

Wendy Díaz Valdés

Curvatura e valores atípicos de funções polinomiais.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE MATEMÁTICA
2021

WENDY DÍAZ VALDÉS

Curvatura e valores atípicos de funções polinomiais.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Teoria de singularidades.

Orientador: Prof. Dr. Luis Renato Gonçalves Dias.

UBERLÂNDIA - MG
2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

V145 2021	<p>Valdés, Wendy Díaz, 1995- Curvatura e valores atípicos de funções polinomiais [recurso eletrônico] / Wendy Díaz Valdés. - 2021.</p> <p>Orientador: Luis Renato Gonçalves Dias. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática. Modo de acesso: Internet. Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.65 Inclui bibliografia. Inclui ilustrações.</p> <p>1. Matemática. I. Dias, Luis Renato Gonçalves, 1982-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós- graduação em Matemática. III. Título.</p>
--------------	--

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 160 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.posgrad.famat.ufu.br - pgsamat@famat.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 93, PPGMAT				
Data:	19 de fevereiro de 2021	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	15:30
Matrícula do Discente:	11912MAT011				
Nome do Discente:	Wendy Díaz Valdés				
Título do Trabalho:	Curvatura e valores atípicos de funções polinomiais				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Geometria e Topologia				
Projeto de Pesquisa de vinculação:					

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Mconf-RNP, em conformidade com a PORTARIA Nº 36, DE 19 DE MARÇO DE 2020 da COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR - CAPES, pela Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Camila Mariana Ruiz - ICTE/UFTM; Luis Florial Espinoza Sánchez - FAMAT/UFU e Luis Renato Gonçalves Dias - FAMAT/UFU orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Luis Renato Gonçalves Dias, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Luis Florial Espinoza Sanchez, Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/02/2021, às 16:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luis Renato Gonçalves Dias, Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/02/2021, às 16:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Camila Mariana Ruiz, Usuário Externo**, em 19/02/2021, às 16:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2512379** e o código CRC **3CC6E0AD**.

Dedicatória

A minha sobrinha Mariana Valdés

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer ao professor Dr. Luis Renato Gonçalves Dias pela sua infinita paciência, à sua sabedoria, por toda dedicação, ensinamentos, conselhos e incentivo. As suas críticas construtivas, as discussões e reflexões foram fundamentais para meu crescimento como profissional.

Deixo também um agradecimento especial para minha mãe, meu maior exemplo. Sou grata pelo incentivo, por todas as lições de vida. Por nunca medir esforços para me ensinar o caminho do bem, e sempre me apoiar. Sem você, eu não chegaria até aqui. Muito obrigada por tudo!

Ao Dênis, pelo encorajamento, paciência, compreensão e disponibilidade demonstrados durante a realização deste trabalho. Muito obrigada pelo apoio constante nas grandes e pequenas coisas.

Aos membros da banca examinadora que tão gentilmente aceitaram participar e colaborar com esta dissertação.

À Universidade Federal de Uberlândia, aos professores da FAMAT em geral por todo o aprendizado. Também ao apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, por me dar essa oportunidade.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, muito obrigada!

Valdés, W. D. *Curvatura e valores atípicos de funções polinomiais*. 2021. (36 páginas) p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste estudo apresentamos, de forma detalhada, os resultados expostos por Vincent Grandjean no seu artigo “*Tame functions with strongly isolated singularities at infinity: a tame version of a Parusiński’s theorem*”. Grandjean prova que se a função curvatura total absoluta é contínua em um valor regular c que satisfaz a condição **SISI**, então c não é um valor de bifurcação da função h . Como este resultado sempre vale para funções polinomiais com singularidades fortemente isoladas no infinito, podemos vê-lo como uma versão real do Teorema de Parusiński exposto no seu artigo “*On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity*”.

Palavras-chave: conjunto de bifurcação, singularidades no infinito, função curvatura total absoluta, espaço conormal, fibrado conormal.

Valdés, W. D. *Curvature and atypical values of polynomial functions*. 2021. (36 pages) p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work, we discuss the results exposed by Vincent Grandjean in “*Tame functions with strongly isolated singularities at infinity: a tame version of a Parusiński’s theorem*”. Grandjean proved that if the total absolute curvature function is continuous at a regular value c that satisfies the **SISI** condition, then c is not a bifurcation value of the function h . As this result always applies to polynomial functions with strongly isolated singularities at infinity, we can assume that it is a real version of Parusiński’s theorem exposed in “*On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity*”.

Keywords: bifurcation set, singularities at infinity, total absolute curvature function, conormal space, conormal bundle.

Sumário

Resumo	ix
Abstract	x
Introdução	1
1 Conceitos básicos	3
1.1 Conjuntos Semialgébricos.	3
1.2 Medida, distância e limite de Hausdorff.	6
2 Funções curvatura total absoluta e curvatura total.	8
2.1 Curvatura total e curvatura total absoluta.	8
2.2 Uma caracterização para as funções curvaturas	9
3 Fibrado conormal e valores de bifurcação	14
3.1 Geometria conormal.	14
3.2 Valores de bifurcação e valores críticos assintóticos.	15
4 Teorema Principal	20
4.1 Condição SISI	20
4.2 Demonstração do Teorema 4.3, teorema principal do trabalho.	21

Introdução

A Teoria da Bifurcação é uma área de pesquisa da Matemática que, do ponto de vista da Teoria de Singularidades, estuda as alterações na estrutura topológica de uma determinada família. Para esta dissertação a família em questão é o conjunto dos valores regulares de uma função polinomial real, com foco em certas condições que caracterizam valores de bifurcação. Sendo assim, apresentamos a seguinte definição:

Definição 0.1. *Seja $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. O conjunto de bifurcação da função h , ou valores atípicos da função h , denotado por $B(h)$, é o menor subconjunto de \mathbb{R} de modo que para cada $c \notin B(h)$, existe uma vizinhança aberta U de c que não intercepta $B(h)$ e a restrição de h a $h^{-1}(U)$ induz uma fibração C^∞ sobre U .*

Lembrando que uma aplicação $h: M \rightarrow N$, com M, N variedades, é uma fibração, se existem uma variedade F e um homeomorfismo $\phi: F \times N \rightarrow M$ tais que $h \circ \phi(q, p) = p$ para todo $(q, p) \in F \times N$. Para mostrar que uma função é uma fibração, em 1950, o francês Charles Ehresmann mostrou que toda submersão própria é uma fibração localmente trivial sobre N , veja por exemplo [11].

No início dos anos 80, Broughton [4], Frédéric Pham [24], Ha Huy Vui e Le Dung Trang [16] foram um dos pioneiros no estudo de fibrações polinomiais do ponto de vista deste trabalho. Em seguida, outros matemáticos desenvolveram importantes resultados para estas fibrações que estão relacionados com este trabalho. Alguns deles são Didier D'acunto, Mihai Tibăr, Laurențiu Păunescu, Alexandru Zaharia, Adam Parusiński, Vincent Grandjean, etc... Daí decorre o resultado de Grandjean que com certas hipóteses a fibração vai acontecer perto de um valor c .

Esta dissertação, tem como objetivo compreender os resultados e ferramentas utilizados por Vincent Grandjean em [14] para provar o seguinte teorema:

Teorema 0.2 ([14]). *Seja $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Suponha que a função h satisfaz a condição **SISI** em um valor regular c . Se a função $t \rightarrow |K|(t)$ for contínua em c , então trivializamos h sobre uma vizinhança de c por meio do fluxo de um campo vetorial C^∞ . Em particular, $c \notin B(f)$.*

A ideia da prova é obter a trivialização de h através do fluxo de um campo de vetores construído a partir de aplicações gaussianas. Ou seja, mostrar que a função h é uma fibração em um valor c .

Este trabalho foi organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, apresentamos as definições de conjunto semialgébrico, dimensão semialgébrica e aplicações semialgébicas que serão utilizadas no decorrer do trabalho. Em seguida expomos as definições de medida, distância e limite de Hausdorff que são importantes para a demonstração e melhor compressão de resultados dos capítulos posteriores.

No Capítulo 2, apresentamos a definição de função curvatura total absoluta, Definição 2.3, e alguns dos seus resultados mais relevantes para este trabalho.

No Capítulo 3, apresentamos parte da teoria da Geometria Conormal que está relacionada com a Definição 4.1. Além disso, apresentamos as definições de conjunto de valores de

bifurcação, condição de Malgrange e valores críticos assintóticos, Definições 3.4, 3.5 e 3.6 respectivamente. Além disso exibimos alguns resultados relacionados com estes conceitos.

No Capítulo 4, apresentamos a definição de um valor regular ter a condição **SISI**, Definição 4.1, e exibimos o Teorema 4.3. Este último é o resultado principal de Grandjean do artigo [14]. As demais seções deste capítulo fazem a demonstração e uma análise deste teorema.

Wendy Díaz Valdés
Uberlândia-MG, 19 de Fevereiro de 2021.

Capítulo 1

Conceitos básicos

Este capítulo está dividido em duas seções. Primeiro, apresentamos conceitos e resultados básicos de conjuntos semialgêbricos. Em particular apresentamos o princípio uniforme de Gabrielov. Na segunda seção relembramos os conceitos de medida e limite de Hausdorff.

1.1 Conjuntos Semialgêbricos.

As principais referências para esta seção são: [2] e [12].

Nesta seção, denotamos por $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ o anel das funções polinomiais com coeficientes reais e n variáveis. Dados $a \in \mathbb{R}^n$ e um número real $r > 0$ definimos a bola aberta de centro a e raio r em \mathbb{R}^n como $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, |x - a| < r\}$.

Analogamente, definimos a bola fechada de centro a e raio r em \mathbb{R}^n como $B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n, |x - a| \leq r\}$ e a esfera de centro a e raio r em \mathbb{R}^n como $\mathbb{S}_r^n a = S[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n, |x - a| = r\}$.

Começamos com a definição de conjuntos semialgêbricos.

Definição 1.1 ([2, Definition 2.1.4]). *Um conjunto semialgêbrico do \mathbb{R}^n é um subconjunto da forma*

$$\bigcup_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n; h_{i,j} * 0\},$$

onde $h_{i,j} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ e $*$ representa qualquer um dos símbolos $>$ ou $=$, para $i = 1, \dots, s$ e $j = 1, \dots, r_i$.

Exemplo 1.2. *Os conjuntos semialgêbricos de \mathbb{R} são exatamente uniões finitas de pontos e intervalos (limitados ou ilimitados).*

Conjuntos semialgêbricos são fechados por interseção finita, união finita e complementar. Temos também que, o fecho, o interior e a fronteira de conjuntos semialgêbricos são conjuntos semialgêbricos.

A seguir, apresentamos alguns resultados clássicos de conjuntos semialgêbricos que serão utilizados ao longo da dissertação.

- i. Todo conjunto semialgêbrico de \mathbb{R}^n possui um número finito de componentes conexas que são também conjuntos semialgêbricos, [2, Theorem 2.4.5];
- ii. O conjunto dos pontos equidistantes de dois conjuntos semialgêbricos é um conjunto semialgêbrico, [2, Example 2.1.5];
- iii. Os subconjuntos $B(a, r)$ e $\mathbb{S}_r^n a$ são conjuntos semialgêbricos. Consequentemente $\overline{B(a, r)}$ também é, [2, Definition 2.1.9].

