

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**GUILHERME HIROITI GOMES MIYADAIRA**

**METODOLOGIA E APLICAÇÃO DE UM MODELO INTEGRADO DE MECÂNICA  
DO VOO E AEROELASTICIDADE**

Uberlândia - MG

2020

GUILHERME HIROITI GOMES MIYADAIRA

**METODOLOGIA E APLICAÇÃO DE UM MODELO INTEGRADO DE MECÂNICA  
DO VOO E AEROELASTICIDADE**

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Engenheiro Aeronáutico.

Orientador: Prof. Dr. Tobias Souza Morais  
Coorientador: Dr. Marcos Heinzelmann Junqueira Pedras

Uberlândia - MG

2020

Dedico este trabalho à minha mãe Ana Neri, meu pai Jorge Hiroshi, minha irmã Gabriela e meus avós Cláudia, Manoel, Haruko e Zenkishi por todo o suporte necessário para que eu pudesse estudar durante todos esses anos.

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família, que viabilizou minha dedicação integral aos estudos. Agradeço à minha mãe, Ana, por me guiar até a universidade.

Ao meu orientador e amigo Tobias Morais, que sempre esteve disposto a me ajudar não somente no desenvolvimento deste trabalho, mas também em tantas outras questões.

Aos engenheiros e engenheiras da Aviação Executiva e do Desenvolvimento de Tecnologia com quem tive contato na Embraer. Em especial, agradeço ao meu orientador Marcos Pedras por todos os ensinamentos que possibilitaram a realização deste trabalho.

Aos amigos que fiz durante a graduação e tornaram a caminhada mais leve. Especialmente às 11ª e 7ª turmas de Engenharia Aeronáutica pela família que formamos.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, pela oportunidade de realização do curso de Engenharia Aeronáutica.

## RESUMO

MIYADAIRA, Guilherme H. G., **Metodologia e Aplicação de um Modelo Integrado de Mecânica do Voo e Aeroelasticidade**. 2020. Projeto de conclusão de curso – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2020.

Em virtude da crescente demanda por aeronaves mais eficientes e com menor consumo de combustível, as grandes fabricantes estão projetando estruturas mais leves e flexíveis. Conseqüentemente, avaliações isoladas de mecânica do voo e aeroelasticidade são insuficientes. Este trabalho apresenta uma metodologia para integrar os modelos de mecânica do voo e aeroelástico. Primeiro, é realizada uma breve apresentação do modelo aeroelástico seguida de uma transformação dos eixos principais de inércia para os eixos do corpo. O modelo em espaço de estados é formulado através de um passo intermediário em que as forças aerodinâmicas são transformadas do domínio da frequência para o domínio de Laplace (RFA). Em seguida, é introduzido um modelo de mecânica do voo utilizando a teoria de pequenas perturbações. Os dois modelos são integrados em um sistema em espaço de estados que apresenta as características de corpo rígido providas do modelo de mecânica do voo aliadas aos modos flexíveis aeroelásticos. Por fim, a metodologia é aplicada em uma aeronave genérica e análises tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo são realizadas para comparar a resposta do modelo integrado com ambos os modelos isolados.

Palavras-chave: Aeroelasticidade, Mecânica do voo, Aeroservoelasticidade, RFA, Modelo integrado.

## ABSTRACT

MIYADAIRA, Guilherme H. G., **Methodology and Application of a Flight Dynamics and Aeroelasticity Integrated Model**. 2020. Undergraduate Thesis – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2020.

Due to the growing demand for more fuel-efficient aircraft, major manufacturers are designing lighter and more flexible structures. Consequently, isolated flight dynamics and aeroelasticity evaluations are no longer sufficient. This work shows a methodology for developing an integrated flight dynamics and aeroelasticity model. First, an introduction to aeroelasticity model is carried out, followed by an axes transformation from principal axes to body axes. The state-space model is formulated through an intermediate step where the frequency domain aerodynamic forces are transformed into the Laplace domain (RFA). Later, a flight dynamics model is presented applying small-disturbance theory. Then, both models are integrated into a state-space system that has the flight dynamics' rigid motion and the aeroelasticity's flexible modes. Finally, the methodology is applied to a generic aircraft model and both frequency and time domain analyzes are performed to compare the response of the integrated model to the isolated models.

Keywords: Aeroelasticity, Flight dynamics, Aeroservoelasticity, Rational function approximation, Integrated model.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Referencial do corpo para aeroelasticidade (BA).	22
Figura 2 - Referencial do corpo para mecânica do voo (FD).	27
Figura 3 - Teoria das pequenas perturbações em um estado arbitrário.	28
Figura 4 - Relação entre Referencial terrestre (E) e Mecânica do voo (FD) através dos ângulos de Euler.	28
Figura 5 - Diferença entre os referenciais AE e FD.	34
Figura 6 - Airbus A350-1000 (esquerda) e Boeing 777-300ER (direita).	38
Figura 7 - Modelo estrutural em Nastran.	39
Figura 8 - Painéis aerodinâmicos (esquerda) e <i>spline</i> (direita).	39
Figura 9 - Visualização dos primeiros modos de flexão da asa. Azul: indeformado. Preto: deformado.	40
Figura 10 - Diagonal da $Q_{hh}$ - corpo rígido.	42
Figura 11 - Diagonal da $Q_{hh}$ - 6 primeiros modos flexíveis.	42
Figura 12 - Contribuição do aileron esquerdo e direito para rolagem na $Q_{hc}$ .	43
Figura 13 - Contribuição do profundor esquerdo e direito para arfagem na $Q_{hc}$ .	43
Figura 14 - Contribuição do leme para guinada na $Q_{hc}$ .	43
Figura 15 - Nó representante do sensor inercial fictício (em vermelho).	44
Figura 16 - FRF do aileron para velocidades $p$ , $q$ e $r$ .	45
Figura 17 - FRF do aileron para acelerações $n_x$ , $n_y$ e $n_z$ .	46
Figura 18 - FRF do profundor para velocidades $p$ , $q$ e $r$ .	47
Figura 19 - FRF do profundor para acelerações $n_x$ , $n_y$ e $n_z$ .	48
Figura 20 - FRF do leme para velocidades $p$ , $q$ e $r$ .	49
Figura 21 - FRF do leme para acelerações $n_x$ , $n_y$ e $n_z$ .	50
Figura 22 - Diagrama de polos e zeros do modelo de mecânica do voo.	52
Figura 23 - Diagrama de Bode - aileron para $p$ .	53
Figura 24 - Diagrama de Bode - aileron para $n_y$ .	53
Figura 25 - Diagrama de Bode - profundor para $q$ .	54
Figura 26 - Diagrama de Bode - profundor para $n_z$ .	54
Figura 27 - Diagrama de Bode - leme para $r$ .	55
Figura 28 - Diagrama de Bode - leme para $n_y$ .	55
Figura 29 - Simulação no tempo - entrada degrau de profundor e resposta de arfagem $q$ .	57

Figura 30 - FFT do sinal de resposta de arfagem. 57

Figura 31 – Vista lateral: modo de flexão vertical da fuselagem – 4,46 Hz. Azul: indeformado.

Preto: deformado. 58

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Nomenclatura de forças, momentos e velocidades.	28
Tabela 2 - Derivadas de estabilidade dimensionais longitudinais.	30
Tabela 3 - Derivadas de estabilidade dimensionais latero-direcionais.	31
Tabela 4 - Características do modelo GWB e aeronaves 777-300ER e A350-1000.	39
Tabela 5 - Características de inércia do GWB.	40
Tabela 6 - Descrição dos 6 primeiros modos flexíveis.	40
Tabela 7 - Frequências reduzidas utilizadas.	41
Tabela 8 - Condições de voo.	41
Tabela 9 - Valores dos coeficientes adimensionais longitudinais utilizados.	51
Tabela 10 - Valores dos coeficientes adimensionais latero-direcionais utilizados.	51
Tabela 11 - Características dos modos de mecânica do voo.	52

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AE	Aeroelasticidade
BA	Referencial aeroelástico no corpo da aeronave
BFF	<i>Body-Freedom Flutter</i>
DLM	<i>Doublet Lattice Method</i>
EASA	Agência Europeia para a Segurança da Aviação
FD	Mecânica de voo ou Referencial de mecânica do voo no corpo da aeronave
FEM	Método de Elementos Finitos
FRF	Função de Resposta em Frequência
GDL	Graus de Liberdade
GWB	<i>Generic Wide Body</i>
ID	Número de Identificação (Nastran)
IRS	Sensor Inercial
MDO	Otimização Multidisciplinar
MI	Modelo Integrado
MTOW	Massa Máxima de Decolagem
NASA	Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço
RFA	Aproximação por Função Racional
TAS	Velocidade Verdadeira do Ar

## LISTA DE SÍMBOLOS

$b$	Envergadura da asa
$\bar{c}$	Corda média aerodinâmica
$I_x$	Momento de inércia em relação ao eixo x
$I_y$	Momento de inércia em relação ao eixo y
$I_z$	Momento de inércia em relação ao eixo z
$I_{xz}$	Produto de inércia relação aos eixos x e z
$n_{grid}$	Quantidade de nós estruturais
$n_h$	Quantidade de modos calculados
$N_{lag}$	Quantidade de <i>lags</i> aerodinâmicos
$q_\infty$	Pressão dinâmica
$k$	Frequência reduzida
$k_{max}$	Valor máximo de frequência reduzida
$L$	Comprimento característico da aeronave (corda média aerodinâmica) ou Momento aerodinâmico no eixo x
$M$	Momento aerodinâmico no eixo y
$N$	Momento aerodinâmico no eixo z
$p$	Velocidade de rotação em torno do eixo x
$q$	Velocidade de rotação em torno do eixo y
$r$	Velocidade de rotação em torno do eixo z
$S$	Área de referência da aeronave (área em planta da asa)
$u$	Velocidade de translação no eixo x
$V$	Velocidade verdadeira do ar
$v$	Velocidade de translação no eixo y
$w$	Velocidade de translação no eixo z
$X$	Forças aerodinâmicas no eixo x
$Y$	Forças aerodinâmicas no eixo y
$Z$	Forças aerodinâmicas no eixo z

$\delta a$	Deflexão de aileron
$\delta e$	Deflexão de profundor
$\delta r$	Deflexão de leme
$\theta$	Ângulo de arfagem
$\lambda$	Autovalores da matriz modal
$\rho$	Densidade do ar
$\phi$	Ângulo de <i>bank</i>
$\psi$	Ângulo de guinada
$[A_{AE}]$	Matriz dinâmica do modelo aeroelástico em espaço de estados
$[A_{FD}]$	Matriz dinâmica do modelo de mecânica do voo completo em espaço de estados
$[A_{FD}^{lat}]$	Matriz dinâmica do modelo de mecânica do voo latero-direcional em espaço de estados
$[A_{FD}^{long}]$	Matriz dinâmica do modelo de mecânica do voo longitudinal em espaço de estados
$[A_{jj}]$	Matriz dos coeficientes de influência aerodinâmicos
$[B]$	Matriz de amortecimento
$[B_{AE}]$	Matriz de entrada do modelo aeroelástico em espaço de estados
$[B_{FD}]$	Matriz de entrada do modelo de mecânica do voo completo em espaço de estados
$[B_{FD}^{lat}]$	Matriz de entrada do modelo de mecânica do voo latero-direcional em espaço de estados
$[B_{FD}^{long}]$	Matriz de entrada do modelo de mecânica do voo longitudinal em espaço de estados
$[D_{jk}^1]$	Parte real da matriz que relaciona o <i>downwash</i> dos painéis devido ao deslocamento unitário de seus GDL
$[D_{jk}^2]$	Parte imaginária da matriz que relaciona o <i>downwash</i> dos painéis devido ao deslocamento unitário de seus GDL
$[D_{je}^1]$	Parte real da matriz que relaciona o <i>downwash</i> dos painéis devido ao deslocamento unitário dos <i>extra points</i>
$[D_{je}^2]$	Parte imaginária da matriz que relaciona o <i>downwash</i> dos painéis devido ao deslocamento unitário dos <i>extra points</i>
$[G_{kg}]$	Matriz de conexão entre os GDL estruturais e aerodinâmicos
$[I]$	Matriz identidade

$[K]$	Matriz de rigidez
$[M]$	Matriz de massa
$[Q_{hc}]$	Matriz aerodinâmica generalizada de superfícies de comando
$[Q_{hh}]$	Matriz aerodinâmica generalizada
$[S_{kj}]$	Matriz de integração
$[T_i^{BA}]$	Matriz representante do corpo rígido de um nó arbitrário “i”
$[W_{kk}]$	Matriz de fatores de correção empíricos
$[\phi]$	Matriz modal
$[\phi_R]$	Modos rígidos da matriz modal
$[\phi_F]$	Modos flexíveis da matriz modal
$\{F\}$	Vetor de forças externas
$\{F^a\}$	Forças aerodinâmicas induzidas pela deformação estrutural
$\{F^e\}$	Forças aerodinâmicas causadas pela deflexão de superfícies de controle
$\{u\}$	Vetor de deslocamento dos GDL
$\{U_{AE}\}$	Vetor de entrada do modelo aeroelástico
$\{U_{FD}\}$	Vetor de entrada do modelo de mecânica do voo completo
$\{U_{FD}^{lat}\}$	Vetor de entrada do modelo de mecânica do voo latero-direcional
$\{U_{FD}^{long}\}$	Vetor de entrada do modelo de mecânica do voo longitudinal
$\{x_a\}$	Vetor de estados aerodinâmicos
$\{X_{AE}\}$	Vetor de estados do modelo aeroelástico
$\{X_{AE}^F\}$	Vetor de estados flexíveis do modelo aeroelástico
$\{X_{AE}^R\}$	Vetor de estados rígidos do modelo aeroelástico
$\{X_{FD}\}$	Vetor de estados do modelo de mecânica do voo completo
$\{X_{FD}^{lat}\}$	Vetor de estados do modelo de mecânica do voo latero-direcional
$\{X_{FD}^{long}\}$	Vetor de estados do modelo de mecânica do voo longitudinal
$\{Y_{AE}\}$	Vetor com o sinal de saída do modelo aeroelástico em espaço de estados
$\{\delta\}$	Vetor de entrada de superfícies de comando
$\{\xi\}$	Coordenada modal generalizada

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>2 MODELO AEROELÁSTICO</b>	<b>17</b>
2.1 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO	17
2.2 MATRIZES GENERALIZADAS	20
2.3 REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS	23
<b>3 MODELO DE MECÂNICA DO VOO</b>	<b>27</b>
3.1 MODELO LONGITUDINAL	29
3.2 MODELO LATERO-DIRECIONAL	30
<b>4 INTEGRAÇÃO DOS MODELOS</b>	<b>32</b>
4.1 MODELO NÃO RESIDUALIZADO	32
4.2 MODELO RESIDUALIZADO	35
<b>5 APLICAÇÃO</b>	<b>38</b>
5.1 MODELO AEROELÁSTICO EM ELEMENTOS FINITOS	38
5.2 RFA E REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS	41
5.3 CRIAÇÃO DO MODELO DE MECÂNICA DO VOO	51
5.4 MODELO INTEGRADO	52
<b>6 CONCLUSÃO</b>	<b>59</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>60</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O projeto de uma aeronave envolve interações dentre diversas áreas do conhecimento, tais como: aerodinâmica, qualidade do voo, desempenho, estruturas, interiores, sistemas, aeroelasticidade, pesos, entre outros. Para que a aeronave projetada possua boa colocação no mercado frente aos concorrentes, é necessário que as áreas específicas trabalhem em conjunto para encontrar relações de compromisso que atendam aos requisitos impostos por cada disciplina. Em um primeiro momento, durante o projeto conceitual da aeronave, diversas técnicas de otimização multidisciplinar (MDO) são empregadas (Martins, et al., 2013). Entretanto, com o aumento da maturidade do projeto e a necessidade de detalhes, as áreas específicas começam a trabalhar de forma isolada.

A área de qualidade do voo tem interesse de garantir a estabilidade e o controle da aeronave durante todo o envelope de voo, bem como o conforto dos passageiros. O modelo de aeronave elaborado por esta área geralmente é baseado em equações não lineares de Newton-Euler que tratam a aeronave como um corpo rígido (Etkin, et al., 1996). Por outro lado, a área de aeroelasticidade tem o objetivo de identificar as deformações da estrutura e sua influência nas forças aerodinâmicas. Normalmente, a área pode ser dividida em duas: uma preocupada com fenômenos estáticos (como divergência e reversão de comando) e outra preocupada com fenômenos dinâmicos (como flutter, cargas de rajada e aeroservoelasticidade). O modelo de aeronave elaborado por esta área costuma ser baseado em equações lineares da deformação da estrutura construído em elementos finitos (Wright, et al., 2015). Em aeronaves *fly-by-wire*, a área de comandos de voo tem o objetivo de projetar uma lei de controle que interfere no comportamento da aeronave para promover segurança e conforto aos passageiros e facilidade para o piloto. Via de regra, o projeto da lei de controle é elaborado em torno do modelo de aeronave rígida fornecido pela equipe de mecânica do voo. Entretanto, a depender da característica do controle e do posicionamento do sensor inercial utilizado por ela, modos estruturais podem causar instabilidades quando em malha fechada, fenômeno conhecido como instabilidade aeroservoelástica. Para solucionar este problema, comumente é empregado o uso de filtros Notch na banda onde os modos flexíveis diminuem as margens de estabilidade exigidas na certificação da aeronave, de modo que a ação da lei de controle nessa banda seja atenuada. Entretanto, a implementação de filtros na lei de controle afeta de maneira indesejável a resposta da aeronave para baixas frequências, prejudicando seu desempenho e podendo acarretar em problemas como oscilação induzida pelo piloto (PIO). Além disso, a indústria aeronáutica está em constante evolução, buscando aeronaves mais eficientes e com

menor consumo de combustível. Assim, as grandes fabricantes de aeronaves projetam estruturas mais leves e flexíveis. Conseqüentemente, os primeiros modos estruturais aparecem em frequências cada vez mais baixas, ficando próximas às frequências dos modos de corpo rígido da aeronave. Dessa forma, a avaliação da aeronave utilizando modelos dinâmicos distintos para mecânica do voo e aeroelasticidade podem fornecer resultados imprecisos, e a utilização de filtros Notch pode ser ineficaz para a solução de instabilidades (Looye, 2007).

Tendo isso em vista, alguns autores desenvolveram metodologias que possibilitam a identificação dos modos de corpo rígido e flexíveis em um modelo dinâmico único. Meirovitch e Tuzcu (2003) apresentam diversos estudos realizados com a finalidade de integrar o modelo dinâmico de corpo rígido e flexível de uma aeronave. Segundo eles, uma das primeiras publicações foi realizada por Bisplinghoff e Ashley (1962), na qual foram desenvolvidas equações de translação, rotação e deformação sem acoplamento inercial, utilizando o referencial *mean axes* - referencial em que a quantidade de movimento linear e angular da estrutura deformada são nulas em todos os instantes. Guimarães Neto et al. (2016) fazem um estudo das equações de movimento para três diferentes referenciais no corpo, incluindo o *mean axes*. Juhasz et al. (2015) partem por uma metodologia diferente e utilizam identificação de sistema para obter um modelo latero-direcional acoplado de dinâmica do voo e aeroelástico. Looye (2007) apresenta uma metodologia para a integração entre modelos de mecânica do voo e aeroelástico em espaço de estados com um tratamento para que efeitos flexíveis quase-estáticos não sejam duplicados (caso o modelo de mecânica do voo já considere tais efeitos).

O presente trabalho é fruto de um projeto elaborado pelo departamento de Desenvolvimento de Tecnologia da Embraer em que participaram os(as) engenheiros(as) Ana Meinicke, Érica Yoshimatsu, Marco Alves, Marcos Pedras e Fernando Moreira. A aplicação apresentada no capítulo 5 deste trabalho foi gerada com auxílio das ferramentas desenvolvidas neste projeto e os resultados foram cedidos para este trabalho.

O texto está dividido em quatro partes:

1. Descrição da teoria envolvendo a preparação de um modelo aeroelástico em espaço de estados;
2. Apresentação de um modelo dinâmico simplificado de mecânica do voo;
3. Descrição da metodologia para a integração dos modelos em espaço de estados desenvolvidos nas partes 1 e 2;
4. Aplicação da teoria em uma aeronave genérica, mostrando resultados de análises com o modelo integrado.

## 2 MODELO AEROELÁSTICO

Um modelo aeroelástico deve descrever as interações entre as forças aerodinâmicas, forças inerciais e forças elásticas de uma estrutura flexível (Wright, et al., 2015). A medida em que a geometria das aeronaves torna-se cada vez mais complexa, equações analíticas que descrevem o modelo aeroelástico ficam mais difíceis de serem desenvolvidas com acuracidade. Dessa forma, um modelo estrutural em elementos finitos (FEM) acoplado a massas concentradas e a um modelo aerodinâmico costuma ser utilizado nos processos da indústria. Um dos softwares mais utilizados para a modelagem aeroelástica é o Nastran, desenvolvido originalmente pela NASA na década de 60.

