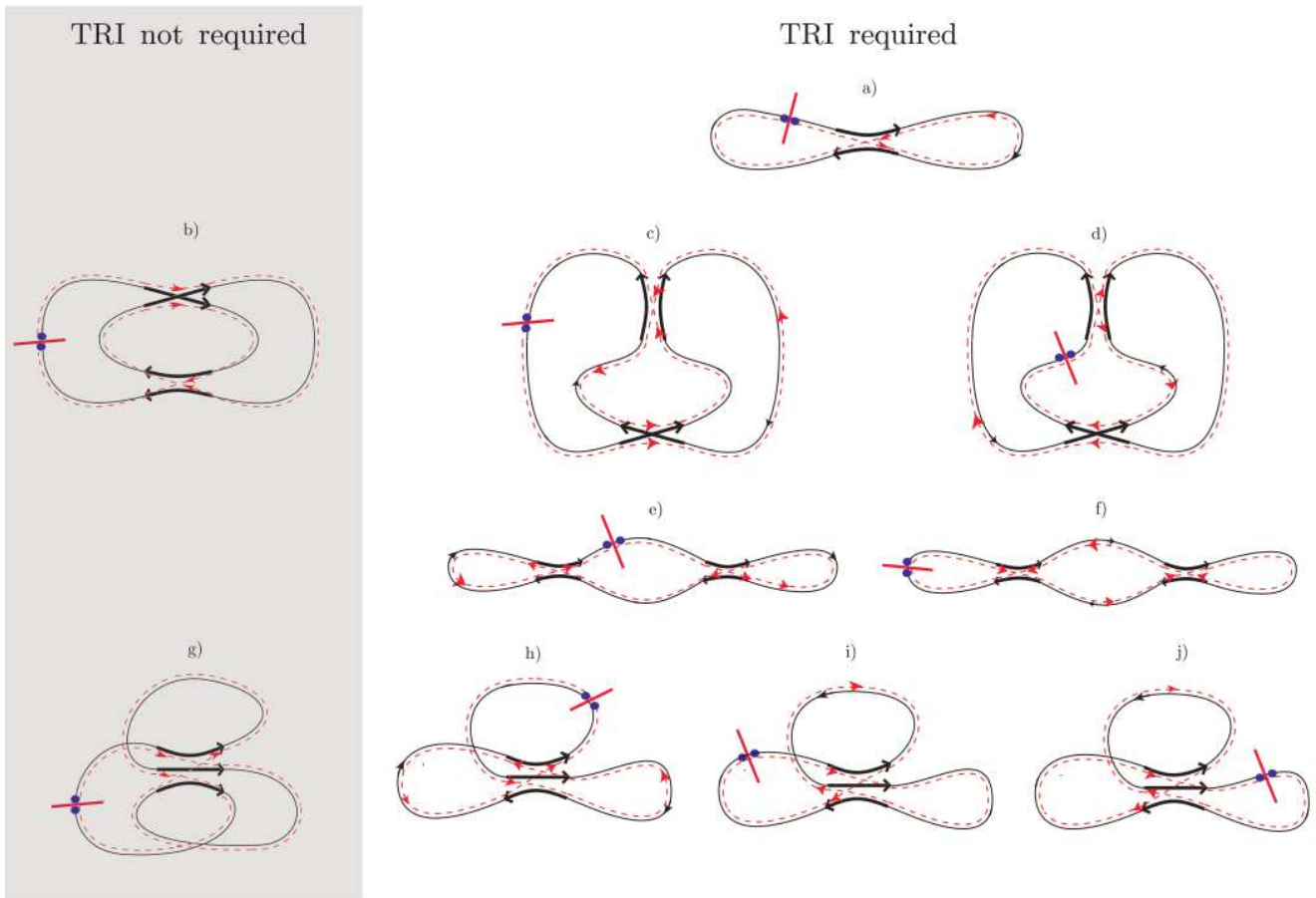


Figura 19: Famílias de pares de trajetórias diferindo por um encontro duplo (a), dois encontros duplos (b-f) e um encontro triplo (g-j). A cavidade foi omitida e o início e o fim das trajetórias foram unidos no ponto representado por $\cdot|\cdot$. Essa modificação não interfere, já que o formato dos links não importa. Os diagramas à direita só são permitidos em sistemas com invariância de reversão temporal (TRI). Junto com a aproximação diagonal, esses diagramas contribuem para a condutância até a ordem $1/M^3$. Fonte: [18].