A seguir, apresentamos a definição de dimensão de conjuntos semialgéblicos. Seguindo [12, (2.4)], temos que todo conjunto semialgéblico não vazio tem pelo menos um ponto regular. De fato, o conjunto dos pontos regulares de um conjunto semialgéblico A é denso em A . Seguindo [12, Página 18], temos:

Definição 1.3. *Seja A um conjunto semialgéblico de \mathbb{R}^n . A dimensão de A é definida como sendo a dimensão máxima dos pontos regulares de A . Denotamos por $\dim A$ a dimensão de A .*

O próximo exemplo mostra que o conjunto dos pontos regulares de um conjunto semialgéblico não precisa ser equidimensional.

Exemplo 1.4. *Considere $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z(x^2 + y^2) = 0\}$. Temos que $(0, 0, 0)$ é o único ponto crítico de A . Para os demais pontos de A , que são pontos regulares, temos as seguintes componentes conexas*

$$\{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\} \setminus \{(0, 0, 0)\} \cup \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}^*\}.$$

que possuem respectivamente dimensão dois e um, Figura 1.1.

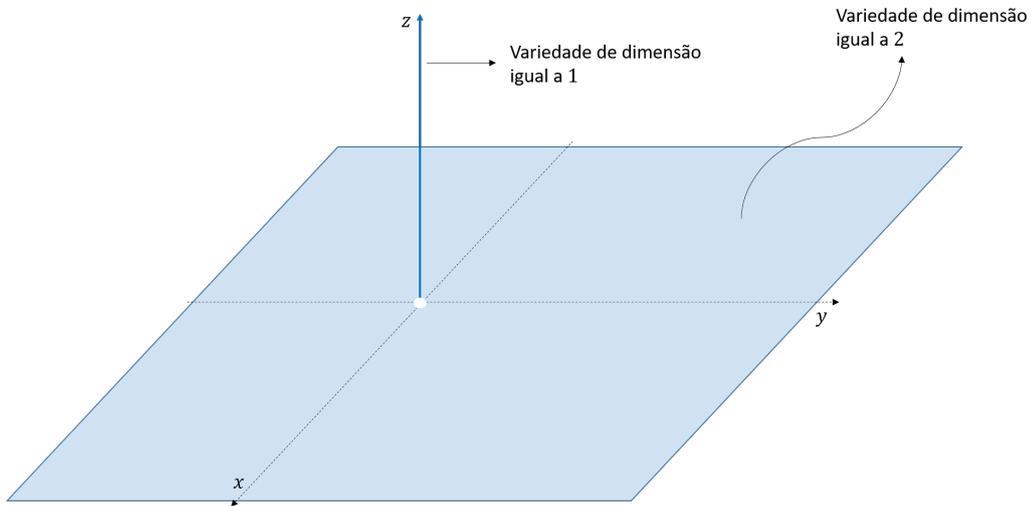


Figura 1.1: Componentes conexas dos valores regulares de $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z(x^2 + y^2) = 0\}$.

Pela definição de dimensão, segue que a dimensão semialgéblica de A é a dimensão máxima dos pontos regulares. Ou seja, $\dim A = 2$.

Algumas das propriedades da dimensão de um conjunto semialgéblico são:

- i. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto semialgéblico, então $\dim A = \dim \bar{A}$.
- ii. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto semialgéblico não vazio e aberto, então $\dim U = n$.
- iii. Se $A = \bigcup_{i=1}^p A_i$ é uma união finita de conjuntos semialgéblicos, então $\dim A = \max\{\dim A_1, \dots, \dim A_p\}$.
- iv. Se A e B são semialgéblicos, então $\dim A \times B = \dim A + \dim B$.

A seguir apresentamos a noção de função semialgéblica, veja por exemplo [2, Definition 2.2.5]:

Definição 1.5. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ dois conjuntos semialgéblicos. A função $h: A \rightarrow B$ é semialgéblica se seu gráfico é um conjunto semialgéblico em \mathbb{R}^{m+n} .*

Exemplo 1.6. *Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Temos que f é uma função semialgébrica.*

A seguir apresentamos exemplos de funções semialgébricas que serão utilizados ao longo da dissertação.

Exemplo 1.7. i. *A função distância de $x \in \mathbb{R}^n$ a um conjunto semialgébrico $A \subset \mathbb{R}^n$ é uma função semialgébrica.*

ii. *Seja $h:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função semialgébrica diferenciável em $]a, b[$. Então sua derivada é uma função semialgébrica, veja por exemplo [2, Proposition 2.9.1].*

Pela Definição 1.5, segue que qualquer aplicação polinomial $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma aplicação semialgébrica. Nosso objetivo neste trabalho é compreender o principal resultado de [14], em que V. Grandjean descreve para uma classe de funções polinomiais $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o conjunto de bifurcação (Definição 3.4) em termos de uma condição geométrica. Desta forma, propriedades de funções semialgébricas serão utilizados ao longo da dissertação. A seguir apresentamos algumas destas propriedades.

i. *A composta de funções semialgébricas é semialgébrica. A imagem e a imagem inversa de um conjunto semialgébrico por uma aplicação semialgébrica são conjuntos semialgébricos.*

ii. *Se A é um conjunto semialgébrico e $h: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma aplicação semialgébrica. Então $\dim A \geq \dim h(A)$. Se h for injetora de A à $h(A)$, então $\dim A = \dim h(A)$. [2, Theorem 2.8.8].*

O próximo resultado será utilizada no Capítulo 2, mais precisamente na demonstração das Proposições 2.4 e 2.5.

Teorema 1.8 ([2, Theorem 2.3.6 e Corollary 2.8.9]). *Todo subconjunto semialgébrico A do \mathbb{R}^n é uma união finita de conjuntos semialgébricos homeomorfos a um hipercubo aberto $]0, 1[^{m_i} \subset \mathbb{R}^{m_i}$, para alguns $m_i \in \mathbb{N}, i \leq n$. Neste caso, temos $\dim A = \max_{i \leq n} \{m_i\}$.*

O próximo exemplo ilustra o teorema acima.

Exemplo 1.9. *Considere $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ o qual é semialgébrico. Temos*

i. $M = \{(0, \infty) \times \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, 0) \times \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R} \times (0, \infty)\} \cup \{\mathbb{R} \times (-\infty, 0)\}$, sendo que cada conjunto do lado direito da igualdade é um conjunto semialgébrico;

ii. cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ são homeomorfos a $]0, 1[$ e \mathbb{R} é homeomorfo a $]0, 1[$. Consequentemente, os conjuntos do lado direito do item anterior são homeomorfos a $]0, 1[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$.

Relacionado com o apresentado anteriormente temos um resultado clássico, versão semialgébrica do Teorema de Sard, que será utilizada no Capítulo 2. Para apresentar a versão semialgébrica do Teorema de Sard, apresentamos os próximos conceitos. Uma função de Nash de um subconjunto semialgébrico aberto U do \mathbb{R}^n para \mathbb{R} é uma função semialgébrica de classe C^∞ .

Definição 1.10 ([2, Definition 2.9.9]). *Um subconjunto semialgébrico M de \mathbb{R}^n é uma subvariedade de Nash de \mathbb{R}^n de dimensão d se para todo $x \in M$ existe um difeomorfismo de Nash ϕ de uma vizinhança aberta semialgébrica Ω da origem em \mathbb{R}^n e uma vizinhança aberta semialgébrica Ω' de x em \mathbb{R}^n tal que $\phi(0) = x$ e $\phi((\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap \Omega) = M \cap \Omega'$. Seja M uma variedade de Nash de \mathbb{R}^n . Uma aplicação $h: M \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma aplicação de Nash se é semialgébrica e para todo ϕ como acima, $h \circ \phi$ restrita a Ω é uma aplicação de Nash. Duas variedades de Nash M e M' são Nash difeomorfas se existe uma bijeção $h: M \rightarrow M'$ tal que h e h^{-1} são de Nash.*

A seguir apresentamos a versão semialgébrica do Teorema de Sard, veja por exemplo [2, Theorem 9.6.2].

Teorema 1.11 (Versão semialgébrica do Teorema de Sard). *Seja $h: N \rightarrow M$ uma aplicação de Nash entre variedades de Nash. O conjunto dos valores críticos de h é um conjunto semialgébrico de M com dimensão menor que a dimensão de M .*

Outros resultados que serão utilizados nas demonstrações dos resultados dos próximos capítulos são os seguintes.

Lema 1.12 (Seleção da curva no infinito, veja por exemplo [18, Lemma 3.3]). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\phi: A \rightarrow \mathbb{R}^q$ uma aplicação semialgébrica. Assuma que existe uma sequência $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \in A$ tal que $|x_m| \rightarrow \infty$ e $\phi(x_m) \rightarrow y$, para algum $y \in \mathbb{R}^q$. Então existe uma função semialgébrica $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(t) \in A$, $\lim_{t \rightarrow b} |\alpha(t)| = +\infty$ e $\lim_{t \rightarrow b} \phi(\alpha(t)) = y$.*

Temos que todo conjunto semialgébrico é semianalítico que por sua vez é subanalítico. Logo, lembrando que um subconjunto Y de X é relativamente compacto em X se seu fecho é compacto em X , temos o seguinte resultado.

Teorema 1.13 (Princípio uniforme de Gabrielov, [1, Theorem 3.14]). *Sejam M e N conjuntos semialgébricos reais, e $X \subset M$ um conjunto relativamente compacto. Considere $h: X \rightarrow N$ uma aplicação semialgébrica. Então existe um número natural n tal que o número de componentes conexas da fibra $h^{-1}(y)$ é menor ou igual que n .*

1.2 Medida, distância e limite de Hausdorff.

Um dos conceitos centrais deste trabalho é a função curvatura total absoluta. Para podermos compreender esta função relembramos alguns conceitos da Teoria de Hausdorff.

Definição 1.14 ([5, Páginas 349-350]). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$, $p \geq 0$ e $\delta > 0$ considere*

$$H_\delta^p(A) \equiv \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } C_j)^p ; A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{diam } C_j < \delta \right\},$$

onde $\text{diam } C_j$ denota o diâmetro de C_j .

O limite

$$H^p(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^p(A)$$

é chamado de medida de Hausdorff de dimensão p de A .

Por [7, páginas 96 à 102], temos o seguinte resultado que relaciona a medida de Hausdorff com o volume de uma Variedade Riemanniana em \mathbb{R}^n :

Teorema 1.15. *Seja $M \subset \mathbb{R}^m$ uma variedade n -dimensional C^1 . Então para qualquer aberto relativo $U \subset M$ a sua medida de Hausdorff n dimensional, $H^n(U)$, satisfaz*

$$H^n(U) = \int_U \text{dvol}.$$

Onde dvol é o volume usual de M como variedade Riemanniana em \mathbb{R}^n .

O Teorema 1.15 será usado para calcular a curvatura total absoluta (veja Capítulo 2) sem nos preocupar com a medida de Hausdorff.

A seguir apresentamos a noção de limite de Hausdorff para conjuntos semialgêbricos que será utilizado nos próximos capítulos.

Considere $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ um conjunto semialgêbrico e $\pi: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ a projeção canônica. Temos que $A = \cup A_y$ com $y \in \pi(A) \subset \mathbb{R}^m$ e $A_y = \pi^{-1}(y) \cap A$. O conjunto $\pi(A)$ é chamado de espaço parâmetro.

