JUAN ESTUARDO NAVARRO CABALLERO

Existência de atrator pré-compacto para sistemas dinâmicos impulsivos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE MATEMÁTICA

2021

JUAN ESTUARDO NAVARRO CABALLERO

Existência de atrator pré-compacto para sistemas dinâmicos impulsivos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Sistemas dinâmicos.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Collegari.

UBERLÂNDIA - MG

2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C112
2021

Caballero, Juan Estuardo Navarro, 1992-
Existência de atrator pré-compacto para sistemas dinâmicos impulsivos [recurso eletrônico] / Juan Estuardo Navarro Caballero. - 2021.

Orientador: Rodolfo Collegari.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.106
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Collegari, Rodolfo ,1987-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Juan Estuardo Navarro Caballero.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11912MAT007.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Sistemas dinâmicos.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Existência de atrator pré-compacto para sistemas dinâmicos impulsivos.

ORIENTADOR Prof. Dr. Rodolfo Collegari.

Esta dissertação foi **APROVADA** em web conferência pela plataforma Mconf-RNP, em 17 de fevereiro de 2021, às 11h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	**ASSINATURA**
Prof. Dr. Rodolfo Collegari UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Rodolfo Collegari
Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Campus Rio Claro	Suzete Maria Silva Afonso
Prof. Dr. Henrique Barbosa da Costa UFBA - Universidade Federal da Bahia	Henrique Barbosa da Costa

Uberlândia-MG, 17 de fevereiro de 2021.

Dedicatória

Aos meus queridos pais Milly Caballero e Estuardo Navarro

Às minhas irmãs Mónica e Marilysse.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer a Deus Todo-Poderoso por me permitir viver esta bela experiência no Brasil, porque sem a sua graça e misericórdia nada disso teria sido possível. Também agradeço a minha família, aos meus pais Milly Caballero e Estuardo Navarro, pelo seu amor incondicional, apoio econômico e emocional, e minhas queridas irmãs Mónica e Marilysse.

Agradeço de maneira especial ao meu orientador Dr. Rodolfo Collegari, por toda a sua paciência, ajuda na realização desta dissertação e todas as coisas que me ensinou.

Por último agradeço à Universidade Federal de Uberlândia, aos professores da PPMAT por minha formação acadêmica, e agradeço o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES, que foi essencial para a conclusão do curso de mestrado.

NAVARRO CABALLERO, J.E. *Existência de atrator pré-compacto para sistemas dinâmicos impulsivos.* 2021. ix + 60 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho desenvolveremos a teoria dos atratores globais para sistemas dinâmicos impulsivos e contínuos, determinando condições para garantir a existência dos referidos atratores e dando algumas das suas propriedades. Além disso, estudaremos os conjuntos ω -limites e veremos que são fundamentais na construção dos atratores globais.

Palavras-chave: sistema dinâmico impulsivo, atratores globais, ω-limites, condições de tubo.

NAVARRO CABALLERO, J. E. *Existence of a pre-compact attractor for impulsive dynamic systems.* 2021. ix + 60 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work we will develop the theory of global attractors for impulsive and continuous dynamic systems, determining conditions to guarantee the existence of said attractors and giving some of their properties. In addition, we will study the ω-limit sets and see that they are fundamental in the construction of global attractors.

Keywords: impulsive dynamic system, global attractors, ω-limits, tube conditions.

Sumário

Introdução

No mundo real existem muitos fenômenos de diferentes naturezas (físicas, biológicas, econômicas, etc.), onde se busca uma lei que governe o comportamento da evolução contínua dos estados do fenômeno e cuja variável independente é geralmente representada pelo tempo. Como exemplo, citamos a posição de uma partícula que se move continuamente no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ quando o tempo varia e cuja posição no instante t é dada pela lei (função) $x(t)$. Esses fenômenos dependentes do tempo podem ser modelados por equações diferenciais. A teoria de sistemas dinâmicos estuda o comportamento assintótico qualitativo destes fenômenos, isto é, o comportamento dos estados quando o tempo vai para o infinito, sem a necessidade de resolver a equação diferencial (encontrar explicitamente a lei). Como queremos descrever o comportamento assintótico das soluções, questionamo-nos sobre a existência de um conjunto $\mathscr{A}$ que as atrai, ou seja, procuramos um conjunto $\mathscr{A}$ para o qual as soluções se aproximam quando o tempo passa. Se tal conjunto existe, como as soluções vão se aproximando, sabemos de alguma forma, como será o comportamento quando o tempo vai para o infinito.

No entanto, também existem problemas do mundo real onde as mudanças contínuas de estados podem experimentar forças externas abruptas (impulsos) as quais mudam seu comportamento completamente. Um exemplo deste tipo de problema no campo da medicina é consumo de um medicamento, em que o consumidor deve tomar um certo número de doses, o que produz mudanças abruptas na quantidade de medicamento em seu corpo, para controlar a doença ou erradicá-la. O leitor interessado em exemplos relacionados ao campo da ciência e tecnologia pode consultar [1, 13, 19, 20]. A teoria dos sistemas dinâmicos impulsivos aborda este tipo de problema, onde a evolução contínua dos processos é interrompido por mudanças abruptas de estado. Como no caso contínuo, esses sistemas também são modelados por equações diferenciais, mais especificamente, equações diferenciais impulsivas; detalhes sobre a teoria das equações diferenciais impulsivas tais como: existência e unicidade das soluções, a dependência das soluções em relação aos valores iniciais, variação de parâmetros, oscilação e estabilidade podem ser encontrados em [3, 5, 26]. Conforme indicado em [3, 26], existem diferentes tipos de impulsos, entre eles, sistemas com impulsos em tempos fixos e sistemas com impulsos em tempos variáveis, é claro que este último, o caso de sistemas dinâmicos impulsivos com impulsos que variam no tempo é mais difícil de controlar, já que não sabemos previamente o tempo dos impulsos. No entanto, ele nos fornece uma ferramenta eficaz para descrever mais tipos de movimentos descontínuos. Além disso, são mais interessantes por estarem mais ajustados aos problemas do mundo real. Nesta dissertação trataremos dos impulsos que ocorrem devido a condições no espaço de fase e não no tempo, ou seja, existe um conjunto (conjunto impulsivo) no espaço de fase e uma função (função impulso) que são as responsáveis pelas descontinuidades (mudanças abruptas) das soluções do sistema. Esta é uma abordagem diferente daquela em que ocorrem descontinuidades no tempo.

A teoria de sistemas dinâmicos impulsivos apareceu pela primeira vez nos anos 70 nas obras de Rozko (ver [29, 30]), onde ele introduziu várias noções de sistemas impulsivos com impulsos em tempos fixos. Em 1990, Kaul construiu os fundamentos matemáticos da teoria com impulsos em tempos variáveis (veja [23, 24]), e foi seguida por vários autores a fim de desenvolver a teoria que é conhecida até o momento. Kaul e Ciesielski publicaram resultados muitos importantes nessa área (ver [2, 16, 17, 24, 25]). Por exemplo, nos artigos de Ciesielski ([14–16]), é analisada a continuidade da função tempo de impacto ϕ que descreve "o tempo de alcance dos pontos de impulso". Na atualidade uma vasta literatura sobre os sistemas dinâmicos impulsivos foi desenvolvida, entre os pesquisadores que contribuíram nessa área estão Bonotto e seus colaboradores, veja [7, 9–12] para obter detalhes da teoria e [2, 4, 13, 18, 19, 21] para aplicações e resultados importantes.

Nesta dissertação nosso objetivo é estabelecer condições para garantir a existência de um atrator global para um sistema dinâmico impulsivo, para isso, o trabalho foi estruturado da seguinte forma: no Capítulo 1 apresentamos as definições e resultados básicos de Análise e Topologia que serão utilizados nas demonstrações ao longo do trabalho e damos uma breve noção do que são sistemas dinâmicos.

No Capítulo 2 tratamos da teoria dos semigrupos. Apresentamos as definições de semigrupos e conjuntos ω-limites . Também mostramos os conceitos de semidistância de Hausdorff, atração e invariância necessários para introduzir o conceito de atrator global. Apresentamos algumas propriedades do atrator global, se ele existir. Procuramos condições para a existência do atrator global em dois casos: ponto dissipativo e limitado dissipativo.

O Capítulo 3 é o principal e trata sobre os sistemas dinâmicos impulsivos e está dividido nas seguintes seções:

A Seção 3.1 trata das "condições de tubo" para sistemas dinâmicos impulsivos, que garantem o bom comportamento do fluxo contínuo $T(t)$ próximo ao conjunto impulsivo M, esta seção é de natureza técnica e o resultado principal é a Proposição 3.13 que nos ajudará a estabelecer a invariância dos conjuntos ω-limites impulsivos. Este resultado afirma que o fluxo impulsivo $\widetilde{T}(t)$ não pode alcançar o "lado direito" do conjunto impulsivo M para grandes valores de t.

Na Seção 3.2 damos uma primeira definição de atrator global compacto (Definição 3.14) para sistemas dinâmicos impulsivos. Analisamos que, com essa abordagem de atrator compacto, os comportamentos assintóticos de T e $\widetilde{T}$ não são qualitativamente diferentes. O Exemplo 3.16 auxilia na apresentação de uma nova definição de atrator global (Definição 3.17), onde o atrator passa a ser um conjunto pré-compacto, com a qual são incluídos os casos em que T e $\widetilde{T}$ têm dinâmicas assintóticas diferentes. Finalmente, damos algumas propriedades do atrator, tais como: unicidade, caracterização por órbitas de soluções globais limitadas e ser o subconjunto mínimo que atrai subconjuntos limitados (Proposição 3.19).

Na Seção 3.3, discutimos os conjuntos ω-limites impulsivos, damos uma caracterização do atrator global em relação a eles (Proposição 3.24), definimos sistemas dinâmicos limitados dissipativos e estudamos as propriedades dos ω-limites para tais sistemas impulsivos. Provamos as invariâncias positiva (Proposição 3.26), negativa (Proposição 3.29) e a atração (Proposição 3.31) dos conjuntos ω-limites impulsivos .

Na Seção 3.4, definimos sistemas dinâmicos fortemente limitados dissipativos e apresentamos o principal resultado deste trabalho, o teorema que garante a existência do atrator global para os sistemas dinâmicos impulsivos fortemente limitados dissipativos (Teorema 3.33).

Na Seção 3.5 apresentamos dois exemplos: o primeiro consiste de um sistema impulsivo planar simples, e o segundo de uma EDO impulsiva e, em cada um deles, mostramos que os sistemas dinâmicos impulsivos gerados são fortemente limitados dissipativos e, portanto, têm atrator global.

Juan Estuardo Navarro Caballero

Uberlândia-MG, 17 de fevereiro de 2021.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definições e resultados básicos

Nesta seção apresentamos definições e resultados que usaremos mais adiante. Os resultados são somente enunciados, sendo omitidas as suas demonstrações, podendo estas ser encontradas em [6, 22, 27, 28, 31]. Ao longo desta seção, X representará um espaço métrico e Y um espaço topológico salvo menção contrária.

Definição 1.1: Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é **semicontínua inferiormente** no ponto $a \in X$ se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $x \in X$, $d(x,a) < \delta$ então $f(x) > f(a) - \varepsilon$. Similarmente, dizemos que f é **semicontínua superiormente** em $a \in X$ se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $x \in X$, $d(x,a) < \delta$ então $f(x) < f(a) + \varepsilon$.

Quando $f\colon X \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente (superiormente) em cada ponto de X dizemos que f é semicontínua inferiormente (superiormente) em X.

Teorema 1.2: *Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente (superiormente) em $x \in X$ se, e somente se, para toda sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X, com $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$, tem-se $c \geq f(x)$ ($c \leq f(x)$).*

Uma consequência imediata é que uma função é contínua em X se, e somente se, é semicontínua superior e inferiormente em X.

Teorema 1.3: *Sejam A um subconjunto compacto de X e $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente. Então f é limitada inferiormente e atinge seu valor mínimo em um ponto de A.*

Proposição 1.4: *Seja A um subconjunto de X. Então:*

a) *A é limitado se, e somente se, $\overline{A}$ é limitado.*

b) $d(x,A) = d(x,\overline{A})$.

c) *$x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em A tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.*

Definição 1.5: Um subconjunto A de Y é **relativamente compacto** (ou **pré-compacto**) se $\overline{A}$ é um conjunto compacto.

Definição 1.6: Um subconjunto A de X é **totalmente limitado** se dado $\varepsilon > 0$ existe um número finito de bolas centradas em pontos de A de raio $\varepsilon > 0$ cuja união cobre A, isto é, existem $n \in \mathbb{N}$ e $\{x_i\}_{i=1}^n \subset A$ tais que $A \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.

Teorema 1.7: *No espaço X os seguintes enunciados são equivalentes:*

a) *X é compacto.*

b) *Toda sequência em X possui uma subsequência convergente.*

c) *X é totalmente limitado e completo.*

Teorema 1.8: *Seja A um subconjunto de Y.*

a) *Se Y é compacto e A é fechado, então A é compacto.*

b) *Se Y é Hausdorff e A é compacto, então A é fechado.*

Teorema 1.9: *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$.*

Definição 1.10: Uma coleção $\mathfrak{C}$ de subconjuntos de Y possui a **propriedade da interseção finita** se cada coleção finita

$$C_1, \ldots, C_n$$

de $\mathfrak{C}$ tem interseção não-vazia, isto é, $\cap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$.

Teorema 1.11: *Um espaço topológico Y é compacto se, e somente se, cada coleção $\mathfrak{C}$ de conjuntos fechados em Y que possui a propriedade da interseção finita, satisfaz $\cap_{C \in \mathfrak{C}} C \neq \emptyset$.*

Teorema 1.12: *Toda sequência de Cauchy em X que possui uma subsequência convergente é convergente.*

Teorema 1.13: *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Então:*

a) *Se $A \subset X$ é compacto então $f(A)$ é compacto.*

b) *Se $B \subset X$ é conexo então $\overline{B}$ e $f(B)$ são conexos.*

Teorema 1.14: *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \quad t > s, \\ x(s) = x_s \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função continuamente diferenciável, $s\in\mathbb{R}$ e $x_s\in\mathbb{R}^n$. Então, existem $\tau > s$ e uma função continuamente diferenciável $[s,\tau)\ni t\mapsto \xi(t)\in\mathbb{R}^n$ com $\xi(s)=x_s$ e $\dot{\xi}(t)=f(t,\xi(t))$ para todo $t\in(s,\tau)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

i) *Se existem $\sigma > s$ e uma função continuamente diferenciável $\eta\colon [s,\sigma)\to\mathbb{R}^n$ tais que $\eta(s)=x_s$ e $\dot{\eta}(t)=f(t,\eta(t))$ para todo $t\in(s,\sigma)$ então $\xi(t)=\eta(t)$ para todo $t\in[0,\min\{\sigma,\tau\})$.*

ii) *Existem $\tau(s,x_s) > s$ e uma solução $[s,\tau_{s,x_s})\ni t\mapsto x(t,s,x_s)\in\mathbb{R}^n$ de (1.1) tais que ou $\tau(s,x_s)=\infty$ ou $\tau(s,x_s)<\infty$ e $\limsup_{t\to\tau(s,x_s)}\|x(t,s,x_s)\|=\infty$.*

iii) *Se $E=\{(t,s,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\colon s\le t<\tau(s,x)\}$, a função $E\ni(t,s,x_s)\mapsto x(t,s,x_s)\in\mathbb{R}^n$ é contínua.*

1.2 Noção de sistema dinâmico e atrator

Para compreender conceitualmente o que é um sistema dinâmico imaginemos que temos um fenômeno que evolui com tempo e é descrito pela lei $x(t)$ que representa o valor da variável x no instante t, e queremos prever o valor da variável x para instantes futuros de t. Denotemos por X conjunto de todos os valores que pode tomar a variável x, chamado de espaço de fase.

Um sistema dinâmico em X é uma família de funções $\{S(t,s)\colon t\ge s\}$, definidas em X e tomando valores em X de forma que, se o valor da variável no instante s é x, então o valor da variável num instante posterior t é $S(t,s)x$. Conhecendo o sistema dinâmico podemos saber (no futuro) os valores da variável que conhecemos no instante presente para cada possível valor da variável x em X. É claro que esta família de funções deve obedecer certas condições de compatibilidade:

i) $S(t,t)x=x$ para quaisquer $t\in\mathbb{R}$ e $x\in X$;

ii) $S(t,\tau)\circ S(\tau,s)x=S(t,s)x$ sempre que $t\ge\tau\ge s$ e $x\in X$.

Algumas vezes também é solicitado que um sistema dinâmico tenha a seguinte propriedade de continuidade:

iii) a aplicação $\{(t,s,x)\in\mathbb{R}^2\times X\colon t\ge s\}\ni(t,s,x)\mapsto S(t,s)x\in X$ é contínua.

Isto motiva a seguinte definição:

Definição 1.15: Sejam X um espaço métrico e $C(X)$ o espaço das funções contínuas de X em X. Um **sistema dinâmico** em X é uma família $\{S(t,s)\colon t\ge s\}\subset C(X)$ satisfazendo:

i) $S(t,t)=I$ para todo $t\in\mathbb{R}$, onde I denota a identidade em X;

ii) $S(t,\sigma)\circ S(\sigma,s)=S(t,s)$ para quaisquer $t\ge\sigma\ge s$;

iii) a aplicação $\{(t,s,x)\in\mathbb{R}^2\times X\colon t\ge s\}\ni(t,s,x)\mapsto S(t,s)x\in X$ é contínua.

Quando t e s são tomados em $\mathbb{Z}$, diremos que $\{S(t,s)\colon t \geq s\}$ é um **sistema dinâmico discreto**, e se t e s são tomados em $\mathbb{R}$ diremos que $\{S(t,s)\colon t \geq s\}$ é um **sistema dinâmico contínuo**. Alguns autores consideram apenas as duas primeiras propriedades, chamando de **sistema dinâmico fortemente contínuo** se também satisfizer a terceira.

Em geral, existem dois tipos de sistemas dinâmicos: os **sistemas dinâmicos autônomos** e os **sistemas dinâmicos não-autônomos**.

Os sistemas dinâmicos autônomos, também chamados de semigrupos, são aqueles que satisfazem

$$S(t,s) = S(t-s,0), \text{ para todo } t \geq s.$$

Neste caso, se definimos $T(t) = S(t,0) \in C(X)$ para cada $t \geq 0$, temos:

i) $T(0) = I$, onde I é a identidade em X;

ii) $T(t) \circ T(s) = T(t+s)$ para todo $t,s \geq 0$.

Uma família $\{T(t)\colon t \geq 0\}$ com as propriedades acima é chamada de **semigrupo** em X.

Observação 1.16:

i) A partir de um semigrupo $\{T(t)\colon t \geq 0\}$ podemos definir um sistema dinâmico autônomo $\{S(t,s)\colon t \geq s\}$ fazendo $S(t,s) = T(t-s)$, $t \geq s$.

ii) Num sistema dinâmico autônomo, a evolução do estado x ocupado no instante s para o estado $S(t+s,s)x$ ocupado no instante $t+s$ é independente de s e depende apenas de t.

Os demais sistemas dinâmicos serão chamados sistemas dinâmicos não autônomos ou **processos de evolução**.

Os sistema dinâmicos estão relacionados às equações diferenciais e, para ilustrar este fato, considere o problema de valor inicial (1.1) e suponha que exista uma constante $M > 0$ tal que

$$f(t,x) \cdot x < 0, \text{ para quaisquer } t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \text{ com } \|x\| \geq M. \tag{1.2}$$

Assim, se $x(t,s,x_s)$ é a solução de (1.1) então

$$\frac{d}{dt}\|x\|^2 = 2f(t,x) \cdot x.$$

Segue de (1.2) e do Teorema 1.14, que $\tau(s,x_s) = \infty$, para quaisquer $s \in \mathbb{R}$ e $x_s \in \mathbb{R}^n$. Assim, podemos definir uma família de funções $S(t,s)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ para $t \geq s$, por

$$S(t,s)x_s = x(t,s,x_s) \text{ para todo } x_s \in \mathbb{R}^n.$$

Pelo Teorema 1.14, para concluir que $\{S(t,s)\colon t \geq s\}$ é um processo de evolução em $X = \mathbb{R}^n$, precisamos somente verificar a condição ii) da Definição 1.15. Esta condição segue da unicidade de solução para (1.1) dada no Teorema 1.14 observando que $\xi(t) = x(t,\sigma,x(\sigma,s,x_s))$ e $\eta(t) = x(t,s,x_s)$ são ambas soluções do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \quad t > s, \\ x(\sigma) = x(\sigma,s,x_s) \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Note que, se $s = 0$ e o problema de valor inicial (1.1) é autônomo, isto é, $f(t,x) = g(x)$ (não depende do tempo), então $[0,\infty) \ni t \mapsto x(t+\tau,\tau,x_0)$ é solução de

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) \quad t > 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

para todo $\tau \geq 0$. Neste caso, a família $\{T(t) \colon t \geq 0\}$ definida por $T(t)x_0 = x(t,0,x_0)$ para cada $t \geq 0$ define um semigrupo (contínuo) em $X = \mathbb{R}^n$.

Já vimos que os sistemas dinâmicos estão associados às equações diferenciais. Ainda, a criação desta área se remonta aos trabalhos de Henri Poincaré sobre as equações diferenciais do tipo

$$\dot{x} = F(x). \tag{1.3}$$

Antes de Poincaré, o objetivo era resolver uma equação do tipo (1.3), isto é, encontrar uma expressão analítica da função x que satisfaz (1.3). Mas existem alguns problemas: a maioria das equações diferenciais não podem ser resolvidas analiticamente e, embora pudesse ser resolvida em alguns casos, a solução pode ser tão complicada que não podemos extrair informação dela por exemplo, se é periódica ou se tende para o infinito. Baseado nisso, Poincaré defendeu uma nova abordagem: em muitos casos, mais interessante do que resolver uma equação é descrever qualitativamente o comportamento das suas soluções, ou seja, descrever o comportamento de $x(t)$ quando $t \to \infty$ sem tentar calcular as soluções.

Um dos objetivos da teoria de sistemas dinâmicos é estudar o comportamento de $x(t)$ quando $t \to \infty$ e então, é natural perguntar se existe um conjunto (o qual chamaremos de atrator) para o qual $x(t)$ se aproxima quando $t \to \infty$, isto é, um conjunto que **atrai** a solução. No próximo capítulo, iremos definir o conceito de atrator e procuraremos condições para garantir a existência de atrator para um semigrupo.

Capítulo 2

Atratores para Semigrupos

No estudo de semigrupos os atratores globais desempenham um papel central. Neste capítulo apresentaremos os conceitos e os resultados básicos que nos levam à caracterização dos semigrupos que possuem um atrator global.

Ao longo deste capítulo, X será um espaço métrico com métrica $d\colon X\times X\to[0,\infty)$ e denotaremos por $C(X)$ o conjunto das funções contínuas de X em X. Além disso, para incluir o caso discreto e o contínuo, escreveremos $\mathbb{T}$ para denotar o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ ou o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}^+=\{t\in\mathbb{T}\colon t\geq 0\}$, $\mathbb{T}^-=\{t\in\mathbb{T}\colon t\leq 0\}$, $\mathbb{T}_t^-=t+\mathbb{T}^-$ e $\mathbb{T}_t^+=t+\mathbb{T}^+$, para todo $t\in\mathbb{T}$.

Iniciamos introduzindo o principal conceito deste trabalho, a noção de semigrupo no espaço métrico X.

Definição 2.1: Um **semigrupo** em X é uma família $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}\subset C(X)$ que satisfaz:

i) $T(0)=I$, onde I é a identidade em X;

ii) $T(t+s)=T(t)\circ T(s)$ para todos $t,s\in\mathbb{T}^+$.