D

Constante de Normalização \mathcal{Z}

A constante de normalização é dada por

$$\mathcal{Z} = \int dZ e^{-M \text{Tr}(Z^\dagger Z)}. \quad (\text{D.1})$$

Aplicando a decomposição $Z = UDV^\dagger$, temos

$$\mathcal{Z} = \int dU \int dV \int dX |\Delta(X)|^2 e^{-M \text{Tr}(X)}. \quad (\text{D.2})$$

As medidas dU e dV são medidas de Haar no grupo unitário $U(N)$. Essa medida é normalizada, de modo que as integrais sobre U e V são iguais a 1, restando apenas a integral sobre a matriz diagonal X . A integral radial sobre X pode ser calculada via integral de Selberg. Seja a integral de Selberg

$$S = \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} (1-x_i)^{\beta-1} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{2\gamma} dx_1 \dots dx_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha + j\gamma)\Gamma(\beta + j\gamma)\Gamma(1 + (j+1)\gamma)}{\Gamma(\alpha + \beta + (n+j-1)\gamma)\Gamma(1 + \gamma)}. \quad (\text{D.3})$$

Então tomamos $\gamma = 1$ para que $\prod_{i<j} |x_i - x_j|^{2\gamma} = |\Delta(X)|^2$ e $\alpha = 1$. Para obtermos a exponencial $e^{-M \text{Tr}(X)}$, podemos fazer a mudança de variável $x_i = \frac{M}{\beta} x'_i$ e tomar o limite

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} (1-x_i)^{\beta-1} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{M}{\beta} x'_i\right)^{\beta-1} = e^{-M x'_i} \quad (\text{D.4})$$

e assim

$$\prod_{i=1}^N e^{-M x'_i} = e^{-M \text{Tr}(X')} \quad (\text{D.5})$$

onde $X' = \text{diag}(x'_1, \dots, x'_N)$. Fazendo todas essas mudanças na integral de Selberg e aplicando o limite $\beta \rightarrow \infty$, teremos

$$S = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{M}{\beta} x'_i\right)^{\beta-1} \prod_{1 \leq i < j \leq N} \left| \frac{M}{\beta} x'_i - \frac{M}{\beta} x'_j \right|^2 \frac{M^N}{\beta^N} dx'_1 \dots dx'_N. \quad (\text{D.6})$$

O número de termos do Vandermonde é o número triangular $N(N-1)/2$ e assim

$$S = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{\beta} \right)^{2 \frac{N(N-1)}{2} + N} \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{M}{\beta} x'_i \right)^{\beta-1} |\Delta(X')|^2 dx'_1 \dots dx'_N \quad (\text{D.7})$$

que por sua vez deve ser igual a

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta+j)\Gamma(j+2)}{\Gamma(\beta+N+j)\Gamma(2)}. \quad (\text{D.8})$$

Isolando a integral no lado esquerdo e aplicando o limite, temos

$$\mathcal{Z} = \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{-M \text{Tr}(X')} \Delta^2(X') dx'_1 \dots dx'_N = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta}{M} \right)^{N^2} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta+j)\Gamma(j+2)}{\Gamma(\beta+N+j)\Gamma(2)}. \quad (\text{D.9})$$

Primeiro, simplificamos o lado direito da igualdade colocando os termos que não envolvem a variável β fora do limite

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{M^{N^2}} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(j+2)}{\Gamma(2)} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta^{N^2} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(\beta+j)}{\Gamma(\beta+N+j)} \quad (\text{D.10})$$

Em seguida, aplicamos a propriedade da função Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$, de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \frac{1}{M^{N^2}} \prod_{j=0}^{N-1} (j)!(j+1)! \lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta^{N^2} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{(\beta+j-1)!}{[\beta^N + (\dots)](\beta+j-1)!} \\ \mathcal{Z} &= \frac{N!}{M^{N^2}} \prod_{j=0}^{N-1} (j!)^2 \lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta^{N^2} \frac{1}{[\beta^{N^2} + (\dots)]} \\ \mathcal{Z} &= \frac{N!}{M^{N^2}} \prod_{j=1}^{N-1} (j!)^2 \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

onde (...) contém todas as potências de β menores que N na primeira linha e menores que N^2 na segunda linha. No limite $\beta \rightarrow \infty$, a potência mais alta domina os outros termos.

Para o caso com barreiras de tunelamento, a constante de normalização é obtida exatamente da mesma forma com a mudança de variável $x_i = \frac{M-N_1\gamma}{\beta} x'_i$.