Definição 1.16 ([3]). *Para quaisquer subconjuntos $M, N \subset \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$ considere $B(M, \varepsilon)$ uma vizinhança aberta com raio ε de M e $B(N, \varepsilon)$ uma vizinhança aberta com raio ε de N . O valor*

$$d(M, N) = \inf\{\varepsilon; M \subset B(N, \varepsilon), N \subset B(M, \varepsilon)\},$$

é chamado da distância de Hausdorff de M até N .

Seja \mathcal{C} a coleção de todos os subconjuntos fechados C de \mathbb{R}^n . Para $\varepsilon, \rho \in \mathbb{R}$, tais que $\varepsilon, \rho > 0$, considere

$$U_{\varepsilon, \rho}(C) = \{C' \in \mathcal{C}; d(C' \cap B_\rho(0), C \cap B_\rho(0)) < \varepsilon\}.$$

Esses conjuntos $U_{\varepsilon, \rho}(C)$, para cada $C \in \mathcal{C}$, serão a base de vizinhança para uma topologia em \mathcal{C} . Considere agora $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência no espaço parâmetro convergindo para y_0 . Se a sequência correspondente $\overline{A_{y_m}}$, onde A_{y_m} é a fibra de y_m , converge em \mathcal{C} , escrevemos $\lim_{y_m \rightarrow y_0} A_{y_m}$. Esse limite é chamado de limite de Hausdorff, veja por exemplo [3]. Terminamos com o seguinte resultado:

Corolário 1.17 ([3, Corollary 2.8]). *Todo limite de Hausdorff $A_0 = \lim_{y_m \rightarrow y_0} A_{y_m}$ é semi-algêbrico e $\dim A_0 \leq \liminf(\dim A_{y_m})$.*

Capítulo 2

Funções curvatura total absoluta e curvatura total.

Dada uma função semialgébrica $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, associamos para cada valor regular t de h um número real $|K|(t)$ definido como curvatura total absoluta do nível $h^{-1}(t)$. De [13], temos que essa curvatura total absoluta está relacionado com volumes $(n - 1)$ -dimensionais de \mathbb{R}^n .

O objetivo deste capítulo é apresentar a definição da função curvatura total absoluta e resultados relacionados a este conceito.

2.1 Curvatura total e curvatura total absoluta.

Dada uma aplicação $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, denotamos por $\text{crit } f$ o conjunto dos pontos críticos de f . Temos a seguinte definição:

Definição 2.1. *Seja $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semialgébrica de classe C^l , com $l \geq 2$. A aplicação de Gauss da função h é definida por*

$$\begin{aligned} \nu_h: \mathbb{R}^n \setminus \text{crit } h &\rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ \nu_h(x) &= \frac{\nabla h(x)}{|\nabla h(x)|}. \end{aligned}$$

Seja t um valor regular da função $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, denotamos por H_t a fibra de $h^{-1}(t)$. Temos que H_t é uma variedade diferenciável orientável de dimensão $n - 1$ de \mathbb{R}^n . Definimos ν_t , a aplicação de Gauss de H_t , como sendo a restrição de ν_h a H_t . Logo, a curvatura gaussiana de H_t em x é

$$k_{H_t}(x) = \det(d_x \nu_t). \quad (2.1)$$

Para simplificar a notação, neste caso, escrevemos $k_t(x)$ no lugar de $k_{H_t}(x)$.

Observamos que como a derivada de uma função semialgébrica é semialgébrica, (veja Exemplo 1.7 item [ii.]), cada coordenada do gradiente da função h é semialgébrica e conseqüentemente ν_h é semialgébrica de classe C^{l-1} . Como o conjunto dos pontos críticos é um conjunto semialgébrico, temos que $\nu_h(\text{crit } \nu_h)$ é também semialgébrico. Pelo Teorema 1.11, segue que a dimensão de $\nu_h(\text{crit } \nu_h)$ é no máximo $n - 2$.

Com as notações e propriedades descritas acima, temos:

Definição 2.2. *Seja t um valor regular da função $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos:*

i. a curvatura total absoluta de H_t :

$$|K|(t) := \int_{H_t} |k_t(x)| d\nu_{n-1}(x). \quad (2.2)$$

ii. a curvatura total de H_t :

$$K(t) := \int_{H_t} k_t(x) d\nu_{n-1}(x). \quad (2.3)$$

Onde $d\nu_{(n-1)}$ é a medida $(n-1)$ -dimensional Hausdorff em \mathbb{R}^n , veja Seção 1.2.

Com as noções acima, temos:

Definição 2.3 ([13]). Dada uma função semialgébrica $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a função curvatura total absoluta é definida por $t \mapsto |K|(t)$. Ou seja, é a curvatura total absoluta da fibra $h^{-1}(t)$. Analogamente definimos a função curvatura total.

2.2 Uma caracterização para as funções curvaturas

O objetivo desta seção é provar uma caracterização das funções curvaturas definidas na Seção 2.1.

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície semialgébrica orientável, conexa e de classe C^2 . Considere sua orientação dada pela aplicação semialgébrica:

$$\nu_M: M \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}. \quad (2.4)$$

Para cada $x \in M$, denotamos por $d\nu_x: T_x M \rightarrow T_{\nu(x)} \mathbb{S}^{n-1}$ a diferencial de ν . A curvatura gaussiana de M em x é definida como sendo

$$k_M(x) := \det(d\nu_x). \quad (2.5)$$

Pelo Teorema de Hardt [15] e o Teorema 9.3.2 [2], existe um conjunto semialgébrico $J \subset \mathbb{S}^{n-1}$, com $\dim J \leq n-2$, tal que $\nu_M: M \setminus \nu_M^{-1}(\nu_M(\text{crit } \nu_M) \cup J) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \setminus (\nu_M(\text{crit } \nu_M) \cup J)$ é uma aplicação de recobrimento. Denotamos $\mathcal{U} := \nu_M(M) \setminus (\nu_M(\text{crit } \nu_M) \cup J)$. Temos que \mathcal{U} é um conjunto semialgébrico e aberto. Além disso, temos que $\nu_M^{-1}(u)$ é finito ou vazio, $u \in \mathcal{U}$. Quando $\mathcal{U} \neq \emptyset$, segue pelo Teorema 1.13 que $\#\nu_M^{-1}(u) \leq n_M$, para $u \in \mathcal{U}$.

Denotamos por d o número de componentes conexas de \mathcal{U} . Logo, \mathcal{U} é a união finita de subconjuntos semialgébricos U_i com $i = 1, \dots, d$. Considere então $M_i = \nu_M^{-1}(U_i)$ que é um subconjunto semialgébrico de M . Por último denote por s_i o número de pontos na fibra para $u \in U_i$.

Proposição 2.4 ([13, Proposition 3.1]). Com as definições acima, temos:

$$\int_M |k_M(x)| d\nu_{n-1}(x) = \sum_i s_i \text{vol}_{n-1}(U_i).$$

Demonstração. Se o posto da diferencial de ν_M é no máximo $n-2$, segue que $\text{crit } \nu_M = M$ e, conseqüentemente, $k_M(x) = 0$, para cada $x \in M$. Por outro lado, temos $\mathcal{U} = \emptyset$ e portanto a soma dos volumes é zero.

Suponha então que existe um ponto de M onde a diferencial de ν_M tem posto $n-1$. Denotemos por $J(\nu_h)$ o Jacobiano da função ν_h .

Como a diferencial da função ν_M é de posto máximo, o conjunto dos valores críticos de ν_M , ou seja $\nu_M(\text{crit } \nu_M)$, tem codimensão maior ou igual a um em \mathbb{S}^{n-1} . Como cada U_i é aberto, por definição, e ν_M é uma função contínua, então cada M_i é aberto em M .

Assuma primeiro que cada componente conexa de M_i é simplesmente conexa. Note que podemos assumir esse fato já que pelo Teorema 1.8, existem subconjuntos fechados N_i de M_i de dimensão no máximo $n-2$ tais que cada componente conexa de $M_i \setminus N_i$ é simplesmente conexa. Então a prova é análoga com $\nu_M(M_i \setminus N_i)$ ao invés de U_i .

Logo, M_i tem s_i componentes conexas. Ou seja, $M_i = M_i^{(1)} \cup \dots \cup M_i^{(s_i)}$ e ν_M induz um difeomorfismo de $M_i^{(j)}$ sobre U_i , para cada $j = 1, \dots, s_i$.

Portanto, fazendo uma “mudança de variáveis”, temos

$$\text{vol}_{n-1}(U_i) = \int_{U_i} dv_{n-1} = \int_{M_i^{(j)}} J(\nu_M(x)) dv_{n-1}(x),$$

para cada j . Dessa forma

$$\int_{M_i} J(\nu_M(x)) dv_{n-1}(x) = s_i \text{vol}_{n-1}(U_i).$$

Seja M^* definido por $M \setminus (\cup_i M_i)$, pelas propriedades de conjuntos semialg\u00e9bricos temos que M^* \u00e9 semialg\u00e9brico. Al\u00e9m disso como $\nu_M(M^*)$ tem dimens\u00e3o no m\u00e1ximo $n - 2$ (veja Teorema 1.11 e propriedade de J), temos que $M = M^* \cup (\cup_i M_i)$ e $\text{vol } M^* = 0$. Desse modo

$$\int_{M^*} J(\nu_M(x)) dv_{n-1}(x) = 0.$$

Ent\u00e3o

$$|K|_M = \int_M J(\nu_M(x)) dv_{n-1}(x) = \sum_i \int_{M_i} J(\nu_M(x)) dv_{n-1}(x),$$

como quer\u00edamos. \(\square\)

Para cada $i = 1, \dots, m$, considere $\sigma_i^+ = \#(\nu_M^{-1}(u) \cap \{k_M > 0\})$ e $\sigma_i^- = \#(\nu_M^{-1}(u) \cap \{k_M < 0\})$, para cada $u \in U_i$. Como esses n\u00fameros s\u00f3 dependem de U_i , ent\u00e3o $s_i = \sigma_i^+ + \sigma_i^-$ e portanto

$$|K|_M = \sum_i^{n_M} (\sigma_i^+ + \sigma_i^-) \text{vol}_{n-1}(U_i). \quad (2.6)$$

Denote $\sigma_i = \sigma_i^+ - \sigma_i^-$. Note que $\sigma_i = \text{deg}_u \nu_M = \text{deg}(\nu_M|_{\nu_M^{-1}(U_i)})$ o n\u00famero na fibra sobre qualquer $u \in U_i$.

Proposi\u00e7\u00e3o 2.5 ([13, Proposition 3.2]). *Com as defini\u00e7\u00f5es acima, temos:*

$$\int_M k_M(x) dv_{n-1}(x) = \sum_i^{n_M} \sigma_i \text{vol}_{n-1}(U_i).$$

Demonstra\u00e7\u00e3o. A prova desta proposi\u00e7\u00e3o \u00e9 an\u00e1loga \u00e0 prova da Proposi\u00e7\u00e3o 2.4. Mas neste caso, como o Jacobiano pode trocar de sinal, deve-se levar isso em conta. \(\square\)

Considere agora $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma fun\u00e7\u00e3o semialg\u00e9brica, t uma valor regular e H_t como definido em 2.2. Tendo em conta as Defini\u00e7\u00f5es 2.1 e 2.2, quando

$$M = H_t \implies \nu_M = \nu_{H_t} = \nu_t.$$

Desta forma, temos as interpreta\u00e7\u00f5es geom\u00e9tricas apresentadas acima para as fun\u00e7\u00f5es curvaturas da se\u00e7\u00e3o anterior, sendo que neste trabalho consideramos ν_M como a restri\u00e7\u00e3o de ν_h \u00e0 fibra $h^{-1}(t)$, para $t \in \mathbb{R}$.