Além disso, um semigrupo $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}\subset C(X)$ é dito **fortemente contínuo** se a aplicação $\mathbb{T}^+\times X\ni(t,x)\mapsto T(t)x\in X$ é contínua.

Ao longo do texto, para não carregar a escrita, escreveremos apenas $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ para nos referenciar a um semigrupo em X, assumindo que além das propriedade i) e ii) na definição acima, $T(t)\colon X\to X$, $t\in\mathbb{T}^+$, é um operador contínuo para cada $t\in\mathbb{T}^+$, isto é, $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}\subset C(X)$.

Observação 2.2: Se $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ então todo semigrupo $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo fortemente contínuo. Além disso, como $T(n)=T(1)^n$, escrevendo $T=T(1)$, o semigrupo $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ pode ser escrito na forma $\{T^n\colon n\in\mathbb{N}\}$.

A seguir vejamos diversos conceitos importantes com relação a um semigrupo.

Definição 2.3: Sejam $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo e $B\subset X$ um subconjunto de X.

i) Dado $t \in \mathbb{T}^+$, definimos a **imagem** de B sob $T(t)$ por

$$T(t)B = \{T(t)x \colon x \in B\}.$$

ii) Dados $t, t' \in \mathbb{T}^+$ com $t < t'$, definimos

- a **órbita positiva** de B por
$$\gamma^+(B) = \bigcup_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)B;$$
- a **órbita parcial** de B entre t e t' por
$$\gamma^+_{[t,t']}(B) = \bigcup_{s \in [t,t'] \cap \mathbb{T}^+} T(s)B;$$
- a **órbita de** B **começando em** t por
$$\gamma^+_t(B) = \bigcup_{s \in \mathbb{T}^+_t} T(s)B.$$

iii) Dizemos que uma função $\xi \colon \mathbb{T}^- \to X$ é

- uma **solução para trás** de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se
$$\xi(t+s) = T(t)\xi(s),$$
para quaisquer $t \in \mathbb{T}^+$ e $s \in \mathbb{T}^-$, com $t + s \in \mathbb{T}^-$. Ainda, se $\xi(0) = x$ então diremos que ξ é uma **solução para trás** de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ **por** x;
- uma **solução global** de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se
$$\xi(t+s) = T(t)\xi(s),$$
para quaisquer $t \in \mathbb{T}^+$ e $s \in \mathbb{T}$. Ainda, se $\xi(0) = x$ então diremos que ξ é uma **solução global** de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ **por** x;
- uma **solução estacionária** de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se $\xi \colon \mathbb{T} \to X$ for uma solução global constante. O seu valor será chamado de **ponto estacionário**, ou **ponto de equilíbrio** ou **ponto fixo** de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

iv) Seja $\xi \colon \mathbb{T} \to X$ uma solução global de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por $x \in X$, definimos

- a **órbita global de** x **relativa a** ξ por
$$\gamma_\xi(x) = \{\xi(t) \colon t \in \mathbb{T}\};$$
- para cada $t \in \mathbb{T}$, a **órbita até** t **de** x **relativa a** ξ por
$$(\gamma_\xi)^-_t(x) = \{\xi(s) \colon s \in \mathbb{T}^-_t\};$$

A seguir apresentamos um resultado que mostra como construir um solução global conhecendo uma solução para trás e quando está solução global é única.

Proposição 2.4: *Seja $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X.*

a) *Se $\xi\colon\mathbb{T}\to X$ é uma solução para trás de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ por x então $\eta\colon\mathbb{T}\to X$ dada por*

$$\eta(t)=\begin{cases}\xi(t), & t\in\mathbb{T}^-,\\ T(t)x, & t\in T^+,\end{cases}$$

é uma solução global de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ por x.

b) *Se $\xi\colon\mathbb{T}\to X$ é uma solução global de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ por x então*

$$\xi(t)=T(t)x,\ \textit{para todo}\ t\in\mathbb{T}^+.$$

c) *Se $\xi\colon\mathbb{T}\to X$ é uma solução para trás de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ por x e $T(t)$ é injetiva para cada $t\in\mathbb{T}^+$, então ξ é única.*

Demonstração: a) Sejam $t\in\mathbb{T}^+$ e $s\in\mathbb{T}$. Se $s\in\mathbb{T}^+$, então $t+s\in\mathbb{T}^+$, logo $\eta(t+s)=T(t+s)x=T(t)T(s)x=T(t)\eta(s)$.
Se $s\in\mathbb{T}^-$ então há dois casos a se considerar:

- Se $t+s\in\mathbb{T}^-$, então $T(t)\eta(s)=T(t)\xi(s)=\xi(t+s)=\eta(t+s)$.
- Se $t+s\in\mathbb{T}^+$, então $\eta(t+s)=T(t+s)x=T(t+s)\xi(0)=T(t+s)\xi(-s+s)=T(t+s)T(-s)\xi(s)=T(t+s-s)\xi(s)=T(t)\xi(s)=T(t)\eta(s)$.

b) Basta ver que se $t\in\mathbb{T}^+$ então $\xi(t)=\xi(t+0)=T(t)\xi(0)=T(t)x$.

c) Sejam $\eta\colon T\to X$ outra solução para trás de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ e $t\in\mathbb{T}^-$. Como $T(-t)\xi(t)=\xi(-t+t)=\xi(0)=x=\eta(0)=T(-t)\eta(t)$ e $T(-t)$ é injetiva então $\xi(t)=\eta(t)$ para todo $t\in\mathbb{T}^+$.

$\square$

Observação 2.5: Como $T(t)\colon X\to X$ não é necessariamente injetiva para cada $t\in\mathbb{T}^+$, podemos ter mais de uma solução para trás por x e, consequentemente, uma solução global por x, quando existe, não precisa ser única.

Apresentaremos agora um dos conceitos mais importantes da teoria de semigrupos, o ω-limite de $B\subset X$, que é o conjunto onde as órbitas "para frente" de B se acumulam, e desempenha um papel fundamental no estudo do comportamento assintótico de um semigrupo, como veremos mais adiante.

Definição 2.6: O conjunto **ω-limite** de um subconjunto B de X é definido por

$$\omega(B)=\bigcap_{t\in\mathbb{T}^+}\overline{\gamma_t^+(B)}.$$

O conceito análogo ao ω-limite mas onde as órbitas se acumulam "para trás" é o α-limite que definimos a seguir.

Definição 2.7: O conjunto **α-limite de** x **relativo a** ξ é definido por

$$\alpha_\xi(x) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^-} \overline{(\gamma_\xi)_t^-(x)}.$$

Na sequência veremos importantes caracterizações dos conjuntos ω-limite e α-limite que serão frequentemente utilizadas nas demonstrações de resultados ao longo do texto.

Proposição 2.8: *Sejam $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo e $B\subset X$ um subconjunto não-vazio de X. Então o conjunto $\omega(B)$ é fechado e vale*

$$\omega(B)=\left\{y\in X\colon \exists\ \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{T}^+ \ e\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset B \mid t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty\ e\ T(t_n)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y\right\}.$$

Além disso, se $\xi\colon\mathbb{T}\to X$ é uma solução global do semigrupo $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ por $x\in X$, então $\alpha_\xi(x)$ é fechado e

$$\alpha_\xi(x)=\left\{y\in X\colon \exists\ \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{T}^+ \mid t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty\ e\ \xi(-t_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y\right\}.$$

Demonstração. Seja $y\in\omega(B)$. Então $y\in\bigcap_{t\in\mathbb{T}^+}\overline{\gamma_t^+(B)}$ e, assim, $y\in\overline{\gamma_t^+(B)}$, para todo $t\in\mathbb{T}^+$. Em particular, para cada $n\in\mathbb{N}$, $y\in\overline{\gamma_n^+(B)}$ e, então, existe uma sequência $\{y_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\gamma_n^+(B)$ tal que $y_k^n\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow}y$. Como $y_k^n\in\gamma_n^+(B)$ para quaisquer $n,k\in\mathbb{N}$, existem sequências $\{x_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}}\subset B$ e $\{q_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{T}^+$ tais que

$$y_k^n=T(n+q_k^n)x_k^n.$$

Como $y_k^n\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow}y$, dados $n\in\mathbb{N}$ e $\varepsilon>0$, existe $k(n,\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que se $k\geq k(n,\varepsilon)$ então

$$d(y_k^n,y)<\varepsilon,$$

isto é, se $k\geq k(n,\varepsilon)$ então $d(T(n+q_k^n)x_k^n,y)<\varepsilon$. Assim, se definimos $t_n=n+q^n_{k(n,1/n)}$ e $x_n=x^n_{k(n,1/n)}$ então

$$d(T(t_n)x_n,y)<\frac{1}{n}\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Portanto, $x_n\in B$ para todo $n\in\mathbb{N}$, $t_n\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ e $y=\lim_{n\to\infty}T(t_n)x_n$. Para a recíproca, sejam $y\in X$ e sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{T}^+$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset B$, tais que $t_n\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ e $y=\lim_{n\to\infty}T(t_n)x_n$. Assim, para $\tau\in\mathbb{T}^+$ fixado, $\{T(t_n)x_n\}_{t_n\geq\tau}\subset\overline{\gamma_\tau^+(B)}$. Isto mostra que $y\in\omega(B)$.

Para $\alpha_\xi(x)$, seja $y\in\bigcap_{t\in\mathbb{T}^-}\overline{(\gamma_\xi^-)(x)}=\bigcap_{t\in\mathbb{T}^-}\overline{\{\xi(s)\colon s\leq t\}}$. Assim, $y\in\overline{\{\xi(s)\colon s\leq t\}}$ para todo $t\in\mathbb{T}^-$ e, em particular, $y\in\{\xi(s)\colon s\leq -n\}$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Então existe uma sequência $\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\{\xi(s)\colon s\leq -n\}$ tal que $x_k^n\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow}y$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Como $x_k^n\in\{\xi(s)\colon s\leq -n\}$ para quaisquer $n,k\in\mathbb{N}$, então $x_k^n=\xi(t_k^n)$, com $t_k^n\leq -n$ para cada $n,k\in\mathbb{N}$. Como $x_k^n\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow}y$, dados $n\in\mathbb{N}$ e $\varepsilon>0$, existe $k=k(n,\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que se $k\geq k(n,\varepsilon)$ então

$$d(x_k^n,y)<\varepsilon,$$

isto é, $d(\xi(t_k^n),y) < \varepsilon$ se $k \geq k(n,\varepsilon)$. Assim, se definimos $t_n = t^n_{k(n,\frac{1}{n})} \leq -n$ então

$$d(\xi(t_n),y) < \frac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto, $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ e $y = \lim_{n\to\infty} \xi(t_n)$. Para a recíproca, sejam $y \in X$, $\tau \in \mathbb{T}^-$ e uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{T}^+$, com $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tais que $y = \lim_{n\to\infty} \xi(-t_n)$. Logo, $\{\xi(-t_n)\}_{-t_n \geq \tau} \subset \{\xi(s)\colon s \geq \tau\}$ e, portanto, $y \in \overline{\{\xi(s)\colon s \geq \tau\}} = \overline{(\gamma_\xi)_\tau^-(x)}$. Isto mostra que $y \in \alpha_\xi(x)$. $\square$

Antes de introduzir as noções de atração, absorção e invariância sob a ação de um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, vejamos o conceito de semidistância de Hausdorff.

Definição 2.9: Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de X. Definimos a **semidistância de Hausdorff** entre A e B por

$$d_H(A,B) = \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} d(x,y).$$

Observação 2.10: Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de X. Façamos algumas comentários com relação a semidistância de Hausdorff.

i) A semidistância de Hausdorff não é comutativa, $d_H(A,B) \neq d_H(B,A)$. Por exemplo, considere em $\mathbb{R}$ os seguintes conjuntos: $A = [-1,1]$ e $B = [0,3]$, então $d_H(A,B) = \sup_{x\in A}\{d(x,B)\} = 1$ e $d_H(B,A) = \sup_{x\in B}\{d(x,A)\} = 2$.

ii) $d_H(A,B) = \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} d(x,y) = \sup_{x\in A} d(x,B)$. Assim, quando $A = \{a\}$, $d_H(a,B)$ se reduz à distância usual de um ponto a um conjunto, isto é,

$$d_H(a,B) = d(a,B) = \inf_{b\in B} d(a,b).$$

iii) A semidistância de Hausdorff entre A e B indica o quão dentro está A em B. Quanto "mais contido" em B o conjunto A está, menor é a a semidistância de Hausdorff. Na Figura 2.1, $r_2 < r_1$.

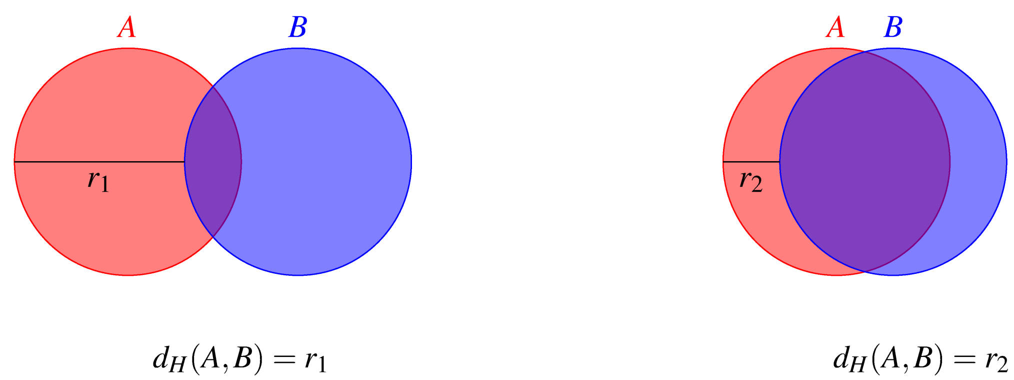


Figura 2.1: Semidistância de Hausdorff entre A e B.

Provamos a seguir um resultado que nos diz quando a semidistância de Hausforff entre dois conjuntos é igual a zero.

Proposição 2.11: *Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de X. Então, $d_H(A,B) = 0$ se, e somente se, $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Demonstração: Suponha que $d_H(A,B) = 0$. Note que, como

$$d_H(A,B) = \sup_{x \in A}\{d(x,B)\} = 0,$$

então $d(x,B) = 0$ para todo $x \in A$, assim, $A \subset \overline{B}$. Portanto, $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Por outro lado, suponha $\overline{A} \subset \overline{B}$. Para provar que $d_H(A,B) = 0$ é suficiente provar que $d(x,B) = 0$ para todo $x \in A$. Assim, se $x \in A$ então $0 = d(x,A) = d(x,\overline{A}) \geq d(x,\overline{B}) = d(x,B)$, logo $d(x,B) = 0$ para todo $x \in A$. Portanto, $d_H(A,B) = 0$. □

A seguir vejamos os conceitos de atração e absorção sob a ação de um semigrupo $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Definição 2.12: Sejam $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo e $A,B \subset X$ subconjuntos não-vazios de X. Diremos que

- A **atrai** B sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} d_H(T(t)B,A) = 0.$$

- A **absorve** B sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B \subset A$ para todo $t \geq t_0$.

Além disso, dados $C \subset X$ e $r > 0$, definimos também a r**-vizinhança** de C por

$$\mathscr{O}_r(C) = \{x \in X \colon d(x,C) < r\}.$$

A proposição a seguir nos diz que a noção de absorção é mais forte que a noção de atração.

Proposição 2.13: *Sejam $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo e $A,B,C,D \subset X$ subconjuntos não-vazios de X. Se A absorve B sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ então A atrai B. Além disso, se C atrai D sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e $r > 0$, então $\mathscr{O}_r(C)$ absorve D sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.*

Demonstração: Se A absorve B então existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B \subset A$ para todo $t \geq t_0$. Logo, $d_H(T(t)B,A) = 0$ para todo $t \geq t_0$ o que implica $\lim_{t \to \infty} d_H(T(t)B,A) = 0$.

Se C atrai D, então dado $r > 0$ existe $t_r \geq 0$ tal que $d_H(T(t)D,C) < r$ para todo $t \geq t_r$. Logo $T(t)D \subset \mathscr{O}_r(C)$ para todo $t \geq t_r$, isto é, $\mathscr{O}_r(C)$ absorve D sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. □

Assim como as noções de atração e absorção, a noção de invariância desempenha um papel fundamental no estudo da dinâmica assintótica de semigrupos. Vejamos a seguir este conceito.

Definição 2.14: Sejam $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo e $A \subset X$ um subconjunto não-vazios de X. Diremos que

i) A é **positivamente invariante** por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se $T(t)A \subset A$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$,

ii) A é **negativamente invariante** por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se $T(t)A \supset A$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$,

iii) A é **invariante** por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se $T(t)A = A$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$.

Observação 2.15: Se $x^* \in X$ é um ponto de equilíbrio de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$, isto é, $T(t)x^* = x^*$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, então o conjunto $\{x^*\}$ é invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

A seguir apresentamos um resultado com relação ao conceito de invariância.

Proposição 2.16: *Seja $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X.*

a) *Se $B \subset X$ for um subconjunto não-vazio de X e $t \in \mathbb{T}^+$ então $\gamma_t^+(B)$ é positivamente invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.*

b) *Se $x \in X$ e $\xi \colon \mathbb{T} \to X$ for uma solução global de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x então $\gamma_\xi(x) = \{\xi(t) \colon t \in \mathbb{T}\}$ é invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.*

c) *Se $x \in X$ e $\xi \colon \mathbb{T} \to X$ for uma solução para trás de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x então $(\gamma_\xi)^-(x) = \{\xi(t) \colon t \in \mathbb{T}^-\}$ é negativamente invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.*

Demonstração: a) Se $u \in \mathbb{T}^+$ então

$$T(u)\gamma_t^+(B) = T(u)\left(\bigcup_{s \geq t} T(s)B\right) = \bigcup_{s \geq t} T(u)T(s)B = \bigcup_{s \geq t} T(u+s)B = \gamma_{t+u}^+(B) \subset \gamma_t^+(B),$$

isto é, $\gamma_t^+(B)$ é positivamente invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

b) Sejam $t \in \mathbb{T}^+$ e $s \in \mathbb{T}$. Logo

$$T(t)\xi(s) = \xi(t+s) \in \xi(\mathbb{T}),$$

isto é, $T(t)\xi(\mathbb{T}) \subset \xi(\mathbb{T})$. Por outro lado,

$$\xi(s) = T(t)\xi(s-t) \in T(t)(\xi(\mathbb{T})),$$

isto é, $\xi(\mathbb{T}) \subset T(t)(\xi(\mathbb{T}))$. Portanto, $\gamma_\xi(x)$ é invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

c) Sejam $t \in \mathbb{T}^+$ e $s \in \mathbb{T}^-$. Como

$$\xi(s) = T(t)\xi(s-t) \in T(t)\left((\gamma_\xi)^-(x)\right),$$

então $(\gamma_\xi)^-(x) \subset T(t)(\gamma_\xi)^-(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. □

Agora já estamos em condições de introduzir o principal conceito deste capítulo, o de atrator global para semigrupos.

Definição 2.17: Um conjunto $\mathscr{A} \subset X$ será chamado de **atrator global** do semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ se $\mathscr{A}$ satisfaz as condições:

i) $\mathscr{A}$ é compacto;

ii) $\mathscr{A}$ é invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$;

iii) $\mathscr{A}$ atrai subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Segue direto da definição que o atrator global de um semigrupo, quando existe, é único. Além disso, o atrator global de um semigrupo pode ser caracterizado através das soluções globais limitadas. Vejamos esses fatos no próximo resultado.

Proposição 2.18: *Seja $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui um atrator global $\mathscr{A}$.*

a) *Se $\hat{\mathscr{A}}$ for um atrator global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ então $\hat{\mathscr{A}} = \mathscr{A}$, isto é, o atrator global, quando existe, é único.*

b) *O atrator global $\mathscr{A}$ é dado por*

$$\mathscr{A} = \{x \in X\colon \textit{existe uma solução global limitada por } x\}. \tag{2.1}$$

Demonstração: a) Sejam $\mathscr{A}$ e $\hat{\mathscr{A}}$ dois atratores globais para o semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Mostremos que $\hat{\mathscr{A}} \subset \mathscr{A}$. Como $\mathscr{A}$ é atrator e $\hat{\mathscr{A}}$ é limitado então $\mathscr{A}$ atrai $\hat{\mathscr{A}}$, isto é, $\lim_{t\to\infty} d_H(T(t)\hat{\mathscr{A}}, \mathscr{A}) = 0$. Além disso, como $\hat{\mathscr{A}}$ é T-invariante então $T(t)\hat{\mathscr{A}} = \hat{\mathscr{A}}$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Logo

$$0 = \lim_{t\to\infty} d_H(T(t)\hat{\mathscr{A}}, \mathscr{A}) = \lim_{t\to\infty} d_H(\hat{\mathscr{A}}, \mathscr{A}) = d_H(\hat{\mathscr{A}}, \mathscr{A})$$

e pela Proposição 2.11, $\hat{\mathscr{A}} = \overline{\hat{\mathscr{A}}} \subset \overline{\mathscr{A}} = \mathscr{A}$. Analogamente mostra-se $\mathscr{A} \subset \hat{\mathscr{A}}$.

b) Dado $x \in \mathscr{A}$ considere a função $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto \xi_x(t) = T(t)x \in X$. Como $\xi_x(t) = T(t)x \in T(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e $\mathscr{A}$ é limitado então $\xi_x(\mathbb{T}^+)$ é limitado. Agora, como $x \in \mathscr{A} = T(1)\mathscr{A}$, existe $x_{-1} \in \mathscr{A}$ tal que $T(1)x_{-1} = x$. Analogamente, existe $x_{-2} \in \mathscr{A}$ tal que $T(1)x_{-2} = x_{-1}$ e procedendo indutivamente, conseguimos uma sequência $\{x_{-n}\colon n \in \mathbb{N}\}$ tal que $x_0 = x$ e $T(1)x_{-n-1} = x_{-n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, podemos definir $\xi_x\colon \mathbb{T} \to X$ por

$$\xi_x(t) = \begin{cases} T(t)x, & t \geq 0, \\ T(t+j)x_{-j}, & t \in [-j, -j+1) \cap \mathbb{T},\ j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Provemos que $\xi_x\colon \mathbb{T} \to X$ é uma solução global limitada em $\mathscr{A}$ passando por x em $t = 0$.

i) É claro que $\xi_x(0) = T(0)x = x$.

ii) ξ_x é limitada. De fato, sendo $\xi_x(\mathbb{T}^+)$ limitado só resta mostrar que $\xi_x(\mathbb{T}^-)$ é limitado. Como $\{x_{-n}\colon n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{A}$ então $T(t+j)x_{-j} \in \mathscr{A}$ para todo $t \in [-j, -j+1) \cap \mathbb{T}$, $j \in \mathbb{N}$, pois $\mathscr{A}$ é um conjunto invariante. Portanto, $\xi_x(\mathbb{T}) \subset \mathscr{A}$ é limitada.

iii) ξ_x é solução global. De fato, sejam $s \in \mathbb{T}$ e $t \in \mathbb{T}^+$. Se $s \geq 0$ então $T(t)\xi_x(s) = T(t)T(s)x = T(t+s)x = \xi_x(t+s)$. Se $s < 0$ então $s \in [-j, -j+1)$ para algum $j \in \mathbb{N}$ e

$$T(t)\xi_x(s) = T(t)T(s+j)x_{-j} = T(t+s+j)x_{-j}.$$

- Se $t+s \geq 0$ então

$$T(t)\xi_x(s) = T(t+s+j)x_{-j} = T(t+s)T(j)x_{-j} = T(t+s)x_0 = T(t+s)x = \xi_x(t+s).$$

- Se $t+s < 0$ então $t+s \in [-i, -i+1)$ para algum $i \in \mathbb{N}$ com $j > i$ e, assim

$$\begin{aligned} T(t)\xi_x(s) &= T(t+s+j)x_{-j} = T(t+s+i+(j-i))x_{-j} \\ &= T(t+s+i)T(j-i)x_{-j} = T(t+s+i)x_{-i} = \xi_x(t+s). \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja $x \in X$ tal que existe $\xi_x = \xi : \mathbb{T} \to X$ solução global limitada de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ por x. Como $\xi(\mathbb{T})$ é T-invariante então

$$0 = \lim_{t \to \infty} d_H(T(t)\xi(\mathbb{T}), \mathscr{A}) = \lim_{t \to \infty} d_H(\xi(\mathbb{T}), \mathscr{A}),$$

isto é, $x \in \xi_x(\mathbb{T}) \subset \overline{\xi_x(\mathbb{T})} \subset \overline{\mathscr{A}} = \mathscr{A}$. □

Observação 2.19: A sequência $\{x_{-n} \colon n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{A}$ construída na demonstração acima não é unicamente determinada uma vez que $T(1) \colon X \to X$ não é necessariamente injetivo. (Veja Proposição 2.4).