Este capítulo é iniciado com uma breve introdução das equações que governam o movimento da aeronave. Em seguida, a metodologia apresentada tem como premissa a disponibilidade de um modelo aeroelástico em Nastran, o qual trabalha no domínio da frequência. O modelo em espaço de estados é, então, formulado através de um passo intermediário em que as forças aerodinâmicas são transformadas do domínio da frequência para o domínio de Laplace.

### 2.1 Equações do Movimento

A equação de movimento de um sistema reflete seu equilíbrio dinâmico entre forças inerciais, forças de amortecimento, elásticas, e externas (MSC Software Corporation, 2011), conforme Equação (1).

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [B]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{F(t)\} \quad (1)$$

onde

$[M]$  é a matriz de massa;

$[B]$  é a matriz de amortecimento;

$[K]$  é a matriz de rigidez;

$\{u(t)\}$  é o vetor de deslocamento dos GDL;

$\{F(t)\}$  é o vetor de forças externas.

Neste trabalho, as forças externas serão divididas em duas: forças aerodinâmicas induzidas pela deformação estrutural  $F^a$  e forças aerodinâmicas causadas pela deflexão de superfícies de controle  $F^e$ .

$$\{F(t)\} = \{F^a(t)\} + \{F^e(t)\} \quad (2)$$

A partir daqui, o subscrito de uma variável define o conjunto de nós (ou pontos) de um modelo de elementos finitos na qual ela é aplicada. O subscrito “g” refere-se ao conjunto de nós estruturais. Os subscritos “j” e “k” referem-se, respectivamente, aos pontos a três quartos e a um quarto de cada painel aerodinâmico. O subscrito “e” refere-se aos pontos extras que representam as superfícies de controle.

As forças aerodinâmicas aplicadas em um quarto da corda dos painéis devido às deformações estruturais são dadas pela Equação (3). A formulação das forças aerodinâmicas é apresentada de forma detalhada em (Zona Technology, 2017) e (MSC Software Corporation, 2015)

$$\{F_k^a(ik, t)\} = q_\infty [W_{kk}] [S_{kj}] [A_{jj}]^{-1} [D_{jk}^1 + ikD_{jk}^2] \{u_k(t)\} \quad (3)$$

onde

$q_\infty$  é a pressão dinâmica;

$[W_{kk}]$  é a matriz de fatores de correção empíricos;

$[S_{kj}]$  é a matriz de integração;

$[A_{jj}]$  é a matriz dos coeficientes de influência aerodinâmicos, função da frequência reduzida e do número de Mach;

$D_{jk}^1, D_{jk}^2$  são, respectivamente, a parte real e imaginária da matriz que relaciona o *downwash* dos painéis devido ao deslocamento unitário de seus GDL;

$\{u_k(t)\}$  é o vetor de deslocamento dos GDL aerodinâmicos;

$k$  é a frequência reduzida (diferente do subscrito “k” que refere-se ao conjunto de pontos a um quarto da corda de cada painel).

Para que a Equação (3) possa ser inserida na Equação (1) é necessário transferir as informações entre os GDL estruturais  $\{u_g\}$  e os GDL aerodinâmicos  $\{u_k\}$ . Assim, define-se uma matriz de spline  $[G_{kg}]$  tal que:

$$\{u_k\} = [G_{kg}]\{u_g\} \quad (4)$$

Logo, as forças aerodinâmicas aplicadas nos nós estruturais são:

$$\{F_g^a(ik, t)\} = q_\infty [G_{kg}]^T [W_{kk}] [S_{kj}] [A_{jj}]^{-1} [D_{jk}^1 + ikD_{jk}^2] [G_{kg}] \{u_g(t)\} \quad (5)$$

De maneira análoga, as forças aerodinâmicas nos nós estruturais devido a deflexão das superfícies de controle é obtida pela Equação (6).

$$\{F_g^e(ik, t)\} = q_\infty [G_{kg}]^T [W_{kk}] [S_{kj}] [A_{jj}]^{-1} [D_{je}^1 + ikD_{je}^2] \{u_e(t)\} \quad (6)$$

onde  $\{u_e(t)\}$  é o vetor com as deflexões de cada superfície de controle (2 ailerons, 2 profundores e 1 leme).  $D_{je}^1, D_{je}^2$  são, respectivamente, a parte real e imaginária que relaciona o *downwash* dos painéis devido a deflexão unitária de cada superfícies de controle.

Com as Equações (2), (5), (6) e desprezando as forças de amortecimento, a Equação (1) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} [M_{gg}]\{\ddot{u}_g(t)\} + [K_{gg}]\{u_g(t)\} \\ = q_\infty [G_{kg}]^T [W_{kk}] [S_{kj}] [A_{jj}]^{-1} [D_{jk}^1 + ikD_{jk}^2] [G_{kg}] \{u_g(t)\} \\ + q_\infty [G_{kg}]^T [W_{kk}] [S_{kj}] [A_{jj}]^{-1} [D_{je}^1 + ikD_{je}^2] \{u_e(t)\} \end{aligned} \quad (7)$$

Note que a modelagem realizada neste trabalho negligencia as forças inerciais de reação causadas pela própria deflexão das superfícies de controle.

Para reduzir a dimensão da Equação (7), as coordenadas físicas  $\{u_g\}$  são substituídas por coordenadas modais  $\{\xi(t)\}$  conforme Equação (8), onde  $[\phi]$  é a matriz modal do sistema livre de forças externas.

$$\begin{aligned} \{u_g(t)\} &= [\phi]\{\xi(t)\} \\ \{\ddot{u}_g(t)\} &= [\phi]\{\ddot{\xi}(t)\} \\ \{u_e(t)\} &= \{\delta(t)\} \end{aligned} \quad (8)$$

Substituindo a Equação (8) na Equação (7) e multiplicando todos os termos da igualdade por  $[\phi]^T$  pela esquerda, obtém-se:

$$\begin{aligned}
[M_{hh}]\{\ddot{\xi}(t)\} + [K_{hh}]\{\xi(t)\} \\
= q_{\infty}[\phi]^T [G_{kg}]^T [W_{kk}][S_{kj}][A_{jj}]^{-1}[D_{jk}^1 + ikD_{jk}^2][G_{kg}][\phi]\{\xi(t)\} \\
+ q_{\infty}[\phi]^T [G_{kg}]^T [W_{kk}][S_{kj}][A_{jj}]^{-1}[D_{je}^1 + ikD_{je}^2]\{\delta(t)\}
\end{aligned} \quad (9)$$

onde

$[M_{hh}] = [\phi]^T [M_{gg}][\phi]$  é a matriz de massa generalizada;

$[K_{hh}] = [\phi]^T [K_{gg}][\phi]$  é a matriz de rigidez generalizada.

Dois termos conhecidos podem ser identificados na Equação (9), são eles:

$$\begin{aligned}
[Q_{hh}(ik)] &= [\phi]^T [G_{kg}]^T [W_{kk}][S_{kj}][A_{jj}]^{-1}[D_{jk}^1 + ikD_{jk}^2][G_{kg}][\phi] \\
[Q_{hc}(ik)] &= [\phi]^T [G_{kg}]^T [W_{kk}][S_{kj}][A_{jj}]^{-1}[D_{je}^1 + ikD_{je}^2]
\end{aligned} \quad (10)$$

Com isso, a equação do movimento aeroelástica em coordenadas modais no domínio do tempo é dada pela Equação (11).

$$[M_{hh}]\{\ddot{\xi}(t)\} + [K_{hh}]\{\xi(t)\} = q_{\infty}([Q_{hh}(ik)]\{\xi(t)\} + [Q_{hc}(ik)]\{\delta(t)\}) \quad (11)$$

## 2.2 Matrizes Generalizadas

Na prática, a indústria aeronáutica elabora o modelo aeroelástico dinâmico no software comercial Nastran utilizando o método de elementos finitos para a estrutura e o solver aerodinâmico *Doublet Lattice Method* (DLM), os quais são conectados através de *splines*. Dessa forma, esta secção visa trabalhar os termos da Equação (11) extraídos do Nastran.

A solução 103 do Nastran pode ser utilizada para calcular a matriz modal  $[\phi]$  da aeronave e seus autovalores  $\lambda$ . Com a aeronave na condição livre-livre, os 6 primeiros autovetores representam modos de corpo rígido com frequências zero. Os modos seguintes caracterizam os modos flexíveis da aeronave. A Equação (12) separa os modos de corpo rígido dos modos flexíveis.

$$[\phi] = [\phi_R \quad \phi_F] \quad (12)$$

Para acelerar o processamento das análises pelo Nastran, a matriz modal, que é ortogonal em relação às matrizes de massa  $[M_{gg}]$  e rigidez  $[K_{gg}]$  (Thomson, et al., 1998), é ainda normalizada em relação a massa de tal forma que a matriz de massa generalizada tem a forma de matriz identidade de ordem igual ao número de modos  $n_h$ :

$$[M_{hh}] = [\phi]^T [M_{gg}] [\phi] = [I_{hh}] \quad (13)$$

A rigidez associada a um modo arbitrário “ $n$ ”,  $K_n$ , pode ser obtida através da sua relação com a frequência natural  $\omega_n$  (raiz quadrada do autovalor  $\lambda_n$ ) e massa modal  $M_n = 1$ , conforme Equação (14). Com isso, a matriz de rigidez generalizada é calculada pela Equação (15).

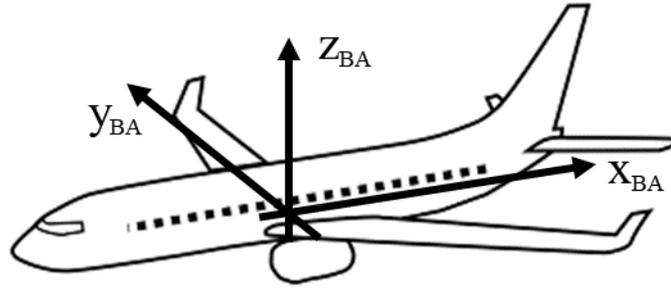
$$\omega_n^2 = \lambda_n = \frac{K_n}{M_n} \quad (14)$$

$$[K_{hh}] = \text{diag}([K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_n \quad \dots \quad K_h]) \quad (15)$$

Por fim, as matrizes aerodinâmicas generalizadas  $[Q_{hh}(ik)]$  e  $[Q_{hc}(ik)]$  são geradas em função da frequência reduzida e do número de Mach pelo Nastran utilizando o *Doublet Lattice Method* (DLM) para o cálculo da aerodinâmica não estacionária. Para a matriz  $[Q_{hc}(ik)]$ , *extra points* são adicionados ao modelo e utilizados como representantes das superfícies de controle, conforme explicado em (MSC Software Corporation, 2015). A pressão dinâmica, único parâmetro da Equação (11) que não é obtido, é deixada como variável para que o modelo seja representativo em qualquer condição de voo desde que obedeça ao número de Mach estabelecido.

Como a Equação (13) é satisfeita pelo processo do Nastran, os 6 modos de corpo rígido  $\phi_R$  não necessariamente representam o deslocamento (e rotação) unitário nos eixos do corpo da aeronave (*body axes*, BA), conforme Figura 1.

Figura 1 – Referencial do corpo para aeroelasticidade (BA).



Para que o movimento de corpo rígido seja descrito no referencial dos eixos do corpo, as 6 primeiras colunas da matriz modal  $[\phi]$  devem ser substituídas pelo movimento de cada GDL gerado a partir de translações e rotações unitárias em torno do CG. Em seguida, as matrizes generalizadas  $[M_{hh}]$ ,  $[K_{hh}]$ ,  $[Q_{hh}(ik)]$  e  $[Q_{hc}(ik)]$  devem ser adequadas ao novo referencial.

Para um nó estrutural arbitrário “j”, o deslocamento de seus 6 GDL no referencial do corpo devido aos 6 movimentos de corpo rígido no CG da aeronave, linearizados, é dado por:

$$\{\delta u\}_j = [T_j^{BA}]\{\delta u\}_{CG} \quad (16)$$

onde

$\{\delta u\}_j$  é o vetor contendo os 6 GDL do grid “j”;

$\{\delta u\}_{CG}$  é o vetor contendo os 6 GDL da aeronave rígida;

$$[T_j^{BA}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta z_j & -\Delta y_j \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta z_j & 0 & \Delta x_j \\ 0 & 0 & 1 & \Delta y_j & -\Delta x_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta x_j &= x_j - x_{CG} \\ \Delta y_j &= y_j - y_{CG} \\ \Delta z_j &= z_j - z_{CG} \end{aligned}$$

$x_j$ ,  $y_j$  e  $z_j$  são as posições do nó “j” em relação ao referencial inercial;

$x_{CG}$ ,  $y_{CG}$  e  $z_{CG}$  são as posições do CG em relação ao referencial inercial.

A matriz contendo os modos de corpo rígido no referencial BA pode, então, ser escrita através da Equação (17), onde  $n_{grid}$  é o número de nós estruturais. O Nastran ordena os nós em ordem crescente de ID. Assim,  $j = 1$  representa o nó com menor ID e  $j = n_{grid}$  representa o nó com maior ID.

$$[\phi_R^{BA}] = \begin{bmatrix} T_1^{BA} \\ T_2^{BA} \\ \vdots \\ T_j^{BA} \\ \vdots \\ T_{n_{grid}}^{BA} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Portanto, a matriz modal no referencial do eixo do corpo é escrita como:

$$[\phi^{BA}] = [\phi_R^{BA} \quad \phi_F] \quad (18)$$

Avaliando as Equações (10), (13) e (15), conclui-se que as matrizes generalizadas adequadas ao novo referencial de corpo rígido podem ser calculadas através do conjunto de Equações (19). Vale ressaltar que, ao fim deste processo, a matriz  $[M_{hh}^{BA}]$  deve trazer informações sobre a massa, momento de inércia e produto de inércia da aeronave.

$$\begin{aligned} [M_{hh}^{BA}] &= [\phi^{BA}]^T [\phi]^{T^{-1}} [I_{hh}] [\phi]^{-1} [\phi^{BA}] \\ [K_{hh}^{BA}] &= [K_{hh}] \\ [Q_{hh}^{BA}] &= [\phi^{BA}]^T [\phi]^{T^{-1}} [Q_{hh}] [\phi]^{-1} [\phi^{BA}] \\ [Q_{hc}^{BA}] &= [\phi^{BA}]^T [\phi]^{T^{-1}} [Q_{hc}] \end{aligned} \quad (19)$$

onde  $[\phi]^{-1}$  e  $[\phi]^{T^{-1}}$  são, respectivamente, a pseudoinversa das matrizes  $[\phi]$  e  $[\phi]^T$ . Como a matriz modal é ortogonal somente em relação às matrizes de massa e rigidez,  $[\phi]^{-1} \neq [\phi]^T$ .

Com isso, a equação do movimento aeroelástica para a aeronave fica definida, sendo as 6 primeiras coordenadas generalizadas equivalente ao movimento de corpo rígido nos eixos BA.

### 2.3 Representação em Espaço de Estados

Para facilitar a integração do modelo aeroelástico com o modelo de mecânica do voo da aeronave e com sua lei de controle, as equações aeroelásticas são representadas no domínio do tempo em espaço de estados. Entretanto, as forças aerodinâmicas não estacionárias, apresentadas na Equação (10), são dadas em função da frequência reduzida. Dessa forma, utiliza-se uma metodologia conhecida como *Rational Function Approximation* (RFA), na qual

as matrizes aerodinâmicas generalizadas são descritas por funções racionais (razão de polinômios) no domínio de Laplace e, somente então, a equação de movimento pode ser escrita em espaço de estados. Os detalhes do equacionamento estão disponíveis em (Zona Technology, 2017).

A Equação (20) apresenta a forma proposta para a aproximação da matriz aerodinâmica generalizada.

$$\begin{aligned} [\tilde{Q}(s)] &= [\tilde{Q}_{hh}(s) \quad \tilde{Q}_{hc}(s)] \\ &= [A_0] + \frac{L}{V}[A_1]s + \frac{L^2}{V^2}[A_2]s^2 + [D] \left[ s[I] - \frac{V}{L}[R] \right]^{-1} [E]s \end{aligned} \quad (20)$$

onde:

$s$  é a variável de Laplace;

$L$  é o comprimento característico;

$V$  é a velocidade verdadeira do ar;

$[A_0] = [A_{hh_0} \quad A_{hc_0}]$  representa a rigidez aerodinâmica;

$[A_1] = [A_{hh_1} \quad A_{hc_1}]$  representa o amortecimento aerodinâmico;

$[A_2] = [A_{hh_2} \quad A_{hc_2}]$  representa a massa aparente aerodinâmica;

$[R]$  é uma matriz diagonal contendo as raízes de *lags* aerodinâmicos;

As raízes dos *lags* aerodinâmicos são utilizadas para modelar o atraso aerodinâmico consequente do regime não-estacionário. Seus valores são obtidos através de uma equação empírica (Equação (21)) fornecida por (Zona Technology, 2017), onde  $k_{max}$  é o maior valor de frequência reduzida calculado e  $n_{lag}$  é o número de lags utilizados na RFA. Quanto maior o número de lags, menor será o erro obtido. Entretanto, um grande número de lags pode causar um sobreajuste da matriz aerodinâmica, prejudicando o modelo.

$$R_i = -1,7k_{max} \left( \frac{i}{n_{lag} + 1} \right)^2, i = 1, 2, \dots, n_{lag} \quad (21)$$

Essencialmente, a RFA é um processo na qual o método dos mínimos quadrados é utilizado para ajustar a matriz aerodinâmica generalizada em cada frequência reduzida calculada, de tal forma que:

$$\left[ \tilde{Q} \left( \frac{V}{L} ik_l \right) \right] = [A_0] + [A_1](ik_l) + [A_2](ik_l)^2 + [D][(ik_l)[I] - [R]]^{-1}[E](ik_l) \quad (22)$$

$$\approx [Q_{hh}^{BA}(ik_l) \quad Q_{hc}^{BA}(ik_l)]$$

onde  $l = 1, 2, \dots, n_k$  e  $n_k$  é o número de frequências reduzidas calculadas.

Dois autores propõem uma metodologia para solucionar a Equação (22), (Roger, 1977) e (Karpel, 1981). O método de Roger assume os elementos da matriz  $[D]$  e calcula os elementos das matrizes  $[A_0]$ ,  $[A_1]$ ,  $[A_2]$  e  $[E]$  utilizando  $n_{lags} \times n_h$  estados aerodinâmicos, onde  $n_h$  é o número de modos calculados. Por outro lado, o método de Karpel, conhecido como *minimum states*, calcula os valores de  $[A_0]$ ,  $[A_1]$ ,  $[A_2]$ ,  $[E]$  e  $[D]$  utilizando  $n_{lags}$  estados aerodinâmicos. Neste trabalho, utilizou-se o método de Roger.

Realizada a RFA, a Equação (20) pode ser inserida na Equação (11):

$$[M_{hh}]\{\ddot{\xi}(t)\} + [K_{hh}]\{\xi(t)\} = q_\infty \left[ [A_{hh_0}]\{\xi\} + \frac{L}{V}[A_{hh_1}]\{\dot{\xi}\} + \frac{L^2}{V^2}[A_{hh_2}]\{\ddot{\xi}\} \right] + q_\infty \left[ [A_{hc_0}]\{\delta\} + \frac{L}{V}[A_{hc_1}]\{\dot{\delta}\} + \frac{L^2}{V^2}[A_{hc_2}]\{\ddot{\delta}\} \right] + q_\infty [D]\{x_a\} \quad (23)$$

onde  $\{x_a\} = \left[ s[I] - \frac{V}{L}[R] \right]^{-1} [[E_h]\{\xi\} + [E_c]\{\delta\}]s$  é o vetor de estados aerodinâmicos.