Nosso objetivo agora \u00e9 demonstrar a Proposi\u00e7\u00e3o 2.10 que relaciona a continuidade da fun\u00e7\u00e3o curvatura total absoluta com uma condi\u00e7\u00e3o geom\u00e9trica. Para isto, apresentamos as Proposi\u00e7\u00f5es 2.4 e 2.5 e alguns lemas t\u00e9cnicos. Come\u00e7amos fixando algumas notações.

Definição 2.6. *Seja $\phi_h: \mathbb{R}^n \setminus (\text{crit } \nu_h \cup \text{crit } h) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ definida por $\phi_h(x) = (\nu_h(x), h(x))$. Denotamos*

- i. $\mathcal{U}' = \phi_h(\mathbb{R}^n \setminus (\text{crit } h \cup \text{crit } \nu_h))$;
- ii. $\mathcal{U}'_k = \{(u, t) \in \mathcal{U}'; \#\phi_h^{-1}(u, t) = k\}$;
- iii. $\mathcal{U}_t = \{u \in \mathbb{S}^{n-1}; (u, t) \in \mathcal{U}'\}$;
- iv. $\mathcal{U}_{k,t} = \{u \in \mathbb{S}^{n-1}; (u, t) \in \mathcal{U}'_k\}$.

Temos:

Lema 2.7 ([13, Corollary 6.1]). *Dado um valor regular c da função $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, os seguintes limites existem*

$$\lim_{t \rightarrow c^-} K(t), \lim_{t \rightarrow c^+} K(t), \lim_{t \rightarrow c^-} |K|(t), \text{ e } \lim_{t \rightarrow c^+} |K|(t).$$

A seguir apresentamos uma das caracterizações que Grandjean utiliza para demonstrar a Proposição 2.10. Antes, sejam $t \notin h(\text{crit } h)$ e H_t como na Definição 2.2. Considere U_i , $i \in I$, as componentes conexas de H_t . Então

$$|K|(t) = \sum_i |K|_{U_i}. \quad (2.7)$$

Para $k, l = 1, \dots, n_h$ inteiros, $*$ = + ou $*$ = - e c um valor regular da função $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Denotemos

- i. \mathcal{V}_c^* o limite de Hausdorff $\lim_{t \rightarrow c^*} \overline{(\mathcal{U}_t)}$;
- ii. \mathcal{V}_k^* o limite de Hausdorff de $\lim_{t \rightarrow c^*} \overline{(\mathcal{U}_{k,t})}$;

$$\text{iii. } \mathcal{V}_{k,l} = \begin{cases} \mathcal{V}_k^- \cap \mathcal{V}_l^+, & \text{se } k, l \neq 0 \\ \mathcal{V}_k^- \cap \mathcal{V}_c^+, & \text{se } k \neq 0, l = 0 \\ \mathcal{V}_c^- \cap \mathcal{V}_l^+, & \text{se } k = 0, l \neq 0 \\ \emptyset, & \text{se } k = l = 0. \end{cases}$$

Desta forma, podemos escrever $\mathcal{V}_c^- \cap \mathcal{V}_c^+$ como $\bigcup_{0 \leq k, l \leq n_h} \mathcal{V}_{k,l}$.

Temos os seguintes resultados técnicos que serão utilizados nos próximos capítulos:

Lema 2.8 ([13, Corollary 5.3]). *Seja c um valor regular de $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{U}_c \neq \emptyset$, então $\mathcal{U}_c \subset \mathcal{V}_c^- \cap \mathcal{V}_c^+$.*

Lema 2.9 ([13, Corollary 6.3]). *Se $|K|$ é contínua em c , então*

- i. *para cada par k, l com k diferente de l , temos $\text{vol}_{n-1}(\mathcal{V}_{k,l}) = 0$, ou equivalentemente $\mathcal{V}_{k,l}$ tem dimensão menor ou igual a $n - 2$.*
- ii. *para cada k e cada $*$ = +, -, $\text{vol}_{n-1}(\mathcal{V}_k^*) = \text{vol}_{n-1}(\mathcal{U}_{k,c})$.*

Temos a seguinte relação geométrica com a continuidade de $|K|$:

Proposição 2.10 ([13, Proposition 6.8]). *Seja c um valor regular de h onde a função $|K|$ não é contínua. Então existem um aberto $U \subset \mathbb{S}^{n-1}$, tal que para todo $u \in U$ existe uma componente conexa Γ de $\Gamma_u^+(h) = \phi_h^{-1}(\{u\} \times \mathbb{R})$ tal que $\Gamma \cap h^{-1}(c)$ é vazio e acontece uma das situações a seguir.*

- i. Se c é o ínfimo de h em Γ , então para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\Gamma \cap h^{-1}(]c, c + \varepsilon[)$ não é limitado.
- ii. Se c é o supremo de h em Γ , então para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\Gamma \cap h^{-1}(]c - \varepsilon, c[)$ não é limitado.

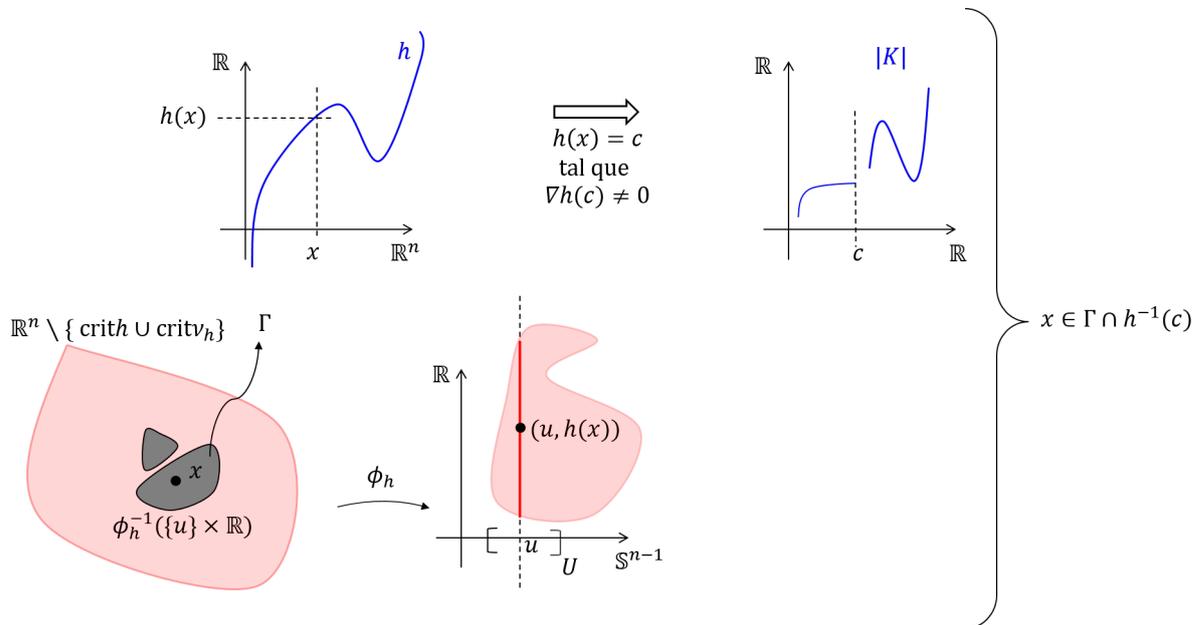


Figura 2.1: Proposição 2.10.

Demonstração. Pelo Lema 2.7 temos que $\lim_{t \rightarrow c^-} |K|(t)$ existe. Suponha então que $\lim_{t \rightarrow c^-} |K|(t) \neq |K|(c)$, ou seja que a função curvatura não é contínua em c . Assuma primeiro que $\lim_{t \rightarrow c^-} |K|(t) > |K|(c)$, para o outro caso a demonstração é análoga. Seja \mathcal{U}_c como na Definição 2.6. Como \mathcal{U}_c é semialgébrico temos que $\mathcal{U}_c = \cup_{i=1}^{d_c} U_i$, onde U_i , $i = 1, \dots, d_c$, são as componentes conexas semialgébricas de \mathcal{U}_c . Para cada i , temos que $\mathcal{U}'_{s_i} = \{(u, t) \in \mathcal{U}' ; \# \phi_h^{-1}(u, t) = s_i\}$. Assim

$$\mathcal{U}_{s_i, c} = \{u \in \mathbb{S}^{n-1}; (u, c) \in \mathcal{U}'_{s_i}\} = \{u \in \mathbb{S}^{n-1}; \# \phi_h^{-1}(u, c) = s_i\}.$$

Desse modo $(u, c) \in \mathcal{U}'$. Portanto, para cada i temos $U_i \subset \mathcal{U}_{s_i, c}$. Segue de (2.7) que $|K|(t) = \sum_{i=1}^{d_t} |K|_{U_i}$, e pelas Proposições 2.4 e 2.5 segue que

$$|K|(t) = \sum_{i=1}^{n_h} s_i \text{vol}_{n-1}(U_i).$$

Tomando $l = s_i$ e pelo exposto anteriormente, temos que $|K|(t) = \sum_{l=1}^{n_h} l \text{vol}_{n-1}(\mathcal{U}_{l, t})$. Passando limite nos dois lados da igualdade e usando a definição de \mathcal{V}_l^- , segue que

$$\lim_{t \rightarrow c^-} |K|(t) = \sum_{l=1}^{n_h} l \text{vol}_{n-1}(\mathcal{V}_l^-).$$

Como U_i está contido em $\mathcal{U}_{s_i, c}$, para cada $i = 1, \dots, d_c$, existe um inteiro positivo $l_i \geq s_i$, tal que $U_i \subset \mathcal{V}_{l_i}^-$. Como estamos analisando quando a função curvatura total absoluta não é contínua em c temos que acontece um e apenas um dos casos seguintes

Caso 1: existem $i \in \{1, \dots, d_c\}$ tais que $l_i > s_i$

Caso 2: existem $i \in \{1, \dots, d_c\}$ tais que $\text{vol}_{n-1} \mathcal{V}_{l_i}^- > \text{vol}_{n-1}(U_i)$.

Assuma que o Caso 1 contribui com a descontinuidade de $|K|$ em c . Então para cada $u \in U_i$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\Gamma_u^+(h) \cap h^{-1}(]c - \varepsilon, c + \varepsilon]) = \phi_h^{-1}(\{u\} \times \mathbb{R}) \cap h^{-1}(]c - \varepsilon, c + \varepsilon])$$

tem $m_i \geq l_i$, componentes conexas G_1, \dots, G_{m_i} tais que

$$\begin{cases} h(G_j) =]c - \varepsilon, c + \varepsilon[, & \text{se } j = 1, \dots, s_i \\ h(G_j) =]c - \varepsilon, c[, & \text{se } j = s_i + 1, \dots, l_i \end{cases}$$

Note que para $h(G_j) =]c, c + \varepsilon[$ pode ter de s_i componentes conexas até m_i . Mas esse caso não interessa na demonstração já que estamos analisando o limite à esquerda de c .