2.1 Propriedades do conjunto ω-limite

Nesta seção veremos alguns resultados envolvendo os conjuntos limites. Iniciamos apresentando um resultado de análise que será muito útil no que segue.

Lema 2.20: *Seja $K \subset X$ um subconjunto compacto de X e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que*

$$d(x_n, K) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Então $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente em K.

Demonstração: Dado $m \in \mathbb{N}$, existem $x_{n_m} \in \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $y_{n_m} \in K$ tais que $d(x_{n_m}, y_{n_m}) < \frac{1}{m}$. Como $\{y_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset K$ que é um conjunto compacto, podemos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que $y_{n_m} \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} y_0$, para algum $y_0 \in K$. Assim,

$$d(x_{n_m}, y_0) \leq d(x_{n_m}, y_{n_m}) + d(y_{n_m}, y_0) \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

isto é, $x_{n_m} \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} y_0$. Portanto, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em K. □

A seguir apresentamos algumas propriedades do conjunto ω-limite.

Proposição 2.21: *Sejam $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo e $B\subset X$ um conjunto não-vazio.*

a) *$\omega(B)$ é positivamente invariante.*

b) *Se $\omega(B)$ é compacto e atrai B, então $\omega(B)$ é invariante.*

c) *Se $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ é compacto, para algum $t_0\in\mathbb{T}^+$, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B.*

d) *Se B é conexo e $\omega(B)$ é compacto, atrai B e $\omega(B)\subset B$ então $\omega(B)$ é conexo.*

Demonstração: a) Se $\omega(B)=\emptyset$ não há o que provar. Suponha que $\omega(B)\neq\emptyset$ e fixe $t\in\mathbb{T}^+$. Se $y\in\omega(B)$, da Proposição 2.8, existem sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{T}^+$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset B$ tais que $t_n\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ e $y=\lim_{n\to\infty}T(t_n)x_n$. Como $T(t)$ é contínuo então $T(t)y=\lim_{n\to\infty}T(t+t_n)x_n$ e como $(t+t_n)\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ então $T(t)y\in\omega(B)$. Logo $T(t)\omega(B)\subset\omega(B)$.

b) Como $\omega(B)$ é positivamente invariante, resta mostrar que $\omega(B)\subset T(t)\omega(B)$ para cada $t\in\mathbb{T}^+$. Sabemos que, para cada $x\in\omega(B)$, existem sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{T}^+$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset B$ tais que $t_n\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ e $x=\lim_{n\to\infty}T(t_n)x_n$. Para cada $t\in\mathbb{T}^+$, como $t_n\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, existe $n_0=n_0(t)\in\mathbb{N}$ tal que $t_n>t$ para todo $n\geq n_0$. Portanto,

$$T(t)T(t_n-t)x_n=T(t_n)x_n\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}x.$$

Como $\omega(B)$ é compacto e atrai B então

$$d(T(t_n-t)x_n,\omega(B))\leq d_H(T(t_n-t)B,\omega(B))\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Segue do Lema 2.20 que $\{T(t_n-t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente (que denotaremos novamente por $\{T(t_n-t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) em $\omega(B)$, isto é, existe $y\in\omega(B)$ tal que $T(t_n-t)x_n\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}y$. Como $T(t)T(t_n-t)x_n\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}x$ e $T(t)$ é contínua então $T(t)y=x$, isto é, $x\in T(t)\omega(B)$. Portanto, $\omega(B)=T(t)\omega(B)$.

c) Como $\overline{\gamma^+_t(B)}\subset\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$, para cada $t\in\mathbb{T}^+$ com $t\geq t_0$, então $\overline{\gamma^+_t(B)}$ é compacto e não-vazio (já que $B\neq\emptyset$). Assim, a família $\{\overline{\gamma^+_t}(B)\colon t\geq t_0\}$ tem propriedade da interseção finita e, portanto,

$$\omega(B)=\bigcap_{t\geq t_0}\overline{\gamma^+_t(B)}$$

é não-vazio e compacto.

Mostremos agora que $\omega(B)$ atrai B sob ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$. Se isto não ocorre, então existem $\varepsilon_0>0$ e sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{T}^+$, com $t_n\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset B$ tais que

$$d(T(t_n)x_n,\omega(B))>\varepsilon_0,\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t_0$, para todo $n \geq n_1$. Como $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto e $\{T(t_n)x_n \colon n \geq n_1\} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$, existem subsequências $\{t_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $y \in X$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j} \xrightarrow{j\to\infty} y$, e, portanto, $y \in \omega(B)$. Por outro lado, de (2.2) obtemos

$$0 = d(y, \omega(B)) \geq \varepsilon,$$

o que nos leva a uma contradição. Logo $\omega(B)$ atrai B sob ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Finalmente, segue do item b) da Proposição 2.21 que $\omega(B)$ é invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

d) Suponha $\omega(B)$ desconexo. Então, $\omega(B)$ é a união disjunta de dois conjuntos compactos não-vazios K_1 e K_2 tais que $d(K_1, K_2) = 2\rho > 0$. Como $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ então dado $0 < \varepsilon < \rho$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B \subset \mathscr{O}_\varepsilon(\omega(B))$, para todo $t \geq t_0$. Como $\mathscr{O}_\varepsilon(\omega(B))$ é dado pela união disjunta dos conjuntos $\mathscr{O}_\varepsilon(K_1)$ e $\mathscr{O}_\varepsilon(K_2)$, então $\gamma_{t_0}^+(B)$ está contido em apenas uma das vizinhanças $\mathscr{O}_\varepsilon(K_1)$ ou $\mathscr{O}_\varepsilon(K_2)$, digamos $\gamma_{t_0}^+(B) \subset \mathscr{O}_\varepsilon(K_1)$. Por outro lado, do item b) temos $\omega(B)$ invariante e, consequentemente, $\omega(B) = T(t)\omega(B) \subset T(t)B$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Logo,

$$\omega(B) \subset \gamma_{t_0}^+(B) \subset \mathscr{O}_\varepsilon(K_1)$$

o que nos leva a uma contradição. □

Observação 2.22: No caso em que $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é fortemente contínuo e $\mathbb{T}^+ = \mathbb{R}$, a afirmação do item d) da Proposição 2.21 é válida para todo $B \subset X$ não-vazio tal que $\omega(B)$ é não-vazio. De fato, temos $\overline{\gamma_t^+(B)}$ conexo para cada $t \geq 0$, pois é a imagem do conexo $[t, \infty) \times B$ pela aplicação contínua $[0, \infty) \times X \ni (s, x) \mapsto T(s)x \in X$. Como $\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}$, o resultado segue.

Observação 2.23: De modo análogo ao item c) da proposição anterior, se $\xi \colon \mathbb{T} \to X$ é uma solução global por $x \in X$ e $\overline{\xi(\mathbb{T}^-)}$ é compacto, então $\alpha_\xi(x)$ é não-vazio, compacto e invariante.

Observação 2.24: Segue imediatamente do item b) que se $x \in X$, $\omega(x)$ atrai x e $\omega(x) = \{x^*\}$, então x^* é um ponto de equilíbrio de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Um resultado análogo vale para $\alpha_\xi(x)$.

2.2 Compacidade assintótica

A compacidade assintótica é um conceito que desempenha um papel importante na caracterização dos semigrupos que possuem um atrator global. Vejamos a seguir este conceito.

Definição 2.25: Um semigrupo $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é **assintoticamente compacto** se dado $B \subset X$ não-vazio, fechado, limitado e positivamente invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ que atrai B sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

O seguinte resultado garante que quando trabalhamos em um espaço de dimensão finita, o semigrupo é assintoticamente compacto.

Proposição 2.26: *Sejam X um espaço vetorial normado de dimensão finita e $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um* *semigrupo em X. Então $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto.*

Demonstração. Seja $B\subset X$ não-vazio, fechado, limitado e positivamente invariante. Da invariância positiva de B, para cada $t\in\mathbb{T}^+$ temos $\gamma_t^+(B)=\cup_{s\geq t}T(s)B\subset\cup_{s\geq t}B=B$, então

$$\overline{\gamma_t^+(B)}\subset\overline{B}=B,\ \text{para cada } t\in\mathbb{T}^+. \tag{2.3}$$

Logo, $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é compacto (já que é fechado e limitado dentro de um espaço de dimensão finita) para cada $t\in\mathbb{T}^+$. Segue do item c) da Proposição 2.21 que $\omega(B)$ é compacto e atrai B. Além disso, de (2.3) temos $\omega(B)=\cap_{t\in\mathbb{T}^+}\overline{\gamma_t^+(B)}\subset B$, e assim concluímos o resultado. □

O resultado a seguir nos diz que se um semigrupo é assintoticamente compacto e a órbita positiva de um conjunto não-vazio B, a partir de um certo tempo, for limitada, então o conjunto $\omega(B)$ será não-vazio, compacto, invariante e atrai B.

Lema 2.27: *Seja $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo assintoticamente compacto e $B\subset X$ não-vazio para o qual existe $t_0\in\mathbb{T}^+$ tal que $\gamma_{t_0}^+(B)$ é limitado. Então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante por $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ e atrai B sob a ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$.*

Demonstração: Como $T(t)$ é contínua, então

$$T(t)\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}\subset\overline{T(t)\gamma_{t_0}^+(B)}=\overline{\gamma_{t_0+t}^+(B)}\subset\overline{\gamma_{t_0}^+(B)},$$

para todo $t\geq 0$ e, portanto, $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é não-vazio, fechado, limitado e positivamente invariante por $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$. Da compacidade assintótica de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$, existe um compacto $J\subset\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ que atrai $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ sob a ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$, isto é

$$\lim_{t\to\infty}d_H(T(t)\overline{\gamma_{t_0}^+(B)},J)=0.$$

Assim, existem sequências $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^+$, com $\varepsilon_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{T}^+$, com $t_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, tais que

$$T(t)\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}\subset\mathscr{O}_{\varepsilon_n}(J),\ \text{para todo } t\geq t_n.$$

Através desta última inclusão, mostraremos que $\emptyset\neq\omega(B)\subset J$.

- $\omega(B)$ é não-vazio. Como B é não-vazio, sejam $x\in B$, $u_n=t_n+t_0$ e $y_n=T(u_n)x$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Assim, $u_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ e $y_n\in T(t_n)T(t_0)B\subset\mathscr{O}_{\varepsilon_n}(J)$, isto é,

  $$d(y_n,J)<\varepsilon_n,\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

  Do Lema 2.20, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente $y_{n_j}=T(u_{n_j})x$ para um elemento de $\omega(B)$.

- $\omega(B)\subset J$. Dado $x\in\omega(B)$, sejam $\{r_m\}_{m\in\mathbb{N}}\subset[0,\infty)$ e $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}\subset B$ sequências tais que $r_m\overset{m\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ e $T(r_m)x_m\overset{m\to\infty}{\longrightarrow}x$. Como $r_m\overset{m\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $m_n\in\mathbb{N}$ tal que $r_{m_n}\geq t_n+t_0$ e, assim, $y_n = T(r_{m_n})x_{m_n} \in \mathscr{O}_{\varepsilon_n}(J)$, isto é, $d(y_n, J) < \varepsilon_n$. Como $\varepsilon_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, segue do Lema 2.20 que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ para um elemento de J e como $y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ então $y_{n_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x$ e, consequentemente, $x \in J$.

Como $\omega(B)$ é fechado e J é compacto, obtemos $\omega(B)$ compacto.

Resta mostrar que $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Se isto não ocorre, então existem $\varepsilon_0 > 0$ e sequências $\{x_n\} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$, com $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tais que

$$d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \varepsilon_0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $d_H(T(t_n)x_n, J) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (já que $d_H(T(t)\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}, J) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$), da compacidade de J e do Lema 2.20, existem subsequências $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{t_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $z \in J$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} z$. Logo, $z \in \omega(B)$ e $0 = d(z, \omega(B)) \geq \varepsilon_0$, o que nos dá uma contradição e mostra que $\omega(B)$ atrai B. Portanto, $\omega(B)$ é não-vazio, compacto e atrai B sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Finalmente, segue do item b) da Proposição 2.21 a invariância de $\omega(B)$ por T. $\square$

Observação 2.28: No lema anterior, a hipótese de que existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma^+_{t_0}(B)$ é limitado é muito importante para obter as propriedades do conjunto ω-limite. A seguir, vamos definir uma classe de semigrupos que possuem este tipo de propriedade.

Definição 2.29: Um semigrupo $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **eventualmente limitado** se para cada limitado $B \subset X$ existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma^+_{t_B}(B)$ é limitado. Além disso, diremos que $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é **limitado** se $\gamma^+(B)$ é limitado sempre que B for limitado.

Proposição 2.30: *Seja $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X.*

a) *Suponha válida a seguinte propriedade:*

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ sequência limitada, $\{t_n\} \subset \mathbb{T}^+$, com $t_n \to \infty$ e $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência limitada $\Rightarrow \{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ relativamente compacto.

Então, $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto.

b) *Suponha que $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto e eventualmente limitado. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ for uma sequência limitada e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$, com $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, então $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacto.*

Demonstração: a) Seja $B \subset X$ um conjunto não-vazio, fechado, limitado e positivamente invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Provaremos que $\omega(B) \subset B$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B.

- $\omega(B) \neq \emptyset$. Sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ sequência limitada e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$, com $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Como B é positivamente invariante então $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ é limitada e, portanto, $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacto. Logo, $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente para algum $y \in X$, digamos $\{T(t_{n_j})x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, com $T(t_{n_j})x_{n_j} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} y$ e, consequentemente, $y \in \omega(B)$.

- $\omega(B) \subset B$. Dado $x \in \omega(B)$, sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ sequências tais que $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $T(t_n)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Como B é fechado e positivamente T-invariante então $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e, consequentemente, $x \in B$.

- $\omega(B)$ é compacto. Provaremos que toda sequência em $\omega(B)$ converge. Seja $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \omega(B)$. Então, existem sequências $\{t_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ com $t_k^n \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{x_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que $y_n = \lim_{k\to\infty} T(t_k^n)x_k^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, existem $k_{n_1}, k_{n_2} \in \mathbb{N}$ tais que
$$t_k^n \geq n \text{ para todo } k \geq k_{n_1} \text{ e } d(T(t_k^n)_k^n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ para todo } k \geq k_{n_2}.$$
Tome $k_n = \max\{k_{n_1}, k_{n_2}\}$ e $z_n = T(t_{k_n}^n)x_{k_n}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacta, então possui uma subsequência convergente, digamos $z_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ e
$$d(y_n, y) \leq d(y_n, z_n) + d(z_n, y) \leq \frac{1}{n} + d(z_n, y) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
Portanto, $y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in \omega(B)$.

- $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Se isso não ocorre, então existem $\varepsilon_0 > 0$ e sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$, com $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tais que
$$d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \varepsilon_0.$$
Como $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ então $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacto. Assim, $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{T(t_{n_j})x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para algum $y \in X$. Consequentemente, $y \in \omega(B)$ e $d(y, \omega(B)) \geq \varepsilon_0$ o que é um absurdo.

b) Suponha que $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto e eventualmente limitado. Sejam $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X, como o semigrupo é eventualmente limitado, existe $t_0 > 0$ tal que $B = \overline{\gamma_{t_0}^+(\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\})}$ é um conjunto fechado e limitado. Como B é positivamente invariante, já que
$$\begin{aligned} T(t)B = T(t)\overline{\gamma_{t_0}^+(\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\})} &\subset \overline{T(t)\gamma_{t_0}^+(\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\})} \\ &= \overline{\gamma_{t_0+t}^+(\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\})} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\})} = B, \end{aligned}$$
para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, existe um conjunto compacto $J \subset B$ que atrai B. Pelo Lema 2.20, $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em J e, portanto, é relativamente compacto. $\square$

A seguir enunciamos um conceito que mistura as definições de assintoticamente compacto e eventualmente limitado.

Definição 2.31: Um semigrupo $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **condicionalmente eventualmente compacto** se dado um conjunto B não-vazio, limitado e positivamente invariante, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\overline{T(t_B)B}$ é compacto.

Teorema 2.32: *Um semigrupo condicionalmente eventualmente compacto é assintoticamente compacto.*

Demonstração: Seja $B \subset X$ um conjunto não-vazio, fechado, limitado e positivamente invariante por $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Como $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é condicionalmente compacto então $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é compacto para um t suficientemente grande. Assim, pelo item c) da Proposição 2.21, $\omega(B)$ é não-vazio, compacto e atrai B. Isto mostra que $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. □

2.3 Existência de atrator global

Nesta seção apresentamos resultados com relação a existência de atrator global para semigrupos. Iniciamos apresentando o conceito de dissipatividade para semigrupos.

Definição 2.33: Diremos que um semigrupo $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é **ponto dissipativo (limitado dissipativo/compacto dissipativo)** se existe um conjunto não-vazio e limitado $B \subset X$ que atrai pontos (subconjuntos limitados/subconjuntos compactos) de X sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Observação 2.34: Na definição acima, pela Proposição 2.13 podemos trocar a palavra atrai pela palavra absorve, isto é, $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto/limitado/compacto dissipativo se, e somente se, existe $B \subset X$ não-vazio e limitado que absorve pontos/limitados/compactos de X sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

Definição 2.35: Diremos que um conjunto não-vazio e limitado $B \subset X$ é um conjunto **ponto dissipativo (limitado dissipativo / compacto dissipativo)** se B absorve pontos (subconjuntos limitados / subconjuntos compactos) de X sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$.

2.3.1 Caso limitado dissipativo

Veremos nesta subseção um resultado de existência de atratores globais para semigrupos que são limitados dissipativos.

Iniciamos apresentando um resultado que dá uma condição necessária para um semigrupo possuir atrator global.

Proposição 2.36: *Se $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ possui um atrator global então $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto e limitado dissipativo.*

Demonstração: Seja, $\mathscr{A}$ o atrator global de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$, $B_0 = \mathscr{O}_1(\mathscr{A})$ e $B \subset X$ um subconjunto não-vazio e limitado de X. Como B_0 é limitado e $\mathscr{A}$ atrai limitados sob a ação de $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ então existe $t_0 = t_0(B)$ tal que $d_H(T(t)B, \mathscr{A}) < 1$ para todo $t \geq t_0$, ou seja, $T(t)B \subset \mathscr{O}_1(\mathscr{A}) = B_0$ para $t \geq t_0$. Portanto, $\{T(t)\colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado dissipativo.

Agora, sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ uma sequência limitada e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$, com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $B =$

$\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Então, B é um conjunto não-vazio e limitado e

$$d_H(T(t_n)x_n, \mathscr{A}) \leq d_H(T(t_n)B, \mathscr{A}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo, pelo Lema 2.20, $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacto e, consequentemente, pelo item a) da Proposição 2.30, $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. $\square$

Nosso objetivo é mostrar que tais condições também são suficientes para garantir a existência de atrator global. Para isso, vejamos os seguintes resultados auxiliares.

Proposição 2.37: *Seja $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo. Se $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado dissipativo então $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado. Além disso, se $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado dissipativo e assintoticamente compacto, então $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacto, para quaisquer sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$, com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ limitada.*

Demonstração: Seja $B \subset X$ um subconjunto não-vazio e limitado em X. Como $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado dissipativo, existe um subconjunto limitado B_0 em X que atrai B, isto é,

$$\lim_{t\to\infty} d_H(T(t)B, B_0) = 0.$$

Logo, existe $t_0 > 0$ tal que $d_H(T(t)B, B_0) < 1$ para todo $t \geq t_0$, isto é, $\gamma_{t_0}^+(B) \subset \mathscr{O}_1(B_0)$. Como $\mathscr{O}_1(B_0)$ é limitada então $\gamma_{t_0}^+(B)$ é um conjunto limitado em X e, portanto, $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado. A segunda parte segue direto do item b) da Proposição 2.30. $\square$

Proposição 2.38: *Sejam $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo assintoticamente compacto e limitado dissipativo e B_0 um conjunto limitado dissipativo para $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Se $B \subset X$ é não-vazio e limitado então $\omega(B) \subset \omega(B_0) \subset \overline{B_0}$.*

Demonstração: Sejam $x \in \omega(B)$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$, com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tais que $T(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Como B_0 é um conjunto limitado dissipativo para $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$, existe $t_0 = t_0(B) \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B \subset B_0$, para todo $t \geq t_0$. Em particular $T(t_0)B \subset B_0$. Como $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $t_n \geq t_0$ e

$$T(t_n)x_n = T(t_n - t_0)T(t_0)x_n \in T(t_n - t_0)T(t_0)B \subset T(t_n - t_0)B_0.$$

Assim, se $y_n = T(t_0)x_n$ para $n \geq n_0$ então

$$x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n = \lim_{n\to\infty} T(t_n - t_0)T(t_0)x_n = \lim_{n\to\infty} T(t_n - t_0)y_n,$$

isto é, $x \in \omega(B_0)$. Portanto, $\omega(B) \subset \omega(B_0)$.

Agora, sejam $x \in \omega(B_0)$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_0$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$, com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tais que $T(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Mas como B_0 é um conjunto limitado dissipativo para $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e B_0 é limitado, existe $t_0 = t_0(B_0) \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B_0 \subset B_0$ para $t \geq t_0$. Como $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$t_n \geq t_0$ e

$$T(t_n)x_n \in T(t_n)B_0 \subset B_0,$$

isto é, $x \in \overline{B_0}$. Portanto, $\omega(B_0) \subset \overline{B_0}$. □

A seguir enunciamos um primeiro resultado que garante a existência de atrator global para um semigrupo.

Teorema 2.39: *Seja $\{T(t) \colon t \in T^+\}$ um semigrupo assintoticamente compacto e limitado dissipativo. Então $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ tem atrator global dado por $\mathscr{A} = \omega(B_0)$, onde B_0 é um conjunto limitado dissipativo para $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$.*

Demonstração: Seja B_0 é um conjunto limitado dissipativo. Então, B_0 absorve todos os subconjuntos limitados de X, em particular ele mesmo, isto é, existe $t_0 = t_0(B_0) \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B_0 \subset B_0$ para todo $t \geq t_0$. Assim, $\gamma^+_{t_0}(B_0) \subset B_0$ é limitado e pelo Lema 2.27 $\omega(B_0)$ é não-vazio, compacto, invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e atrai B_0.