A Equação (23) pode ser rearranjada em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem formando a equação do movimento aeroelástico em espaço de estados, conforme (Zona Technology, 2017):

$$\{\dot{X}_{AE}\} = [A_{AE}]\{X_{AE}\} + [B_{AE}]\{U_{AE}\} \quad (24)$$

$$[A_{AE}] = \begin{bmatrix} [0] & [I] & [0] \\ -[\bar{M}]^{-1} [[K_{hh}] - q_\infty [A_{hh_0}]] & -[\bar{M}]^{-1} [[B_{hh}] - q_\infty [A_{hh_1}]] & q_\infty [\bar{M}]^{-1} [D] \\ [0] & [E_h] & \frac{V}{L} [R] \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$(26)$$

$$[B_{AE}] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ q_{\infty} [\bar{M}]^{-1} [A_{hc_0}] & q_{\infty} \frac{L}{V} [\bar{M}]^{-1} [A_{hc_1}] & -[\bar{M}]^{-1} \left[ [M_{hc}] - q_{\infty} \frac{L^2}{V^2} [A_{hc_2}] \right] \\ [0] & [E_c] & [0] \end{bmatrix}$$

O vetor de estado e o vetor de entrada são, respectivamente:

$$\{X_{AE}\} = \{\xi \quad \dot{\xi} \quad x_a\}^T \quad (27)$$

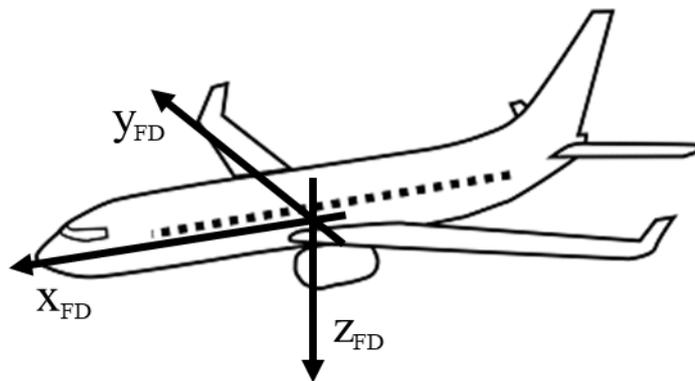
$$\{U_{AE}\} = \{\delta \quad \dot{\delta} \quad \ddot{\delta}\}^T \quad (28)$$

Uma vez formada a equação aeroelástica do sistema, o sinal de saída  $\{Y_{AE}\}$  do modelo em espaço de estados pode ser montado de acordo com o interesse da análise. Para análises de aeroservoelasticidade, pode-se montar a equação de saída com os sinais de deslocamento, velocidade e aceleração do grid que representa o sensor da lei de controle. Para análises de cargas, pode-se obter os esforços atuando nos grids desejados.

### 3 MODELO DE MECÂNICA DO VOO

O modelo dinâmico de mecânica do voo deste trabalho foi baseado nos modelos apresentados por (Nelson, 1989) e (Etkin, et al., 1996). O movimento da aeronave é descrito nos eixos do corpo de modo semelhante ao apresentado na Figura 1. Entretanto, existem diferenças entre o referencial BA e o referencial utilizado em mecânica de voo, referencial FD (Figura 2), que serão abordadas durante a integração dos modelos.

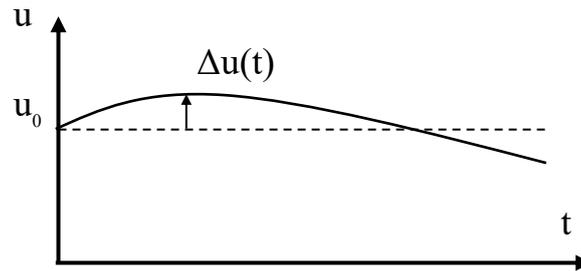
Figura 2 - Referencial do corpo para mecânica do voo (FD).



Três hipóteses foram assumidas durante o desenvolvimento das equações:

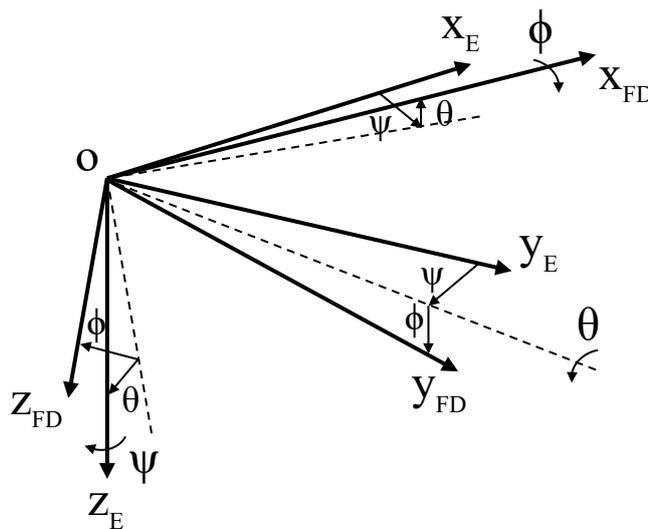
1. O movimento da aeronave consiste de pequenas perturbações em torno de seu ponto de equilíbrio (trimagem), possibilitando que as equações sejam linearizadas (ver Figura 3).
2. O acoplamento entre o movimento longitudinal (aqueles com translação nos eixos  $X$  e  $Z$  e rotação de arfagem) e o movimento latero-direcional (aqueles com translação em  $Y$  e rotação de guinada e rolagem) é negligenciado. Dessa forma, o movimento da aeronave pode ser representado por dois sistemas de equações independentes.
3. Os efeitos elásticos são tratados como quase-estáticos. Isto é, os movimentos elásticos ocorrem muito mais rápido do que os movimentos de corpo rígido. Assim, não há GDL elásticos no modelo, mas as derivadas de estabilidade foram obtidas considerando a deformação estática da geometria.

Figura 3 - Teoria das pequenas perturbações em um estado arbitrário.



A nomenclatura utilizada para as forças, momentos e velocidades é apresentada na Tabela 1. A Figura 4 mostra a relação entre os referenciais terrestre e do corpo através dos ângulos de Euler  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ . Três superfícies de controle são consideradas: aileron ( $\delta a$ ), profundor ( $\delta e$ ) e leme ( $\delta r$ ).

Figura 4 - Relação entre Referencial terrestre (E) e Mecânica do voo (FD) através dos ângulos de Euler.



Fonte: adaptado de (Eshelby, 2000).

Tabela 1 - Nomenclatura de forças, momentos e velocidades.

	Eixo de rolagem $x$	Eixo de arfagem $y$	Eixo de guinada $z$
Velocidades de translação	$u$	$v$	$w$
Velocidades de rotação	$p$	$q$	$r$
Forças aerodinâmicas	$X$	$Y$	$Z$
Momentos aerodinâmicos	$L$	$M$	$N$

### 3.1 Modelo Longitudinal

O modelo longitudinal em espaço de estados desenvolvido por (Etkin, et al., 1996) é dado por:

$$\{\dot{X}_{FD}^{long}\} = [A_{FD}^{long}]\{X_{FD}^{long}\} + [B_{FD}^{long}]\{U_{FD}^{long}\} \quad (29)$$

$$[A_{FD}^{long}] = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} & 0 & -g\cos(\theta_0) \\ \frac{Z_u}{m - Z_{\dot{w}}} & \frac{Z_w}{m - Z_{\dot{w}}} & \frac{Z_q + mu_0}{m - Z_{\dot{w}}} & \frac{-mg\sin(\theta_0)}{m - Z_{\dot{w}}} \\ \frac{1}{I_y} \left( M_u + \frac{M_{\dot{w}}Z_u}{m - Z_{\dot{w}}} \right) & \frac{1}{I_y} \left( M_w + \frac{M_{\dot{w}}Z_w}{m - Z_{\dot{w}}} \right) & \frac{1}{I_y} \left( M_q + \frac{M_{\dot{w}}(Z_q + mu_0)}{m - Z_{\dot{w}}} \right) & \frac{-M_{\dot{w}}mg\sin(\theta_0)}{I_y(m - Z_{\dot{w}})} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$[B_{FD}^{long}] = \begin{bmatrix} \frac{X_{\delta e}}{m} \\ \frac{Z_{\delta e}}{(m - Z_{\dot{w}})} \\ \frac{M_{\delta e}}{I_y} + \frac{M_{\dot{w}}Z_{\delta e}}{I_y(m - Z_{\dot{w}})} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

O vetor de estado e o vetor de entrada longitudinais são, respectivamente:

$$\{X_{FD}^{long}\} = \{u \quad w \quad q \quad \theta\}^T \quad (32)$$

$$\{U_{FD}^{long}\} = \{\delta e\} \quad (33)$$

Em análises de mecânica do voo é comum encontrar a entrada de tração do motor no vetor de entrada. Como não é o objetivo deste trabalho estudar os efeitos da tração na dinâmica do voo, somente o profundor foi utilizado como entrada no modelo longitudinal.

As derivadas de estabilidade utilizadas nas Equações (30) e (31) são definidas em função de coeficientes adimensionais, condições de voo e parâmetros geométricos da aeronave, conforme Tabela 2, onde:  $\rho$  é a densidade do ar;  $S$  é a área de referência;  $\bar{c}$  é a corda média aerodinâmica;  $u_0$  é a componente longitudinal da velocidade da aeronave trimada;  $C_{w_0}$  é o coeficiente de sustentação da aeronave trimada;  $\theta_0$  é o ângulo entre o eixo longitudinal e o plano terrestre da aeronave trimada.

Tabela 2 - Derivadas de estabilidade dimensionais longitudinais.

	X	Z	M
$u$	$\frac{1}{2}\rho u_0 S(2C_{w_0} \sin(\theta_0) + C_{X_u})$	$\frac{1}{2}\rho u_0 S(C_{Z_u} - 2C_{w_0} \cos(\theta_0))$	$\frac{1}{2}\rho u_0 \bar{c} S C_{m_u}$
$w$	$\frac{1}{2}\rho u_0 S C_{X_\alpha}$	$\frac{1}{2}\rho u_0 S C_{Z_\alpha}$	$\frac{1}{2}\rho u_0 \bar{c} S C_{m_\alpha}$
$q$	$\frac{1}{4}\rho u_0 \bar{c} S C_{X_q}$	$\frac{1}{4}\rho u_0 \bar{c} S C_{Z_q}$	$\frac{1}{4}\rho u_0 \bar{c}^2 S C_{m_q}$
$\dot{w}$	$\frac{1}{4}\rho \bar{c} S C_{X_{\dot{\alpha}}}$	$\frac{1}{4}\rho \bar{c} S C_{Z_{\dot{\alpha}}}$	$\frac{1}{4}\rho \bar{c}^2 S C_{m_{\dot{\alpha}}}$
$\delta e$	$\frac{1}{2}\rho u_0^2 S C_{X_{\delta e}}$	$\frac{1}{2}\rho u_0^2 S C_{Z_{\delta e}}$	$\frac{1}{2}\rho u_0^2 \bar{c} S C_{m_{\delta e}}$

### 3.2 Modelo Latero-direcional

O modelo latero-direcional em espaço de estados desenvolvido por (Etkin, et al., 1996) é dado por:

$$\{\dot{X}_{FD}^{lat}\} = [A_{FD}^{lat}]\{X_{FD}^{lat}\} + [B_{FD}^{lat}]\{U_{FD}^{lat}\} \quad (34)$$

$$[A_{FD}^{lat}] = \begin{bmatrix} \frac{Y_v}{m} & \frac{Y_p}{m} & \left(\frac{Y_r}{m} - u_0\right) & g \cos(\theta_0) \\ \left(\frac{L_v}{I'_x} + I'_{xz} N_v\right) & \left(\frac{L_p}{I'_x} + I'_{xz} N_p\right) & \left(\frac{L_r}{I'_x} + I'_{xz} N_r\right) & 0 \\ \left(I'_{xz} L_v + \frac{N_v}{I'_z}\right) & \left(I'_{xz} L_p + \frac{N_p}{I'_z}\right) & \left(I'_{xz} L_r + \frac{N_r}{I'_z}\right) & 0 \\ 0 & 1 & \tan(\theta_0) & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$[B_{FD}^{lat}] = \begin{bmatrix} \frac{Y_{\delta r}}{m} & \frac{Y_{\delta a}}{m} \\ \left(\frac{L_{\delta r}}{I'_x} + I'_{xz} N_{\delta r}\right) & \left(\frac{L_{\delta a}}{I'_x} + I'_{xz} N_{\delta a}\right) \\ \left(I'_{xz} L_{\delta r} + \frac{N_{\delta r}}{I'_z}\right) & \left(I'_{xz} L_{\delta a} + \frac{N_{\delta a}}{I'_z}\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$I'_x = \frac{(I_x I_z - I_{xz}^2)}{I_z} \quad (37)$$

$$I'_z = \frac{(I_x I_z - I_{xz}^2)}{I_x} \quad (38)$$

$$I'_{xz} = \frac{I_{xz}}{(I_x I_z - I_{xz}^2)} \quad (39)$$

O vetor de estado e o vetor de entrada latero-direcionais são, respectivamente:

$$\{X_{FD}^{lat}\} = \{v \quad p \quad r \quad \phi\}^T \quad (40)$$

$$\{U_{FD}^{lat}\} = \{\delta r \quad \delta a\} \quad (41)$$

As derivadas de estabilidade utilizadas nas Equações (35) e (36) são definidas em função de coeficientes adimensionais, condições de voo e parâmetros geométricos da aeronave, conforme Tabela 3, onde  $b$  é a envergadura da asa;

**Tabela 3 - Derivadas de estabilidade dimensionais latero-direcionais.**

	$Y$	$L$	$N$
$v$	$\frac{1}{2}\rho u_0 S C_{Y\beta}$	$\frac{1}{2}\rho u_0 b S C_{l\beta}$	$\frac{1}{2}\rho u_0 b S C_{n\beta}$
$p$	$\frac{1}{4}\rho u_0 b S C_{Yp}$	$\frac{1}{4}\rho u_0 b^2 S C_{lp}$	$\frac{1}{4}\rho u_0 b^2 S C_{np}$
$r$	$\frac{1}{4}\rho u_0 b S C_{Yr}$	$\frac{1}{4}\rho u_0 b^2 S C_{lr}$	$\frac{1}{4}\rho u_0 b^2 S C_{nr}$
$\delta a$	$\frac{1}{2}\rho u_0^2 S C_{Y\delta a}$	$\frac{1}{2}\rho u_0^2 S b C_{l\delta a}$	$\frac{1}{2}\rho u_0^2 S b C_{n\delta a}$
$\delta r$	$\frac{1}{2}\rho u_0^2 S C_{Y\delta r}$	$\frac{1}{2}\rho u_0^2 S b C_{l\delta r}$	$\frac{1}{2}\rho u_0^2 S b C_{n\delta r}$

## 4 INTEGRAÇÃO DOS MODELOS

Com os modelos aeroelástico (AE) e de mecânica do voo (FD), ambos em espaço de estados, disponíveis, o modelo integrado pode ser construído. Segundo (Looye, 2007), duas sobreposições devem ser tratadas com atenção:

1. O modelo aeroelástico também possui os modos de corpo rígido que representam o movimento de mecânica do voo;
2. Os coeficientes de estabilidade do modelo de mecânica do voo podem ser obtidos considerando as deformações estruturais quase-estáticas sobre o *jig-shape* da aeronave.

Com isso, o modelo integrado deve utilizar os efeitos apresentados acima providos de apenas uma fonte. O modelo de mecânica do voo geralmente é ajustado a partir de ensaios em túnel de vento e validado com ensaios em voo, enquanto o modelo aeroelástico possui imprecisões no cálculo do arrasto e das forças estacionárias obtidas pelo DLM. Portanto, o modelo de mecânica do voo é considerado mais fiel ao movimento de corpo rígido e será preservado.

### 4.1 Modelo Não Residualizado

Basicamente, a integração dos modelos realizada por (Looye, 2007) consiste em substituir a dinâmica de corpo rígido do modelo aeroelástico pela dinâmica de mecânica do voo. Para que a substituição possa ser realizada, é necessário que os estados da parte rígida do modelo aeroelástico representem os mesmos estados do modelo de mecânica do voo.

Um modelo de mecânica do voo pode ser obtido através da concatenação das Equações (29) e (34) em um único sistema de espaço de estados. Além disso, para que todos os GDL sejam caracterizados (3 translações e 3 rotações, além de suas primeiras derivadas) é imprescindível que 4 relações cinemáticas sejam inseridas no modelo, totalizando 12 estados de corpo rígido. As equações cinemáticas fornecidas por (Etkin, et al., 1996) são apresentadas abaixo, lembrando que as equações são linearizadas no ponto de trimagem e somente as variáveis com subscrito “0” representam seu valor médio (não perturbado).

$$\dot{x} = u \cos(\theta_0) + w \sin(\theta_0) - u_0 \theta \sin(\theta_0) \quad (42)$$

$$\dot{z} = -u \sin(\theta_0) + w \cos(\theta_0) - u_0 \theta \cos(\theta_0) \quad (43)$$

$$\dot{\psi} = r \sec(\theta_0) \quad (44)$$

$$\dot{y} = u_0 \psi \cos(\theta_0) + v \quad (45)$$

Assim, o modelo de mecânica do voo pode ser construído como:

$$\{\dot{X}_{FD}\} = [A_{FD}]\{X_{FD}\} + [B_{FD}]\{U_{FD}\} \quad (46)$$

Os estados e entradas do modelo de mecânica do voo são, geralmente, ordenados tais que:

$$\{X_{FD}\} = \{u \quad w \quad q \quad \theta \quad x \quad z \quad v \quad p \quad r \quad \phi \quad \psi \quad y\}^T \quad (47)$$

$$\{U_{FD}\} = \{\delta a \quad \delta e \quad \delta r\}^T \quad (48)$$

Com isso, o modelo aeroelástico deve ser trabalhado para que seus modos de corpo rígido retratem os mesmos estados de  $X_{FD}$ . O primeiro passo é separar os estados rígidos  $X_{AE}^R$  dos flexíveis  $X_{AE}^F$  na Equação (27) e reordená-los (os *lags* aerodinâmicos são considerados estados flexíveis):

$$\{X_{AE}\} = \{X_{AE}^R \quad X_{AE}^F\} = \{\xi_R \quad \dot{\xi}_R \quad \xi_F \quad \dot{\xi}_F \quad x_\alpha\}^T \quad (49)$$

A partir de então, a matriz  $[A_{AE}]$  pode ser subdividida em:

$$[A_{AE}] = \begin{bmatrix} A_{AE}^R & A_{AE}^{RF} \\ A_{AE}^{FR} & A_{AE}^F \end{bmatrix} \quad (50)$$

onde:

$A_{AE}^R$  é a submatriz que representa a dinâmica de corpo rígido;

$A_{AE}^F$  é a submatriz que representa a dinâmica de corpo flexível;

$A_{AE}^{RF}$  é a submatriz de acoplamento do corpo flexível para o corpo rígido;

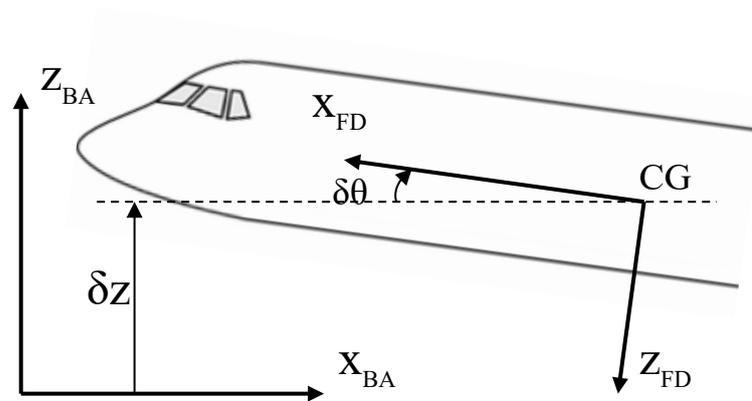
$A_{AE}^{FR}$  é a submatriz de acoplamento do corpo rígido para o flexível;

Os estados de corpo rígido do modelo aeroelástico foram definidos com a projeção das 6 primeiras colunas da matriz modal no referencial BA, descrito durante o desenvolvimento do modelo aeroelástico. Esses estados caracterizam o deslocamento unitário de translação e rotação nos eixos do corpo BA, bem como suas primeiras derivadas, conforme Equação (51).

$$\{X_{AE}^R\} = \{\xi_R \quad \dot{\xi}_R\}^T = \{x_T \quad y_T \quad z_T \quad x_R \quad y_R \quad z_R \quad \dot{x}_T \quad \dot{y}_T \quad \dot{z}_T \quad \dot{x}_R \quad \dot{y}_R \quad \dot{z}_R\}^T \quad (51)$$

Entretanto, ainda assim existem diferenças entre o referencial BA e o referencial FD. A primeira diferença encontrada é o diferente sentido dos eixos x e z. Em segundo lugar, o referencial BA é inercial enquanto o referencial FD é fixo ao corpo da aeronave. A Figura 5 exibe a diferença entre os referenciais. Como consequência, uma nova transformação de coordenadas, além da reordenação de estados, deve ser realizada para que  $\{X_{AE}^R\}$  seja equivalente a  $\{X_{FD}\}$ .

Figura 5 - Diferença entre os referenciais BA e FD.



Fonte: adaptado de (Looye, 2007).