Seja $j \in \{s_i + 1, \dots, l_i\}$. Se G_j for limitado, seu fecho em \mathbb{R}^n seria $\overline{G_j} = G_j \cup \{x_{c-\varepsilon}, x_c\}$, onde $x_{c-\varepsilon} \in H_{c-\varepsilon}$ e $x_c \in H_c$. Como c é um valor regular e $\nu_h(x) = \frac{\nabla h(x)}{|\nabla h(x)|}$, isso significaria que $\nabla h(x_c) = u|\nabla h(x_c)|$. Esse u é um valor regular de $\nu_h|_{h^{-1}(]c-\varepsilon, c+\varepsilon])}$, portanto G_j poderia ser estendido para $\{h > c\}$ para uma curva regular através de x_c , o que contradiz $h(G_j) =]c - \varepsilon, c[$. Desse modo temos que G_j nunca encontra $h^{-1}(c)$. Para o Caso 2 a prova é análoga. \square

Para finalizar o capítulo temos o seguinte resultado sobre os pontos de descontinuidade da função curvatura.

Teorema 2.11 ([13]). *Seja $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semialgébrica C^l com $l \geq 2$.*

- i. *A função $t \rightarrow |K|(t)$ tem uma quantidade finita de descontinuidades.*
- ii. *Se a função $t \rightarrow |K|(t)$ é contínua em um valor regular c então a função curvatura total, $t \rightarrow K(t)$, também é contínua em c .*

A volta do item ii.] não vale, veja [[13]] para mais informação.

Capítulo 3

Fibrado conormal e valores de bifurcação

3.1 Geometria conormal.

Além da função curvatura total absoluta, outro conceito principal neste trabalho é a condição **SISI**, que será apresentada no Capítulo 4. A condição SISI está relacionada à noção de fibrado conormal relativo de uma função, que apresentaremos nesse capítulo.

Denotemos por \mathbb{P}^n o espaço projetivo real de dimensão n e por $G(p, n)$ a variedade Grassmanniana real de dimensão $p(n - p)$ de \mathbb{R}^n .

Definição 3.1. *Seja $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. O fibrado projetivo conormal relativo da função h é o subconjunto \mathbb{P}_h de $\mathbb{P}^n \times G(n - 1, n) \times \mathbb{R}$ definido como o fecho do conjunto*

$$\{(x, H, t) \in (\mathbb{R}^n \setminus \text{crit } h) \times G(n - 1, n) \times \mathbb{R}; T_x h = H, t = h(x)\},$$

onde $T_x h = T_x(h^{-1}(h(x)))$.

A partir da definição de fibrado conormal relativo, podemos obter outros conjuntos que são usados para definir a condição **SISI**. Vejamos a seguir.

Sejam $(\pi_h, \tau_h, t_h): \mathbb{P}_h \rightarrow \mathbb{P}^n \times G(n - 1, n) \times \mathbb{R}$ as respectivas projeções dos fatores de $\mathbb{P}^n \times G(n - 1, n) \times \mathbb{R}$, ou seja,

$$\pi_h(x, H, t) = x, \tag{3.1}$$

$$\tau_h(x, H, t) = H, \tag{3.2}$$

$$t_h(x, H, t) = t. \tag{3.3}$$

Definição 3.2. *Com as definições acima, o conjunto $(\pi_h, \tau_h)(\mathbb{P}_h)$ é chamado de espaço conormal relativo da função h .*

Denote

$$\mathbb{P}_h^\infty = \mathbb{P}_h \cap (\mathbb{H}^\infty \times G(n - 1, n) \times \mathbb{R}), \tag{3.4}$$

$$\mathbb{P}_t^\infty = \mathbb{P}_h \cap (\mathbb{H}^\infty \times G(n - 1, n) \times \{t\}), \tag{3.5}$$

onde \mathbb{H}^∞ é o hiperplano no infinito de \mathbb{P}^n . Com as definições acima, temos $\dim \mathbb{P}_h = n$, $\dim \mathbb{P}_h^\infty \leq n - 1$ e $\dim \mathbb{P}_t^\infty \leq n - 1$.

Definimos os seguintes conjuntos $X_h := (\pi_h, t_h)(\mathbb{P}_h)$, que é o fecho projetivo do gráfico da função h , $X_h^\infty := (\pi_h, t_h)(\mathbb{P}_h^\infty) = X_h \cap (\mathbb{H}^\infty \times \mathbb{R})$. Temos $\dim X_h^\infty \leq n - 1$.

Se $(\lambda, t) \in X_h^\infty$, seja $\Omega_{\lambda, t} \subset G(n-1, n)$ tal que

$$\Omega_{\lambda, t} := \tau_h((\pi_h, t_h)^{-1}(\lambda, t)), \quad (3.6)$$

Por último, definimos $X_t^\infty := \pi_h(\mathbb{P}_t^\infty)$. Temos $X_t^\infty \subset \mathbb{H}^\infty$ e $\dim X_t^\infty \leq n-2$. A última desigualdade segue pelo fato de que se $h = h_0 + h_1 + \dots + h_d$, onde cada h_i é a parte homogênea de h de grau d , então $X_t^\infty \subset \{[0 : p_1 : \dots : p_n] \in \mathbb{H}^\infty \mid h_d(p_1, \dots, p_n) = 0\}$.

Estes dois últimos conjuntos são usados na definição da condição **SISI**.

Com as notações acima, temos o seguinte resultado:

Corolário 3.3. i. *O conjunto $\{t \in \mathbb{R}; \dim \mathbb{P}_t^\infty = n-1\}$ é finito.*

ii. *O conjunto $\{(\lambda, t) \in X_h^\infty; \dim \Omega_{\lambda, t} = n-1\}$ é finito.*

Demonstração. Considere a seguinte aplicação $t_h : \mathbb{P}_h^\infty \rightarrow \mathbb{R}$. Ou seja, a restrição de t_h ao conjunto \mathbb{P}_h^∞ . Como $\dim \mathbb{P}_h^\infty \leq n-1$, segue pelo Teorema 1.11 que o conjunto dos valores críticos da restrição de t_h ao conjunto \mathbb{P}_h^∞ é finito. Logo, para todo t não pertencente a esse conjunto finito, temos que $\dim t_h^{-1}(t) \leq n-2$. Por outro lado, segue das definições acima que $t_h^{-1}(t) = \mathbb{P}_t^\infty$, o que termina a prova do primeiro item. A prova do segundo item segue de forma análoga. \square

3.2 Valores de bifurcação e valores críticos assintóticos.

O Teorema 4.3 descreve o conjunto de valores de bifurcação para uma classe de funções polinomiais $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Nesta seção, descrevemos alguns resultados e definições relacionados ao conjunto de bifurcação de uma função polinomial.

Mais precisamente, na primeira parte da seção apresentamos o conjunto de valores críticos assintóticos que se relaciona com o conjunto de bifurcação através do Teorema 3.7 e com o conjunto $\Omega_{\lambda, c}$ através da Proposição 3.14. Além disso, apresentamos dois resultados, a Definição 3.9 e o Teorema 3.11.

Definição 3.4. *Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. O conjunto de bifurcação da função h , denotado por $B(h)$, é o menor subconjunto de \mathbb{R} de modo que para cada $c \notin B(h)$, existe uma vizinhança aberta U de c que não intercepta $B(h)$ e a restrição de h a $h^{-1}(U)$ induz uma fibração C^∞ sobre U .*

Ou seja, o conjunto de bifurcação de h é definido como sendo o menor subconjunto $B(h) \subset \mathbb{R}$ tal que $h : \mathbb{R}^n \setminus h^{-1}(B(h)) \rightarrow \mathbb{R} \setminus B(h)$ é uma fibração C^∞ localmente trivial. Além disso, este conjunto é composto pelos valores críticos e outros valores denominados valores de bifurcação de segundo tipo. Veja [24, Appendix. A1] para mais detalhes.

Relacionado ao conjunto de bifurcação, temos uma condição assintótica, chamada na literatura de condição de Malgrange (veja por exemplo [10, 17, 21, 23]) que fornece um controle sobre o conjunto de bifurcação, (veja Teorema 3.7). A seguir apresentamos esta condição.

Definição 3.5. *Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. A função h satisfaz a condição de Malgrange em $c \in \mathbb{R}$ se para cada $R \gg 1$ existem constantes positivas C e η tais que*

$$x \in \{y \in \mathbb{R}^n; |y| > R, |h(y) - c| < \eta\} \implies |x| \cdot |\nabla h(x)| > C.$$

Relacionado à condição de Malgrange, definimos a seguinte noção:

Definição 3.6. *Um valor $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico assintótico da função $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se a condição de Malgrange não é satisfeita em c . Ou seja, $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico assintótico de h se existe uma sequência $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de pontos de \mathbb{R}^n tal que*

- i. $\lim_{m \rightarrow \infty} |x_m| = \infty$,
- ii. $\lim_{m \rightarrow \infty} h(x_m) = c$,
- iii. $\lim_{x_m \rightarrow \infty} |x_m| \cdot |\nabla h(x_m)| = 0$.

O conjunto destes valores é denotado por $K_\infty(h)$. Além disso, para funções polinomiais, temos que esse conjunto é finito, veja por exemplo [8, Théorème 3.4.], [18, Main theorem].

Definimos então o conjunto dos valores críticos generalizados de h como sendo o conjunto $K(h) := h(\text{crit } h) \cup K_\infty(h)$. O Teorema 3.7 (veja por exemplo [8, 16, 21, 23, 25]) apresenta uma relação entre os conjuntos dos valores de bifurcação e dos pontos críticos generalizados.

Teorema 3.7. *Seja $h: \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}$ uma função semialgébrica C^1 ou um polinômio complexo. Então*

1. $K(h)$ é finito;
2. $B(h) \subset K(h)$.

O próximo exemplo, Exemplo 3.8, mostra que $B(h)$ pode estar contido propriamente em $K(h)$. Ou seja, podemos ter $B(h) \neq K(h)$.

Exemplo 3.8 ([22, Păunescu e Zaharia]). *Seja $h_{n,q}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a função polinomial definida por $h_{n,q}(x, y, z) = x - 3x^{2n+1}y^{2q} + 2x^{3n+1}y^{3q} + yz$, onde $n, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Em [22] é mostrado que a condição de Malgrange é satisfeita para qualquer valor regular $c \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $n \leq q$. Logo, considerando $n = 2$ e $q = 1$, temos $h_{2,1}(x, y, z) = x - 3x^5y^2 + 2x^7y^3 + yz$ e apresentaremos as contas de [22] que mostram que $0 \in K_\infty(h_{2,1})$. Temos:*

$$\nabla h_{2,1} = (1 - 15x^4y^2 + 14x^6y^3, -6x^5y + 6x^7y^2 + z, y).$$

Seja a sequência $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} = (m, m^{-2}, 0)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$. Temos:

- i. $\lim_{m \rightarrow \infty} |x_m| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{m^2 + m^{-4} + 0} = \infty$;
- ii. $\lim_{m \rightarrow \infty} h_{2,1}(x_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} m - 3m^5m^{-4} + 2m^7m^{-6} + 0 = 0$;
- iii. $\nabla h_{2,1}(m, m^{-2}, 0) = (1 - 15m^4m^{-4} + 14m^6m^{-6}, -6m^5m^{-2} + 6m^7m^{-4}, m^{-2}) = (0, 0, m^{-2})$
logo
 $\lim_{m \rightarrow \infty} |(m, m^{-2}, 0)| \cdot |(0, 0, m^{-2})| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{m^{-4}(m^2 + m^{-4})} = 0$

Logo 0 é um valor assintótico de $h_{2,1}$, isto é, $0 \in K_\infty(h_{2,1})$. Ou seja, a condição de Malgrange não é satisfeita em 0. Mas $B(h_{2,1}) = \emptyset$, pois $h_{2,1}$ é uma componente de um difeomorfismo de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 .