Resta mostrar que $\omega(B_0)$ atrai todos os subconjuntos limitados de X. Seja $B \subset X$ um subconjunto não-vazio limitado. Como B_0 é um conjunto limitado dissipativo, existe $t_1 = t_1(B) \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma^+_{t_1}(B) \subset B_0$. Pelo Lema 2.27 $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e pela Proposição 2.38 $\omega(B) \subset \omega(B_0)$. Veja que

$$d_H(T(t)B, \omega(B_0)) \leq d_H(T(t)B, \omega(B)) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

isto é, $\omega(B_0)$ atrai B sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Portanto, $\omega(B_0) = \mathscr{A}$ é o atrator global de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. □

Juntando a Proposição 2.38 e o Teorema 2.39 podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 2.40: *Um semigrupo $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ possui um atrator global $\mathscr{A}$ se, e somente se, $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto e limitado dissipativo. Além disso, se $B_0 \subset X$ é um conjunto limitado dissipativo para $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ temos $\mathscr{A} = \omega(B_0) \subset \overline{B_0}$. Em particular, se B_0 é conexo então $\mathscr{A}$ é conexo.*

Demonstração. Resta mostrar apenas que se B_0 é conexo então $\mathscr{A}$ é conexo. De fato, tomando $\overline{B_0}$ no lugar de B_0, podemos assumir que B_0 é fechado e como $\mathscr{A} = \omega(B_0)$ é um conjunto compacto e atrai B_0 então, pelo item d) da Proposição 2.21, $\mathscr{A}$ é conexo. □

2.3.2 Caso ponto dissipativo

Nesta subseção vamos apresentar outro resultado com relação a existência de atratores globais para semigrupos. No entanto, usaremos hipóteses ligeiramente diferentes das usadas na seção anterior. Iremos utilizar a hipótese adicional de que o semigrupo $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é fortemente contínuo e enfraqueceremos a hipótese com relação a dissipatividade, trocando limitado dissipativo por ponto dissipativo.

Inicialmente, vejamos alguns resultados auxiliares.

Lema 2.41: *Seja $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo ponto dissipativo e assintoticamente compacto, com a propriedade de que para cada compacto $K\subset X$, sua órbita positiva $\gamma^+(K)$ é limitada. Então $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo.*

Demonstração: Como $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não-vazio e limitado B_0 que absorve pontos de X. Seja $U=\{x\in B_0\colon \gamma^+(x)\subset B_0\}$. Afirmamos que U é não-vazio, limitado, absorve pontos sob a ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ e $U=\gamma^+(U)$. De fato:

- $U\neq\emptyset$. Dado $x\in B_0$, como B_0 absorve pontos, existe $t_x\in\mathbb{T}^+$ tal que para todo $t\geq t_x$, $T(t)x\in B_0$. Tomando $y=T(t_x)x\in B_0$, como $T(t)y\in B_0$ para todo $t\geq 0$ então $\gamma^+(y)\subset B_0$ e, consequentemente, $y\in U$.
- Como $U\subset B_0$ é claro que U é limitado.
- U absorve pontos. De fato, seja $x\in X$. Como B_0 absorve pontos, existe $t_x\in\mathbb{T}^+$ tal que $T(t)x\in B_0$ para todo $t\geq t_x$. Logo, $\gamma^+(T(t)x)\subset B_0$ para todo $t\geq t_x$, isto é, $T(t)x\in U$ para todo $t\geq t_x$.
- $\gamma^+(U)=U$. A inclusão $U\subset\gamma^+(U)$ é trivial. Para mostrar a outra inclusão, seja $y\in\gamma^+(U)$. Então, existem $t\in\mathbb{T}^+$ e $x\in U$ tais que $y=T(t)x$. Como $\gamma^+(x)\subset B_0$ e y está na órbita de x então $\gamma^+(y)\subset B_0$, isto é, $y\in U$. Portanto, $\gamma^+(U)\subset U$.

Note que, para todo $t\in\mathbb{T}^+$,

$$T(t)\overline{\gamma^+(U)}=T(t)\overline{\bigcup_{s\geq 0}T(s)U}\subset\overline{T(t)\bigcup_{s\geq 0}T(s)U}=\overline{\gamma_t^+(U)}\subset\overline{\gamma^+(U)}.$$

Assim, da compacidade assintótica de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$, existe um conjunto compacto $K\subset\overline{\gamma^+(U)}=\overline{U}$ que atrai $\overline{U}$ e, portanto, também atrai U. Logo, K atrai pontos sob a ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$.

Afirmamos que existe uma vizinhança V de K e $t\in\mathbb{T}^+$ tal que $\gamma_t^+(V)$ é limitada. Se este não é o caso, pelo Lema 2.20 existem sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$, $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{T}^+$, com $t_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ e $y\in K$ tais que $x_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}y$ e $\{T(t_n)x_n\}$ não é limitada. Considere $A=\{x_n\colon n\in\mathbb{N}\}\cup\{y\}$. Então, A é compacto e $\gamma^+(A)$ não-limitada, o que contradiz a hipótese.

Sejam V uma vizinhança de K e $t_V\in\mathbb{T}^+$ tal que $\gamma_{t_V}^+(V)$ é limitada. Como K atrai pontos sob a ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ e V é uma vizinhança de K então, para cada $x\in X$, V absorve x, isto é, existe $t_x\in\mathbb{T}^+$ tal que $T(t)x\in V$ para todo $t\geq t_x$. Logo, $T(t)x\in\gamma_{t_V}^+(V)$ para todo $t\geq t_x+t_V=\widetilde{t}_x$. Como $T(t)$ é contínua para todo $t\in\mathbb{T}^+$, existe uma vizinhança W_x de x tal que $T(t)W_x\subset\gamma_{t_V}^+(V)$ para cada $t\geq\widetilde{t}_x$, isto é, $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve uma vizinhança de x para cada $x\in X$. Como todo subconjunto compacto pode ser coberto por un número finito de vizinhanças, $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve subconjuntos compactos de X e $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo. $\square$

Lema 2.42: *Sejam $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo, K e K_1 subconjuntos compactos tal que K T-atrai K_1. Então $\gamma^+(K_1)\cup K$ é completo.*

Demonstração. Provaremos que toda sequência de Cauchy em $\gamma^+(K_1)\cup K$ possui uma subsequência convergente. Seja $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \gamma^+(K_1)\cup K$ uma sequência de Cauchy. Para cada $n\in\mathbb{N}$, $y_n\in K$ ou $y_n = T(t_n)x_n$, com $x_n\in K_1$ e $t_n\in\mathbb{T}^+$ qualquer. Defina $I=\{n\in\mathbb{N}\colon y_n\in K\}$.

Se I é infinito, então como K é compacto, a subsequência $\{y_n\}_{n\in I}\subset K$ possui uma subsequência convergente em $K\subset\gamma^+(K_1)\cup K$ de $\{y_n\}_{n\in I}$ e, portanto, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente.

Se I é finito, então $J=\{n\in\mathbb{N}\colon y_n = T(t_n)x_n,\ x_n\in K_1\}$ é infinito. Vamos determinar uma subsequência de $\{y_n\}_{n\in J}$ convergente em $\gamma^+(K_1)\cup K$.

- Se $\{t_n\}_{n\in J}$ é limitado, então existe $b>0$ tal que $\{t_n\}_{n\in J}\subset[0,b]$. Logo, $\{(t_n,x_n)\}_{n\in J}\subset[0,b]\times K_1$ que é um conjunto compacto, assim existem $\{(t_{n_j},x_{n_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsequência de $\{(t_n,x_n)\}_{n\in J}$ e $(t,x)\in[0,b]\times K_1$ tais que $(t_{n_j},x_{n_j})\overset{j\to\infty}{\longrightarrow}(t,x)\in[0,b]\times K_1$. Então $y_{n_j}=T(t_{n_j})x_{n_j}\overset{j\to\infty}{\longrightarrow}T(t)x\in\gamma^+(K_1)\subset K\cup\gamma^+(K_1)$.
- Se $\{t_n\}_{n\in J}$ não é limitado, isto é, $t_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ com $n\in J$ então, como K atrai K_1,

$$d(y_n,K)\le d(T(t_n)K_1,K)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

e, pelo Lema 2.20, existe uma subsequência convergente concluindo a demonstração. □

Lema 2.43: *Sejam $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo e $K\subset X$ um compacto. Se K atrai um compacto $K_1\subset X$ sob a ação de $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$, então $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto e $\emptyset\neq\omega(K_1)\subset K$.*

Demonstração: Primeiramente note que, dado $\varepsilon>0$, como K é compacto, existem $x_1,\dots,x_n\in K$ tais que

$$K\subset\bigcup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon).$$

Afirmamos que $B=\cup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)$ absorve K_1. De fato, se isso não ocorre então existem sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset K_1$, $\{t_n\}\subset\mathbb{T}^+$, com $t_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, tais que $T(t_n)x_n\notin B$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Como K atrai K_1, então

$$d_H(T(t_n)x_n,K)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

e pelo Lema 2.20, existem $x\in K$ e uma subsequência de $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (que também denotaremos por $\{T(t_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) tais que

$$T(t_n)x_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}x\in K\subset B.$$

Logo, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $T(t_n)x_n\in B$, para todo $n\ge n_0$, o que nos dá uma contradição.

Assim, existe $t_0\in\mathbb{T}^+$ tal que $\cup_{t\ge t_0}T(t)K_1\subset B$. Como $\{T(t)\colon t\in\mathbb{T}^+\}$ é fortemente contínuo, então

$$\bigcup_{t\in[0,t_0]}T(t)K_1$$

é um conjunto compacto, já que é a imagem do conjunto compacto $[0,t_0]\times K_1$ pela aplicação contínua $\mathbb{T}^+\times X\ni(t,x)\mapsto T(t)x\in X$. Disto segue que o conjunto $\gamma^+(K_1)\cup K$ é totalmente limitado e pelo

Lema 2.42, $\gamma^+(K_1) \cup K$ é completo então $\gamma^+(K_1) \cup K$ é compacto. Consequentemente, $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto.

Agora, considere a família $\{\overline{\gamma_t^+(K_1)}\}_{t\in\mathbb{T}^+}$. Então, $\overline{\gamma_t^+(K_1)}$ é compacto e não-vazio, para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e $\overline{\gamma_t^+(K_1)} \subset \overline{\gamma_s^+(K_1)}$ para $s \leq t$, ou seja, a família $\{\overline{\gamma_t^+(K_1)}\}_{t\in\mathbb{T}^+}$ possui a propriedade da interseção finita. Logo,

$$\omega(B) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(K_1)} \neq \emptyset.$$

Resta mostrar que $\omega(K_1) \subset K$. Sejam $y \in \omega(K_1)$ e $\varepsilon > 0$. Então, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $y \in \overline{\gamma_{t_0}^+(K_1)} \subset \mathscr{O}_\varepsilon(K)$, isto é, $d(y,K) \leq \varepsilon$. Como ε é arbitrário, $d(y,K) = 0$ e, portanto, $y \in \overline{K} = K$. $\square$

Proposição 2.44: *Sejam $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo e K um conjunto compacto que atrai a si mesmo sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Então $\omega(K) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} T(t)K$.*

Demonstração: Como $T(t)K \subset \gamma_t^+(K)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ então

$$\bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} T(t)K \subset \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \gamma_t^+(K) \subset \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(K)} = \omega(K).$$

Por outro lado, pelo Lema 2.43 com $K_1 = K$, temos $\omega(K) \subset K$ e $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto. Pelo item c) da Proposição 2.21 temos $\omega(K)$ não-vazio, compacto, invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ e atrai K sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. Assim, $\omega(K) = T(t)\omega(K) \subset T(t)K$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, isto é, $\omega(K) \subset \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} T(t)K$ o que conclui o resultado. $\square$

Teorema 2.45: *Seja $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo, eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Então $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathscr{A}$.*

Demonstração: Como $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, ponto dissipativo e eventualmente limitado então, pelo Lema 2.41, $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo. Dado C um conjunto compacto dissipativo para $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$, defina $B = \{x \in C \colon \gamma^+(x) \subset C\}$. Afirmamos que B absorve subconjuntos compactos de X sob a ação de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. De fato, sejam A um subconjunto compacto em X e $x \in A$ e como C é compacto dissipativo, existe $t_A \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)A \subset C$ para cada $t \geq t_A$. Em particular, $T(t)x \subset C$ para cada $t \geq t_A$. Logo, $\gamma^+(T(t)x) \subset C$, assim $T(t)x \in B$ para cada $t \geq t_A$ e cada $x \in A$. Portanto, $T(t)A \subset B$ para cada $t \geq t_A$.

Além disso, $\overline{B}$ é positivamente invariante por $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$. De fato, dados $t \in \mathbb{T}^+$ e $x \in \overline{B}$, seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Como $T(t)$ é contínua então

$$\lim_{n\to\infty} T(t)x_n = T(t)x \in \overline{B},$$

pois $T(t)x_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $T(t)\overline{B} \subset \overline{B}$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$.

Consequentemente, sendo $\overline{B}$ fechado e positivamente invariante, e usando novamente a compacidade assintótica de $\{T(t) \colon t \in \mathbb{T}^+\}$, existe um conjunto compacto $K \subset \overline{B}$ que atrai B. Como B absorve compactos e K atrai B então K atrai subconjuntos compactos de X. Em particular, K se atrai si mesmo e, portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)K \subset \mathscr{O}_\varepsilon(K)$ para todo $t \geq t_0$, e sendo $\mathscr{O}_\varepsilon(K)$ um conjunto limitado temos $\gamma_{t_0}^+(K)$ limitado. Segue do Lema 2.27 que o conjunto $\mathscr{A} = \omega(K)$ é não-vazio, compacto e invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Mostremos agora que $\mathscr{A}$ atrai subconjuntos compactos de X. De fato, seja $J \subset X$ um conjunto compacto. Como $\omega(J)$ é positivamente invariante (veja item a) da Proposição 2.21), segue do Lema 2.43 que

$$\omega(J) \subset T(t)\omega(J) \subset T(t)K,$$

para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Assim, usando a Proposição 2.44, obtemos

$$\omega(J) \subset \bigcap_{s \in \mathbb{T}^+} T(s)K = \omega(K) = \mathscr{A}$$

e, consequentemente, $\mathscr{A}$ atrai J.

Por fim, resta mostra que $\mathscr{A}$ atrai subconjuntos limitados de X. Seja $B \subset X$ um conjunto limitado. Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto então, pelo Lema 2.27, $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. Como $\omega(B)$ é compacto, invariante e $\mathscr{A}$ atrai $\omega(B)$ então $\omega(B) \subset \mathscr{A}$ e como $\omega(B)$ atrai B sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ então

$$\lim_{t\to\infty} d_H(T(t)B, \mathscr{A}) \leq \lim_{t\to\infty} d_H(T(t)B, \omega(B)) + d_H(\omega(B), \mathscr{A}) = 0,$$

isto é, $\mathscr{A}$ atrai B sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ o que conclui a demonstração. □

Os resultados desta subseção podem ser compilados no seguinte corolário:

Corolário 2.46: *Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo fortemente contínuo. Então são equivalentes:*

a) $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é limitado dissipativo e assintoticamente compacto;*

b) $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é compacto dissipativo, eventualmente limitado e assintoticamente compacto;*

c) $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é ponto dissipativo, eventualmente limitado e assintoticamente compacto;*

d) $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *possui um atrator global $\mathscr{A}$.*

Além disso, se B_0 é um conjunto limitado dissipativo para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, então $A = \omega(B_0) \subset \overline{B_0}$. Em particular, se B_0 é conexo então $\mathscr{A}$ é conexo.

Capítulo 3

Sistemas dinâmicos impulsivos

Pelo Capítulo 2 sabemos que o atrator global $\mathscr{A}$ do semigrupo $\{T(t)\colon t \geq 0\}$ é único e descreve a dinâmica comportamental de longo prazo de $\{T(t)\colon t \geq 0\}$; isto é, para estudar a dinâmica assintótica do semigrupo $\{T(t)\colon t \geq 0\}$, é preciso entender completamente o atrator global e suas estruturas internas.

Neste capítulo nosso objetivo é desenvolver uma teoria análoga ao Capítulo 2 para sistemas dinâmicos impulsivos; mais precisamente, queremos definir uma noção útil de atrator global para um sistema dinâmico impulsivo, de tal maneira que esse objeto descreva completamente o comportamento de longo prazo do sistema. Para esse fim, introduzimos algumas das definições e propriedades básicas dos sistemas dinâmicos impulsivos e tentamos encontrar uma noção apropriada de atrator global. A principal referência para este capítulo é [8].

Ao longo deste capítulo, X será um espaço métrico com métrica $d\colon X \times X \to [0,\infty)$ e denotaremos por $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ o conjunto dos números reais não-negativos.

Seja $\{T(t)\colon t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em X. Para cada $D \subset X$ e $J \subset \mathbb{R}_+$ definimos

$$F(D,J) = \bigcup_{t \in J} T(t)^{-1}(D).$$

Um ponto $x \in X$ é chamado um **ponto inicial** se $F(x,t) = \emptyset$ para todo $t > 0$.

Definição 3.1: Um **sistema dinâmico impulsivo** (SDI) (X,T,M,I) consiste de um semigrupo $\{T(t)\colon t \geq 0\}$ em um espaço métrico X, um subconjunto fechado não-vazio $M \subset X$ tal que para cada $x \in M$ exista $\varepsilon_x > 0$ tal que

$$F(x,(0,\varepsilon_x)) \cap M = \emptyset \quad \text{e} \quad \bigcup_{t \in (0,\varepsilon_x)} \{T(t)x\} \cap M = \emptyset \tag{3.1}$$

e uma função contínua $I\colon M \to X$.

O conjunto M é chamado de **conjunto impulsivo** e a função I é chamada de **função impulsiva** .

Dado $x \in X$, definimos

$$M^+(x) = \left(\bigcup_{t>0} T(t)x \right) \cap M.$$

Observação 3.2: As condições (3.1) significam que os pontos de M são isolados sobre cada trajetória do semigrupo $\{T(t) \colon t \geq 0\}$, ou seja, o fluxo do semigrupo é, em certo sentido, transversal a M em qualquer ponto de M. Essas condições são descritas na Figura 3.1.

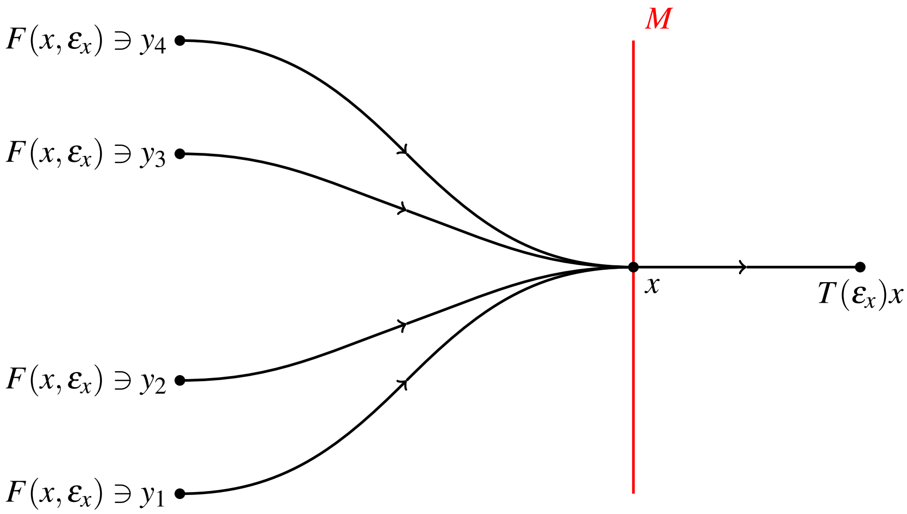


Figura 3.1: O fluxo do semigrupo $\{T(t) \colon t \geq 0\}$ é, em certo sentido, transversal a M.

Proposição 3.3: *Sejam (X,T,M,I) um SDI e $x \in X$. Se $M^+(x) \neq \emptyset$ então existe $s > 0$ tal que $T(s)x \in M$ e $T(t)x \notin M$ para $0 < t < s$.*

Demonstração. Como $M^+(x) \neq \emptyset$, existe $s_0 > 0$ tal que $T(s_0)x \in M$. Suponha, por contradição, que exista uma sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $T(s_n)x \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como M é um conjunto fechado, pela continuidade da função $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t)x$, temos $\lim_{n\to\infty} T(s_n)x = T(\lim_{n\to\infty} s_n)x = T(0)x = x \in M$. Como $T(s_n)x \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ então $T((0,\varepsilon))x \bigcap M \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$, o que contradiz (3.1). $\square$

A Proposição 3.3 garante que a função $\phi \colon X \to (0,\infty]$ dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} s, & \text{se } T(s)x \in M \text{ e } T(t)x \notin M \text{ para } 0 < t < s, \\ \infty, & \text{se } M^+(x) = \emptyset \end{cases}$$

é bem definida. Se $M^+(x) \neq \emptyset$, o valor $\phi(x)$ representa o menor tempo positivo que a trajetória de x encontra M. Nesse caso, dizemos que o ponto $T(\phi(x))x$ é o **ponto impulsivo** de x e função $\phi \colon X \to (0,\infty]$ é chamada de **função tempo de impacto**.

Com ajuda da função ϕ, podemos definir a trajetória impulsiva de um ponto $x \in X$ pelo SDI.