As equações a seguir relacionam os estados aeroelásticos rígidos (lado esquerdo) e os estados de mecânica do voo (lado direito). Os termos de segunda ordem, como multiplicação entre duas perturbações, foram negligenciados.

$$\begin{aligned} x_T &= -x \\ y_T &= y \\ z_T &= -z \\ x_R &= -\phi \\ y_R &= \theta \\ z_R &= -\psi \\ \dot{x}_T &= -u \\ \dot{y}_T &= v + u_0\psi \\ \dot{z}_T &= -w + u_0\theta \\ \dot{x}_R &= -p \\ \dot{y}_R &= q \\ \dot{z}_R &= -r \end{aligned} \quad (52)$$

A matriz  $[B_{AE}]$  e as entradas  $\{U_{AE}\}$  devem ser trabalhadas de forma análoga ao que foi apresentado para a matriz  $[A_{AE}]$  e os estados  $\{X_{AE}^R\}$ .

$$[B_{AE}] = \begin{bmatrix} B_{AE}^R \\ B_{AE}^F \end{bmatrix} \quad (53)$$

Por convenção, as entradas de aileron ( $\delta a$ ), profundor ( $\delta e$ ) e leme ( $\delta r$ ) respeitam a regra da mão direita. As relações entre as entradas de mecânica do voo e as entradas aeroelásticas (estas tratam individualmente cada superfície) são dadas por:

$$\delta a_{Left}^{AE} = -\frac{1}{2} \delta a^{FD} \quad \delta a_{Right}^{AE} = \frac{1}{2} \delta a^{FD} \quad (54)$$

$$\delta e_{Left}^{AE} = \delta e^{FD} \quad \delta e_{Right}^{AE} = \delta e^{FD} \quad (55)$$

$$\delta r^{AE} = -\delta r^{FD} \quad (56)$$

Finalizada a transformação de coordenadas dos estados aeroelásticos para os estados de mecânica do voo, as submatrizes de corpo rígido do modelo aeroelástico podem ser substituídas pelas matrizes de mecânica do voo, formando um sistema em espaço de estados do modelo integrado:

$$\begin{Bmatrix} \dot{X}_{FD} \\ \dot{X}_{AE}^F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{FD} & A_{AE}^{RF} \\ A_{AE}^{FR} & A_{AE}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{FD} \\ X_{AE}^F \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{FD} & 0 & 0 \\ B_{AE0}^F & B_{AE1}^F & B_{AE2}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{FD} \\ \dot{U}_{FD} \\ \ddot{U}_{FD} \end{Bmatrix} \quad (57)$$

onde:

$$\begin{Bmatrix} U_{FD} \\ \dot{U}_{FD} \\ \ddot{U}_{FD} \end{Bmatrix} = \{\delta a \quad \delta e \quad \delta r \quad \delta \dot{a} \quad \delta \dot{e} \quad \delta \dot{r} \quad \delta \ddot{a} \quad \delta \ddot{e} \quad \delta \ddot{r}\}^T \text{ é o vetor de entrada;}$$

$$[B_{AE0}^F \quad B_{AE1}^F \quad B_{AE2}^F] = [B_{AE}^F] \text{ obtido na Equação (53).}$$

Como o modelo de mecânica do voo não prevê entradas de velocidade e aceleração das superfícies de controle, suas influências no corpo rígido foram anuladas visando a fidelidade do modelo de mecânica do voo; e mantidos na dinâmica de corpo flexível.

## 4.2 Modelo Residualizado

O modelo integrado é representado pela Equação (57) somente se o modelo de mecânica do voo não possuir efeitos flexíveis quase-estáticos. Caso contrário, serão contabilizados duas vezes. De acordo com (Looye, 2007), o modelo de corpo rígido com

contribuições flexíveis quase-estáticas é equivalente ao modelo de corpo rígido em que os estados flexíveis foram residualizados. Para que não exista sobreposição, (Looye, 2007) propõem que a Equação (57) seja residualizada para que as contribuições flexíveis quase-estáticas providas pelo modelo aeroelástico sejam obtidas e, então, subtraídas do modelo de mecânica de voo.

Residualizar a Equação (57) implica considerar a derivada dos estados flexíveis nula  $\dot{X}_{AE}^F = 0$ . Assim, a parte inferior do sistema de equações é:

$$0 = [A_{AE}^{FR}]\{X_{FD}\} + [A_{AE}^F]\{X_{AE}^F\} + [B_{AE0}^F]\{U_{FD}\} + [B_{AE1}^F]\{\dot{U}_{FD}\} + [B_{AE2}^F]\{\ddot{U}_{FD}\} \quad (58)$$

logo,

$$\{X_{AE}^F\} = -[A_{AE}^F]^{-1}([A_{AE}^{FR}]\{X_{FD}\} + [B_{AE0}^F]\{U_{FD}\} + [B_{AE1}^F]\{\dot{U}_{FD}\} + [B_{AE2}^F]\{\ddot{U}_{FD}\}) \quad (59)$$

O modelo residualizado é, então, obtido substituindo  $\{X_{AE}^F\}$  na parte superior da Equação (57), onde é possível observar as contribuições do efeito flexível quase-estático:

$$\begin{aligned} \{\dot{X}_{FD}\} = & ([A_{FD}] - [A_{AE}^{RF}][A_{AE}^F]^{-1}[A_{AE}^{FR}])\{X_{FD}\} \\ & + ([B_{FD}] - [A_{AE}^{RF}][A_{AE}^F]^{-1}[B_{AE0}^F])\{U_{FD}\} \\ & + (0 - [A_{AE}^{RF}][A_{AE}^F]^{-1}[B_{AE1}^F])\{\dot{U}_{FD}\} \\ & + (0 - [A_{AE}^{RF}][A_{AE}^F]^{-1}[B_{AE2}^F])\{\ddot{U}_{FD}\} \end{aligned} \quad (60)$$

Para que estas contribuições sejam anuladas, correções nas matrizes de mecânica do voo devem ser feitas tais que a residualização do modelo integrado retorne ao modelo de mecânica do voo original, ou seja:

$$\begin{aligned} [A_{FD}^*] &= [A_{FD}] + [A_{AE}^{RF}][A_{AE}^F]^{-1}[A_{AE}^{FR}] \\ [B_{FD0}^*] &= [B_{FD}] + [A_{AE}^{RF}][A_{AE}^F]^{-1}[B_{AE0}^F] \\ [B_{FD1}^*] &= 0 + [A_{AE}^{RF}][A_{AE}^F]^{-1}[B_{AE1}^F] \\ [B_{FD2}^*] &= 0 + [A_{AE}^{RF}][A_{AE}^F]^{-1}[B_{AE2}^F] \end{aligned} \quad (61)$$

Portanto, o modelo integrado torna-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{X}_{FD} \\ \dot{X}_{AE}^F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{FD}^* & A_{AE}^{RF} \\ A_{AE}^{FR} & A_{AE}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{FD} \\ X_{AE}^F \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{FD0}^* & B_{FD1}^* & B_{FD2}^* \\ B_{AE0}^F & B_{AE1}^F & B_{AE2}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{FD} \\ \dot{U}_{FD} \\ \ddot{U}_{FD} \end{Bmatrix} \quad (62)$$

O desenvolvimento para a equação de saída do modelo pode ser encontrado no capítulo 8.2 de (Zona Technology, 2017). O texto apresenta uma metodologia para obter o deslocamento, velocidade, aceleração ou carga em qualquer nó do modelo estrutural.

## 5 APLICAÇÃO

O processo apresentado neste trabalho foi aplicado em uma aeronave genérica de grande porte. O modelo aeroelástico em elementos finitos utilizado foi desenvolvido e disponibilizado por (Quenzer, et al., 2018). No artigo, o modelo chamado de *Generic Wide Body* (GWB) representa uma aeronave cujas dimensões assemelham-se ao Boeing 777-300ER e Airbus A350-1000, ver Figura 6. Todo o modelo aeroelástico foi confeccionado em Nastran. Esta secção não tem o objetivo de discutir a construção do modelo em elementos finitos, mas uma breve apresentação é realizada. O modelo de mecânica do voo foi desenvolvido de maneira simplificada com dados estimados da aeronave os quais são apresentados. Dessa forma, é possível reproduzir os resultados.

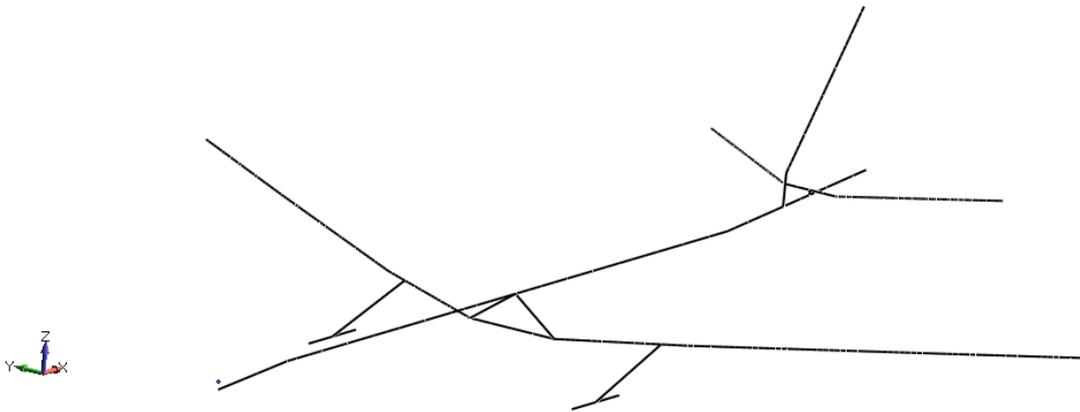
Figura 6 - Airbus A350-1000 (esquerda) e Boeing 777-300ER (direita).



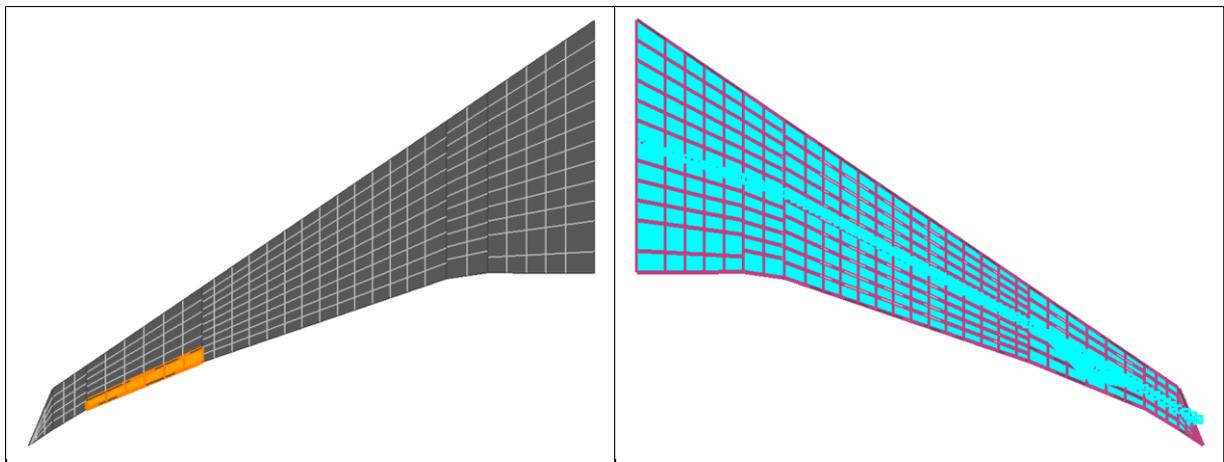
### 5.1 Modelo Aeroelástico em Elementos Finitos

O modelo estrutural apresentado por (Quenzer, et al., 2018) é composto por elementos de viga aliados a elementos de massa concentrada que representam o comportamento global da estrutura em termos de rigidez e inércia. Esse conceito de modelo é conhecido como *stick model* e possui a vantagem de garantir a fidelidade das deformações em flexão e torção, bem como seus modos de vibrar utilizando um número reduzido de graus de liberdade (GDL), reduzindo o custo computacional. Este modelo, entretanto, não é capaz de fornecer bons resultados em análises estruturais nas quais tensões localizadas e flambagem são de interesse (Castro Neto, 2017). A Figura 7 apresenta os elementos de barra que formam o modelo estrutural.

Figura 7 - Modelo estrutural em Nastran.



O modelo aerodinâmico foi realizado utilizando painéis (CAERO1) com correções de *downwash* para o ângulo de incidência (W2GJ). A relação entre os nós estruturais e os painéis aerodinâmicos foi dada através de uma *spline* linear (SPLINE2). A Figura 8 exibe os painéis aerodinâmicos aplicados na semiasa esquerda, destacando-se os painéis referentes ao aileron, bem como a *spline* utilizada para a interpolação dos dados aerodinâmicos e estruturais na semiasa direita.

Figura 8 - Painéis aerodinâmicos (esquerda) e *spline* (direita).

A Tabela 4 faz uma comparação de algumas características do modelo GWB com relação às aeronaves comerciais Boeing 777-300ER e Airbus A350-1000.

Tabela 4 - Características do modelo GWB e aeronaves 777-300ER e A350-1000.

Característica	GWB <sup>1</sup>	777-300ER <sup>2</sup>	A350-1000 <sup>3</sup>
Envergadura [m]	64,8	64,8	64,75
Área [m <sup>2</sup> ]	482,6	436,8	442,2
Corde média aerodinâmica [m]	8,23	7,08	-
Comprimento [m]	73,1	73,9	73,8
Massa [kg]	360828	351533 (MTOW)	319000 (MTOW)

Fontes: <sup>1</sup> (Quenzer, et al., 2018), <sup>2</sup> (EASA, 2018) e <sup>3</sup> (Airbus S.A.S., 2019).

As características de inércia do modelo GWB com relação ao referencial AE são exibidas na Tabela 5.

Tabela 5 - Características de inércia do GWB.

Momento (produto) de inércia	Valor [kg m <sup>2</sup> ]
$I_x$	$2,812968 \times 10^7$
$I_y$	$4,375067 \times 10^7$
$I_z$	$7,003581 \times 10^7$
$I_{xz}$	$2,315020 \times 10^6$

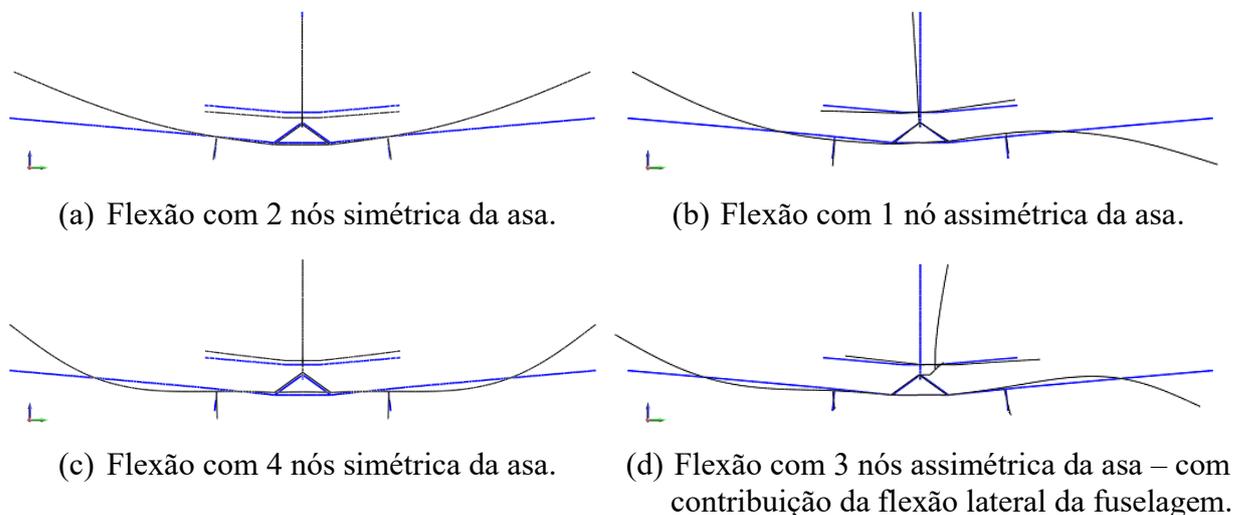
Fonte: (Quenzer, et al., 2018).

Utilizando a solução 103 do Nastran, foram solicitados todos os modos com frequência abaixo de 30 Hz. Como resultado, 40 modos foram obtidos, sendo 6 modos de corpo rígido (com frequência de 0 Hz) e 34 modos flexíveis. A Tabela 6 apresenta uma breve descrição dos 6 primeiros modos flexíveis.

Tabela 6 - Descrição dos 6 primeiros modos flexíveis.

Descrição	Frequência [Hz]
Flexão com 2 nós simétrica da asa	1,22
Flexão com 1 nó assimétrica da asa	1,66
Flexão com 4 nós simétrica da asa	3,11
Flexão com 3 nós assimétrica da asa	3,23
Torção assimétrica da asa	3,38
Torção simétrica da asa	3,40

Figura 9 - Visualização dos primeiros modos de flexão da asa. Azul: indeformado. Preto: deformado.



## 5.2 RFA e Representação em Espaço de Estados

Após a construção da base modal projetada nos eixos do corpo, a matriz aerodinâmica generalizada foi obtida no domínio da frequência. A análise foi realizada para 16 valores de frequência reduzida discretizados conforme Tabela 7.

**Tabela 7 - Frequências reduzidas utilizadas.**

$k_1 = 0,0001$	$k_9 = 0,7$
$k_2 = 0,01$	$k_{10} = 0,8$
$k_3 = 0,1$	$k_{11} = 0,9$
$k_4 = 0,2$	$k_{12} = 1,0$
$k_5 = 0,3$	$k_{13} = 2,0$
$k_6 = 0,4$	$k_{14} = 3,0$
$k_7 = 0,5$	$k_{15} = 4,0$
$k_8 = 0,6$	$k_{16} = 5,0$

Todas as análises foram realizadas com número de Mach 0,5 e altitude de 1000 m. As condições de voo decorrentes (segundo valores da atmosfera padrão, ISA) são exibidas na Tabela 8.

**Tabela 8 - Condições de voo.**

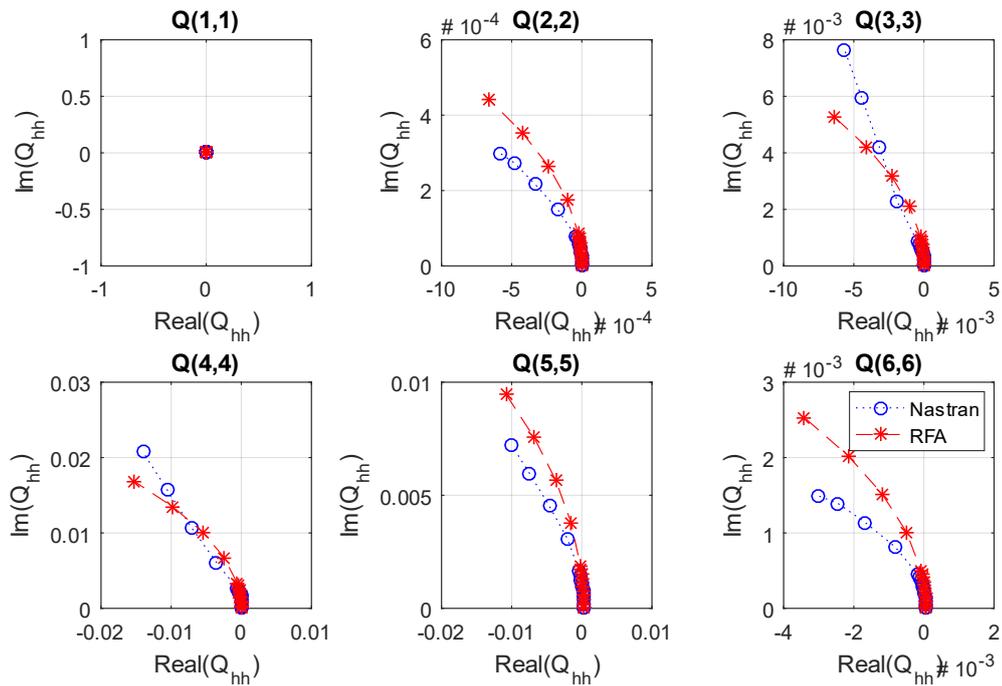
Número de Mach	0,5
Altitude	1000 m
Densidade do ar	1,1116 kg/m <sup>3</sup>
Velocidade (TAS)	168,22 m/s
Pressão dinâmica	15728 Pa

A RFA foi executada utilizando 7 *lags* aerodinâmicos pelo método de Roger. Entretanto, a fim de melhor interpretar a resposta aerodinâmica dos modos de corpo rígido, somente os termos de rigidez, amortecimento e massa aparente foram utilizados no ajuste das 6 primeiras colunas da  $Q_{hh}$ . Ou seja, somente contribuições quase-estacionárias foram computadas para os modos de corpo rígido.

A Figura 10 compara os termos da  $Q_{hh}$  originais (Nastran) e aproximados (RFA) para os modos de corpo rígido. É possível notar que a aproximação é boa apenas para baixos valores de frequência reduzida, consequência da não utilização de *lags* aerodinâmicos para esses modos.