Expansão (4.17)

Queremos expandir

$$s_\mu \left(\frac{X}{1 - \gamma X} \right) = \sum_{\rho \supset \mu} \gamma^{|\rho| - |\mu|} A_{\mu\rho} s_\rho(X). \quad (\text{E.1})$$

A chave para essa expansão é a ortogonalidade das funções de Schur

$$\int_{U(N)} s_\lambda(U) s_\mu(U^\dagger) dU = \frac{1}{N!(2\pi)^N} \oint s_\lambda(z) s_\mu(\bar{z}) |\Delta(z)|^2 dz = \delta_{\lambda,\mu}. \quad (\text{E.2})$$

Da relação de ortogonalidade, segue imediatamente que

$$A_{\mu\rho} = \frac{1}{N!(2\pi)^N} \oint s_\mu \left(\frac{z}{1 - \gamma z} \right) s_\rho(\bar{z}) |\Delta(z)|^2 dz. \quad (\text{E.3})$$

Usando a fórmula de Cauchy para a função de Schur, podemos escrever

$$s_\mu \left(\frac{z}{1 - \gamma z} \right) = \frac{1}{\Delta \left(\frac{z}{1 - \gamma z} \right)} \det \left[\left(\frac{z_k}{1 - \gamma z_k} \right)^{N + \mu_i - i} \right]. \quad (\text{E.4})$$

O Vandermonde no denominador é escrito como

$$\Delta \left(\frac{z}{1 - \gamma z} \right) = \frac{\Delta(z)}{\prod_k (1 - \gamma z_k)^{N-1}}. \quad (\text{E.5})$$

Portanto,

$$A_{\mu\rho} = \frac{1}{N!(2\pi)^N} \oint \det \left[\frac{z_k^{N + \mu_i - i}}{(1 - \gamma z_k)^{\mu_i - i + 1}} \right] \det \left(\bar{z}_k^{N + \rho_j - j} \right) dz \quad (\text{E.6})$$

Usando a identidade de Andréief, isso se torna

$$A_{\mu\rho} = \frac{1}{(2\pi)^N} \det \left[\oint \frac{z^{N + \mu_i - i}}{(1 - \gamma z)^{\mu_i - i + 1}} \bar{z}^{N + \rho_j - j} dz \right]. \quad (\text{E.7})$$

Sabendo que $z^N \bar{z}^N = 1$ e expandindo o termo $(1 - \gamma z)^{\mu_i - i + 1}$ via teorema binomial, teremos

$$A_{\mu\rho} = \frac{1}{(2\pi)^N} \det \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu_i - i + k}{\mu_i - i} \gamma^k \oint z^{\mu_i - i + k} \bar{z}^{\rho_j - j} dz \right]. \quad (\text{E.8})$$

O ponto crucial agora é que

$$\oint z^a \bar{z}^b = 2\pi \delta_{a,b} \quad (\text{E.9})$$

assim, a integral será não nula apenas se $k = \rho_j - j - \mu_i + i$. Já que $k \geq 0$, temos que $\rho_j - j \geq \mu_i - i$ e

$$A_{\mu\rho} = \det \left[\binom{\rho_j - j}{\mu_i - i} \gamma^{\rho_j - j - \mu_i + i} \right]_{1 \leq i, j \leq \ell(\rho)}. \quad (\text{E.10})$$

Expandindo o determinante, fatoramos $\prod_i \gamma^{-\mu_i} = \gamma^{-|\mu|}$ e $\prod_j \gamma^{\rho_j} = \gamma^{|\rho|}$. Por fim, escrevemos

$$A_{\mu\rho} = \gamma^{|\rho| - |\mu|} \det \left[\binom{\rho_j - j}{\mu_i - i} \right]_{1 \leq i, j \leq \ell(\rho)}. \quad (\text{E.11})$$

Expressão de $E_{\mu\nu}(N_1)$ (4.34)

No lema 9.1 da referência [79], vamos definir

$$f_{\mu_i-i, \rho_j-j} = \binom{\rho_i - i}{\mu_j - j} \quad (\text{F.1})$$

$$g_{\rho_i-i, \nu_j-j} = \binom{N_1 - \rho_j + j + \nu_i - i - 1}{\nu_i - i - \rho_j - j} \quad (\text{F.2})$$

onde ν foi trocado por μ na notação do lema para estar em conformidade com o nosso problema. Identificando então $F_{\mu\rho}$ com $A_{\mu\rho}$ e $G_{\rho\nu}$ com $s_{\nu/\rho}(1^{N_1})$ e aplicando o lema, teremos

$$E_{\mu\nu}(N_1) = \sum_{\mu \subset \rho \subset \nu} A_{\mu\rho} s_{\nu/\rho}(1^{N_1}) = \det \left(\sum_{k=\mu_j-j}^{\nu_i-i} \binom{k}{\mu_j-j} \binom{N_1 + \nu_i - i - k - 1}{\nu_i - i - k} \right). \quad (\text{F.3})$$