Definição 3.4: A **trajetória impulsiva** de $x \in X$ pelo SDI (X,T,M,I) é uma função $\widetilde{T}(\cdot)x$ definida em um intervalo $J_x \subset \mathbb{R}_+$ com valores em X dados indutivamente pela seguinte regra: se $M^+(x) = \emptyset$, então $\widetilde{T}(t)x = T(t)x$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ (veja Figura 3.2a). No entanto, se $M^+(x) \neq \emptyset$ então denotamos $x = x_0^+$ e definimos $\widetilde{T}(\cdot)x$ em $[0, \phi(x_0^+)]$ por

$$\widetilde{T}(t)x = \begin{cases} T(t)x_0^+, & \text{se } 0 \leq t < \phi(x_0^+), \\ I(T(\phi(x_0^+))x_0^+), & \text{se } t = \phi(x_0^+). \end{cases}$$

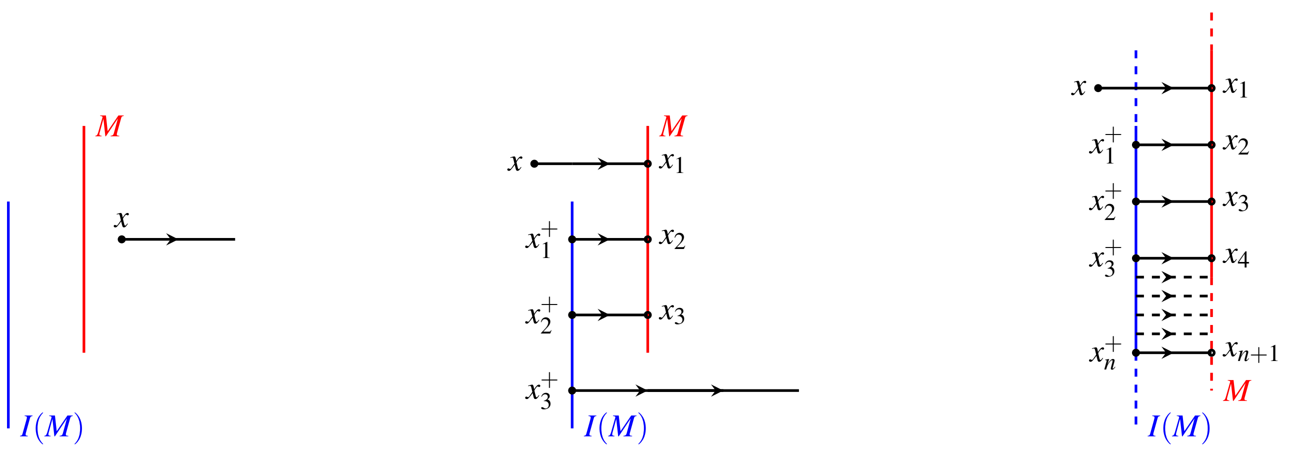
Sejam $s_0 = \phi(x_0^+)$, $x_1 = T(s_0)x_0^+$, e $x_1^+ = I(T(s_0)x_0^+)$. Nesse caso $s_0 < \infty$ e o processo pode continuar, mas agora começando em x_1^+. Se $M^+(x_1^+) = \emptyset$ então definimos $\widetilde{T}(t)x = T(t - s_0)x_1^+$ para $s_0 \leq t < \infty$ e, neste caso $\phi(x_1^+) = \infty$. No entanto, se $M^+(x_1^+) \neq \emptyset$ definimos $\widetilde{T}(\cdot)x$ em $[s_0, s_0 + \phi(x_1^+)]$ por

$$\widetilde{T}(t)x = \begin{cases} T(t - s_0)x_1^+, & \text{se } s_0 \leq t < s_0 + \phi(x_1^+), \\ I(T(\phi(x_1^+))x_1^+), & \text{se } t = s_0 + \phi(x_1^+). \end{cases}$$

Sejam $s_1 = \phi(x_1^+)$, $x_2 = T(s_1)x_1^+$, e $x_2^+ = I(T(s_1)x_1^+)$. Suponha agora que $\widetilde{T}(\cdot)x$ está definido no intervalo $[t_{n-1}, t_n]$ e que $\widetilde{T}(t_n)x = x_n^+$, onde $t_0 = 0$ e $t_n = \sum_{i=0}^{n-1} s_i$ para $n \in \mathbb{N}$. Se $M^+(x_n^+) = \emptyset$, então $\widetilde{T}(t)x = T(t - t_n)x_n^+$, para $t_n \leq t < \infty$ e $\phi(x_n^+) = \infty$. No entanto, se $M^+(x_n^+) \neq \emptyset$, então definimos $\widetilde{T}(\cdot)x$ em $[t_n, t_n + \phi(x_n^+)]$ por

$$\widetilde{T}(t)x = \begin{cases} T(t - t_n)x_n^+, & \text{se } t_n \leq t < t_n + \phi(x_n^+), \\ I(T(\phi(x_n^+))x_n^+), & \text{se } t = t_n + \phi(x_n^+). \end{cases}$$

Sejam $s_n = \phi(x_n^+)$, $x_{n+1} = T(s_n)x_n^+$, e $x_{n+1}^+ = I(T(s_n)x_n^+)$. Este processo termina após um número finito de passos se $M^+(x_n^+) = \emptyset$ para algum $n \in \mathbb{N}$ (veja Figura 3.2b), ou pode continuar indefinidamente, se $M^+(x_n^+) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, neste caso, $\widetilde{T}(\cdot)x$ é definido no intervalo $[0, \Pi(x))$ onde $\Pi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i$ (veja Figura 3.2c).



(a) Caso sem impulso

(b) Caso com finitos finitos impulsos

(c) Caso com infinitos finitos impulsos

Figura 3.2: Trajetória impulsiva.

Uma vez que esses resultados e definições básicas tenham sido estabelecidos, como estamos interessados no comportamento assintótico de sistemas dinâmicos impulsivos, vamos assumir que todas as trajetórias impulsivas existem para todo $t \geq 0$, ou seja, assumindo que $\Pi(x) = \infty$ para todo $x \in X$ começaremos nossa busca por uma definição adequada de um atrator global para o SDI (X,T,M,I). A partir de agora, sempre assumiremos esta condição de existência global:

$$\Pi(x) = \infty \text{ para todo } x \in X. \tag{G}$$

Uma condição para garantir esta propriedade é dada pela seguinte proposição.

Proposição 3.5: *Seja (X,T,M,I) um SDI. Se existe $\xi > 0$ tal que $\phi(z) \geq \xi$ para todo $z \in I(M)$, então $\Pi(x) = \infty$ para cada $x \in X$.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Se $M^+(x) = \emptyset$ então é claro que $\Pi(x) = \infty$. Suponha $M^+(x) \neq \emptyset$ e sejam $I \subset \mathbb{N}$, $I_0 = I \cup \{0\}$, $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{x_i^+\}_{i\in I_0}$ e $\{s_i\}_{i\in I_0}$ como na Definição 3.4, isto é, $x_0^+ = x$, $x_i = T(\phi(x_{i-1}^+))x_{i-1}^+$ e $x_i^+ = I(x_i)$ para $i \in I$ e $s_i = \phi(x_i^+)$ para $i \in I_0$.

- Se I é finito, digamos $I = \{1,\dots,n\}$, então $s_n = \infty$ e, portanto, $\Pi(x) = \sum_{i=0}^{n} s_i = \infty$.
- Se I não é finito, como $x_i^+ \in I(M)$ para todo $i \in I$ e $s_i = \phi(x_i^+)$ para todo $i \in I_0$, então $\Pi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i = s_0 + \sum_{i=1}^{\infty} s_i \geq s_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \xi = \infty$. □

Estabelecida a condição (G), as funções $\widetilde{T}(t)$ estão definidas para todo $t \geq 0$ e verifica-se que $\{\widetilde{T}(t) \colon t \geq 0\}$ satisfaz a propriedade do semigrupo:

$$\widetilde{T}(t+s)x = \widetilde{T}(t)\widetilde{T}(s)x,\ t,s \geq 0,\ x \in X,\ \ \widetilde{T}(0)x = x,\ x \in X. \tag{3.2}$$

O próximo teorema nos dá informação sobre a semicontinuidade inferior de ϕ no complementar de M. Para um estudo detalhado sobre a continuidade de ϕ, o leitor pode ver [15].

Teorema 3.6: *[15, Theorem 3.5] Seja (X,T,M,I) um SDI. A função ϕ é semicontínua inferiormente em $X \setminus M$.*

Demonstração. Seja $x \in X \setminus M$ e suponha que ϕ não é semicontínua inferiormente em x. Logo, existem uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $t < \phi(x)$ tais que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $\phi(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} t$. Como $T(\phi(x_n))x_n \in M = \overline{M}$, pela continuidade do semigrupo $\{T(t) \colon t \geq 0\}$ temos $T(\phi(x_n))x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(t)x \in M$ e, portanto, $\phi(x) \leq t$ o que nos dá uma contradição. □

A condição de que exista $\xi > 0$ tal que $\phi(z) \geq \xi$ para todos os $z \in I(M)$ diz que há um tempo mínimo para o semigrupo atingir M ao sair de $I(M)$. A seguinte proposição nos diz quando um SDI tem essa condição.

Proposição 3.7: *Seja (X,T,M,I) um SDI. Se $I(M)$ é compacto e $I(M) \cap M = \emptyset$, então existe um $\xi > 0$ tal que $\phi(z) \geq \xi$ para todo $z \in I(M)$.*

Demonstração. Suponha o contrário, para todo $\xi > 0$, existe $z_\xi \in I(M)$ tal que $\phi(z_\xi) < \xi$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, dado $\xi_n = \frac{1}{n}$ existe $z_n \in I(M)$ tal que $\phi(z_n) < \frac{1}{n}$. Como $I(M)$ é compacto, existe uma subsequência $\{z_{n_k}\}_{k\in N}$ de $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} z \in I(M)$ e pelo Teorema 3.6, como ϕ é semicontínua inferiormente em z, temos $\phi(z) \leq \lim_{k\to\infty} \phi(z_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, assim, $\phi(z) \leq 0$ o que dá uma contradição. □

3.1 Condições de tubo em sistemas dinâmicos impulsivos

Veremos que no caso de sistemas dinâmicos impulsivos o atrator global também está relacionado aos conjuntos ω-limites. A invariância e atração são duas propriedades muito importantes do atrator e pretendemos que os conjuntos ω-limites também tenham essas propriedades. Para isso, precisamos que o semifluxo original $\{T(t) \colon t \geq 0\}$ tenha uma direção bem definida ao cruzar M, mais especificamente, para cada ponto $x \in M$ deve existir uma vizinhança V contendo x de forma que todo o semifluxo que passa por V vá em apenas uma direção (se o fluxo vai em uma direção, não pode haver fluxo que vá na direção oposta dentro de V). Além disso, deve haver um conjunto, que chamaremos de tubo, em que todas as trajetórias (fluxo) dentro desse conjunto não se cruzem, ou seja, de alguma forma o fluxo é formado por linhas paralelas. Veja a Figura 3.3.

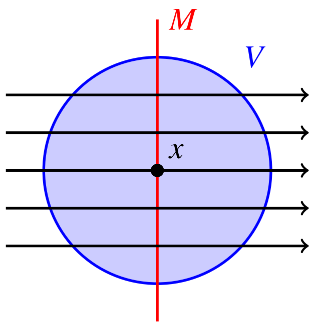


Figura 3.3: Tubo formado por linhas paralelas.

Portanto, os pontos de M devem satisfazer certas condições, que chamaremos condições de tubo, que garantem um bom comportamento do semigrupo $\{T(t) \colon t \geq 0\}$ próximo ao conjunto impulsivo M (ver [14] para obter mais detalhes).

Definição 3.8: Seja $\{T(t) \colon t \geq 0\}$ um semigrupo em X. Um conjunto fechado S contendo $x \in X$ é chamado de **seção** (λ-seção) através de x se existir $\lambda > 0$ e um subconjunto fechado L de X de modo que:

a) $F(L,\lambda) = S$;

b) $F(L,[0,2\lambda])$ contém uma vizinhança de x;

c) $F(L,\nu) \cap F(L,\zeta) = \emptyset$, se $0 \leq \nu < \zeta \leq 2\lambda$.

Dizemos que o conjunto $F(L,[0,2\lambda])$ é um λ-**tubo** (ou simplesmente **tubo**) e o conjunto L é uma **barra**.

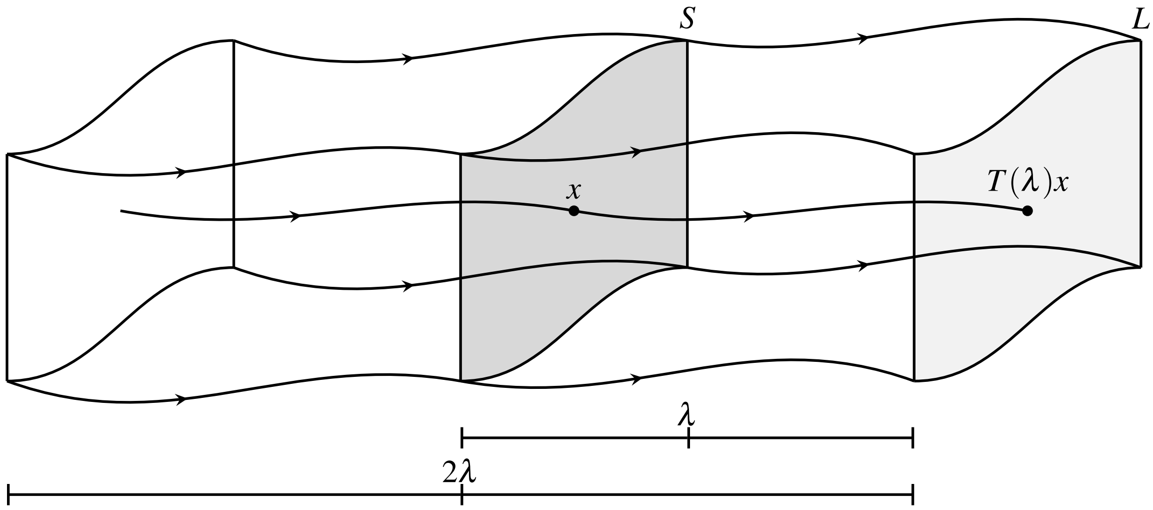


Figura 3.4: λ-tubo $F(L,[0,2\lambda])$.

O seguinte lema nos diz que as imagens das seções por pequenas translações de tempo também são seções.

Lema 3.9: *[14, Lemma 1.9] Dado $x \in X$, se S é uma λ-seção através de x com barra L, então para qualquer $0 < \mu \leq \lambda$, S é uma μ-seção através de x com barra $L_\mu = F(L, \lambda - \mu)$.*

Demonstração. Como $T(\lambda - \mu)$ é contínua e L é fechado, seque que $L_\mu = F(L, \lambda - \mu) = T(\lambda - \mu)^{-1}(L)$ é fechado. Além disso, $F(L_\mu, \mu) = T(\mu)^{-1}(L_\mu) = T(\mu)^{-1}(T(\lambda - \mu)^{-1}(L)) = (T(\lambda - \mu)T(\mu))^{-1}(L) = T(\lambda)^{-1}(L) = S$.

Resta mostrar que existe uma vizinhança de x dentro de $F(L_\mu, [0, 2\mu])$. Note que o conjunto $F(L, [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda])$ é fechado já que é a pré-imagem do conjunto fechado $([0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]) \times L$ sob a função contínua $x \mapsto (t, T(t)x)$, logo seu complementar é uma vizinhança de x, assim, existe um conjunto aberto U que contém x tal que $U \cap F(L, [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]) = \emptyset$.

Por outro lado, existe um aberto V tal que $x \in V \subset F(L, [0, 2\lambda])$, portanto

$$x \in V \cap U \subset F(L, [0, 2\lambda]) \cap F(L, [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda])^c = F(L_\mu, (0, 2\mu)) \subset F(L_\mu, [0, 2\mu]). \quad \square$$

Definição 3.10: Seja (X, T, M, I) um SDI. Dizemos que um ponto $x \in M$ satisfaz

i) a **condição de tubo forte (CTF)**, se existir uma seção S através de x tal que $S = F(L, [0, 2\lambda]) \cap M$.

ii) a **condição especial de tubo forte (CETF)** se satisfaz CTF e o λ-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ é tal que $F(L, [0, \lambda]) \cap I(M) = \emptyset$.

O teorema a seguir é uma adaptação de [15, Theorem 3.8] que analisa a continuidade da função ϕ.

Teorema 3.11: *Seja (X, T, M, I) um SDI tal que cada ponto de M satisfaz a CTF. Então ϕ é semicontínua superiormente em X e é contínua em $X \setminus M$. Além disso, se não houver pontos iniciais em M e ϕ for contínua em x, então $x \notin M$.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Se $\phi(x) = \infty$, a semicontinuidade superior de ϕ em x é trivial. Suponha que $\phi(x) = u \in (0,\infty)$, e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ uma sequência tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ com $\phi(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} t$. Logo, $y = T(u)x \in M$ e como y satisfaz a CTF, existem $\lambda > 0$ e S uma λ-seção através de y com barra L.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \min\{u,\lambda\}$. Pelo Lema 3.9, o conjunto $F(L_\varepsilon,[0,2\varepsilon])$ é um ε-tubo com barra $L_\varepsilon = F(L,\lambda-\varepsilon)$ e, então, existe uma vizinhança V de y tal que $V \subset F(L_\varepsilon,[0,2\varepsilon])$. Logo, $T(u)^{-1}(V) = W$ é uma vizinhança de x. Observe que

$$T(u)W = T(u)T(u)^{-1}(V) \subset V \subset F(L_\varepsilon,[0,2\varepsilon]),$$

isto é, $T(u)z \in F(L_\varepsilon,[0,2\varepsilon])$ para todo $z \in W$. Assim, para cada $z \in W$, existe $n_z \in [0,2\varepsilon]$ tal que $T(u+n_z)z \in L_\varepsilon$. Portanto, $T(u+n_z-\varepsilon)z \in F(L_\varepsilon,\varepsilon) = S \subset M$ e como $u+n_z-\varepsilon > 0$ e $n_z \leq 2\varepsilon$ segue que $\phi(z) \leq u+n_z-\varepsilon \leq u+\varepsilon$ para todo $z \in W$. Como $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in W$ para todo $n \geq n_0$, assim, $\phi(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} t \leq u+\varepsilon$ (pois $x_n \in W$ para todo $n \geq n_0$). Pela arbitrariedade de ε temos $t \leq u$ e isto prova a semicontinuidade superior de ϕ em x, logo ϕ é semicontínua superiormente em X e, pelo Teorema 3.6, ϕ é contínua em $X \setminus M$.

Vamos provar que dado um ponto $x \in M$, se x não é ponto inicial, então ϕ não é contínua em x. Suponha, por contradição, que ϕ é contínua em x. Como x não é ponto inicial, existem $\varepsilon > 0$ e $y \in X$ tal que $T(\varepsilon)y = x$ e $T([0,\varepsilon))y \cap M = \emptyset$. Seja $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência com $\varepsilon_n < \varepsilon$ tal que $\varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varepsilon$. Logo, $T(\varepsilon_n)y \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(\varepsilon)y = x$, $\phi(T(\varepsilon_n)y) = \varepsilon - \varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e, como ϕ é contínua em x, em particular é semicontínua inferiormente em x, logo $\phi(x) \leq \lim_{n\to\infty}\phi(T(\varepsilon_n)y) = \lim_{n\to\infty}\varepsilon - \varepsilon_n = 0$, o que é uma contradição já que $\phi(x) > 0$. Portanto, ϕ não é contínua em x. Como M não possui pontos iniciais, ϕ não é contínua em nenhum ponto de M, assim, se ϕ é contínua em x, então $x \notin M$. □

Observação 3.12: Antes de continuar, observamos que, se assumirmos que $I(M) \cap M = \emptyset$, então nenhum ponto $x \in M$ está em uma trajetória impulsiva, exceto se a trajetória começar em x. Esta é uma simples consequência da definição de trajetórias impulsivas e esse fato será usado mais tarde.

Finalizamos com a seguinte proposição que é o principal resultado desta seção. Este resultado nos ajudará com a invariância negativa dos conjuntos ω-limites dando-nos uma melhor compreensão sobre o comportamento de trajetórias impulsivas próximas ao conjunto impulsivo M. Esta proposição afirma que o fluxo impulsivo $\widetilde{T}(t)$ não pode atingir o "lado direito" do conjunto impulsivo M para grandes valores de t.

Proposição 3.13: *[8, Proposition 2.6] Sejam (X,T,M,I) um SDI tal que $I(M) \cap M = \emptyset$ e $y \in M$ satisfazendo CETF com λ-tubo $F(L,[0,2\lambda])$. Então $\widetilde{T}(t)X \cap F(L,[0,\lambda]) = \emptyset$ para todo $t > \lambda$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que existem $t > \lambda$ e $z = \widetilde{T}(t)x \in F(L,[0,\lambda])$ para algum $x \in X$. Como $z \in F(L,[0,\lambda])$ existe $\mu \in [0,\lambda]$ tal que $T(\mu)z \in L$. Se $\mu = \lambda$, $T(\mu)z = T(\lambda)z \in L$, logo $z \in T(\lambda)^{-1}(L) = S \subset M$. Como $I(M) \cap M = \emptyset$ pela, observação anterior, nenhum ponto de M está em uma $\widetilde{T}$-trajetória e como $z \in M$ e está na $\widetilde{T}$-trajetória de x, temos uma contradição. Portanto, $\mu \neq \lambda$, isto é, $\mu \in [0,\lambda)$.

Se $t < \phi(x)$, então $z = \widetilde{T}(t)x = T(t)x$ e consideremos $\omega = T(t-(\lambda-\mu))x$. Note que

$$T(\lambda)\omega = T(\lambda)T(t-(\lambda-\mu))x = T(t+\mu)x = T(\mu)T(t)x = T(\mu)z \in L$$

e, assim, $\omega \in T(\lambda)^{-1}(L) = S \subset M$, isto é, $\omega \in M$ o que é uma contradição pois $\omega = T(t-(\lambda-\mu))x \in M$ e $t-(\lambda-\mu) < t < \phi(x)$. Portanto, $t \geq \phi(x)$.

Considere agora o caso $z = \widetilde{T}(t)x = T(t')x^+$, onde $x^+ \in I(M)$ e $t' \in [0, \phi(x^+))$. Se $t' \geq \lambda - \mu$ então tome $\omega = T(t'-(\lambda-\mu))x^+$ e, assim,

$$T(\lambda)\omega = T(\lambda)T(t'-(\lambda-\mu))x^+ = T(\mu+t')x^+ = T(\mu)T(t')x^+ = T(\mu)z \in L,$$

isto é, $T(\lambda)\omega \in L$. Logo, $\omega \in T(\lambda)^{-1}(L) = S \subset M$ o que nos dá uma contradição, pois $t'-(\lambda-\mu) < t' < \phi(x^+)$.

Finalmente, se $t' \in [0, \lambda-\mu)$, então

$$T(t'+\mu)x^+ = T(\mu)T(t')x^+ = T(\mu)z \in L$$

e $0 \leq \mu \leq t'+\mu < \lambda$, assim $x^+ \in T(t'+\mu)^{-1}(L) \subset F(L,[0,\lambda))$ e $x^+ \in I(M)$. Logo, $x^+ \in F(L,[0,\lambda)) \cap I(M)$, que é uma contradição com CETF. $\square$

3.2 Atratores globais para sistemas dinâmicos impulsivos

As definições de $\widetilde{T}$-invariância e $\widetilde{T}$-atração são análogas às noções de T-invariância e T-atração, respectivamente, substituindo simplesmente T por $\widetilde{T}$. Começamos com uma primeira abordagem sobre atratores para o SDI. No caso contínuo (sem impulso), o atrator global é um conjunto compacto, e mantendo essa propriedade em [9], os autores propõem a seguinte definição de atrator global para um sistema dinâmico impulsivo que é uma generalização natural do caso sem impulso.

Definição 3.14 (Abordagem compacta): Um subconjunto $\mathscr{A}$ de X é um atrator global para um SDI (X,T,M,I) se satisfaz as seguintes condições:

i) $\mathscr{A}$ é compacto e $\mathscr{A} \cap M = \emptyset$;

ii) $\widetilde{T}$-invariante;

iii) $\widetilde{T}$-atrai todos os subconjuntos limitados de X.

Observação 3.15: A definição acima é consistente com a noção de atrator global para semigrupos, isto é, quando $M = \emptyset$, ambas definições coincidem e, de fato, essa noção de atrator global é útil para descrever a dinâmica assintótica de $\widetilde{T}$ em muitos casos. No entanto, essa definição exclui uma classe importante de SDI, uma vez que, o comportamento assintótico de $\widetilde{T}$ não é qualitativamente diferente do comportamento assintótico de T. De fato, como $\mathscr{A}$ é um conjunto compacto e M é um conjunto fechado, pela condição i), existe uma distância positiva entre $\mathscr{A}$ e M, isto é, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$\mathscr{O}_\varepsilon(\mathscr{A}) \cap M = \emptyset$. Assim, dado $x \in X$, como $\mathscr{O}_\varepsilon(\mathscr{A})$ $\widetilde{T}$-absorve $\{x\}$ existe $t_x \geq 0$ tal que $\widetilde{T}(t)x \in \mathscr{O}_\varepsilon(\mathscr{A})$ para todo $t \geq t_x$ e, portanto, $\widetilde{T}(t)x \notin M$ para todo $t \geq t_x$, isto é, a partir de um tempo $t \geq t_x$ a órbita de x nunca atinge o conjunto impulsivo M tornando-se uma órbita contínua (sem impulso).

Portanto, precisamos encontrar uma definição mais adequada de atrator global que inclua casos em que a dinâmica em longo tempo de $\widetilde{T}$ seja diferente da dinâmica de T. Para motivar, apresentamos um exemplo simples tomado de [8] no qual a dinâmica assintótica de $\widetilde{T}$ e T são diferentes.