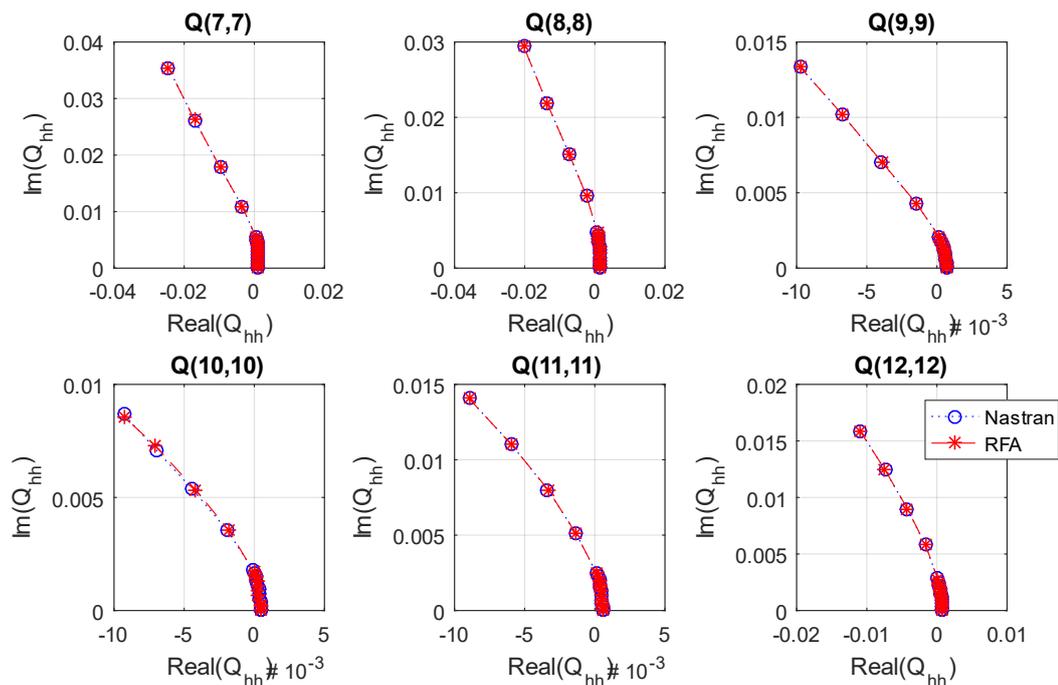
Os valores referentes a  $Q_{hh}(1,1)$  são nulos visto que a metodologia empregada pelo Nastran não computa as forças de arrasto (primeira linha da matriz  $Q_{hh}$ ).

Figura 10 - Diagonal da  $Q_{hh}$  - corpo rígido.



A Figura 11 avalia a RFA para os 6 primeiros modos flexíveis. Neste caso, a aproximação consegue aderir de forma satisfatória todos os termos de cada frequência reduzida.

Figura 11 - Diagonal da  $Q_{hh}$  - 6 primeiros modos flexíveis.



As figuras abaixo avaliam a RFA para as superfícies de controle. Somente as relações mais relevantes são destacadas: aileron para rolagem (Figura 12), profundor para arfagem (Figura 13) e leme para guinada (Figura 14). Percebe-se que o aileron esquerdo e direito possuem respostas antissimétricas, enquanto o profundor esquerdo e direito são idênticos, conforme esperado.

Figura 12 - Contribuição do aileron esquerdo e direito para rolagem na  $Q_{hc}$ .

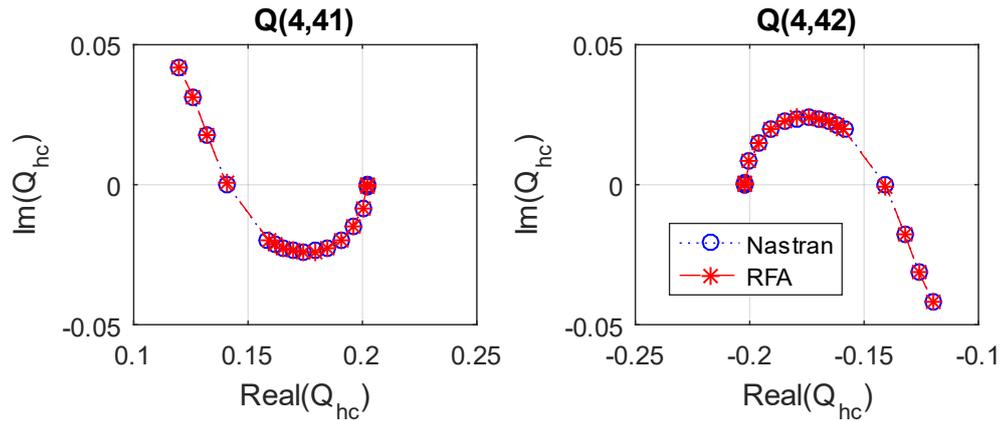


Figura 13 - Contribuição do profundor esquerdo e direito para arfagem na  $Q_{hc}$ .

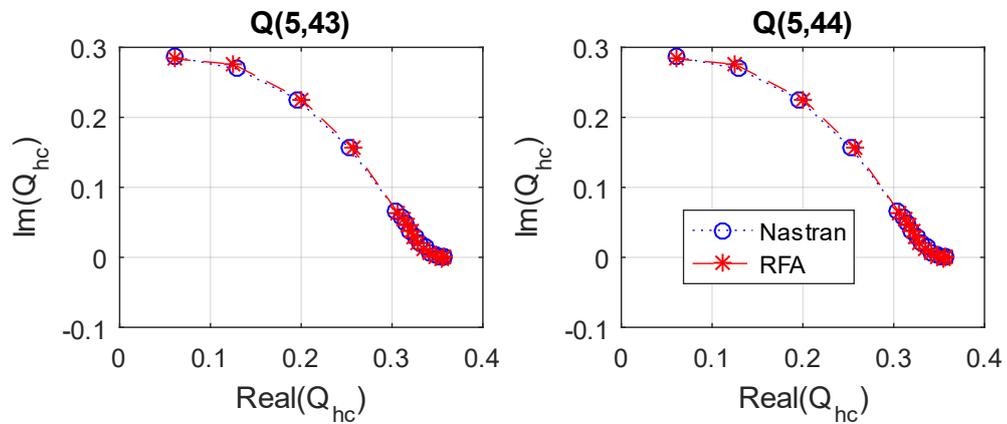
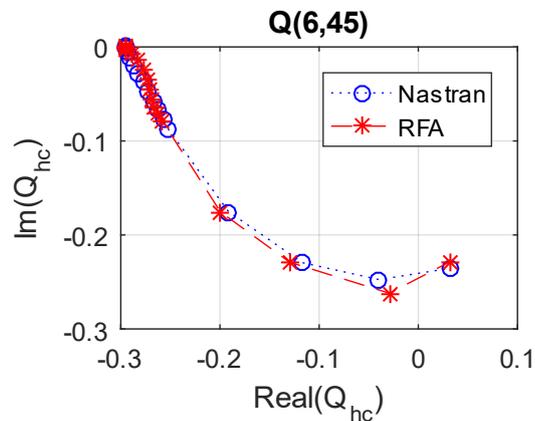
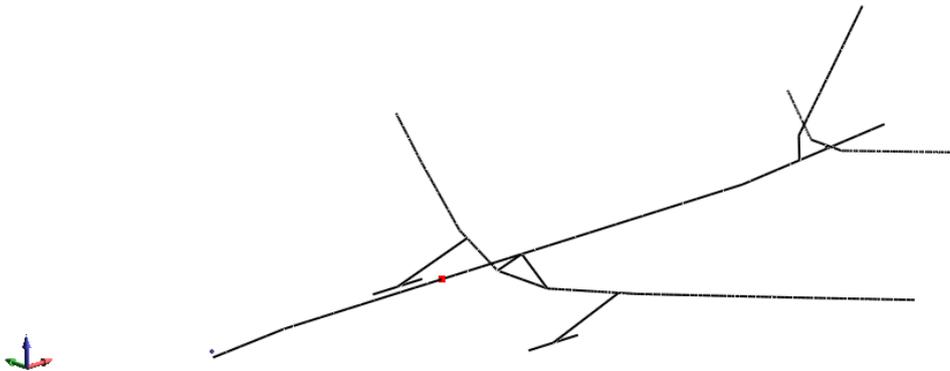


Figura 14 - Contribuição do leme para guinada na  $Q_{hc}$ .



Após a realização da RFA, o modelo aeroelástico em espaço de estados foi construído. Para verificar a qualidade do processo, Funções de Resposta em Frequência (FRF) foram geradas utilizando o modelo em espaço de estados e comparadas com FRFs fornecidas pela solução 146 do Nastran. As respostas de ambos os modelos foram obtidas em um nó estrutural que simula a posição de um sensor inercial (IRS) da lei de controle (fictício no modelo GWB). Dessa forma, caso exista uma lei de controle, análises aeroservoelásticas podem ser realizadas.

**Figura 15 - Nó representante do sensor inercial fictício (em vermelho).**



As figuras abaixo apresentam as FRFs com entradas de aileron, profundor e leme e saídas de velocidades angulares  $p$ ,  $q$  e  $r$ , bem como acelerações lineares  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ . As figuras mostram que o modelo em espaço de estados representa bem as ressonâncias do modelo original no Nastran, incluindo sua amplitude. Alguns vales nas FRFs aparentam apresentar maior erro. No entanto, vale destacar que os gráficos de magnitude estão com eixo vertical em escala logarítmica o que implica que as diferenças entre as curvas são visualmente amplificadas nos vales e reduzidas nos picos.

As principais relações entre as superfícies de controle e o movimento da aeronave apresentam bons resultados. São elas:

- Aileron: velocidade de rolagem ( $p$ ) e aceleração lateral ( $n_y$ ).
- Profundor: velocidade de arfagem ( $q$ ) e aceleração vertical ( $n_z$ ).
- Leme: velocidade de guinada ( $r$ ) e aceleração lateral ( $n_y$ ).

Figura 16 - FRF do aileron para velocidades p, q e r.

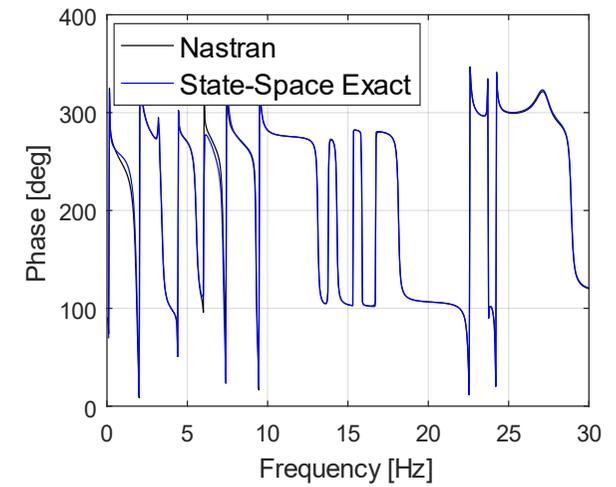
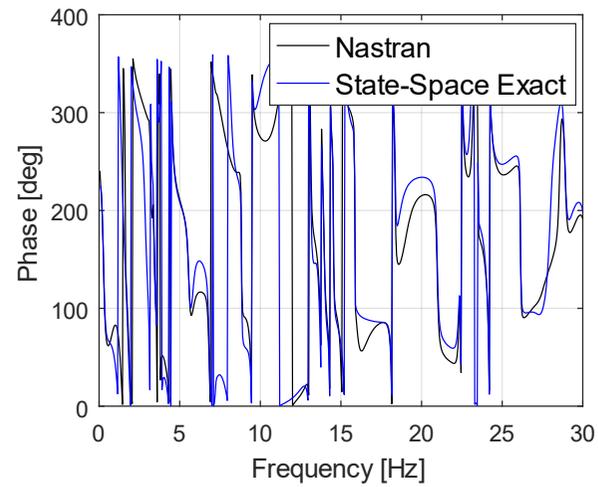
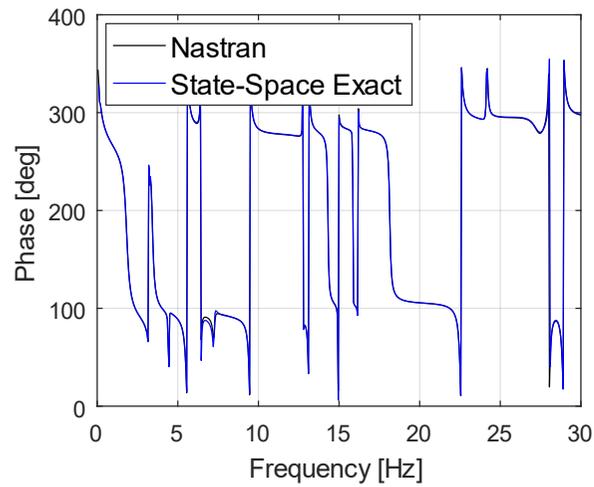
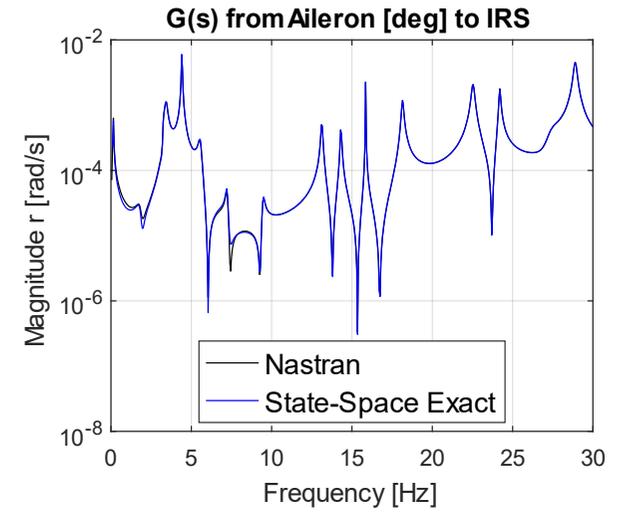
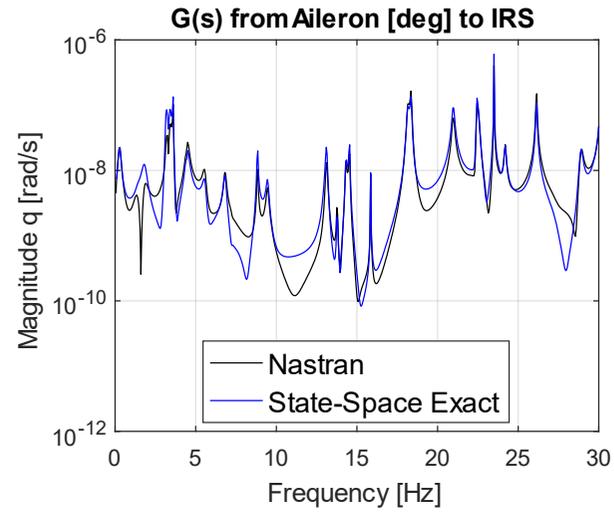
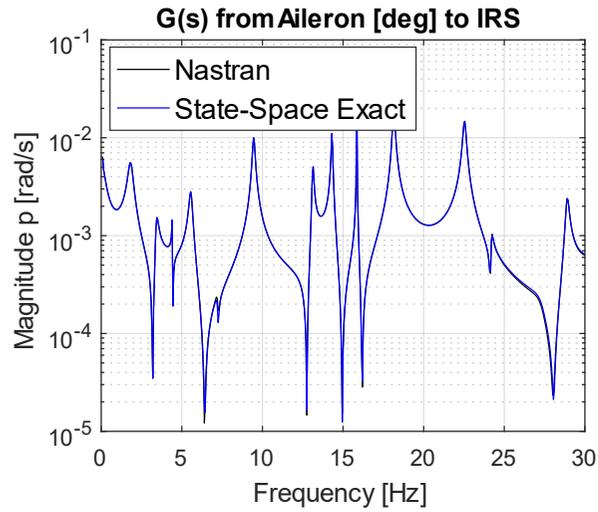


Figura 17 - FRF do aileron para acelerações  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ .

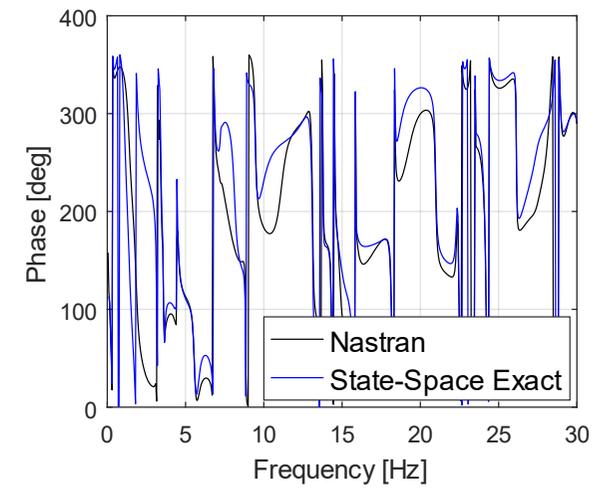
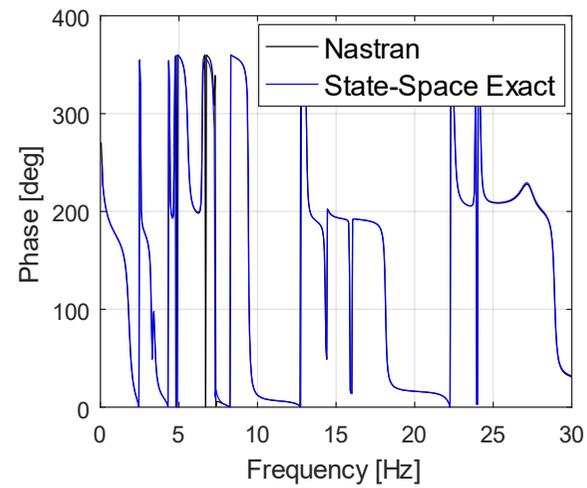
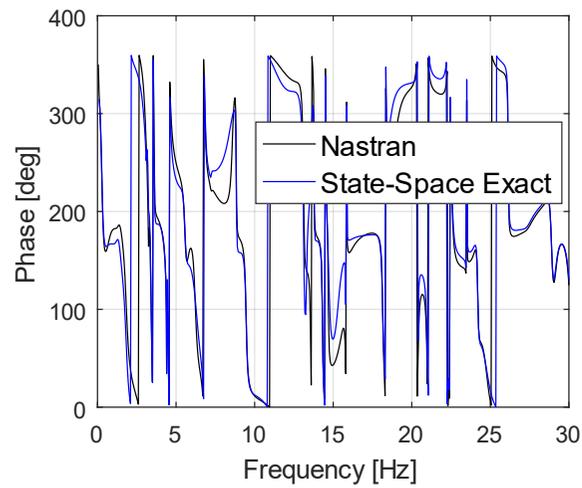
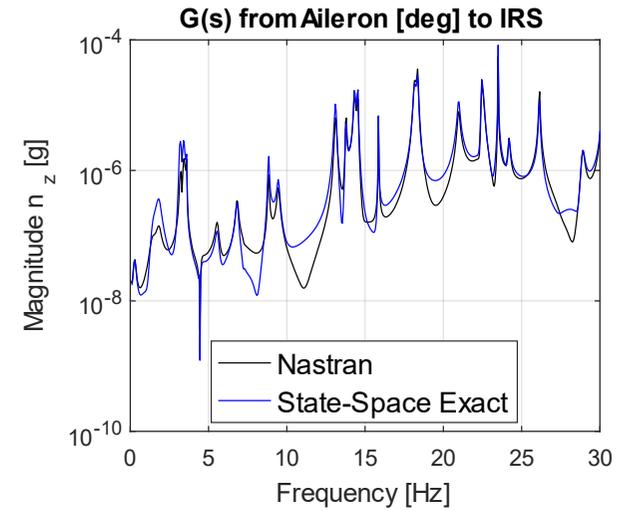
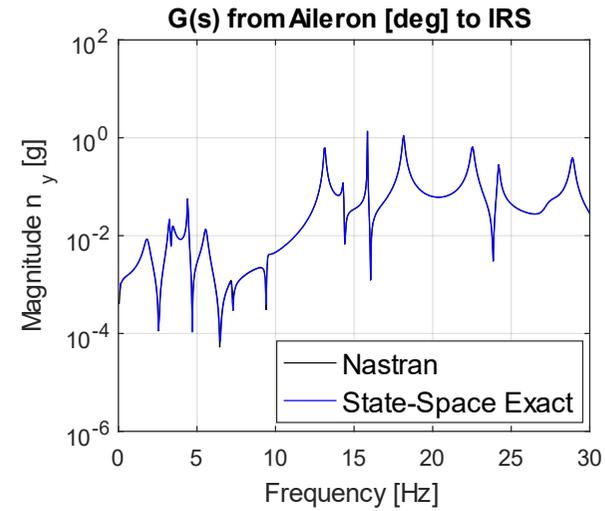
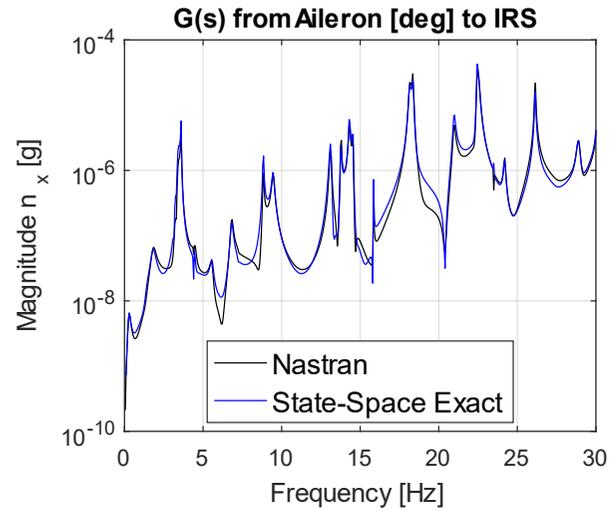


Figura 18 - FRF do profundor para velocidades p, q e r.