O próximo objetivo do capítulo é apresentar a Proposição 3.14. Antes, apresentamos a Definição 3.9 e o Teorema 3.11.

Definição 3.9. *Seja $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Considere $\nabla h(x)$ o gradiente de h no ponto x . Em um sistema de coordenadas ortogonal consideramos a decomposição do vetor gradiente em duas componentes ortogonais, a parte radial $\partial_r h$ e a parte esférica $\nabla' h$ definidas por*

$$\partial_r h(x) = \frac{\langle \nabla h, x \rangle}{|x|^2} x \tag{3.7}$$

e

$$\nabla' h(x) = \nabla h(x) - \partial_r h(x). \tag{3.8}$$

Geometricamente isto quer dizer que o vetor gradiente é decomposto em uma soma de dois vetores. Um deles, a parte radial, é o vetor perpendicular ao espaço tangente da esfera de dimensão n no ponto $\frac{x}{|x|}$. O outro, a parte esférica, é um vetor que pertence ao espaço tangente à esfera no ponto $\frac{x}{|x|}$.

Exemplo 3.10. Considere $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = x(xy - 1)$. Temos $\nabla h = (2xy - 1, x^2)$ e as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\partial_r h(x, y) &= \frac{\langle (2xy - 1, x^2), (x, y) \rangle}{x^2 + y^2}(x, y) = \frac{3x^2y - x}{x^2 + y^2}(x, y) \\ \nabla' h(x, y) &= (2xy - 1, x^2) - \frac{3x^2y - x}{x^2 + y^2}(x, y) = \left(\frac{2xy^3 - x^3y - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{x^4 - 2x^2y^2 - xy}{x^2 + y^2} \right).\end{aligned}$$

De (3.7) temos que

$$|\partial_r h(x)| = \frac{|\langle \nabla h, x \rangle|}{|x|^2} |x| = \frac{|\langle \nabla h, x \rangle|}{|x|}. \quad (3.9)$$

Dados $a < b$ dois números reais, considere $\nu_{a,b}:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ a função semialgébrica definida por

$$\nu_{a,b}(r) := \max \left\{ \frac{|\partial_r h(x)|}{|\nabla h(x)|}; x \in h^{-1}([a, b]) \cap \mathbb{S}_r^{n-1} \right\}. \quad (3.10)$$

Considere ν_c como o $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_{c-\varepsilon, c+\varepsilon}$ a qual é também uma função semialgébrica.

Teorema 3.11 ([10, Proposition 3.1.]). *Sejam $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial e c um valor de h . Então existe uma função semialgébrica*

$$\theta_c:]0, \varepsilon_c[\rightarrow]0, +\infty[$$

tal que

- i. existe uma constante $A > 0$ tal que $\forall t \in]0, \varepsilon_c[, \theta_c(t) \geq At$.
- ii. $|x| \gg 1$ e $|h(x) - c| < \varepsilon_c \implies |x| \cdot |\nabla h(x)| \geq \theta_c(|h(x) - c|)$.
- iii. Se ϕ é outra função semialgébrica distinta de θ_c que satisfaz i e ii, então existe $0 < \varepsilon < \varepsilon_c$ tal que $0 < \phi(t) < \theta_c(t)$ para todo $t \in]0, \varepsilon[$.

O Lema 3.12 relaciona a função $\nu_{c-\varepsilon, c+\varepsilon}$ com o conjunto $K(h)$, veja [14, Lemma 5.6].

Lema 3.12. *Se $[a, b] \cap K(h) = \emptyset$, então $\nu_{a,b}(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow +\infty$.*

Demonstração. Como por hipótese temos que $[a, b] \cap K(h) = \emptyset$, segue que os pontos desse intervalo satisfazem a condição de Malgrange. Desse modo existe uma constante positiva C tal que para R suficientemente grande, $|x| \cdot |\nabla h| \geq C$ com $x \in h^{-1}([a, b]) \setminus \overline{B(0, R)}$. Além disso, da Equação 3.9 segue que

$$\nu_{a,b}(r) = \max \frac{|\partial_r h|}{|\nabla h|} = \max \frac{|\langle \nabla h, x \rangle|}{|x| |\nabla h|} \leq \max \frac{|\langle \nabla h, x \rangle|}{C}.$$

Suponha então que existe uma constante positiva A tal que $\nu_{a,b}(r) > 2A$ para r suficientemente grande.

Pelo Lema 1.12, e reparametrizando se necessário (veja por exemplo [18, Lemma 3.4]), isto ocorre ao longo de uma parametrização semialgébrica $\alpha: [-\varepsilon, 0] \rightarrow h^{-1}([a, b]) \setminus \overline{B(0, R)}$, tal que $h \circ \alpha(s) = s + b$, $|\alpha(s)| \rightarrow +\infty$ e $|\alpha'(s)| \rightarrow 1$, quando s converge para zero, e satisfaz $\nu_{a,b}(|\alpha'(s)|) \geq A$.

Como $h \circ \alpha(s) = s + b$, derivando com relação a s temos que $\langle \nabla h(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 1$, o que implica que $\langle \nabla h(\alpha), \alpha' \rangle = 1$. Além disso, quando $s \rightarrow 0$ segue que

$$\lim \frac{\alpha(s)}{|\alpha(s)|} = \lim \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|} = \lim \alpha'(s). \quad (3.11)$$

Logo, da Equação 3.9, $|\partial_r h| \cdot |\alpha'| \rightarrow 1$ e conseqüentemente $|\alpha'| \rightarrow \frac{1}{|\partial_r h|}$. Dessa forma, podemos supor

$$|\alpha'| \leq \frac{2}{|\partial_r h|}. \quad (3.12)$$

Como $\nu_{a,b} > A \implies \frac{|\partial_r h|}{|\nabla h|} > A$, segue que

$$\frac{1}{|\partial_r h|} \leq \frac{1}{A|\nabla h|} \quad (3.13)$$

Além disso, como

$$|x| \cdot |\nabla h| \geq C \implies \frac{|x|}{|x| \cdot |\nabla h|} \leq \frac{|x|}{C},$$

segue de (3.13) e da desigualdade acima que

$$\frac{1}{|\partial_r h|} \leq \frac{1}{A|\nabla h|} \leq \frac{|\alpha(s)|}{AC} \quad (3.14)$$

Multiplicando em ambos lado de (3.14) por $\frac{1}{|\alpha(s)|}$ e usando (3.12) temos

$$\frac{|\alpha'(s)|}{|\alpha(s)|} \leq \frac{2}{AC} \quad (3.15)$$

Logo integrando nos dois lados de (3.15) e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\ln(|\alpha(s)|) \leq \frac{2}{AC} \int_{-\varepsilon}^s dt + \ln(|\alpha(-\varepsilon)|) \quad (3.16)$$

Assim

$$|\alpha(s)| = e^{\ln(|\alpha(s)|)} \leq e^{\frac{2}{AC} \int_{-\varepsilon}^s dt + \ln(|\alpha(-\varepsilon)|)} = D.$$

Portanto

$$|\alpha(s)| \leq D, \quad (3.17)$$

com $D > 0$ independente de s , o que é uma contradição pois $|\alpha(s)| \rightarrow +\infty$ por hipótese. \square

Observação 3.13. Por [20, página 450] temos a seguinte relação entre a função ν e $B(h)$: se $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial e c um valor regular de h com $\nu_c < 1$, segue que $c \notin B(h)$.

Relacionado com a Seção 3.1 temos a Proposição 3.14 a qual associa um fenômeno geométrico, a dimensão de $\Omega_{\lambda,c}$, com a condição de valores críticos assintóticos.

Proposição 3.14. Seja c um valor regular de $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para o qual existe $\lambda \in \mathbb{H}^\infty$ tal que $\Omega_{\lambda,c}$ é de dimensão $n - 1$. Então $c \in K_\infty(h)$.

Demonstração. Lembrando que $X_h^\infty = (\pi_h, t_h)(\mathbb{P}_h^\infty) = X_h \cap (\mathbb{H}^\infty \times \mathbb{R})$, portanto X_h^∞ é semi-algébrico $\dim X_h^\infty \leq n - 1$. Além disso, se $(\lambda, t) \in X_h^\infty$, $\Omega_{\lambda,t} \subset G(n - 1, n)$ onde $\Omega_{\lambda,t} = \tau_h((\pi_h, t_h)^{-1}(\lambda, t))$. Como $\dim \Omega_{\lambda,c} = n - 1$, $\Omega_{\lambda,c}$ contém um subconjunto aberto de \mathbb{S}^{n-1} . Então existe um $u \in \Omega_{\lambda,c}$ tal que $\langle u, \lambda \rangle \neq 0$ e $(\lambda, u, c) \in \mathbb{P}_h^\infty$. Logo existe uma sequência $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim \frac{x_m}{|x_m|} = \lambda \quad e \quad \lim \phi_h(x_m) = \lim \left(\frac{\nabla h(x_m)}{|\nabla h(x_m)|}, h(x_m) \right) = (u, c).$$

Pela definição de $\nu_{a,b}(r)$ em 3.10, considerando $a = c - \varepsilon$ e $b = c + \varepsilon$, temos

$$\nu_{c-\varepsilon, c+\varepsilon} = \max \left\{ \frac{|\langle \nabla h, x \rangle|}{|x|} \cdot \frac{1}{|\nabla h|}; x \in h^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap \mathbb{S}_r^{n-1} \right\}.$$

Tomando $x = \{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ e para um r suficientemente grande temos

$$\frac{|\langle \nabla h, x \rangle|}{|x|} \cdot \frac{1}{|\nabla h|} = \left| \left\langle \frac{\nabla h}{|\nabla h|}, \frac{x}{|x|} \right\rangle \right| \rightarrow |\langle u, \lambda \rangle| > 0.$$

Desse modo acabamos de mostrar que $\nu_{c-\varepsilon, c+\varepsilon}$ não converge para zero e conseqüentemente pela contra positiva do Lema 3.12 temos que $[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \cap K(h) \neq \emptyset$. Como $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que $c \in K(h)$. Além disso, como c é um valor regular temos que $c \in K_\infty(h)$. \square

A recíproca deste resultado não é verdadeira no contexto real (veja por exemplo [10, Example 5.3]).

Capítulo 4

Teorema Principal

Parusiński em [21] provou que qualquer valor regular de um determinado polinômio complexo com singularidades isoladas no infinito em que a condição de Malgrange falha é um valor de bifurcação.

Como isto não necessariamente vai acontecer no caso real (veja Exemplo 4.8), Grandjean apresenta um resultado, o qual é conhecido como a versão real do resultado de Parusiński. Ele apresentou uma condição suficiente para trivializar a função h numa vizinhança do valor regular c que será expressa em termos da curvatura total absoluta.