Exemplo 3.16: Considere a seguinte equação diferencial contínua

$$\dot{x} = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0, \\ 1 - x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

com a condição inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ e considere a ação da função impulsiva $I\colon M = \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $I(0) = -1$. As soluções de (3.3) sem a ação de I são dadas por

$$x(t) = \begin{cases} t + x_0, & x_0 < 0, t \in [0, -x_0), \\ -e^{-t-x_0} + 1, & x_0 < 0, t \in [-x_0, \infty), \\ (x_0 - 1)e^{-t} + 1, & x_0 \geq 0, t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Esse problema possui apenas um conjunto invariante limitado, a saber, o conjunto unitário $\{1\}$ que também é o atrator global para (3.3). Agora, as soluções de (3.3) com a ação de I são dadas por

$$\widetilde{T}(t)x = \begin{cases} t + x_0, & x_0 < 0,\ t \in [0, -x_0), \\ t + x_0 - n, & x_0 < 0,\ t \in [-x_0 + n - 1, -x_0 + n),\ n \in \mathbb{N}, \\ (x_0 - 1)e^{-t} + 1, & x_0 \geq 0,\ t \in [0, \infty). \end{cases} \tag{3.4}$$

Agora, a dinâmica é bastante diferente, já que apareceu a "órbita periódica impulsiva" $[-1, 0)$. Observe que, neste caso, não existe um subconjunto de $\mathbb{R}$ satisfazendo todas as condições da Definição 3.14. Mas podemos distinguir alguns conjuntos:

- O conjunto $\mathscr{A}_1 = [-1, 0) \cup \{1\}$ é $\widetilde{T}$-invariante, $\widetilde{T}$-atrai conjuntos limitados e $\mathscr{A}_1 \cap M = \emptyset$, mas $\mathscr{A}_1$ não é compacto.

- O conjunto $\mathscr{A}_2 = [-1, 0] \cup \{1\}$ $\widetilde{T}$-atrai conjuntos limitados, $\mathscr{A}_2$ é compacto, mas $\mathscr{A}_2 \cap M \neq \emptyset$ e $\mathscr{A}_2$ não é nem $\widetilde{T}$-positivamente nem $\widetilde{T}$-negativamente invariante.

- O conjunto $\mathscr{A}_3 = [-1, 1]$ $\widetilde{T}$-atrai conjuntos limitados, $\mathscr{A}_3$ é compacto, é positivamente invariante, mas não é negativamente invariante e $\mathscr{A}_3 \cap M \neq \emptyset$.

Sabemos da teoria dos semigrupos que o atrator global é caracterizado como a união de todas as soluções globais limitadas de T, e essa propriedade está intimamente relacionada à invariância do atrator global. Portanto, olhando para os três conjuntos acima, pode-se supor que o conjunto $\mathscr{A}_1$ é um candidato natural ao atrator global desse sistema impulsivo, uma vez que é o único $\widetilde{T}$-invariante entre os três. Além disso, se recordamos a definição de uma $\widetilde{T}$-trajetória, podemos ver que, através dos pontos de M, não pode haver soluções globais de $\widetilde{T}$, portanto, é natural supor que se a invariância é a propriedade que buscamos para o atrator global, então nenhum ponto de M pode estar nela. Assim, a hipótese $\mathscr{A} \cap M = \emptyset$ na Definição 3.14 precisa ser mantida e isso implica uma consequência direta: a hipótese de compacidade precisa ser enfraquecida. O conjunto $\mathscr{A}_1$ acima não é compacto, mas é pré-compacto e, além disso, $\mathscr{A}_1 = \overline{\mathscr{A}_1} \setminus M$.

Por todos esses argumentos, tirados do exemplo, para cobrir uma classe maior de sistemas dinâmicos impulsivos, em [8] os autores fornecem a seguinte definição.

Definição 3.17 (Abordagem pré-compacta): Um subconjunto $\mathscr{A} \subset X$ será chamado de **atrator global** para o SDI (X,T,M,I) se satisfaz as seguintes condições:

i) $\mathscr{A}$ é pré-compacto e $\mathscr{A} = \overline{\mathscr{A}} \setminus M$;

ii) $\mathscr{A}$ é $\widetilde{T}$-invariante;

iii) $\mathscr{A}$ $\widetilde{T}$-atrai subconjuntos limitados de X.

Com a Definição 3.17, o conjunto $\mathscr{A}_1$ é o atrator global para o SDI no Exemplo 3.16. A principal diferença entre a Definição 3.14 e Definição 3.17 é a compacidade. Na Definição 3.17, o atrator global não precisa ser compacto e pode “tocar” o conjunto impulsivo M, enquanto conjuntos compactos que não interceptam M devem estar a uma distância positiva de M.

3.2.1 Propriedades do atrator global impulsivo

A seguir, daremos algumas propriedades do atrator global impulsivo que são análogas às propriedades que já vimos no caso sem impulso. A partir de agora consideraremos o atrator global como na Definição 3.17. Antes de fornecer as propriedades, precisamos da seguinte definição.

Definição 3.18: Uma função $\psi \colon \mathbb{R} \to X$ é uma **solução global** de $\widetilde{T}$ se

$$\widetilde{T}(t)\psi(s) = \psi(t+s), \text{ para quaisquer } t \geq 0 \text{ e } s \in \mathbb{R}.$$

Além disso, se $\psi(0) = x$ dizemos que ψ é uma **solução global através** de x.

As seguintes propriedades do atrator global são uma compilação das proposições [8, Proposition 4.1, 4.3 e 4.5].

Proposição 3.19: *Seja (X,T,M,I) um SDI, e suponha que existe seu atrator global $\mathscr{A}$.*

a) *$\mathscr{A}$ é único.*

b) *Se $I(M) \cap M = \emptyset$, então*

$$\mathscr{A} = \{x \in X : \textit{existe uma solução global limitada de } \widetilde{T} \textit{ através de } x\}.$$

c) *$\mathscr{A}$ é o subconjunto mínimo entre todos os subconjuntos $K \subset X$ com $K = \overline{K} \setminus M$ que $\widetilde{T}$-atrai todos os subconjuntos limitados de X.*

Demonstração: a) Suponha que $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$ satisfazem a Definição 3.17. Como $\mathscr{A}_2$ é limitado (por ser compacto), $\mathscr{A}_1$ $\widetilde{T}$-atrai $\mathscr{A}_2$, então $\lim_{t\to\infty} d_H(\widetilde{T}(t)\mathscr{A}_2, \mathscr{A}_1) = 0$. Como $\mathscr{A}_2$ é $\widetilde{T}$-invariante, então

$$\lim_{t\to\infty} d_H(\widetilde{T}(t)\mathscr{A}_2, \mathscr{A}_1) = \lim_{t\to\infty} d_H(\mathscr{A}_2, \mathscr{A}_1) = d_H(\mathscr{A}_2, \mathscr{A}_1) = 0 \Leftrightarrow \overline{\mathscr{A}_2} = \overline{\mathscr{A}_1}$$

e por $i)$ temos

$$\mathscr{A}_1 = \overline{\mathscr{A}_1} \setminus M = \overline{\mathscr{A}_2} \setminus M = \mathscr{A}_2.$$

b) Se $\psi\colon \mathbb{R} \to X$ é uma solução global limitada de $\widetilde{T}$ então $\psi(\mathbb{R}) \cap M = \emptyset$. De fato, se $\psi(t_0) \in M$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$ então $\widetilde{T}(s)\psi(t_0 - s) = \psi(t_0) \in M$ para cada $s > 0$ que não pode acontecer já que o semifluxo impulsivo de x não pode atingir M em tempo positivo para qualquer $x \in M$, porque $I(M) \cap M = \emptyset$. Portanto, $\psi(\mathbb{R}) \cap M = \emptyset$,

Afirmamos que $\psi(\mathbb{R})$ é $\widetilde{T}$-invariante. De fato, se $t \geq 0$ e $\psi(s) \in \psi(\mathbb{R})$, então $\widetilde{T}(t)\psi(s) = \psi(t + s) \in \psi(\mathbb{R})$ logo $\widetilde{T}(t)\psi(\mathbb{R}) \subset \psi(\mathbb{R})$. Por outro lado, $\psi(s) = \widetilde{T}(t)(\psi(s-t)) \in \widetilde{T}(t)\psi(\mathbb{R})$, logo $\psi(\mathbb{R}) \subset \widetilde{T}(t)\psi(\mathbb{R})$.

Como $\psi(\mathbb{R})$ é limitado, $\mathscr{A}$ $\widetilde{T}$-atrai $\psi(\mathbb{R})$ e $0 = \lim_{t\to\infty} d_H(\widetilde{T}(t)\psi(\mathbb{R}), \mathscr{A}) = d_H(\psi(\mathbb{R}), \mathscr{A})$. Então $\psi(\mathbb{R}) \subset \overline{\psi(\mathbb{R})} \subset \overline{\mathscr{A}}$ e como $\psi(\mathbb{R}) \cap M = \emptyset$ tem-se $\psi(\mathbb{R}) = \psi(\mathbb{R}) \setminus M \subset \overline{\mathscr{A}} \setminus M = \mathscr{A}$, isto é, $\psi(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}$.

Para a inclusão inversa, se $x \in \mathscr{A}$ como $x \in \widetilde{T}(1)\mathscr{A} = \mathscr{A}$ existe $x_{-1} \in \mathscr{A}$ tal que $\widetilde{T}(1)x_{-1} = x$. Novamente, como $x_{-1} \in \mathscr{A}$, existe $x_{-2} \in \mathscr{A}$ tal que $\widetilde{T}(1)x_{-2} = x_{-1}$. Indutivamente podemos construir uma sequência $\{x_{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\widetilde{T}(1)x_{-n-1} = x_{-n}$ para todo $n \geq 0$, com $x_0 = x$. Então, definimos

$$\psi(t) = \begin{cases} \widetilde{T}(t+n)x_{-n}, & \text{se } t \in [-n, -n+1], n \in \mathbb{N}, \\ \widetilde{T}(t)x_0, & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

Analogamente ao caso contínuo, mostra-se que $\widetilde{T}(t)\psi(s) = \psi(t+s)$, para todo $t \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$, e $\psi(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}$.

c) Sejam $\mathscr{A}$ o atrator do SDI (X,T,M,I) e $K \subset X$ tal que $K = \overline{K} \setminus M$ e K $\widetilde{T}$-atrai todos os subconjuntos limitados de X. Como $\mathscr{A}$ é invariante e K $\widetilde{T}$-atrai $\mathscr{A}$, pois este é limitado, temos

$$d_H(\mathscr{A}, K) = d_H(\widetilde{T}(t)\mathscr{A}, K) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto, $\overline{\mathscr{A}} \subset \overline{K}$ e $\overline{\mathscr{A}} \setminus M = \mathscr{A} \subset \overline{K} \setminus M = K$. □

3.3 ω-limites impulsivos

Para dar condições necessárias e suficientes para garantir a existência de um atrator global para um SDI (X,T,M,I) precisamos do conceito de ω-limites impulsivos.

Definição 3.20: A **órbita positiva impulsiva** de $x \in X$ começando em $s \geq 0$ é o conjunto

$$\widetilde{\gamma}_s^+(x) = \{\widetilde{T}(t)x \colon t \geq s\}.$$

Também definimos $\widetilde{\gamma}^+(x) = \widetilde{\gamma}_0^+(x)$.

Dado um subconjunto $B \subset X$, definimos $\widetilde{\gamma}_s^+(B) = \bigcup_{x \in B} \widetilde{\gamma}_s^+(x)$ e o **ω-limite impulsivo** de B é o conjunto

$$\widetilde{\omega}(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\widetilde{\gamma}_t^+(B)}.$$

Analogamente ao caso dos semigrupos, temos o seguinte resultado de caracterização para ω-limites impulsivos.

Lema 3.21: *[8, Lemma 3.2] Sejam (X,T,M,I) um SDI e $B \subset X$. Então*

$$\widetilde{\omega}(B) = \{x \in X \colon \exists \textit{ sequências } \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+ \textit{ e } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B \\ \textit{com } t_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty, \textit{ e } \widetilde{T}(t_n)x_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} x\},$$

além disso, $\widetilde{\omega}(B)$ é fechado.

Demonstração. Se $x \in \widetilde{\omega}(B)$ então dado $n \in \mathbb{N}$, $x \in \overline{\widetilde{\gamma}_n^+(B)}$, o que implica que existem $x_n \in B$ e $t_n \geq n$ tal que $d(x, \widetilde{T}(t_n)x_n) < \frac{1}{n}$ e, portanto, $t_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\widetilde{T}(t_n)x_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$. Por outro lado, dado $t \geq 0$, sejam $x \in X$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, tais que $\widetilde{T}(t_n)x_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$. Como $\widetilde{T}(t_n)x_n \in \widetilde{\gamma}_t^+(B)$ para $t_n \geq t$, então $x \in \overline{\widetilde{\gamma}_t^+(B)}$, logo $x \in \widetilde{\omega}(B)$.

Finalmente, $\widetilde{\omega}(B)$ é fechado, uma vez que é uma interseção de conjuntos fechados, o que conclui a prova. □

Se o SDI satisfaz uma condição de dissipatividade, os ω-limites impulsivos têm certas propriedades. Vejamos a seguir esta condição.

Definição 3.22: Um SDI (X,T,M,I) é chamado de **limitado dissipativo** se existe um conjunto pré-compacto $K \subset X$ com $K \cap M = \emptyset$ que $\widetilde{T}$-atrai todos os subconjuntos limitados de X. Qualquer conjunto K que satisfaça essas condições será chamado de **pré-atrator** .

A seguinte proposição é uma compilação das proposições [8, Proposition 3.4 e 3.5] e nos dá algumas propriedades que possuem os ω-limites impulsivos sob a hipótese de dissipatividade.

Proposição 3.23: *Se (X,T,M,I) é um SDI limitado dissipativo com um pré-atrator K, então, para qualquer subconjunto não-vazio B de X:*

a) *$\widetilde{\omega}(B)$ é não-vazio, compacto e $\widetilde{\omega}(B) \subset \overline{K}$.*

b) *$\widetilde{\omega}(B)$ $\widetilde{T}$-atrai B.*

Demonstração. a) Seja $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Como $B \neq \emptyset$, existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que

$$d(\widetilde{T}(t_n)x_n, \overline{K}) \leq d(\widetilde{T}(t_n)x_n, K) = d_H(\widetilde{T}(t_n)x_n, K) \leq d_H(\widetilde{T}(t_n)B, K) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Então, pelo Lema 2.20, existe uma subsequência convergente $\widetilde{T}(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in \widetilde{\omega}(B)$. Logo, $\omega(B) \neq \emptyset$.

Seja $x \in \widetilde{\omega}(B)$. Então $\widetilde{T}(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ para algumas sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e

$$d_H(\widetilde{T}(t_n)x_n, K) \leq d_H(\widetilde{T}(t_n)B, K) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

pois K $\widetilde{T}$-atrai B. Portanto, $x \in \overline{K}$ e, assim, $\widetilde{\omega}(B) \subset \overline{K}$. Como $\widetilde{\omega}(B)$ é fechado e está contido no conjunto compacto $\overline{K}$, $\widetilde{\omega}(B)$ é compacto.

b) Suponha que, ao contrário da afirmação, existam sequências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e ε_0 tal que $d_H(\widetilde{T}(t_n)x_n, \widetilde{\omega}(B)) > \varepsilon_0$. Sabemos que $d_H(\widetilde{T}(t_n)x_n, K) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, então para alguma subsequência $\{\widetilde{T}(t_{n_k})x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, existe $x \in \overline{K}$ tal que $\widetilde{T}(t_{n_k})x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$, então $0 = d_H(x, \widetilde{\omega}(B)) \geq \varepsilon_0$, que é uma contradição. $\square$

Agora podemos dar outra caracterização do atrator global em relação aos conjuntos ω-limites.

Proposição 3.24: *[8, Proposition 4.4] Seja (X,T,M,I) um SDI que tem um atrator global $\mathscr{A}$ e $I(M) \cap M = \emptyset$ e denote por $\mathscr{B}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos limitados de X. Então*

$$\mathscr{A} = \bigcup_{B\in\mathscr{B}(X)} (\widetilde{\omega}(B) \setminus M).$$

Demonstração. Seja B um subconjunto limitado de X. Provemos a igualdade de conjunto por dupla inclusão.

Mostremos que $\bigcup_{B\in\mathscr{B}(X)}(\widetilde{\omega}(B) \setminus M) \subset \mathscr{A}$. Pelo item a) da Proposição 3.23 (tomando $K = \mathscr{A}$), $\widetilde{\omega}(B) \subset \overline{\mathscr{A}}$ e, portanto, $\widetilde{\omega}(B) \setminus M \subset \overline{\mathscr{A}} \setminus M = \mathscr{A}$. Logo, $\bigcup_{B\in\mathscr{B}(X)}(\widetilde{\omega}(B) \setminus M) \subset \mathscr{A}$.

Mostremos que $\mathscr{A} \subset \bigcup_{B\in\mathscr{B}(X)}(\widetilde{\omega}(B) \setminus M)$. Seja $x_0 \in \mathscr{A}$. Como $\mathscr{A} = \overline{\mathscr{A}} \setminus M$ então $x_0 \notin M$ e, usando o item b) da Proposição 3.19, podemos considerar uma solução global limitada ψ de $\widetilde{T}$ através de x_0. Se $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ for uma sequência arbitrária tal que $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ então, como $\widetilde{T}(t_n)\psi(-t_n) = \psi(0) = x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $x_0 \in \widetilde{\omega}(\psi(\mathbb{R}))$, isto é, $x_0 \in \widetilde{\omega}(\psi(\mathbb{R})) \setminus M \subset \bigcup_{B\in\mathscr{B}(X)} \widetilde{\omega}(B) \setminus M$. Portanto, $\mathscr{A} \subset \bigcup_{B\in\mathscr{B}(X)} \widetilde{\omega}(B) \setminus M$. $\square$

3.3.1 Invariância dos ω-limites impulsivos

Nesta subseção, estabelecemos a invariância para os conjuntos ω-limites impulsivos. Começaremos com a invariância positiva que é mais fácil de provar do que a negativa.

Invariância positiva

O seguinte resultado é usado para demonstrar ambas as invariâncias e é muito interessante, pois diz que a função $\widetilde{T}$ se comporta como uma função contínua no complementar de M sob uma "pequena correção" no tempo.

Lema 3.25: *[8, Lemma 3.6] Seja (X,T,M,I) um SDI tal que $I(M)\cap M=\emptyset$ e cada ponto de M satisfaz CTF. Sejam também $x\in X\setminus M$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Então, dado $t\geq 0$, existe uma sequência $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tal que $\eta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\widetilde{T}(t+\eta_n)z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{T}(t)x$.*

Demonstração. Sejam $x\in X\setminus M$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Se $\phi(x)=\infty$, pela continuidade de ϕ sobre $X\setminus M$ (Teorema 3.11) segue-se que, para $t\in[0,\infty)$ dado, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\phi(z_n)>t$ para todo $n\geq n_0$. Como $t<\phi(z_n)$ então $\widetilde{T}(t)z_n=T(t)z_n$ e, tomando $\eta_n=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, pela continuidade de $T(t)$, obtemos $\widetilde{T}(t+\eta_n)z_n=\widetilde{T}(t+0)z_n=T(t)z_n\to T(t)x=\widetilde{T}(t)x$.

Agora, assumimos que $\phi(x)<\infty$. Como ϕ é contínua em $X\setminus M$, podemos assumir que $\phi(z_n)<\infty$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Caso 1: Se $0\leq t<\phi(x)$. Neste caso, considere $0<\varepsilon<\phi(x)-t$. Pela continuidade de ϕ existe um $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\phi(x)-\varepsilon<\phi(z_n)$ para todo $n\geq n_0$. Logo, $t<\phi(z_n)$ e $\widetilde{T}(t)z_n=T(t)z_n$ para todo $n\geq n_0$. Tomando $\eta_n=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, segue que

$$\widetilde{T}(t+\eta_n)z_n=\widetilde{T}(t)z_n=T(t)z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(t)x=\widetilde{T}(t)x.$$

Case 2: Se $t=\phi(x)$. Observe que $\widetilde{T}(t)x=\widetilde{T}(\phi(x))x=x_1^+\notin M$ pois $M\cap I(M)=\emptyset$. Assim

$$(z_n)_1=T(\phi(z_n))z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(\phi(x))x=x_1\in M.$$

Logo, $\{(z_n)_1\}_{n\in\mathbb{N}}\subset M$ e $(z_n)_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_1\in M$ e como I é contínua em M então

$$(z_n)_1^+=I((z_n)_1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} I(x_1)=x_1^+.$$

Defina $\eta_n=\phi(z_n)-\phi(x)$, como $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e ϕ é contínua em x, temos $\eta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, logo existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\eta_n<t$ para todo $n\geq n_0$. Assim, $\phi(z_n)=\phi(x)+\eta_n=t+\eta_n>0$ para todo $n\geq n_0$. Portanto,

$$\widetilde{T}(t+\eta_n)z_n=\widetilde{T}(\phi(z_n))z_n=(z_n)_1^+ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_1^+=\widetilde{T}(t)x.$$

Caso 3: Se $t>\phi(x)$. Seja $m\in\mathbb{N}$ tal que $t=\sum_{i=0}^{m-1}\phi(x_i^+)+t'$ com $t'<\phi(x_m^+)$, onde $x=x_0^+$, $x_{i+1}=T(\phi(x_i^+))x_i^+$ e $x_i^+=I(x_i)$ e defina

$$(z_n)_i=T(\phi(z_n))z_n,\ (z_n)_i^+=I((z_n)_i) \text{ e } (z_n)_{i+1}=T(\phi((z_n)_i^+))(z_n)_i^+,\ i=1,\dots,m-1.$$

Seja $t_n = \sum_{i=0}^{m-1} \phi((z_n)_i^+)$. Como $\phi(z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$, então

$$(z_n)_1 = T(\phi(z_n))z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(\phi(x))x = x_1.$$

Pela continuidade de I temos

$$(z_n)_1^+ = I((z_n)_1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} I(x_1) = x_1^+.$$

Agora, como $\phi((z_n)_1^+) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(x_1^+)$, já que $x_1^+ \notin M$, temos

$$(z_n)_2 = T(\phi((z_n)_1^+))(z_n)_1^+ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(\phi(x_1^+))x_1^+ = x_2.$$

Continuando com este processo, obtemos

$$(z_n)_i \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_i \;\; e \;\; (z_n)_i^+ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_i^+, \text{ para todo } i = 1, \ldots, m.$$

Assim, $\sum_{i=0}^{m-1} \phi((z_n)_i^+) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=0}^{m-1} \phi(x_i^+)$. Defina a sequência $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ por $\eta_n = t_n + t' - t$, isto é, $\eta_n = \sum_{i=0}^{m-1} \phi((z_n)_i^+) - \sum_{i=0}^{m-1} \phi(x_i^+)$. Então, $\eta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $t + \eta_n = t_n + t' \geq 0$. Como $t' < \phi((z_n)_m^+)$ para n suficientemente grande, obtemos

$$\widetilde{T}(t+\eta_n)z_n = T(t')(z_n)_m^+ \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} T(t')x_m^+ = T(t)x. \qquad \square$$

Proposição 3.26 (Invariância positiva): *[8, Proposition 3.7] Seja (X,T,M,I) um SDI tal que $I(M) \cap M = \emptyset$ e suponha que cada ponto de M satisfaz CTF. Então, para qualquer subconjunto não-vazio B de X, o conjunto $\widetilde{\omega}(B) \setminus M$ é positivamente $\widetilde{T}$-invariante.*

Demonstração. Sejam $x \in \widetilde{\omega}(B) \setminus M$ e $t \geq 0$. Então existem sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $\widetilde{T}(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Como $x \notin M$ e M é fechado, podemos assumir que $\widetilde{T}(t_n)x_n \notin M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, pelo Lema 3.25, existe uma sequência $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\eta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$\widetilde{T}(t+\eta_n)\widetilde{T}(t_n)x_n = \widetilde{T}(t_n+t+\eta_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{T}(t)x.$$

Daí, $\widetilde{T}(t)x \in \widetilde{\omega}(B)$. Observe que $\widetilde{T}(t)x \notin M$, pois qualquer trajetória impulsiva iniciada em um ponto de $X \setminus M$ nunca atinge M em tempo finito (observe que $I(M) \cap M = \emptyset$). Isto mostra a $\widetilde{T}$-invariância positiva de $\widetilde{\omega}(B) \setminus M$. $\square$

Invariância negativa

Como mencionado anteriormente, a invariância negativa dos conjuntos ω-limites impulsivos é mais difícil de provar. Para fazer isso, precisamos estudar o comportamento do semifluxo impulsivo $\widetilde{T}$ próximo ao conjunto impulsivo M. Em [9], os autores consideram o atrator global longe do conjunto impulsivo M e evitam este estudo, mas agora, com uma análise mais profunda, podemos desenvolver a teoria que permita que o atrator esteja próximo de M.