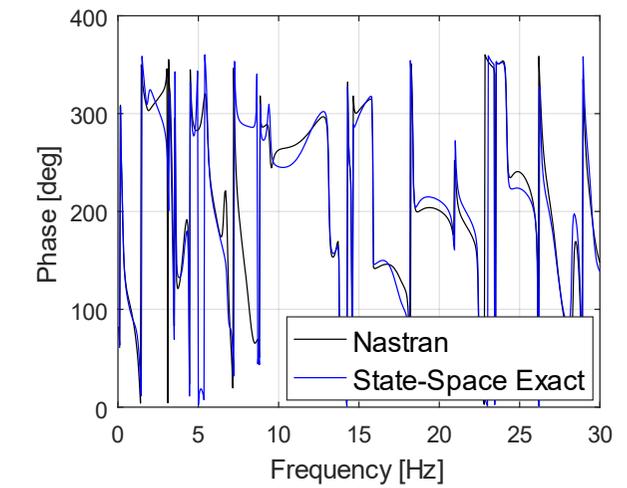
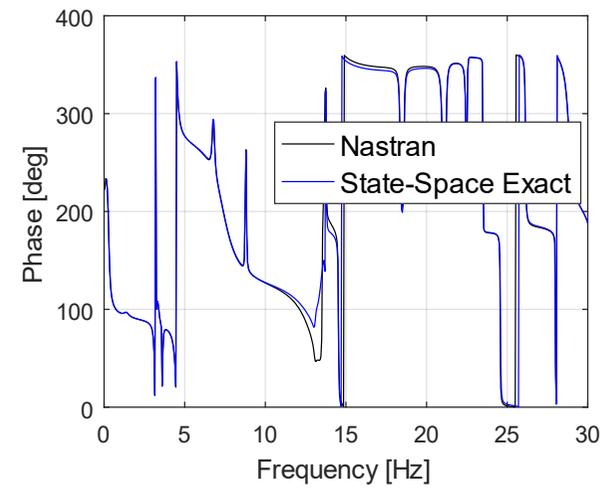
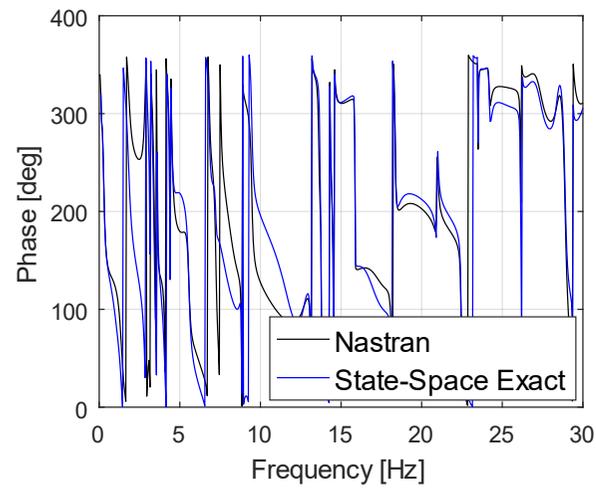
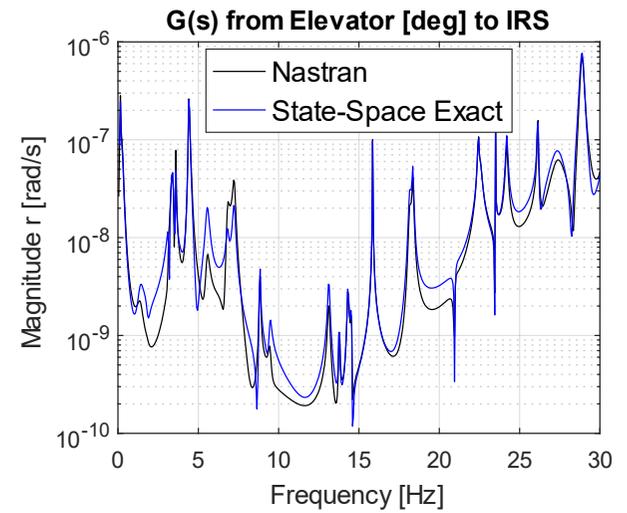
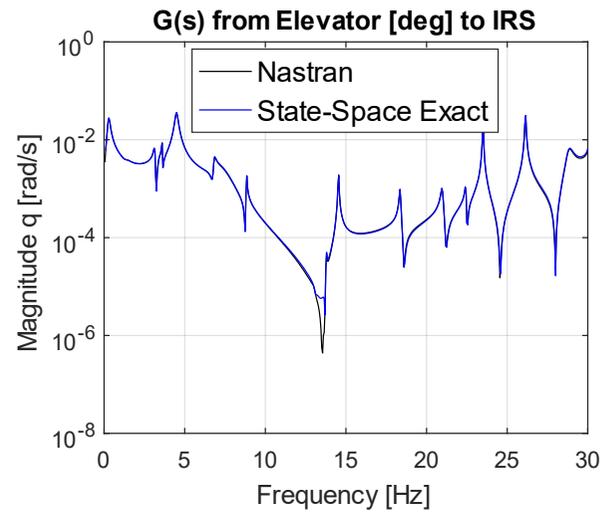
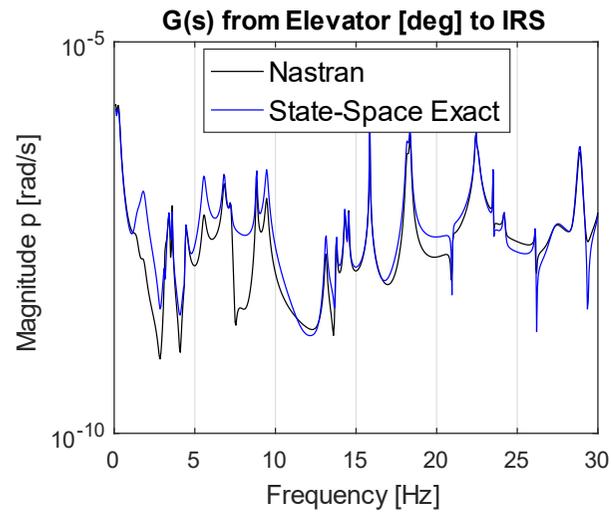


Figura 19 - FRF do profundor para acelerações  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ .

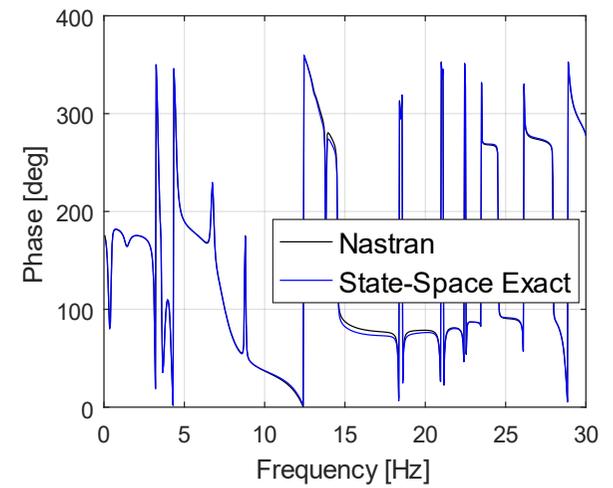
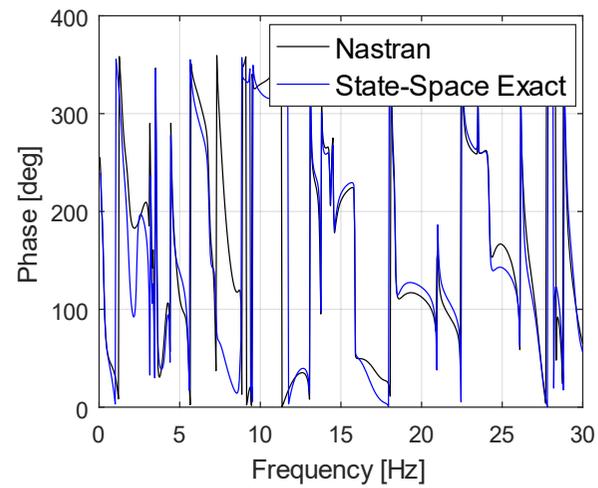
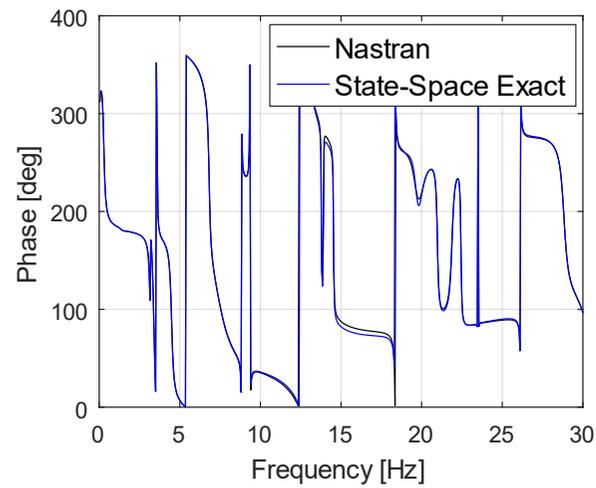
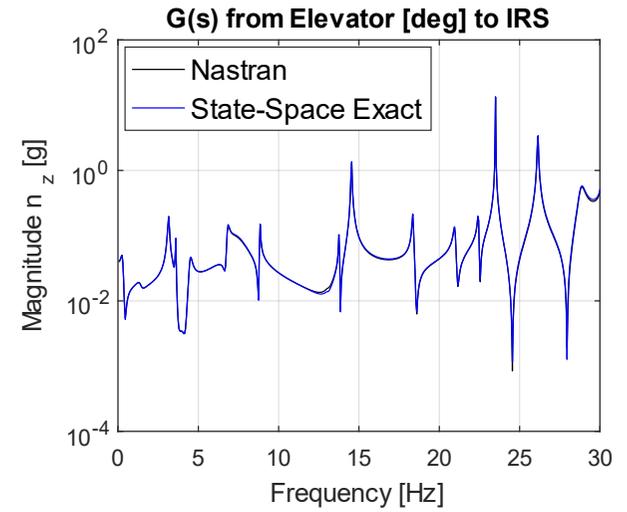
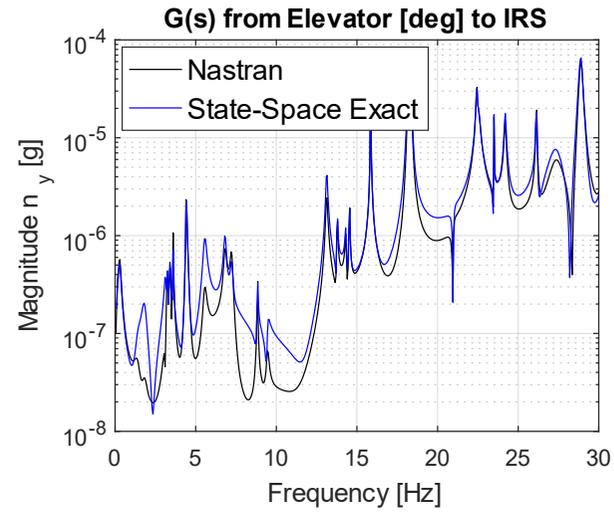
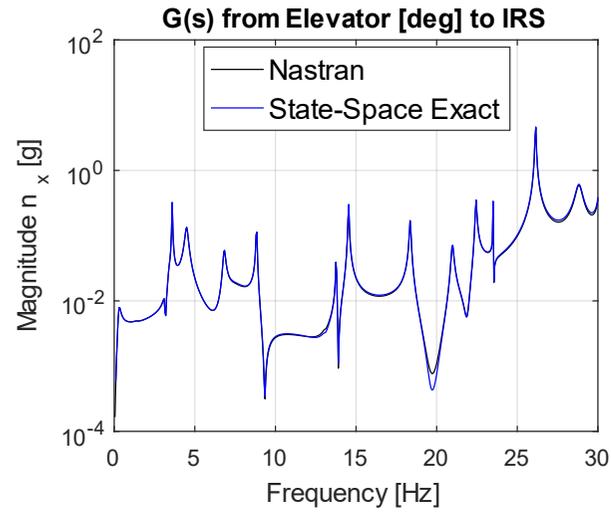


Figura 20 - FRF do leme para velocidades p, q e r.

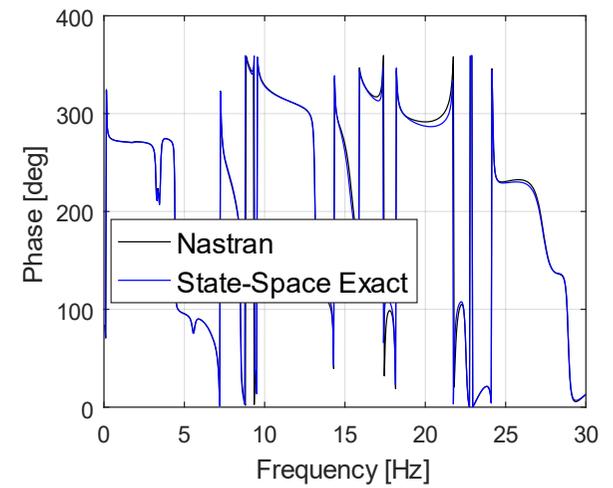
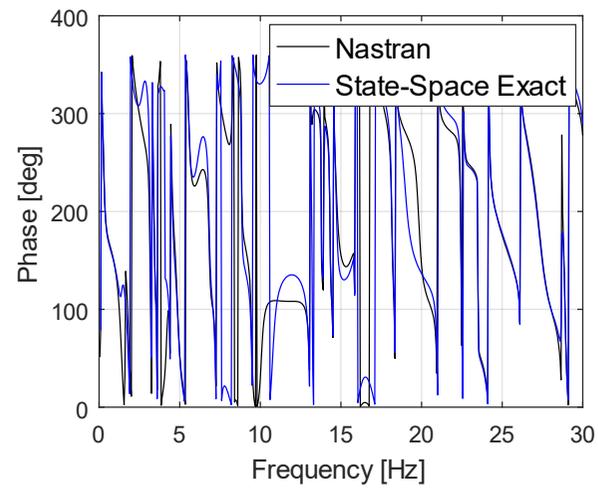
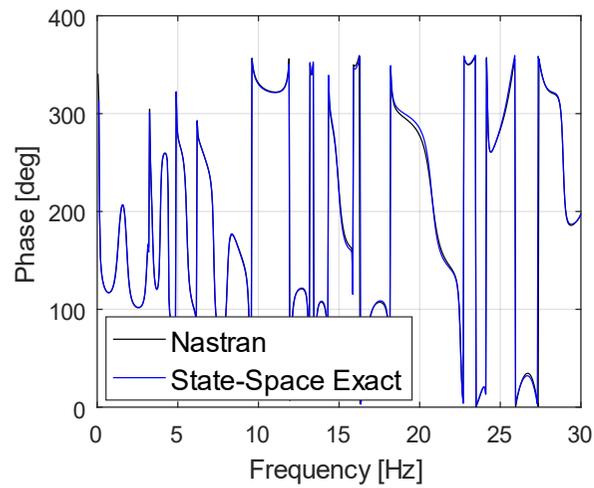
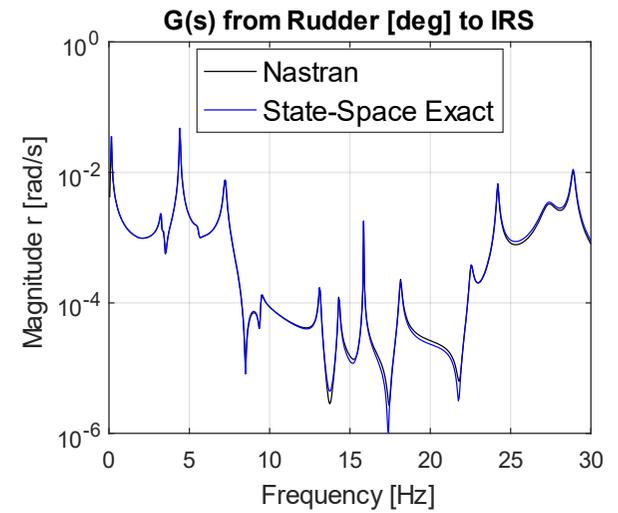
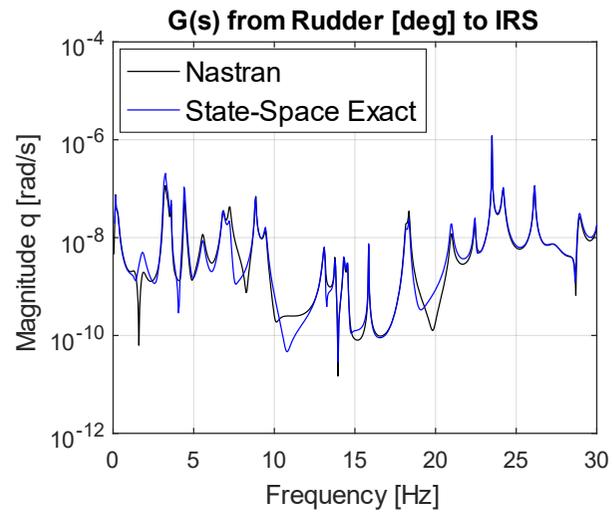
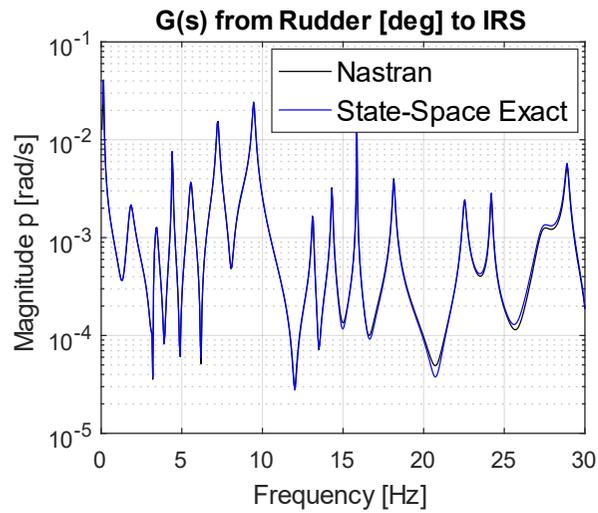
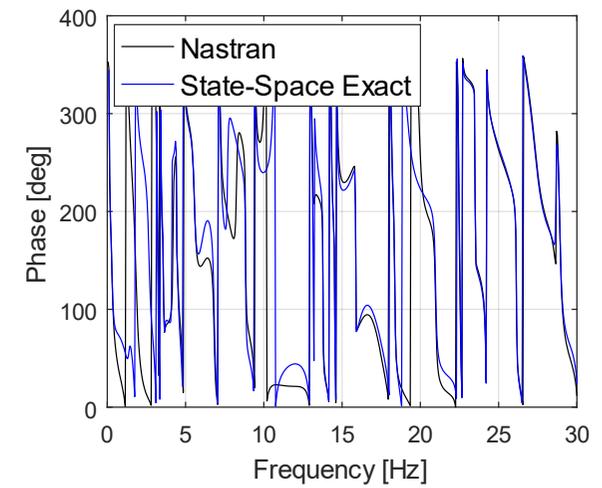
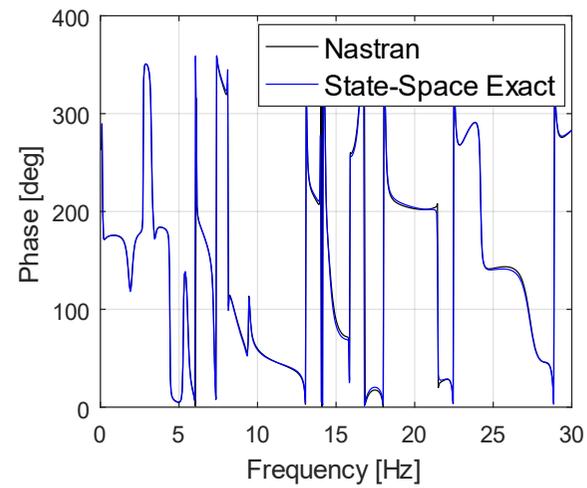
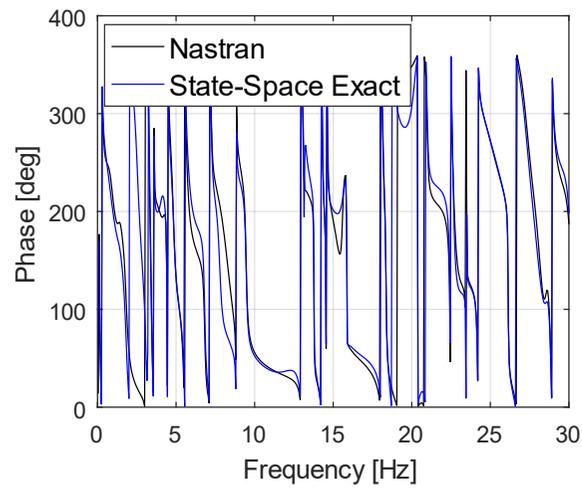
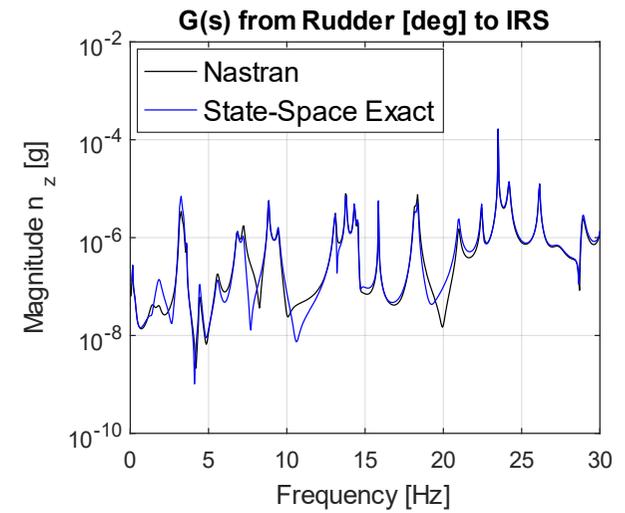
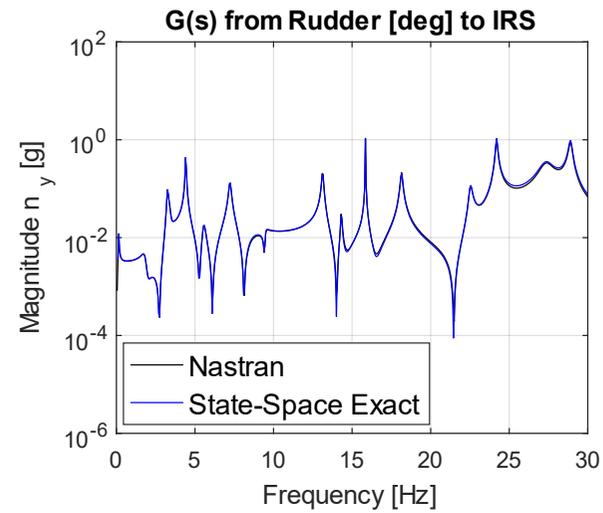
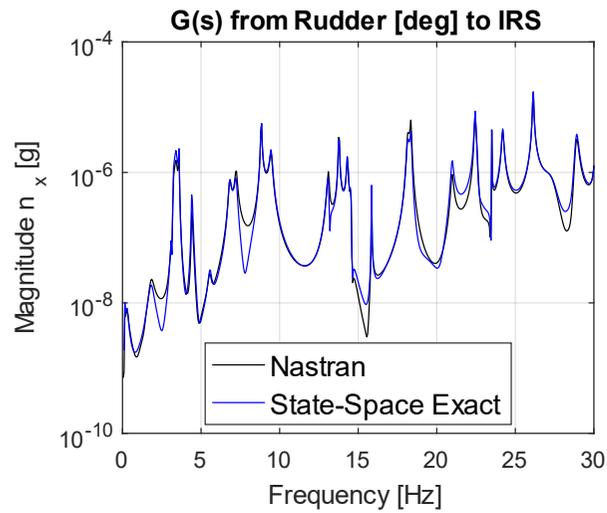