4.1 Condição SISI

Definição 4.1 ([14]). *Sejam $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e c um valor regular de h . Dizemos que h tem singularidades fortemente isoladas no infinito em c se a seguinte condição é satisfeita: existe um subconjunto finito $\Lambda_c \subset G(1, n)$ tal que para cada direção $\lambda \in X_c^\infty \setminus \Lambda_c$ e para cada hiperplano $H \in \Omega_{\lambda, c}$, a direção λ está contido no $G(1, H)$, espaço grassmanniano das direções do hiperplano H .*

*Esta condição será chamada de condição **SISI***

Exemplo 4.2. *Considere $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = y(xy - 1)$ e $c = 0$.*

Vamos calcular X_0^∞ . Para isto fazemos a identificação do \mathbb{R}^2 no plano projetivo \mathbb{P}^2 associando cada ponto (x, y) com $[x : y : 1]$. Consideremos então a sequência $\{[x_m : y_m : 1]\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $[x_m : y_m : 1] \rightarrow \lambda \in \mathbb{H}^\infty$.

Para que isto aconteça $x_m \rightarrow \infty$ ou $y_m \rightarrow \infty$. Suponha que $x_m \rightarrow \infty$, então

$$h(x_m, y_m) \rightarrow 0 \iff x_m y_m \rightarrow 1 \iff y_m \rightarrow 0.$$

Portanto

$$[1 : 0 : 0] \in X_0^\infty.$$

Analogamente se $y_m \rightarrow \infty$ obtemos que $[0 : 1 : 0] \in X_0^\infty$.

*Desse modo $X_0^\infty = \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0]\}$ que é finito e portanto o valor regular 0 satisfaz a condição **SISI**.*

Mais geralmente para $n = 2$, a condição SISI é sempre verificada pois X_c^∞ é um conjunto finito para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

A seguir apresentamos o principal resultado da dissertação, resultado que Grandjean apresentou usando a condição **SISI** para estudo do conjunto dos valores de bifurcação.

Teorema 4.3 ([14]). *Seja $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial real. Suponha que a função h satisfaz a condição **SISI** em um valor regular c . Se a função $t \rightarrow |K|(t)$ for contínua em c , trivializamos h sobre uma vizinhança de c por meio do fluxo de um campo vetorial C^∞ . Então $c \notin B(h)$.*

4.2 Demonstração do Teorema 4.3, teorema principal do trabalho.

Para esta demonstração provaremos os Lemas 4.4, 4.5 e 4.6, fazendo algumas construções para chegar na Proposição 4.7, a qual nos garante a trivialização da função h em uma vizinhança do valor regular c .

Lema 4.4. *Seja $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial real. Suponha que a função h satisfaz a condição **SISI** em um valor regular c e a função $t \rightarrow |K|(t)$ é contínua em c . Então $\tau_h(\mathbb{P}_c^\infty)$ tem dimensão no máximo $n - 2$.*

Demonstração. Veja a demonstração da Proposição 2.10. Como por hipótese $|K|$ é contínua em c , segue pelo Lema 2.9 que $\cup_{\lambda \in X_c^\infty} \Omega_{\lambda, c}$ possui dimensão menor ou igual que $n - 2$. Como $\tau_h(\mathbb{P}_c^\infty) = \cup \Omega_{\lambda, c}$, o resultado segue. \square

Como antes, utilizaremos a identificação de \mathbb{R}^m como um subconjunto de \mathbb{P}^m para qualquer $m \geq 2$. Seja $X_c^\infty \subset \mathbb{H}^\infty \subset \mathbb{P}^n$. Consideramos $X_c^{\infty, +}$ como sendo a identificação de X_c^∞ em \mathbb{S}^{n-1} , que é um subconjunto semialgébrico com dimensão no máximo $n - 2$ pois $\dim X_c^\infty \leq n - 2$. Denotamos também por Λ_c^+ a identificação de Λ_c em \mathbb{S}^{n-1} .

Como $\dim X_c^{\infty, +} \leq n - 2$ e Λ_c^+ é um conjunto finito pela condição SISI, podemos assumir, a menos de uma mudança ortonormal de coordenadas em \mathbb{R}^n , que a interseção de cada eixo coordenado com a esfera unitária não encontra $X_c^{\infty, +}$ e que qualquer $u \in \Lambda_c^+$ não está em qualquer hiperplano coordenado. Ou seja, $u \notin \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \dots x_n = 0\}$.

Seja $\Delta = \{(\delta_1, \dots, \delta_n); \forall i, \delta_i > 0\}$. Denotando $Gl_n(\mathbb{R})$ como sendo o espaço de matrizes quadrada de ordem n invertíveis com entradas reais, mergulhamos Δ em $Gl_n(\mathbb{R})$ da seguinte forma: cada elemento de Δ é identificado com uma matriz diagonal, ou seja,

$$A = \begin{pmatrix} \delta_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \delta_i & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \delta_n \end{pmatrix}.$$

Com as definições acima, segue que Δ é difeomorfo à \mathbb{R}^n .

Para qualquer $A \in \Delta$, definimos a seguinte função semialgébrica:

$$g_A(x) = \langle A \cdot x, x \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad (4.1)$$

que é uma forma quadrática positiva definida. Além disso, g_A é uma submersão fora da origem e é uma função própria.

Para cada $u \in \Lambda_c^+$, definimos o seguinte conjunto semialgébrico de \mathbb{S}^{n-1} :

$$V(u) = \overline{\{v \in \mathbb{S}^{n-1}; v = \lim \nu_h(x) \text{ com } \lim |x| = +\infty, \lim x/|x| = u \text{ e } \lim h(x) = c\}}.$$

Logo, para cada $u \in \Lambda_c^+$, temos que $\dim V(u) \leq n - 2$ pelo Lema 4.4, como antes $\nu_h(x) := \frac{\nabla h(x)}{|\nabla h(x)|}$.

Seja

$$\Delta_0 = \{A \in \Delta; i \neq j \implies \delta_i \neq \delta_j\}. \quad (4.2)$$

Como $X_c^{\infty, +}$ não intercepta nenhum eixo coordenado, segue que cada $u \in X_c^{\infty, +}$ tem pelo menos duas coordenadas não nulas. Logo, u não é autovetor de qualquer que seja $A \in \Delta_0$. Com as definições e fatos acima, temos:

Lema 4.5. Para cada $A \in \Delta_0$, existem $\alpha, \beta \in]0, 1[$, $R > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que para cada $x \in h^{-1}(]c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \setminus \overline{B(0, R)}$, temos:

$$\alpha < \left\langle \frac{A \cdot x}{|A \cdot x|}, \frac{x}{|x|} \right\rangle < \beta. \quad (4.3)$$

Demonstração. Sejam $u \in X_c^{\infty,+} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ e $A \in \Delta_0$. Como u não é autovetor de A , $X_c^{\infty,+}$ é compacto e A é positiva, existem números positivos α_0 e β_0 tais que $\beta_0 < 1$ e vale:

$$\alpha_0 < \left\langle \frac{A \cdot u}{|A \cdot u|}, u \right\rangle < \beta_0. \quad (4.4)$$

Por outro lado, para qualquer $\delta > 0$ e pela definição de $X_c^{\infty,+}$, segue que se x possui norma grande suficiente e $h(x)$ próximo suficiente de c , então

$$\alpha_0 - \delta < \left\langle \frac{A \cdot x}{|A \cdot x|}, \frac{x}{|x|} \right\rangle < \beta_0 + \delta, \quad (4.5)$$

o que justifica a desigualdade desejada. \square

Seja $u \in \Lambda_c^+$. Como u não pertence a nenhum hiperplano coordenado, segue que cada coordenada de u é diferente de zero. Logo, o subconjunto $\Delta_0(u) = \{A \cdot u; A \in \Delta_0\}$ é um subconjunto semialgébrico aberto de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Seja $\rho: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ a projeção radial, a qual é uma aplicação suave semialgébrica. Logo $\rho(\Delta_0(u))$ é um subconjunto aberto de \mathbb{S}^{n-1} .

Por outro lado, temos que $\bigcup_{u \in \Lambda_c^+} \rho^{-1}(V(u))$ é um cone positivo semialgébrico de dimensão no máximo $n - 1$. Logo, existe um subconjunto semialgébrico Δ_1 aberto e denso em Δ tal que para $u \in \Lambda_c^+$ e qualquer $A \in \Delta_1$, temos que $\frac{A \cdot u}{|A \cdot u|} \notin V(u)$.

Dados $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $\eta > 0$, a vizinhança positiva canônica da reta positiva $\mathbb{R}_+ u$ de raio η é o conjunto

$$C^+(u, \eta) = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; |u - \rho(x)| < \eta\} \cup \{0\}. \quad (4.6)$$

Lema 4.6. Seja $A \in \Delta_1$. Existem $\gamma, \delta \in]0, 1[$, constantes $R > 0$ e $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ tais que para cada $x \in (h^{-1}(]c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap C^+(u, \eta)) \setminus \overline{B(0, R)}$, com $u \in \Lambda_c^+$, temos

$$-1 < -\gamma < \left\langle \frac{A \cdot x}{|A \cdot x|}, \frac{\nabla h(x)}{|\nabla h(x)|} \right\rangle < \delta < 1.$$

Demonstração. Como $A \in \Delta_1$ temos que, para $u \in \Lambda_c^+$, $\frac{A \cdot u}{|A \cdot u|} \notin V(u)$. Logo, existem $\eta_0 > 0$, γ_0 e δ_0 tais que se $w \in \mathbb{S}^{n-1}$ é tal que $|w - u| < \eta_0$, ou seja, $\rho^{-1}(w) \subset C^+(u, \eta_0)$, e se $v \in V(u)$, então:

$$-1 < -\gamma_0 < \left\langle \frac{A \cdot w}{|A \cdot w|}, v \right\rangle < \delta_0 < 1. \quad (4.7)$$

Pela definição de $V(u)$, que são limites da forma $\nu_h(x) = \frac{\nabla h(x)}{|\nabla h(x)|}$, e pela definição Λ_c^+ , segue a desigualdade desejada. \square

Consideramos o seguinte campo:

$$\nu_{g_A}(x) := \frac{\nabla g_A(x)}{|\nabla g_A(x)|} = \frac{A \cdot x}{|A \cdot x|}. \quad (4.8)$$

Segue dos Lemas 4.5 e 4.6, o seguinte resultado:

Proposição 4.7. Para cada $A \in \Delta_1$, existem $\alpha, \beta, \gamma \in]0, 1[$ e números positivos $R > 0$, $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$ tais que para cada $x \in h^{-1}(]c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \setminus \overline{B(0, R)}$, temos:

i. $\alpha|x| < \langle \nu_{g_A}(x), x \rangle < \beta|x|$,

ii. para cada $u \in \Lambda_c^+$ tal que $x \in C^+(u, \eta)$, $|\langle \nu_{g_A}(x), \nabla h(x) \rangle| < \gamma < 1$.

Demonstração. O primeiro item segue diretamente do Lema 4.5 e o segundo item segue do Lema 4.6. \square

Seja $A \in \Delta_1$ fixado. Considere R, ε como na proposição anterior. Definimos o seguinte campo vetorial:

$$\omega_A(x) = \nabla h(x) - \langle \nabla h(x), \nu_{g_A}(x) \rangle \nu_{g_A}(x). \quad (4.9)$$

Afirmção 1: $\omega_A(x) \neq 0$, $x \in h^{-1}(]c - \varepsilon, c + \varepsilon[) \setminus \overline{B(0, R)}$. De fato, para $|x|$ grande suficiente e $\frac{x}{|x|} \rightarrow u \in \Lambda_c^+$ segue do item ii. da Proposição 4.7. Para $|x|$ grande suficiente e $\frac{x}{|x|} \rightarrow u \in (X_c^{\infty,+} \setminus \Lambda_c^+)$ segue da condição SISI e do item i. da Proposição 4.7.