Vamos agora dar uma proposição, que é uma compilação dos resultados [8, Lemma 3.8, Corollary 3.9 e Lemma 3.10], e resume alguns resultados de convergência importantes que serão usados para demonstrar a invariância negativa.

Proposição 3.27: *Seja (X,T,M,I) um SDI.*

a) *Suponha que cada ponto em M satisfaz a CTF. Sejam $z \in X \setminus M$ e uma sequência $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus M$ tal que $z_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} z$. Se $\alpha_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\alpha_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\widetilde{T}(\alpha_n)(z_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} z$.*

b) *Suponha que $M \cap I(M) = \emptyset$ e cada ponto em M satisfaz a CTF. Sejam $z \in X \setminus M$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que $z_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} z$. Então, dado $t \geq 0$, existe uma sequência $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ tal que $\varepsilon_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\widetilde{T}(t+\varepsilon_n)z_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{T}(t)z$.*

c) *Seja $x \in M$ satisfazendo a CTF com λ-tubo $F(L,[0,2\lambda])$. Suponha que existe uma sequência $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n \in F(L,(\lambda,2\lambda])$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $z_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Então, existem uma subsequência $\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e uma sequência $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\varepsilon_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $x_k = T(\varepsilon_k)z_{n_k} \in M$ e $\phi(z_{n_k}) = \varepsilon_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $x_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x$.*

Demonstração. a) Seja $z \in X \setminus M$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $X \setminus M$ tal que $z_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} z$ e $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $\alpha_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Como ϕ é contínua em $X \setminus M$ então $\phi(z_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(z)$ e, assim, podemos assumir que

$$\frac{\phi(z)}{2} < \phi(z_n) < \frac{3\phi(z)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

e como $\alpha_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, por (3.5) podemos assumir que $0 \leq \alpha_n < \phi(z_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, pela continuidade conjunta do semigrupo T, temos

$$\widetilde{T}(\alpha_n)z_n = T(\alpha_n)z_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T(0)z = z.$$

b) Pelo Lema 3.25 sabemos que existe uma sequência $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\eta_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\widetilde{T}(t+\eta_n)z_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{T}(t)z \notin M$, pois $z \notin M$, $M \cap I(M) = \emptyset$ (veja Observação 3.12). Como M é fechado, podemos assumir que $\widetilde{T}(t+\eta_n)z_n \notin M$. Logo, como $\widetilde{T}(t+\eta_n)z_n, \widetilde{T}(t)z \notin M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\widetilde{T}(t+\eta_n)z_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{T}(t)z$ então, para a sequência $\{|\eta_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para 0, pelo item a)

$$\widetilde{T}(|\eta_n|)(\widetilde{T}(t+\eta_n)z_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{T}(t)z,$$

isto é, $\widetilde{T}(t+\eta_n+|\eta_n|)z_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{T}(t)z$ e o resultado segue tomando $\varepsilon_n = \eta_n + |\eta_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) Seja $x \in M$ que satisfaz CTF com λ-tubo $F(L,[0,2\lambda])$ e suponha que existe $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F(L,(\lambda,2\lambda])$ tal que $z_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Como $z_n \in F(L,(\lambda,2\lambda])$ existe λ_n com $\lambda < \lambda_n \leq 2\lambda$ tal que $T(\lambda_n)z_n \in L$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, podemos escolher uma subsequência convergente $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lambda_{n_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\lambda} \in [\lambda, 2\lambda]$. Pela continuidade de T, temos $T(\lambda_{n_k})z_{n_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} T(\overline{\lambda})x \in L$, já que L é fechado. Assim, $x \in F(L,\overline{\lambda}) \cap F(L,\lambda)$, o que implica que $\overline{\lambda} = \lambda$ (pela propriedade c) da

Definição 3.8). Sejam $\varepsilon_k = \lambda_{n_k} - \lambda > 0$ e $x_k = T(\varepsilon_k)z_{n_k} \in L$ e, assim, $x_k \in T(\lambda)^{-1}(L) = S \subset M$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, $\varepsilon_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (já que $\lambda_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\lambda} = \lambda$) e $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$, pois T é contínua e $x_k = T(\varepsilon_k)z_{n_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora vamos mostrar que $\varepsilon_k = \phi(z_{n_k})$, isto é, que ε_k é o menor valor positivo tal que $T(\varepsilon_k)z_{n_k} \in M$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Suponha o contrário, que existe $t_0 \in (0, \varepsilon_k)$ tal que $T(t_0)z_{n_k} = \omega_{n_k} \in M$ e, assim, $T(\lambda_{n_k} - t_0)\omega_{n_k} \in L$ e $\omega_{n_k} \in F(L,[0,2\lambda]) \cap M = S$, pois $\lambda_{n_k} - t_0 \leq 2\lambda$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $\omega_{n_k} \in F(L,\lambda) \cap F(L, \lambda_{n_k} - t_0)$ e assim $t_0 = \lambda_{n_k} - \lambda = \varepsilon_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição. □

Estabelecemos o último resultado necessário para garantir a invariância negativa.

Lema 3.28: *[8, Lemma 3.11] Sejam (X,T,M,I) um SDI com $I(M) \cap M = \emptyset$ e $B \subset X$. Suponha que cada ponto de M satisfaz a CETF. Se $y \in \widetilde{\omega}(M) \cap M$ então $I(y) \in \widetilde{\omega}(B) \setminus M$.*

Demonstração. Sejam $B \subset X$ e $y \in \widetilde{\omega}(B) \cap M$. Então, existem $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tais que $y_n = \widetilde{T}(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Como $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in M$ então podemos assumir que $y_n = \widetilde{T}(t_n)x_n \in F(L,[0,2\lambda])$ e $t_n > \lambda$ para algum λ-tubo $F(L,[0,2\lambda])$ através de y e todo $n \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 3.13, $\widetilde{T}(t)X \cap F(L,[0,2\lambda]) = \emptyset$ para $t > \lambda$ e, portanto, $y_n \in F(L,(\lambda,2\lambda])$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo item c) da Proposição 3.27, existe uma sequência $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $T(\varepsilon_k)y_{n_k} \in M$ e $T(\varepsilon_k)y_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$, para alguma subsequência $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Pela continuidade de I,

$$\widetilde{T}(t_{n_k} + \varepsilon_k)x_{n_k} = \widetilde{T}(\varepsilon_k)\widetilde{T}(t_{n_k})x_{n_k} = \widetilde{T}(\varepsilon_k)y_{n_k} = I(T(\varepsilon_k)y_{n_k}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} I(y)$$

Portanto, $I(y) \in \widetilde{\omega}(B)$ e como $M \cap I(M) = \emptyset$, $I(y) \in \widetilde{\omega}(B) \setminus M$. □

Agora, com todos esses resultados, podemos provar a invariância negativa para o $\omega-$limite impulsivo.

Proposição 3.29 (Invariância Negativa): *[8, Proposition 3.12] Sejam (X,T,M,I) um SDI tal que $I(M) \cap M = \emptyset$, $B \subset X$ e suponha que cada ponto de M satisfaz a CETF. Se $\widetilde{\omega}(B)$ é compacto e $\widetilde{T}$-atrai B, então $\widetilde{\omega}(B) \setminus M$ é negativamente $\widetilde{T}$-invariante.*

Demonstração. Sejam $x \in \omega(B) \setminus M$ e $t \geq 0$. Então, existem sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $\widetilde{T}(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $t_n > t$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, como $\widetilde{\omega}(B)$ é compacto e $\widetilde{T}$-atrai B, podemos assumir que $\{\widetilde{T}(t_n - t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente, que denotamos da mesma maneira. Assim, $\widetilde{T}(t_n - t)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in \omega(B)$.

Caso 1: Se $y \in M$.

Neste caso, pela Proposição 3.13, podemos assumir que $y_n = \widetilde{T}(t_n - t)x_n \in F(L,(\lambda,2\lambda])$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $F(L,[0,2\lambda])$ é um λ-tubo através de y. Portanto, pelo item c) da Proposição 3.27, renomeando a sequência se necessário, existe uma sequência $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $z_n = T(\varepsilon_n)y_n \in M$ e $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela continuidade de I e pelo Lema 3.28, temos $z_n^+ = \widetilde{T}(\varepsilon_n)y_n = I(z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} I(y) = z \in \widetilde{\omega}(B) \setminus M$.

Agora, pelo item b) da Proposição 3.27, existe uma sequência $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tal que $\widetilde{T}(t+\alpha_n)z_n^+ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{T}(t)z$. Mas,

$$\begin{aligned}\widetilde{T}(t+\alpha_n)z_n^+ &= \widetilde{T}(t+\alpha_n)\widetilde{T}(\varepsilon_n)y_n = \widetilde{T}(t+\alpha_n+\varepsilon_n)y_n\\ &= \widetilde{T}(t_n+\alpha_n+\varepsilon_n)x_n = \widetilde{T}(\varepsilon_n+\alpha_n)\widetilde{T}(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\end{aligned}$$

e pelo item a) da Proposição 3.27, $x = \widetilde{T}(t)z \in \widetilde{T}(t)(\widetilde{\omega}(B)\setminus M)$.
Caso 2: Se $y \notin M$.

Novamente, pelo item b) da Proposição 3.27, existe uma sequência $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $\varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tal que $\widetilde{T}(t+\alpha_n)y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{T}(t)y$. Mas,

$$\widetilde{T}(t+\varepsilon_n)y_n = \widetilde{T}(t+\varepsilon_n)\widetilde{T}(t_n-t)x_n = \widetilde{T}(t_n+\varepsilon_n)x_n = \widetilde{T}(\varepsilon_n)\widetilde{T}(t_n)x_n,$$

e como $\widetilde{T}(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, pelo item a) da Proposição 3.27, $\widetilde{T}(t+\varepsilon_n)y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Portanto, $x = \widetilde{T}(t)y \in \widetilde{T}(t)(\widetilde{\omega}(B)\setminus M)$. □

3.3.2 Atração dos ω-limites impulsivos

Da Proposição 3.23, sabemos que se o SDI (X,T,M,I) é limitado dissipativo então, para cada $B \subset X$ não-vazio e limitado, o conjunto $\widetilde{\omega}(B)$ $\widetilde{T}$-atrai B mas, pela definição de atrator global, queremos que $\widetilde{\omega}(B)\setminus M$ também $\widetilde{T}$-atraia B. Para demonstrar este resultado precisamos do seguinte lema.

Lema 3.30: *[8, Lemma 3.13] Seja (X,T,M,I) um SDI limitado dissipativo com um pré-atrator K tal que $I(M)\cap M = \emptyset$ e suponha que cada ponto em M satisfaz a CETF. Além disso, suponha que existe $\xi > 0$ tal que $\phi(z) \geq \xi$ para todo $z \in I(M)$. Se B é um subconjunto não-vazio de X, então $\widetilde{\omega}(B)\cap M \subset \overline{\widetilde{\omega}(B)\setminus M}$.*

Demonstração. Seja $x \in \widetilde{\omega}(B)\cap M$. Então, existem sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $\widetilde{T}(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Pela Proposição 3.13, podemos assumir que $z_n = \widetilde{T}(t_n)x_n \in F(L,(\lambda,2\lambda])$, onde $F(L,[0,2\lambda])$ é um λ-tubo através de x (pois sabemos que $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e como $F(L,[0,2\lambda])$ contém uma vizinhança de x, $F(L,[0,2\lambda])$ contém infinitos pontos de $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e, pela Proposição 3.13, os quais pertencem a $F(L,(\lambda,2\lambda])$).

Sejam $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como no item c) da Proposição 3.27 e $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\varepsilon_n = \lambda_n - \lambda$, isto é, $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$, $\lambda_n > \lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e escolhemos uma subsequência de $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se necessário, que denotaremos novamente por $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (\lambda,2\lambda]$ e $\varepsilon_n = \lambda_n - \lambda < \frac{\xi}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $x \in M$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $F(x,(0,\varepsilon_x))\cap M = \emptyset$. Seja $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m_0} < \min\left\{\varepsilon_x, \frac{\xi}{2}\right\}$. Para cada $m \geq m_0$ consideremos a sequência

$$w_n^m = \widetilde{T}\left(t_n - \frac{1}{m}\right)x_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Como o SDI é limitado dissipativo, então $\widetilde{\omega}(B)$ é compacto e atrai B e, portanto, $\{w_n^m\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência, que denotaremos novamente por $\{w_n^m\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $w_n^m \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_m \in \widetilde{\omega}(B)$, para cada $m \geq m_0$.

Afirmação: $\phi(w_n^m) > \frac{1}{m}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $m \geq m_0$. De fato, suponha que $\phi(w_n^m) \leq \frac{1}{m}$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $m \geq m_0$. Sabemos que $T(\phi(w_n^m))w_n^m \in M$ e $v_n^m = \widetilde{T}(\phi(w_n^m))w_n^m \in I(M)$. Temos

$$T\left(\varepsilon_n + \frac{1}{m} - \phi(w_n^m)\right) v_n^m = T(\varepsilon_n)T\left(\frac{1}{m} - \phi(w_n^m)\right) v_n^m = T(\varepsilon_n)z_n \in M.$$

Observe que

$$0 < \varepsilon_n + \frac{1}{m} - \phi(w_n^m) < \varepsilon_n + \frac{1}{m} < \frac{\xi}{2} + \frac{1}{m_0} < \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi,$$

o que é uma contradição já que $v_n^m \in I(M)$.

Isto mostra que para $n \in \mathbb{N}$ e $m \geq m_0$

$$T\left(\frac{1}{m}\right) w_n^m = \widetilde{T}\left(\frac{1}{m}\right) w_n^m = \widetilde{T}\left(\frac{1}{m}\right) \widetilde{T}(t_n - t)x_n = \widetilde{T}(t_n)x_n.$$

Pela continuidade de T,

$$\lim_{n\to\infty} T\left(\frac{1}{m}\right) w_n^m = T\left(\frac{1}{m}\right) y_m = x \in M.$$

Como $\frac{1}{m} < \varepsilon_x$ então $y_m \notin M$, logo $y_m \in \widetilde{\omega}(B) \setminus M$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $\widetilde{\omega}(B) \setminus M$ é relativamente compacto, podemos assumir, tomando subsequência se necessário, que $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge para algum ponto $y \in \overline{\widetilde{\omega}(B) \setminus M}$. Afirmamos que $y = x$. De fato, como T é contínua e $T\left(\frac{1}{m}\right) y_m = x$ para todo $m \in \mathbb{N}$ então

$$x = T\left(\frac{1}{m}\right) y_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} T(0)y = y$$

e, portanto, $x \in \overline{\widetilde{\omega}(B) \setminus M}$ o que conclui a demonstração. □

Proposição 3.31: *[8, Proposition 3.14] Seja (X, T, M, I) um SDI com as hipóteses do Lema 3.30. Se $\widetilde{\omega}(B)$ $\widetilde{T}$-atrai B então $\widetilde{\omega}(B) \setminus M$ $\widetilde{T}$-atrai B.*

Demonstração. Vamos provar que $\widetilde{\omega}(B) = \overline{\widetilde{\omega}(B) \setminus M}$.

- $\widetilde{\omega}(B) \subset \overline{\widetilde{\omega}(B) \setminus M}$. De fato, seja $x \in \widetilde{\omega}(B)$, se $x \in M$ então $x \in \widetilde{\omega}(B) \cap M$ e, pelo Lema 3.30, $x \in \overline{\widetilde{\omega}(B) \setminus M}$. Se $x \notin M$, então $x \in \widetilde{\omega}(B) \setminus M \subset \overline{\widetilde{\omega}(B) \setminus M}$.
- $\overline{\widetilde{\omega}(B) \setminus M} \subset \widetilde{\omega}(B)$. De fato, note que $\overline{\widetilde{\omega}(B) \setminus M} \subset \overline{\widetilde{\omega}(B)} = \widetilde{\omega}(B)$, já que $\widetilde{\omega}(B)$ é compacto.

Agora observe que se o fecho de um conjunto A atrai B, então o conjunto A também atrai B pois

$$d_H\left(B, \overline{A}\right) = \sup_{x\in B}\left\{d\left(x, \overline{A}\right)\right\} = \sup_{x\in B}\{d(x,A)\} = d_H(B,A).$$

Portanto, $\widetilde{\omega}(B) \setminus M$ atrai B. □

3.4 Existência de atratores globais para sistemas dinâmicos impulsivos

O objetivo principal desta dissertação é formular um teorema que garanta a existência de atratores globais para sistemas dinâmicos impulsivos. Em [9], os autores consideram atratores globais como na Definição 3.14 ao invés da Definição 3.17, isto é, considerando-os como conjuntos compactos ao invés de pré-compactos e, com esta definição, mostraram que a existência de um atrator global compacto equivale à existência de um subconjunto compacto K de X tal que $K \cap M = \emptyset$ e K $\widetilde{T}$-atrai todos os subconjuntos limitados de X. Como vimos no Exemplo 3.16, isso exclui classes importantes de sistemas dinâmicos impulsivos, a saber, aqueles que contêm uma órbita periódica com pontos de M em seu conjunto de ω-limites e, também, o comportamento assintótico, no caso do atrator compacto, não é diferente do comportamento do semifluxo original T. Além disso, como todo SDI que possui atrator global é necessariamente limitado dissipativo (com o atrator global sendo o pré-atrator), faremos desta propriedade uma suposição inicial para a existência de um atrator global. Agora procuraremos uma condição suficiente para garantir a existência de um atrator global.

Definição 3.32: Um SDI (X,T,M,I) é **sistema dinâmico fortemente limitado dissipativo** se existir um conjunto pré-compacto não-vazio K em X tal que $K \cap M = \emptyset$ e $\widetilde{T}$-absorve todos os subconjuntos limitados de X.

Observe que, se (X,T,M,I) é fortemente limitado dissipativo, então é limitado dissipativo.

Finalmente, enunciamos o teorema principal deste trabalho que garante a existência de um atrator global para um SDI.

Teorema 3.33: *[8, Theorem 4.7] Seja (X,T,M,I) um SDI fortemente limitado dissipativo tal que $I(M) \cap M = \emptyset$, cada ponto em M satisfaz a CETF e existe $\xi > 0$ tal que $\phi(z) \geq \xi$ para todo $z \in I(M)$. Então (X,T,M,I) tem atrator global $\mathscr{A}$. Além disso, se K for um conjunto não-vazio, pré-compacto, $\widetilde{T}$-absorvente tal que $K \cap M = \emptyset$, então $\mathscr{A}$ é dado por $\mathscr{A} = \widetilde{\omega}(K) \setminus M$.*

Demonstração. Como o SDI é fortemente limitado dissipativo, seja K um conjunto não-vazio, pré-compacto, $\widetilde{T}$-absorvente tal que $K \cap M = \emptyset$. Pelas Proposições 3.26 e 3.29, $\widetilde{\omega}(K)$ é $\widetilde{T}$-invariante. Como K é não-vazio, segue da Proposição 3.23 que $\widetilde{\omega}(K)$ é um subconjunto não-vazio, compacto e $\widetilde{\omega}(K) \subset \overline{K}$. Se $\widetilde{\omega}(K) \cap M = \emptyset$, então $\widetilde{\omega}(K) \setminus M$ é não-vazio, e se $\widetilde{\omega}(K) \cap M \neq \emptyset$ então, pelo Lema 3.28, $\widetilde{\omega}(K) \setminus M$ é não-vazio.

Além disso, como $\widetilde{\omega}(K)$ é compacto então

$$\overline{\widetilde{\omega}(K) \setminus M} \subset \overline{\widetilde{\omega}(K)} = \widetilde{\omega}(K),$$

e, assim, $\overline{\widetilde{\omega}(K) \setminus M}$ é compacto. Logo, $\widetilde{\omega}(K) \setminus M$ é um conjunto pré-compacto de X e, pelo Lema 3.30, $\widetilde{\omega}(K) = \overline{\widetilde{\omega}(K) \setminus M}$ o que implica que

$$\widetilde{\omega}(K) \setminus M = \overline{\widetilde{\omega}(K) \setminus M} \setminus M.$$

Resta mostrar que $\widetilde{\omega}(K)\setminus M$ $\widetilde{T}$-atrai todos os subconjuntos limitados de X. Primeiro mostremos que para qualquer subconjunto limitado B de X, $\widetilde{\omega}(B)\subset\widetilde{\omega}(K)$. De fato, se $x\in\widetilde{\omega}(B)$, então existem sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset B$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}_+$ tais que $t_n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$ e $\widetilde{T}(t_n)x_n\xrightarrow{n\to\infty}x$. Como o SDI é fortemente limitado dissipativo, existe $t_B\geq 0$ tal que $\widetilde{T}(t_B)x_n\in K$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e como

$$\widetilde{T}(t_n-t_B)\widetilde{T}(t_B)x_n=\widetilde{T}(t_n)x_n\xrightarrow{n\to\infty}x,$$

temos $x\in\widetilde{\omega}(K)$.

Como $\widetilde{\omega}(K)\setminus M$ contém $\widetilde{\omega}(B)\setminus M$, para todo conjunto limitado $B\subset X$ e, pela Proposição 3.31, $\widetilde{\omega}(B)\setminus M$ $\widetilde{T}$-atrai B, segue que $\widetilde{\omega}(K)\setminus M$ $\widetilde{T}$-atrai todos os subconjuntos limitados de X. $\square$

3.5 Exemplos

Nesta seção apresentamos dois exemplos tomados de [8] para ilustrar a teoria desenvolvida.

Exemplo 3.34: Considerar o sistema dinâmico impulsivo em $X=\mathbb{R}^2$ dado por

$$\begin{cases}\dot{x}=-x,\\ \dot{y}=-y,\\ (x(0),y(0))=(x_0,y_0),\\ I\colon M\to I(M)\end{cases}\tag{3.6}$$

onde $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2=1\}$, $I(M)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\geq 0 \text{ e } x^2+y^2=9\}$ e a função $I\colon M\to I(M)$ é dada da seguinte forma: dado $(x,y)\in M$, consideramos o segmento de reta $\Gamma_{(x,y)}$ que liga os pontos (x,y) e $(3,y)$. O ponto $I(x,y)$ é o ponto na interseção $\Gamma_{(x,y)}\cap I(M)$, isto é, $I(x,y)=(\sqrt{x^2+8},y)$, ver Figura 3.5.