Figura 21 - FRF do leme para acelerações  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ .



### 5.3 Criação do Modelo de Mecânica do Voo

O modelo dinâmico de mecânica do voo foi desenvolvido utilizando as mesmas características e condições de voo da aeronave GWB apresentada para o modelo aeroelástico. Os valores dos coeficientes adimensionais utilizados são os mesmos encontrados em (Quenzer, et al., 2018), os quais foram obtidos através da solução 144 do Nastran. Os coeficientes de estabilidade adimensionais que não foram calculados no artigo foram estimados através da geometria da aeronave (Roskam, 1971) e da comparação com coeficientes de aeronaves similares divulgados em (Etkin, et al., 1996) e (Schmidt, 2012).

A Tabela 9 e Tabela 10 mostram os valores empregados para cada coeficiente de estabilidade. Uma transformação de coordenadas foi realizada nos coeficientes providos pelo Nastran para atender os diferentes sentidos entre os referenciais FD e AE. Em seguida, as derivadas de estabilidade foram calculadas valendo-se dos coeficientes apresentados e das características da aeronave e voo dadas na Tabela 4 e Tabela 8, respectivamente.

Tabela 9 - Valores dos coeficientes adimensionais longitudinais utilizados.

	$C_X$	$C_Z$	$C_m$
$u$	-0,1080*	-0,1060*	0,1043*
$\alpha$	0,2193*	-4,6618	-1.8359
$q$	-	-9,3708	-22,145
$\dot{\alpha}$	-	5.8960*	-6,3140*
$\delta e$	$-3,8180 \times 10^{-6}$ *	-0,3660	-1,3338

\*Coeficiente estimado.

Tabela 10 - Valores dos coeficientes adimensionais latero-direcionais utilizados.

	$C_Y$	$C_l$	$C_n$
$\beta$	-0,2969	-0,1017	0,1280
$p$	0,1664	-0,4188	0,0251
$r$	-0,2910	0,0502	-0,1356
$\delta a$	0,0063	-0,0307	$-1,9730 \times 10^{-4}$ *
$\delta r$	0,1651	0,0198	-0,0817

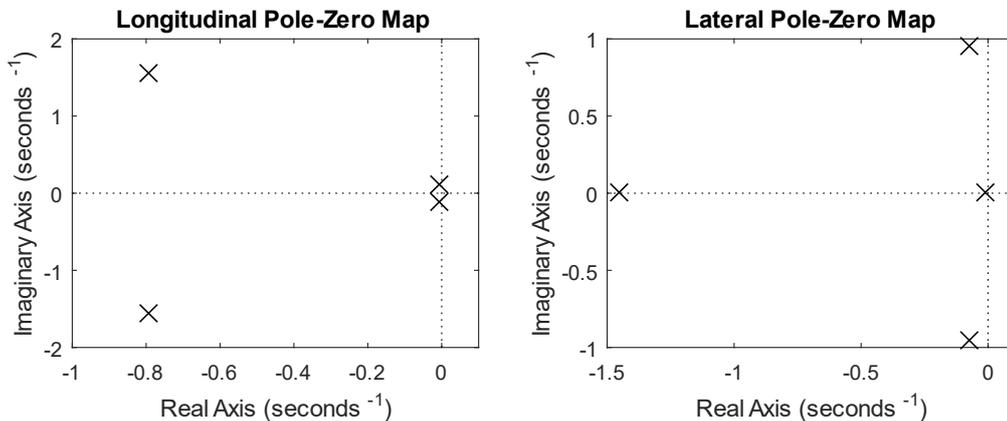
\*Coeficiente estimado.

Durante a linearização das equações, os termos médios de cada estado foram considerados nulos com exceção da velocidade longitudinal  $u_0 = 168,22 \text{ m/s}$ .

Com o modelo em espaço de estados construído, uma análise dos modos de mecânica do voo foi realizada avaliando-se os polos dos sistemas longitudinal e latero-

direcional, conforme Figura 22. Foram obtidas 2 raízes conjugadas no modelo longitudinal e 1 raiz conjugada e 2 raízes reais no modelo latero-direcional. Nenhuma instabilidade foi encontrada para a condição de voo analisada.

Figura 22 - Diagrama de polos e zeros do modelo de mecânica do voo.



A Tabela 11 exibe os valores de frequência e amortecimento de cada modo obtido.

Tabela 11 - Características dos modos de mecânica do voo.

	Modo	Frequência [Hz]	Amortecimento [ $\xi$ ]
Longitudinal	Fugoide	0,0189	0,0436
	Período curto	0,2785	0,4548
Latero-direcional	Espiral	0,0012	1
	<i>Dutch roll</i>	0,1517	0,0791
	Rolagem	0,2308	1

## 5.4 Modelo Integrado

A solução 144 (aeroelasticidade estática) utilizada para obter os coeficientes adimensionais do modelo de mecânica do voo leva em consideração a deformação estática da estrutura. Dessa forma, o modelo de mecânica do voo possui efeitos estruturais quase-estáticos, e a integração dos modelos passará pelo processo de residualização conforme o procedimento do capítulo 4.

Para avaliar o processo de integração, FRFs foram geradas utilizando o próprio modelo integrado (MI), o modelo de mecânica do voo (FD) e o modelo aeroelástico (AE). As curvas foram sobrepostas e são apresentadas abaixo.

Figura 23 - Diagrama de Bode - aileron para p.

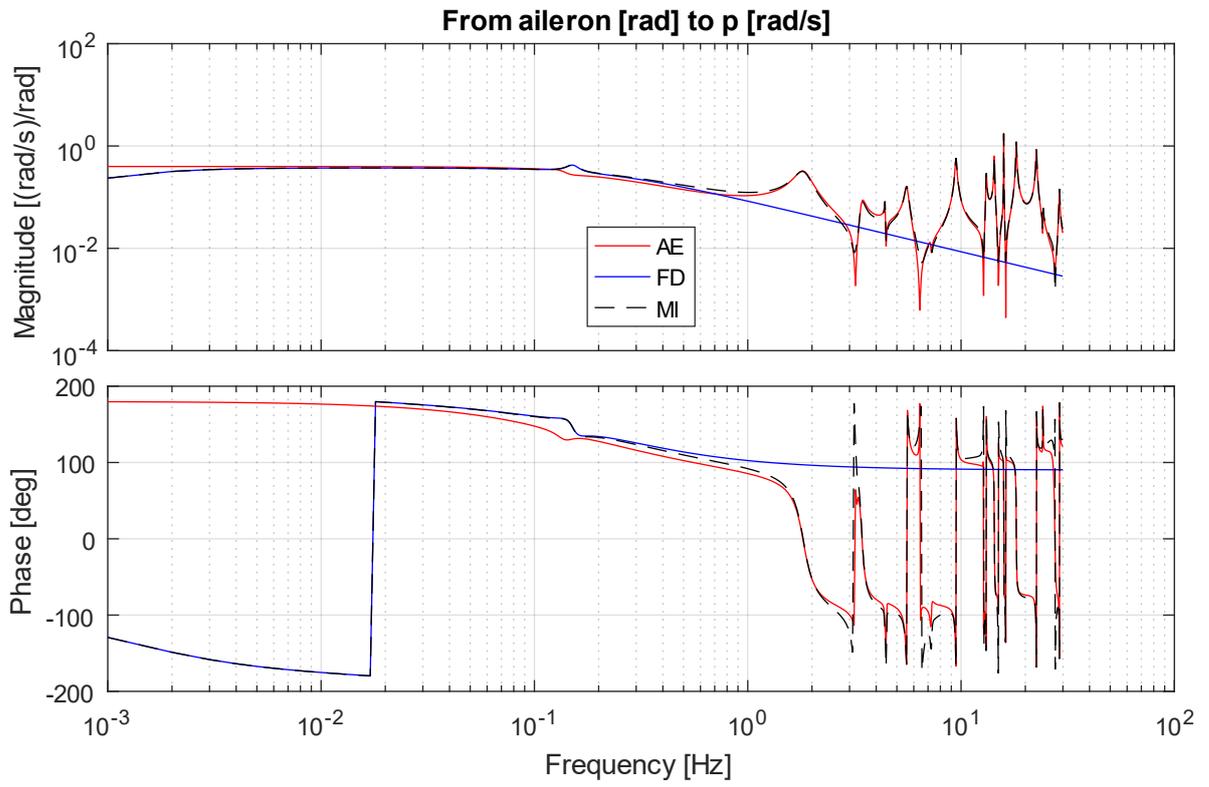
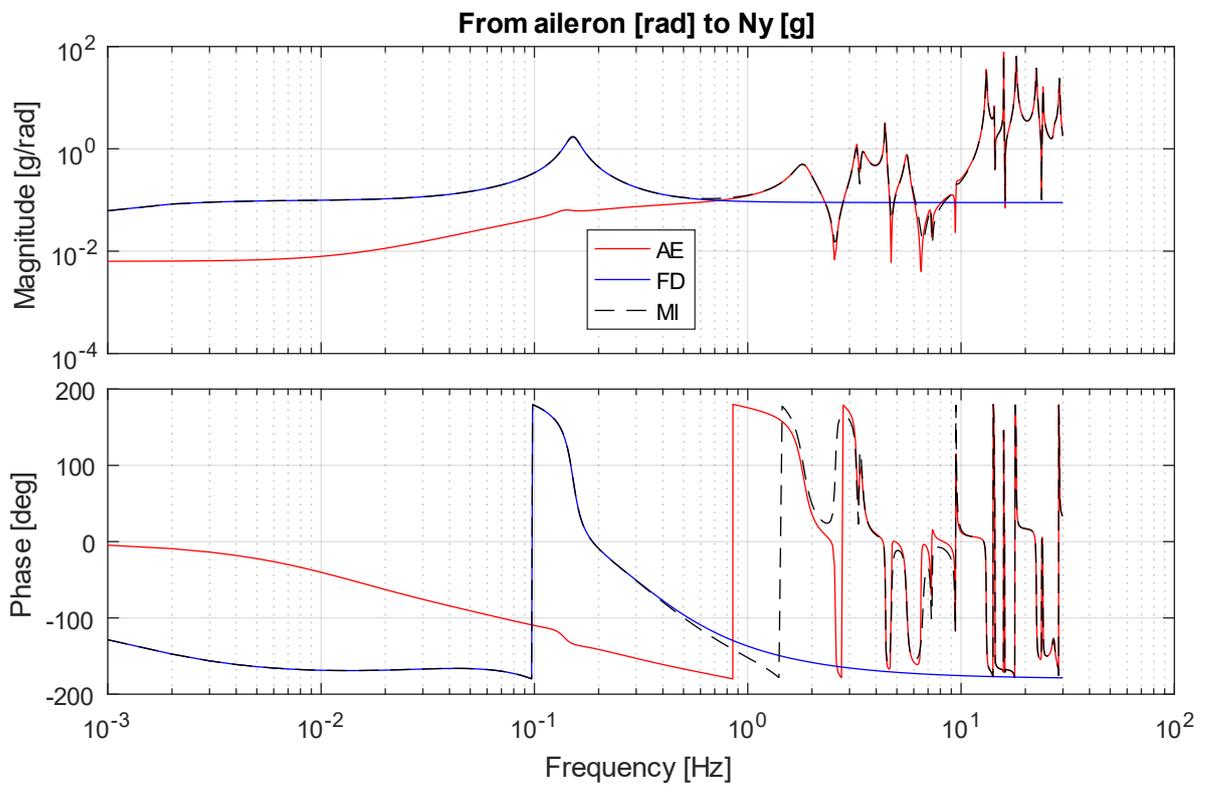
Figura 24 - Diagrama de Bode - aileron para  $n_y$ .

Figura 25 - Diagrama de Bode - profundor para q.

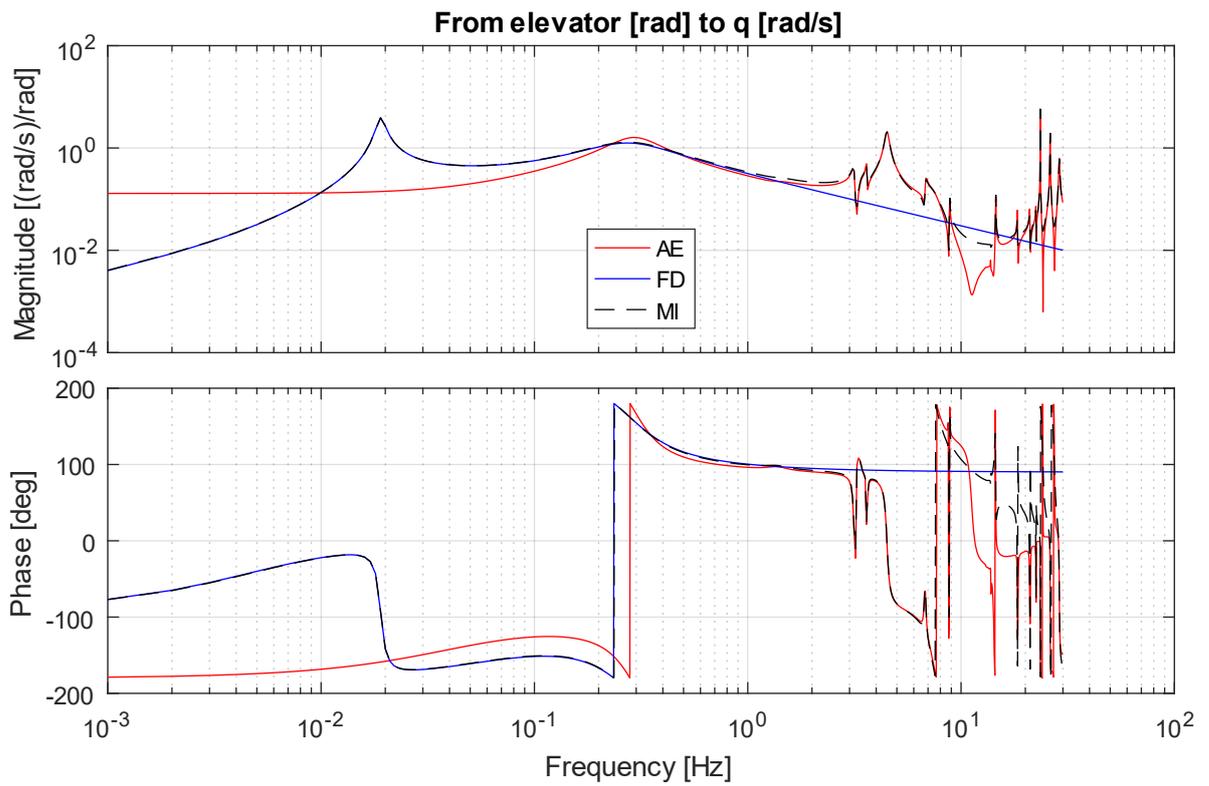


Figura 26 - Diagrama de Bode - profundor para nz.