Os limites superior e inferior da soma são tais pelo fato de que $\binom{a}{b} = 0$ se $a < b$ ou $b < 0$. Assim, o primeiro binômio na soma impõe o limite inferior $\mu_j - j$ e o segundo binômio impõe o limite superior $\nu_i - i$. Fora desses limites, o produto entre os binômios é nulo. Para resolvermos a soma, usaremos a seguinte identidade binomial

$$\sum_{k=0}^n \binom{x+k}{k} \binom{n+y-k}{n-k} = \binom{x+y+n+1}{n}. \quad (\text{F.4})$$

A fim de aplicarmos essa identidade, precisamos fazer algumas mudanças de variáveis e adequar os limites da soma. Antes disso, aplicamos a propriedade dos binômios $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$ ao primeiro binômio

$$\det \left(\sum_{k=\mu_j-j}^{\nu_i-i} \binom{k}{k-\mu_j+j} \binom{N_1 + \nu_i - i - k - 1}{\nu_i - i - k} \right). \quad (\text{F.5})$$

Primeiro chamamos $y = N_1 - 1$, $n = \nu_i - i$ e $k - \mu_j + j = k'$

$$\det \left(\sum_{k'=0}^{\nu_i-i-\mu_j+j} \binom{k'+\mu_j-j}{k'} \binom{y+n-k'-\mu_j+j}{n-k'-\mu_j+j} \right). \quad (\text{F.6})$$

Em seguida introduzimos $n' = n - \mu_j + j$ e $x = \mu_j - j$

$$\det \left(\sum_{k'=0}^{n'} \binom{x+k'}{k'} \binom{y+n'-k'}{n'-k'} \right) \quad (\text{F.7})$$

e assim chegamos numa expressão idêntica à identidade (F.4), da qual obtemos

$$\det \left(\binom{x+y+n'+1}{n'} \right) = \det \left(\binom{N_1 + \nu_i - i}{\nu_i - i - \mu_j + j} \right). \quad (\text{F.8})$$

Por fim, aplicamos novamente a propriedade $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$ para reduzir o binômio a uma forma mais elegante

$$\det \left(\binom{N_1 + \nu_i - i}{N_1 + \mu_j - j} \right)_{1 \leq i, j \leq \ell(\nu)}. \quad (\text{F.9})$$

A demonstração de que

$$\det \left(\binom{N_1 + \nu_i - i}{N_1 + \mu_j - j} \right) = \frac{[N_1]_\nu}{[N_1]_\mu} \frac{d_{\nu/\mu}}{(|\nu| - |\mu|)!} \quad (\text{F.10})$$

é simples e se baseia na seguinte propriedade do determinante. Se uma linha ou uma coluna de uma matriz A estiver multiplicada por um escalar c , então o determinante $\det(A) = c \det(A')$, onde A' é a matriz A sem a constante c . Essa propriedade pode ser usada no determinante acima bastando identificar os termos em comum que multiplicam cada linha. Para isso, usamos a definição do binômio

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{(a-b)!b!} \quad (\text{F.11})$$

e escrevemos explicitamente o nosso determinante (F.10):

$$\begin{vmatrix} \frac{(N_1 + \nu_1 - 1)!}{(N_1 + \mu_1 - 1)!(\nu_1 - 1 - \mu_1 + 1)!} & \frac{(N_1 + \nu_1 - 1)!}{(N_1 + \mu_2 - 2)!(\nu_1 - 1 - \mu_2 + 2)!} & \frac{(N_1 + \nu_1 - 1)!}{(N_1 + \mu_3 - 3)!(\nu_1 - 1 - \mu_3 + 3)!} & \cdots \\ \frac{(N_1 + \nu_2 - 2)!}{(N_1 + \mu_1 - 1)!(\nu_2 - 2 - \mu_1 + 1)!} & \frac{(N_1 + \nu_2 - 2)!}{(N_1 + \mu_2 - 2)!(\nu_2 - 2 - \mu_2 + 2)!} & \frac{(N_1 + \nu_2 - 2)!}{(N_1 + \mu_3 - 3)!(\nu_2 - 2 - \mu_3 + 3)!} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}. \quad (\text{F.12})$$

Aplicando a propriedade dos determinantes em todas as linhas e todas as colunas, obtemos:

$$\det \left(\binom{N_1 + \nu_i - i}{N_1 + \mu_j - j} \right) = \frac{\prod_{i=1}^{\ell(\nu)} (N_1 + \nu_i - i)!}{\prod_{j=1}^{\ell(\nu)} (N_1 + \mu_j - j)!} \det \left(\frac{1}{(\nu_i - i - \mu_j + j)!} \right) \quad (\text{F.13})$$