Afirmção 2: O campo ω_A é tangente aos níveis da função g_A , níveis estes que são conjuntos compactos.

$$\langle \nabla g_A, \omega_A \rangle = \langle \nabla g_A, \nabla h - \langle \nabla h, \nu_{g_A} \rangle \nu_{g_A} \rangle = \langle \nabla g_A, \nabla h \rangle - \langle \nabla g_A, \langle \nabla h, \nu_{g_A} \rangle \nu_{g_A} \rangle \quad (4.10)$$

Pela definição de ν_{g_A} temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla g_A, \omega_A \rangle &= \langle \nu_{g_A} |\nabla g_A|, \nabla h \rangle - \langle \nu_{g_A} |\nabla g_A|, \langle \nabla h, \nu_{g_A} \rangle \nu_{g_A} \rangle \\ &= \langle \nu_{g_A} |\nabla g_A|, \nabla h \rangle - \langle \nu_{g_A} |\nabla g_A|, \nabla h \rangle |\nu_{g_A}|^2 = 0, \end{aligned}$$

o que mostra a Afirmção 2.

Afirmção 3: O campo ω_A é transversal aos níveis da função h para $x \in h^{-1}(]c - \varepsilon, c + \varepsilon[) \setminus \overline{B(0, R)}$. De fato, temos que $\langle \omega_A(x), \nabla h(x) \rangle \neq 0$, para todo $x \in h^{-1}(]c - \varepsilon, c + \varepsilon[) \setminus \overline{B(0, R)}$. Do contrário, teríamos $\omega_A(x) = 0$ o que contradiria a Afirmção 1.

Afirmção 4: Seja δ o maior autovalor de A . O campo a seguir, trivializa a função h na vizinhança de c :

$$W(x) = \begin{cases} \frac{\nabla h(x)}{|\nabla h(x)|^2}; & g_A(x) \leq \delta R. \\ \frac{\omega_A(x)}{|\omega_A(x)|^2}; & g_A(x) \geq 2\delta R. \\ \chi(g_A(x)) \frac{\nabla h(x)}{|\nabla h(x)|^2} + [1 - \chi(g_A(x))] \frac{\omega_A(x)}{|\omega_A(x)|^2}; & g_A^{-1}(x) \in [\delta R, 2\delta R]. \end{cases} \quad (4.11)$$

onde $\chi: [\delta R, 2\delta R] \rightarrow [0, 1]$ é uma função suave estritamente decrescente tal que $\chi(\delta R) = 1$ e $\chi(2\delta R) = 0$, veja por exemplo [[19, Página 186]].

Utilizaremos o fluxo de W para produzir o difeomorfismo que provará que h é trivial em c . Se $p \in h^{-1}(c)$ e $\xi_p(t)$ é uma solução de

$$\begin{cases} W(\xi_p(t)) = \xi_p'(t), \\ p = \xi_p(c) \end{cases} \quad (4.12)$$

Então

i. $\{\xi_p(t); t \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\}$ não contém pontos da fronteira de $h^{-1}(]c - \varepsilon, c + \varepsilon[)$, pois $h(\xi_p(t)) = t$. De fato, pela definição W e como ξ_p é solução do campo W segue que $\frac{\partial h(\xi_p(t))}{\partial t} \equiv 1$.

ii. $\lim_{t \rightarrow b} \|\xi_p(t)\|$ não diverge para todo $b \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$. Isto segue da Afirmção 2 e pelo fato que g_A é própria. Mais precisamente, g_A é constante sobre $\xi_p(t)$.

Desse modo, ξ_p está definido para todo $t \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$. Logo pelo Teorema do Fluxo Local, [6, Teorema 4.0.4], temos que a aplicação

$$\phi: h^{-1}(c) \times]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\rightarrow h^{-1}(]c - \varepsilon, c + \varepsilon[), \quad (4.13)$$

definida por $\phi(p, t) = \xi_p(t)$ é um difeomorfismo. Além disso, temos que $h \circ \phi(p, t) = h(\xi_p(t)) = t$, o que mostra que h é uma fibração topológica local em c e concluí a prova.

Sem a hipótese sobre a continuidade da função de curvatura absoluta total, a conclusão do Teorema 4.3 ainda vale se exigirmos que $\tau_h(\mathbb{P}_c^\infty)$ seja um subconjunto fechado próprio de $G(n-1, n)$. Ou seja, de dimensão menor ou igual a $n-2$.

O Teorema 4.3 fornece uma condição suficiente, expressa em termos de curvatura absoluta total, uma vez especificado os pontos no infinito em que a curvatura pode se concentrar. Mas para um valor regular c que satisfaz a condição **SISI** e não seja um valor de bifurcação, a função curvatura total absoluta não necessariamente será contínua, conforme o próximo exemplo sugere.

Exemplo 4.8. Considere $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x, y) = -y(2x^2y^2 - 9xy + 12)$.

Temos que $\nabla h(x, y) = (-4xy^3 + 9y^2, -6x^2y^2 + 18xy - 12)$, logo qualquer valor c de h é regular. Como estamos com uma função polinomial em \mathbb{R}^2 sabemos que a condição **SISI** será satisfeita por qualquer valor regular. Em particular a condição **SISI** vale para o valor regular $c = 0$.

Além disso tomando $\{(n, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ temos que

i. $\lim_{n \rightarrow \infty} |(n, \frac{1}{n})| = \infty;$

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n, \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{5}{n} = 0;$

iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} |(n, \frac{1}{n})| \cdot |\nabla h(n, \frac{1}{n})| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n^4}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{n^2}\right) = 0,$

logo $0 \in K_\infty(h)$. Mas seguindo [[26, Example 3.4]] segue que 0 não é um valor de bifurcação. Além disso, de [14, Página 16], temos $\lim_{t \rightarrow 0} |K|(t) = 2\pi$ enquanto $|K|(0) = 0$, conseqüentemente a função curvatura total absoluta não é contínua em 0 .

Além disso, a contra positiva do Teorema do Grandjean é um resultado que contribui com o estudo de $|K|$ cujo cálculo não é tão simples. Já que calcular valores de bifurcação é relativamente simples e com eles podemos analisar a continuidade de $|K|$.

Referências Bibliográficas

- [1] Bierstone, E., Milman, P. D. (1988). *Semianalytic and subanalytic sets*. Publications Mathématiques de L'Institut des Hautes Scientifiques tome 67, p. 5-42. DOI: 10.1007/BF02699126
- [2] Bochnak, J., Coste, M., Marie-Françoise Roy. (1998). *Real Algebraic Geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [3] Bröcker, L. (1992). *Families of semialgebraic sets and limits*. Real algebraic (Rennes), Volume 1524 of Lecture Notes in Math., 145-162, Springer. DOI: 10.1007/BFb0084615
- [4] Broughton, A. S. (1988). *On the topology of polynomial hypersurfaces*. In Singularities, Part 1 (Arcata, Calif., 1981), volume 40 of Proc. Sympos. Pure Math., 167-178. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [5] Budge, G. F. (2013). *Real analysis modern techniques and their applications*. John Wiley e Sons Published, 2 edition.
- [6] Castro, A. A. J. (2009). *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA.
- [7] Craig, L. E., Gariepy, R. F. (1991). *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics, v. 5, CRC Press.
- [8] D'Acunto, D. (2000). *Valeurs critiques asymptotiques d'une fonction définissable dans une structure o-minimale*. Ann. Pol. Math. 35, 35-45.
- [9] D'Acunto, D. (2003). *Sur la topologie des fibres d'une fonction d'efinissable dans une structure o-minimale*. Comptes Rendus Mathematique Acad. Sci. Paris, v. 337, Issue 5, 327-330.
- [10] D'Acunto, D., Grandjean, V. (2005). *On gradient at infinity of semialgebraic functions*. Annales Polonici Mathematici, v. 87, 39-49. DOI: 10.4064/ap87-0-4
- [11] Ehresmann, Ch. (1950). *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*. Colloque de Topologie (espaces fibrés), Bruxelles, Georges Thone, Liège; Masson et Cie., Paris, 29-55.
- [12] Gibson, Ch. (2006). *Construction of Canonical Stratifications*. In: Topological Stability of Smooth Mappings. Lecture Notes in Mathematics, vol 552. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/BFb0095246
- [13] Grandjean, V. (2008). *On the Total Curvatures of a Tame Function*. Bull Braz Math Soc, New Series 39. DOI: 10.1007/s00574-008-0002-8
- [14] Grandjean, V. (2009). *Tame functions with strongly isolated singularities at infinity: a tame version of a Parusiński's theorem*. Geom Dedicata 140, 1-17. DOI: 10.1007/s10711-008-9311-8

- [15] Hardt, R. (1980). *Semi-Algebraic Local-Triviality in Semi-Algebraic Mappings*. American Journal of Mathematics, 102(2), 291-302. DOI: 10.2307/2374240
- [16] Huy, H. V., Lê, D. T. (1984). *Sur la topologie des polynômes complexes*. Acta Math. Vietnamica 9, 21-32. Zbl 0597.32005
- [17] Jelonek, Z., K. Kurdyka. (2003). *On asymptotic critical values of a complex polynomial*. Crelle's Journal 2003, 1-11. DOI: 10.1515/CRL.2003.101
- [18] Kurdyka, K., Orro, P., Simon, S. (2000). *Semialgebraic Sard Theorem for Generalized Critical Values*. Journal of Differential Geometry. 56, no. 1, 67-92. DOI: 10.4310/JDG/1090347525
- [19] Lima, E. (1973). *Varietades Diferenciáveis*. Instituto Matemática Pura e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas.
- [20] Loi, T. L., Zaharia, A. (1998). *Bifurcation sets of functions definable in o-minimal structures*. Illinois J. Math. 42(3), 449-457. DOI: 10.1215/ijm/1256044935
- [21] Parusiński, A. (1995). *On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity*. Compositio Mathematica, Tome 97 no. 3, 369-384.
- [22] Păunescu, L., Zaharia A. (1997). *On the Lojasiewicz exponent at infinity for polynomial functions*. Kodai Mathematical Journal 20, 269-274. DOI: 10.2996/KMJ/1138043796
- [23] Pham, F. (1983). *La descente des cols par les onglets de Lefschetz, avec vues sur Gauss-Manin*. Systèmes différentiels et singularités, Juin-Juillet, Astérisque 130, 11-47.
- [24] Pham, F. (1983). *Vanishing homologies and the n variable saddlepoint method*. In Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981), volume 40 of Proc. Sympos. Pure Math., 319-333. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [25] Tibăr, M. (1999). *Regularity at infinity of real and complex polynomial functions*. Singularity theory (Liverpool, 1996), The CTC Wall Anniversary Volume. London Math. Soc. Lecture Notes Series, v. 263, 249-264. DOI: 10.1017/CBO9780511569265.016
- [26] Tibăr, M., Zaharia, A. (1999). *Asymptotic behaviour of families of real curves*. Manuscripta mathematica, 99, 383-393. DOI: 10.1007/s002290050180