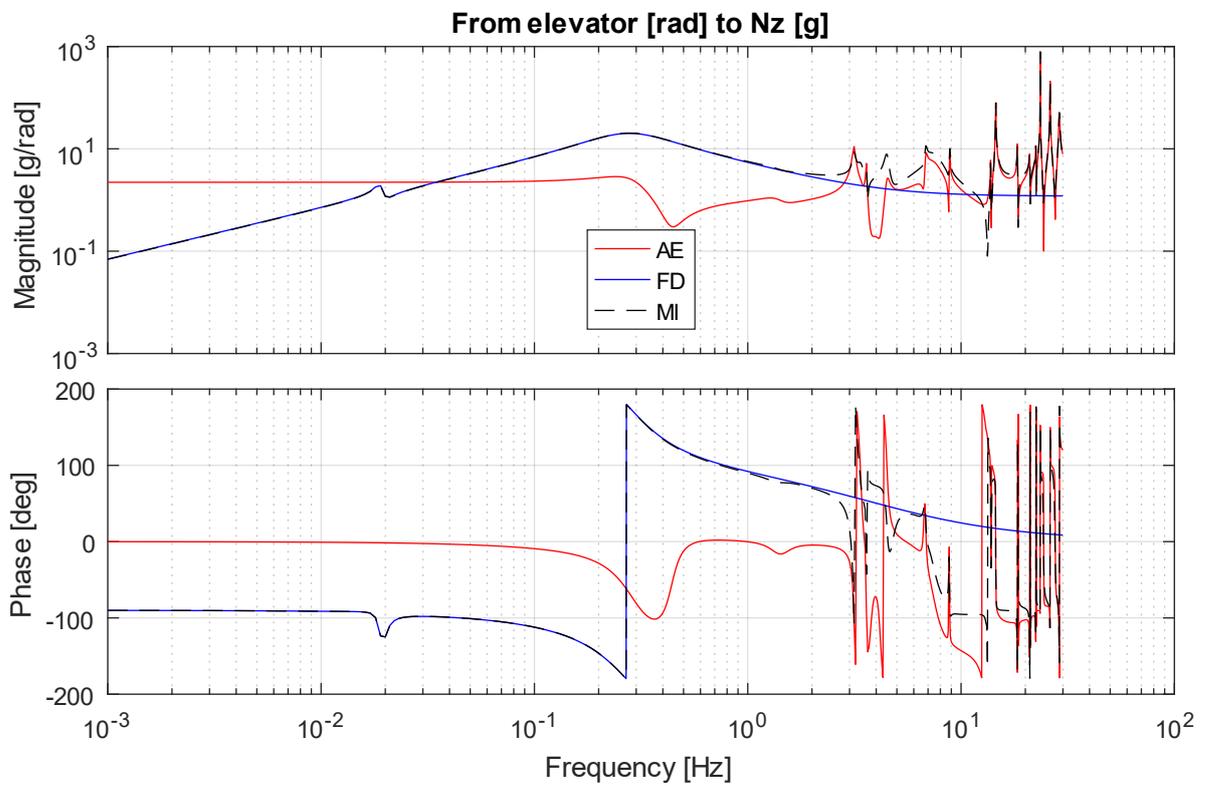
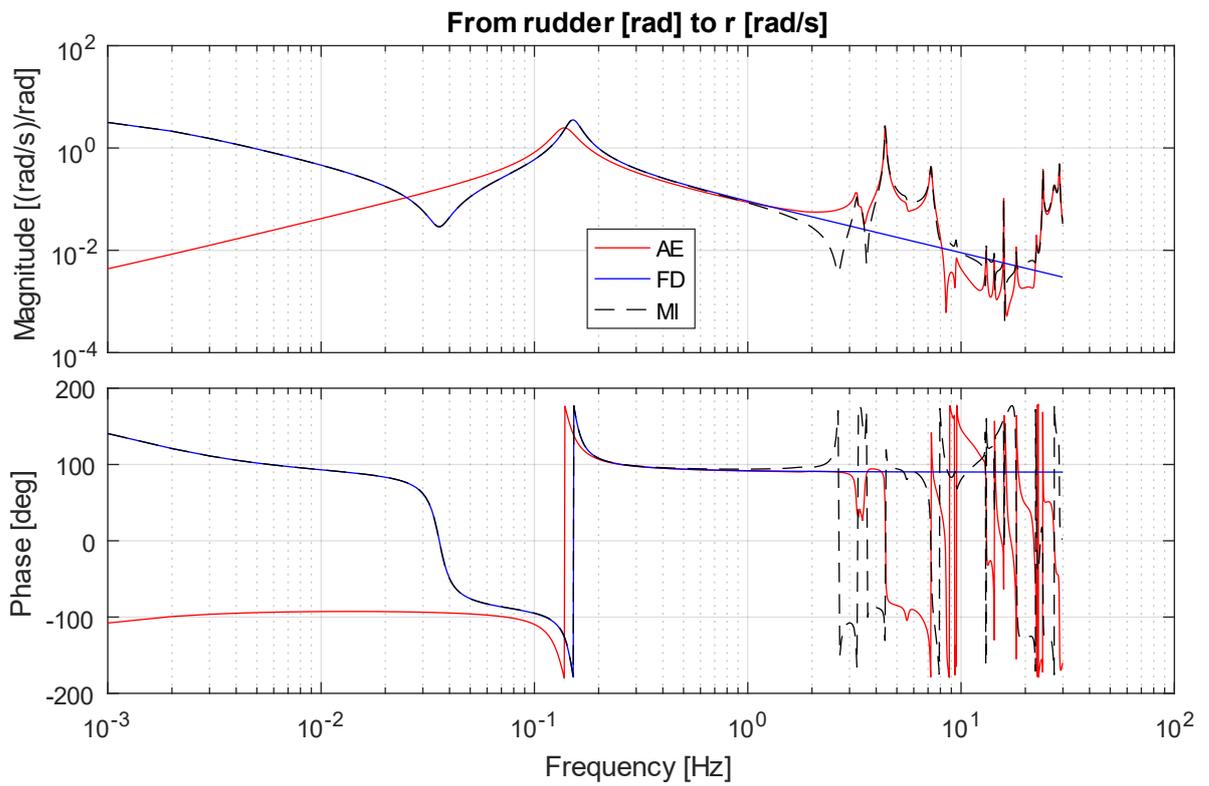
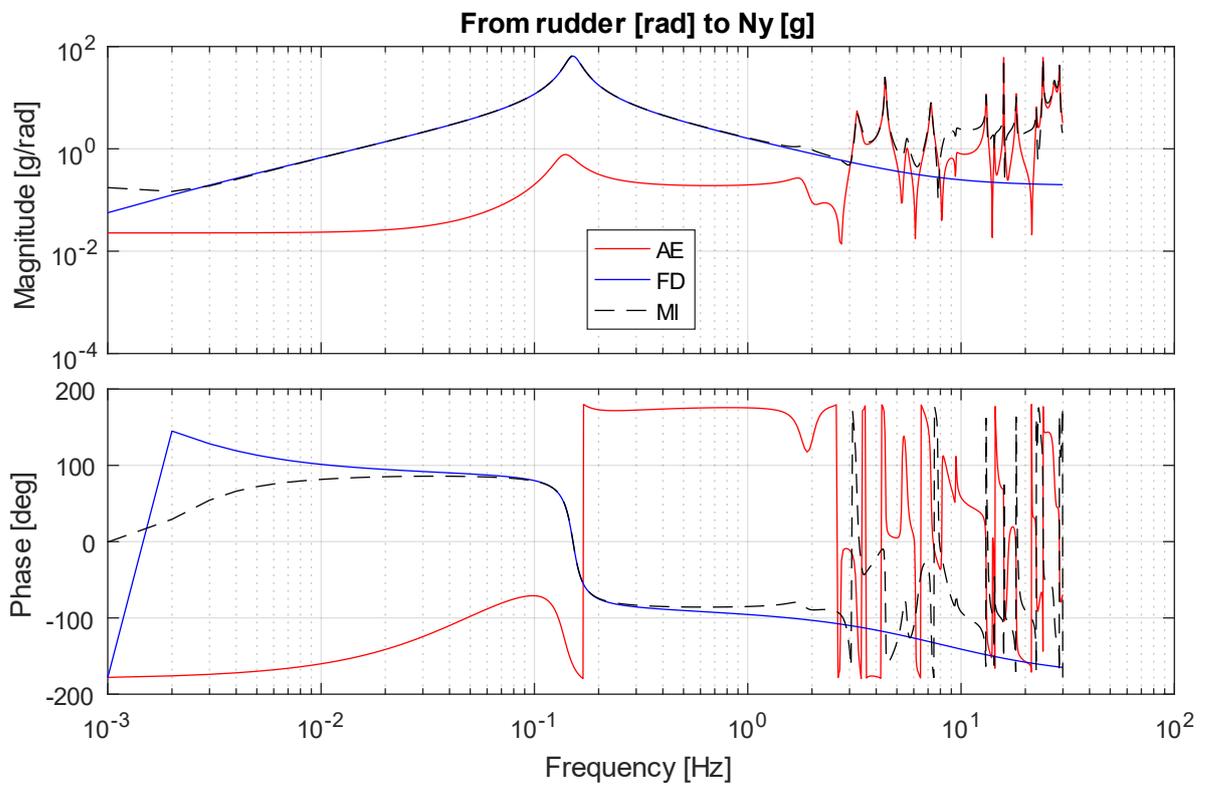


Figura 27 - Diagrama de Bode - leme para r.

Figura 28 - Diagrama de Bode - leme para  $n_y$ .

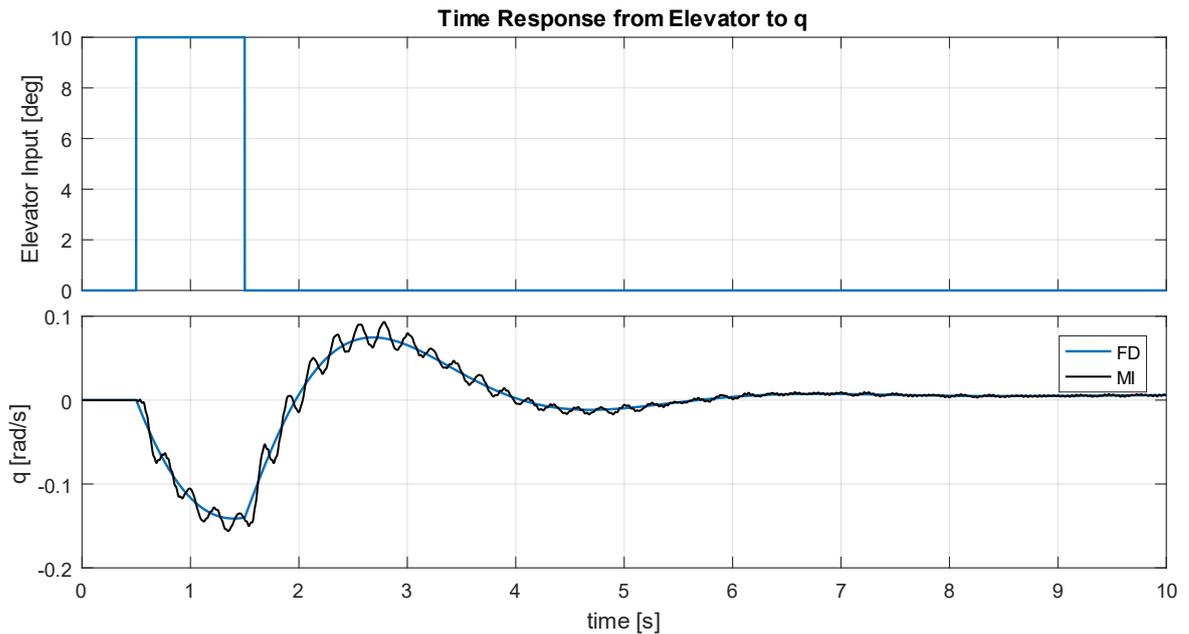
Os resultados confirmaram a grande diferença entre o modelo de mecânica do voo e o modelo aeroelástico. O modelo de mecânica do voo tem o objetivo de caracterizar os modos de corpo rígido da aeronave, os quais ocorrem em baixas frequências, além de quantificar as respostas estáticas das superfícies de controle, que possuem grande importância para o movimento da aeronave. Por outro lado, o modelo aeroelástico visa identificar os modos flexíveis e fornece respostas em baixa frequência imprecisas.

A Figura 25 expõe de maneira clara o parágrafo anterior. Na figura, o modelo de mecânica do voo apresenta os modos longitudinais de fugoide e período curto. Após isso, o ganho da resposta diminui conforme a frequência aumenta. Já o modelo aeroelástico consegue identificar o modo de período curto (ainda que com diferença de frequência e amplitude em relação ao modelo FD) e as ressonâncias causadas pelo corpo flexível. No entanto, o modelo AE falha ao prever o modo de fugoide e apresenta resposta estática discrepante. Por fim, o modelo integrado consegue aliar a resposta em baixas frequências do modelo de corpo rígido com a resposta dos modos flexíveis predominantes em frequências maiores que 1 Hz. Assim, um único modelo em espaços de estados consegue representar ambos os cenários.

A negligência do modo de fugoide no modelo aeroelástico é justificada pela ausência da gravidade no equacionamento das soluções do Nastran. O modo de fugoide é caracterizado pela troca entre energia cinética e energia potencial gravitacional em uma oscilação com grande período.

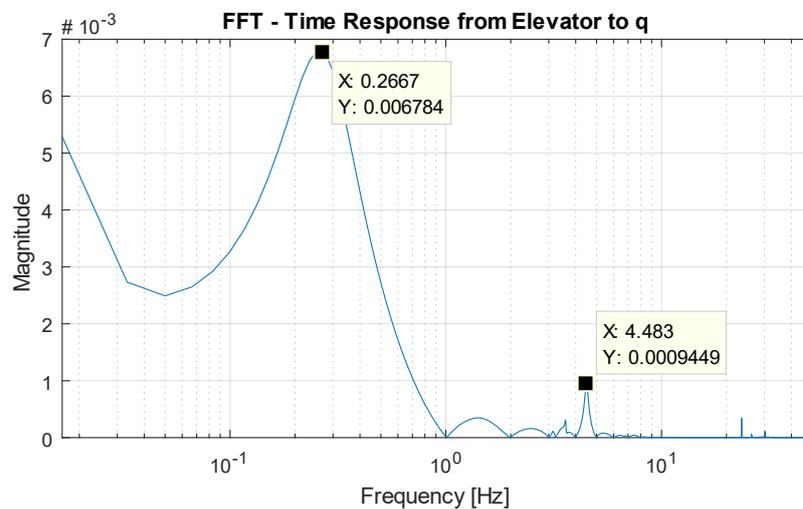
Uma segunda análise foi realizada comparando os modelos de mecânica do voo e integrado. A Figura 29 mostra uma simulação no tempo na qual a aeronave foi excitada com uma entrada do tipo degrau de amplitude de 10 graus de profundidade durante 1 segundo. O sinal de velocidade de arfagem foi extraído. É importante destacar que a resposta foi obtida no mesmo nó estrutural apresentado na Figura 15.

Figura 29 - Simulação no tempo - entrada degrau de profundor e resposta de arfagem q.

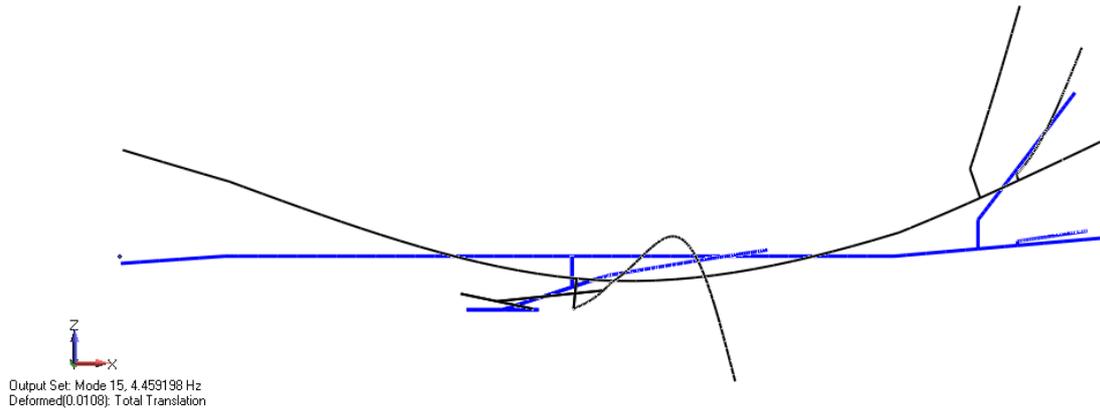


A figura mostra que o modelo integrado apresenta resposta semelhante à resposta do modelo de mecânica do voo acrescido de uma perturbação causada pela flexibilidade da aeronave. A transformada de Fourier do sinal de resposta revela dois principais harmônicos (Figura 30). O primeiro pico, com frequência de 0,27 Hz, representa o modo de período curto conforme Tabela 11. O segundo pico, com frequência de 4,48 Hz, representa o nono modo flexível cuja característica é a flexão vertical da fuselagem. Como a resposta foi obtida em um nó da fuselagem, é natural que o sinal capture com intensidade os modos da fuselagem excitados pelo profundor.

Figura 30 - FFT do sinal de resposta de arfagem.



**Figura 31 – Vista lateral: modo de flexão vertical da fuselagem – 4,46 Hz. Azul: indeformado. Preto: deformado.**



Assim, conclui-se a integração dos modelos de mecânica do voo e aeroelasticidade através da metodologia apresentada nos capítulos anteriores.

## 6 CONCLUSÃO

De acordo com os resultados apresentados no capítulo 5, o modelo integrado conseguiu unir as características favoráveis de cada modelo. Isto é, para baixas frequências houve predominância da resposta de corpo rígido semelhante àquela fornecida pelo modelo de mecânica do voo, enquanto para frequências acima de 1 Hz houve atuação dos modos flexíveis da aeronave.

A disponibilidade de obter o sinal de resposta da aeronave em qualquer nó estrutural possibilita que a lei de controle da aeronave seja projetada tendo em vista os efeitos flexíveis. Dessa forma, o projetista pode modificar as características da lei de controle em um estágio preliminar do projeto para evitar que grandes correções sejam necessárias no futuro, penalizando o desempenho da aeronave. Vale ressaltar que o acréscimo do modelo do atuador das superfícies de controle é relevante e deve ser realizado, uma vez que o ganho do comando é função da frequência. Geralmente, há uma saturação do atuador para frequências maiores que 20 Hz, semelhante a um filtro passa-baixo. Além disso, dependendo da ordem da função de transferência que modela o atuador, alguns picos podem ser amplificados antes da sua saturação.

O modelo integrado também permite analisar os efeitos de modos flexíveis no comportamento de voo da aeronave. Do ponto de vista de mecânica do voo, os modos flexíveis podem causar desconforto aos passageiros ou até produzir um problema conhecido como acoplamento biodinâmico, na qual comandos nas superfícies de controle são efetuados indesejadamente devido a vibrações sentidas pelo piloto e transmitidas para o manche. Do ponto de vista aeroelástico, o acoplamento entre modos de corpo rígido e flexíveis pode acarretar em uma instabilidade conhecida como *body-freedom flutter* (BFF) que deve ser evitada dentro do envelope de voo.

Os efeitos apresentados acima são amplificados a medida em que a aeronave se torna mais flexível e seus modos estruturais aproximam-se dos modos de corpo rígido. Neste caso, é indispensável uma análise integrada. No entanto, uma atenção é necessária quanto à metodologia apresentada neste trabalho. O modelo aeroelástico é linear e foi construído assumindo a hipótese de pequenas deformações. Em casos de aeronaves superflexíveis, a metodologia apresentada neste trabalho deve ser revista.

## REFERÊNCIAS

- AIRBUS S.A.S. 2019. **A350 Aircraft Characteristics, Airport and Maintenance Planning**. 2019. Revision No. 7.
- BISPLINGHOFF, R. L. e ASHLEY, H. 1962. **Principles of Aeroelasticity**. s.l. : John Wiley & Sons, 1962. New York.
- CASTRO NETO, Roberto Martins. 2017. **Análises Aeroelásticas de uma Asa Utilizando Modelo Reduzido**. Uberlândia : s.n., 2017.
- EASA. 2018. **Type-Certificate Data Sheet for Boeing 777**. 2018. No. EASA.IM.A.003.
- ESHELBY, Martin E. 2000. **Aircraft Performance Theory and Practice**. s.l. : Elsevier, 2000. ISBN 0-340-75897-X.
- ETKIN, Bernard e REID, Lloyd Duff. 1996. **Dynamics of Flight: Stability and Control**. s.l. : John Wiley and Sons, 1996. ISBN 0-471-03418-5.
- GUIMARÃES NETO, Antônio B., et al. 2016. **Formulation of the Flight Dynamics of Flexible Aircraft Using General Body Axes**. s.l. : AIAA Journal, 2016. doi: 10.2514/1.J054752.
- JUHASZ, Ondrej, et al. 2015. **A Coupled Lateral/Directional Flight Dynamics and Structural Model for Flight Control Design**. Kissimmee : AIAA SciTech, 2015. 10.2514/6.2015-0906.
- KARPEL, M. 1981. **Design for Active and Passive Flitter Suppression and Gust Alleviation**. s.l. : NASA, 1981. CR-3482.
- LOOYE, Gertjan H. N. 2007. **An Integrated Approach to Aircraft Modelling and Flight Control Law Design**. s.l. : Ridderprint Offsetdrukkerij BV, 2007. ISBN 978-90-5335-148-2.
- MARTINS, Joaquim R. R. A. e LAMBE, Andrew B. 2013. **Multidisciplinary Design Optimization: A Survey of Architectures**. AIAA Journal. 9 de Setembro de 2013, doi: 10.2514/1.J051895.
- MEIROVITCH, Leonard e TUZCU, Ilhan. 2003. **Integrated Approach to the Dynamics and Control of Maneuvering Flexible Aircraft**. s.l. : NASA, 2003. CR-2003-211748.
- MSC SOFTWARE CORPORATION. 2015. **Aeroelastic Analysis User's Guide**. USA : s.n., 2015.
- MSC SOFTWARE CORPORATION. 2011. **Dynamic Analysis User's Guide**. USA : s.n., 2011.

NELSON, Robert C. 1989. **Flight Stability and Automatic Control**. s.l. : McGraw-Hill, 1989. ISBN 0-07-046218-6.

QUENZER, Jake, et al. 2018. **The Generic Wide Body Aircraft Model**. Kissimmee : AIAA SciTech Forum, 2018. DOI: 10.2514/6.2018-0877.

ROGER, K. L. 1977. **Airplane Math Modeling and Active Aeroelastic Control Design**. s.l. : AGARD, 1977. CP-228.

ROSKAM, Jan. 1971. **Methods for Estimating Stability and Control Derivatives of Conventional Subsonic Airplanes**. Lawrence : s.n., 1971.

SCHMIDT, David K. 2012. **Modern Flight Dynamics**. New York : McGraw Hill, 2012. ISBN 978-0-07-339811-2.

THOMSON, Willian T. e DAHLEH, Marie Dillon. 1998. **Theory of Vibrations with Applications**. s.l. : Pearson Education, 1998. EISBN 0-13-651068-X.

WRIGHT, Jan R. e COOPER, Jonathan E. 2015. **Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads**. s.l. : John Wiley and Sons, 2015. ISBN 978-1-118-48801-0.

ZONA TECHNOLOGY. 2017. **ZAERO Theoretical Manual**. Scottsdale : s.n., 2017.