E assim:

$$\det \left(\binom{N_1 + \nu_i - i}{N_1 + \mu_j - j} \right) = \frac{[N_1]_\nu}{[N_1]_\mu} \frac{d_{\nu/\mu}}{(|\nu| - |\mu|)!} \quad (\text{F.14})$$

onde

$$d_{\nu/\mu} = (|\nu| - |\mu|)! \det \left(\frac{1}{(\nu_i - i - \mu_j + j)!} \right)_{1 \leq i, j \leq \ell(\nu)} \quad (\text{F.15})$$

Limite $N \rightarrow 0$

Dado um diagrama de Young com formato λ , se uma caixa ocupa a j -ésima posição na i -ésima linha, então nós dizemos que a sua coordenada é (i, j) . Definimos o conteúdo dessa caixa como sendo $c(\square) = j - i$ e denotamos o produto de todos os conteúdos não nulos por

$$t_\lambda = \prod_{\substack{(i,j) \in \lambda \\ i \neq j}} (j - i). \tag{G.1}$$

O quadrado de Durfee de λ é o maior diagrama de Young **quadrado** contido em λ . Por exemplo, o quadrado de Durfee da partição $\lambda = (4, 4, 2, 2, 1)$ é mostrado em cinza abaixo

0	1	2	3
-1	0	1	2
-2	-1		
-3	-2		
-4			

(G.2)

onde as caixas foram preenchidas com o seu conteúdo $c = j - i$. Seja $D(\lambda)$ o número de caixas na diagonal do quadrado de Durfee, então equivalentemente esse número é o número de caixas que possuem conteúdo nulo.

O polinômio $[N]_\lambda$ definido como

$$[N]_\lambda = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{(N + \lambda_i - i)!}{(N - i)!} \tag{G.3}$$

pode ser escrito em termos dos conteúdos de λ como

$$\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{(N + \lambda_i - i)!}{(N - i)!} = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{(N + \lambda_i - i)(N + \lambda_i - 1 - i) \cdots (N + 1 - i)(N - i)!}{(N - i)!} = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} (N + j - i), \tag{G.4}$$

portanto

$$[N]_\lambda = \prod_{\square \in \lambda} (N + c(\square)). \quad (\text{G.5})$$

Ao tomarmos o limite $N \rightarrow 0$, o termo mais importante de $[N]_\lambda$ para o limite será a menor potência de N . Na expressão acima, vemos que a menor potência de N será dada pelo número de caixas com conteúdo igual a zero. Por exemplo, para $\lambda = (4, 4, 2, 2, 1)$

$$[N]_{(4,4,2,2,1)} = (N^2 - 9)(N^2 - 4)^2(N^2 - 1)^2(N + 4)N^2 = 576N^2 + O(N^3). \quad (\text{G.6})$$

A menor potência de N é justamente o número de caixas com conteúdo nulo, ou seja, $D(\lambda)$. Por outro lado, o termo que acompanha a menor potência de N é justamente o produto de todos os conteúdos não nulos, t_λ . Portanto

$$[N]_\lambda \sim t_\lambda N^{D(\lambda)} + O(N^{D(\lambda)+1}), \quad (N \rightarrow 0). \quad (\text{G.7})$$

Para uma partição enviesada λ/μ , com $\mu \subset \lambda$, cujo diagrama é representado pelo diagrama de λ com todas as caixas de μ removidas. É fácil ver que o produto de todos os conteúdos não nulos $t_{\lambda/\mu}$ é dado por

$$t_{\lambda/\mu} = \frac{t_\lambda}{t_\mu}. \quad (\text{G.8})$$

Por exemplo, para $\lambda = (4, 4, 2, 2, 1)$ e $\mu = (2, 2, 1)$, o diagrama de λ/μ é

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline & -1 \\ \hline -3 & -2 \\ \hline -4 & \\ \hline \end{array} \quad (\text{G.9})$$

onde as caixas foram preenchidas com o conteúdo. Neste caso, $t_\mu = 2$ e $t_{\lambda/\mu} = t_\lambda/t_\mu = 288$.

Com isso, o limite

$$\lim_{N \rightarrow 0} \frac{[N]_\nu}{[N]_\mu} = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{t_\nu N^{D(\nu)}}{t_\mu N^{D(\mu)}} \quad (\text{G.10})$$

só existe e é diferente de zero se $D(\nu) = D(\mu)$.