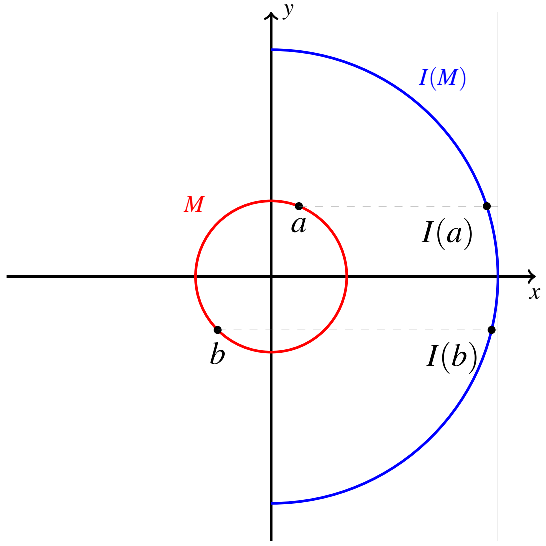


Figura 3.5: Função de impulso.

Seja $\{T(t): t \geq 0\}$ um semigrupo em $\mathbb{R}^2$ gerado por (3.6) sem impulso, isto é,

$$T(t)(x_0, y_0) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^{-t})$$

e note que $T(t)(x,y) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e o conjunto $\{(0,0)\}$ é o atrator global deste semigrupo. Veja figura a seguir.

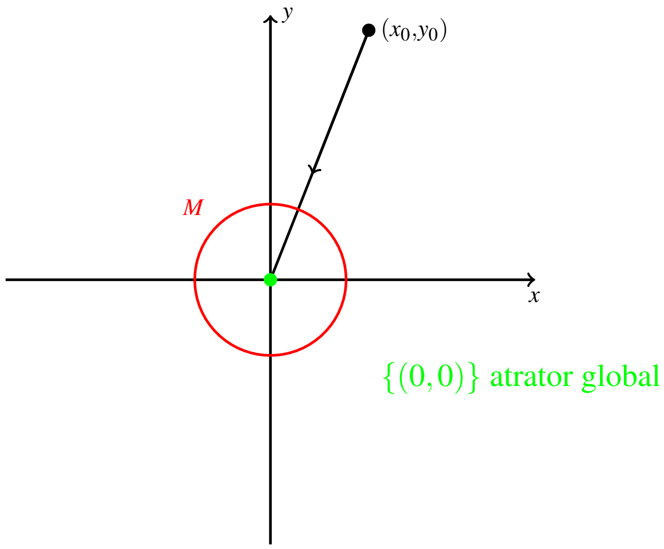


Figura 3.6: Atrator global do semigrupo contínuo.

Agora, considere o SDI (X,T,M,I). É claro que $I(M) \cap M = \emptyset$. Primeiramente, provemos que cada ponto em M satisfaz a CETF e que existe $\xi > 0$ tal que $\phi(x,y) \geq \xi$ para todo $(x,y) \in I(M)$.

- Todo ponto $(x,y) \in M$ satisfaz a CETF. De fato, seja $(x,y) \in M$ um ponto fixado e note que para todo $t \geq 0$, $T(t)$ é uma função bijetiva. Defina

$$\theta = \begin{cases} \arctan(y/x), & \text{se } x \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \text{ e } y \geq 0, \\ \dfrac{3\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0, \end{cases}$$

  Sejam $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$ e $g\colon [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon] \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ e tome $\lambda = \frac{1}{2}$, $S = Im(g)$ imagem de g, e $L = T(\lambda)S$. Veja que S e L são conjuntos fechados e $T(\lambda)^{-1}(L) = T(\lambda)T(\lambda)^{-1}S = S$, pois T é bijetiva. Além disso, $S = F(L,[0,2\lambda]) \cap M$ e $I(M) \cap F(L,[0,\lambda]) = \emptyset$.

- Existe $\xi > 0$ tal que $\phi(x,y) \geq \xi$ para todo $(x,y) \in I(M)$. Sejam $(x,y) \in I(M)$ qualquer, isto é, $x \geq 0$ e $x^2 + y^2 = 9$ e $t = \phi(x,y)$. Então, $T(t)(x,y) \in M$, isto é, $(xe^{-t})^2 + (ye^{-t})^2 = 1$, ou seja,

$$e^{-2t}(x^2+y^2) = e^{-2t}(9) = 1 \Leftrightarrow e^{-2t} = 3^{-2} \Leftrightarrow \ln(e^{-2t}) = \ln(3^{-2}) \Leftrightarrow -2t = -2\ln 3.$$

  Portanto, $t = \ln 3$. Todos os pontos $(x,y) \in I(M)$ atingem M pela primeira vez no instante $t = \ln 3$, então basta tomar $\xi = \ln 3 > 0$.

Agora, seja $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 9\} \setminus M$, e note que K é um subconjunto pré-compacto de $\mathbb{R}^2$, $K \cap M = \emptyset$ e $\widetilde{T}$-absorve todos os subconjuntos limitados de X. Portanto, o SDI (X,T,M,I) é fortemente limitado dissipativo e, pelo Teorema 3.33, possui atrator global dado por $\mathscr{A} = \widetilde{\omega}(K) \setminus M$.

Podemos ver que $\widetilde{\omega}(K) = \{(0,0)\} \cup \{(x,0) \colon x \in [1,3]\}$ e assim, $\mathscr{A} = \{(0,0)\} \cup \{(x,0) \colon x \in (1,3]\}$, conforme figura abaixo.

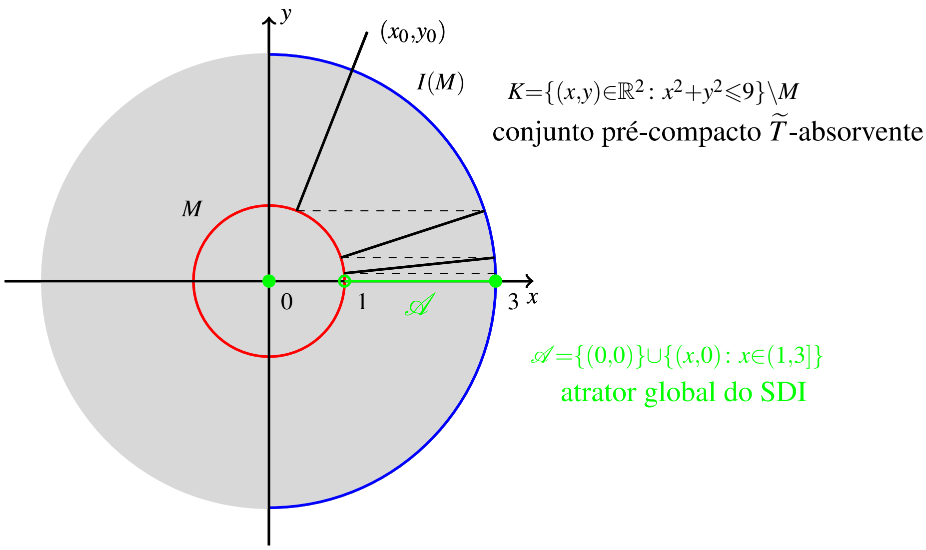


Figura 3.7: Trajetória impulsiva e atrator global para o SDI.

Exemplo 3.35: Considere o sistema dinâmico gerado por

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Supomos que todas as soluções de (3.7) são definidas em todo $\mathbb{R}$ e dão origem a um semigrupo T em $\mathbb{R}^n$.

Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto impulsivo e $I \colon M \to \mathbb{R}^n$ uma função impulsiva tais que $I(M) \cap M = \emptyset$, cada ponto de M satisfaz a CETF e existe $\xi > 0$ tal que $\phi(x) \geq \xi$ para todo $x \in M$. Além disso, supomos que as condições (3.2) e (G) são satisfeitas.

Então, consideramos o sistema impulsivo associado

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \\ I \colon M \to \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.8}$$

Agora, seja $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ uma função que satisfaça as seguintes condições:

i) $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq \alpha_1 - \alpha_2 V(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

ii) $V(I(x)) \leq \mu$, para todo $x \in M$;

iii) $V^{-1}\left(\left(-\infty, \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right]\right)$ é limitado;

onde $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ e $\mu > 0$.

No que segue, forneceremos condições para que o sistema (3.8) seja fortemente limitado dissipativo.

Lema 3.36: *Se $z \in I(M)$ então $V(\widetilde{T}(t)z) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Seja $z \in I(M)$ e $0 \leq t \leq \phi(z)$ (Se $\phi(z) = \infty$ tomamos $0 \leq t < \phi(z)$). Então,

$$\frac{d}{dt}V(T(t)z) = \nabla V(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \nabla V(T(t)z)) \cdot f(T(t)z) \leq \alpha_1 - \alpha_2 V(T(t)z).$$

Logo, fazendo $y(t) = V(T(t)z)$

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) + \alpha_2 y(t) \leq \alpha_1 &\Longleftrightarrow e^{\alpha_2 t}(\dot{y} + \alpha_2 y(t)) \leq \alpha_1 e^{\alpha_2 t} \\
&\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}(e^{\alpha_2 t}y(t)) \leq \alpha_1 e^{\alpha_2 t} \\
&\Longleftrightarrow e^{\alpha_2 t}y(t) - y(0) \leq \alpha_1 \int_0^t e^{\alpha_2 s} ds \\
&\Longleftrightarrow y(t) \leq e^{-\alpha_2 t}y(0) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$V(T(t)z) \leq e^{-\alpha_2 t}V(z) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leq V(z) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \text{ para todo } 0 \leq t \leq \phi(z),$$

o que implica que

$$V(\widetilde{T}(t)z) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \text{ para todo } 0 \leq t < \phi(z).$$

Se $\phi(z) = \infty$, a demonstração acabou. Caso contrário, como $z_1^+ = \widetilde{T}(\phi(z))z \in I(M)$, podemos repetir o processo acima a partir de z_1^+ indutivamente e como a condição (G) é cumprida o t pode variar em todo $\mathbb{R}_+$, obtendo assim o resultado desejado. $\square$

Teorema 3.37: *O sistema (3.8) é fortemente limitado dissipativo.*

Demonstração. Seja $K = V^{-1}\left(\left(-\infty, \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right]\right) \setminus M$. Por iii) K é limitado em $\mathbb{R}^n$ logo é pré-compacto e $K \cap M = \emptyset$. Resta mostrar que K $\widetilde{T}$-absorve subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$ e, para isso, é suficiente provar que para cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ existe $\delta_x > 0$ e $p = p(x, \delta_x) \geq 0$ tal que

$$\widetilde{T}(t)y \in K, \text{ para todo } y \in B_{\delta_x}(x) \text{ e } t \geq p.$$

Faremos isto por casos.

Caso 1: Se $x \notin M$ e $\phi(x) = \infty$.

Seja B uma bola centrada em x. Como V é contínua e $\overline{B}$ é compacto então existe $\beta = \max_{y \in \overline{B}} V(y)$. Seja $k > \max\left\{0, -\alpha_2^{-1}\ln\left(\frac{\mu}{|\beta|+1}\right)\right\}$ dado, pela continuidade de ϕ em x, existe $\delta = \delta(x,k) > 0$ tal que $\phi(y) > k$ para todo $y \in B_\delta(x) \subset \overline{B}$. Seja $B_\delta(x) = B_1 \cup B_2$ onde $B_1 = \{y \in B_\delta(x) \colon \phi(y) = \infty\}$ e

$B_2 = \{y \in B_\delta(x) \colon k < \phi(y) < \infty\}$.

Em B_1. Seja $y \in B_1$ qualquer, usando os argumentos da prova do Lema 3.36, temos

$$V(T(t)y) \leq e^{-\alpha_2 t}V(y) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leq \beta e^{-\alpha_2 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Seja $P = \max\left\{0, -\alpha_2^{-1}\ln\left(\frac{\mu}{|\beta|+1}\right)\right\}$. Se $P = 0$, logo $\ln\left(\frac{\mu}{|\beta|+1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\mu}{|\beta|+1} \geq 1 \Rightarrow u \geq |\beta|+1 > |\beta|$, então

$$V(T(t)y) \leq \beta e^{-\alpha_2 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leq |\beta|e^{-\alpha_2 P} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = |\beta| + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

para todo $t \geq P$ e $y \in B_1$.

Se $P = -\alpha_2^{-1}\ln\left(\frac{\mu}{|\beta|+1}\right)$, então

$$V(T(t)y) \leq \beta e^{-\alpha_2 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leq |\beta|e^{-\alpha_2 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leq |\beta|e^{-\alpha_2 P} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\mu|\beta|}{|\beta|+1} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

para todo $t \geq P$ e $y \in B_1$. Portanto,

$$V(T(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \text{ para todo } t \geq P \text{ e } y \in B_1,$$

como $y \in B_1$, isto é, $\phi(y) = \infty$, $T(t)y = \widetilde{T}(t)y$ para todo $t \geq 0$. Portanto,

$$V(\widetilde{T}(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \text{ para todo } t \geq P \text{ e } y \in B_1.$$

Em B_2, vemos que

$$V(T(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \text{ para todo } k \leq t \leq \phi(y) \text{ e } y \in B_2,$$

e o Lema 3.36 mostra que $V(\widetilde{T}(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, para todo $t \geq \phi(y)$ e $y \in B_\delta(x)$.

Caso 2: Se $x \notin M$ e $\phi(x) < \infty$.

Pela continuidade de ϕ em x, existe $\delta_x > 0$ tal que $|\phi(y) - \phi(x)| < 1$ se $y \in B_{\delta_x}(x)$, então $\phi(y) < 1 + \phi(x)$ para todo $y \in B_{\delta_x}(x)$. Tomamos $p = \sup\{\phi(y) \colon y \in B_{\delta_x}(x)\} \leq 1 + \phi(x) < \infty$, então para todo $t \geq p$ e $y \in B_{\delta_x}(x)$ existem $s \geq 0$ e $z \in I(M)$ tal que $\widetilde{T}(t)y = \widetilde{T}(s)z$ e pelo Lema 3.36

$$V(\widetilde{T}(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \text{ para todo } t \geq p.$$

Caso 3: Se $x \in M$ e $\phi(x) = \infty$.

O ponto x satisfaz CETF com λ-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ e uma seção S através de x. Como o tubo contém uma vizinhança de x, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(x) \subset F(L, [0, 2\lambda]).$$

Sejam
$$H_1 = F(L,(\lambda,2\lambda]) \cap B_\varepsilon(x) \text{ e } H_2 = F(L,[0,\lambda]) \cap B_\varepsilon(x).$$

Afirmação: $\phi(y) \leq \lambda$ para todo $y \in H_1$. De fato, seja $y \in H_1$ qualquer, então $y \in F(L,(\lambda,2\lambda])$, isto é, $T(u)y \in L$ para algum $\mu \in (\lambda,2\lambda]$ e assim $T(\mu-\lambda)y \in F(L,\lambda) = S \subset M$. Portanto, temos $\phi(y) \leq \mu - \lambda \leq \lambda$ pois $\mu \leq 2\lambda$.

Como para todo $y \in B_1$, $\phi(y) \leq \lambda$, então dado $t \geq \lambda$ existem $s \geq 0$ y $z \in I(M)$ tal que $\widetilde{T}(t)y = \widetilde{T}(s)z$ e pelo Lema 3.36 obtemos

$$V(\widetilde{T}(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \text{ para todo } y \in H_1 \text{ e para todo } t \geq \lambda.$$

Por outro lado, como $\phi(x) = \infty$, para todo $k > 0$ existe $0 < \delta = \delta(x,k,\varepsilon) < \varepsilon$ tal que $\phi(y) > k$ para todo $y \in B_\delta(x) \cap H_2$. De fato, suponha, ao contrário da afirmação, que existem $k_0 > 0$ e uma sequência $x_n \in H_2$ tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $\phi(x_n) \leq k_0$. Como $x_n \in H_2$ então existe $\lambda_n \in [0,\lambda]$ tal que $T(\lambda_n)x_n \in L$.

Podemos escolher uma subsequência se necessário tais que $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ e $\phi(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pois como $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\lambda]$ existe uma subsequência que denotamos da mesma forma tal que $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\lambda} \in [0,\lambda]$, como $\{T(\lambda_n)x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L$ que é um conjunto fechado, $T(\lambda_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(\overline{\lambda})x \in L$, então $x \in F(L,\overline{\lambda})$ e como $x \in S = F(L,\lambda)$, logo $\overline{\lambda} = \lambda$. Analogamente como $\{\phi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,k_0]$ existe uma subsequência tal que $\phi(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \in [0,k_0]$, suponha que $a \neq 0$, isto é, $a > 0$ e como $\{T(\phi(x_n))x_n\}_{n\in N} \subset M$ que é um conjunto fechado logo $T(\phi(x_n))x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(a)x \in M$ então $\phi(x) \leq a$ que é uma contradição pois $\phi(x) = \infty$, logo $a = 0$.

Portanto, temos para n grande

$$\phi(x_n) < \lambda \text{ e } T(\phi(x_n))x_n \in F(L,[0,2\lambda]) \cap M = S = F(L,\lambda).$$

Como $T(\lambda_n)x_n \in L = F(L,0)$ logo $x_n \in F(L,\lambda_n)$ e $T(\phi(x_n))x_n \in F(L,\lambda)$ então $x_n \in F(L,\lambda + \phi(x_n))$ assim, $\lambda_n = \lambda + \phi(x_n)$, o que contradiz o fato que $\lambda_n \in [0,\lambda]$.

Portanto, na mesma forma que na prova do Caso 1, podemos escolher $\delta > 0$ e $P > 0$ tal que

$$V(\widetilde{T}(t))y \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

para todo $y \in B_\delta(x) \cap H_2$ e para todo $t \geq P$.

Assim, obtemos
$$V(\widetilde{T}(t))y \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$
para todo $y \in B_\delta(x)$ e para todo $t \geq p = \max\{\lambda, P\}$.

Caso 4: Se $x \in M$ e $\phi(x) < \infty$.

A prova segue a ideia da prova do Caso 3. A única diferença é que usamos a semicontinuidade superior de ϕ em $x \in M$ e a prova do Caso 2 para mostrar que existem $\delta > 0$ e $P = P(x, \delta) > 0$ tal que

$$V(\widetilde{T}(t)y) \leq \mu + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

para todo $y \in B_\delta(x) \cap H_2$ e para todo $t \geq P$. Quando trabalhamos em H_1, a prova é a mesma que a apresentada no Caso 3.

Isso conclui todos os casos possíveis e prova que o sistema (3.8) é fortemente limitado dissipativo e pelo Teorema 3.33 tem atrator global. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Ahmed, N. U.: *Existence of optimal controls for a general class of impulsive systems on Banach spaces*. SIAM Journal on Control and Optimization, 42(2):669–685, 2003. https://doi.org/10.1137/S0363012901391299.

[2] Ambrosino, R., F., Calabrese, Cosentino, C. e Tommasi, G. De: *Sufficient conditions for finite-time stability of impulsive dinamical syustems*. IEEE transactions on automatic control, 54:861–685, 2009. https://doi.org/10.1109/TAC.2008.2010965.

[3] Bainov, D. D. e Simeonov, P. S.: *Systems with impulse effect. Stability, theory and applications*. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 71(10), 1989. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/zamm.19910711016.

[4] Barreira, L. e Valls, C.: *Lyapunov regularity of impulsive differential equations*. Journal of Differential Equations, 249(7):1596–1619, 2010, ISSN 0022-0396. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039610002445.

[5] Benchohra, M., Henderson, J. e Ntouyas, S.: *Impulsive differential equations and inclusions*. Hindawi Publishing Corporation, New York, 2006.

[6] Birkhoff, G. e Rota, G.: *Ordinary differential equation*. Jhon Wiley & Sons, New York, 1989.

[7] Bonotto, E. M.: *Flows of characteristic* $0+$ *in impulsive semidynamical systems*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 332(1):81–96, 2007, ISSN 0022-247X. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X06010961.

[8] Bonotto, E. M., Bortolan, M. C., Carvalho, A. N. e Czaja, R.: *Global attractors for impulsive dynamical systems – a precompact approach*. Journal of Differential Equations, 259(7):2602–2625, 2015, ISSN 0022-0396. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039615001813.

[9] Bonotto, E. M. e Demuner, D. P.: *Attractors of impulsive dissipative semidynamical systems*. Bulletin des Sciences Mathématiques, 137(5):617–642, 2013, ISSN 0007-4497. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0007449712001169.

[10] Bonotto, E. M. e Demuner, D. P.: *Autonomous dissipative semidynamical systems with impulses*. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 41(1):1–38, 2013.

[11] Bonotto, E. M. e Federson, M.: *Topological conjugation and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 326(2):869–881, 2007, ISSN 0022-247X. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X06002952.

[12] Bonotto, E. M. e Grulha Jr, N. G.: *Lyapunov stability of closed sets in impulsive semidynamical systems*. Electronic Journal of Differential Equations, 2010(78):1–18, 2010.

[13] Bouchard, B., Dang, N. M. e Lehalle, C. A.: *Optimal control of trading algorithms: a general impulse control approach*. SIAM Journal on Financial Mathematics, 2(1):404–438, 2011. https://doi.org/10.1137/090777293.

[14] Ciesielski, K.: *Sections in semidynamical systems*. Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics, 40:297–307, 1992.

[15] Ciesielski, K.: *On semicontinuity in impulsive dynamical systems*. Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics, 52(1):71–80, 2004, ISSN 0239-7269.

[16] Ciesielski, K.: *On stability in impulsive dynamical systems*. Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics, 52:81–91, 2004.

[17] Ciesielski, K.: *On time reparametrizations and isomorphisms of impulsive dynamical systems*. Annales Polonici Mathematici, 84(1):1–25, 2004.

[18] Cortés, J.: *Discontinuous dynamical systems*. IEEE Control Systems Magazine, 28(3):36–73, 2008, ISSN 1941-000X.

[19] Davis, M. H. A., Guo, X. e Guoliang, W.: *Impulse control of multidimensional jump diffusions*. SIAM Journal on Control and Optimization, 48(8):5276–5293, 2010. https://doi.org/10.1137/090780419.

[20] Feroe, J. A.: *Existence and Stability of Multiple Impulse Solutions of a Nerve Equation*. SIAM Journal on Applied Mathematics, 42(2):235–246, 1982. https://doi.org/10.1137/0142017.

[21] Haddad, W. M. e Hui, Q.: *Energy dissipating hybrid control for impulsive dynamical systems*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 69(10):3232–3248, 2008, ISSN 0362-546X. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0362546X07006104.

[22] Hale, J. K.: *Ordinary Differential Equations*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, New York, 2009, ISBN 9780486472119. https://books.google.com.br/books?id=LdTZJ4HwCv4C.

[23] Kaul, S. K.: *On impulsive semidynamical systems*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 150(1):120–128, 1990, ISSN 0022-247X. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022247X9090199P.

[24] Kaul, S. K.: *On impulsive semidynamical systems. II: Recursive properties*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 16(7):635–645, 1991, ISSN 0362-546X. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0362546X9190171V.

[25] Kaul, S. K.: *Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems*. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 7:509–523, janeiro 1994.

[26] Lakshmikantham, V., Bainov, D. D. e Simeonov, P. S.: *Theory of impulsive differential equations*. WORLD SCIENTIFIC, 1989. https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/0906.

[27] Lima, E. L.: *Espaços Métricos*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 5ª edição, 2017, ISBN 978-85-244-0158-9.

[28] Munkres, J. R.: *Topology*. Topology. Prentice–Hall, New Jersey, 2000, ISBN 9780131784499.

[29] Rožko, V. F.: *A certain class of almost periodic motions in systems with pulses*. Differential'nye uravnenie, 8:2012–2022, 1972.

[30] Rožko, V. F.: *Ljapunov stability in discontinuous dynamic systems*. Differencial'nye Uravnenija, 11:1005–1012, 1975.

[31] Rudin., W.: *Principles of Mathematical Analysis*. McGram-Hill, 1976.

Índice Remissivo